

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXIV

ВЫПУСК 5 (91)

Тула
2023

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru
URL: <http://www.chebsbornik.ru>

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)



Номер подготовлен при поддержке государственного задания на оказание государственных услуг (выполнение работ) на 2023 г. и плановый период 2023–2025 годов (приказ Минпросвещения России от 28 декабря 2022 г. № 1191) в целях организации и проведения Тульского научно-методического форума «Педагогическое образование: диалог с будущим».

СОДЕРЖАНИЕ

Том 24 Выпуск 5

И. Аллаков, Ф. Дераман, С. Х. Сапар, Ш. Исмаил. Об оценке сумм характеров с последовательностями Битти, связанными с составными модулями	5
И. Ш. Джаббаров, С. А. Мешаик, М. М. Исмаилова. О числе листов накрытий, определенных системами уравнений, определенных системами уравнений в n -мерных пространствах	16
А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$	31
И. Б. Казаков. Доказательство правила Лопиталья	49
А. Я. Канель-Белов, А. О. Сулейкин. Оценка распределения трещин по размерам и ориентациям по данным о следах трещин	70
И. А. Кульгускин. Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей	85
Ю. Ю. Линке. Оценивание функции среднего для зашумленного случайного процесса при наличии разреженных данных	112
Ф. И. Лобзин. Проверка обобщенной гипотезы Мищенко — Фоменко для алгебр Ли малой размерности	126
К. Г. Малютин, А. А. Наумова. Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге	136
А. Р. Рустанов, Г. В. Теплякова, С. В. Харитоновна. Приближенно трансасакиевые почти $C(\lambda)$ -многообразия	153
С. Ю. Соловьев. Про котангенс	167
П. Н. Сорокин. Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно	180
В. И. Субботин. О перечислении выпуклых RR -многогранников	194
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
А. Я. Канель-Белов, В. В. Павлова, В. О. Кирова. Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки	208
А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток	217
А. В. Родионов. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток	222
Д. К. Тухлиев. Неравенство типа Колмогорова в пространстве Бергмана B_2 и некоторые его приложения	228

В. Г. Чирский. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел	237
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ	
Д. Р. Бирюков. Использование МКЭ для решения задачи дифракции акустической волны на совокупности упругих анизотропных тел	244
В. В. Глаголев, В. В. Козлов, А. А. Маркин. Модель предразрушения слоя с вырезом на основе концепции дуги взаимодействия	256
Т. Д. Джураев, А. С. Джафаров, К. Б. Нуров, М. Т. Тошев. Закономерности изменения энергии взаимодействия индия с элементами периодической таблицы (ПТ) от их порядкового номера	266
Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины ...	274
Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы	289
Е. В. Манохин, Р. А. Жуков, И. В. Бормотов, И. В. Добрынина, Е. А. Назырова. Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца	307
Л. А. Толоконников. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости	320
Н. Д. Тутышкин. Моделирование деформационной повреждаемости металлов при деформациях пластического сжатия	331
А. Н. Чуканов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой. Морфология технологических несплошностей в структуре изделий аддитивного производства как причина анизотропии их физико-механических свойств	343
А. Н. Чуканов, А. Я. Канель-Белов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой, М. Ю. Моденов. Метод Оцу в оценке пористости и распределении структурных дефектов по изображению компьютерной томографии изделий SLM	357
РЕДКОЛЛЕГИЯ	373
THE EDITORIAL BOARD	377
TABLE OF CONTENTS	381

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.524

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-5-15

Об оценке сумм характеров с последовательностями Битти, связанными с составными модулями

И. Аллаков, Ф. Дераман, С. Х. Сапар, Ш. Исмаил

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г.Термез, Узбекистан).

iallakov@mail.ru

Фатана бинти Дераман — доктор физико-математических наук (аналитическая и структурная математика), Университет Малайзии Перлис (Перлис, Малайзия).

fatanah@unimap.edu.my

Сити Хасана бинти Сапар — доктор физико-математических наук, профессор, Университет Путра Малайзии (Серданг, Селангор; Малайзия).

sitihas@upm.edu.my

Шахрина бинти Исмаил — доктор физико-математических наук, Университет Саинс Ислам Малайзия (Негери-Сембилан Малайзия).

shahrinaismail@usim.edu.my

Аннотация

Неоднородные последовательности Битти играют важную роль в играх Витгофа и инвариантных играх, например, о том, как победить противника в играх Витгофа на трех фронтах, и придают свойства решению процедуры, опираясь только на несколько алгебраических тестов. В этой статье обсуждается мощность сумм характеров и их оценка относительно неоднородных последовательностей Битти $\beta_\alpha = [\alpha n + \beta : n = 1, 2, 3, \dots]$, где β действительные числа и α положительное является иррациональным. Чтобы оценить мощность, используется измерения количества равномерного распределения последовательностей Битти. При оценке дробной части последовательностей Битти используется известный принцип «ячейки». При этом, неравенства Коши применяются для разложения сумм двойных характеров. Затем оценка сумм двойных характеров получается путем применения свойств сумм аддитивных и мультипликативных характеров. Результат оценки в этом исследовании по составным модулям является более общим по сравнению с предыдущими исследованиями, которые проводились только по простым модулям.

Ключевые слова: Мощность, оценка, конечные группы, сумма характеров, аддитивный характеры, мультипликативный характеры, последовательность битти, теория чисел, принцип «ячейки», рациональное число, иррациональные числа.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

И. Аллаков, Ф. Дераман, С. Х. Сапар, Ш. Исмаил. Об оценке сумм характеров с последовательностями Битти, связанными с составными модулями // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 5–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.524

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-5-15

On cardinality of character sums with Beatty sequences associated with composite modules

I. Allakov, F. Deraman, S. H. Sapar, Sh. Ismail

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Fatanah binti Deraman — doctor of physical and mathematical sciences, Universiti Malaysia Perlis (Perlis, Malaysia).

e-mail: fatanah@unimap.edu.my

Siti Hasana binti Sapar — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Universiti Putra Malaysia

(UPM) (Serdang, Selangor; Malaysia).

e-mail: sitihass@upm.edu.my

Shahrina binti Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, University Sains Islam Malaysia (USIM) (Negeri Sembilan, Malaysia).

e-mail: shahrinaismail@usim.edu.my

Abstract

Non homogeneous Beatty sequences play important roles in Wythoff games and invariant games such as on how to beat your Wythoff games opponent on three fronts and give properties into a decision of the procedure relying only on a few algebraic tests. This paper discusses on the cardinality of character sums and their estimation with respect to non homogeneous Beatty sequences $\beta_\alpha = \lfloor \alpha n + \beta : n = 1, 2, 3, \dots \rfloor$ where β in real numbers and α greater than zero is irrational. In order to estimate the cardinality, the discrepancy is used to measure the number of uniform distribution for Beatty sequences. Pigeonhole principle is discussed on the estimation of the fractional part of Beatty sequences involve. Meanwhile, Cauchy inequalities is applied to expand the double character sums. Then, the cardinality of double character sums is obtained by applying the extension properties of additive and multiplicative character sums. The result obtained is depend on the existing of identity of additive and multiplicative character sums and the uniformly distribution modulo 1. The result of the estimation in this study over composite modules is more general compared to previous studies, which only cover prime modules.

Keywords: cardinality, estimation, finite groups, sum of characters, additive characters, multiplicative character, Beatty sequences, number theory, pigeonhole principle, rational number, irrational numbers.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

I. Allakov, F. Deraman, S. H. Sapar, Sh. Ismail, 2023, "On cardinality of character sums with Beatty sequences associated with composite modules", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 5–15.

1. Introduction

Beatty equences appear in various mathematics problems because of their versatility and arithmetic properties. There are two types of Beatty sequences which are homogeneous and nonhomogeneous cases. In this paper, non-homogeneous Beatty sequences are applied.

The sequences of integers $[\alpha n + \beta]$ where α, β be fixed reals numbers. All types o [1]-[3] and etc since the late 19th century. Nowadays, nonhomogeneous cases have been studied extensively by several authors such as [4]-[7] and etc.

In the game theory of Wythoff games, the properties of Fibonacci and Beatty sequences play important rules. Fraenkel [8] give some theory on how to beat your Wythoff games opponent on three fronts by applying Beatty sequences. In invariant game, Cassaigne et al. [9] apply Beatty sequences properties into a decision procedure relying only on a few algebraic tests.

The estimation on Beatty sequences is started in [10], [11] by using single character sums. The estimation of double character sums has been introduced by Friedlander [12] in the form of

$$\sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \chi(a + b)$$

In reference [4], the results on the size of the least quadratic non-residue of the nonhomogeneous case are improved and a new approach is introduced to obtain the bounds of character sums of Beatty sequences associated with prime numbers. Therefore, in this paper, the estimation of the cardinality associated with composite modules is obtained by extending the bound of double character sums [4].

Furthermore, there is a slight difference in the properties when compared to those associated with odd primes. The method used closely follows Bank et al. [4] because they have improved the bounds on the size of the least quadratic nonresidue. The result yields explicit bounds on the error term.

The properties of the character sums approach are capable to identify the number of solutions of equations over finite fields. In general, these sums can be formed by using the value of one or more characters.

The following results in Lidl et al. [13] discuss character sums associated with prime modulo. Let p is an odd prime number and \mathbb{F}_p^* be a multiplicative group, where \mathbb{F}_p^* is a cyclic subgroup of order $p - 1$. The following propositions are the properties of character sums associated with primes.

PROPOSITION 1.1 Let g be primitive elements of \mathbb{F}_p with order $p - 1$ and for each fixed integer of j , where $0 \leq j \leq p - 1$. Then, a multiplicative character of \mathbb{F}_p is

$$\chi_j(g^k) = e^{\frac{2\pi i j k}{p-1}} \quad \text{where } k = 0, 1, \dots, p - 1.$$

PROPOSITION 1.2 For additive character χ_a and χ_b where $a, b \in \mathbb{F}_p$. Then,

$$\sum_{c \in \mathbb{F}_p} \chi_a(c) \bar{\chi}_b(c) = \begin{cases} p + 1 & \text{if } a = b \\ 0 & \text{if } a \neq b. \end{cases}$$

For multiplicative character, if $a, b \in \mathbb{F}_p^*$, then

$$\sum_{\chi} \chi_c(a) \bar{\chi}_c(b) = \begin{cases} p & \text{if } a = b \\ 0 & \text{if } a \neq b, \end{cases}$$

where the sum is extended over all multiplicative character χ of \mathbb{F}_p and $\bar{\chi}_c(b)$ character associated with to character $\chi_c(b)$.

The properties of character sums over composite modules are obtained in [14].

Beatty sequences have been used to investigate the availability of each movement in invariant games. The game can be played anywhere inside the game board. By using Beatty sequences, a wider class of pairs of complementary sequences and a process of generalization the notion of a subtraction game can be obtained in [15]. The notations $U = O(V)$, $U \ll V$, and $V \gg U$ are applied equivalent to the assertion $|U| \leq cV$ for some constant $c > 0$. The constants symbols O , \gg and \ll may depend on the real number α . A function which tends to zero and depends only on α is denoted as $o(1)$. It is important to note that our bounds are uniform with respect to all of the other parameters, in particular, with respect to β .

Note that, the letters k , m , and n with or without subscripts are non-negative integers.

In this paper, non-homogeneous Beatty sequences with extended bounds of distributions associated with composite modules are considered. First, consider the sum of the form

$$S_m(\alpha, \beta, \chi; N) = \sum_{n \leq N} \chi(\lfloor \alpha n + \beta \rfloor), \quad (1)$$

where α is irrational and χ is a non-trivial multiplicative character modulo a composite number. We expect that the extended bounds of distributions on the cardinality of double character sums depend on the order of $\varphi(m)$. This result is more general cases compare to the prime case in previous studies.

2. PRELIMINARIES

In this section, a few related definitions and lemmas are listed. Let Q and \bar{Q} be the set of rational and irrational numbers, respectively, i.e. $Q \cup \bar{Q} = \mathbb{Q}$ is the set of real numbers. Let $k \leq N$, N be a natural number and $\Delta \in (0, 1]$ be a rational number. Suppose that $\gamma \in \mathbb{Q}$. Then, we will obtain the following fractional part:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\gamma &= \{1 \leq n \leq N : \{\alpha n + \beta - \gamma\} < 1 - \Delta\}, \\ \mathcal{K}_\gamma &= \{1 \leq k \leq K : \{\alpha k + \gamma\} < \Delta\}, \\ \mathcal{N}_\gamma^c &= \{1, 2, 3, 5, 8, \dots, N\} \setminus \mathcal{N}_\gamma. \end{aligned}$$

Fix $\gamma \in \mathbb{Q}$, and the notation for the interval is as follows.

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_\gamma \quad \mathcal{N}^c = \mathcal{N}_\gamma^c \quad \text{and} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_\gamma.$$

The definition of homogeneous and non-homogeneous Beatty sequences are given as follows.

DEFINITION 2.1. Let $\alpha \in \bar{Q}$ and $n \in \mathbb{N}$. If $\alpha > 1$, then $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ is also an irrational number.

$\mathbf{B}_\alpha = [\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots$, $\mathbf{B}_\lambda = [\lambda], [2\lambda], [3\lambda], \dots$, satisfying the following condition $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} = 1$. The condition gives a pair of complimentary Beatty sequences.

DEFINITION 2.2. Let n be a positive integer and h be a real number. The non homogeneous Beatty sequences are defined by

$$\mathbf{B}_\alpha = [\alpha + h], [2\alpha + h], [3\alpha + h], \dots$$

The complement of non-homogeneous Beatty sequences is of the form

$$\mathbf{B}_\lambda = [\lambda + H], [2\lambda + H], [3\lambda + H], \dots$$

which satisfy

$$H = h(1 - \lambda) \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Non-homogeneous Beatty sequence considered in this study is the set of

$$\mathbf{B}_{\alpha,\beta} = \{\lfloor \alpha n + \beta \rfloor : n = 1, 2, 3, \dots\},$$

where α, β are real numbers.

Consider the functions of a real variable x implicitly ranging in the form $x \gg x_0$. Then, the following notations are defined.

$f(x) = O(g(x))$ is equivalent to $f(x) \ll g(x)$.

$h(x) \gg f(x)$ is applied equivalently to the assertion $|f(x)| \leq c \cdot h(x)$ for some constant $c > 0$.

The constants symbols O , \gg and \ll may be conditional on the real number α , but are otherwise absolute [16]. Moreover, $o(1)$ denotes a function that goes to zero and only depends on α . Non-negative integers are denoted by the letters k , m , and f , with or without subscripts. Next, the fractional part $\{x\}$ of a real number x is denoted in the definition as follows.

DEFINITION 2.3. Let x be a real number and $\lfloor x \rfloor$ be an integral part of x . Then, the fractional part is

$$\{x\} = \lfloor x \rfloor - x.$$

It is the greatest integer less than or equal to x , similar to the distance notation from the real number x , which is denoted by

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|.$$

As an example in Beatty sequences from Definition 3, if $\{\alpha n + \beta - \gamma < 1 - \Delta\}$ and $\{\alpha k + \gamma < \Delta\}$, where $n \in \mathcal{N}$ and $k \in \mathcal{K}$, respectively. Then, we have

$$\begin{aligned} \lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor &= \alpha(n+k) + \beta - \{\alpha(n+k) + \beta\} \\ &= (\alpha n + \beta - \gamma) + (\alpha k + \gamma) - \{\alpha n + \beta - \gamma\} - \{\alpha k + \gamma\} \\ &= (\alpha n + \beta - \gamma) - \{\alpha n + \beta - \gamma\} + (\alpha k + \gamma) - \{\alpha k + \gamma\} \\ &= \lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor. \end{aligned} \tag{2}$$

The following illustration describes the above expression (2) on the fractional part of Beatty sequences.

Let $n = 23$, $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1.1$, and $\gamma = 0.3$. Then, $\alpha n + \beta - \gamma = 19.3526$ and the fractional of $\{\alpha k + \gamma\} < 0.3628$. Suppose $k = 11$, then we will have

$$\lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor = \lfloor 59.6897 \rfloor = 59$$

$$\lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor = \lfloor 40.6372 \rfloor + \lfloor 19.3526 \rfloor = 59.$$

Thus, it satisfies (2). Additionally, we use the following notation: $\#A$ - cardinality set A , K - some natural number, $\Delta \in (0, 1]$ -rational numbers.

By applying equation (2) in equation (1), we obtained the following equation.

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(\lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor). \tag{3}$$

The sequence discrepancy is introduced as a quantity that measures the sequence's deviation from an ideal distribution. The following Definitions 2.4 and 2.5 define the sequence's discrepancy, D , and the uniform distribution modulo 1. Their examples can be obtained in [17].

DEFINITION 2.4. The discrepancy, D , is defined as

$$D = \sup_{I \subseteq [0,1)} \left| \frac{V(I, M)}{M} - |I| \right|,$$

where $V(I, M)$ is the cardinality of the set $\{1 \leq m \leq M : \gamma_m \in I\}$, $|I|$ is the length of I and the supremum is taken over all subintervals $I = (a, b)$ of the interval $[0, 1)$. For an ideal distribution of sequences, the discrepancy can measure the number of uniform distribution sequences. The discrepancy, D of M sequences is not necessarily distinct since $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M\} \in [0, 1)$ are real numbers.

DEFINITION 2.5. Let $w = x_n$ be a sequence of a real number and $A(E; N; w)$ is denoted by the number of terms in $x_n \in E$. The sequences w is said to be uniformly distributed modulo 1 if and only if

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([a, b); N; w)}{N} = b - a$$

for all half-open interval $[a, b)$ with $0 \leq a < b \leq 1$.

The following elementary statement and the proof of Lemma 2.1 are from [4]. They discuss the cardinality of the fractional part of Beatty's sequences and apply Pigeonhole principle.

LEMMA 2.1 Let α be a fixed irrational number. Then, for every positive integer M and real number $\delta \in (0, 1]$, there exists a real number γ such that

$$\#\{m \leq M : \{\alpha m + \gamma\} < \delta\} \geq 0.5M\delta.$$

2.1. Properties of Character Sums Associated With Composite Modules

Suppose that m is a composite number from primitive elements. The following lemmas are the features of character sums extended to composite modules.

LEMMA 2.1.1. Let \mathbb{F}_m be a finite group of order $\varphi(m)$ and g be a cyclic subgroup of \mathbb{F}_m of order μ . A multiplicative character of \mathbb{F}_m^* is

$$\chi_j(g^k) = e^{\frac{2\pi i j k}{\mu}} \quad \text{where } k = 0, 1, \dots, \varphi(m) - 1,$$

where g is a fixed primitive element of \mathbb{F}_m with order μ and j is a fixed integer, $0 \leq j \leq \varphi(m) - 1$.

PROOF. The proof of this result is given in [14].

When orthogonality relations are applied to additive or multiplicative characters sums to \mathbb{F}_m , the following fundamental identities are obtained:

LEMMA 2.1.2. For additive character χ_a and χ_b ,

$$\sum_{c \in \mathbb{F}_m} \chi_a(c) \bar{\chi}_b(c) = \begin{cases} \varphi(m) + 1, & \text{if } a = b \\ 0, & \text{if } a \neq b. \end{cases}$$

For multiplicative character, if $c, d \in \mathbb{F}_m^*$, then

$$\sum_{\chi} \chi_c(a) \bar{\chi}_c(b) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{if } a = b \\ 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}$$

where the sum is extended over all multiplicative character χ in \mathbb{F}_m .

PROOF. The proof of this result is given in [14].

Lemma 2.1.3. is established by using the function from Lemma 2.1.1,

$$\chi_j(q_i^k) = e^{\frac{2\pi i j k}{\mu}} \quad \text{where } k = 0, 1, \dots, \varphi(m) - 1, \tag{4}$$

which provide all additive and multiplicative characters of \mathbb{F}_m for any value composite modules as stated in Lemma 2.1.2.

LEMMA 2.1.3 Let a, b in \mathbb{F}_m and c in \mathbb{F}_m^* . If $c + a = d_1$ and $c + b = d_2$. Then, the nontrivial multiplicative character of \mathbb{F}_m is given by,

$$\sum_{\chi} \chi(d_1) \bar{\chi}(d_2) = \begin{cases} 0, & \text{if } d_1 \neq d_2 \\ \varphi(m) + 1, & \text{if } d_1 = d_2. \end{cases}$$

PROOF. The proof of this result is given in [14]. Lemma 2.1.3 gives two possible results depending on conditions of d_1 and d_2 . The number of elements of character sums will be different because the inner sum has an additive identity of the character. Then, $\sum_{\chi} \chi(d_1) \bar{\chi}(d_2) = \varphi(m) + 1$ for $d_1 = d_2$; zero otherwise.

3. RESULT AND DISCUSSION

The section gives the result on the cardinality of double character sums of Beatty sequence associated with composite modules given in the following theorem.

THEOREM 3.1. Let α be a fixed irrational number, β be any real number, n be any natural number and $\varphi(m)$ be an order of m . For any positive integers $N \leq m$ and non-trivial multiplicative characters $\chi(\text{mod } m)$, the following bound holds

$$|W_3|^2 = \# \left\{ \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(\lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor) \bar{\chi}(\lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor) \right\} \ll \varphi(m) N (\#\mathcal{K}).$$

PROOF. From expressions (2) and (3), we substitute n with natural numbers. Then, we have

$$W_3 = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(\lfloor \alpha(n+k) + \beta \rfloor) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(\lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor).$$

Suppose $N \leq n$, where n is a natural number. The following expression gives the cardinality of $\lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor$, such that

$$\#\{n \in \mathcal{N} : \lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor \equiv s \pmod{m}\} = O(1),$$

where $s \in \mathbb{Z}$. Then, by applying the Cauchy inequality, we have

$$\begin{aligned} |W_3|^2 &\ll N \sum_{n \in \mathcal{N}} \left| \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(\lfloor \alpha n + \beta - \gamma \rfloor + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor) \right|^2 \ll N \sum_{s=1}^m \left| \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(s + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor) \right|^2 = \\ &= N \sum_{k, l \in \mathcal{K}} \sum_{s=1}^m \chi(s + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor) \bar{\chi}(s + \lfloor \alpha l + \gamma \rfloor). \end{aligned} \quad (5)$$

Expanding the following double sums yield

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{s=1}^m \chi(s + \lfloor \alpha k + \gamma \rfloor) \bar{\chi}(s + \lfloor \alpha l + \gamma \rfloor).$$

Then, we will have all the number of elements as follows.

$$\begin{aligned} &\chi(1 + \lfloor \alpha k_1 + \gamma \rfloor) \bar{\chi}(1 + \lfloor \alpha l_1 + \gamma \rfloor) + \chi(1 + \lfloor \alpha k_1 + \gamma \rfloor) \bar{\chi}(1 + \lfloor \alpha l_2 + \gamma \rfloor) + \dots \\ &\dots + \chi(1 + \lfloor \alpha k_1 + \gamma \rfloor) \bar{\chi}(1 + \lfloor \alpha K + \gamma \rfloor) \end{aligned}$$

$$\chi(1 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha l_1 + \gamma]) + \chi(1 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha l_2 + \gamma]) + \dots \\ \dots + \chi(1 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha K + \gamma])$$

...

$$\chi(1 + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha l_1 + \gamma]) + \chi(1 + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha l_2 + \gamma]) + \dots \\ \dots + \chi(1 + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha K + \gamma])$$

$$\chi(2 + [\alpha k_1 + \gamma])\bar{\chi}(2 + [\alpha l_1 + \gamma]) + \chi(2 + [\alpha k_1 + \gamma])\bar{\chi}(2 + [\alpha l_2 + \gamma]) + \dots \\ \dots + \chi(2 + [\alpha k_1 + \gamma])\bar{\chi}(2 + [\alpha K + \gamma])$$

...

$$\chi(3 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(3 + [\alpha l_1 + \gamma]) + \chi(1 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(3 + [\alpha l_2 + \gamma]) + \dots \\ \dots + \chi(3 + [\alpha k_2 + \gamma])\bar{\chi}(3 + [\alpha K + \gamma])$$

...

$$\chi(m + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(m + [\alpha l_1 + \gamma]) + \chi(m + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(1 + [\alpha l_2 + \gamma]) + \dots \\ \dots + \chi(m + [\alpha K + \gamma])\bar{\chi}(m + [\alpha K + \gamma]).$$

The total number of elements is $\varphi(m)(\#K)^2$ since there are $\varphi(m)$ elements with K pairs and K times elements for each $\varphi(m)$.

If \mathbb{F}_m^* is a cyclic subgroup of \mathbb{F}_m with order $\varphi(m)$. Then, the character sums can be easily determined by applying Lemma 2.1.3. Also remark that since $N \leq m$, the inner sum has just two potential values, as seen in equation (4).

The congruence $[\alpha k + \gamma] \equiv [\alpha l + \gamma] \pmod{m}$ occurs for at most $O(K)$ pairs $k, l \in \mathcal{K}$ since $K \leq m$. Therefore, (5) will be

$$N \sum_{k, l \in \mathcal{K}} \sum_{s=1}^m \chi(s + [\alpha k + \gamma])\bar{\chi}(s + [\alpha l + \gamma]) \ll N(\varphi(m)(\#K)^2) \\ \ll N((\#K)^2 + \phi(m)(\#K)) \ll \varphi(m)N(\#K).$$

Thus, the theorem holds.

4. Conclusion

The cardinality of character sums over natural numbers n with respect to non-homogeneous Beatty sequences $[\alpha n + \beta]$ is as follows.

$$\# \left\{ \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi([\alpha(n+k) + \beta])\bar{\chi}([\alpha(n+k) + \beta]) \right\} \ll \varphi(m)N(\#K).$$

5. Acknowledgments

This study was partially funded by two funds which are UniMAP/ MENTORSHIP/ 9001-00601, Malaysia.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chua L., Park S., Smith G.D., “Bounded Gaps Between Primes in Special Sequences” // Proceedings of The American Mathematical Society, Springer Berlin Heidelberg, 2015, vol. 143, pp. 4597-4611. (<http://doi.org/10.1090/proc/12607>)
2. Guloglu A. M., Nevans C. W., “Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence” // Bull. Austral. Math. Soc., 78, pp. 327–334, 2008. (<https://doi.org/10.1017/S0004972708000853>)
3. Simpson R. J., “Disjoint covering systems rational Beatty sequences” // Discrete Mathematics, 92, pp. 361-369, 1991.
4. Banks W. D., Shparlinski I. E., “Non-residues and primitive roots in Beatty sequences” // Bull. Austral. Math. Soc. 73, pp. 433–443, 2006. (<https://doi.org/10.1017/S0004972700035449>)
5. Banks W. D., Shparlinski I. E., “Short character sums with beatty sequences” // Math. Res. Lett., 13, pp. 1–100N, 2006. (<https://doi.org/10.4310/MRL.2006.v13.n4.a4>)
6. Cassaigne J., DuchÃane E., Rigo M., “Nonhomogeneous beatty sequences leading to invariant games” // SIAM Journal on Discrete Mathematics 30, pp. 1798–1829, 2016. (<https://doi.org/10.1137/130948367>)
7. Kimberling C., “Beatty sequences and trigonometric functions” // INTEGERS 16, 2016. (<https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/q15/q15.pdf>)
8. Deraman F. , Sapar S. H., Johari M. A. M., Atan K. A. M., Rasedee A. F. N., “Extended Bounds of Beatty Sequence Associated with Primes” // International Journal of Engineering and Advanced Technology, pp. 115-118, 2019.
9. Polya G., “Uher die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste” // Nachrichten Knigl. Ges. Wiss. Gttingen, pp. 21-29, 1918.
10. Vinogradov I. M., “Uber die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtrete” // J. Soc. Phys. Math. Univ., 2, pp. 1-14, 1919.
11. Friedlander J., Iwaniec H., “Estimates for character sums” // Proceedings of The American Mathematical Society, vol. 119, no. 2 (Oct., 1993), pp. 365-372.
12. Cassaigne J., Duchlne E., Rigo M., “Nonhomogeneous Beatty sequences leading to invariant games” // SIAM Journal on Descrete Mathematics, vol. 30:3, pp. 1798-1829, 2016. (<https://doi.org/10.1137/130948367>)
13. Fraenkel A. S., “How to beat your Wythoff games opponents on three fronts” // Amer. Math. Monthly, 89, pp. 353-361, 1982.
14. Cassaigne J., Duchene E., Rigo M., “Invariant games and non-homogeneous Beatty sequences” // Arxiv, vol. abs/1312.2233, 2013. (<https://arxiv.org/abs/1312.2233>)
15. Lidl R., Niederreiter H., “Uniform distribution of sequences” // New York, John Wiley Sons, 1974.

16. Hlawka E., Taschner R., Schoißengeier J., “Geometric and Analytic Number Theory” // Springer-Verlag, 1991.
17. Lidl R. and Niederreiter H., "Introduction To Finite Fields and Their Applications" // Cambridge University Press, 1983.

REFERENCES

1. Chua L., Park S., Smith G.D., 2015, “Bounded Gaps Between Primes in Special Sequences” // *Proceedings of The American Mathematical Society, Springer Berlin Heidelberg*, vol. 143, pp. 4597-4611. (<http://doi.org/10.1090/proc/12607>)
2. Guloglu A. M., Nevans C. W., 2008, “Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence” // *Bull. Austral. Math. Soc.*, 78, pp. 327–334. (<https://doi.org/10.1017/S0004972708000853>)
3. Simpson R. J., 1991, “Disjoint covering systems rational Beatty sequences” // *Discrete Mathematics*, 92, pp. 361-369.
4. Banks W. D., Shparlinski I. E., 2006, “Non-residues and primitive roots in Beatty sequences” // *Bull. Austral. Math. Soc.*, 73, pp. 433–443. (<https://doi.org/10.1017/S0004972700035449>)
5. Banks W. D., Shparlinski I. E., 2006, “Short character sums with beatty sequences” // *Math. Res. Lett.*, 13, pp. 1–100N. (<https://doi.org/10.4310/MRL.2006.v13.n4.a4>)
6. Cassaigne J., Duch ane E., Rigo M., 2016, “Nonhomogeneous beatty sequences leading to invariant games” // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30, pp. 1798–1829. (<https://doi.org/10.1137/130948367>)
7. Kimberling C., “Beatty sequences and trigonometric functions” // *INTEGERS* 16, 2016. (<https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/q15/q15.pdf>)
8. Deraman F. , Sapar S. H., Johari M. A. M., Atan K. A. M., Rasedee A. F. N., 2019, “Extended Bounds of Beatty Sequence Associated with Primes” // *International Journal of Engineering and Advanced Technology*, pp. 115-118.
9. Polya G., 1918, “Uher die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste” // *Nachrichten Knigl. Ges. Wiss. Gttingen*, pp. 21-29.
10. Vinogradov I. M., 1919, “Uber die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtrete” // *J. Soc. Phys. Math. Univ.*, 2, pp. 1-14.
11. Friedlander J., Iwaniec H., 1993, “Estimates for character sums” // *Proceedings of The American Mathematical Soc.*, vol. 119, no. 2, pp. 365-372.
12. Cassaigne J., Duchlne E., Rigo M., 2016, “Nonhomogeneous Beatty sequences leading to invariant games” // *SIAM Journal on Descrete Mathematics*, vol. 30:3, pp. 1798-1829. (<https://doi.org/10.1137/130948367>)
13. Fraenkel A. S., 1982, “How to beat your Wythoff games opponents on three fronts” // *Amer. Math. Monthly*, 89, pp. 353-361, 1982.
14. Cassaigne J., Duchene E., Rigo M., 2013, “Invariant games and non-homogeneous Beatty sequences” // Arxiv, vol. abs/1312.2233. (<https://arxiv.org/abs/1312.2233>)

15. Lidl R., Niederreiter H., 1974, "Uniform distribution of sequences" // *New York, John Wiley Sons*, 1974.
16. Hlawka E., Taschner R., Schoißengeier J., 1991, "Geometric and Analytic Number Theory" // *Springer-Verlag*, 1991.
17. Lidl R. and Niederreiter H., 1983, "Introduction To Finite Fields and Their Applications" // *Cambridge University Press*, 1983.

Получено: 06.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-16-30

**О числе листов накрытий, определенных системами уравнений
в n -мерных пространствах**

И. Ш. Джаббаров, С. А. Мешаик, М. М. Исмаилова

Джаббаров Ильгар Шикар оглы — кандидат физико-математических наук, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа, Азербайджан).

e-mail: ilgar_js@rambler.ru

Мешаик Сеймур Ариф оглы — доктор физико-математических наук, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа, Азербайджан).

e-mail: seymurmshaik82@gmail.com

Исмаилова Мелакет Мушфиг кызы — доктор физико-математических наук, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа, Азербайджан).

e-mail: seismeisayis@gmail.com

Аннотация

Накрытия в основном рассматриваются в геометрии и анализе, и в некоторых случаях они не задаются явным образом. Задача определения накрытий в конкретной ситуации является очень важным. Накрытия возникают в теории многообразий, в особенности в связи с системами уравнений. Одним из действенных методов в этом направлении является использование теоремы о неявных функциях.

В настоящей статье мы изучаем эти вопросы во требуемом общем виде. Такой подход приводит проблему к рассмотрению основных понятий, которые были изучены классиками математики в последние два столетия. Этими математиками анализированы основные моменты теории, касающиеся поведению многообразий малых размерностей в многообразиях больших размерностей. Определение понятия кривой на плоскости является ярким примером того, как мы должны определить основные понятия, с которыми мы имеем дело, чтобы обеспечить необходимую свободу действий, не умаляя при этом необходимой общности. Введение quadriруемых кривых дает возможность развивать приемлемую теорию интегрирования в плоских областях. Однако, этого недостаточно, к примеру для установления теоремы Фубини в той общности, которая рассматривается в теории интегрирования Лебега. Здесь мы наталкиваемся на ограничения внесенные пересечениями многообразия с краем области. Поэтому, плодотворную формулировку этой теоремы мы наблюдаем лишь в теории интегрирования Лебега. Это и есть один из множества вопросов, которые связаны с поведением многообразий малых размерностей. Мы показываем, как нужно видоизменить некоторые понятия, чтобы преодолеть такие трудности. Мы устанавливаем, что обобщение понятия "неявного" поверхностного интеграла в некотором, отличном от традиционного взгляда понимании, позволяет устранить возникающие трудности и решать поставленные задачи в достаточной общности.

В работе таким путем удается свести вопрос об оценке числа листов накрытий, определяемых системами уравнений, к некоторым метрическим задачам теории поверхностных интегралов.

Ключевые слова: накрытия, многообразие, системы уравнений, число листов, жорданова область.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

И. Ш. Джаббаров, С. А. Мешаик, М. М. Исмаилова. О числе листов накрытий, определенных системами уравнений в n -мерных пространствах // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 16–30.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-16-30

On number of sheets of coverings defined by a system of equations in n -dimensional spaces

I. Sh. Jabbarov, S. A. Meshaik, M. M. Ismailova

Jabbarov Ilgar Shikar oglu — candidate of physical and mathematical sciences, Ganja State University (Ganja, Azerbaijan).

e-mail: ilgar_js@rambler.ru

Meshaik Seymur Arif oglu — doctor of physical and mathematical sciences, Ganja State University (Ganja, Azerbaijan).

e-mail: seymurmeshaik82@gmail.com

Ismailova Melakhet Mushfig kyzy — doctor of physical and mathematical sciences, Ganja State University (Ganja, Azerbaijan).

e-mail: seismeisayis@gmail.com

Abstract

The coverings are mostly used in geometry and analysis, and sometimes they are not given explicitly. The problem on defining of covering in concrete situation is substantive. Coverings arose in theory of manifolds, especially in connection with the system of equations. One of powerful methods in this direction is a theorem on implicit functions.

In the paper we study these questions in a necessary general form. Such a consideration lead the problems to the basic notions which were studied by classics of mathematics in last two centuries. By him it was analyzed the main points of the theory on behavior of manifolds of less dimensions in manifolds of higher dimensions. Defining of the notion of a curve in the plane is bright example showing how we can establish suitable properties of objects we deal with to get the necessary freedom of actions, does not avoiding simplest generality. Introducing of quadrable curves makes possible to develop an acceptable notion of the integral in the domains on the plane. But this is insufficient for establishing for example, the theorem of Fubini on repeated integrals in that form as in Lebesgue's theory. Here we rest to constraints brought by intersection of manifold with boundary. The useful formulation of this theorem is possible to get only in Lebesgue theory of integration. This is one of multiplicity of questions connected with behavior of manifolds of less dimensions. We show how some notions of the theory must be modified to avoid such difficulties. We establish that the generalization of a notion of "improper" surface integral in some different from the ordinary meaning, makes possible solve the problem in general.

In the present work we lead by such method the question on estimating of the number of sheets of covering to some metric relations connected with surface integrals.

Keywords: covering, manifold, system of equation, number of sheets, Jordan domain.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

I. Sh. Jabbarov, S. A. Meshaik, M. M. Ismailova, 2023, "On number of sheets of coverings defined by a system of equations in n -dimensional spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 16–30.

1. Introduction

Let us consider two regular manifolds of equal dimensions M and N . Suppose that $f: M \rightarrow N$ is some their map.

DEFINITION 1. This map is called a covering, if following conditions are satisfied:

- 1) the Jacobian of the map f is distinct from zero in every point of the manifold M ;
- 2) for every point $y \in N$ there exists a neighborhood $y \in U \subset N$ such that the preimage $f^{-1}(U) \subset M$ consists of finite or denumerable family of non-intersecting domains

$$f^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup \dots,$$

for which every map $f: V_j \rightarrow U$ is diffeomorphism;

- 3) the manifold is covered by finite or denumerable family of such domains U .

The manifold N is called a base of the covering, and M is called to be space of the covering. In the literature, an another definition equivalent to the introduced above is used. The condition a) sometimes can be omitted, if differentiability of the manifold is not of interest.

In literature another equivalent definition of the notion of covering [1] is widely used. Consider this definition.

DEFINITION 2. The surjective continuous map $\pi: X \rightarrow Y$ of linearly connected space X is called a covering:

- 1) if for every point $a \in Y$ there exists a neighborhood $V \subset Y$ for which it can be found a homeomorphism $h: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \Gamma$, with a discrete space Γ .
- 2) If $p: V \times \Gamma \rightarrow V$ is a natural projection then

$$\pi|_{\pi^{-1}(V)} = p \circ h.$$

The space X is called the space of covering; Y is called a base of covering.

The coverings are mostly used in geometry and analysis, and sometimes they are not given explicitly. The problem on defining of covering in concrete situation is substantive. Coverings arose in theory of manifolds, especially in connection with the system of equations. One of powerful methods in this direction is a theorem on implicit functions.

The number of sheets is an important characteristics of coverings and in many questions of analysis and geometry it arises the question on defining or estimating of the number of sheets. The number of sheets does not depend on the point of the base of covering, if the manifold is connected [1]. In general case this question is not easy for investigation. For one class of coverings this question allows solution by using of compactness [1]. Consider one of theorems of such kind.

Let M and N be smooth n -dimensional closed manifolds, and the map $f: M \rightarrow N$ is regular (with non-degenerating Jacobian) and surjective. Following theorem is true.

THEOREM 1. The map $f: M \rightarrow N$ is a covering with finite number of sheets.

The condition on closeness of manifolds is substantive in this theorem. But this theorem does not give tools to advance any conclusions on the quantity of the number of sheets. In questions connected with algebraic or analytic manifolds this question allows solution due to connections of coverings with some groups of transformation of manifolds.

Coverings rather arose when the system of equations in multidimensional spaces are considered. In the present work we shall consider coverings defined by the system of equations in n -dimensional spaces \mathbb{R}^n . In some natural conditions we obtain bounds for the number of sheets.

2. Basic theorems on implicit functions

Following lemma is a general form of the theorem on implicit functions in normed spaces [6, 12, 13].

ЛЕММА 1. Suppose we are given with normed spaces X, Y and Z . Let $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$ be some differentiable map which at the points $a \in X, b \in Y$ satisfies the condition $\Phi(a, b) = 0$ and the linear operator $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ (the operator of partial differentiation) is continuous and has an inverse in some neighborhood W of the point (a, b) , $W = \{(x, y) | \|x - a\| < r, \|y - b\| < \rho\} \subset U$. Then there exists such a ball $U_\rho = \{x | \|x - a\| < \rho < r\}$ of the point a , and a unique map $f : X \rightarrow Y$ such that:

- 1) f is continuous in the ball U_ρ ;
- 2) the equality $b = f(a)$ is true;
- 3) for every $x \in U_\rho$ the equality $\Phi(x, f(x)) = 0$ is satisfied.

Uniqueness of the function $f(x)$ means: if there exist a pair of functions f_1 and f_2 defined in the balls U_{ρ_1} and U_{ρ_2} , then they are coincident in the intersection $U = U_{\rho_1} \cap U_{\rho_2}$.

Let us formulate now the theorem on implicit functions in \mathbb{R}^n for the system of equations.

ЛЕММА 2. Suppose the conditions of Lemma 1 are satisfied. Consider the conditions:

- 1) There exists a point $(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r)$ for which

$$\left. \begin{aligned} f_1(a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r) &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ f_r(a_1, \dots, a_{n-r}, b_1, \dots, b_r) &= 0. \end{aligned} \right\};$$

- 2) There exists a neighborhood W of the point (\bar{a}, \bar{b}) in which the functions above have continuous partial derivatives

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{n-r}, y_1, \dots, y_r)}{\partial y_j}, \quad i = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, r.$$

- 3) In the specified neighborhood of the point (\bar{a}, \bar{b}) the following determinant is distinct from zero:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial y_r} \end{pmatrix}.$$

Then there exists a neighborhood U_δ of the point $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-r}) \in \mathbb{R}^n$ and the unique system of continuous functions

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_{n-r}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ y_r &= y_r(x_1, \dots, x_{n-r}) \end{aligned} \right\}$$

for which

$$\left. \begin{aligned} y_1(a_1, \dots, a_{n-r}) &= b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ y_r(a_1, \dots, a_{n-r}) &= b_r, \end{aligned} \right\}$$

and in the neighborhood U_δ identically satisfied the following equalities:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_{n-r}, y_1(x_1, \dots, x_{n-r}), \dots, y_r(x_1, \dots, x_{n-r})) &\equiv 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ f_r(x_1, \dots, x_{n-r}, y_1(x_1, \dots, x_{n-r}), \dots, y_r(x_1, \dots, x_{n-r})) &\equiv 0. \end{aligned} \right\}$$

3. Posing of the problem and basic results

Let we are given with some bounded, one-connected, closed Jordan domain Ω , contained in other open domain Ω_0 given in n -dimensional space \mathbb{R}^n . Suppose that in the domain

Ω_0 some continuous function $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ and continuously differentiable functions $f_j(\bar{x}) = f_j(x_1, \dots, x_n), j = 1, \dots, n, r < n$ be given; moreover, suppose that the Jacoby matrix

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

of this system of functions has in Ω_0 maximal rank. Let, further, $\bar{\xi}_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_r^0)$ be a point of an image of the map $f : \bar{x} \mapsto (f_1, \dots, f_r)$, and \bar{x}_0 be a point in Ω , such that

$$f_1(\bar{x}_0) = \xi_1^0, \dots, f_r(\bar{x}_0) = \xi_r^0.$$

If we substitute the point \bar{x}_0 by a variable vector \bar{x} , we get some system of equations, which due to conditions above, defines some $n-r$ dimensional surface in Ω . We assume that this surface has an $n-r$ dimensional volume or area. This is possible when the intersection of the surface with the boundary of the domain Ω has $n-r$ dimensional Jordan measure being equal to zero. This condition is always satisfied when the domain Ω is bounded by finite number of hyper surfaces of a view

$$\varphi : U \subset R^{n-1} \rightarrow V \subset R^n,$$

with continuously differentiable map φ of closed domains U and V . These hypersurfaces can intersect each with other by parts of their boundaries.

The map $f : \bar{x} \rightarrow (f_1(\bar{x}), \dots, f_r(\bar{x}))$ with the system of equations $f_1(\bar{x}) = 0, \dots, f_r(\bar{x}) = 0$ defines, in some natural conditions on the rank of Jacoby matrix, a covering in Ω . In many applications of analysis, it arises the question on the number of sheets of this covering, that is, the number of elementary surfaces defined by this system of equations. For definiteness, suppose that the Jacoby matrix of the given system of functions has non zero minor placed at first r columns, everywhere in Ω .

We formulate and prove two theorems on coverings defined by such system of equations. Bounding of the number of sheets we lead to some metric relations.

THEOREM 2. Take some cube $B \subset \mathbb{R}^{n-r}$ such that the covering with this base has a discrete space Γ . Then for the number of elements of Γ , the following inequality is satisfied:

$$|\Gamma| \leq M|B|^{-1} \int_{\Pi} \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

where M denotes the maximal absolute value of minors of the Jacoby matrix in B , $|B|$ is a volume of B , and in the right hand side a surface integral taken along the surface Π , defined by the system of given equations, stands.

THEOREM 3. In the conditions of the theorem 1 we have:

$$|\Gamma| \leq M|B|^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^r} \int 0 < f_1 < h \dots 0 < f_r < h dx_{r+1} \dots dx_n.$$

where integration is taken along the subset of Ω , defined by inequalities indicated at the foot of the sign of integral.

In the paper we study these questions in a necessary general form. Such a consideration lead the problems to the basic notions which were studied by classics of mathematics in last two centuries. In [10] it was analyzed the main points of the theory on behavior of manifolds of less dimensions in manifolds of higher dimensions. Defining of the notion of a curve in the plane is bright example showing how we can establish suitable properties of objects we deal with to get the necessary freedom of actions, does not avoiding simplest generality. Introducing of quadrable curves makes

possible to develop an acceptable notion of the integral in the domains on the plane. But this is insufficient for establishing of the theorem of Fubini on repeated integrals in that form as in Lebesgue's theory [11, 15]. Here we rest to constraints brought by intersection of manifold with boundary. The useful formulation of this theorem is possible to get only in Lebesgue theory of integration. This is one of multiplicity of questions connected with behavior of manifolds of less dimensions. We show how some notions of the theory must be modified to avoid such difficulties. We establish that the generalization of a notion of "improper" surface integral in the meaning of the work [4] makes possible solve the problem in general.

4. Main results and proof of theorems

Consider some statements on the system of equations by means of which we shall define some surfaces and study the number of sheets coverings, defined by this system of equations. The concrete covering connected with this system of equations we shall consider below. At first let us establish the following lemma, which has an independent interest (firstly this result with brief proof was given in [2, 3]; particular case was considered in [9, p. 319]).

LEMMA 3. Let we are given with some bounded, one-connected, closed Jordan domain Ω , contained in other open domain Ω_0 given in n -dimensional space \mathbb{R}^n . Suppose that in the domain Ω_0 some continuous function $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ and continuously differentiable functions

$$f_j(\bar{x}) = f_j(x_1, \dots, x_n), j = 1, \dots, n, r < n$$

be given; moreover, suppose that the Jacoby matrix

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

of this system of functions has in Ω_0 maximal rank. Let, further, $\bar{\xi}_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_r^0)$ be a point of an image of the map $f : \bar{x} \mapsto (f_1, \dots, f_r)$, and \bar{x}_0 be a point in Ω , such that

$$f_1(\bar{x}_0) = \xi_1^0, \dots, f_r(\bar{x}_0) = \xi_r^0.$$

Then in some neighborhood of the point $\bar{\xi}_0$ we have the equality

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \cdots \partial \xi_r} \int_{\Omega(\bar{\xi})} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{M(\bar{\xi})} f(\bar{x}) \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

where $\Omega(\bar{\xi})$ is a subdomain in Ω , defined by the system of inequalities $f_j(\bar{x}) \leq \xi_j$, and $M(\bar{\xi})$ is a surface defined by the system of equations, G is a Gram determinant of gradients of the functions $f_j(\bar{x})$, that is, $G = |(\nabla f_i, \nabla f_j)|$.

Befor starting the proof of Lemma 3, let us make some important remarks.

REMARK 1. As it was observed in [4] the surface integral arisen above is taken in some "improper" meaning which is distinct form ordinary improper integral, if we consider surface integral as a multidimensional integral after of substitution of the surface element ds by its expression given below. In the last case we would take the integral through the projection of the surface, considering that as $n - r$ -dimensional domain. In this case defining of improper integral in ordinary manner demands that the boundary, that is the projection of an intersection of the surface with boundary, has zero Jordan measure. But, in general, this condition may not be satisfied. Below we overcome this difficulty considering the initial integral over Ω in improper meaning. Taking arbitrary positive small ε , we omit the open covering of the boundary of the domain Ω constructed as a union of cubes, with total measure less than ε . Since the remained closed domain is bounded by hyperplanes, then

in the conditions of Lemma 1 the surface integral can be defined in ordinary meaning. Improper surface integral we define as a limit (which is existing, as it will be shown below) of the surface integral, as $\varepsilon \rightarrow 0$. So, we avoid the necessity to consider an intersection of the surface with the boundary of the domain. It is not difficult to show that the improper surface integrals in two different meanings are coincident when an intersection of the boundary has zero $n - r$ -dimensional Jordan measure.

In Lebesgue theory of an integral, there best known Fubini's theorem which relatively easily reduces a multiple integral to repeated integrals. But in the Riemann's integral case, it required to establish an existence of integrals of less multiplicity for every fixed values of some variables. This difficulty, in many cases, is overcome by imposing additional conditions on boundary, besides Jordan measurability. In the light of the said above, from the consequence of Lemma 1 it follows that taking the intersection of the domain by $n - r$ -dimensional plane we see that Fubini's theorem for the Riemann's integral is as so powerful, as in the Lebesgue's integral case. Partial integrals of less dimension in this case must be taken in improper meaning.

REMARK 2. When differentiating of the integral, passing to the limit performed from the interior of the domain $\Omega(\bar{\xi})$, which lead to left-hand (or write-hand) partial derivatives. The ordinary derivative and left-hand derivative (if are existing) are coincident everywhere, with exception for enumerable set of points, due to general property of derivative (theorem 11.43, of [11]). In applications, absence an ordinary partial derivative at a subset of zero Jordan measure does not affect main results.

Proof of the lemma 3. Consider a graph Γ of the function $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega$ (here $\bar{f} = (f_1, \dots, f_r)$), that is, the set of all such pairs (\bar{x}, \bar{u}) . From the closeness of Ω and continuousness of the given functions it follows that the graph Γ is closed, and, therefore, is compact. Really, if $((\bar{x}_k, \bar{u}_k))_{k \geq 1}$ is some sequence from Γ , then due to boundedness and compactness of Ω , it follows that all of limit points of the sequence $((\bar{x}_k))$ belong to the set Ω . Let \bar{x} be a limit point of this sequence corresponding some converging subsequence of the sequence $((\bar{x}_k))$. From continuousness of given functions it follows that for every limit point \bar{u} of the sequence $(\bar{u}_k = \bar{f}(\bar{x}_k))$ (specifically for the limit point of taken subsequence also) the point (\bar{x}, \bar{u}) belongs to the graph of considered map, that is, the graph is closed.

Suppose that the point (\bar{x}, \bar{u}) be any point of the graph. Consider the system of equations $\bar{f}(\bar{x}) - \bar{u} = 0$. Explicitly, this system can be written as follows:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - u_1 &= 0, \\ &\vdots \\ f_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - u_r &= 0. \end{aligned}$$

Let the minor of the Jacoby matrix constructed of first r columns be distinct from zero at a point $(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0)$. By the theorem on implicit functions [46, p. 309], there exist open cubic neighborhoods (interiors of closed cubes) U of the point \bar{u} , X of the point \bar{x}_1^0 and W of the point \bar{x}_2^0 such that in the parallelepiped $X \times W \times U$ the graph of the function consists of triples of a view $(\bar{x}_1 = \bar{\varphi}(\bar{x}_2, \bar{u}), \bar{x}_2, \bar{u})$; moreover the function $\bar{x}_1 = \bar{\varphi}(\bar{x}_2, \bar{u})$ (being a diffeomorphism $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leftrightarrow (\bar{u}, \bar{x}_2)$) is unique, that is, the system is solvable in regard to \bar{x}_1 by a unique way. This function is also continuous with respect to pair of variable vectors. In regard to the said above, the graph Γ is a closed set. From the compactness it follows an existence of a finite number of parallelepipeds P_1, \dots, P_m such that their union covers Γ . Note that the union of their projections into the cube $X \times W$ covers Ω . Applying the known arguments, we may construct, using these neighborhoods, a sequence of such closed Jordan sets V_1, \dots, V_m which intersect each with any other, possible by pieces of their boundaries, and the union of them overlaps the graph Γ . Moreover, in each of these sets the considered system of equations has a unique solution given by equality of the type $\bar{x}_1 = \varphi_i(\bar{x}_2, \bar{u})$ (thus we do not assume that one of these solutions is a continuation of

the solution found in other set); here $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R^n$ is some transposition of the components of the vector (x_1, \dots, x_n) , because in various parallelepipeds minors of Jacoby matrix being distinct from zero are taken with respect different set of variables.

Consider one of such closed sets, denoting it as V . V is a Jordan subset in some product $P_i = X_i \times W_i \times U_i$. Let Δ be a projection of V into coordinate space (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , that is, a projection into $X_i \times W_i$. In consent with the said above, for every fixed $\bar{x}_2 = (x_{r+1}, \dots, x_n) \in W_i$ the unique solution of the system of equations $f_j(\bar{x}) - u_j = 0$ (here we denote $\phi(\bar{x}_1) = \phi(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ for fixed \bar{x}_2) will be an inverse function $\bar{x}_1 = \phi^{-1}(\bar{u}) = \phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2 \in W_i, \bar{u} \in U_i, j = 1, \dots, r$, such that

$$\bar{f}^{-1}(\bar{u}) = (\phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2), \quad \bar{f} = (f_1, \dots, f_r).$$

From the said above it follows that the closed sets $\Omega(\bar{\xi})$ and $I(\bar{\xi}) = [m_1, \xi_1] \times \dots \times [m_r, \xi_r]$ (here m_j denotes a minimal value of the function $f_j(\bar{x})$) are Jordan sets. Replacing in reasoning above the domain Ω by $\Omega(\bar{\xi})$, we obtain a finite family of products of a view $X_0 \times W_0 \times U_0$, containing subsets P_i , the union of which covers the product $\Omega(\bar{\xi}) \times I(\bar{\xi})$. Let us perform the change of variables in the integral

$$J_0(\bar{\xi}) = \int_{X_0 \times W_0 \cap \Omega(\bar{\xi})} f d\bar{x},$$

by using formulae:

$$u_j = \begin{cases} f_j(\bar{x}), & \text{if } j = 1, \dots, r \\ u_j = x_j, & \text{if } j > r \end{cases}$$

(obviously, by the said above, this a bijective map, for each fixed \bar{x}_2). Jacobian of this exchange is equal to $|J|^{-1}$, where $|J|$ is a determinant of corresponding minor. Really,

$$\det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \left(\det \frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)^{-1} = |J|^{-1}.$$

So,

$$J_0(\bar{\xi}) = \int_{(I(\bar{\xi}) \cap U_0) \times W_0, (\phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} d\bar{u} dx_{r+1} \dots dx_n,$$

and for the representation of this integral as a repeated integral of a view

$$\int_{\chi_1}^{\xi_1} du_1 \dots \int_{\chi_r}^{\xi_r} du_r \int_{W_0, (\phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n \quad (1)$$

it suffices existence of the inner integral

$$\int_{W_0, (\phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n,$$

for every $\bar{u} \in U_0$. Proof of an existence of this integral, in some improper meaning, will be made below.

In the explicit form the function under the inner integral along W_0 can be found by substituting the variable \bar{x}_1 in the function $f |J|^{-1}$ by its values found from the system: $\bar{x}_1 = \phi^{-1}(\bar{u}) = \phi^{-1}(\bar{u}; \bar{x}_2), \bar{x}_2 \in W_0$. Now we note that lower bounds of variation of the variable ξ_i has a view $\chi_i = \chi_i(u_1, \dots, u_{i-1})$, for $i \geq 1$. Differentiating with respect to upper variables ξ_i , we obtain:

$$j_0 = \frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_r} J_0(\bar{\xi}) = \int_{W_0, (\phi^{-1}(\bar{\xi}; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n,$$

when the integral in the right hand side is continuous with respect to $\bar{\xi}$. Thus, $\bar{x}_1 = \phi^{-1}(\bar{\xi}) = \phi^{-1}(\bar{\xi}; \bar{x}_2), \bar{x}_2 \in W_0$, and it means that the variable \bar{x} lies on the surface $f(\bar{x}) = \bar{\xi}$. From

uniqueness of the solution it follows that the number of these parts (surface integrals) does not exceed the number of neighborhoods of the form $X_0 \times W_0 \times U_0$. Let us transform the integral j_0 into the surface integral. From the told above it follows that at fixed ξ_1, \dots, ξ_r for every solution $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ of the system, defining the surface $M(\bar{\xi})$, the variables x_1, \dots, x_r are defined by equalities

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_r &= \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

in W_0 , for some smooth functions $\varphi_1, \dots, \varphi_r$. Consider the surface defined by the map φ , given as

$$\bar{\varphi}(x_{r+1}, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

The image of the indicated neighborhood of the point $(x_{r+1}^1 \dots x_n^1)$ in such mapping will be just a part M_0 of the surface $M(\bar{\xi})$, the projection of which a part of W_0 serves. Then, in accordance with [13, pp. 292, 327], denoting by D_j minors of an order $n - r$ of the matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{r+1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_{r+1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{r+2}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_{r+2}} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_{r+2}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

the $(n - r)$ -dimensional volume of an element of the surface (or "surface element") can be represented as

$$ds = \sqrt{D_1^2 + \dots + D_l^2} dx_{r+1} \dots dx_n, l = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$$

It is easy to observe that this matrix has a block-view: $(\Phi|I)$, and here the matrix Φ is a transposed Jacoby matrix of the system of functions $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, and I is a unite matrix of the order $n - r$. It is clear that $\Phi = -J^{-1}F$, where F is a Jacoby matrix of the system of functions $f_j(\bar{x})$, with respect to variables x_{r+1}, \dots, x_n , and by J , sometimes, one denotes a matrix of the considered minor, also. So, we have the equality $(-\Phi|I) = J^{-1}(F|J)$. Therefore, using the symbol t on the top from the left over the matrix to indicate a transposition, we obtain

$$(-\Phi|I) \begin{pmatrix} -{}^t\Phi \\ I \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} {}^tF \\ {}^tJ \end{pmatrix} \cdot J^{-1}.$$

Then the surface element can be represented in the view

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\det \left((-\Phi|I) \begin{pmatrix} -{}^t\Phi \\ I \end{pmatrix} \right)} dx_{r+1} \dots dx_n = \\ &= |\det J|^{-1} \sqrt{\det \left((F|J) \begin{pmatrix} {}^tF \\ {}^tJ \end{pmatrix} \right)} dx_{r+1} \dots dx_n = \\ &= \sqrt{G} |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n. \end{aligned}$$

By this reason, we have

$$\begin{aligned}
 j_0 &= \frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_r} J_0(\bar{\xi}) = \\
 &= \int_{W_0, (\phi^{-1}(\bar{\xi}, \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n = \int_{M_0} \frac{f ds}{\sqrt{G}}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

where at the end of the chain of equalities a surface integral stands. We have proved this relation on M_0 . It does not depend on the minor which at the beginning of reasoning was accepted to be distinct from zero. So, these conclusions hold true for all products of a view $X_0 \times W_0 \times U_0$, which cover the product $\Omega(\bar{\xi}) \times I(\bar{\xi})$. Summing now over all such products, preferably representing the sums as a sum of surface integrals taken along the parts of the surface does not having intersections by their inners, we find a needed result.

We have got the relation (2) in condition on continuousness of the function, indicated above, with respect to $\bar{\xi}$. To complete the proof of the theorem we must make spent above calculations without assumption on continuousness of the inner integral in (1).

By the conditions of the theorem, the theorem on implicit functions delivers the solution of considered system in some wider domain, than the Ω . First of all, consider the expression (1) in the case $r = 1$, noting that the general case can be settled by an analogy. Let us denote

$$g(\xi) = \int_{\chi}^{\xi} du \int_{W_0, (\phi^{-1}(u; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \bar{\Omega}(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n, \tag{3}$$

considering the case $r = 1$. We cannot, generally, state that the function under the integral is continuous with respect to u .

It is clear that the function $g(\xi)$ defined by the formula (3) is a function of bounded variation. Then, by the consequence 2 of Theorem 6, [11, p. 206], this function has at most enumerable number of points of discontinuity, moreover at every point ξ of discontinuity both limits below are exist

$$g(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} g(x), \quad g(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} g(x).$$

In other hand, this function is differentiable, and therefore is continuous at every point ξ at which the function under the integral in (3), that is, the function

$$\rho(u) = \int_{W_0, (\phi^{-1}(u; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \dots dx_n,$$

is continuous at the point $u = \xi$; here the minor $|J|$ coincides with the modulus of partial derivative of the function f_1 with respect to, say x_1 . Therefore, we need to investigate the function $\rho(u)$ under the integral, without any assumptions on continuity. Note that the special case of the integral $g(\xi)$, when the boundary is constructed of algebraic surfaces of a special form, the question is studied in [5]. In general case, we establish below the same result with the natural condition that derivative must be taken left- or right- hand meaning.

We had dissected the initial domain, using the theorem on implicit functions, into domains in every of which performed change of variables is one to one. This change of variables makes possible to introduce in a new system of coordinates: correspondence $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow (u, x_2, \dots, x_n)$ is one to one. Moreover, the image of this map is a Jordan domain also. Do not destroying the generality, we assume that in whole domains Ω and Ω_0 performed change is bijective. So, we can instead of covering for the boundary of the domain Ω in coordinates (x_1, x_2, \dots, x_n) take a covering in coordinates (u, x_2, \dots, x_n) . The last is more suitable, because in this case the ribs of covering is parallel to the coordinate axes.

There are close relations between these two coverings. Let us estimate variation of the function $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ when the variables x_2, \dots, x_n are fixed. Take the values of this function in

two neighbor points x'_1 and x''_1 . By the theorem on mean values, there exists a point $\theta, x''_1 > \theta > x'_1$ such that we may write

$$|u_1 - u_2| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\theta, x_2, \dots, x_n) (x''_1 - x'_1) \right| \leq K |x''_1 - x'_1|,$$

where

$$K = \max_{\bar{x} \in \Omega} |\partial f / \partial x_1(\bar{x})|.$$

This relation shows that every cube of a given covering (in the first system of coordinates) is possible recover by no more than $2[K] + 1$ cubes in new coordinates. Then every covering of the domain Ω with total measure $\leq \varepsilon$ is possible substitute by covering in coordinates (u, x_2, \dots, x_n) , with total measure $\leq (2[K] + 1)\varepsilon$. So, we assume that the covering is given in coordinates (u, x_2, \dots, x_n) , with total measure $\leq \varepsilon$.

Let $L(\varepsilon)$, for every positive ε , denote the union of cubes containing the boundary of $\Omega(\bar{\xi})$, with total measure not exceeding ε . Consider the set of all vertex points of the cubes of this covering. Taking the set of all i -th coordinates of these vertices denote it as $A_i, i = 1, \dots, n$. Taking hyperplains parallel to coordinate axes, containing the points from the sets A_i , we get a dissection of the domain Ω by parallelepipeds among which the cubes of covering are taking part. Since

$$J_0(\xi) = \int_{X_0 \times W_0 \cap \Omega(\xi)} f d\bar{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X_0 \times W_0 \cap \Omega(\xi) \setminus L(\varepsilon)} f d\bar{x},$$

then

$$\frac{d}{d\xi} \int_{\Omega(\xi)} f(\bar{x}) d\bar{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi - \lambda < f_1(\bar{x}) \leq \xi, \bar{x}_2 \in \Omega(\xi) \setminus L(\varepsilon)} f(\bar{x}) d\bar{x}$$

Below we show for every u , that the integral $\rho(u)$ has left-hand (or right-hand) derivative. An existence of that integral follows from the reasoning above, in improper meaning, passing to the limit in (3), after of substituting there the domain of integration $\Omega(\bar{\xi})$ by the domain $\Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon)$.

From the said above, we obtain a following representation for the integral

$$\rho(u) = \int_{W_0, (\phi^{-1}(u; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi})} f |J|^{-1} dx_{r+1} \cdots dx_n :$$

$$\rho(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_1(u, \varepsilon),$$

where

$$\Delta_1(u, \varepsilon) = \int_{W_0, (\phi^{-1}(u; \bar{x}_2), \bar{x}_2) \in \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon)} f |J|^{-1} dx_{r+1} \cdots dx_n,$$

is an integral taken in the domain $\Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon)$. Let's examine the integral

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = \lambda^{-1} \int_{\xi - \lambda}^{\xi} \Delta_1(u, \varepsilon) du. \quad (4)$$

Then, considered above derivative is possible represent as a repeated limit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\lambda, \varepsilon),$$

which in consent with the said above, coincides with left-hand derivative of $g(\xi)$, that is with $g'(\xi - 0)$.

Making the change of variable $\xi - u = \lambda t$, we may write

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = \int_0^1 \Delta_1(\xi - \lambda t, \varepsilon) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{f_1(\bar{x})=\xi-\lambda t, \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon)} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n \right) dt.$$

Considering inner integral in Lebesgue sense, one can represent it as a difference of two integrals with non-negative functions under integration, as below:

$$\begin{aligned} & \int_{f_1(\bar{x})=\xi-\lambda t, \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon)} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \int_{f_1(\bar{x})=\xi-\lambda t, \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon), f \geq 0} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n - \\ & - \int_{f_1(x)=\xi-\lambda t, \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon), f < 0} (-f)|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

Both integrals are monotone and bounded with respect to $\varepsilon \rightarrow 0$. Therefore, $\Phi(\lambda, \varepsilon)$ tends to some limit function $\Phi(\lambda)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. The integrals in the right hand side of the last equality have the same view and can be investigated by similar way. Take some sequence of positive numbers $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$, tending to 0, such that $L(\varepsilon_{m+1}) \subset L(\varepsilon_m)$, for $m \geq 1$. Let us consider the sequence of functions:

$$s_m(\lambda)(\bar{x}) = f|J|^{-1}, \text{ if } \bar{x} \in \Omega(\bar{\xi}) \setminus L(\varepsilon_m) \wedge f_1(\bar{x}) = \xi - \lambda t,$$

$s_m(\lambda)(\bar{x}) = 0$, otherwise. This sequence is monotonic and positive which satisfies the conditions of the theorem 10.82 of the book [11]. Then we have

$$\lim_{m \rightarrow 0} s_m(\lambda) = \Phi^+(\lambda).$$

The analogical relation is valid for the function $\Phi^-(\lambda)$, got by substituting in the above integral the condition $f \geq 0$ by the condition $-f > 0$. Therefore, the sum $\Phi^+(\lambda) + \Phi^-(\lambda) = \Phi(\lambda)$ is existing. But this sum is equal to

$$\int_{f_1(\bar{x})=\xi-\lambda t, \Omega(\xi)} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n,$$

in improper meaning.

Prove that the convergence $\Phi(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \Phi(\lambda)$ is uniform with respect to λ . In consent with above, in the domain $\Omega(\xi) \setminus L(\varepsilon)$ the equation $f_1(\bar{x}) = u$ has a solution $\psi(u, x_2, \dots, x_n)$ continuously depending on u in every parallelepiped, constructed above by hyperplanes, having non-empty intersection with hyperplane $u = u_0$. Take arbitrarily small $\eta > 0$. For taken $u = \xi - t\lambda$ there is a number $\delta > 0$ such that

$$|\psi(u, x_2, \dots, x_n) - \psi(u_0, x_2, \dots, x_n)| < \eta,$$

when $|u - u_0| < \delta$.

Recalling the definition of the function $\Phi^+(\lambda)$ let us estimate the difference $|\Phi^+(\lambda) - \Phi^+(\lambda_0)| < \varepsilon$ when $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Note that from the boundedness of the domain Ω it follows that the integrals

$$\int_{f_1(\bar{x})=\xi-\lambda t, \Omega(\xi)} dx_2 \cdots dx_n$$

are bounded by some positive constant $D > 0$, for all t and λ . The function under the integral is continuous in the closed domain Ω . Then it is uniform continuous. Therefore, for given positive κ there exists η such that

$$\left| \int_{f_1=u} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n - \int_{f_1=u_0} f|J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n \right| \leq D\kappa,$$

when $|\psi(u, x_2, \dots, x_n) - \psi(u_0, x_2, \dots, x_n)| < \eta$. Changing u_0 we see that the system of intervals of a view $|u - u_0| < \delta$ covers the all segment $[m, M]$ of variation of the variable u . From the compactness of this segment it follows existence of a finite number of values of u_0 for which the union of these neighborhoods covers the segment $[m, M]$. So, from notes above it follows that the convergence $\Phi(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \Phi(\lambda)$ is uniform with respect to λ , because $\xi - u = \lambda t \leq$. Since the function $\Phi(\lambda, \varepsilon)$ is continuous at $\varepsilon = 0$ (because the value of the function is defined above as an existing limit), then, by the notes on the page 86 of the book [6], from these conclusions one decides that

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\lambda, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi(\lambda, \varepsilon).$$

So, we have showed that the left-hand derivative $g'(\xi - 0)$ exists and has a representation (in improper meaning, said about above):

$$g'(\xi - 0) = \int_{f_1(\bar{x})=\xi, \Omega(\xi)} f |J|^{-1} dx_2 \cdots dx_n.$$

By an analogy, considering the limit

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = \lambda^{-1} \int_{\xi}^{\xi+\lambda} \Delta_1(u, \varepsilon) du,$$

we prove an existence of the right hand side derivative $g'(\xi + 0)$.

It is known ([14]) that the set of points ξ at which $g'(\xi - 0) \neq g'(\xi + 0)$ is finite or at most enumerable, we see that in the formulation of the lemma it is sufficient consider the left-hand derivative. In applications the set of points at which $g'(\xi - 0) \neq g'(\xi + 0)$ is not substantive. At such points, for definiteness we can accept the value of the derivative to be equal to $g'(\xi - 0)$ or $g'(\xi + 0)$, or more symmetrically, to $\frac{g'(\xi-0)+g'(\xi+0)}{2}$. The proof of Lemma 3 in the case of $r = 1$ is finished. The general case can be considered by an analogy. Lemma 3 is proved.

NOTE. The lemma 1 remains true, if the point $\bar{\xi}$ is a point of the boundary.

CONSEQUENCE. Let conditions of Lemma 3 be satisfied. Then we have

$$\int_{\Omega} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{m_1}^{M_1} \cdots \int_{m_r}^{M_r} du_1 \cdots du_r \int_M f(\bar{x}) \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

where m_j and M_j , correspondingly, denote minimal and maximal values of $f_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, r$, $M = M(\bar{u})$ denotes a surface in Ω defined by the system of equations $f_j = u_j$, $j = 1, \dots, r$, and G is a Gram's determinant of gradients of functions defining M .

The statement of this consequence easily follows from Lemma 1 by integration, and it required to notice that at some values of \bar{u} the surface $M = M(\bar{u})$ can degenerate into empty set. Obviously, that the statement of Lemma 1 is possible extend to the case of non-isolated point $\bar{\xi}_0$ belonging to the boundary. This consequence has many applications ([2, 3]). In [5, p.278], is given a generalization of the consequence of Lemma 1, named as co-area formula.

Now we can now prove Theorems 2-3. We assume that all of conditions imposed in the section 3 (that is the conditions of Lemma 3) are satisfied.

Proof of Theorem 2. Take any inner point $\bar{x}_0 \in \Omega$, and suppose that the image of this point by the map $f : \bar{x} \mapsto (f_1, \dots, f_r)$ is an inner point also. Then Lemma 1 on implicit functions is applicable. We find such an open ball $S(\bar{x}_0, r)$ with the center at the point \bar{x}_0 and radius $r > 0$, contained in Ω_0 in which a given system of equations has, in imposed conditions, a solution $\bar{x}_1 = \varphi(\bar{x}_2)$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S(\bar{x}_0, r)$, "defined" in the ball $S(\bar{x}_0, r)$. Take a continuation of this solution along continuous curves lying in the interior of the domain Ω_0 . We get unique solution $\bar{x}_1 = \varphi(\bar{x}_2)$ of the given system with the conditions: 1) the point (\bar{x}_1, \bar{x}_2) is inner point of the domain Ω_0 ; 2)

the point \bar{x}_0 belongs to the graph of the solution, that is $\bar{x}_0 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ and $f(\bar{x}_0) = 0$. If there is a solution of the given system does not satisfying above two conditions then we, repeating reasoning spent above, can define uniquely another solution with two conditions, lying in the interior of the domain Ω_0 . And so on. From the compactness of the domain Ω it follows finiteness of the number of such solutions. In the conditions of Theorem 2 consider covering defined by given system of equations with the base B . If $\bar{x}_1^1 = \varphi^1(\bar{x}_2), \dots, \bar{x}_1^N = \varphi^N(\bar{x}_2)$ are all solutions a domain of definition of which contained the cube B , then some of solutions $\bar{x}_1 = \varphi(\bar{x}_2)$ of the system can not be defined in B .

Applying Lemma 3, with $f \equiv 1$ we obtain:

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \cdots \partial \xi_r} \int_{\Omega(\bar{0})} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{M(\bar{0})} \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

where $\Omega(\bar{0})$ is a subdomain in Ω , defined by the system of inequalities $f_j(\bar{x}) \leq 0$, and $M(\bar{0})$ is a surface defined by the system of equations $f_j(\bar{x}) = 0$, G is a Gram determinant of gradients of the functions $f_j(\bar{x})$, that is, $G = |(\nabla f_i, \nabla f_j)|$. Take the subdomain of Ω the projection of which into the space \mathbb{R}^{n-r} is B . Then we have

$$\int_{M(\bar{0})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \geq N \int_B \frac{d\bar{x}_2}{|J|} \geq NBM^{-1}.$$

Statement of Theorem 1 follows from here, if we note that $|\Gamma| = N$.

Proof of Theorem 3. Integral standing in the right part of the relation of Theorem 2 is possible represent as a limit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^r} \int 0 < f_1 < h \quad dx_{r+1} \cdots dx_n.$$

$$\dots$$

$$0 < f_r < h$$

The proof of Theorem 3 is finished.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия // Москва: Наука, 2-е изд., 1968. 760 с.
2. Джаббаров И. Ш. О тождестве гармонического анализа и его приложениях // Докл. АН СССР, 314:5 (1990), 1052–1054.
3. Джаббаров И. Ш. Об оценках тригонометрических интегралов // Чебышевский сборник, Т.11, вып. 1, 2010, 85-108.
4. Джаббаров И. Ш. О многомерной проблеме Терри для кубического многочлена // Матем. заметки, 107:5 (2020), 657–673.
5. Федерер Г. Геометрическая теория меры // Москва: Наука, 1978, 760 р.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Москва: ГИФМЛ, Т.1, 1962, 608 с.
7. Гребенча М. К., Новосёлов С. И. Курс математического анализа // Москва: Высшая школа, 1961, 560 с.
8. Джаббаров И. Ш. О структуре некоторых вещественных алгебраических многообразий // Труды Азербайджанской национальной Академии Наук по математике, 36(1), 74-82(2016).

9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Москва: Наука, Т.2, 1970.
10. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного // Москва, 1948, 318 с.
11. Натансон И. П. Теория функций действительной переменной // Москва: Наука, 1974, 480 с.
12. Никольский С. М. Курс математического анализа // Москва: Наука, Т.1, 1990.
13. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных // Москва: Наука, 1972, 622 с.
14. Титчмарш Э. С. Теория функций // Изд. Оксфордского университета, 1939, 454 с.
15. Зорич В. А. Математический анализ // Москва: МЦНМО, Т. 2, 2002, 788 с.

REFERENCES

1. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., 1968, "Modern geometry", *Moscow: Nauka 2-d ed.*, 760 p.
2. Dzhabbarov I. Sh., 1990, "On an identity of Harmonic Analysis and its applications", *Dokl. AS USSR*, v.314, no 5, pp. 1052–1054.
3. Dzhabbarov I. Sh., 2010, "On estimation of trigonometric integrals", *Chebyshevskii sbornik*, v.11, iss. 1, pp. 85–108.
4. Dzhabbarov I. Sh., 2020, "On the Multidimensional Tarry Problem for a Cubic Polynomial", *Mathematical Notes*, Vol. 107, No. 5, pp. 15–28.
5. Federer H., 1978, "Geometric measure theory", *Moscow: Nauka*, 760 p.
6. Fihntengoltz G. M., 1962, "Differential and integral calculus", *Moscow: GIFML*, v.1, 608 p.
7. Grebencha M. K. Novoselov S. I., 1961, "Course of Mathematical Analysis", *Moscow: Vishaya shkola*, v. 2, 560 p.
8. Jabbarov I. Sh., 2016, "On the structure of some algebraic varieties", *Transactions of NAS of Azerbaijan, issue math.*, 36(1), pp. 74–82.
9. Kurant R., 1970, "Differential and integral calculus", *Moscow: Nauka*, , v.2.
10. Luzin N. N., 1948, "Theory of functions of real variable", *Moscow*, 318 p.
11. Natanson I. P., 1974, "Theory of functions of real variable", *Moscow: Nauka*, 480 p.
12. Nikolskii S. M., 1990, "Course of mathematical analysis", *Moscow: Nauka*, v.1.
13. Shilov G. E., 1972, "Mathematical analysis. Functions of several real variables", *M.: Nauka*, 622 p.
14. Titchmarsh E. C., 1939, "Theory of functions", *Oxford University Press*, 454 p.
15. Zorich V. A., 2002, "Mathematical analysis", *Moscow: MCNMO*, v. 2, 788 p.

Получено: 10.06.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-31-48

Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$ ¹

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Елисеев Александр Георгиевич — доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Ратникова Татьяна Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: ratnikovata@mpei.ru

Шапошникова Дарья Алексеевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: shaposhnikovda@mpei.ru

Аннотация

В предложенной работе выполнено построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши для уравнения Шредингера. Выбранный в работе потенциал $q(x) = x^2$ приводит к особенности в спектре предельного оператора в виде сильной точки поворота. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении метода регуляризации, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности, установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра. При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности. В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром С.А. Ломова и А.Г. Елисеева, указано каким образом и из каких соображений следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для поставленной задачи, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Библиография: 21 названий.

¹Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Для цитирования:

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 31–48.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-31-48

Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrodinger with potential

$$Q(x) = x^2$$

A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova

Eliseev Alexander Georgievich — doctor of physical and mathematical science, associate professor, National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Ratnikova Tatyana Anatolyevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: ratnikovata@mpei.ru

Shaposhnikova Daria Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, National Research University “MPEI” (Moscow).

Abstract

In the proposed work, we construct a regularized asymptotics for the solution of a singularly perturbed inhomogeneous Cauchy problem for the Schrodinger equation. The potential $q(x) = x^2$ chosen in the paper leads to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form of a strong turning point. The main problem that the researcher faces when applying the regularization method is related to the search and description of regularizing functions that contain a non-uniform singular dependence of the solution of the desired problem, highlighting which, you can search for the rest of the solution in the form of power series in a small parameter. The development of the regularization method led to the understanding that this search is closely related to the spectral characteristics of the limit operator. In particular, it is established how the singular dependence of the asymptotic solution on a small parameter should be described under the condition that the spectrum is stable. When stability conditions are violated, things are much more complicated. Moreover, there is still no complete mathematical theory for singularly perturbed problems with an unstable spectrum, although they began to be studied from a general mathematical standpoint about 50 years ago. Of particular interest among such problems are those in which the spectral features are expressed in the form of point instability. In papers devoted to singularly perturbed problems, some of the singularities of this type are called turning points. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum by S.A. Lomov and A.G. Eliseev, it is indicated how and from what considerations regularizing functions and additional regularizing operators should be introduced, the formalism of the regularization method for the problem posed is described in detail, and justification of this algorithm and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova, 2023, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrodinger with potential $Q(x) = x^{2n}$ ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 31–48.

1. Введение

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого по признанию самого автора в монографии [1] были заложены в конце пятидесятих, начале шестидесятих годов прошлого века в цикле работ [3]–[7]. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении последнего метода, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра [1]. При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка пятидесяти лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [9]–[17]). В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

- 1) простая точка поворота — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;
- 2) слабая точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;
- 3) сильная точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис из собственных векторов теряет гладкость.

Приведем здесь ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. работы [9, 10, 11], по слабой точке поворота — [12, 13, 14], сильной точке поворота — [16, 17].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье-Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка \hbar считать малой величиной². Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [19, § 6]),

²Строго говоря, постоянная Планка \hbar является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости \hbar следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую \hbar в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими \hbar .

поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому \hbar) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [19, гл. 7]). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию задачи Коши для нестационарного и неоднородного уравнения Шредингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \rightarrow 0$ представляют собой развитие идей работы [16, 17], где рассмотрена задача Коши для параболического уравнения с сильной точкой поворота.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x, t)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = h(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где выполнены условия:

1) $f(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$;

2) $h(x, t) \in C^\infty(-\infty, +\infty) \times [0, T]$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)| dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |h(x, t)| dx < \infty$ сходятся равномерно по t (достаточные условия для существования классического решения задачи);

4) $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m |f_0^{(k)}(x)| dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m |h^{(k,n)}(x, t)| dx < \infty$ сходятся равномерно по t (достаточные условия для построения асимптотического ряда).

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x, t, \varepsilon)$, непрерывная в $\bar{Q}_T = (-\infty, +\infty) \times [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, имеющая непрерывные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q_T , удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (1) и непрерывно примыкающая к начальным условиям $f(x)$.

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 1. *Классическое решение задачи (1) при выполненных условиях 1)–3) существует и единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. Приложение 1. \square

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализуема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, работу [18]), и соответствующий базис, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x, t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим).

3. Формализм метода регуляризации

3.1. Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы

Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Ливиллем в [20]. Итак, осуществляя подстановку $u(x, t) = v(x, t)e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x^2 \right) u + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} u - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $u(x, t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x, t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x^2, \quad \varphi(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x, t)$ обусловлен тем, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x, t)$ содержало сингулярную зависимость от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x, t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [21, гл. 5, § 4, с. 268–272]). Обозначив $p = \partial \varphi / \partial t$ и $q = \partial \varphi / \partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = d\tau, \quad (4)$$

Н.У.: $t = 0, x = s, \varphi = 0, q = 0, p = s^2$.

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = \tau, \quad x = s \cos 2\tau, \quad \varphi = s^2 \frac{\sin 4\tau}{4}.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x, t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x, t) = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg} 2t. \quad (5)$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. п. 5). Их задача: вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Выпишем здесь только окончательный результат:

$$K(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon} \sin 2t} \exp \left[i \left(\operatorname{ctg} 2t \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2t} \right) \right].$$

$K(x, \xi, t)$ обладает свойством $K(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$.

Дополнительные сингулярные интегральные операторы для регуляризации правой части итерационных задач получим, если проинтегрировать $K(x, \xi, t)$ по переменной ξ и для удобства поделив на i . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \sigma_0(x, t, \varepsilon)(\cdot) &= -i \int_0^t (\cdot) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi, t - \tau) d\xi = -i \int_0^t (\cdot) \frac{1}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau, \\ \sigma_1(x, t, \varepsilon)(\cdot) &= -i \int_0^t (\cdot) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \xi K(x, \xi, t - \tau) d\xi = -ix \int_0^t (\cdot) \frac{1}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau. \end{aligned}$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\sigma_1(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ — суть решения уравнения Шредингера с правыми частями $i\varepsilon$, $i\varepsilon x$. Действия операторов на функцию запишется как:

$$\begin{aligned} \sigma_0(f(t)) &= -i \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau = -if(t) * \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ \sigma_1(f(t)) &= -ix \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau = -ixf(t) * \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем оператор $T_\varepsilon = i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$. Тогда действие оператора T_ε запишется как

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\sigma_0(f(t))) &= \varepsilon f(t) + f(t) * T_\varepsilon \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} = \varepsilon f(t), \\ T_\varepsilon(\sigma_1(f(t))) &= \varepsilon x f(t) + x f(t) * T_\varepsilon \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}^3} = \varepsilon x f(t). \end{aligned}$$

3.2. Построение регуляризованного асимптотического ряда

Введенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\sigma_0(x, t, \varepsilon)$, $\sigma_1(x, t, \varepsilon)$ позволяют рассчитывать, что оставшуюся часть решения можно искать в виде степенных рядов по ε . Искать решение исходной задачи (1) будем в виде:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, t) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k [\sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t))] + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x, t). \quad (7)$$

Здесь начало суммирования с $k = -1$ во втором ряде обусловлено необходимостью регуляризации правой части $h(x, t)$ для разрешимости задачи (1) на нулевом шаге по ε .

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (6), подставим (7) в задачу (1). При этом получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & e^{-i\varphi/\varepsilon} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \dot{v}_k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} v_k'' - i2x \operatorname{tg} 2t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k' - i \operatorname{tg} 2t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [y_{k-1} + xz_{k-1}] + i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \dot{w}_k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} w_k'' - x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k = h(x, t), \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, 0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x, 0) = f(x). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, $w_k = w_k(x, t)$, а $y_k = y_k(t)$, $z_k = z_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате. Выделив в (8) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_k}{\partial t} - 2x \operatorname{tg} 2t \frac{\partial v_k}{\partial x} - \operatorname{tg} 2t v_k = i \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2}, \\ & y_k(t) * T_\varepsilon \left(\frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ & z_k(t) * T_\varepsilon \left(x \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ & x^2 w_k = -h(x, t) \delta_0^k + i \frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} + y_{k-1}(t) + xz_{k-1}(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Здесь δ_k^0 — символ Кронекера: $\delta_0^0 = 1$, $\delta_k^0 = 0$ при $k \neq 0$. Отметим, что при отрицательном индексе $k = -1$ функции $v_{-1}(x, t)$ и $w_{-1}(x, t)$ необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (7)). Функции $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$ произвольны на шаге $k = -1$. Они определяются из условия разрешимости на итерационном шаге $k = 0$.

Рассмотрим итерационную задачу на шаге $k = 0$ в (9):

$$\left\{ \begin{aligned} & \dot{v}_0(x, t) - 2x \operatorname{tg} 2t v_0'(x, t) - \operatorname{tg} 2t v_0 = 0, \\ & y_0(t) * T_\varepsilon \left(\frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ & z_0(t) * T_\varepsilon \left(x \frac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ & x^2 w_0(x, t) = -h(x, t) + y_{-1}(t) + xz_{-1}(t) \\ & v_0(x, 0) + w_0(x, 0) = f(x), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Для разрешимости второго уравнения из системы (10) достаточно положить

$$y_{-1}(t) \equiv -h(0, t), \quad z_{-1}(t) \equiv -\frac{\partial h}{\partial x}(0, t). \quad (11)$$

Тогда для $w_0(x, t)$ получим гладкое решение:

$$w_0(x, t) = -\frac{h(x, t) - h(0, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2} \equiv ih_0(x, t), \quad (12)$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \dot{v}_0(x, t) - 2x \operatorname{tg}(2t) v_0'(x, t) - \operatorname{tg} 2t v_0 = 0, \\ & v_0(x, 0) = \frac{h(x, t) - h(0, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2} + f(x). \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \left(f \left(\frac{x}{\cos 2t} \right) - h_0 \left(\frac{x}{\cos 2t}, 0 \right) \right). \quad (14)$$

Отметим, что функции $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче на шаге $k = 1$ в (9):

$$\begin{cases} \dot{v}_1(x, t) - 2x \operatorname{tg} 2t v_1'(x, t) - \operatorname{tg} 2t v_1(x, t) = i v_0''(x, t), \\ y_1(t) * T_\varepsilon \left(\frac{e^{-\frac{i x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ z_1(t) * T_\varepsilon \left(x \frac{e^{-\frac{i x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = 0, \\ x^2 w_1(x, t) = i \dot{w}_0(x, t) + y_0(t) + x z_0(t), \\ v_1(x, 0) + w_1(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

Подставляя $w_0(x, t)$ из (12) в уравнение для $w_1(x, t)$ этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$y_0(t) \equiv -i \frac{\partial h_0}{\partial t}(0, t), \quad z_0(t) \equiv -i \frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial t}(0, t). \quad (16)$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $w_1(x, t)$ также получим гладкое решение

$$w_1(x, t) = i \frac{\dot{h}_0(x, t) + \frac{\partial h_0}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial t}(0, t)}{x^2} \equiv i h_1(x, t),$$

а для $v_1(x, t)$ из (15) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2x \operatorname{tg} 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} - \operatorname{tg} 2t v_1 = i v_0''(x, t), \quad (17)$$

Уравнение легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \left[i v_0'' \left(\frac{x}{\cos 2t} \right) + \psi \left(\frac{x}{\cos 2t} \right) \right].$$

Здесь $\psi(x)$ — произвольная функция, определяется из начального условия (15). Тогда решение запишется в виде:

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \left[i 2 v_0'' \left(\frac{x}{\cos 2t} \right) - h_1 \left(\frac{x}{\cos 2t}, 0 \right) \right].$$

Ещё раз обратим внимание на то, что полностью определить все слагаемые на итерационном шаге $k = 1$ в ряде (7) удастся только на следующем итерационном шаге $k = 2$. В результате будем иметь:

$$y_1(t) \equiv -i h_1(0, t), \quad z_1(t) \equiv -i \frac{\partial h_1}{\partial x}(0, t),$$

$$h_1(x, t) = i \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},$$

а функция $h_1(x, t)$ уже определена.

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (9), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), выпишем главный член асимптотики:

$$\begin{aligned}
 u_{gl}(x, t) = & \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^t \frac{h(0, \tau)}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau + x \int_0^t \frac{\frac{\partial h(0, \tau)}{\partial x}}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau \right] + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \left[f\left(\frac{x}{\cos 2t}\right) - h_0\left(\frac{x}{\cos 2t}, 0\right) \right] e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}} - \\
 & - i \int_0^t \frac{\frac{\partial h_0(0, \tau)}{\partial \tau}}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau - ix \int_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial \tau \partial x}(0, \tau)}{\sqrt{\cos 2(t - \tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t - \tau)}{2\varepsilon}} d\tau + \\
 & + \frac{-h(x, t) + h(0, t) + x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2}.
 \end{aligned}$$

4. Оценка остаточного члена

Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (9) для $0 \leq k \leq n + 1$. Запишем соотношение для остатка:

$$\begin{aligned}
 u(x, t, \varepsilon) = & e^{-i\frac{\varphi(x, t)}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \varepsilon^k [\sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t))] + \\
 & + \sum_{k=0}^n w_k(x, t) \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R_n(x, t, \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Подставим (18) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1} , для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x^2 R_n = -H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

где $H(x, t, \varepsilon) = \varepsilon v_n''(x, t) e^{-i\frac{\varphi(x, t)}{\varepsilon}} + x^2 w_{n+1}(x, t) + \varepsilon w_n''(x, t)$. Так как итерационные задачи решены до итерационного шага ε^{n+1} , то $x^2 w_{n+1}(x, t)$ удовлетворяет условиям 1)div4) в постановке задачи (1) (см. Приложение 3). Используя фундаментальное решение, для $R_n(x, t, \varepsilon)$ получим выражение:

$$\begin{aligned}
 R_n(x, t, \varepsilon) = & \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \tau, \varepsilon) K(x, \xi, t - \tau) d\xi = \\
 = & \frac{1 - i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\sin 2(t - \tau)}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \tau, \varepsilon) \exp \left[i \left(\operatorname{ctg} 2(t - \tau) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2(t - \tau)} \right) \right] d\xi.
 \end{aligned}$$

Теперь, учитывая условия 1)div4) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n + 1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy |H(y, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{TM}{\varepsilon\sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для } (x, t) \in (\mathbf{R} \times [0, T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде:

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon R_{n+1},$$

Тогда окончательно получим

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + \varepsilon \frac{C}{\varepsilon} \leq C.$$

Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 2 (Об оценке остатка (асимптотическая сходимость)). *Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1)div4). Тогда верна оценка*

$$\left\| u(x, t, \varepsilon) - \left(e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \varepsilon^k [\sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t))] + \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \varepsilon^k \right) \right\|_{C(\mathbf{R}^{(+)} \times [0, T])} \leq C \varepsilon^{n+1},$$

где $C \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $v_k(x, t), z_k(t), \omega_k(x, t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq k \leq n+1$.

5. Построение фундаментального решения

Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - \xi).$$

Предварительно сделаем замену функции решения: $u(x, t) = e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon} - it} v(x, t)$. В результате получим задачу:

$$i \frac{\partial v}{\partial t} - 2xv = -\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, 0) = e^{\frac{\xi^2}{2\varepsilon}} \delta(x - \xi).$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $v(x, t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для образа Фурье искомого решения $F(\lambda, t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла. В пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i \frac{\partial F}{\partial t} + 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (\varepsilon \lambda^2 - 2)F, \quad F(\lambda, 0) = e^{\frac{\xi^2}{2\varepsilon} - i\lambda\xi}. \quad (20)$$

Задача (20) — задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Опуская достаточно громоздкие выкладки, выпишем здесь только её решение:

$$F(\lambda, t) = \exp \left(-\varepsilon \frac{\lambda^2}{4} (e^{i4t} - 1) - i\lambda\xi e^{i2t} + \frac{\xi^2}{2\varepsilon} + i2t \right).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \exp \left(\frac{\xi^2}{2\varepsilon} + i2t \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\varepsilon \frac{\lambda^2}{4} (e^{i4t} - 1) - i\lambda(e^{i2t}\xi - x) \right) d\lambda.$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты и после несложных преобразований и умножения на $e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}-it}$, получим фундаментальное решение:

$$K(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}\sin 2t} \exp \left[i \left(\operatorname{ctg} 2t \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2t} \right) \right].$$

6. Заключение

Как уже было отмечено во введении, основной проблемой практического применения метода регуляризации С.А. Ломова является построение регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для задачи Коши для неоднородного уравнения Шредингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота $q(x) = x^2$ регуляризация, как выяснилось, состоит из двух частей:

- 1) описание пограничного слоя обусловленного точкой $t = 0$;
- 2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора.

В основном тексте статьи описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым, основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований.

7. Приложения

Приложение 1. Покажем, что функция

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}\sin 2t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\operatorname{ctg} 2t \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2t} \right) \right] f(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\operatorname{ctg} 2(t-\tau) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2(t-\tau)} \right) \right] h(\xi, \tau) d\xi = \\ &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}\sin 2t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right) \right] f(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2(t-\tau))^2}{\varepsilon \sin 4(t-\tau)} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon} \right) \right] h(\xi, \tau) d\xi \end{aligned} \tag{21}$$

где $f(x)$, $h(x, t)$ — непрерывные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)| dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |h(x, t)| dx < \infty$, удовлетворяет задаче

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = h(x, t), \quad u(x, 0) = f(x). \tag{22}$$

Заметим, что интеграл (21) сходится равномерно на $(-\infty, +\infty) \times [0, T]$. Действительно

оценка дает:

$$\begin{aligned}
|u(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right) \right] \right| |f(\xi)| d\xi + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2(t-\tau))^2}{\varepsilon \sin 4(t-\tau)} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon} \right) \right] \right| |h(\xi, \tau)| d\xi = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} \right) \right] \right| |f(\xi)| d\xi + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2\tau)^2}{\varepsilon \sin 4\tau} \right) \right] \right| |h(\xi, t-\tau)| d\xi = \\
&= \left\langle \frac{\xi - x \cos 2t}{\sqrt{2\varepsilon \sin 2t}} = z, \quad d\xi = \sqrt{2\varepsilon \sin 2t} dz \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x \cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon \sin 2t})| dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |h(x \cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon \sin 2t}, t-\tau)| dz \leq M.
\end{aligned}$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем рассматривать только часть решения (21), которая удовлетворяет однородному уравнению (22).

Шаг 1. Формальное дифференцирование и подстановка формальных производных в уравнение.

Найдём формально (т.е. не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x, t)$, входящие в уравнение. Затем проверим, что полученный интеграл удовлетворяет однородному уравнению в задаче (22).

Вычислим входящие в уравнение частные производные:

$$\begin{aligned}
i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\dots) \left(-i\varepsilon \operatorname{ctg} 2t + \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos 2t}{\sin^2 2t} \right) f(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\dots) \left(-i\varepsilon \operatorname{ctg} 2t - x^2 + \frac{(x \cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} \right) f(\xi) d\xi = \\
\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\dots) \left(i\varepsilon \operatorname{ctg} 2t + \frac{x^2 \cos^2 2t - 2x\xi \cos 2t + \xi^2}{\sin^2 2t} \right) f(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\dots) \left(i\varepsilon \operatorname{ctg} 2t + \frac{(x \cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} \right) f(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначен показатель экспоненты фундаментального решения.

Подставляя вычисленные u_t , u_{xx} в уравнение, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\dots) \left[-i\varepsilon \operatorname{ctg} 2t - x^2 + \frac{(x \cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} + i\varepsilon \cos 2t - \frac{(x \cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} + x^2 \right] f(\xi) d\xi = 0.$$

Шаг 2. Обоснование правомочности формальных действий.

Для того, чтобы показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению, нужно обосновать возможность дифференцирования по x и t под знаком интеграла при $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$. Докажем этот факт при $t > t_0$, $t_0 > 0$, откуда в силу произвольности t_0 этот факт будет иметь место при $t > 0$.

ТЕОРЕМА 3 (Существование классического решения). Пусть выполнены условия:

1) $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)| dx < \infty$;

2) $h(x, t) \in C(-\infty, +\infty) \times [0, T]$, удовлетворяющая условиям $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |h(x, t)| dx < \infty$ равномерно по t .

Тогда классическое решение задачи (1) существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим производные, полученные на шаге 1 на прямоугольнике $[-L, L] \times [t_0, T]$:

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sin 2t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{|\sin 2t_0|} + x^2 + \frac{(|\xi| + |x|)^2}{\sin^2 2t_0} \right) |f(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sqrt{\sin 2t_0}}^5} ((1 + 2L^2)M_0 + 2LM_1 + M_2), \\ \varepsilon^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sqrt{\sin 2t_0}}^5} ((1 + L^2)M_0 + 2LM_1 + M_2). \end{aligned} \right.$$

Учитывая, что $f(x)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, интегралы $M_j = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi$,

$j = 0, 1, 2$, существуют. Поэтому интегралы равномерно сходятся на прямоугольнике $[-L, L] \times (0, T]$. Отсюда следует, что функция $u(x, t) \in C^{(2,1)}(-\infty, +\infty) \times (0, T]$ и удовлетворяет однородному уравнению (22). Докажем, что (21) удовлетворяет начальному условию.

Функция $u(x, t)$ не определена при $t = 0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, т.е. считать равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \rightarrow 0 + 0$. Так как интеграл (21) сходится равномерно на $(-\infty, +\infty) \times [0, T]$, то возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin 2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right) \right] f(\xi) d\xi = \\ &= \left\langle \frac{\xi - x \cos 2t}{\sqrt{2\varepsilon \sin 2t}} = z, d\xi = \sqrt{2\varepsilon \sin 2t} dz \right\rangle = \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0+0} e^{i \left(\frac{z^2}{\cos 2t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right)} f(x \cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon \sin 2t}) dz = \\ &= f(x) \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz = \frac{(1-i)(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $u(x, t)$ действительно задаёт решение задачи. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $f(x)$, $h(x, t)$ удовлетворяют условиям $\forall m \in N \exists \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |f(x)| dx$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |h(x, t)| dx$, сходящимися равномерно по t , то $u(x, t)$ имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $t > 0$.

Действительно, если $u(x, t)$ дифференцировать по x и t произвольное число раз, то будет выделяться множитель $(\xi - x \cos 2t)$ в положительной степени, а множитель $\sin 2t$ — в отрицательной степени. Таким образом, дело сводится к равномерной сходимости интеграла вида

$$J = (\sin 2t)^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right) \right] (\xi - x \cos 2t)^m f(\xi) d\xi.$$

Оценим интеграл по модулю. Тогда

$$\begin{aligned} |J| &\leq |\sin 2t_0|^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[i \left(\frac{(\xi - x \cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \right) \right] \right| |\xi - x \cos 2t|^m |f(\xi)| d\xi = \\ &= |\sin 2t_0|^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi - x \cos 2t|^m |f(\xi)| d\xi \leq |\sin 2t_0| \sum_{j=0}^m C_m^j |x|^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi = \\ &= |\sin 2t_0| \sum_{j=0}^m C_m^j |x|^{m-j} M_j \leq |\sin 2t_0| (L+1)^m M_m. \end{aligned}$$

Учитывая, что $f(x)$ удовлетворяет условию 1) задачи (22) интегралы $M_j = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi$

существуют. Поэтому интеграл J равномерно сходится при $0 < t_0 \leq t \leq T$. Отсюда следует, что функция $u(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $t > 0$. Кроме того, поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно сходящимися по параметрам x, t в любом замкнутом прямоугольнике $(x, t) \in [-L, L] \times [t_0, T]$, $t_0 > 0$, то их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по x и t сколь угодно раз.

ТЕОРЕМА 4 (теорема единственности решения). *Задача для однородного уравнения с однородным начальным условием*

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad (23)$$

обладает только тривиальным решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t)$ является решением задачи (23), тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{i}{\varepsilon} x^2 u, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -i\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{i}{\varepsilon} x^2 \bar{u},$$

здесь чертой обозначено комплексное сопряжение.

Теперь рассмотрим следующий интеграл:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot |u(x, t)|^2. \quad (25)$$

Продифференцировав интеграл $I(t)$ по t и учитывая стремление к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ функции $u(x, t)$ вместе со своими частными производными, будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \left[\text{подставим соотношения (24)} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(i\varepsilon u_{xx} \bar{u} - \frac{i}{\varepsilon} x^2 |u|^2 \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-i\varepsilon u \bar{u}_{xx} + \frac{i}{\varepsilon} x^2 |u|^2 \right) = \\ &= i\varepsilon \left(u_x \bar{u} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx |u_x|^2 \right) - i\varepsilon \left(u \bar{u}_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx |u_x|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $I(0) = I(t)$, где $I(0) = 0$ в силу начальных условий в задаче (23).

Таким образом, интеграл (25) равен нулю для всех $t \in [0, T]$. А это возможно только, если $u(x, t) = 0$. \square

Приложение 2. Доказательство, что оператор $T_\varepsilon = i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$ аннулирует $\frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}$, подтверждается непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) &= \frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \left(\frac{x^2}{\cos^2 2t} + i\varepsilon \operatorname{tg} 2t \right); \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) &= \frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \left(-x^2 \operatorname{tg}^2 2t - i\varepsilon \operatorname{tg} 2t \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$T_\varepsilon \left(\frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \right) = \frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}} \left(\frac{x^2}{\cos^2 2t} + i\varepsilon \operatorname{tg} 2t - x^2 \operatorname{tg}^2 2t - i\varepsilon \operatorname{tg}(2t) - x^2 \right) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $T_\varepsilon \left(x \frac{e^{-i \frac{x^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t^3}} \right) = 0$.

Приложение 3. Уравнение для определения частного решения w_0 имеет вид:

$$x^2 w_0(x, t) = h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t).$$

Отсюда

$$w_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2} = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ — гладкая функция. Проведем цепочку оценок.

1. $|h_0(x, t)| = \left| 0, 5 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi, t) \right|$, где $0 < \xi(x) < x$. Следовательно, $h_0(x, t)$ удовлетворяет условию 4) в постановке задачи (1), так как $h(x, t)$ удовлетворяет этому условию.

2. $\left| \frac{\partial w_0}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{1}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(\xi_1, t) \right|$, где $0 < \xi(x) < x$. Следовательно, $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ удовлетворяет условию 4) в постановке задачи (1), так как $h(x, t)$ удовлетворяет этому условию.

Так как $w_k = \frac{i \frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} + y_{k-1}(t) + x z_{k-1}(t)}{x^2}$, $k \geq 1$, то и все $w_k(x, t)$, получаемые путем решения итерационных задач, также удовлетворяют условию 4). Оценка $x^2 w_0$ дает $|x^2 w_0| = \left| h(x, t) - h(0, t) - x \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi, t) \right|$, что приводит к утверждению, что и $x^2 w_0$ удовлетворяют условию 4). Аналогично для всех $x^2 w_k$.

Схожим образом можно показать, что все решения итерационных задач для $v_k(x, t)$ удовлетворяют условию 4) в постановке задачи (1).

Приведенные здесь соображения позволяют сделать вывод: интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x, t, \varepsilon)| dx$ сходится. Здесь $H(x, t, \varepsilon)$ — правая часть в уравнении (19) для остаточного члена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений // М.: Наука, 1981. 398 с.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя // М.: Изд-во Московского университета, 2011. 453 с.
3. Ломов С. А. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр // Труды МЭИ. 1962. Вып. 42. С. 99-144.
4. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // Доклады АН СССР. 1963. Том 148, № 3. С. 516-519.
5. Ломов С. А. О модельном уравнении Лайтхилла // Сборник научных трудов МО СССР. 1964. № 54. С. 74-83.
6. Ломов С. А. Регуляризация сингулярных возмущений // Доклады научно-технической конференции МЭИ, секция математическая. 1965. С. 129-133.
7. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Украинский математический журнал. 1984. Т. 36, № 2. С. 172-180.
8. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 2. С. 3-12.
9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Математический сборник. 1986. Т. 131, № 173. С. 544-557.
10. Елисеев А. Г., Ратникова Т. А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 3. С. 63-73.
11. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 15-32.
12. Yeliseev A. On the Regularized Asymptotics of a Solution to the Cauchy Problem in the Presence of a Weak Turning Point of the Limit Operator // Axioms. 2020. № 9, 86. <http://doi.org/10.3390/axioms9030086>.
13. Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Математические заметки СВФУ. 2020. № 3. С. 3-15.

14. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 55-67.
15. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 6. С. 733-746.
16. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46-58.
17. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии «сильной» точки поворота у предельного оператора // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 1. С. 50–68. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68.
18. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // УМН. 1971. Т. 26, № 2(158). С. 101-114.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 800 с.
20. Liouville J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis á satisfaire á une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1837. Pp. 16-35.
21. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление // М.: Наука, 1965. 424 с.

REFERENCES

1. Lomov S. A. 1981, "Introduction to the general theory of singular perturbations", *Moscow, Nauka*, 398 p.
2. Lomov S. A., Lomov I. S. 2011, "Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer", *Moscow, Moscow University Press*, 453 p.
3. Lomov S. A. 1962, "Asymptotic behavior of solutions of second-order ordinary differential equations containing a small parameter", *Proceedings of MPEI*, iss. 42, pp. 99-144.
4. Lomov S. A. 1963, "Power boundary layer in problems with a small parameter", *Doklady AN SSSR*, vol. 148, no. 3, pp. 516-519.
5. Lomov S. A. 1964, "On the Lighthill Model Equation", *Collection of Scientific Works of the USSR Ministry of Defense*, no. 54, pp. 74-83.
6. Lomov S. A. 1965, "Regularization of singular perturbations", *Reports of the scientific and technical conference of MPEI, mathematical section*, pp. 129-133.
7. Lomov S. A., Safonov V. F. 1984, "Regularizations and asymptotic solutions for singularly perturbed problems with point singularities of the spectrum of the limit operator", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 36, no. 2, pp. 172-180.

8. Bobojanov A. A., Safonov V. F. 2018, “Regularized asymptotics of solutions of integrodifferential equations with private derivatives with rapidly changing nuclei”, *Ufa Mathematical Journal*, vol. 10, no. 2, pp. 3-12.
9. Eliseev A. G., Lomov S. A. 1986, “Theory of singular perturbations in the case of spectral singularities of the limit operator”, *Mathematical collection*, vol. 131, no. 173, pp. 544-557.
10. Eliseev A. G., Ratnikova T. A. 2019, “Singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a rational «simple» turning point”, *Differential equations and control processes*, no. 3, pp. 63-73.
11. Eliseev A. G. 2020, “Regularized solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of an irrational «simple» turning point”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 2, pp. 15-32.
12. Yeliseev A. 2020. “On the Regularized Asymptotics of a Solution to the Cauchy Problem in the Presence of a Weak Turning Point of the Limit Operator”, *Axioms*, no. 9, 86. <http://doi.org/10.3390/axioms9030086>.
13. Kirichenko P. V. 2020, “Singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a «weak» turning point of the limit operator”, *Mathematical notes of NEFU*, no. 3, pp. 3-15.
14. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2020, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a «weak» turning point of the limit operator”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 1, pp. 55-67.
15. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2022, “Singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a «weak» first-order turning point of a limit operator with multiple spectrum”, *Differential Equations*, vol. 58, no. 6, pp. 733-746.
16. Eliseev A. G. 2022, “An example of solving a singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a «strong» turning point”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 3, pp. 46-58.
17. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2023. “Regularized asymptotic solutions of a singularly perturbed mixed problem on a semi-shaft for an equation of the Schrodinger type in the presence of a «strong» turning point at the maximum operator” // *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, iss. 1, pp. 50–68. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68.
18. Arnold V. I. 1971, “On matrices depending on parameters”, *UMN*, vol. 26, no. 2(158), pp. 101-114.
19. Landau L. D., Lifshitz E. M. 2004, “Course of theoretical physics. Vol. 3. Quantum mechanics (nonrelativistic theory)”, *Moscow, FIZMATLIT*, 800 p.
20. Liouville J. 1837, “Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pp. 16-35.
21. Elsgolts L. E. 1965, “Differential equations and calculus of variations”, *Moscow, Nauka*, 424 p.

Получено: 28.06.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.28

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-49-69

Доказательство правила Лопиталья

И. Б. Казаков

Казаков Илья Борисович — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт; Российский экономический университет им. Плеханова (г. Москва).
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

Аннотация

В настоящей работе представлено новое доказательство правила Лопиталья, предлагаемое для изучения преподавателям, читающим курс математического анализа. Соответствующая теорема сформулирована и доказана для 6 пределов $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, для 2 неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и для 4 значений предела $A \in (-\infty, +\infty)$, $A = -\infty$, $A = +\infty$, $A = \infty$, т. е. представленная теорема покрывает $6 * 2 * 4 = 48$ частных случаев правила Лопиталья. Представленное доказательство отличается от многих традиционных доказательств тем, что кроме определения предела функции по Коши в нём также используется определение предела функции по Гейне. В качестве важного вспомогательного утверждения, позволяющего применить определение предела функции по Гейне, используется теорема о единственном частичном пределе. Данное утверждение позволяет также применить арифметические свойства пределов последовательности в доказательстве для неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ и предела $x \rightarrow a+0$, т. е. для случая, где достигается наиболее существенное упрощение доказательства.

Ключевые слова: Правило Лопиталья, частичные пределы, определение предела функции по Гейне, математический анализ для студентов первого курса

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

И. Б. Казаков. Доказательство правила Лопиталья // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 49–69.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 517.28

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-49-69

A proof of the L'Hôpital's rule

I. B. Kazakov

Kazakov Ilya Borisovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology; Plehanov Russian State University (Moscow).
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

Abstract

In this paper a new proof of the L'Hôpital's rule proposed for calculus lecturers is presented. The according theorem is formulated and proved for the six types of limit: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, for the two indeterminate forms $\frac{0}{0}$ and $\frac{\infty}{\infty}$ and also for four values of limit $A \in (-\infty, +\infty)$, $A = -\infty$, $A = +\infty$, $A = \infty$. Thus, the theorem covers $6 * 2 * 4 = 48$ cases of the L'Hôpital's rule. The presented proof of the theorem differs from the traditional ones by using not only the Cauchy definition of limit a function but also the Heine one. The single partial limit theorem is used as the important auxiliary statement allowing to apply the Heine definition of limit. This statement also allows to apply arithmetic properties of sequence limits to the proof of the indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$ and the limit $x \rightarrow a + 0$, i.e. for the case where the most significant simplification is achieved.

Keywords: the L'Hôpital's rule, partial limits, Heine definition of a limit of a function, calculus for the first-year students

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. B. Kazakov, 2023, "A proof of the L'Hôpital's rule", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 49–69.

1. Введение

В настоящей работе представлено доказательство правила Лопиталья, использующее определение предела функции по Гейне, а также свойства частичных пределов последовательности. Используемые утверждения входят в стандартный курс математического анализа для технических специальностей, и, следовательно, представляемое доказательство вполне может быть изучено студентами первого курса. С точки зрения автора, данное доказательство является существенно более простым, чем многие традиционные доказательства (см. [4], [9], [14], [8], [2]). Отдельным образом следует упомянуть принадлежащее В.А.Ходакову доказательство, представленное в учебнике [6]. Однако оно, также как и другие доказательства, использует только лишь определение предела функции по Коши, а не определение предела функции по Гейне. Таким образом, содержание настоящей работы может быть использовано преподавателями математического анализа с целью упрощения изложения и сокращения лекционного времени.

Наиболее существенное упрощение достигается для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$. Доказательство для предела $x \rightarrow a + 0$ и для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$, являющееся в настоящей работе наиболее важным, представлено в утверждении 33.

В разделе 2 сформулирована соответствующая теорема, доказательство которой изложено в разделе 3. Заключительные замечания представлены в разделе 4.

2. Формулировка теоремы

В курсе математического анализа рассматриваются двусторонние пределы, односторонние пределы, пределы к бесконечностям со знаком и пределы к бесконечности без знака, то есть пределы по базам $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$. Значение предела может быть либо конечным действительным числом, либо бесконечностью со знаком либо бесконечностью без знака. Неопределённости в правиле Лопиталья бывают двух видов: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Представим формулировку теоремы, покрывающую все упомянутые случаи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

1. \mathfrak{B} — база одного из следующих шести видов: $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow a$ (где $a \in (-\infty, +\infty)$), $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, и выполнено $B \in \mathfrak{B}$;
2. $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$, где $B \in \mathfrak{B}$;
3. $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на множестве B ;
2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} g(x) = 0;$$

$$(b) \lim_{\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} g(x) = \infty.$$

$$3. \forall x \in B \quad g'(x) \neq 0$$

$$4. \lim_{\mathfrak{B}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено $\lim_{\mathfrak{B}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Всего имеется 6 вариантов вида базы предела, 4 варианта значения предела и 2 варианта выбора неопределённости ($\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Таким образом, всего имеется $6 * 4 * 2 = 48$ случаев правила Лопиталья, совокупно представленных в формулировке данной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В формулировке теоремы используется понятие предела по базе, не изучаемое в курсе математического анализа для студентов технических специальностей, однако изучаемое в курсе математического анализа для студентов механико-математических факультетов (например, по учебнику [3]). Использование этого понятия позволяет выразить все случаи в виде единой теоремы, не разделяя её на 6 утверждений.

3. Доказательство

Докажем теорему 1. В подразделах 3.1, 3.2, имеющих подготовительный характер, изложены используемые в доказательстве вспомогательные утверждения. Доказательство для случая $x \rightarrow a + 0$ представлено в подразделе 3.3. Доказательства для всех остальных случаев, использующие замену переменной и связь двусторонних пределов с односторонними, представлены в подразделе 3.4.

3.1. Известные факты

В настоящем подразделе представлены обозначения, понятия и утверждения, прямо или косвенно используемые в доказательстве теоремы 1, то есть в доказательствах утверждений из последующих подразделов 3.2, 3.3, 3.4. В изложении курса математического анализа эти обозначения, понятия и утверждения считаются уже известными к моменту изучения правила Лопиталья, и поэтому представлены без доказательств.

В соответствии с темами, последовательно изучаемыми в курсе математического анализа, данные сведения подразделяются на сведения, относящиеся к пределам последовательностей (подраздел 3.1.1), частичным пределам (подраздел 3.1.2), пределам функций (подраздел 3.1.3), замене переменной в пределе (подраздел 3.1.4), односторонним пределам (подраздел 3.1.5) и производным (подраздел 3.1.6) соответственно.

3.1.1. Предел последовательности

Прежде всего, введём обозначения для ε -окрестностей, где $\varepsilon > 0$. Для конечных действительных чисел $a \in (-\infty, +\infty)$ и для бесконечностей $-\infty, +\infty, \infty$ соответствующие окрестности определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} O_\varepsilon(a) &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \\ O_\varepsilon(+\infty) &= (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty), \\ O_\varepsilon(-\infty) &= (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}), \\ O_\varepsilon(\infty) &= (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \end{aligned}$$

Все окрестности являются подмножествами числовой прямой \mathbb{R} . Эти окрестности обладают свойствами отделимости, выражаемыми следующими утверждениями:

Утверждение 1. Пусть $A, B \in [-\infty, +\infty]$, $A \neq B$ — различные элементы расширенной числовой прямой. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$.

Утверждение 2. Пусть $A \in (-\infty, +\infty)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(\infty) = \emptyset$

Соответствующим образом определено понятие предела последовательности $x_n \rightarrow A$, где рассматриваются 4 случая: $A \in (-\infty, +\infty)$, $A = -\infty$, $A = +\infty$, $A = \infty$.

DEFINITION 1. Пусть $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ — элемент расширенной числовой прямой или бесконечность без знака. Полагаем, что $x_n \rightarrow A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что для любого $n > N$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(A)$.

Конечным числом членов последовательности возможно пренебречь:

Утверждение 3. Пусть x_n, y_n — последовательности, N — натуральное число, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Если $x_n \rightarrow A$, и для всех n выполнено $y_n = x_{n+N}$, то $y_n \rightarrow A$.

Далее будут использоваться некоторые связанные с бесконечностями арифметические свойства пределов последовательности, а также лемма о двух милиционерах.

Утверждение 4. Пусть x_n, y_n — последовательности, и выполнено $x_n \rightarrow A$, $y_n \rightarrow B$, где $A, B \in (-\infty, +\infty)$. Тогда $x_n + y_n \rightarrow A + B$, $x_n - y_n \rightarrow A - B$, $x_n y_n \rightarrow AB$. Если, кроме того, $B \neq 0$, и для всех n выполнено $y_n \neq 0$, то выполнено $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.

Утверждение 5. Пусть x_n, y_n — последовательности, и выполнено $x_n \rightarrow A$, $y_n \rightarrow B$, где $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, $B \in (-\infty, +\infty)$ Тогда $x_n + y_n \rightarrow A$, $x_n - y_n \rightarrow A$

Утверждение 6. Пусть x_n, y_n — последовательности, и выполнено $x_n \rightarrow A$, $y_n \rightarrow B$, где $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, $B \in (-\infty, +\infty)$, а также для всех n $x_n \neq 0$. Тогда $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0$

Утверждение 7. Пусть x_n, y_n — последовательности, и выполнено $x_n \rightarrow A$, $y_n \rightarrow B$, где $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, $B \in (-\infty, +\infty)$, $B > 0$, а также для всех n $y_n \neq 0$. Тогда $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow A$

Утверждение 8. Пусть x_n, y_n, z_n — последовательности, и выполнено $x_n \rightarrow A$, $z_n \rightarrow A$, $\forall n$ $x_n \leq y_n \leq z_n$, где $A \in [-\infty, +\infty]$. Тогда $y_n \rightarrow A$.

3.1.2. Частичные пределы

В представленном в настоящей работе доказательстве существенным образом используются свойства частичных пределов последовательностей, в частности теорема Больцано-Вейерштрасса и её обобщение на расширенную числовую прямую. Введём обозначение: строго монотонно возрастающую (к бесконечности) последовательность натуральных чисел n_k обозначим как $n_k \uparrow\uparrow +\infty$.

DEFINITION 2. Будем говорить, что последовательность y_k является подпоследовательностью последовательности x_n , если существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$ такая, что для всех k выполнено $y_k = x_{n_k}$

DEFINITION 3. Полагаем, что элемент расширенной числовой прямой $A \in [-\infty, +\infty]$ является частичным пределом последовательности x_n , если существует последовательность y_k , являющаяся подпоследовательностью последовательности x_n , и для которой выполнено $y_k \rightarrow A$.

Утверждение 9. Пусть y_k — подпоследовательность x_n , $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Если выполнено $x_n \rightarrow A$, то также выполнено $y_k \rightarrow A$.

Утверждение 10. Пусть y_k — подпоследовательность x_n . Если A является частичным пределом последовательности y_k , то оно является также и частичным пределом последовательности x_n

Утверждение 11. Пусть x_n — последовательность, $A \in [-\infty, +\infty]$ — элемент расширенной числовой прямой. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех n выполнено $x_n \notin O_\varepsilon(A)$, то A не является частичным пределом x_n

Утверждение 12. Пусть x_n — ограниченная последовательность (т.е. существует M такое, что $|x_n| \leq M$). Тогда существует конечное действительное число $A \in (-\infty, +\infty)$ такое, что A является частичным пределом x_n

Утверждение 13. Пусть x_n — произвольная последовательность. Тогда существует элемент расширенной числовой прямой $A \in [-\infty, +\infty]$ такой, что A является частичным пределом x_n

3.1.3. Предел функции

Выпишем определения предела функции по Коши и по Гейне. Определение по Коши представлено в общем виде как определение предела функции по базе. Соответственно, представлены базы пределов, изучаемых в курсе математического анализа. «Определение Гейне», поскольку фактически является критерием, сформулировано для базы $x \rightarrow a + 0$ в виде соответствующих утверждений 15 и 16.

DEFINITION 4. Базой \mathfrak{B} над множеством X называется семейство его подмножеств, обладающее следующими свойствами:

1. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ выполнено $B \neq \emptyset$
2. Для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ найдётся $B_3 \in \mathfrak{B}$ такое, что выполнено $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

В курсе математического анализа рассматриваются следующие базы над множеством действительных чисел \mathbb{R} :

1. $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a+0} = \{(a, a + \delta)\}_{\delta > 0}$, где $a \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a-0} = \{(a - \delta, a)\}_{\delta > 0}$, где $a \in (-\infty, +\infty)$
3. $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a} = \{(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\}_{\delta > 0}$, где $a \in (-\infty, +\infty)$
4. $\mathfrak{B}_{x \rightarrow +\infty} = \{(\frac{1}{\delta}, +\infty)\}_{\delta > 0}$
5. $\mathfrak{B}_{x \rightarrow -\infty} = \{(-\infty, -\frac{1}{\delta})\}_{\delta > 0}$

$$6. \mathfrak{B}_{x \rightarrow \infty} = \{(-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)\}_{\delta > 0}$$

Все перечисленные базы обладают свойством отделимости:

Утверждение 14. Пусть \mathfrak{B} — база одного из следующих шести видов: $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$, $x \rightarrow a$ (где $a \in (-\infty, +\infty)$), $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ — конечное множество. Тогда найдётся множество $B \in \mathfrak{B}$ такое, что выполнено $B \cap X = \emptyset$

DEFINITION 5. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, \mathfrak{B} — база над множеством действительных чисел \mathfrak{B} такая, что для всех $B \in \mathfrak{B}$ выполнено $B \cap E \neq \emptyset$. Полагаем, что $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$, где $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент базы $B \in \mathfrak{B}$ такой, что для всех $x \in E \cap B$ выполнено $f(x) \in O_\varepsilon(A)$

Утверждение 15. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ x_n — последовательность, обладающая следующими свойствами:

$$1. \forall n x_n \in (a, b)$$

$$2. x_n \rightarrow a$$

Если выполнено $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, то также выполнено $f(x_n) \rightarrow A$.

Утверждение 16. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$, то существует последовательность x_n , обладающая следующими свойствами:

$$1. \forall n x_n \in (a, b)$$

$$2. x_n \rightarrow a$$

$$3. f(x_n) \not\rightarrow A$$

3.1.4. Замена переменной

Выпишем утверждения, соответствующие частным случаям замены переменной в пределе $x \rightarrow \frac{1}{x}$ и $x \rightarrow -x$.

Утверждение 17. Пусть $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 : (0, \frac{1}{a}) \rightarrow \mathbb{R}$, где $a > 0$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Если для всех $x \in (0, \frac{1}{a})$ выполнено $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$, то условия $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = A$ равносильны.

Утверждение 18. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 : (-E) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Если для всех $x \in (-E)$ выполнено $f_1(x) = f(-x)$, то:

$$1. \text{Условия } \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = A \text{ равносильны.}$$

$$2. \text{Условия } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = A \text{ равносильны.}$$

3.1.5. Односторонние пределы

Выпишем свойства односторонних пределов, используемые в доказательстве случаев $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow \infty$.

Утверждение 19. Пусть $f : (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Тогда условия $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ равносильны.

Утверждение 20. Пусть $f : (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Тогда условия $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ равносильны.

3.1.6. Производная

Доказательство правила Лопиталья использует предварительно изучаемые теоремы дифференциального исчисления: теорему Ролля (утверждение 22) и теорему Коши о среднем значении (утверждения 23, 24). С точки зрения автора, доопределение функций нулем в основной части доказательства может снизить строгость изложения, поэтому упомянутые теоремы дифференциального исчисления представлены в специфических формах, которые уже готовы для непосредственного применения в доказательствах соответствующих утверждений. Кроме того, для случая $x \rightarrow +\infty$, а также для случаев левосторонних пределов необходима теорема о дифференцировании сложной функции (утверждение 21).

DEFINITION 6. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, x_0 — внутренняя точка множества E . Будем говорить, что функция f дифференцируема в точке x_0 , если выполнено $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$, где $A \in (-\infty, +\infty)$. Данный предел называется производной функции f в точке x_0 , и обозначается как $f'(x_0)$.

Утверждение 21. Пусть $f : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, $f(E_1) \subset E_2$, x_0 — внутренняя точка множества E_1 , y_0 — внутренняя точка множества E_2 , $y_0 = f(x_0)$, для всех $x \in E_1$ выполнено $h(x) = g(f(x))$. Если функция f дифференцируема в точке x_0 , и функция g дифференцируема в точке y_0 , то функция h также дифференцируема в точке x_0 , и выполнено $h'(x_0) = f'(x_0)g'(y_0)$.

Утверждение 22. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in (a, b)$, $x < y$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функция f дифференцируема на интервале (a, b)
2. $f(x) = f(y)$

То найдётся $\xi \in (x, y)$ такое, что выполнено $f'(\xi) = 0$.

Утверждение 23. Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$
3. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

То найдётся $\xi \in (a, c)$ такое, что выполнено $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(c)}{g(c)}$

Утверждение 24. Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in (a, b)$, $x < y$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)
2. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

То найдётся $\xi \in (x, y)$ такое, что выполнено $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}$

3.2. Вспомогательные леммы

В настоящем подразделе представим и докажем вспомогательные леммы, используемые в доказательстве.

В подразделе 3.2.1 представим теорему о единственном частичном пределе (утверждение 25), а также её аналог для последовательности, не сходящейся к бесконечности без знака (утверждение 26). С помощью этой теоремы установим утверждения об отделимости для предела последовательности (утверждение 27) и для предела функции (утверждение 28), позволяющие использовать определение предела функции по Гейне при работе с бесконечностями. Отдельно отметим, что в основной части доказательства используется только конечное утверждение 28 подраздела 3.2.1.

В подразделе 3.2.2 представлено утверждение 31, используемое для сужения области определения функции $\frac{f}{g}$ в целях недопущения деления на ноль.

3.2.1. Теорема о единственном частичном пределе и её следствия

Утверждение 25. Пусть x_n — последовательность, $A \in [-\infty, +\infty]$. Если выполнено $x_n \not\rightarrow A$, то существует $B \in [-\infty, +\infty]$, $B \neq A$ такое, что B — частичный предел последовательности x_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как $x_n \not\rightarrow A$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что множество $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$ содержит бесконечное число членов последовательности x_n . Выберем такое $\varepsilon > 0$.
2. Пронумеруем члены последовательности x_n , лежащие в множестве $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$, последовательностью натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$, т.е. построим n_k таким образом, чтобы для всех k было выполнено $x_{n_k} \in \mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$.
3. Положим $y_k = x_{n_k}$. В соответствии с утверждением 13, у последовательности y_k есть хотя бы один частичный предел $B \in [-\infty, +\infty]$.
4. Так как y_k — подпоследовательность x_n , и B — частичный предел y_k , то, в соответствии с утверждением 10, B — частичный предел x_n .
5. Так как для всех k выполнено $y_k \notin O_\varepsilon(A)$, то, в соответствии с утверждением 11, A не является частичным пределом последовательности y_k . И, следовательно, $B \neq A$.

□

Утверждение 26. Пусть x_n — последовательность, для которой выполнено $x_n \not\rightarrow \infty$. Тогда существует $B \in (-\infty, +\infty)$ такое, что B — частичный предел последовательности x_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как $x_n \not\rightarrow \infty$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что множество $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(\infty) = [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$ содержит бесконечное число членов последовательности x_n . Выберем такое $\varepsilon > 0$.
2. Пронумеруем члены последовательности x_n , лежащие в множестве $[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, последовательностью натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$, т.е. построим n_k таким образом, чтобы для всех k было выполнено $x_{n_k} \in [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$.
3. Положим $y_k = x_{n_k}$. Так как для всех k выполнено $y_k \in [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, то, в соответствии с утверждением 12, у ограниченной последовательности y_k есть хотя бы один частичный предел $B \in (-\infty, +\infty)$.
4. Так как y_k — подпоследовательность x_n , и B — частичный предел y_k , то, в соответствии с утверждением 10, B — частичный предел x_n .

□

Утверждение 27. Пусть x_n — последовательность, для которой выполнено $x_n \not\rightarrow A$, где $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $B \in [-\infty, +\infty]$ такие, что B — частичный предел x_n , и выполнено $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Возможны 2 случая: случай $A \in [-\infty, +\infty]$ и случай $A = \infty$.
 2. Случай $A \in [-\infty, +\infty]$:
 - 2.1. Так как $x_n \not\rightarrow A$, то, в соответствии с утверждением 25, существует $B \in [-\infty, +\infty]$ такое, что B — частичный предел x_n , и $B \neq A$.
 - 2.2. Так как $A, B \in [-\infty, +\infty]$, $A \neq B$, то, в соответствии с утверждением 1, существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$.
 3. Случай $A = \infty$:
 - 3.1. Так как $x_n \not\rightarrow \infty$, то, в соответствии с утверждением 26, существует $B \in (-\infty, +\infty)$ такое, что B — частичный предел x_n .
 - 3.2. В соответствии с утверждением 2, существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено $O_\varepsilon(B) \cap O_\varepsilon(\infty) = \emptyset$.
-

Утверждение 28. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$, то существуют $\varepsilon > 0$, $B \in [-\infty, +\infty]$ и последовательность x_n такие, что выполнено:

1. $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2. $x_n \rightarrow a$
3. $f(x_n) \rightarrow B$
4. $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$, то, в соответствии с утверждением 16, существует последовательность y_s , обладающая следующими свойствами:

1. $\forall s \ y_s \in (a, b)$
2. $y_s \rightarrow a$
3. $f(y_s) \not\rightarrow A$

2. Положим $z_s = f(y_s)$. Так как $z_s \not\rightarrow A$, то, в соответствии с утверждением 27, существуют $\varepsilon > 0$ и $B \in [-\infty, +\infty]$ такие, что B является частичным пределом z_s , и выполнено $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$.

3. Так как B является частичным пределом z_s , то существует последовательность натуральных чисел $s_n \uparrow +\infty$ такая, что выполнено $f(y_{s_n}) = z_{s_n} \rightarrow B$.

4. Положим $x_n = y_{s_n}$. Тогда $\forall n \ x_n = y_{s_n} \in (a, b)$, $f(x_n) = f(y_{s_n}) \rightarrow B$.

5. Так как x_n — подпоследовательность y_s , и выполнено $y_s \rightarrow a$, то, в соответствии с утверждением 9, также выполнено $x_n \rightarrow a$.

□

3.2.2. Сужение области определения

Утверждение 29. Пусть:

1. \mathfrak{B} — база одного из следующих четырех видов: $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$
2. $B \in \mathbb{B}$

$$3. g : B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$4. X = \{x \in B | g(x) = 0\}$$

Если выполнено $\forall x g'(x) \neq 0$, то $|X| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Предположим обратное, т.е. что у функции g имеется на множестве B более одного нуля.
2. Тогда найдутся $x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2$ такие, что выполнено $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
3. Так как $B \in \mathbb{B}$, и база \mathbb{B} является одной из баз $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, то множество B является выпуклым.
4. Так как множество B является выпуклым, $x_1, x_2 \in B$, и функция g дифференцируема на множестве B , то, в соответствии с утверждением 22, найдётся $\xi \in (x_1, x_2) \subset B$ такое, что выполнено $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию, налагаемому на функцию g .

□

Утверждение 30. Пусть:

1. \mathfrak{B} — база одного из следующих двух видов: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$

2. $B \in \mathfrak{B}$

$$3. g : B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$4. X = \{x \in B | g(x) = 0\}$$

Если выполнено $\forall x g'(x) \neq 0$, то $|X| \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Предположим обратное, т.е. что у функции g на множестве B имеется более двух нулей.
2. Так как $B \in \mathbb{B}$, и база \mathbb{B} является одной из баз $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, то $B = B_1 \cup B_2$, где B_1, B_2 — выпуклые множества.
3. Так как функция g имеет хотя бы три различных нуля на множестве B , то, в соответствии с принципом Дирихле, хотя бы одно из множеств B_1, B_2 содержит два различных нуля функции g . Пусть, для определённости, два различных нуля содержатся в множестве B_1 .
4. То есть найдутся $x_1, x_2 \in B_1$, $x_1 < x_2$ такие, что выполнено $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
5. Так как множество B_1 является выпуклым, $x_1, x_2 \in B_1$, и функция g дифференцируема на множестве $B_1 \subset B$, то, в соответствии с утверждением 22, найдётся $\xi \in (x_1, x_2) \subset B_1$ такое, что выполнено $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию, налагаемому на функцию g .

□

Утверждение 31. Пусть:

1. \mathfrak{B} — база одного из следующих шести видов: $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow a$ (где $a \in (-\infty, +\infty)$), $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$

2. $B \in \mathfrak{B}$

$$3. g : B \rightarrow \mathbb{R}$$

Если выполнены следующие условия:

1. Функция g дифференцируема на множестве B

2. $\forall x \in B g'(x) \neq 0$

То существует $B' \in \mathfrak{B}$, $B' \subset B$ такое, что:

1. Для любого $x \in B'$ выполнено $g(x) \neq 0$
2. Для любых $x, y \in B'$, таких что $x < y$ и $[x, y] \subset B'$, выполнено $g(x) \neq g(y)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Обозначим: $X = \{x \in B | g(x) = 0\}$.
2. Докажем, что множество X конечно.
 - 2.1. В случае баз $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, в соответствии с утверждением 29, выполнено $|X| \leq 1$
 - 2.2. В случае баз $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, в соответствии с утверждением 30, выполнено $|X| \leq 2$
3. Так как X – конечно, то в соответствии с утверждением 14, найдётся множество $B_0 \in \mathfrak{B}$ такое, что выполнено $B_0 \cap X = \emptyset$
4. В соответствии с определением базы, выберем элемент $B' \in \mathfrak{B}$ такой, что $B' \subset B \cap B_0$. Таким образом, выполнено $B' \subset B$, и для всех $x \in B'$ выполнено $g'(x) \neq 0$.
5. Зафиксируем $x, y \in B'$ такие, что выполнено $x < y$ и $[x, y] \subset B'$.
6. Предположим обратное, т.е. что выполнено $g(x) = g(y)$.
7. Так как функция g дифференцируема на множестве B' , $x < y$, $[x, y] \subset B'$, $g(x) = g(y)$, то, в соответствии с утверждением 22, найдётся $\xi \in (x, y) \subset B' \subset B$ такое, что выполнено $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию, накладываемому на функцию g .

□

3.3. Случай $x \rightarrow a + 0$

В настоящем подразделе представлена основная часть доказательства правила Лопиталья, т.е. доказательство для случая $x \rightarrow a + 0$. Неопределённости $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ рассмотрены в подразделах 3.3.1 и 3.3.2 соответственно.

Оба доказательства являются доказательствами от противного, рассматривающими соответствующие последовательности Гейне. Однако, доказательство для неопределённости $\frac{0}{0}$ концептуально мало чем отличается от доказательств, использующих традиционные подходы.

В доказательстве для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ определение Гейне используется не напрямую, а через предварительно доказанную лемму (см. утверждение 28). Использование этой леммы позволяет рассматривать последовательность Гейне x_n такую, что соответствующая последовательность $f(x_n)/g(x_n)$ не только не сходится к предполагаемому пределу A , но также сходится к некоторому другому пределу B .

3.3.1. Неопределённость $\frac{0}{0}$

Утверждение 32. Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$
3. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

То выполнено $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Этап I: Построение последовательности Гейне

1. В соответствии с утверждением 31, найдётся $b' \in (a, b)$ такое, что для всех $x \in (a, b')$ выполнено $g(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена на всём интервале (a, b') .

2. Предположим обратное, т.е. $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq A$. Тогда, в соответствии с утверждением 16, применённом к ограничению функции $\frac{f}{g}$ на множество (a, b') , существует последовательность x_n , обладающая следующими свойствами:

1. $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2. $x_n \rightarrow a$
3. $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \not\rightarrow A$

Этап II: Применение теоремы Коши о среднем

3. В соответствии с утверждением 23, построим последовательность ξ_n , обладающую следующими свойствами:

1. $\forall n \ \xi_n \in (a, x_n) \subset (a, b')$
2. $\forall n \ \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$

4. Так как $x_n \rightarrow a$, и для всех n выполнено $a < \xi_n < x_n$, то, в соответствии с утверждением 8, также выполнено $\xi_n \rightarrow a$.

5. Так как $\forall n \ \xi_n \in (a, b')$, $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $\xi_n \rightarrow a$, то, в соответствии с утверждением 15, выполнено также $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A$

6. Таким образом, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A$, что противоречит $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \not\rightarrow A$ (см. п.2)

□

3.3.2. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$

Утверждение 33. Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)
2. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

То выполнено $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Этап I: Построение последовательности Гейне

1. В соответствии с утверждением 31, найдётся $b' \in (a, b)$ такое, что для всех $x \in (a, b')$ выполнено $g(x) \neq 0$, а также для любых $x, y \in (a, b')$, $x < y$ выполнено $g(x) \neq g(y)$. Отсюда следует, что функция $\frac{f}{g}$ определена на всём интервале (a, b') .

2. Предположим обратное, т.е. $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq A$. Тогда, в соответствии с утверждением 28, применённым к ограничению функции $\frac{f}{g}$ на интервал (a, b') , существуют $\varepsilon > 0$, $B \in [-\infty, +\infty]$ и последовательность x_n такие, что выполнено:

1. $\forall n x_n \in (a, b')$
2. $x_n \rightarrow a$
3. $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow B$
4. $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$

3. Так как $x_n \rightarrow a$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$ и $\forall n x_n \in (a, b)$, то, в соответствии с утверждением 15, выполнено $g(x_n) \rightarrow \infty$.

Этап II: Отбрасывание конечного числа членов последовательности

4. Докажем, что существует $c \in (a, b')$ такое, что для всех $x \in (a, c)$ выполнено $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$.
- 4.1. Так как $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a, a + \delta) \cap (a, b)$ выполнено $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$.
- 4.2. Положим $c = \min(a + \delta, b')/2$. Тогда для всех $x \in (a, c) \subset (a, a + \delta) \cap (a, b)$ выполнено $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$.
5. Докажем, что существует натуральное число N такое, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in (a, c)$.
- 5.1. Так как $x_n \rightarrow a$, то существует натуральное число N такое, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in O_{c-a}(a) = (a - (c - a), c)$. Выберем такое N .
- 5.2. Однако, для всех n выполнено $x_n \in (a, b)$. Таким образом, для всех $n > N$ выполнено $x_n \in (a - (c - a), c) \cap (a, b) = (a, c)$.
6. Положим $y_n = x_{n+N}$. В соответствии с утверждением 3 и свойствами последовательности x_n (п.2, 3, 5), установим следующие свойства последовательности y_n :

1. $\forall n y_n = x_{n+N} \in (a, c)$
2. $y_n \rightarrow a$
3. $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \rightarrow B$
4. $g(y_n) \rightarrow \infty$

Этап III: Применение теоремы Коши о среднем значении

7. Положим $z_n = \frac{f(c) - f(y_n)}{g(c) - g(y_n)}$. Так как $\forall n y_n \in (a, c) \subset (a, b')$, то, в силу установленного в п.2, $\forall n g(y_n) \neq g(c)$, и, следовательно, z_n определена для всех n . Также отметим, что для всех n выполнено $g(y_n) \neq 0$.
8. Докажем, что для всех n выполнено $z_n \in O_\varepsilon(A)$.
- 8.1. В соответствии с утверждением 24, построим последовательность ξ_n , обладающую следующими свойствами:

1. $\forall n \xi_n \in (y_n, c) \subset (a, c)$
2. $\forall n \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(c) - f(y_n)}{g(c) - g(y_n)} = z_n$

8.2. Так как $\forall n \xi_n \in (a, c)$, то, в соответствии с п.4, $\forall n z_n = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \in O_\varepsilon(A)$

Этап IV: Применение арифметических свойств предела последовательности

9. Докажем, что выполнено $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow B$. Предварительно отметим, для всех n выполнено $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \neq 0$. (см. п.1)

9.1. Так как $g(y_n) \rightarrow \infty$, то в соответствии с утверждением 6, выполнено $\frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$ и $\frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$

9.2. В соответствии с утверждением 4, также выполнено $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 1$

9.3. Рассмотрим случай $B \in (-\infty, +\infty)$. В соответствии с утверждением 4, выполнено $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow \frac{B-0}{1-0} = B$

9.4. Рассмотрим случай $B \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$.

9.4.1. Так как $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \rightarrow B$, $\frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$, то, в соответствии с утверждением 5, выполнено $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow B$

9.4.2. Так как $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow B$, $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 1$, то, в соответствии с утверждением 7, выполнено $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow B$

10. Так как $z_n \rightarrow B$, то существует натуральное число N' такое, что для всех $n > N'$ выполнено $z_n \in O_\varepsilon(B)$. В частности, $z_{N'+1} \in O_\varepsilon(B)$.

11. Таким образом, $z_{N'+1} \in O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B)$ (п. 8, 10), что противоречит $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$ (п. 2).

□

3.4. Остальные случаи

В настоящем подразделе представлено завершение доказательства правила Лопиталья, то есть доказательства для всех случаев, кроме уже рассмотренного случая $x \rightarrow a + 0$. В подразделе 3.4.1 рассмотрен случай $x \rightarrow +\infty$, и, далее в подразделах 3.4.2, 3.4.3 рассматриваются случаи левосторонних и двусторонних пределов соответственно.

Случай $x \rightarrow +\infty$ сводится к случаю $x \rightarrow a + 0$ посредством применения замены $x \rightarrow \frac{1}{x}$. Случаи левосторонних пределов сводятся к случаям правосторонних пределов посредством применения замены $x \rightarrow -x$. Утверждения для двусторонних пределов следуют из соответствующих утверждений для односторонних пределов.

3.4.1. Случай $x \rightarrow +\infty$

Утверждение 34. Пусть $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, где $a > 0$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)
2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех $x \in (a, +\infty)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

То выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. В соответствии с утверждением 31, существует $a' \in (a, +\infty)$ такое, что для всех $x \in (a', +\infty)$ выполнено $g(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена на всём полуинтервале $(a', +\infty)$

2. Отметим, что так как $\forall x \in (a', +\infty) g'(x) \neq 0$, то функция $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ также определена для всех $x \in (a', +\infty)$

3. Определим функции $f_1, g_1 : (0, \frac{1}{a'}) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $x \in (0, \frac{1}{a'})$ полагаем $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$, $g_1(x) = g(\frac{1}{x})$.

4. В соответствии с утверждением 21, функции f_1, g_1 дифференцируемы на интервале $(0, \frac{1}{a'})$, и для всех $x \in (0, \frac{1}{a'})$ выполнено $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$, $g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})$

5. Докажем, что для всех $x \in (0, \frac{1}{a'})$ выполнено $g_1(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ определена на всём интервале $(0, \frac{1}{a'})$

5.1. Зафиксируем $x \in (0, \frac{1}{a'})$.

5.2. Тогда $\frac{1}{x} \in (a', +\infty)$, и, следовательно $g_1(x) = g(\frac{1}{x}) \neq 0$.

6. Докажем, что для всех $x \in (0, \frac{1}{a'})$ выполнено $g_1'(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$ определена на всём интервале $(0, \frac{1}{a'})$

6.1. Зафиксируем $x \in (0, \frac{1}{a'})$.

6.2. Тогда выполнено $\frac{1}{x} \in (a', +\infty)$, и, следовательно, $g'(\frac{1}{x}) \neq 0$

6.3. Так как $-\frac{1}{x^2} \neq 0$, $g'(\frac{1}{x}) \neq 0$, то $g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x}) \neq 0$

7. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = \infty$$

7.1. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, то, в соответствии с утверждением 17, также выполнено $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = 0$

7.2. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$, то, в соответствии с утверждением 17, также выполнено $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = \infty$

8. Так как $\forall x \in (0, \frac{1}{a'}) \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то, в соответствии с утверждением 17, выполнено $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = A$. Области определения функций

$\frac{f'}{g'}$, $\frac{f_1'}{g_1'}$ рассмотрены в п.2, 6 соответственно.

9. Выводы п.4, 6, 7, 8 образуют условия правила Лопиталья в случае $x \rightarrow +0$ для функций f_1, g_1 . В соответствии с утверждениями 32, 33 выполнено $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

10. Так как для всех $\forall x \in (0, \frac{1}{a'}) \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$ (п.9), то, в соответствии с утверждением 17, выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Области определения функций

$\frac{f}{g}$, $\frac{f_1}{g_1}$ рассмотрены в п.1, 5 соответственно.

□

3.4.2. Случаи левосторонних пределов

Утверждение 35. Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на интервале (a, b)

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$$

3. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{То выполнено } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Определим функции $f_1, g_1 : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $x \in (-b, -a)$ полагаем $f_1(x) = f(-x)$, $g_1(x) = g(-x)$.

2. В соответствии с утверждением 21, функции f_1, g_1 дифференцируемы на интервале $(-b, -a)$, и для всех $x \in (-b, -a)$ выполнено $f_1'(x) = -f'(-x)$, $g_1'(x) = -g'(-x)$

3. Докажем, что для всех $x \in (-b, -a)$ выполнено $g_1'(x) \neq 0$.

3.1. Зафиксируем $x \in (-b, -a)$

3.2. Тогда выполнено $-x \in (a, b)$, и, следовательно, $g_1'(x) = -g'(-x) \neq 0$

4. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = \infty$$

4.1. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$, то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено $\lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = 0$

4.2. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$, то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено $\lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = \infty$

5. Отдельно выпишем соотношения областей определения функций: $\text{dom}\left(\frac{f_1'}{g_1'}\right) = -\text{dom}\left(\frac{f'}{g'}\right)$, $\text{dom}\left(\frac{f_1}{g_1}\right) = -\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)$

6. Так как $\forall x \in (-b, -a) \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-f'(-x)}{-g'(-x)} = \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \frac{f'}{g'}(-x)$, то, в соответствии с утверждением 18, выполнено $\lim_{x \rightarrow -b+0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = A$

7. Выводы п.2,3,4,6 образуют условия правила Лопиталья в случае $x \rightarrow -b+0$. В соответствии с утверждениями 32, 33 выполнено $\lim_{x \rightarrow -b+0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

8. Так как для всех $\forall x \in (-b, -a) \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f}{g}(-x)$, то, в соответствии с утверждением 18, выполнено $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

□

Утверждение 36. Пусть $f, g : (-\infty, -a) \rightarrow \mathbb{R}$, где $a > 0$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на полуинтервале $(-\infty, -a)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех $x \in (a, b)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{То выполнено } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Определим функции $f_1, g_1 : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $x \in (a, +\infty)$ полагаем $f_1(x) = f(-x)$, $g_1(x) = g(-x)$.

2. В соответствии с утверждением 21, функции f_1, g_1 дифференцируемы на интервале $(a, +\infty)$, и для всех $x \in (a, +\infty)$ выполнено $f_1'(x) = -f'(-x)$, $g_1'(x) = -g'(-x)$

3. Докажем, что для всех $x \in (a, +\infty)$ выполнено $g_1'(x) \neq 0$.

3.1. Зафиксируем $x \in (a, +\infty)$

3.2. Тогда выполнено $-x \in (-\infty, -a)$, и, следовательно, $g_1'(x) = -g'(-x) \neq 0$

4. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \infty$$

4.1. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 0$

4.2. В случае если выполнено $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$, то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \infty$

5. Отдельно выпишем соотношения областей определения функций: $\text{dom}(\frac{f_1'}{g_1'}) = -\text{dom}(\frac{f'}{g'})$, $\text{dom}(\frac{f_1}{g_1}) = -\text{dom}(\frac{f}{g})$

6. Так как $\forall x \in (-\infty, -a)$ $\frac{f_1'}{g_1'}(x) = \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-f'(-x)}{-g'(-x)} = \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \frac{f'}{g'}(-x)$, то, в соответствии с утверждением 18, выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = A$

7. Выводы п.2,3,4,6 образуют условия правила Лопиталья в случае $x \rightarrow +\infty$. В соответствии с утверждением 34 выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

8. Так как для всех $\forall x \in (-\infty, -a)$ $\frac{f_1}{g_1}(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f}{g}(-x)$, то, в соответствии с утверждением 18, выполнено $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

□

3.4.3. Случай двусторонних пределов

Утверждение 37. Пусть $f, g : (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$.

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на множестве $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

3. Для всех $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В соответствии с утверждением 31, существует $\delta' > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta', a) \cup (a, a + \delta')$ выполнено $g(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена на всём множестве $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$. Далее будем рассматривать сами функции f, g как определённые на множестве $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$.

2. В соответствии с утверждением 19, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$$

3. Аналогично, также в соответствии с утверждением 19, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x) = \infty$$

4. Вновь применяя утверждение 19, получаем выполнение условий $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

5. Выводы п.2, 4, 5 образуют условия правила Лопиталья в случаях $x \rightarrow a + 0$ и $x \rightarrow a - 0$. В соответствии с утверждениями 32, 33, 35 выполнено $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

6. Применяя утверждение 19 в обратную сторону, получаем $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

□

Утверждение 38. Пусть $f, g : (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}.$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции f, g дифференцируемы на множестве $(-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех $x \in (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)$ выполнено $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. В соответствии с утверждением 31, существует $\delta' > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta', a) \cup (a, a + \delta')$ выполнено $g(x) \neq 0$. Откуда следует, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена на всём множестве $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$. Далее будем рассматривать сами функции f, g как определённые на множестве $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$.

2. В соответствии с утверждением 20, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$$

3. Аналогично, также в соответствии с утверждением 20, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

4. Вновь применяя утверждение 20, получаем выполнение условий $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

5. Выводы п.2, 4, 5 образуют условия правила Лопиталья в случаях $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. В соответствии с утверждениями 32, 33, 36 выполнено $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

6. Применяя утверждение 20 в обратную сторону, получаем $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

□

Случай $x \rightarrow a + 0$ покрывается утверждениями 32, 33, а случай $x \rightarrow +\infty$ — утверждением 34. Далее, случаи $x \rightarrow a - 0, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow a, x \rightarrow \infty$ покрываются утверждениями 35, 36, 37, 38 соответственно. Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Заключение

В курсе математического анализа изложение полного доказательства правила Лопиталья является одной из тем повышенной сложности. Одним из возможных путей обобщения представленного результата является ослабление условия $\forall x g'(x) \neq 0$: доказательство использует теорему Коши о среднем, в которой, в свою очередь, условие $g' \neq 0$ ослабляется до условия $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$. Однако, несмотря на возможность ослабления, данное условие существенно: контрпримеры, демонстрирующие существенность данного условия, представлены в [11], [13], [16]. Имеются также некоторые другие обобщения правила Лопиталья, см. например, работы [12], [15].

Далее планируются публикации, посвященные другим темам математического анализа, таким как «Равномерная непрерывность», «Равномерная сходимость», а также «Многомерный предел и дифференцируемость функций многих переменных». В этих публикациях будут представлены доказательства соответствующих теорем, использующие критерии, аналогичные определению предела функции по Гейне.

Отдельно отметим, что «определение по Гейне» может быть обобщено также и для пределов по произвольной базе: в общем случае последовательность заменяется направленностью, т. е. множеством элементов соответствующего пространства, на котором введено отношение частичного порядка. (см., например, [10], [5]). Поскольку для некоторой точки топологического

пространства система её окрестностей является базой предела, то используемые в настоящей работе технические рассуждения (например, понятие частичного предела и его свойства) могут быть перенесены на произвольные топологические и метрические пространства.

Автор, таким образом, предполагает, что использование «определения Гейне» позволит, возможно, упростить доказательства некоторых теорем общей топологии и функционального анализа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология // М.: Высшая школа. 1979, 336 с.
2. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2014, 480 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. Изд. 10-е, испр. // М.: МЦНМО. 2019, xii+564 с.
4. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу // М.: МФТИ. 2017, 340 с.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ // М.: Наука. 1984, 752 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1. 2-е. изд., перераб. и доп. // М.: Высш. шк. 1988, 713 с.
7. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов // М.: Наука. 1975, 240 с.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа: учебное пособие. 6-е изд., стер. // М.: Физматлит. 2001, 592 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // М.: Наука. 1966, 607 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология // М.: Мир. 1986, 752 с.
11. Boas R. P. Counterexamples to L'Hôpital's rule // American Mathematical Monthly. 1986. vol. 93, no. 9, pp. 644 - 645.
12. Lee C. M. Generalizations of L'Hôpital's rule // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. vol. 66, no. 2, pp. 315-320.
13. Tausk D. V. Counterexample to L'Hôpital's rule // URL:<https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/CounterExampleLHospital.pdf>
14. Taylor A. E. L'Hospital's Rule // The American Mathematical Monthly. 1952. Volume: 59, Issue: 1, pp. 20 — 24.
15. Vianello M. A generalization of L'Hôpital's rule via absolute continuity and Banach modules // Real Analysis Exchange. 1993. vol. 18, no. 2, pp. 557-567.
16. Vyborny R., Nester R. L'Hôpital's rule, a counterexample // Elemente der Mathematik. 1989. Volume: 44, Issue: 5, pp. 116-121.

REFERENCES

1. Aleksandryan, R. A. & Mirzahanyan, E. A. 1979, «Obshchaya topologiya [General topology]», Vysshaya shkola, Moscow, Russia, 336 pp.
2. Besov O. V. 2014, «Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on calculus]», FIZMATLIT, Moscow, Russia, 480 pp.
3. Zorich, V. A. 2019, «Matematicheskij analiz. CHast' 1. [Calculus. Part 1]», 10th edition, MCCME, Moscow, Russia, xii+564 pp.
4. Ivanov, G. E. 2017, «Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on calculus]», MIPT, Moscow, Russia, 340 pp.
5. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. 1984, «Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]», Nauka, Moscow, Russia, 752 pp.
6. Kudryavcev, L. D. 1988, «Kurs matematicheskogo analiza [The course of calculus]. Volume 1», 2nd edition, Vysshaya shkola, Moscow, Russia, 713 pp.
7. Lavrov, I. A. & Maksimova, L. L. 1975, «Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov [Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms]», Nauka, Moscow, Russia, 240 pp.
8. Nikol'skij, S. M. 2001, «Kurs matematicheskogo analiza [The course of calculus]», 6th edition, FIZMATLIT, Moscow, Russia., 592 pp.
9. Fihtengol'c, G. M. 1966, «Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya [The course of differential and integral calculus]», Nauka, Moscow, Russia, 607 pp.
10. Engel'king, R. 1986, «Obshchaya topologiya [General topology]», Mir, Moscow, Russia, 752 pp.
11. Boas, R. P. 1986, «Counterexamples to L'Hôpital's rule», American Mathematical Monthly, vol. 93, no. 9, pp. 644 — 645.
12. Lee, C. M. 1977, «Generalizations of l'Hôpital's rule», Proc. Amer. Math. Soc, vol. 66, no. 2, pp. 315-320.
13. Tausk, D. V., “Counterexample to l'Hôpital's rule”, Available at: <https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/CounterExampleLHospita.pdf>
14. Taylor, A. E. 1952, «L'Hospital's Rule», The American Mathematical Monthly, Volume: 59, Issue: 1, pp. 20 — 24.
15. Vianello, M. 1993, «A generalization of l'Hôpital's rule via absolute continuity and Banach modules», Real Analysis Exchange, vol. 18, no. 2, pp. 557-567.
16. Vyborny, R. & Nester, R. 1989, «L'Hôpital's rule, a counterexample», Elemente der Mathematik, Volume: 44, Issue: 5, pp. 116-121.

Получено: 08.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-70-84

Оценка распределения трещин по размерам и ориентациям по данным о следах трещин¹

А. Я. Белов-Канель, А. О. Сулейкин

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: kanelster@gmail.com

Сулейкин Аллан Олегович — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: allansuleykin@gmail.com

Аннотация

Для моделирования трещиноватого породного массива нужно иметь информацию о геометрических характеристиках трещин - их размерах, ориентации, числе.

В результате геологических изысканий и наблюдений в процессе горных работ получают данные о числе и ориентации следов трещин.

Отсюда возникают задачи восстановления пространственной картины расположения трещин на поверхностях или по скважинам. Фактически возникающие здесь задачи являются задачами томографии. Эта работа посвящена их математической постановке и сведению к классическим задачам нахождения обратного преобразования Радона.

В данной работе при рассмотрении задач отыскания распределения трещин только по ориентациям под трещиной будем понимать будем понимать участок плоской поверхности, имеющий произвольную форму.

При решении задачи отыскания совместного распределения трещин по размерам и ориентациям мы будем полагать трещины дискообразными. Если предполагать трещины, скажем, эллиптическими, то задача не решается. Это связано с тем, что эллиптическая трещина задается пятью параметрами: ориентацией плоскости, направлением главных осей и их величинами. Поэтому функция распределения таких трещин по формам и ориентациям есть функция от пяти переменных. С другой стороны, функция распределения следов трещин по размерам и ориентациям есть уже функция от четырех переменных - направления секущей плоскости и величины и направления следа там. Поэтому, задача отыскания распределения трещин для эллиптических трещин, вообще говоря, не решается однозначно, из-за чего приходится предполагать дискообразность.

Ключевые слова: трещины, трещиноватость, скважины, плоскости, направления

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, А. О. Сулейкин. Оценка распределения трещин по размерам и ориентациям по данным о следах трещин // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 70–84.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-19-20073): <https://rscf.ru/project/22-19-20073/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-70-84

Estimation of the distribution of fractures by sizes and orientations based on data on fracture traces

A. Ya. Kanel-Belov, A. O. Suleykin

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Magnitogorsk State Nosov Technical University (Magnitogorsk). *e-mail: kanelster@gmail.com***Suleykin Allan Olegovich** — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: allansuleykin@gmail.com***Abstract**

For modeling a fractured rock mass, it is necessary to have information about the geometric characteristics of the fractures - their sizes, orientations, and numbers.

As a result of geological surveys and observations during mining operations, data are obtained on the number and orientation of fracture traces.

This leads to the tasks of restoring the spatial pattern of the fracture distribution on surfaces or through boreholes. The tasks that actually arise here are tomography tasks. This work is dedicated to their mathematical formulation and reduction to classical problems of finding the inverse Radon transform.

In this work, when considering the tasks of finding the distribution of fractures by orientation alone, under a fracture we will understand a section of a flat surface, having an arbitrary shape.

In solving the problem of finding the joint distribution of fractures by size and orientation, we will consider the fractures to be disc-shaped. Assuming, for example, elliptical fractures makes the problem unsolvable. This is because an elliptical fracture is defined by five parameters: the orientation of the plane, the direction of the main axes, and their magnitudes. Therefore, the distribution function of such fractures by shapes and orientations is a function of five variables. On the other hand, the distribution function of fracture traces by sizes and orientations is already a function of four variables - the direction of the intersecting plane and the size and direction of the trace there. Therefore, the task of finding the distribution of fractures for elliptical fractures, generally speaking, is not solvable unambiguously, which is why disc-shaped fractures are assumed.

Keywords: fractures, fracturing, boreholes, planes, directions

Bibliography: 5 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Balov, A. O. Suleykin. 2023, "Estimation of the distribution of fractures by sizes and orientations based on data on fracture traces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 70–84.

1. Отыскание распределения трещин по ориентациям по числу трещин, пересекающих скважину

В этом параграфе мы рассмотрим задачу описания распределения трещин по направлениям по данным о числе трещин, пересекающих скважину. Мы покажем, что эта задача сводится к следующей классической задаче томографии:

Пусть

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |(\vec{l}, \vec{n})| R(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

По функции $N(\vec{l})$ найти $R(\vec{n})$.

Здесь $N(\vec{l})$ - математическое ожидание числа трещин, пересекающих скважину, заданную вектором \vec{l} (то есть параллельную \vec{l} и имеющую ту же длину), а величина $R(\vec{n})$ имеет смысл плотности суммарной площади трещин в единице объема с заданным нормальным вектором \vec{n} . Интегрирование производится по множеству всех нормалей, т.е. направлений, множитель $1/2$ стоит, т.к. при этом каждая трещина считается дважды: с вектором нормали \vec{n} и $-\vec{n}$.

1.1. Постановка задачи

Вектором \vec{l} мы будем задавать скважину, параллельную вектору \vec{l} и имеющую длину $|\vec{l}|$; через $N(\vec{l})$ мы обозначим матожидание числа пересечений этой скважины с трещинами массива. Мы предполагаем массив однородным, так что $N(\lambda \vec{l}) = |\lambda| N(\vec{l})$.

Зададим параметры трещиноватости. Направление каждой трещины описывается нормальным вектором \vec{n} . Введем $R(\vec{n})$ - по сути дела это «плотность суммарной площади трещин, перпендикулярных вектору \vec{n} в единичном объеме».

Определим это понятие формально. Пусть $\Theta(\vec{n}, \phi)$ - множество нормальных векторов, образующих с \vec{n} угол, меньший ϕ . $\Theta(\vec{n}, \phi)$ можно представить как круг на единичной сфере с центром в точке \vec{n} ; $|\Theta(\vec{n}, \phi)|$ - его площадь. Пусть $\Sigma(\vec{n}, \phi)$ - суммарная площадь трещин с нормальным вектором $\Theta(\vec{n}, \phi)$, приходящаяся на единицу объема.

Интересующую нас величину $R(\vec{n})$ определим как предел:

$$R(\vec{n}) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\Sigma(\vec{n}, \phi)}{|\Theta(\vec{n}, \phi)|} \quad (1)$$

Очевидно, что $R(\vec{n}) = R(-\vec{n})$

Пусть S - суммарная площадь всех трещин, приходящаяся на единицу объема. Тогда

$$S = 1/2 \int_{S^2} R(\vec{n}) d^2 \vec{n} \quad (2)$$

Где S^2 - множество всех единичных векторов. Множитель $1/2$ введен потому, что каждая трещина учитывается дважды: с нормальным вектором \vec{n} и $-\vec{n}$. Если трещины нормально распределены по направлениям, т.е. $R(\vec{n}) = R - const$, то

$$S = 2\pi R \quad (3)$$

Распределение трещин по направлениям удобно задавать вектор-функцией $\vec{R}(\vec{n})$, где $|\vec{R}(\vec{n})| = R(\vec{n})$ и $\vec{R}(\vec{n}) \parallel \vec{n}$. При этом $\vec{R}(-\vec{n}) = -\vec{R}(\vec{n})$. Положим $\vec{R}(\lambda \vec{n}) = |\lambda| \vec{R}(\vec{n})$. Равенство (2) переписывается в виде:

$$S = 1/2 * \int_{S^2} \vec{R}(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

Аналогично определяется $\vec{R}(\vec{n})$ для плоской задачи. Вместо суммарной площади в единице объема берется суммарная длина в единице площади. Определим $\Theta(\vec{n}, \phi)$ аналогично, при этом это будет уже не площадкой на единичной сфере, а дугой единичной окружности, длину которой мы обозначим $|\Theta(\vec{n}, \phi)|$; $\vec{R}(\vec{n})$ определим аналогично.

Формулы (1)-(2) для плоского случая переписутся без изменений, а формула (3) переписется в виде:

$$C = \pi R$$

для случая, когда $R(\vec{n}) = R = const$.

Задача отыскания распределения трещин по направлениям формулируется следующим образом: по функции $N(\vec{n})$ определить $R(\vec{n})$. Отметим, что эта задача связана с задачей отыскания распределения трещин по направлениям по данным о следах трещин в плоских сечениях: рассмотрев только направления \vec{l} , лежащие в плоскости α , мы, решив плоскую задачу, найдем распределение следов трещин в плоскости α по направлениям. Останется только более трудная пространственная задача отыскания $\vec{R}(\vec{n})$ по данным о сечениях трещин плоскостями.

1.2. Решение прямой задачи и окончательная постановка задачи отыскания распределения трещин по направлениям по числу трещин, пересекающих скважину.

Решим прямую задачу, т.е. выразим $N(\vec{e})$ через $R(\vec{n})$.

Вначале мы рассмотрим случай, когда все трещины представляют собой систему равностоящих параллельных плоскостей; затем общий случай сведем к этому.

Пусть d – расстояние между соседними плоскостями, $R = 1/d$, \vec{n}_0 – нормаль к системе плоскостей. Нетрудно убедиться в том, что функция $R(\vec{n})$ имеет вид:

$$R(\vec{n}) = [\delta(\vec{n}, \vec{n}_0) + \delta(\vec{n}, -\vec{n}_0)] \cdot R \quad (4)$$

где δ – дельта-функция на сфере, определяемая соотношением

$$\int_{S^2} \delta(\vec{n}, \vec{n}_0) f(\vec{n}) d^2 \vec{n} = f(\vec{n}_0) \quad (5)$$

для любой непрерывной функции f на сфере.

Среднее число $N(\vec{e})$ плоскостей, пересекающих вектор \vec{e} равно

$$N(\vec{e}) = (|\vec{l}|/d) \cdot |\cos(\phi)| \quad (6)$$

где ϕ – угол между \vec{l} и \vec{n} .

Пусть $|\vec{R}| = R$, $\vec{R} \parallel \vec{n}$. Тогда формулу (8) можно переписать в виде:

$$N(\vec{l}) = |\vec{l} \cdot \vec{R}| \quad (7)$$

Это выражение можно, учитывая (6), записать в более удобном виде:

$$N(\vec{l}) = 1/2 * \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

или

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{R}| d^2 \vec{n}$$

Пусть теперь трещины группируются в несколько систем. И пусть трещины каждой системы являются неограниченными плоскостями, параллельными между собой и находящимися на одинаковых расстояниях.

Пусть \vec{n}_i – выбранная нормаль к i -й системе, d_i – расстояние между соседними плоскостями; i -ю систему удобно обозначать вектором \vec{R}_i таким, что $\vec{R}_i \parallel \vec{n}_i$, $|\vec{R}_i| = 1/d_i$. Формула (6) запишется в виде:

$$R(\vec{n}) = \sum_{i=1}^N [\delta(\vec{n}; \vec{R}_i/|\vec{R}_i|) * |\vec{R}_i| + \delta(\vec{n}; -\vec{R}_i/|\vec{R}_i|)] \quad (8)$$

Равенство (7) имеет место и в случае нескольких систем, поскольку вследствие аддитивности числа точек пересечения, имеем:

$$N(\vec{l}) = \sum_{i=1}^N |\vec{l} \cdot \vec{R}_i|$$

Для плоского случая формулы (4), (5), (8) запишутся без изменений (только дельта-функция будет определена на окружности), а (6) переписется в виде:

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{R}(\vec{n})| d^2 \vec{n}$$

Перейдем теперь к общему случаю.

Прежде всего, заметим, что мера множества прямых данного направления, пересекающих трещину, зависит не от ее формы, а только от площади и ориентации; далее непрерывное распределение по направлениям можно аппроксимировать дискретным; таким образом, (6) справедлива и в общем случае.

Рассуждения, связанные с рассмотрением сначала одной системы трещин, затем нескольких, затем аппроксимацией в дальнейшем будут свернутыми.

Окончательная постановка задачи имеет следующий вид:

Пусть задано соотношение

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

в объемном или

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^1} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d\vec{n}$$

в плоском случаях.

Далее приведем решение и окончательные формулы задачи по восстановлению $R(\vec{n})$ через $N(\vec{l})$.

1.3. Решение обратной задачи

Пусть $\vec{l} = (x_1, x_2, x_3)$. Заметим, что

$$\frac{\partial^2 N(\vec{l})}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{S^2} \delta(|\vec{l}, \vec{n}|) * \langle \vec{l}, \vec{e} \rangle \langle \vec{l}, \vec{e} \rangle R(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

отсюда

$$\Delta N(\vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{n} \perp \vec{l}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) R(\vec{n}) d\vec{n} = 1/2 |\vec{l}| \int_{\vec{n} \perp \vec{l}} R(\vec{n}) d\vec{n} \quad (9)$$

где Δ – оператор Лапласа.

1.3.1. Плоский случай

В плоском случае вместо (9) будет соотношение

$$\Delta N(\vec{l}) = 1/2 |\vec{l}| * 2 * R(\vec{l}_\perp)$$

где \vec{l}_\perp – единичный вектор, перпендикулярный \vec{l} . Отсюда имеем плоской задачи:

$$R(\vec{n}) = \Delta N(\vec{n}_\perp) \quad (10)$$

1.3.2. Пространственный случай

Формула (9) определяет преобразование Радона на сфере. Поэтому $R(\vec{n})$ находится по $N(\vec{l})$ с помощью обратного преобразования Радона.

Приведем формулы. Применив обратное преобразование Радона, получим

$$\vec{R}(\vec{n}) = -1/\pi^2 * \int_{S^2} (|\vec{n}, \vec{\xi}| - 1)^{-2} \Delta N(\vec{\xi}) d^2 \vec{\xi} \quad (11)$$

Откуда

$$\vec{R}(\vec{n}) = 1/\pi^2 * \int_{S^2} [(|\vec{n}\vec{\xi}| - 1)^{-3} - (|\vec{n}\vec{\xi}| - 1)^{-2}] N(\vec{\xi}) d^2 \vec{\xi} \quad (12)$$

Формулы (11) – (12) включают в себя сингулярные интегралы.

Задача, подобно другим задачам томографии, поставлена некорректно.

2. Определение геометрических характеристик трещин по данным о распределении следов трещин в сечениях

2.1. Определение необходимых величин

Пусть для каждого сечения с нормальным вектором \vec{n} и каждого вектора $\vec{l} \perp \vec{n}$ известна «плотность математического ожидания» $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ числа следов трещин, имеющих длину $|\vec{l}|$ и направление, параллельное \vec{l} , в единице площади сечения, задаваемого нормальным вектором \vec{n} .

Практически распределение $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ представляет собой всю существенную информацию, доступную наблюдению в сечении. Поэтому важна задача определения параметров трещиноватости по функции $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$.

Дадим теперь строгое определение $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$. Рассмотрим сечение с нормальным вектором \vec{n} . Рассмотрим множество $\Theta_{\varepsilon, \phi}$ векторов, образующих с \vec{l} угол, меньший ϕ и отличающийся от \vec{l} по длине меньше, чем на ε .

В этом параграфе задачи отыскания геометрических характеристик трещин по данным о распределении их следов в сечениях сведена к следующим задачам восстановления:

Пусть

$$M(\vec{n}) = 1/2 * \int_{S^2} R(\vec{l}) * |\vec{l}, \vec{n}| d^2 \vec{l} \quad (13)$$

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) * [\vec{n}, \vec{e}]^2 \quad (14)$$

где величина R имеет смысл плотности суммарной площади трещин в единице объема с данным вектором нормали, $M(\vec{n})$ – математическое ожидание суммарной длины следов трещин в участке площади $|\vec{l}|$ с вектором нормали параллельным \vec{l} ; $[,]$ – векторное произведение.

Интеграл берется по множеству векторов нормали. Смысл множителя $1/2$ заключается в том, что при интегрировании каждая трещина учитывается дважды: с вектором нормали \vec{n} и $-\vec{n}$. Дадим также $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$, имеющей смысл плотности математического ожидания следов трещин длины $|\vec{l}|$, и параллельных \vec{n} на участке единичной площади, заданном нормальным вектором \vec{n} , $L(\vec{A}, \vec{l})$ – плотности числа следов трещин, имеющих длину $|\vec{l}|$ на площадке, заданной нормальным вектором \vec{A} , $S(\vec{n}, r)$ – плотность числа трещин радиуса r , имеющих нормальный вектор \vec{n} . $S(r)$ – соответственно, плотность числа всех трещин радиуса r в пересчете на единицу объема.

Приведем формулы обращения для (13), (14):

Пусть $K_{\vec{n}, \vec{l}}^{\varepsilon, \phi}$ – число следов трещин с вектором из этого множества в единице площади.

Величину $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ определим как предел:

$$\hat{N}(\vec{n}, \vec{l}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} K_{\vec{n}, \vec{l}}^{\varepsilon, \phi} / 4\varepsilon\phi$$

При нахождении распределения трещин по размерам и ориентациям приходится предполагать, что трещины дискообразны. В предположении, что трещины эллиптически задача не разрешима. Причина состоит в том, что $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ – функция от четырех параметров: два описывают направление \vec{n} , два описывают \vec{l} . Уже эллиптические трещины зависят от пяти параметров: 2 параметра описывают направление, 2 параметра – величины осей, 1 – их поворот.

Очевидно, что $\hat{N}(\pm\vec{n}, \pm\vec{l}) = \hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$. Положим $N(\lambda\vec{n}, \vec{l}) = |\lambda|N(\vec{n}, \vec{l})$.

Смысл $N(\vec{a}, \vec{b})$ – это плотность числа следов параллельных и равных по модулю вектору \vec{b} в сечении площади $|\vec{a}|$ с нормальным вектором, параллельным \vec{a} .

Функция $N(\vec{a}, \vec{b})$ «помнит» всю информацию о следах. Нам понадобятся функции, «помнящие» только часть этой информации.

$$K(\vec{A}, \vec{l}) = \int_0^{+\infty} \lambda \hat{N}(\vec{A}, \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \cdot \lambda) d\lambda$$

$K(\vec{A}, \vec{l})$ – имеет смысл «плотности суммарной длины следов трещин, параллельных \vec{l} в сечении площади $|\vec{A}|$ с нормальным вектором, параллельным \vec{A} ».

$$M(\vec{A}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} N(\vec{A}, \vec{l}) d|\vec{l}| d\phi$$

где ϕ – аргумент \vec{l} .

Величина $M(\vec{A})$ имеет смысл математического ожидания суммарной длины всех следов трещин в элементе площади, определяемым вектором \vec{A} . Очевидно, что при $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} L(\lambda\vec{A}, \vec{l}) &= |\lambda|L(\vec{A}, \vec{l}), \quad M(\lambda\vec{A}) = |\lambda| * M(\vec{A}) \\ K(\lambda\vec{A}, \vec{l}) &= |\lambda|K(\vec{A}, \vec{l}), \quad K(\vec{A}, \lambda\vec{l}) = |\lambda|K(\vec{A}, \vec{l}) \end{aligned}$$

И, кроме того,

$$M(\vec{A}) = \int_0^{+\infty} \vec{l} \cdot L(\vec{A}, \vec{l}) d\vec{l} = \int_{|\vec{l}|=1} K(\vec{A}, \vec{l}) d\vec{l}$$

Определим теперь функцию $S(\vec{n}, r)$, описывающую распределение трещин и по размерам, и по направлениям, имеющую смысл плотности числа дискообразных трещин радиуса r с вектором нормали \vec{n} , отнесенных к единице объема.

Дадим теперь строгое определение.

Пусть $R_{\vec{n}, \vec{r}}^{\Delta r, \Delta\phi}$ – число трещин в единице объема, нормальный вектор к которым образуется с \vec{n} угол, меньший $\Delta\phi$ и радиус которых отличается от r не больше чем на Δr .

Тогда

$$S(\vec{n}, r) = \lim_{\Delta r, \Delta\phi \rightarrow 0} R_{\vec{n}, \vec{r}}^{\Delta r, \Delta\phi} / 2\Delta r |\Theta(\vec{n}, \phi)|$$

где $\Theta(\vec{n}, \vec{r})$ была определена ранее. Очевидно, что $S(-\vec{n}, \vec{r}) = S(\vec{n}, \vec{r})$ и если все трещины дискообразны, то из определения $S(\vec{n}, \vec{r})$ непосредственно следует, что

$$R(\vec{n}) = \int_0 S(\vec{n}, r) \pi r^2 dr$$

С каждой дискообразной трещиной радиуса r и нормалью \vec{n} удобно связать вектор \vec{r} , параллельный \vec{n} , где $|\vec{r}| = r$. Тогда вместо $S(\vec{n}, r)$ будем рассматривать функцию $S(\vec{r})$. Положим

$$L(l) = \int_{S^2} L(\vec{n}, l) d^2\vec{n}$$

Функция $L(l)$ имеет смысл распределения следов трещин по длинам.

Введем теперь функцию $P(r)$ распределения трещин по радиусам.

Пусть $W_r^{\Delta r}$ – среднее число трещин в единице объема, чей радиус отличается от r не более чем на Δr . Функцию $P(r)$ мы определим как предел

$$P(r) = \lim W_r^{\Delta r} / 2\Delta r$$

2.2. Постановка задач

Рассмотрим следующие задачи:

1. По $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ найти $S(\vec{r})$
2. По $K(\vec{n}, \vec{l})$ найти $R(\vec{n})$
3. По $M(\vec{n})$ найти $R(\vec{n})$
4. По $L(\vec{n}, l)$ найти $P(r)$ 4'. по $L(l)$ найти $P(r)$
5. По $L(\vec{n}, l)$ найти $S(\vec{R})$

Задачи 1 – 5, как и все задачи томографии некорректны в том смысле, в каком смысле некорректны задачи численного дифференцирования.

Кроме того, задачи 1, 2, 4 переопределены: функция $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ зависит от четырех параметров, $S(\vec{R})$ – от трех, $K(\vec{n}, \vec{l})$ – от трех, $R(\vec{n})$ – от двух, $L(\vec{n}, l)$ – от трех, $P(r)$ – от одного. Поэтому функции \hat{N} , N , K , L , M не могут быть произвольными. Так, функция $K(\vec{n}, \vec{l})$ полностью определяется $R(\vec{n})$, которая зависит от меньшего числа параметров, чем $K(\vec{n}, \vec{l})$. Функция $\hat{N}(\vec{n}, \vec{l})$ зависит от большего числа параметров, чем функция $S(\vec{R})$, которая ее определяет.

Наконец, тот факт, что $N(\vec{l})$ и $M(\vec{l})$ не могут быть произвольными, следует из того, что не каждый выпуклый центрально симметричный компакт штейнеровский.

В дальнейшем мы сначала рассмотрим только задачи нахождения распределения трещин по ориентациям, затем в следующем параграфе мы решим совместную задачу, начав со случая, когда распределение следов трещин данной ориентации нам известно.

2.3. Отыскание распределения трещин только по направлениям

2.3.1. Связь с плоской задачей и задачей определения $R(\vec{n})$ по $N(\vec{l})$

Рассмотрим направления \vec{l} , параллельные плоскости α и сечение массива плоскостью α . Мы имеем плоскую задачу. Покажем, что

$$M(\vec{A}) = \pi/2|\vec{A}| \int_{\vec{l} \perp \vec{A}; |\vec{l}|=1} N(\vec{l}) \quad (15)$$

Воспользуемся аддитивностью и тем что $M(\vec{A})$, как и $N(\vec{l})$, не зависит от формы трещин, и с помощью тех же рассуждений, что и в предыдущем параграфе, установим, что формулу (15) достаточно проверить для случая, когда трещины образуют систему параллельных плоскостей. Далее, рассматривая только плоскость $||\alpha$, мы сводим задачу к следующей.

Пусть M – средняя суммарная длина отрезков в единице площади. $N(\vec{l})$ имеет тот же смысл, только задача уже плоская, доказать (15).

Тем самым задача определения $R(\vec{n})$ по $M(\vec{n})$ «решена», поскольку формула (15) по сути дела является преобразованием Радона на сфере: решение имеется с помощью обратного преобразования.

Приведем соответствующие формулы.

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2 \vec{n}$$

$$R(\vec{n}) = -1/\pi^2 \int_{S^2} [(\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-3}] N(\vec{\xi}) d^2 \vec{\xi}$$

Из (15) и формулы для обратного преобразования Радона следует, что

$$N(\vec{l}) = -1/\pi^3 \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} M(\vec{\xi}) d^2 \vec{\xi}$$

Из формул выше следует, что

$$R(\vec{n}) = 1/\pi^5 \int_{S^2} [(\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-3}] d^2 \vec{\xi} *$$

$$* \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} M(\vec{x}) d^2 \vec{x}$$

После преобразований имеем:

$$R(\vec{n}) = -1/\pi^5 \int_{S^2} \Phi(\vec{n}, \vec{x}) d^2 \vec{x} \cdot M(\vec{x})$$

где

$$\Phi(\vec{n}, \vec{x}) = \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} M(\vec{\eta}) d^2 \vec{\eta} [(\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-3}] d^2 \vec{\xi}$$

В силу симметрии $\Phi(\vec{n}, \vec{x})$ зависит от угла ϕ_0 между \vec{n} и \vec{l} . По той же причине можно считать, что $\vec{x} = \vec{e}_x$, а \vec{n} лежит в плоскости XOY .

Перейдя к полярным координатам, получаем

$$\Phi(\vec{n}, \vec{x}) = \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} \sin \phi (1 - |\sin \phi \sin \phi|) * (1 - |\sin(\phi + \phi_0) \sin \phi|) d\phi_0$$

Заметим, что полученные формулы практически малопригодны из-за большого числа измерений и низкой точности. В них входит сингулярный интеграл большой степени. Здесь они приведены для полноты.

Высним теперь связь между $K(\vec{n}, \vec{l})$ и $N(\vec{l})$. Для этого можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа для плоской задачи. А именно, при фиксированном \vec{n}_0 функция $K(\vec{n}_0, \vec{l})$ – это не что иное, как плоский аналог функции $R(\vec{n})$. Из формулы (19) тогда следует, что $K(\vec{n}, \vec{l}) = \Delta N(\vec{e})$, где $\vec{e} \perp \vec{l}$, оператор Лапласа берется в плоскости, перпендикулярной \vec{n} . Это соотношение можно записать несколько более красиво. Пусть $\vec{a}(x)$ – векторное поле. Введем оператор $[\partial/\partial \vec{a}]^k$.

Для произвольной функции f определим $[\partial/\partial \vec{a}]^k f(x)$ следующим образом: в точке x найдем $\vec{A} = \vec{a}(x)$. Затем, считая \vec{A} постоянным вектором найдем $g(x) = (\partial/\partial \vec{a})^k f(x)$.

Положим $[\partial/\partial \vec{a}]^k f(x) = g(x)$.

Если $\vec{a}(x)$ – постоянный вектор, что $\partial/\partial a^k = [\partial/\partial a]^k$, однако в других случаях $[\partial/\partial \vec{a}]^k \cdot [\partial/\partial \vec{a}]^1 \neq [\partial/\partial \vec{a}]^{k+1}$.

Поскольку $[\partial/\partial \vec{n}]^2 N(\vec{n}) = 0$, то соотношение (19) для плоской задачи переписывается в виде $R(\vec{n}) = 1/2 [\partial/\partial \vec{n}_\perp]^2 N(\vec{n})$, где $\vec{n}_\perp \perp \vec{n}$ и $|\vec{n}| = 1$.

В этих обозначениях связь между K и N можно записать следующим образом:

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = [\partial/\partial \vec{l}]^2 N([\vec{n}, \vec{l}]), |\vec{l}| = 1$$

или в общем случае:

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = [\partial/\partial \vec{l}/|\vec{l}|]^2 N([\vec{n}, \vec{l}/|\vec{l}|])$$

2.3.2. Решение прямых задач

Чтобы завершить рассмотрение $M(\vec{n})$, покажем, что

$$M(\vec{n}) = 1/2 \int_{S^2} R(\vec{l}) |\vec{l}, \vec{n}| d\vec{l} \quad (16)$$

Рассуждая, как и в предыдущем параграфе, видим, что (16) достаточно установить для одной системы трещин с единичным расстоянием между соседними трещинами. Тогда $R(\vec{e}) = \delta(\vec{l}, \vec{n}_0) + \delta(\vec{l}, -\vec{n}_0)$, где \vec{n}_0 – вектор нормали к системе, и равенство (16) запишется в виде:

$$M(\vec{n}) = |[\vec{n}, \vec{n}_0]| = |\sin \phi| \quad (17)$$

где ϕ – угол между \vec{n} и \vec{n}_0 .

(17) вытекает из того факта, что следы трещин на плоскости, образующей с нашей системой угол ϕ , образуют систему параллельных прямых с расстоянием $l/|\sin \phi|$ между соседними прямыми, а тем самым длина следов, приходящихся на единицу площади сечения, будет равна $|\sin \phi|/d$. Покажем, что

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = 1/2 \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) [\vec{n}, \vec{e}]^2$$

Рассмотрим плоскость β с нормальным вектором \vec{n} и множеством $M^{d\phi}$ плоскостей, чье пересечение с плоскостью β образует с \vec{l} угол меньший $d\phi$.

Из соотношения симметрии следует, что без ограничения общности можно считать, что $\vec{n} \parallel (OZ)$, $\vec{l} \parallel (OY)$. Тогда множество нормалей \mathfrak{D} к плоскостям из $M^{d\phi}$ образует сферический сектор с углом $2d\phi$. Пусть угол ψ – «угол падения», отсчитывается от северного полюса, $90^\circ - \psi$ – это широта, а угол ϕ – «долгота» отсчитывается от оси (OX) по часовой стрелке. Нам понадобится одно наблюдение.

Рассмотрим малую по размерам область на сфере, dS – ее площадь, ψ_0 – значение ψ в этой области.

R_0 – значение функции распределения трещин по направлениям в этой области, тогда средняя площадь трещин, нормаль к которым принадлежит этой области в единице объема равна $R_0 dS$.

Относительное число следов этих трещин в единице площади будет равно $R_0 dS \sin \phi$, как это следует из доказательства формулы (16).

Перейдем теперь к доказательству (17).

Пересечение \mathfrak{D} с окружностью $\phi_0 = const$ есть пара дуг длины $2 \sin \phi_0 d\phi$ каждая; таким образом, площадь участка сферы, задаваемая неравенствами $|\phi - \phi_0| < d\phi$, $|\phi| < d\phi$, равна $4d\psi d\phi |\sin \phi_0|$, средняя площадь поверхности трещин с соответствующей нормалью в пересчете на единицу объема будет равна $4R_{\psi,0} \sin^2 \phi_0 d\psi d\phi$, а суммарная длина их следов на плоскости β в единице площади будет равна $R_{\psi_0,0} \sin^2 \phi d(2\psi) d(2\phi)$.

Отсюда следует, что суммарная длина следов трещин из M в единице площади dK равна

$$dK = d(2\phi!) * \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) \sin^2 \phi d\phi$$

И поскольку $\sin \phi = |[\vec{n}, \vec{e}]|$, то это выражение можно переписать в виде:

$$\frac{dK}{d(2\phi)} = \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) ([n, e])^2$$

что равносильно (17).

Из (17) следует формула

$$\int_{\vec{n} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) K(\vec{n}, \vec{l}) = \pi/2 \cdot \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e})$$

В самом деле:

$$\int_{\vec{n} \perp \vec{l}} K(\vec{n}, \vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi/2 \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) d\vec{e}$$

2.3.3. Решение обратных задач

Нам осталось по $K(\vec{n}, \vec{l})$ определить $R(\vec{e})$. Это можно сделать с помощью обратного преобразования Радона, примененного к функции

$$\pi/2 \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} R(\vec{e}) d\vec{e}$$

Выпишем ответ:

$$R(\vec{e}) = -1/\pi^3 \int_{S^2} (|\vec{e} \cdot \vec{l}| - 1)^{-2} \left[\int_{\vec{n} \perp \vec{l}} K(\vec{n}, \vec{l}) d\vec{n} \right]$$

3. Отыскание распределения трещин по размерам и ориентациям

В этом параграфе будет решаться задача отыскания распределения дискообразных трещин по размерам исходя из данных о распределении по размерам следов трещин в сечениях.

Для задач 1, 4, и 5, поставленных в предыдущем параграфе, будут приведены явные формулы.

Сначала мы решим задачу отыскания распределения трещин только по размерам, затем воспользуемся полученным результатом для решения совместной задачи.

Задача разбивается на 2 задачи и сводится, таким образом, во-первых, к случаю, когда все трещины параллельны, во-вторых, к уже разобранный задаче отыскания распределения по направлениям.

В случае, когда все трещины параллельны, величины $g(r)$ и $\phi(l)$, имеющие смысл соответственно плотности относительного числа дискообразных трещин радиуса r , и плотности относительного числа сечений длины l , оказывается, $\phi(l)$ не зависит от направления секущей плоскости. Покажем, что:

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{g(r) \vec{l} dr}{r \sqrt{r^2 - l^2}} \quad (18)$$

Задача определения g по ϕ есть классическая задача томографии, к которой сводятся задачи отыскания распределения трещин по размерам.

В общем случае вводится величина $Q(\vec{A}, \vec{l}, r)$, имеющая смысл плотности математического ожидания числа трещин радиуса r , след которого в сечении, заданном вектором \vec{A} , параллелен вектору \vec{l} . Величины Q и N связаны равенством, аналогичном (18):

$$N(A, l) = 1/2 \int_l \frac{Q(\vec{A}, \vec{l}, r) \vec{l} dr}{r \sqrt{r^2 - l^2}} \quad (19)$$

В свою очередь, аналогично

$$Q(\vec{A}, \vec{l}, r) = \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} S(\vec{l}, r) |[\vec{A}, \vec{l}]|^2 \quad (20)$$

Ниже приводится вывод обращения формул (19), (20) и итоговая формула, выражающая $S(\vec{n}, r)$ через $\hat{N}(\vec{A}, \vec{l})$.

3.1. Отыскание распределения трещин только по размерам

3.1.1. Простейший случай

Найдем распределение размеров сечений для одной дискообразной трещины радиуса r .

Нетрудно увидеть, что $P_r(x)$ – плотность вероятности того, что сечение имеет длину x , описывается равенствами:

$$P_r(2l) = \begin{cases} \frac{1}{r\sqrt{r^2 - l^2}}, & 0 < l < r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (21)$$

Равенство (21) справедливо также в случае, центры дискообразных трещин имеют пуассоновское распределение, а также в случае, когда дисков конечное число, а все сдвиги секущей плоскости равновероятны. Т.е. мы предположим, что множество возможных сдвигов ограничено, является отрезком и вероятностная мера на этом множестве равномерная. При этом все сдвиги секущей плоскости, пересекающие наш набор трещин, принадлежат рассматриваемому множеству сдвигов.

В последнем случае (21) это следует из формулы полной вероятности:

$$P_r(l) = \Sigma P(D_i) \cdot P(D_i|l) = [\Sigma P(D_i)] \frac{1/2}{r\sqrt{r^2 - (1/4)^2}} = \frac{1/2}{r\sqrt{r^2 - (1/4)^2}}$$

поскольку $\Sigma P(D_i) = 1$.

Здесь $P(D_i)$ – вероятность того, что сечение принадлежит i -ому диску, $P(D_i|l)$ – соответствующая условная плотность вероятности.

В дальнейшем мы будем предполагать, «равномерную равновероятность» сдвигов секущей плоскости.

3.1.2. Случай, когда все трещины параллельны

Поскольку ни распределение сечений по длинам, ни отношение вероятностей быть пересеченными для дискообразных параллельных трещин не зависит от угла наклона секущей плоскости, достаточно рассмотреть случай, когда плоскость сечения перпендикулярна плоскости трещин.

Пусть $D(r)$ – плотность относительного числа дискообразных трещин радиуса r , $\phi(l)$ – плотность относительного числа сечений длины l . Иными словами, $\phi(l)$ и $D(r)$ определяются как пределы:

$$\phi(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{W_l^{\Delta l}}{\Delta l}$$

$$D(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\hat{W}_r^{\Delta r}}{\Delta r}$$

где $W_l^{\Delta l}$ – относительное число следов, длина которых заключена между l и $l + \Delta l$. $\hat{W}_r^{\Delta r}$ определяется аналогично.

Пусть $G(r)$ – распределение трещин, пересекающих данную фиксированную секущую плоскость β по радиусам. Как легко видеть:

$$G(r) = g(r)r/\alpha \quad (22)$$

где $\alpha = \int_0^{+\infty} rg(r)dr$.

Поскольку для двух трещин отношение вероятностей быть пересеченными равно отношению радиусов, отношение плотностей вероятностей для трещин, пересекающих β радиусов r_1 и r_2 будет равно $(g(r_1)/r_1) : (g(r_2)/r_2)$, откуда следует (22).

Из (22) вытекает равенство:

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{g(r)dr}{r\sqrt{r^2 - l^2}} \quad (23)$$

Нам понадобится в дальнейшем также $\phi(2l)$ через $\bar{g}(r)$

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{\bar{g}(r)ldr}{r\sqrt{r^2 - l^2}} \quad (24)$$

Формулы (23), (24) выше дают решение прямой задачи – задачи отыскания ϕ по g . Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи. Сведем ее к задаче нахождения обратного преобразования Радона на плоскости.

Равенства (23), (24) можно переписать в виде:

$$\phi(2l)/2l = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sqrt{1+t^2})dt$$

где $H(x) = g(x)/x^2$.

Положим $\hat{H}(x, y) = H(\sqrt{x^2 + y^2})$, тогда $\phi(t)/t = \int_L \hat{H}(x, y)$.

где L – прямая, проходящая на расстоянии $t/2$ от начала координат.

Функция \hat{H} по функции ϕ восстанавливается обратным преобразованием Радона. Воспользовавшись формулой обращения, получим:

$$H(t) = -1/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|} (l - r \cos \psi)^{-2} dl$$

отсюда

$$g(r) = -\alpha r/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|} (l - r \cos \psi)^{-2} dl \quad (25)$$

и, соответственно,

$$g(r) = -r^2/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|} (l - r \cos \psi)^{-2} dl \quad (26)$$

3.2. Отыскание совместного распределения трещин по размерам и ориентациям

Перейдем теперь к задаче отыскания совместного распределения. Сведем эту задачу к уже разобранным. План действий таков: рассмотрим «следы трещин, параллельные \vec{l} », из распределения этих следов по размерам найдем распределение соответствующих трещин по радиусам; затем, перейдя к рассмотрению только трещин радиуса r , мы найдем их распределение по направлениям. Все вместе нам дает функцию $S(r)$.

Пусть $Q(\vec{A}, \vec{l}, r)$ – «плотность математического ожидания числа трещин радиуса r на площадке, заданной вектором \vec{A} , след которых параллелен e ».

Пусть $\Pi_{\vec{A}, \vec{l}, r}^{d\phi, dr}$ – математическое ожидание числа трещин, радиус которых отличается от r не более чем на dr , а направление следов на площадке, заданной вектором \vec{A} образует с \vec{l} угол не больше $d\phi$. Величину Q мы определим как предел:

$$Q(\vec{A}, \vec{l}, r) = \lim_{d\phi, dr \rightarrow 0} \Pi_{\vec{A}, \vec{l}, r}^{d\phi, dr} / 4d\phi dr$$

Формулы (23), (24), (25), (26) перепишутся в виде

$$\hat{N}(\vec{A}, \vec{l}) = |\vec{l}|/2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{Q(\vec{A}, \vec{l}, r) dr}{r\sqrt{r^2 - l^2}}$$

$$Q(\vec{A}, \vec{l}, r) = -r^2/2\pi^2 \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{N}(\vec{A}, 2|\beta|\vec{l}/|\vec{l}|)}{|\beta|} (\beta - r \cos \phi)^{-2} d\beta$$

Поскольку математическое ожидание длины следы трещины радиуса r равно $\pi r^2/2r$ или $\pi r/2$, $T(\vec{A}, \vec{l}, r)$ – плотность матожидания суммарной длины следов трещин радиуса r , параллельных \vec{l} на площадке заданной \vec{A} равна $Q(\vec{A}, \vec{l}, r) \cdot \pi r/2$.

Соотношения выше переписываются в виде:

$$T(\vec{A}, \vec{l}, r) = 1/2 \int_{\vec{e} \perp \vec{l}} \bar{S}(\vec{l}, r) * [\vec{A}, \vec{e}]^2$$

$$S(\vec{n}, r) = 1/4\pi^5 \int_{S^2} (|\vec{n} \cdot \vec{e} - 1|)^{-2} d^2 \vec{e} * \int_{\vec{x} \perp \vec{l}} d\vec{x} \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{N}(\vec{A}, 2|\beta|\vec{l}/|\vec{l}|)}{|\beta|} (\beta - r \cos \phi)^{-2} d\beta$$

Теперь перейдем к задачам 4,5: задача отыскания $P(r)$ по $L(l)$ полностью аналогична случаю, когда все трещины параллельны, поскольку распределение длин сечений для одной дискообразной трещины не зависит от направления секущей плоскости. Связь между $P(r)$ и $L(l)$ такая же, как между g и ϕ . Выпишем соотношения:

$$L(2l) = 1/\alpha \int_1^{+\infty} \frac{P(r) dr}{r\sqrt{r^2 - l^2}}$$

$$P(r) = -\alpha r/2\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|} (l - r \cos \psi)^{-2} dl$$

Перейдем теперь к задаче 5: задаче определения $S(\vec{n}, r)$ по $L(\vec{n}, l)$. Эта задача аналогична задаче 3.

Вывод формул полностью аналогичен выводу формул для решения задачи 1. В итоге имеем:

$$S(\vec{n}, r) = -1/4\pi^8 \int_{S^2} \Phi(\vec{n}, \vec{\eta}) d^2 \vec{\eta} * \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(\vec{n}, \beta)}{|\beta|} (\beta - r \cos \psi)^{-2} d\beta$$

где $\Phi(\vec{n}, \vec{\eta})$ определяется равенством:

$$\Phi(\vec{n}, \vec{\eta}) = \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} \sin \phi (1 - |\sin \phi \sin \phi_0|) (1 - |\sin(\phi + \phi_0) \sin \phi|) d\phi_0$$

В заключение хочется сделать несколько замечаний. Хотя для восстановления функции $R(\vec{n})$ достаточно знать только количество трещин в единице площади сечения, а для восстановления $S(\vec{n}, r)$ – еще и распределение следов по размерам, учет ориентации следов приводит к большей точности: в задачах 1 и 2 соответствующий оператор восстановления имеет на два порядка меньшую сингулярность, чем в соответствующих задачах 3,5. Разделение задач восстановления размеров и ориентации хорошо еще и потому, что количество следов трещин в сечении велико.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kendall M., Moran, P. Geometric probabilities // М.:Наука, 1972.
2. Santaló, L. A. Integral geometry and geometric probability // М.:Наука, 1983.
3. Matheron, G. Random sets and integral geometry // М.:Mir, 1978.
4. Anoshchenko, N. N. Geometric analysis of fracturing and blockiness in deposits of facing stone // М.:MGI, 1983.
5. Ambartzumian, R.V., Mecke, J. & Stoyan, D. Introduction to stochastic geometry // М.:Наука, 1989.

REFERENCES

1. Kendall, M. & Moran, P. 1972, "Geometric probabilities", *Nauka, Moscow*.
2. Santaló, L. A. 1983, "Integral geometry and geometric probability", *Nauka, Moscow*.
3. Matheron, G. 1978, "Random sets and integral geometry", *Mir, Moscow*.
4. Anoshchenko, N. N. 1983, "Geometric analysis of fracturing and blockiness in deposits of facing stone", *Moscow State Geological Prospecting University, Moscow*.
5. Ambartzumian, R.V., Mecke, J. & Stoyan, D. 1989, "Introduction to stochastic geometry", *Nauka, Moscow*.

Получено: 05.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 512.55

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-85-111

**Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом
целых алгебраических чисел квадратичных полей**

И. А. Кульгускин

Кульгускин Иван Александрович — аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).

e-mail: ivan-kull@rambler.ru

Аннотация

В статье исследована классификация с точностью до эквивалентности инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей.

Описание инволюций в алгебрах представляет собой одну из классических задач теории колец. Стандартными примерами инволюций является транспонирование в матричной алгебре и сопряжение в поле комплексных чисел и алгебре кватернионов.

В случае, когда поле P имеет характеристику отличную от двух, полное описание инволюций с точности до их эквивалентности в алгебре $T_n(P)$ для любого натурального числа n , было получено в [15]. В работе [3] исследованы инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над коммутативными кольцами. Если кольцо является полем характеристики 2 или булевым кольцом, то были найдены необходимые и достаточные условия конечности числа классов эквивалентности инволюций.

Данная статья является продолжением работы [3]. В статье [3], в частности, было найдено число классов эквивалентности инволюций в алгебрах верхнетреугольных матриц над кольцом целых чисел. В связи с этим результатом естественной является задача об описании инволюций с точностью до их эквивалентности в алгебрах верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей, которой посвящена настоящая работа. В работе найдено число классов эквивалентности инволюций в таких алгебрах и на примерах проиллюстрирован способ нахождения представителей в каждом классе эквивалентности. При получении основных результатов в настоящей работе существенно используется аппарат теории уравнений Пелля.

Ключевые слова: инволюции, алгебра верхнетреугольных матриц, кольцо целых алгебраических чисел квадратичных полей.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

И. А. Кульгускин. Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 85–111.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 512.55

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-85-111

Involutions in the algebra of upper triangular matrices over the ring of algebraic integers of quadratic fields

I. A. Kulguskin

Kulguskin Ivan Alexandrovich — postgraduate student, Kazan (Volga Region) Federal University (Kazan).

e-mail: ivan-kull@rambler.ru

Abstract

The article investigates the classification with precision up to equivalence of involutions in the algebra of upper triangular matrices over the ring of integers of algebraic numbers of quadratic fields.

The description of involutions in algebras represents one of the classical problems of ring theory. Standard examples of involutions are transposition in matrix algebra and conjugation in the field of complex numbers and the algebra of quaternions.

In the case where the field P has a characteristic different from two, a complete description of involutions with precision up to their equivalence in the algebra $T_n(P)$ for any natural number n was obtained in [15]. In this work [3] involutions in the algebra of upper triangular matrices over commutative rings are studied. If the ring is a field of characteristic 2 or a Boolean ring, then necessary and sufficient conditions for the finiteness of the number of equivalence classes of involutions were found.

This article is a continuation of the work of [3]. In the article [3], in particular, the number of equivalence classes of involutions in the algebras of upper triangular matrices over the ring of integers was found. In this regard, the natural result is the problem of describing involutions with precision up to their equivalence in algebras of upper triangular matrices over the ring of algebraic integers of quadratic fields, to which this work is devoted. In the work, the number of equivalence classes of involutions in such algebras is found and the method of finding representatives in each equivalence class is illustrated with examples. Upon receipt the main results in this work, the apparatus of the theory of Pell's equations is significantly used.

Keywords: involutions, the algebra of upper triangular matrices, the ring of algebraic integers of quadratic fields.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

I. A. Kulguskin, 2023, "Involutions in the algebra of upper triangular matrices over the ring of algebraic integers of quadratic fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 85–111.

1. Введение

Пусть R – коммутативное кольцо и \mathbb{A} – произвольная R -алгебра.

R -линейное отображение $\gamma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ называется *инволюцией*, если $\forall a, b \in \mathbb{A} \gamma(ab) = \gamma(b)\gamma(a)$ и $\gamma^2(a) = a$. Две инволюции γ, δ алгебры $T_n(R)$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi : (T_n(R), \gamma) \rightarrow (T_n(R), \delta)$ такой, что для любой матрицы $A \in T_n(R)$ $\varphi(\gamma(A)) = \delta(\varphi(A))$.

Описание инволюций в алгебрах представляет собой одну из классических задач теории колец. Стандартными примерами инволюций является транспонирование в матричной алгебре и сопряжение в поле комплексных чисел и алгебре кватернионов. Систематическое изучение инволюций в центральных простых алгебрах впервые было предпринято Альбертом в 30-е годы прошлого века. Многие его результаты нашли отражение в монографии [6]. К настоящему времени теория инволюций в центральных простых алгебрах достаточно глубоко развита и многие ее результаты представлены в монографиях [12], [11].

При классификации инволюций с точностью до их эквивалентности в алгебре \mathbb{A} важным является описание группы внешних автоморфизмов $\text{Out}(\mathbb{A})$ алгебры \mathbb{A} . В работе [15] был получен критерий эквивалентности двух инволюций произвольной алгебры \mathbb{A} в случае, когда $\text{Out}(\mathbb{A})$ является единичной группой. С помощью этого критерия в этой работе было показано, что в случае, когда характеристика поля F отлична от двух, любая инволюция алгебры верхнетреугольных матриц над F эквивалентна либо симплектической, либо ортогональной. Таким образом, при изучении инволюций в различных классах матричных колец важным является нахождение условий, при которых все автоморфизмы таких колец являются внутренними. Автоморфизмы колец формальных матриц и условия, при которых у колец формальных верхнетреугольных матриц и близких к ним колец все автоморфизмы являются внутренними, в последнее время были изучены в работах Крылова П.А., Норбосамбуева Ц.Д. и Туганбаева А.А. (см. [1, 2, 13]).

Важным частным случаем алгебр верхнетреугольных формальных матриц являются алгебры инцидентности над частично-упорядоченными множествами. Исследование инволюций в алгебрах инцидентности и их обобщениях в последнее время получило большое развитие (см. [14, 7, 9, 8, 10]). Однако, классификации инволюций с точностью до их эквивалентности в таких алгебрах была получена только в случае, когда характеристика основного поля отлична от двух.

В статье [3] исследованы инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц над полями характеристики 2. Как оказалось, существуют примеры алгебр верхнетреугольных матриц, у которых имеются бесконечное число классов эквивалентностей инволюций. Также в данной работе были исследованы с точностью до эквивалентности инволюции первого рода в алгебре верхнетреугольных матриц над коммутативными кольцами, у которых 2 не обязательно является обратимой. Если кольцо является полем характеристики 2 или булевым кольцом, то были найдены необходимые и достаточные условия конечности числа классов эквивалентности инволюций.

Нетривиальной задачей и хорошим дополнением к развитой теории работы [3] служит изучение проблемы классификации инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей. В ходе описания инволюций в вышеупомянутой алгебре были найдены эквивалентные формулировки условий в рамках теории уравнений Пелля [5].

2. Предварительные сведения

Существенным условием при изучении вопроса классификаций инволюций с точностью до их эквивалентности над коммутативными кольцами, у которых двойка не является обратимой, в работе [3] является поднимается всех обратимых элементов кольца $R/2R$ до обратимых элементов кольца R по модулю идеала $2R$. В общем это условие может не выполняться. К примеру, если взять $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, то нетрудно видеть, что в фактор кольце $R/2R$ элемент $\sqrt{-5} + 2R$ в квадрате дает единицу фактор кольца, а значит обратим. В то же время, из стандартной нормы на $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ напрямую следует, что $\sqrt{-5} + 2R$ нельзя поднять до обратимого элемента R . Тем не менее, в ряде случаев эту проблему можно обойти. Заметим, что в определении отношения

\sim_{odd} (см. [3]) участвуют не сами обратимые элементы, а их квадраты. Поэтому в Следствии 4 [3] при четном n достаточно требовать поднимаемости квадратов обратимых элементов, что уже выполняется для кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Следующие утверждения дают полное описание инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей. Их доказательство будет представлено в последующих двух параграфах.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$ – бесквадратное целое и R – кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда при $n = 2k + 1$ – нечетном в алгебре $T_{2k+1}(R)$ имеется ровно $k + 1$ классов эквивалентности инволюций и при $n = 2k$ – четном:

1. если уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где x – четное, y – нечетное, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $3k^2 + 2$ классов эквивалентности инволюций;
2. если уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где x – четное, y – нечетное, разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $k^2 + k + 2$ классов эквивалентности инволюций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \equiv 2 \pmod{4}$. Тогда при $n = 2k + 1$ – нечетном в алгебре $T_{2k+1}(R)$ имеется ровно $k + 1$ классов эквивалентности инволюций и при $n = 2k$ – четном:

1. если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$, где x, y – нечетные, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $3k^2 + 2$ классов эквивалентности инволюций;
2. если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$, где x, y – нечетные, разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $k^2 + k + 2$ классов эквивалентности инволюций.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d = 4t + 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда при $n = 2k + 1$ – нечетном в алгебре $T_{2k+1}(R)$ все инволюции попарно эквивалентны и при $n = 2k$ – четном:

1. если t – четное, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $(k + 1)^2$ классов эквивалентности инволюций;
2. если t – нечетное и уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$, где x, y – нечетные, не разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $3k + 2$ классов эквивалентности инволюций;
3. если t – нечетное и уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$, где x, y – нечетные, разрешимо в целых числах, то в алгебре $T_{2k}(R)$ имеется ровно $(k + 1)^2 + 1$ классов эквивалентности инволюций.

В дальнейшем нам потребуется техническое утверждение.

Пусть R – коммутативное кольцо и $U \subset R/2R$ – подгруппа обратимых элементов фактор кольца, которые поднимаются по модулю $2R$ и $k \in \mathbb{N}$. Аналогично отношениям \sim_{even} и \sim_{odd} , введенным в [3], можно ввести следующие два новых отношения эквивалентности на $(R/2R)^k$. Пусть $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$. Положим

1. $z \sim_{even, U} h \Leftrightarrow$ существуют $\lambda \in U$ и наборы $c_{ii} \in U$, $c_{ij} \in R/2R$, такие что

$$h_i = \lambda \left(c_{ii}^2 z_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j \right);$$

2. $z \sim_{odd, U} h \Leftrightarrow$ существуют наборы $c_{ii} \in U$, $e_i, c_{ij} \in R/2R$, такие что

$$h_i = c_{ii}^2 z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть R – коммутативное кольцо, $2 \notin U(R)$, $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. Через Θ обозначим множество классов эквивалентности инволюций γ_B алгебры $T_n(R)$, таких что $B^* = B$. Тогда

1. Если $n = 2k + 1$ нечетно, то $|\Theta| = |(R/2R)^k / \sim_{\text{odd}, U}|$;
2. Если $n = 2k$ четно, то $|\Theta| = |(R/2R)^k / \sim_{\text{even}, U}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in R^k$ и $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$, $\bar{h} = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k) \in (R/2R)^k$. Докажем, что $z \sim_{\text{odd}} h$ тогда и только тогда, когда $\bar{z} \sim_{\text{odd}, U} \bar{h}$.

Действительно, если $z \sim_{\text{odd}} h$, то существуют наборы $c_{ii} \in U(R)$, $e_i, c_{ij} \in R$, такие что

$$h_i - \left(c_{ii}^2 z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j \right) \in 2R.$$

Следовательно,

$$\bar{h}_i = \bar{c}_{ii}^2 \bar{z}_i + \bar{e}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{c}_{ij}^2 \bar{z}_j \text{ в } R/2R.$$

И значит, $\bar{z} \sim_{\text{odd}, U} \bar{h}$.

Обратно. Допустим, что $\bar{z} \sim_{\text{odd}, U} \bar{h}$. Следовательно, существуют наборы $\bar{c}_{ii} \in U$, $\bar{e}_i, \bar{c}_{ij} \in R/2R$, такие что

$$\bar{h}_i = \bar{c}_{ii}^2 \bar{z}_i + \bar{e}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{c}_{ij}^2 \bar{z}_j.$$

В силу того, что $U \subset R/2R$ – подгруппа обратимых элементов фактор кольца, которые поднимаются по модулю $2R$, мы имеем

$$h_i - \left(c_{ii}^2 z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j \right) \in 2R.$$

Поэтому $z \sim_{\text{odd}} h$. Далее результат следует из предложения 2 [3]. Аналогично доказывается, что $z \sim_{\text{even}} h$ тогда и только тогда, когда $\bar{z} \sim_{\text{even}, U} \bar{h}$. \square

3. Классификация инволюций при $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$

Напомним некоторые определения, которые понадобятся нам для дальнейшего изложения. Пусть A – кольцо, x – произвольный элемент поля F , содержащего A .

DEFINITION 1. Элемент x называется целым над A , если он удовлетворяет некоторому уравнению

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

с коэффициентами из кольца A .

DEFINITION 2. Целым замыканием кольца A в поле F называется множество тех элементов поля F , которые целы над A .

Несложно показать, что целое замыкание кольца A в поле F также является кольцом.

DEFINITION 3. Целое замыкание кольца \mathbb{Z} в числовом поле K называется кольцом целых алгебраических чисел этого поля и обозначается I_K .

Следующее утверждение показывает, что наше исследование будет распадаться на несколько случаев.

ТЕОРЕМА 5 ([4]). Пусть целое число d отлично от 0 и 1 и не делится на квадрат простого числа и $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Если $d \equiv 2 \pmod{4}$ или $d \equiv 3 \pmod{4}$, то $[1, \sqrt{d}]$ составляет базис кольца I_K над \mathbb{Z} . Если $d \equiv 1 \pmod{4}$, то таким базисом является система $\left[1, \frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right]$.

Учитывая теорему 5, можем ввести следующие обозначения. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = I_K$, если $d \equiv 2 \pmod{4}$ или $d \equiv 3 \pmod{4}$ и $\mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right] = I_K$, если $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Случай, когда $d \equiv 2 \pmod{4}$ и $d \equiv 3 \pmod{4}$ во многом схожи между собой и этот параграф будет посвящен именно им. В следующем параграфе мы разберем отдельно случай, когда $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Пусть d – бесквадратное целое и $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Здесь и далее через φ будем обозначать элемент $\varphi = \sqrt{d} \in R$. Также введем обозначения $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $R/2R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \bar{1}\}$, где под \bar{r} мы понимаем образ элемента $r \in R$ под действием естественного гомоморфизма $R \rightarrow R/2R$; U – подгруппа обратимых элементов фактор кольца $R/2R$, которые поднимаются по модулю $2R$.

ЛЕММА 1. Если $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, то $R/2R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что квадрат произвольного элемента в $R/2R$ равен $\bar{1}$ или $\bar{0}$, причем квадрат обратимого элемента равен $\bar{1}$. Имеем $R/2R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \bar{1}\}$.

Если $d \equiv 2 \pmod{4}$, т.е. $d = 4l + 2$, $l \in \mathbb{Z}$, то:

$$\overline{\varphi^2} = \bar{d} = \overline{4l + 2} = \bar{0};$$

$$\overline{(\varphi + 1)^2} = \overline{1 + 2\varphi + \varphi^2} = \overline{1 + \varphi^2} = \bar{1}.$$

Если $d \equiv 3 \pmod{4}$, т.е. $d = 4v + 3$, $v \in \mathbb{Z}$, то:

$$\overline{\varphi^2} = \bar{d} = \overline{4v + 3} = \bar{1};$$

$$\overline{(\varphi + 1)^2} = \overline{1 + 2\varphi + \varphi^2} = \overline{1 + 1} = \bar{0}.$$

Теперь изоморфизм очевиден. \square

Для начала рассмотрим, что будет при нечетной размерности матриц, а именно классифицируем инволюции в алгебре $T_{2k+1}(R)$.

Напомним, что по определению эквивалентности векторов $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$

$z \sim_{\text{odd}, U} h \Leftrightarrow \exists c_{ii} \in U, e_{ii}, c_{ij} \in R/2R$ такие, что

$$h_i = c_{ii}^2 z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

Так как в силу леммы 1 $c_{ii}^2 = \bar{1}$, следовательно определение эквивалентных векторов z и h мы можем переписать в виде:

$$h_i = z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$ и θ – нулевой вектор из $(R/2R)^k$. Тогда $a \sim_{\text{odd}, U} \theta \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k \ a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Rightarrow) Пусть $a \sim_{\text{odd}, U} \theta$, тогда для любого индекса $1 \leq i \leq k$ имеем

$$a_i = \bar{0} + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0} = e_i^2.$$

По лемме 1 $e_i^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

(\Leftarrow) Пусть теперь $a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}, 1 \leq i \leq k$. Тогда положим $e_i = a_i, e_i \in R/2R$ и заметим, что

$$a_i = e_i^2 = \bar{0} + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0},$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$. Следовательно, $a \sim_{\text{odd}, U} \theta$. \square

ЛЕММА 2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_k) \in (R/2R)^k$ и $a \not\sim_{\text{odd}, U} \theta, b \not\sim_{\text{odd}, U} \theta$. Если $a \sim_{\text{odd}, U} b$, то $\exists s, 1 \leq s \leq k \ a_s, b_s \notin \{\bar{0}, \bar{1}\}$ и $\forall i < s \ a_i, b_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a \not\sim_{\text{odd}, U} \theta$ и $b \not\sim_{\text{odd}, U} \theta$, то по Предложению 1 существует минимальный индекс $1 \leq m \leq k$ такой, что $a_m \notin \{\bar{0}, \bar{1}\}$ и существует минимальный индекс $1 \leq n \leq k$ такой, что $b_n \notin \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Докажем, что $m = n$.

Допустим $m < n$. Тогда так как $a \sim_{\text{odd}, U} b$, то

$$a_m = b_m + e_m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 b_j.$$

Но $m < n$, значит для любого индекса $1 \leq f \leq m \ b_f \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Тогда левая часть равенства не принадлежит множеству $\{\bar{0}, \bar{1}\}$, а правая – принадлежит множеству $\{\bar{0}, \bar{1}\}$. Данное противоречие завершает доказательство. \square Для каждого s от 1 до k положим

$$h_s = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s, \dots, \bar{h}_k) \in (R/2R)^k,$$

где $\bar{h}_s = \bar{\varphi}$, а все остальные элементы равны $\bar{0}$.

По предложению 1 $h_s \not\sim_{\text{odd}, U} \theta$ и по Лемме 2 $h_s \not\sim_{\text{odd}, U} h_{s_1}$, если $s \neq s_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$ и $1 \leq s \leq k$. Тогда $a \sim_{\text{odd}, U} h_s \Leftrightarrow a_s \in \{\bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \bar{1}\}$ и $\forall i < s \ a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Leftarrow) Так как $\bar{h}_i = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, положив $e_i = a_i, e_i \in R/2R$, имеем

$$a_i = e_i^2 = \bar{h}_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \bar{h}_j,$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$.

Выберем произвольный элемент a_m , где $s < m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = \bar{h}_m + e_m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{h}_j,$$

для некоторых $e_m, c_{mj} \in R/2R$. Действительно, выберем элементы $e_m, c_{ms} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_m = e_m^2 + c_{ms}^2 \bar{h}_s$. Нетрудно убедиться, что такие элементы существуют для любого значения a_m . Теперь заметим, что

$$a_m = e_m^2 + c_{ms}^2 \bar{h}_s = \bar{h}_m + e_m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{h}_j,$$

где $c_{mj} = \bar{0}$ при $j \neq s$.

Если же $m = s$, то положив $a_s = \bar{\varphi} + e_s^2, e_s \in R/2R$, имеем

$$a_s = \bar{\varphi} + e_s^2 = \bar{h}_s + e_s^2 = \bar{h}_s + e_s^2 + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{h}_j,$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$.

(\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{\text{odd}, U} h_s$. Тогда утверждение верно в силу Леммы 2. \square Таким образом, из предложения 1 и предложения 2 следует, что любой вектор в $(R/2R)^k$ эквивалентен либо θ , либо h_s , для некоторого s , следовательно

$$|(R/2R)^k / \sim_{\text{odd}, U}| = k + 1.$$

Значит, по Теореме 4 $|\alpha| = k + 1$, где α – множество классов эквивалентности инволюций в $T_{2k+1}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$.

В алгебре $T_{2k}(R)$, то есть при четной размерности матриц, нам придется разбить случай на $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ на два отдельных. **Далее везде $d \equiv 3 \pmod{4}$.**

Элемент кольца R обратим, тогда и только тогда, когда его норма $|a + b\sqrt{d}| = a^2 - db^2 = \pm 1$. Так как $d \equiv 3 \pmod{4}$, то в $R/2R$ обратимыми элементами являются $\bar{1}$ и $\bar{\varphi}$. Естественно, $\bar{1}$ является обратимым элементом, который поднимается по модулю $2R$.

ЛЕММА 3. Пусть $d \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда все обратимые элементы в $R/2R$ поднимаются по модулю $2R$ тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - y^2 d = 1, \text{ где } x - \text{ четное, } y - \text{ нечетное. } (*)$$

Причем, если указанное уравнение не обладает требуемыми решениями, то $U = \{\bar{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было отмечено выше, $\bar{1}$ является обратимым элементом, который всегда поднимается по модулю $2R$.

Пусть теперь $\bar{\varphi}$ поднимается по модулю $2R$. Элемент $a + b\sqrt{d}$ кольца R принадлежит смежному классу $\bar{\varphi}$ тогда и только тогда, когда a – четное, b – нечетное. Такой элемент будет обратим в кольце R тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - y^2 d = \pm 1, \text{ где } x - \text{ четное, } y - \text{ нечетное.}$$

В этом уравнении перейдем к сравнению по модулю 4. Получим

$$0 - 1 \cdot 3 \equiv \pm 1 \pmod{4}.$$

Теперь становится очевидным, что уравнение вида $x^2 - y^2 d = -1$ не имеет решений при x четном и y нечетном. Следовательно, мы можем рассматривать только уравнение

$$x^2 - y^2 d = 1, \text{ где } x - \text{ четное, } y - \text{ нечетное.}$$

Второе утверждение леммы очевидно. \square

Следующее утверждение дает критерий разрешимости уравнения (*).

ЛЕММА 4. Пусть (x_*, y_*) – наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - y^2d = 1$. Тогда уравнение (*) разрешимо тогда и только тогда, когда y_* нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Переходя в уравнении $x^2 - y^2d = 1$ к сравнению по модулю 4, имеем

$$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Таким образом, значения x и y должны иметь разную четность, то есть либо x – четно, y – нечетно, либо x – нечетно, y – четно.

В Следствии 3 [5] были получены рекуррентные соотношения, позволяющие найти все положительные решения уравнения $x^2 - y^2d = 1$. В частности,

$$y_{n+2} - 2x_*y_{n+1} + y_n = 0,$$

где $y_1 = y_*, y_2 = 2x_*y_*$, а n – натуральное число.

Пусть y_* – четно. Из соотношения, приведенного выше, видно, что y_2 снова будет четным и все последующие y_n также окажутся четными, а значит, уравнение (*) неразрешимо.

Если же y_* – нечетно, то x_* – четно и уравнение (*) разрешимо. \square

Отметим, что разрешимость уравнения (*) зависит от значения d . На данный момент не существует общих результатов, описывающих разрешимость уравнения (*) в терминах d . Однако мы можем получить формулу для нахождения некоторых d таких, что уравнение (*) разрешимо.

Пусть $d = u^2 \pm v$, где u и v натуральные числа такие, что $v \mid 2u$. Тогда по Теореме 4 [5] наименьшим положительным решением уравнения $x^2 - y^2d = 1$ будет

$$x_* = \frac{2u^2}{v} \pm 1, \quad y_* = \frac{2u}{v}.$$

Пусть u – нечетное натуральное число и $v_1 \mid u$, тем самым v_1 также нечетно. Тогда при $d = u^2 \pm 2v_1$ получим, что $y_* = \frac{u}{v_1}$ – нечетное число, а значит по лемме 4 уравнение (*) разрешимо. Заметим, что при этом $d \equiv 3 \pmod{4}$, так как u и v_1 нечетны.

Используя формулу

$$d = u^2 \pm 2v_1, \quad (\vee)$$

мы можем вычислять только некоторые значения d , при которых уравнение (*) разрешимо

$$d = 3, 7, 11, 15, 23, \dots$$

Конечно, значение d , полученное при помощи формулы (V), не всегда будет бесквадратным числом. При этом, если d будет содержать квадрат какого-либо числа m , то m – нечетно. Значит, мы можем записать d в виде $d = d_1m^2$, где d_1 – бесквадратное число. А тогда, если (x_0, y_0) – какое-то решение уравнения (*), то (x_0, my_0) – решение $x^2 - d_1y^2 = 1$ с четным x и нечетным my .

Первым примером d , при котором уравнение (*) не разрешимо является $d = 39$. Несложно убедиться, что наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - 39y^2 = 1$ – это пара чисел $(25, 4)$. Действительно, пользуясь теоремой 4 [5] имеем $39 = 6^2 + 3$, следовательно $y_* = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$.

Таким образом, в зависимости от конкретного d в $R/2R$ могут встречаться обратимые элементы, которые поднимаются по модулю $2R$ или которые не поднимаются по модулю $2R$. Следовательно, наше исследование разбивается еще на два случая.

СЛУЧАЙ 1: $U = \{\bar{1}\}$. Пусть $\bar{1}$ – единственный обратимый элемент в $R/2R$, который поднимается по модулю $2R$. Тогда определение эквивалентности векторов $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$ можно записать в виде

$$z \sim_{\text{even}, U} h \Leftrightarrow \exists c_{ij} \in R/2R : h_i = z_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

Очевидно, что при такой формулировке нулевой вектор θ эквивалентен только себе.

ЛЕММА 5. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_k) \in (R/2R)^k$ – ненулевые. Если $a \sim_{\text{even}, U} b$, то $\exists s, 1 \leq s \leq k$ $a_s = b_s \neq \bar{0}$ и $\forall i < s$ $a_i = b_i = \bar{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a \neq \theta$ и $b \neq \theta$, следовательно существует минимальный индекс $1 \leq m \leq k$ такой, что $a_m \neq \bar{0}$ и существует минимальный индекс $1 \leq n \leq k$ такой, что $b_n \neq \bar{0}$. Докажем, что $m = n$.

Допустим $m < n$. Тогда так как $a \sim_{\text{even}, U} b$, то

$$a_m = b_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 b_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \cdot \bar{0}.$$

Значит, $a_m = \bar{0}$. Противоречие.

Заметим, что если $m = s = n$, то $a_s = b_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 b_j = b_s$. \square

Для каждого s от 1 до k положим

$$z_s = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s, \dots, \bar{z}_k) \in (R/2R)^k,$$

где $\bar{z}_s \neq \bar{0}$, а все остальные элементы равны $\bar{0}$. По лемме 5 $z_s \not\sim_{\text{even}, U} z_{s_1}$ если $s \neq s_1$ или $\bar{z}_s \neq \bar{z}_{s_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$. Тогда $a \sim_{\text{even}, U} z_s \Leftrightarrow \forall 1 \leq i < s$ $a_i = \bar{0}$, $a_s = \bar{z}_s$ и $\forall s < f \leq k$ $a_f \in \{\bar{0}, \bar{z}_s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Leftarrow) Так как $\bar{z}_i = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \bar{0} = \bar{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$. Выберем произвольный элемент a_f , где $s < f \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_f = \bar{z}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \bar{z}_j,$$

для некоторых $c_{fj} \in R/2R$. Очевидно, что всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = c_{fs}^2 \bar{z}_s$. Осталось заметить, что

$$a_f = c_{fs}^2 \bar{z}_s = \bar{z}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \bar{z}_j,$$

где $c_{fj} = \bar{0}$ при $j \neq s$.

Для индекса s , имеем

$$a_s = \bar{z}_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$.

(\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{\text{even}, U} z_s$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j.$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_s.$$

Если же $l > s$, тогда

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = c_{ls}^2 \bar{z}_s.$$

По лемме 1 $c_{ls}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $c_{ls}^2 \bar{z}_s \in \{\bar{0}, \bar{z}_s\}$. \square

Для каждой пары s, t различных натуральных чисел от 1 до k положим

$$z_{st} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s, \dots, \bar{z}_t, \dots, \bar{z}_k) \in (R/2R)^k,$$

где $\bar{z}_s = \bar{1}, \bar{z}_t \in \{\bar{\varphi}, \overline{\varphi + 1}\}$ или $\bar{z}_s = \bar{\varphi}, \bar{z}_t \in \{\bar{1}, \overline{\varphi + 1}\}$, или $\bar{z}_s = \overline{\varphi + 1}, \bar{z}_t \in \{\bar{1}, \bar{\varphi}\}$, а все остальные элементы равны $\bar{0}$.

Из Леммы 5 следует, что $z_{st} \not\sim_{even, U} z_{s_1 t_1}$, если $s \neq s_1$ или $\bar{z}_s \neq \bar{z}_{s_1}$, а из Предложения 3, что $z_{st} \not\sim_{even, U} z_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s, \dots, a_t, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$. Тогда $a \sim_{even, U} z_{st} \Leftrightarrow \forall 1 \leq i < s \ a_i = \bar{0}, a_s = \bar{z}_s, \forall s < f < t \ a_f \in \{\bar{0}, \bar{z}_s\}$ и $a_t \in \{\bar{z}_t, \bar{z}_t + \bar{z}_s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Leftarrow) Так как $\bar{z}_i = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \bar{0} = \bar{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$.

Для индекса s , имеем

$$a_s = \bar{z}_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$.

Для индекса $s < f < t$ всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = c_{fs}^2 \bar{z}_s$. Осталось заметить, что

$$a_f = c_{fs}^2 \bar{z}_s = \bar{z}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \bar{z}_j,$$

где $c_{fj} = \bar{0}$ при $j \neq s$.

Выберем произвольный элемент a_m , где $t < m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = \bar{z}_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{z}_j,$$

для некоторых $c_{mj} \in R/2R$. Действительно, выберем $c_{ms}, c_{mt} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_m = c_{ms}^2 \bar{z}_s + c_{mt}^2 \bar{z}_t$. Несложно убедиться, что такие элементы существуют для любого значения a_m . Теперь заметим, что

$$a_m = c_{ms}^2 \bar{z}_s + c_{mt}^2 \bar{z}_t = \bar{z}_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{z}_j,$$

где $c_{mj} = \bar{0}$ при $j \neq s$ и $j \neq t$.

Для индекса t , выбрав $c_{ts} \in R/2R$ так, чтобы $a_t = \bar{z}_t + c_{ts}^2 \bar{z}_s$, имеем

$$a_t = \bar{z}_t + c_{ts}^2 \bar{z}_s = \bar{z}_t + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \bar{z}_j,$$

где $c_{tj} = \bar{0}$ при $j \neq s$.

(\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{even,U} z_{st}$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j.$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_s.$$

Если $s < l < t$, тогда

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = c_{ls}^2 \bar{z}_s.$$

По лемме 1 $c_{ls}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $c_{ls}^2 \bar{z}_s \in \{\bar{0}, \bar{z}_s\}$.

Если же $l = t$, то

$$a_t = \bar{z}_t + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \bar{z}_j = \bar{z}_t + c_{ts}^2 \bar{z}_s.$$

По лемме 1 $c_{ts}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $\bar{z}_t + c_{ts}^2 \bar{z}_s \in \{\bar{z}_t, \bar{z}_t + \bar{z}_s\}$. \square

Таким образом, из Предложений 3 и 4 следует, что любой ненулевой вектор в $(R/2R)^k$ эквивалентен z_s или z_{st} . Прямой подсчет показывает, что векторов типа $z_s - 3k$ вариантов, типа $z_{st} - 3k^2 - 3k$ вариантов и один нулевой вектор. Следовательно, $|(R/2R)^k / \sim_{even,U}| = 3k^2 + 1$. А тогда в силу Теоремы 4 и Следствия 1 [3] имеем $|\beta| = 3k^2 + 2$, где β – множество классов эквивалентности инволюций в $T_{2k}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. Заметим, что формула верна и при $k = 1$.

СЛУЧАЙ 2: $U = \{\bar{1}, \bar{\varphi}\}$. Пусть теперь все обратимые элементы в $R/2R$ поднимаются по модулю $2R$. Тогда определение эквивалентности векторов $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$ будет записано в следующем виде:

$$z \sim_{even,U} h \Leftrightarrow \exists \lambda \in U \exists c_{ij} \in R/2R : h_i = \lambda(z_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j).$$

При такой формулировке нулевой вектор θ по прежнему эквивалентен только себе. Заметим, что если $\lambda \in U$, то $\lambda \cdot \overline{\varphi + \bar{1}} = \overline{\varphi + \bar{1}}$.

ЛЕММА 6. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_k) \in (R/2R)^k$ – ненулевые. Если $a \sim_{\text{even}, U} b$, то $\exists s, 1 \leq s \leq k$ $a_s = b_s = \overline{\varphi + 1}$ или $a_s, b_s \in \{\overline{1}, \overline{\varphi}\}$ и $\forall i < s$ $a_i = b_i = \overline{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству Леммы 5. \square

Для каждого s от 1 до k положим

$$z_s = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_s}, \dots, \overline{z_k}) \in (R/2R)^k,$$

где $\overline{z_s} = \overline{\varphi + 1}$, а все остальные элементы равны $\overline{0}$, и

$$h_s = (\overline{h_1}, \dots, \overline{h_s}, \dots, \overline{h_k}) \in (R/2R)^k,$$

где $\overline{h_s} = \overline{1}$, а все остальные элементы равны $\overline{0}$.

Из Леммы 6 следует, что $z_s \not\sim_{\text{even}, U} h_s$ и $z_s \not\sim_{\text{even}, U} z_{s_1}, h_s \not\sim_{\text{even}, U} h_{s_1}$, если $s \neq s_1$. Также очевидно, что $h_s \sim_{\text{even}, U} h'_s$, где

$$h'_s = (\overline{0}, \dots, \overline{0}, \overline{h'_s}, \overline{0}, \dots, \overline{0}) \in (R/2R)^k, \overline{h'_s} = \overline{\varphi}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$. Тогда

1. $a \sim_{\text{even}, U} z_s \Leftrightarrow \forall 1 \leq i < s$ $a_i = \overline{0}, a_s = \overline{\varphi + 1}$ и $\forall s < f \leq k$ $a_f \in \{\overline{0}, \overline{\varphi + 1}\}$;
2. $a \sim_{\text{even}, U} h_s \Leftrightarrow \forall 1 \leq i < s$ $a_i = \overline{0}, a_s \in U$ и $\forall s < f \leq k$ $a_f \in \{\overline{0}, a_s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. (\Leftarrow) Положим $\lambda = \overline{1}$. Так как $\overline{z_i} = \overline{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \overline{0} = \lambda(\overline{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \overline{0}) = \lambda(\overline{z_i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \overline{z_j}),$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$. Выберем произвольный элемент a_f , где $s < f \leq k$, и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_f = \lambda(\overline{z_f} + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{z_j}),$$

для некоторых $c_{fj} \in R/2R$. Очевидно, что всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1}$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} a_f &= c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1} = c_{fs}^2 \lambda \overline{\varphi + 1} = \lambda c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1} = \\ &= \lambda c_{fs}^2 \overline{z_s} = \lambda(\overline{z_f} + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{z_j}), \end{aligned}$$

где $c_{fj} = \overline{0}$ при $j \neq s$. Для индекса s , имеем

$$a_s = \overline{\varphi + 1} = \lambda \overline{z_s} = \lambda(\overline{z_s} + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \overline{z_j}),$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$. (\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{even,U} z_s$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \lambda(\bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j).$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \lambda(\bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j) = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \bar{0}) = \bar{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \lambda(\bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j) = \lambda(\bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0}) = \lambda \bar{z}_s = \overline{\varphi + 1}.$$

Если же $l > s$, тогда

$$a_l = \lambda(\bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j) = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j) = \lambda c_{ls}^2 \bar{z}_s = c_{ls}^2 \lambda \bar{z}_s = c_{ls}^2 \overline{\varphi + 1}.$$

По лемме $1 \ c_{ls}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $c_{ls}^2 \overline{\varphi + 1} \in \{\bar{0}, \overline{\varphi + 1}\}$;

2. (\Leftarrow) Положим $\lambda = a_s$. Так как $\bar{h}_i = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \bar{0} = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0}) = \lambda(\bar{h}_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \bar{h}_j),$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$. Выберем произвольный элемент a_f , где $s < f \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_f = \lambda(\bar{h}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \bar{h}_j),$$

для некоторых $c_{fj} \in R/2R$. Очевидно, что всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = \lambda c_{fs}^2$. Осталось заметить, что

$$a_f = \lambda c_{fs}^2 = \lambda c_{fs}^2 \bar{h}_s = \lambda(\bar{h}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \bar{h}_j),$$

где $c_{fj} = \bar{0}$ при $j \neq s$. Для индекса s , имеем

$$a_s = \lambda = \lambda \bar{h}_s = \lambda(\bar{h}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{h}_j),$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$. (\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{even,U} h_s$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \lambda(\bar{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{h}_j).$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \lambda(\overline{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{h}_j) = \lambda(\overline{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \overline{0}) = \overline{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \lambda(\overline{h}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \overline{h}_j) = \lambda(\overline{h}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \overline{0}) = \lambda \overline{h}_s = \lambda.$$

Если же $l > s$, тогда

$$a_l = \lambda(\overline{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{h}_j) = \lambda(\overline{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{h}_j) = \lambda c_{ls}^2 \overline{h}_s = \lambda c_{ls}^2.$$

По лемме 1 $c_{ls}^2 \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$, следовательно $\lambda c_{ls}^2 \in \{\overline{0}, \lambda\}$.

□

Для каждой пары s, t различных натуральных чисел от 1 до k положим

$$z_{st} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_s, \dots, \overline{z}_t, \dots, \overline{z}_k) \in (R/2R)^k,$$

где $\overline{z}_s = \overline{\varphi + 1}$, $\overline{z}_t = \overline{1}$, а все остальные элементы равны $\overline{0}$, и

$$h_{st} = (\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_s, \dots, \overline{h}_t, \dots, \overline{h}_k) \in (R/2R)^k,$$

где $\overline{h}_s = \overline{1}$, $\overline{h}_t = \overline{\varphi}$, а все остальные элементы равны $\overline{0}$.

Из Леммы 6 следует, что $z_{st} \not\sim_{even, U} h_{st}$ и $z_{st} \not\sim_{even, U} z_{s_1 t_1}, h_{st} \not\sim_{even, U} h_{s_1 t_1}$, если $s \neq s_1$, а из Предложения 5 следует, что $z_{st} \not\sim_{even, U} z_s, z_{st} \not\sim_{even, U} h_s$ и $h_{st} \not\sim_{even, U} z_s, h_{st} \not\sim_{even, U} h_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s, \dots, a_t, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$. Тогда

1. $a \sim_{even, U} z_{st} \Leftrightarrow$

$$\forall 1 \leq i < s \ a_i = \overline{0}, a_s = \overline{\varphi + 1} \text{ и } \forall s < f < t \ a_f \in \{\overline{0}, \overline{\varphi + 1}\}, \text{ и } a_t \in \{\overline{1}, \overline{\varphi}\};$$

2. $a \sim_{even, U} h_{st} \Leftrightarrow$

$$\forall 1 \leq i < s \ a_i = \overline{0}, a_s \in U \text{ и } \forall s < f < t \ a_f \in \{\overline{0}, a_s\}, \text{ и } a_t \in \{a_s \cdot \overline{\varphi}, \overline{\varphi + 1}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. (\Leftarrow) Положим $\lambda = \overline{1}$. Так как $\overline{z}_i = \overline{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \overline{0} = \lambda(\overline{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \overline{0}) = \lambda(\overline{z}_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \overline{z}_j),$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$. Выберем произвольный элемент a_f , где $s < f < t$, и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_f = \lambda(\overline{z}_f + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{z}_j),$$

для некоторых $c_{fj} \in R/2R$. Очевидно, что всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1}$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} a_f &= c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1} = c_{fs}^2 \lambda \overline{\varphi + 1} = \lambda c_{fs}^2 \overline{\varphi + 1} = \\ &= \lambda c_{fs}^2 \overline{z_s} = \lambda (\overline{z_f} + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{z_j}), \end{aligned}$$

где $c_{fj} = \overline{0}$ при $j \neq s$.

Выберем произвольный элемент a_m , где $t < m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = \lambda (\overline{z_m} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \overline{z_j}),$$

для некоторых $c_{mj} \in R/2R$. Действительно, выберем $c_{ms}, c_{mt} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_m = c_{ms}^2 \overline{\varphi + 1} + \lambda c_{mt}^2$. Несложно убедиться, что такие элементы существуют для любого значения a_m . Теперь заметим, что

$$a_m = c_{ms}^2 \overline{\varphi + 1} + \lambda c_{mt}^2 = c_{ms}^2 \lambda \overline{\varphi + 1} + \lambda c_{mt}^2 \overline{z_t} = \lambda (c_{ms}^2 \overline{z_s} + c_{mt}^2 \overline{z_t}) = \lambda (\overline{z_m} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \overline{z_j}),$$

где $c_{mj} = \overline{0}$ при $j \neq s$ и $j \neq t$.

Для индекса t , выбрав $c_{ts} \in R/2R$ так, чтобы $a_t = \lambda + c_{ts}^2 \overline{\varphi + 1}$, имеем

$$a_t = \lambda + c_{ts}^2 \overline{\varphi + 1} = \lambda \overline{z_t} + c_{ts}^2 \lambda \overline{\varphi + 1} = \lambda (\overline{z_t} + c_{ts}^2 \overline{z_s}) = \lambda (\overline{z_t} + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \overline{z_j}),$$

где $c_{tj} = \overline{0}$ при $j \neq s$.

(\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{\text{even}, U} z_{st}$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \lambda (\overline{z_l} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{z_j}).$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \lambda (\overline{z_l} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{z_j}) = \lambda (\overline{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \overline{0}) = \overline{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \lambda (\overline{z_s} + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \overline{z_j}) = \lambda (\overline{z_s} + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \overline{0}) = \lambda \overline{z_s} = \overline{\varphi + 1}.$$

Если $s < l < t$, тогда

$$a_l = \lambda (\overline{z_l} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{z_j}) = \lambda (\overline{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \overline{z_j}) = \lambda c_{ls}^2 \overline{z_s} = c_{ls}^2 \lambda \overline{z_s} = c_{ls}^2 \overline{\varphi + 1}.$$

По лемме 1 $c_{ts}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $c_{ts}^2 \overline{\varphi + 1} \in \{\bar{0}, \overline{\varphi + 1}\}$.

Если же $l = t$, тогда

$$a_t = \lambda(\overline{z_t} + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \overline{z_j}) = \lambda(\overline{z_t} + c_{ts}^2 \overline{z_s}) = \lambda + c_{ts}^2 \overline{\varphi + 1}.$$

По лемме 1 $c_{ts}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $\lambda + c_{ts}^2 \overline{\varphi + 1} \in \{\bar{1}, \overline{\varphi}\}$;

2. (\Leftarrow) Положим $\lambda = a_s$. Так как $\overline{h_i} = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \bar{0} = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0}) = \lambda(\overline{h_i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \overline{h_j}),$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$.

Выберем произвольный элемент a_f , где $s < f < t$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_f = \lambda(\overline{h_f} + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{h_j}),$$

для некоторых $c_{fj} \in R/2R$. Очевидно, что всегда можно выбрать элемент $c_{fs} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_f = \lambda c_{fs}^2$. Осталось заметить, что

$$a_f = \lambda c_{fs}^2 = \lambda c_{fs}^2 \overline{h_s} = \lambda(\overline{h_f} + \sum_{j=1}^{f-1} c_{fj}^2 \overline{h_j}),$$

где $c_{fj} = \bar{0}$ при $j \neq s$. Для индекса s , имеем

$$a_s = \lambda = \lambda \overline{h_s} = \lambda(\overline{h_s} + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \overline{h_j}),$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$.

Выберем произвольный элемент a_m , где $t < m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = \lambda(\overline{h_m} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \overline{h_j}),$$

для некоторых $c_{mj} \in R/2R$. Действительно, выберем $c_{ms}, c_{mt} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство положим $a_m = \lambda(c_{ms}^2 + c_{mt}^2 \overline{\varphi})$. Несложно убедиться, что такие элементы существуют для любого значения a_m . Теперь заметим, что

$$a_m = \lambda(c_{ms}^2 + c_{mt}^2 \overline{\varphi}) = \lambda(c_{ms}^2 \overline{h_s} + c_{mt}^2 \overline{h_t}) = \lambda(\overline{h_m} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \overline{h_j}),$$

где $c_{mj} = \bar{0}$ при $j \neq s$ и $j \neq t$.

Для индекса t , выбрав $c_{ts} \in R/2R$ так, чтобы $a_t = \lambda(\overline{\varphi} + c_{ts}^2)$, имеем

$$a_t = \lambda(\overline{\varphi} + c_{ts}^2) = \lambda(\overline{h_t} + c_{ts}^2 \overline{h_s}) = \lambda(\overline{h_t} + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \overline{h_j}),$$

где $c_{tj} = \bar{0}$ при $j \neq s$. (\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{\text{even}, U} h_{st}$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \lambda(\bar{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{h}_j).$$

Причем, если $l < s$ имеем

$$a_l = \lambda(\bar{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{h}_j) = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \bar{0}) = \bar{0}.$$

Если $l = s$, тогда

$$a_s = \lambda(\bar{h}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{h}_j) = \lambda(\bar{h}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0}) = \lambda \bar{h}_s = \lambda.$$

Если $s < l < t$, тогда

$$a_l = \lambda(\bar{h}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{h}_j) = \lambda(\bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{h}_j) = \lambda c_{ls}^2 \bar{h}_s = \lambda c_{ls}^2.$$

По Лемме 1 $c_{ls}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $\lambda c_{ls}^2 \in \{\bar{0}, \lambda\}$.

Если же $l = t$, тогда

$$a_t = \lambda(\bar{h}_t + \sum_{j=1}^{t-1} c_{tj}^2 \bar{h}_j) = \lambda(\bar{h}_t + c_{ts}^2 \bar{h}_s) = \lambda(\bar{\varphi} + c_{ts}^2).$$

По Лемме 1 $c_{ts}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, следовательно $\lambda(\bar{\varphi} + c_{ts}^2) \in \{\lambda \cdot \bar{\varphi}, \overline{\varphi + 1}\}$.

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$z'_{st} = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{z}'_s, \bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{z}'_t, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \in (R/2R)^k,$$

где $\bar{z}'_s = \overline{\varphi + 1}$, $\bar{z}'_t = \bar{\varphi}$, и

$$h'_{st} = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{h}'_s, \bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{h}'_t, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \in (R/2R)^k,$$

где $\bar{h}'_s = \bar{\varphi}$, $\bar{h}'_t = \bar{1}$ или $\bar{h}'_s = \bar{1}$, $\bar{h}'_t = \overline{\varphi + 1}$, или $\bar{h}'_s = \bar{\varphi}$, $\bar{h}'_t = \overline{\varphi + 1}$. Тогда $z_{st} \sim_{\text{even}, U} z'_{st}$ и $h_{st} \sim_{\text{even}, U} h'_{st}$.

Таким образом, из Предложений 5 и 6 и Следствия 1 следует, что любой ненулевой вектор в $(R/2R)^k$ эквивалентен одному из векторов z_s, h_s, z_{st}, h_{st} . Прямой подсчет показывает, что векторов типа z_s и $h_s - 2k$ вариантов, типа z_{st} и $h_{st} - k^2 - k$ вариантов и один нулевой вектор. Следовательно, $|(R/2R)^k / \sim_{\text{even}, U}| = k^2 + k + 1$. И тогда в силу Теоремы 4 и Следствия 1 [3] имеем $|\beta| = k^2 + k + 2$, где β – множество классов эквивалентности инволюций в $T_{2k}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. Таким образом, нами доказана **Теорема 1**.

Далее везде $d \equiv 2 \pmod{4}$.

Так как $d \equiv 2 \pmod{4}$, то в $R/2R$ обратимыми элементами являются $\bar{1}$ и $\overline{\varphi + 1}$.

ЛЕММА 7. Пусть $d \equiv 2 \pmod{4}$. Тогда все обратимые элементы в $R/2R$ поднимаются по модулю $2R$ тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - dy^2 = -1, \text{ где } x, y - \text{ нечетные. } (**)$$

Причем, если указанное уравнение не обладает требуемыми решениями, то $U = \{\bar{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было отмечено выше, $\bar{1}$ является обратимым элементом, который всегда поднимается по модулю $2R$. Пусть теперь $\overline{\varphi + 1}$ поднимается по модулю $2R$. Элемент $a + b\sqrt{d}$ кольца R принадлежит смежному классу $\overline{\varphi + 1}$ тогда и только тогда, когда a и b — нечетные. Такой элемент будет обратим в кольце R тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - dy^2 = \pm 1, \text{ где } x, y - \text{ нечетные.}$$

В этом уравнении перейдем к сравнению по модулю 4. Получим

$$1 - 2 \cdot 1 \equiv \pm 1 \pmod{4}.$$

Теперь становится очевидным, что уравнение вида $x^2 - dy^2 = 1$ не имеет решений при нечетных x, y . К тому же убеждаемся в том, что любое решение уравнения $x^2 - dy^2 = -1$ имеет нечетные x, y . Второе утверждение леммы очевидно. \square

Как и в предыдущем случае разрешимость уравнения (***) зависит от конкретного значения d . Общих результатов, описывающих разрешимость уравнения (***) в терминах d , на данный момент также получено не было. Все же мы можем получить формулу для нахождения некоторых d , при которых уравнение (***) разрешимо. Возьмём $y = 1, x = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и подставим в уравнение (**). Выразив d , получим

$$d = (2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2.$$

Заметим, что если $n = 3$, то $d = 50 = 5^2 \cdot 2$. Но d должно быть бесквадратным числом. Однако мы легко можем обойти это затруднение. Числа, полученные при помощи формулы $4n^2 + 4n + 2$, не делятся на 4, следовательно, не могут содержать в себе квадрата четного числа. Если же d будет содержать квадрат нечетного числа, то $d = d_1 m^2$, где m — нечетно, а $d_1 \equiv 2 \pmod{4}$ и d_1 — бесквадратное число. Пусть (x_0, y_0) — решение уравнения (**), тогда $(x_0, m y_0)$ — решение $x^2 - d_1 y^2 = -1$.

Приведем примеры некоторых значений d , при которых уравнение (***) разрешимо

$$d = 2, 10, 26, 58, 74, 82, \dots$$

Переходя к сравнению по модулю 8 в уравнениях $x^2 - 6y^2 = -1$ или $x^2 - 14y^2 = -1$ несложно проверить, что, например, при $d = 6, 14$ уравнение (***) не разрешимо.

Таким образом, в зависимости от конкретного d в $R/2R$ снова могут встречаться обратимые элементы, которые поднимаются по модулю $2R$ или которые не поднимаются по модулю $2R$.

В силу того, что $R/2R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ (см. Лемму 1), все утверждения, доказанные в предыдущем параграфе, будут выполняться и в случае, когда $d \equiv 2 \pmod{4}$ с точностью до замены $\overline{\varphi}$ на $\overline{\varphi + 1}$ и $\overline{\varphi + 1}$ на $\overline{\varphi}$. Таким образом, если $U = \{\bar{1}\}$, то $|\beta| = 3k^2 + 2$, если же $U = \{\bar{1}, \overline{\varphi + 1}\}$, то $|\beta| = k^2 + k + 2$. Теперь мы доказали **Теорему 2**.

4. Классификация инволюций при $d \equiv 1 \pmod{4}$

Пусть теперь $d \equiv 1 \pmod{4}$ – бесквадратное целое и $R = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right]$. Здесь и далее через

φ будем обозначать $\varphi = \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \in R$.

Так как $d \equiv 1 \pmod{4}$, то $d = 4t + 1, t \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим, чему равен квадрат элемента $\overline{\varphi} \in R/2R$.

$$\overline{\varphi}^2 = \frac{\overline{1 + 2\sqrt{d} + d}}{4} = \frac{\overline{2 + 2\sqrt{d} + 4t}}{4} = \overline{t + \frac{1 + \sqrt{d}}{2}} = \overline{t + \varphi} = \begin{cases} \overline{\varphi}, & \text{если } t - \text{ четное;} \\ \overline{\varphi + 1}, & \text{если } t - \text{ нечетное.} \end{cases}$$

И снова наше исследование распадается на случаи.

СЛУЧАЙ 1: t – четное.

ЛЕММА 8. Пусть t – четное. Тогда $R/2R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если t – четное, тогда $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi + 1}^2 = \overline{\varphi^2 + 2\varphi + 1} = \overline{3\varphi + 1} = \overline{\varphi + 1}$. Следовательно, $R/2R$ – булево, а значит $R/2R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. \square Так как $\overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi + 1} = \overline{\varphi^2 + \varphi} = \overline{0}$, то $\overline{1}$ – единственный обратимый элемент кольца $R/2R$.

Таким образом, из Теоремы 6 [3] следует, что в $T_{2k+1}(\mathbb{Z}[\varphi])$ все инволюции попарно эквивалентны, а в $T_{2k}(\mathbb{Z}[\varphi])$ ровно $(k + 1)^2$ классов эквивалентности инволюций.

СЛУЧАЙ 2: t – нечетное.

ЛЕММА 9. Пусть t – нечетное. Тогда $R/2R = \mathbb{F}_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если t – нечетное, то

$$\overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi + 1} = \overline{\varphi^2 + \varphi} = \overline{\varphi + 1 + \varphi} = \overline{1},$$

значит $\overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi + 1}$ взаимнообратные. Следовательно, $R/2R$ – поле \mathbb{F}_4 . \square

Для дальнейших рассуждений нам потребуется ввести норму в R . Для этого перейдем к видоизмененной формулировке устройства кольца R .

$$a + b\varphi = a + b \frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \frac{2a + b + b\sqrt{d}}{2} = \frac{2a + b}{2} + \frac{b\sqrt{d}}{2}$$

Сделаем замену $r = 2a + b, s = b$. Заметим, что $(r - s) \div 2$, тогда

$$\mathbb{Z}[\varphi] = R = \left\{ \frac{r}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{d} \mid r, s \in \mathbb{Z} \text{ и } (r - s) \div 2 \right\}.$$

Элемент кольца R обратим тогда и только тогда, когда его норма $\left| \frac{r}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{d} \right| = \frac{r^2 - s^2d}{4} = \pm 1$ или $r^2 - s^2d = \pm 4$.

ЛЕММА 10. Пусть $d \equiv 1 \pmod{4}$. Тогда все обратимые элементы в $R/2R$ поднимаются по модулю $2R$ тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - dy^2 = \pm 4, \text{ где } x, y - \text{ нечетные одновременно. } (***)$$

Причем, если указанное уравнение не обладает требуемыми решениями, то $U = \{\overline{1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как уже было отмечено выше, $\bar{1}$ является обратимым элементом, который всегда поднимается по модулю $2R$. Пусть теперь $\bar{\varphi}$ и $\overline{\varphi + 1}$ поднимаются по модулю $2R$. Так как U – подгруппа $(R/2R)^*$ (группы обратимых элементов $R/2R$), то либо $U = \{\bar{1}\}$, либо $U = \{\bar{1}, \bar{\varphi}, \overline{\varphi + 1}\}$.

Далее, элемент $a + b\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ кольца R принадлежит смежному классу $\bar{\varphi}$ тогда и только тогда, когда a четное, а b нечетное. Следовательно, $r = 2a + b$ и $s = b$ одновременно нечетные. Или же элемент $a + b\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ кольца R принадлежит смежному классу $\overline{\varphi + 1}$ тогда и только тогда, когда a и b нечетные. Следовательно, r и s снова одновременно нечетные. При этом, элемент $a + b\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ будет обратим в кольце R тогда и только тогда, когда разрешимо в целых числах уравнение

$$x^2 - dy^2 = \pm 4, \text{ где } x, y - \text{ нечетные одновременно.}$$

Рассматривая уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$ по модулю 4, несложно проверить, что значения x и y либо оба четные, либо оба нечетные.

Заметим, что если r и s – четные, то b – четное, a – четное или нечетное. Значит, если уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$ имеет только четные решения, то соответствующие обратимые элементы $a + b\varphi$ кольца R попадут в класс $\bar{1}$. Второе утверждение леммы очевидно. \square

Следующее утверждение дает критерий разрешимости уравнения (***)

ЛЕММА 11. Уравнение (***) разрешимо тогда и только тогда, когда наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - dy^2 = 4$ нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Предположим, что наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - dy^2 = 4$ четно. Сокращая обе части уравнения на 4, убеждаемся в том, что это решение есть $(2x_*, 2y_*)$, где (x_*, y_*) – наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - dy^2 = 1$. Пользуясь Леммой 6 [5] и Теоремой 3 [5], получаем, что $(2x_*, 2y_*)$ – единственное базовое решение уравнения $x^2 - dy^2 = 4$, и все его положительные решения имеют вид

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (2x_* + 2y_*\sqrt{d})(x_* + y_*\sqrt{d})^{n-1} = 2(x_* + y_*\sqrt{d})^n,$$

где n – натуральное число. Таким образом, уравнение $x^2 - dy^2 = 4$ имеет только четные решения.

Поскольку уравнение (***) разрешимо, то существует нечетное решение уравнения $x^2 - dy^2 = -4$. Обозначим это решение через (x_0, y_0) . Рассмотрим следующее равенство

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^2 = x_0^2 + dy_0^2 + 2x_0y_0\sqrt{d} = X + Y\sqrt{d},$$

где $X = x_0^2 + dy_0^2, Y = 2x_0y_0$. Несложно заметить, что пара (X, Y) является решением уравнения $x^2 - dy^2 = 16$. Действительно, имеем

$$(x_0 - y_0\sqrt{d})^2 = X - Y\sqrt{d},$$

откуда, перемножая последние равенства, получим

$$(x_0^2 - dy_0^2)^2 = (-4)^2 = X^2 - dY^2.$$

Так как x_0, y_0 – нечетные, а $d \equiv 1 \pmod{4}$, то $X = 2X_0, Y = 2Y_0$, где X_0, Y_0 – нечетные. Тогда, сокращая на 4, имеем

$$X_0^2 - dY_0^2 = 4.$$

Следовательно, мы нашли нечетное решение уравнения $x^2 - dy^2 = 4$. Данное противоречие завершает доказательство. \square

Возьмем $y = 1, x = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и подставим в уравнение $x^2 - dy^2 = -4$. Выразив d , получим

$$d = (2n + 1)^2 + 4 = 4n^2 + 4n + 5.$$

Или, подставив те же x и y в $x^2 - dy^2 = 4$, при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$d = (2n + 1)^2 - 4 = 4n^2 + 4n - 3.$$

При помощи данных формул можно получить некоторые бесквадратные значения d , при которых уравнение (***) разрешимо. Например, $d = 5, 13, 21, 29, 53, \dots$. При этом, если d будет содержать квадрат какого-либо числа m , то m – нечетно. Значит, мы можем записать d в виде $d = d_1 m^2$, где d_1 – бесквадратное число. А тогда если (x_0, y_0) есть какое-то решение уравнения (***), то $(x_0, m y_0)$ – решение $x^2 - d_1 y^2 = \pm 4$.

Уравнение (***) не разрешимо, например, если $d = 37, 101$, поскольку в этих случаях наименьшие положительные решения уравнения $x^2 - dy^2 = 4$ равны $(146, 24)$ и $(402, 40)$, соответственно.

Итак, наше исследование в последний раз распадается на два случая.

СЛУЧАЙ 2.1: t – нечетное и $U = \{\bar{1}\}$.

Следующее очевидное утверждение показывает, что случай $U = \{\bar{1}\}$ действительно реализуется.

ЛЕММА 12. Если уравнение $x^2 - y^2 d = \pm 4$ имеет только четные решения, то в $R/2R$ по модулю $2R$ поднимается только один обратимый элемент $-\bar{1}$.

Для начала классифицируем инволюции при нечетной размерности матриц. Так как $U = \{\bar{1}\}$, то определение эквивалентности векторов $z = (z_1, \dots, z_k), h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$ запишем в виде

$z \sim_{\text{odd}, U} h \Leftrightarrow \exists e_{ii}, c_{ij} \in R/2R$ такие, что

$$h_i = z_i + e_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

Из того, что $R/2R$ – поле \mathbb{F}_4 , следует, что для любого $c \in R/2R$, найдется $x \in R/2R$ такой, что $x^2 = c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_k) \in (R/2R)^k$. Тогда $a \sim_{\text{odd}, U} b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольные элементы a_m, b_m где $1 \leq m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = b_m + e_m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 b_j,$$

для некоторых $e_m, c_{mj} \in R/2R$.

Какими бы ни были a_m и b_m мы всегда можем выбрать $e_m \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_m = b_m + e_m^2$. А это значит, что

$$a_m = b_m + e_m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 b_j,$$

где все $c_{mj} = \bar{0}$. \square

Итак, если $U = \{\bar{1}\}$, то в силу Предложения 7 и Теоремы 4 в $T_{2k+1}(\mathbb{Z}[\varphi])$ все инволюции попарно эквивалентны. Теперь посмотрим, что будет в случае четной размерности матриц. Запишем определение эквивалентных векторов $z = (z_1, \dots, z_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k) \in (R/2R)^k$

$$z \sim_{even,U} h \Leftrightarrow \exists c_{ij} \in R/2R : h_i = z_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 z_j.$$

Как и прежде, нулевой вектор эквивалентен только себе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s, \dots, a_k) \in (R/2R)^k$ – ненулевой. Тогда

$$a \sim_{even,U} z_s = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s, \dots, \bar{z}_k) \in (R/2R)^k, \text{ где } \bar{z}_s \neq \bar{0}, \text{ а все остальные элементы равны } \bar{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall 1 \leq i < s \ a_i = \bar{0} \text{ и } a_s = \bar{z}_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Leftarrow) Так как $\bar{z}_i = \bar{0}$ для любого индекса $1 \leq i < s$, следовательно, выполняется равенство

$$a_i = \bar{0} = \bar{0} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{ij} \in R/2R$.

Выберем произвольный элемент a_m , где $s < m \leq k$ и покажем, что будет выполняться равенство

$$a_m = \bar{z}_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{z}_j,$$

для некоторых $c_{mj} \in R/2R$. Действительно, выберем $c_{ms} \in R/2R$ так, чтобы выполнялось равенство $a_m = c_{ms}^2 \bar{z}_s$. Несложно проверить, такие c_{ms} существуют для любых значений a_m и \bar{z}_s . Теперь заметим, что

$$a_m = c_{ms}^2 \bar{z}_s = \bar{z}_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj}^2 \bar{z}_j,$$

где $c_{mj} = \bar{0}$ при $j \neq s$. Для индекса s , имеем

$$a_s = \bar{z}_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j,$$

для любых $c_{sj} \in R/2R$. (\Rightarrow) Пусть теперь $a \sim_{even,U} z_s$. Тогда для любого индекса $1 \leq l \leq k$ выполняется

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j.$$

Причем, если $l < s$, то

$$a_l = \bar{z}_l + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \bar{z}_j = \bar{0} + \sum_{j=1}^{l-1} c_{lj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Если же $l = s$, тогда

$$a_s = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \bar{z}_j = \bar{z}_s + \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj}^2 \cdot \bar{0} = \bar{z}_s.$$

□

Только что доказанное утверждение влечет за собой, что $z_s \not\sim_{even,U} z_{s_1}$, если $z_s \neq z_{s_1}$ или $s \neq s_1$. Таким образом, из Предложения 8 следует, что любой ненулевой вектор в $(R/2R)^k$ эквивалентен одному из векторов вида z_s . Прямой подсчет показывает, что векторов типа $z_s - 3k$ вариантов и один нулевой вектор, следовательно $|(R/2R)^k / \sim_{even,U}| = 3k + 1$. И тогда, в силу Теоремы 4 и Следствия 1 [3], имеем $|\beta| = 3k + 2$, где β – множество классов эквивалентности инволюций в $T_{2k}(\mathbb{Z}[\varphi])$.

СЛУЧАЙ 2.2: t – нечетное и $U = \{\bar{1}, \bar{\varphi}, \overline{\varphi + 1}\}$.

Если в $R/2R$ все обратимые элементы поднимаются по модулю $2R$, то из Следствия 4 [3] и Теоремы 4 [3] следует, что в $T_{2k+1}(\mathbb{Z}[\varphi])$ все инволюции попарно эквивалентны, а из Следствия 4 [3], Теоремы 3 [3] и Следствия 1 [3] следует, что в $T_{2k}(\mathbb{Z}[\varphi])$ ровно $(k + 1)^2 + 1$ классов эквивалентности инволюций.

Таким образом, нами доказана **Теорема 3**.

5. Заключение

Для иллюстрации результатов, полученных в нашем исследовании, построим несколько примеров для алгебр $T_4(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ и $T_5(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$.

ПРИМЕР 1. Пусть $d = -5$, т.е. $d \equiv 3 \pmod{4}$. Очевидно, что уравнение $x^2 + 5y^2 = 1$ не разрешимо при x – четном, y – нечетном. Следовательно, по Теореме 1 в алгебре $T_4(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ имеется ровно 14 классов эквивалентности инволюций, а в алгебре $T_5(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ – 3 класса эквивалентности инволюций.

ПРИМЕР 2. Пусть $d = 26$, т.е. $d \equiv 2 \pmod{4}$. Уравнение $x^2 - 26y^2 = -1$, где x, y – нечетные, разрешимо (например при $x = 5, y = 1$). Следовательно, по Теореме 2 в алгебре $T_4(\mathbb{Z}[\sqrt{26}])$ имеется ровно 8 классов эквивалентности инволюций, а в алгебре $T_5(\mathbb{Z}[\sqrt{26}])$ – 3 класса эквивалентности инволюций.

ПРИМЕР 3. Пусть $d = 37$, т.е. $d \equiv 1 \pmod{4}$. Так $d = 4 \cdot 9 + 1$, то по Теореме 3 в алгебре $T_4(\mathbb{Z}[\sqrt{37}])$ имеется ровно 8 классов эквивалентности инволюций, а в алгебре $T_5(\mathbb{Z}[\sqrt{37}])$ все инволюции попарно эквивалентны.

Помимо количества классов эквивалентности инволюций в конкретной алгебре верхнетреугольных матриц, безусловно, представляет интерес устройство инволюций в каждом таком классе. Следующий пример прольет свет на данный вопрос.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим алгебру $T_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$. По Теореме 1 в данной алгебре 5 классов эквивалентности инволюций. Очевидно, что представителями двух классов являются ортогональная и симплектическая инволюции. Чтобы найти представителей других трех классов обратимся к Предложению 3.

Так как мы рассматриваем матрицы размера 2×2 , то вектор z_s состоит из одной компоненты. При этом $a \sim_{even,U} z_s$ тогда и только тогда, когда $a = z_s$. Следовательно, $a = \bar{1}$ или $a = \bar{\varphi}$, или $a = \overline{\varphi + 1}$. Берем по одному элементу из каждого смежного класса и получаем три неэквивалентных между собой инволюции. Для произвольной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ имеем:

$$1) \gamma_{B_1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \gamma_{B_1} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & (a-c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$2) \gamma_{B_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \gamma_{B_2} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & \sqrt{-5}(a-c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$3) \gamma_{B_3}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{-5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 - \sqrt{-5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$\gamma_{B_3} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & (1 + \sqrt{-5})(a - c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Если же рассмотреть алгебру $T_2(R)$, где $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ — кольцо целых Гауссовых чисел, то Теореме 1 в данной алгебре 4 класса эквивалентности инволюций. Снова, представителями двух классов являются ортогональная и симплектическая инволюции. А согласно Предложению 5 представителями других двух классов могут выступать, например, следующие инволюции:

$$1) \gamma_{B_1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \gamma_{B_1} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & (a - c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$2) \gamma_{B_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 - \sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$\gamma_{B_2} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & (1 + \sqrt{-1})(a - c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отображение $\gamma_{B_3} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & \sqrt{-1}(a - c) + b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, также будет инволюцией в $T_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$. Но при этом, инволюции γ_{B_1} и γ_{B_3} эквивалентны между собой. Покажем это, воспользовавшись Леммой 1 [3].

Далее вместо $\sqrt{-1}$ будем писать i . По Лемме 1 [3] нам необходимо найти обратимую матрицу $V \in T_2(\mathbb{Z}[i])$ и обратимый $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$ такие, чтобы выполнялось равенство

$$VB_3V^* = \lambda B_1.$$

Положим $V = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ и $\lambda = -i$. Обратными к ним будут соответственно матрица $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ и элемент i . Непосредственная проверка показывает, что следующее равенство верно

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В заключении коротко отметим, что задача, поставленная в начале статьи, достигнута: изучена проблема классификации инволюций в алгебре верхнетреугольных матриц над кольцом целых алгебраических чисел квадратичных полей; в ходе описания инволюций в вышеупомянутой алгебре были найдены эквивалентные формулировки условий в рамках теории уравнений Пелля [5].

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность А. Н. Абызову, Д. Т. Тапкину и М. Е. Чанге за многочисленные обсуждения результатов и интерес к настоящей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. журнал, 2018, Т. 59, № 5, С. 1116–1127.
2. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Группы автоморфизмов колец формальных матриц // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019, Т. 164, С. 96–124.
3. Кульгускин И. А., Тапкин Д. Т. Инволюции в алгебре верхнетреугольных матриц // Известие вузов. Математика, 2023, № 6, С. 11–30.
4. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1966, 224 с.
5. Чанга М. Е. Элементарная теория уравнений Пелля. — Москва: МПГУ, 2019, 36 с.
6. Albert A. A. Structure of algebras. — Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1961, Vol. 24, 210 p.
7. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. Classification of involutions on incidence algebras // Comm. Alg., 2011, Vol. 39, P. 1941–1955.
8. Brusamarello R., Fornaroli E. Z., Santulo Jr. E. A. Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras // Linear Multilinear Algebra, 2012, Vol. 60, P. 181–188.
9. Brusamarello R., Lewis D. W. Automorphisms and involutions on incidence algebras // Linear and Multilinear Algebra, 2011, Vol. 59, No. 11, P. 1247–1267.
10. Fornaroli E. Z., Pezzott R. E. M. Anti-isomorphisms and involutions on the idealization of the incidence space over the finitary incidence algebra // Linear Algebra Appl, 2022, Vol. 637, P. 82–109.
11. Jacobson N. Finite-dimensional division algebras over fields. — Berlin, Springer-Verlag, 1996, 284 p.
12. Knus M. A., Merkurjev A., Rost M., Tignol J.-P. The Book of Involutions. — Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1998, Vol. 44, 31 p.
13. Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Automorphisms of Formal Matrix Rings // J. Math. Sci., 2021, Vol. 258, No. 2, P. 222–249.
14. Spiegel E. Involutions in incidence algebras // Linear Algebra App., 2005, Vol. 405, P. 155–162.
15. Vincenzo O. M., Koshlukov P., Scala R. Involutions for upper triangular matrix algebras // Advances in Applied Mathematics, 2006, Vol. 37, P. 541–568.

REFERENCES

1. Krylov, P. A. & Norbosambuyev, Ts. D. 2018, “Automorphisms of formal matrix algebras”, *Sib. mat. Journal*, vol. 59, no. 5, pp. 1116–1127.
2. Krylov, P. A. & Tuganbaev, A. A. 2019, “Groups of automorphisms of rings of formal matrices”, *Results of Science and Technology*, vol. 164, pp. 96–124.
3. Kulguskin, I. A. & Tapkin, D. T. 2023, “Involutions in the algebra of upper triangular matrices”, *News of universities. Mathematics*, no. 6, pp. 11–30.

4. Leng, S. 1966, "Algebraic numbers", *Moscow: Mir*, 1966, 224 p.
5. Changa, M. E. 2019, "Elementary theory of Pell equations", *Moscow: MPSU*, 36 p.
6. Albert, A. A. 1961, "Structure of algebras", *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.*, vol. 24, 210 p.
7. Brusamarello, R., Fornaroli, E. Z. & Santulo Jr. E. A. 2011, "Classification of involutions on incidence algebras", *Comm. Alg.*, vol. 39, pp. 1941–1955.
8. Brusamarello, R., Fornaroli, E. Z. & Santulo Jr. E. A. 2012, "Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras", *Linear Multilinear Algebra*, vol. 60, pp. 181–188.
9. Brusamarello, R. & Lewis, D. W. 2011, "Automorphisms and involutions on incidence algebras", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 59, no. 11, pp. 1247–1267.
10. Fornaroli, E. Z. & Pezzott, R. E. M. 2022, "Anti-isomorphisms and involutions on the idealization of the incidence space over the finitary incidence algebra", *Linear Algebra Appl*, vol. 637, pp. 82–109.
11. Jacobson, N. 1996, "Finite-dimensional division algebras over fields", *Berlin: Springer-Verlag*, 284 p.
12. Knus, M. A., Merkurjev, A., Rost, M. & Tignol, J.-P. 1998, "The Book of Involutions", *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.*, vol. 44, 31 p.
13. Krylov, P. A. & Tuganbaev, A. A. 2021, "Automorphisms of Formal Matrix Rings", *J. Math. Sci.*, vol. 258, no. 2, pp. 222–249.
14. Spiegel, E. 2005, "Involutions in incidence algebras", *Linear Algebra App.*, vol. 405, pp. 155–162.
15. Vincenzo, O. M., Koshlukov, P. & Scala, R. 2006, "Involutions for upper triangular matrix algebras", *Advances in Applied Mathematics*, vol. 37, pp. 541–568.

Получено: 06.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 519.234

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-112-125

Оценивание функции среднего для зашумленного случайного процесса при наличии разреженных данных¹

Ю. Ю. Линке

Линке Юлиана Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск).
e-mail: linke@math.nsc.ru

Аннотация

Рассматривается регрессионная постановка задачи оценивания функции математического ожидания некоторого почти наверное непрерывного случайного процесса, когда зашумленные значения независимых копий случайного процесса наблюдаются в некоторых известных наборах точек (вообще говоря, случайных), при этом количество наблюдений для каждой из копий случайно и совокупность этих величин по всем сериям не обязательно состоит из независимых и одинаково распределенных компонент. Данная постановка включает в себя два наиболее популярных в научной литературе варианта разреженных данных, когда либо количества наблюдений в сериях представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины, либо количества наблюдений в каждой серии неслучайны и равномерно ограничены по всем сериям.

В работе предложены новые оценки ядерного типа для функции математического ожидания случайного процесса. Доказана равномерная состоятельность новых ядерных оценок при весьма слабых и универсальных ограничениях касательно стохастической природы временных точек наблюдений: требуется лишь, чтобы вся совокупность этих точек с высокой вероятностью образовывала бы измельчающееся разбиение области определения исходного случайного процесса.

Ключевые слова: непараметрическая регрессия, оценивание функции среднего, разреженные данные, ядерные оценки, равномерная состоятельность.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Ю. Ю. Линке. Оценивание функции среднего для зашумленного случайного процесса при наличии разреженных данных // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 112–125.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 519.234

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-112-125

Mean function estimation for a noisy random process under a sparse data condition

Yu. Yu. Linke

¹Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

Linke Yuliana Yurievna — candidate of physical and mathematical sciences, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk).

e-mail: linke@math.nsc.ru

Abstract

We consider a regression statement of the problem of estimating the mean function of some almost sure continuous random process, when noisy values of independent copies of this random process are observed in some known sets of time points (generally speaking, random). Moreover, the size of observations for each of the copies is random, and the total collection of the time points for all series does not necessarily consist of independent and identically distributed random variables. This setting includes two of the most popular sparse data variants in the scientific literature, in which ever the sizes of observations in the series are independent identically distributed random variables, or the sizes of observations in each series are nonrandom and uniformly bounded over all series.

The paper proposes new kernel-type estimators for the mean function of a random process. The uniform consistency of the new kernel estimators is proved under very weak and universal restrictions regarding the stochastic nature of observed time points: it is only required that the entire set of these points with a high probability would form a refining partition of the original random process domain.

Keywords: nonparametric regression, mean function estimation, sparse functional data, kernel estimation, uniform consistency.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Yu. Yu. Linke, 2023, “Mean function estimation for a noisy random process under a sparse data condition”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 112–125.

1. Введение

Пусть даны наблюдения $\{X_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$, которые представимы в виде

$$X_{ij} = f_i(Z_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad (1)$$

где $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — независимые ненаблюдаемые копии некоторого почти наверное непрерывного случайного процесса $f(t)$, определенного на конечном интервале \mathcal{T} (без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{T} = [0, 1]$), случайные величины $\{\varepsilon_{ij}\}$ — ненаблюдаемые погрешности, величины $\{Z_{ij}\}$ известны и могут быть как детерминированными, так и случайными. Таким образом, в каждой серии $i = 1, \dots, n$ мы наблюдаем зашумленные значения $\{X_{ij}, j = 1, \dots, m_i\}$ случайной функции $f_i(t)$ в наборе ее аргументов $\{Z_{ij}, j = 1, \dots, m_i\}$, которые нередко называют временными точками. Задача состоит в том, чтобы по парам наблюдений $\{(Z_{ij}, X_{ij}), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ оценить функцию среднего $\mu(t) = \mathbb{E}f(t)$.

Оценивание функции среднего (наряду с функцией ковариации) случайного процесса по выборочным данным со структурой (1) является одной из важнейших задач в так называемом функциональном анализе данных (см., например, [3], [6], [8], [17]) и многие недавние работы были посвящены решению этой задачи. Неполный список таких работ, связанных с методами ядерного сглаживания, включает [2], [5]–[10], [18], [20], [21]–[27]. Оценки для функции среднего могут представлять как самостоятельный интерес, так и играть важную вспомогательную роль в том или ином последующем анализе (см., например, [4], [6], [8], [9], [17], [19], [25]). В задаче оценивания функции среднего чаще всего исследуется один из трех вариантов асимптотических свойств оценок: равномерная состоятельность ([6], [9], [22], [25], [27]), L_2 -состоятельность ([5], [25]), асимптотическая нормальность ([7], [21], [23], [25]). Вопросы

интервального оценивания рассматриваются, например, в [7], [18], [26]. Исключительная важность свойства равномерной состоятельности оценок (в контексте рассматриваемой задачи) отмечается, например, в [9] и [22].

Данные в модели (1) нередко подразделяют на те или иные типы в зависимости от количества наблюдений для той иной реализации случайного процесса. Так, данные могут быть в некотором смысле *плотными*, или *разреженными* (в английской терминологии — *dense* и *sparse*, соответственно), или смешанными. Хотя не существует строгого разделения типов функциональных данных (см., например, [19], [25]), тем не менее, данные принято относить к разреженным (неплотным) в одном из двух случаях: либо когда неслучайное количество наблюдений в каждой серии равномерно ограничено, т.е. $\max_{1 \leq i \leq n} m_i \leq c$ и константа c не зависит от n ([5], [9], [27]), либо когда m_i случайны и являются независимыми копиями некоторой целочисленной случайной величины ([21], [22], [26]). К плотным данным относят ситуацию, когда $\min_{1 \leq i \leq n} m_i \geq m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ ([9], [18], [23], [27]). Стоит отметить, что в литературе основное внимание уделяется именно этим двум указанным типам данных. Иные данные, в том числе смешанного типа, когда для одних реализаций процесса данные могут быть плотными, а для других — разреженными, рассматривались, например, в [9] и [25].

Подходы к оцениванию, используемые в случае плотных или разреженных данных, как правило, различны (см., например, [17], [19]). В случае плотных данных для построения оценки функции среднего естественно предварительно оценить каждую случайную функцию по наблюдениям соответствующей серии, а затем провести усреднение по всем сериям (см., например, [1], [5], [11], [23]). Для разреженных данных такой способ построения оценки не будет работать в силу недостаточности информации, относящейся к каждой реализации случайного процесса, и зачастую наблюдения предварительно каким-либо образом объединяют для заимствования информации друг у друга (см., например, [5], [22], [25]). Имеется точка зрения (см., например, [19]), что оценивание для разреженных данных нередко требует больших усилий, нежели для плотных. Некоторые унифицированные подходы, которые годятся как для плотных, так и для разреженных функциональных данных, предложены в [9] и [25].

Как и в классических задачах регрессии, модели (1) со случайными или детерминированными временными точками $\{Z_{ij}\}$ принято рассматривать отдельно. В первом случае, как правило, предполагается, что случайные величины $\{Z_{ij}\}$ являются независимыми и одинаково распределенными (см., например, [2], [5], [7], [9], [21]–[27]). Некоторые авторы подчеркивают (см., например, [5]), что их результаты можно перенести и на слабо зависимые величины.

В данной работе при близких к минимальным условиям на временные точки построены равномерно состоятельные оценки ядерного типа для функции среднего в условиях разреженных данных. Относительно количества данных m_i , $i = 1, \dots, n$, в сериях наблюдений мы будем предполагать, что это положительные целочисленные случайные величины, не зависящие от n , не обязательно независимые или одинаково распределенные. Так что указанное условие включает оба вышеупомянутые предположения, используемых в литературе в случае разреженных данных: либо $\{m_i\}$ случайны и являются независимыми копиями целочисленной случайной величины, либо неслучайны и равномерно ограничены. Отметим, что во всех известных нам работах указанные два случая разреженных данных рассматриваются отдельно. В отличие от известных ранее результатов, новые оценки универсальны в смысле их нечувствительности к стохастической природе временных точек, которые могут быть как фиксированными, так и случайными, и при этом не обязательно состоящими из независимых или слабо зависимых случайных величин. В наших условиях зависимость временных точек может быть существенно более сильной (в сравнении с известными ранее условиями), когда не выполнены те или иные предельные теоремы или моментные неравенства, с использованием которых обычно исследуются ядерные оценки в непараметрической регрессии. Относительно временных точек требуется лишь, чтобы вся их совокупность (по всем сериям) с высокой вероятностью образовывала бы измельчающееся разбиение области определения случайного

процесса. Подчеркнем, что предлагаемые условия равномерной состоятельности оценок одновременно включают в себя как ситуацию фиксированных, так и случайных временных точек.

Ранее подобная идея об общих универсальных относительно стохастической природы и близких к минимальными условиям на регрессоры была реализована в [1] и [11] в классической постановке задачи непараметрической регрессии. В частности, для оценивания (восстановления) регрессионной функции в этих работах относительно набора регрессоров требуется лишь, чтобы этот набор с высокой вероятностью образовывал измельчающееся разбиение области определения регрессионной функции. Указанное условие по сути является необходимым для восстановления регрессионной функции с той или иной точностью. Полезно заметить, что равномерную состоятельность новых оценок, предложенных в [1] и [11] (и относящихся к локально-постоянным и локально-линейным ядерным оценкам), удалось доказать лишь при указанном минимальном ограничении на регрессоры во многом благодаря специальной структуре этих оценок, содержащей конструкции интегральных сумм Римана (это обстоятельство позволяет асимптотические свойства оценок исследовать за счет близости интегральных сумм и соответствующих интегралов, а не предельных теорем). В данной работе мы используем идеи и результаты из [11]. Отметим также, что близкие условия на регрессоры использовались в [12] и [28] в задачах непараметрической регрессии, а в [29], [30], [13]–[16] — в нелинейной регрессии.

2. Основные результаты

Прежде чем перейти к построению оценки для функции среднего $\mu(t)$, приведем ряд условий на параметры модели (1), которые мы будем использовать в тех или иных сочетаниях, а также условия на ядро сглаживания K , участвующее в оценивании.

(A₁) Пары наблюдений $\{(Z_{ij}, X_{ij})\}$ представимы в виде (1), где $f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)$ — неизвестные независимые одинаково распределенные с вероятностью 1 непрерывные случайные процессы, заданные на $[0, 1]$; временные точки $\{Z_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ представляют собой набор наблюдаемых случайных величин со значениями в $[0, 1]$, имеющих, вообще говоря, неизвестные распределения, не обязательно независимых или одинаково распределенных; положительные целочисленные случайные величины $\{m_i, i = 1, \dots, n\}$ не обязательно независимые или одинаково распределенные. Случайные величины $\{Z_{ij}\}$ могут зависеть от n .

(A₂) Случайные величины $\{m_i\}$ не зависят от $\{f_i(t)\}$ и $\{Z_{ij}\}$, а также не зависят от n .

(A'₂) При некотором $\alpha > 3$ выполнено

$$\max_{i \leq n} \mathbb{E} m_i^\alpha \leq \lambda_\alpha < \infty,$$

где константа λ_α может быть неизвестна и не зависит от n .

(A''₂) Выполнено равенство $m_1 = \dots = m_n$ и при некотором $\alpha > 0$ имеет место ограничение $\mathbb{E} m_1^\alpha < \infty$.

(A'''₂) Величины $\{m_i\}$ неслучайны и равномерно ограничены:

$$\max_{i \leq n} m_i \leq c < \infty,$$

где константа c не зависит от n .

(A₃) Ненаблюдаемые случайные погрешности $\{\varepsilon_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ при всех i, j , а также $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, с вероятностью 1 удовлетворяют условиям

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}} \varepsilon_{ij} = 0, \quad \max_{i,j} \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \varepsilon_{ij}^2 \leq \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} = 0,$$

где константа $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ может быть неизвестной и не зависящей от n , символ $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}$ обозначает условное математическое ожидание при фиксации σ -алгебры \mathcal{F} , порожденной случайными величинами $\{Z_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ и $\{m_i, i = 1, \dots, n\}$.

(A₄) Случайные функции $\{f_i(t)\}$ не зависят от $\{Z_{ij}\}$, при этом

$$\sup_{t \in [0,1]} \mathbb{D}f_1(t) \leq \sigma_f^2 < \infty.$$

(A₅) Ядерная функция $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является плотностью симметричного распределения с носителем на $[-1, 1]$, т.е. $K(t) \geq 0$, $K(t) = K(-t)$ при всех $t \in [-1, 1]$ и $\int_{-1}^1 K(t) dt = 1$. Предполагается, что функция $K(t)$ определена на \mathbb{R} , удовлетворяет условию Липшица с константой $1 \leq L < \infty$ и $K(\pm 1) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится обозначение $K_h(t) = h^{-1}K(h^{-1}t)$. Понятно, что $K_h(t)$ — плотность распределения на $[-h, h]$. Считаем, что всюду в дальнейшем пределы, если не оговорено иное, берутся при $n \rightarrow \infty$. Через $O_p(\eta_n)$ будем обозначать некоторую случайную величину ζ_n такую, что для каждого положительного x выполнено

$$\limsup \mathbb{P}(|\zeta_n|/\eta_n > x) \leq \beta(x),$$

где $\{\eta_n\}$ — положительные (возможно, случайные) величины, а функция $\beta(x)$ не зависит от n и $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0$. Введем также обозначение для модуля непрерывности $\omega_\mu(\delta)$ функции $\mu(t) = \mathbb{E}f_1(t)$:

$$\omega_\mu(\delta) = \sup_{x, y: |x-y| \leq \delta} |\mu(x) - \mu(y)|.$$

Перейдем к построению оценки для функции $\mu(t)$. Положим $N = m_1 + \dots + m_n$ и по выборке $\{Z_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ образуем вариационный ряд, элементы которого обозначим через $Z_{N:1} \leq \dots \leq Z_{N:N}$. Положим $Z_{N:0} = 0$, $Z_{N:N+1} = 1$. Пусть $N = lr + s$, где l, r и s — целые, r неслучайно, а случайные величины l и s таковы, что $1 \leq s < r$ почти наверное (т.е. s — это остаток от деления N на l). Считаем, что $r \equiv r(n) \rightarrow \infty$ и $r = o(n)$, так что $l = l(n) \geq n/r - 1$ также должно неограниченно возрастать с ростом n . Определим следующие величины:

$$\Delta Z_{Nl} = Z_{N:N+1} - Z_{N:r(l-1)}, \quad \Delta Z_{Nk} = Z_{N:rk} - Z_{N:r(k-1)}, \quad k = 1, \dots, l-1. \quad (2)$$

Таким образом, отрезок $[0, 1]$ мы разбили на l попарно несовместных отрезков с длинами $\Delta Z_{N1}, \dots, \Delta Z_{Nl}$, каждый из которых (за исключением последнего отрезка) содержит по r точек, а последний отрезок длины ΔZ_{Nl} содержит $r + s < 2r$ точек. Нам также потребуются следующие обозначения:

$$H_1 = \{(i, j) : Z_{ij} \in [Z_{N:0}, Z_{N:r}]\}, \\ H_k = \{(i, j) : Z_{ij} \in (Z_{N:r(k-1)}, Z_{N:rk}]\}, \quad k = 2, \dots, l.$$

Отметим, что множества H_k , $k = 1, \dots, l-1$, содержат ровно по r пар индексов, а множество H_l содержит $r + s < 2r$ пар индексов. При $k = 1, \dots, l-1$ положим

$$\bar{X}_k = r^{-1} \sum_{(i,j) \in H_k} X_{ij}, \quad \bar{f}_k = r^{-1} \sum_{(i,j) \in H_k} f_i(Z_{ij}), \quad \bar{\varepsilon}_k = r^{-1} \sum_{(i,j) \in H_k} \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

и определим величины

$$\bar{X}_l = (r+s)^{-1} \sum_{(i,j) \in H_l} X_{ij}, \quad \bar{f}_l = (r+s)^{-1} \sum_{(i,j) \in H_l} f_i(Z_{ij}), \quad \bar{\varepsilon}_l = (r+s)^{-1} \sum_{(i,j) \in H_l} \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Далее, преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$\bar{X}_k = \bar{f}_k + \bar{\varepsilon}_k, \quad k = 1, \dots, l.$$

В силу условий (A_1) , (A_4) , определения множеств H_k , закона больших чисел, а также условия (A_2) или (A_2''') , можно ожидать, что при любом $k = 1, \dots, l$ выполнено $\bar{f}_k \approx \mu(t)$, где $t \in [Z_{N:r(k-1)}, Z_{N:rk}]$. Положим для определенности $t = Z_{N:rk}$. Иными словами,

$$\bar{X}_k \approx \mu(Z_{N:rk}) + \bar{\varepsilon}_k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Мы предлагаем оценить функцию среднего $\mu(t)$ в такой модели непараметрической регрессии с помощью метода ядерного сглаживания из [1]. В итоге оценку для $\mu(t)$ определим равенством

$$\hat{\mu}(t) = \frac{\sum_{k=1}^l \bar{X}_k K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk}}{\sum_{k=1}^l K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk}}. \quad (5)$$

Основное предположение на временные точки, гарантирующее существование равномерно состоятельной оценки для функции среднего в классе введенных оценок, состоит в следующем.

(A₆) *Имеет место предельное соотношение*

$$\delta_l = \max_{1 \leq k \leq l} \Delta Z_{Nk} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Другими словами, условие (A_6) означает, что набор точек $\{Z_{ij}\}$ с высокой вероятностью образует измельчающееся разбиение отрезка $[0, 1]$. Если $\{Z_{ij}\}$ независимы и одинаково распределены, а отрезок $[0, 1]$ является носителем распределения, то условие (A_6) выполнено. В частности, в случае существования отделенной от нуля на $[0, 1]$ плотности распределения Z_{11} и неслучайном l , с вероятностью 1 справедливо соотношение $\delta_l = O(\log l/l)$. Если последовательность бесконечномерных векторов $\{m_i, Z_{i1}, Z_{i2}, \dots\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию α -перемешивания, причем для любого фиксированного i все конечномерные распределения последовательности $\{Z_{ij}; j \geq 1\}$ имеют строго положительные плотности, а сама эта последовательность не зависит от m_i , то условие (A_6) также будет выполнено. Но выполнение условия (A_6) вполне возможно и для других типов зависимости, которая может быть более сильной, нежели классические условия слабой зависимости (например, когда не выполнены предельные теоремы типа законов больших чисел). Соответствующие примеры и обсуждения такого рода условий можно найти в [1], [11], [12] и [28].

Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A_1) – (A_5) . Тогда для любого фиксированного $h \in (0, 1/2)$ с вероятностью 1

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\hat{\mu}(t) - \mu(t)| \leq \omega_\mu(h) + \omega_\mu(\delta_l) + \zeta_{l,r,h} + \eta_{l,r} \quad (6)$$

и случайные величины $\zeta_{l,r,h}$ и $\eta_{l,r}$ таковы, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_{l,r,h} > y, \delta_l \leq h/(8L)) &\leq C \sigma_\varepsilon^2 L^2 y^{-2} h^{-2} r^{-1} \mathbb{E} \delta_l, \\ \mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) &\leq 2\sigma_f^2 M^3 n r^{-2} y^{-2} + \mathbb{P}\left(\max_{i=1, \dots, n} m_i > M\right), \end{aligned}$$

где C — абсолютная положительная постоянная, а M — произвольная положительная константа. Если дополнительно при некотором $\alpha > 0$ и всех $i \leq n$ выполнено $\mathbb{E} m_i^\alpha < \infty$, то

$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2(2\sigma_f^2)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \lambda_{\alpha,n}^{\frac{3}{3+\alpha}} n^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} (ry)^{-\frac{2\alpha}{3+\alpha}}, \quad \text{где } \lambda_{\alpha,n} = \mathbb{E}\left(\max_{i \leq n} m_i^\alpha\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что $\delta_l \leq 1$, а потому при выполнении условия (A_6) имеет место предельное соотношение $\mathbb{E}\delta_l \rightarrow 0$. Кроме того, справедливо соотношение

$$\zeta_{l,r,h} = O_p \left(h^{-1} (r^{-1} \mathbb{E}\delta_l) \right)^{1/2} + O(h^{-1} \mathbb{E}\delta_l). \quad (7)$$

Далее, если выполнено (A'_2) , то в силу очевидной оценки $\max_{i=1, \dots, n} m_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^n m_i^\alpha$ получаем, что $\lambda_{\alpha,n} \leq n\lambda_\alpha$, а потому

$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2(2\sigma_f^2)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \lambda_\alpha^{\frac{3}{3+\alpha}} n (ry)^{-\frac{2\alpha}{3+\alpha}}.$$

Если выполнено (A''_2) или (A'''_2) , то соответственно

$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2(2\sigma_f^2)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} (\mathbb{E}m_1^\alpha)^{\frac{3}{3+\alpha}} n^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} (ry)^{-\frac{2\alpha}{3+\alpha}}, \quad \mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2\sigma_f^2 c^3 n r^{-2} y^{-2}.$$

Таким образом, если выполнено (A'_2) , то $\eta_{l,r} = O_p(n^{(3+\alpha)/(2\alpha)} r^{-1})$, а если справедливо одно из двух условий (A''_2) или (A'''_2) , то $\eta_{l,r} = O_p(\sqrt{n}/r)$.

Из теоремы 1 и замечания 4 получаем следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (A_1) – (A_6) , (A'_2) и

$$h \rightarrow 0, \quad h^{-2} r^{-1} \mathbb{E}\delta_l \rightarrow 0, \quad \mathbb{P}(\delta_l > h/(8L)) \rightarrow 0, \quad n^{(3+\alpha)/(2\alpha)} r^{-1} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Тогда

$$\sup_{t \in [0,1]} |\hat{\mu}(t) - \mu(t)| \xrightarrow{P} 0. \quad (9)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия (A_1) – (A_6) и (A''_2) , а также справедливы первые три соотношения в (8) и $\sqrt{n}/r \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость (9).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия (A_1) , (A_3) – (A_6) , (A'''_2) , справедливы первые три соотношения в (8) и $\sqrt{n}/r \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В условиях следствия 1 количество точек $r = r(n) \rightarrow \infty$ нужно выбирать таким образом, чтобы (среди прочих) выполнялось соотношение $n^{(3+\alpha)/(2\alpha)} r^{-1} \rightarrow 0$. Отметим, что в рамках следствия 1 мы имеем $(3+\alpha)/(2\alpha) < 1$ при $\alpha > 3$. В условиях следствий 2 или 3 количество точек $r = r(n) \rightarrow \infty$ нужно выбирать так, чтобы $\sqrt{n}/r \rightarrow 0$. Понятно, что при этом с учетом условия $r = o(n)$ количество (возможно, случайное) отрезков $l = l(n) \geq N/r - 1 \geq n/r - 1$ также должно неограниченно возрастать при $n \rightarrow \infty$.

ПРИМЕР 5. Пусть $r = n^{1/2+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$ и $\mathbb{E}\delta_l = O(r/n)$. Последнее условие выполнено, например, если вся совокупность временных точек образует равномерную решетку на $[0, 1]$, или если набор $\{Z_{ij}\}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин с отделенной от нуля плотностью на $[0, 1]$. Предположим, что функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, т.е. $\omega_\mu(h) \leq Ch^\gamma$ при всех $h > 0$ и некоторых фиксированных $\gamma \in (0, 1]$ и $C > 0$. В этом случае величина $\bar{h} = n^{-\frac{1}{2(\gamma+1)}}$ уравнивает по h порядок малости слагаемого $\omega_\mu(h)$ и первой компоненты слагаемого $\zeta_{l,r,h}$ (см. формулу (7)) в правой части соотношения (6), зависящих от размера окна h . В сделанных предположениях $\mathbb{E}\delta_l/h = O\left(n^{\frac{\gamma-2\varepsilon(1+\gamma)}{2(\gamma+1)}}\right)$, так что третье условие в (8) выполнено при $0 < \varepsilon < \gamma/(2+2\gamma)$. При этом для выполнения четвертого условия в (8) нужно, чтобы $\alpha > 3/(2\varepsilon)$.

3. Доказательства

Для вывода утверждения теоремы 1 нам потребуются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \nu_{l,r,h}(t) &= \left(\sum_{k=1}^l K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk} \right)^{-1} \sum_{k=1}^l K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk} \bar{\varepsilon}_k, \\ \varphi_{l,h}(t) &= \left(\sum_{k=1}^l K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk} \right)^{-1} \sum_{k=1}^l (\mu(Z_{N:rk}) - \mu(t)) K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk}, \\ \tau_{l,h}(t) &= \left(\sum_{k=1}^l K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk} \right)^{-1} \sum_{k=1}^l (\bar{f}_k - \mu(Z_{N:rk})) K_h(t - Z_{N:rk}) \Delta Z_{Nk}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подчеркнем, что ввиду свойств плотности $K_h(\cdot)$ область суммирования во введенных величинах совпадает с множеством $\{k : |t - Z_{N:rk}| \leq h, 1 \leq k \leq l\}$, что является принципиальным моментом для дальнейшего анализа. Имеем

$$\hat{\mu}_1(t) = \mu(t) + \varphi_{l,h}(t) + \tau_{l,h}(t) + \nu_{l,r,h}(t). \quad (11)$$

ЛЕММА 1. Для любых $y > 0$ и $h < 1/2$ на подмножестве элементарных событий, определяемых соотношением $\delta_l \leq h/(8L)$, имеет место следующая оценка:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}} \left(\sup_{t \in [0,1]} |\nu_{l,r,h}(t)| > y \right) \leq C \sigma_{\varepsilon}^2 L^2 r^{-1} \delta_l h^{-2} y^{-2},$$

где C — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Для любых $k \leq l$ и $u, v \leq l$, $u \neq v$, с вероятностью 1 выполнено

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}} \bar{\varepsilon}_k = 0, \quad \sup_{k \leq l} \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \bar{\varepsilon}_k^2 \leq r^{-1} \sigma_{\varepsilon}^2, \quad \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \bar{\varepsilon}_u \bar{\varepsilon}_v = 0.$$

Здесь мы учли, что $1/(r+s) \leq 1/r$. Таким образом, доказательство этого утверждения с очевидными изменениями повторяет вывод леммы 6 из [1]. \square

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 имеют место оценки

$$\sup_{t \in [0,1]} |\varphi_{l,h}(t)| \leq \omega_{\mu}(h), \quad \sup_{t \in [0,1]} |\tau_{l,h}(t)| \leq \omega_{\mu}(\delta_l) + \eta_{l,r},$$

где $\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2\sigma_f^2 n M^3 r^{-2} y^{-2} + \mathbb{P}\left(\max_{i=1, \dots, n} m_i > M\right)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Для вывода второго соотношения заметим прежде всего, что ввиду (10) выполнено

$$\sup_{t \in [0,1]} |\tau_{l,h}(t)| \leq \max_{1 \leq k \leq l} |\bar{f}_k - \mu(Z_{N:rk})|.$$

Пусть символы $\mathbb{D}_{\mathcal{F}}$, $\text{Cov}_{\mathcal{F}}$ и $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ обозначают соответственно условную дисперсию, условную ковариацию и условную вероятность при фиксации σ -алгебры \mathcal{F} , порожденной случайными величинами из наборов $\{Z_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$ и $\{m_i; i = 1, \dots, n\}$. В силу определенных (3), (4) и равенства $\mathbb{E}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij}) = \mu(Z_{ij})$ имеем

$$\bar{f}_k - \mu(Z_{N:rk}) = \rho_{1k} + \rho_{2k}, \quad k = 1, \dots, l,$$

где

$$\begin{aligned}\rho_{1k} &= r^{-1} \sum_{(i,j) \in H_k} (f_i(Z_{ij}) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij})), & \rho_{2k} &= r^{-1} \sum_{(i,j) \in H_k} \mu(Z_{ij}) - \mu(Z_{N:r_k}), \quad k \leq l-1, \\ \rho_{1l} &= (r+s)^{-1} \sum_{(i,j) \in H_l} (f_i(Z_{ij}) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij})), & \rho_{2l} &= (r+s)^{-1} \sum_{(i,j) \in H_l} \mu(Z_{ij}) - \mu(Z_{N:rl}).\end{aligned}$$

С учетом определения множеств H_k , $k = 1, \dots, l$, и условия (A_6) получаем, что

$$\max_{1 \leq k \leq l} |\rho_{2k}| \leq \max_{1 \leq k \leq l} \omega_{\mu}(\Delta Z_{Nk}) \leq \omega_{\mu}(\delta_l), \quad k = 1, \dots, l.$$

Введем событие $A_n = \bigcap_{i=1}^n \{m_i < M\}$ при некотором $M > 0$. Имеем

$$\mathbb{P}(\overline{A}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{m_i \geq M\}\right) = \mathbb{P}\left(\max_{i=1, \dots, n} m_i \geq M\right).$$

Далее, поскольку $\sum_{i=1}^n m_i = rl + s$, то на множестве A_n выполнено $l < nM/r$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq l} |\rho_{1k}| > y, A_n\right) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k < nM/r} |\rho_{1k}| > y, A_n\right) \leq \\ &\leq nMr^{-1} \max_{1 \leq k < nM/r} \mathbb{E}\mathbb{P}_{\mathcal{F}}(|\tilde{\rho}_{1k}| > y) \leq nMy^{-2}r^{-1} \max_{1 \leq k < nM/r} \mathbb{E}\mathbb{D}_{\mathcal{F}}\tilde{\rho}_{1k},\end{aligned}$$

где $\tilde{\rho}_{1k} = \rho_{1k}I(A_n)$ и $I(\cdot)$ — индикатор события.

Далее, справедливо представление

$$r^2 \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1k} = I(A_n) \sum_{(i,j) \in H_k} \mathbb{D}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij}) + I(A_n) \sum_{(i,j) \neq (i_1, j_1) \in H_k} \text{Cov}_{\mathcal{F}} \{f_i(Z_{ij}), f_{i_1}(Z_{i_1 j_1})\}. \quad (12)$$

С учетом условия (A_4) для любых $j, j_1 \leq m_i$ имеем

$$\mathbb{D}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij}) \leq \sigma_f^2, \quad \text{Cov}_{\mathcal{F}} \{f_i(Z_{ij}), f_{i_1}(Z_{i_1 j_1})\} \leq \sigma_f^2.$$

Кроме того, если $i \neq i_1$ во второй сумме в (12), то соответствующие ковариации равны нулю. Если же $i = i_1$, то количество пар индексов (i, j) и (i, j_1) в двойной сумме в (12) при выполнении события A_n будет меньше, чем $m_i^2 \leq M^2$. Если же произойдет дополнительное событие \overline{A}_n , то все члены в (12) обратятся в ноль. Следовательно, с вероятностью 1

$$r^2 \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1k} \leq r\sigma_f^2 + rM^2\sigma_f^2, \quad \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1k} \leq 2r^{-1}M^2\sigma_f^2.$$

Аналогично, для $k = l \leq [nM/r]$ при выполнении события A_n имеем

$$\begin{aligned}(r+s)^2 \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1l} &= \sum_{(i,j) \in H_l} \mathbb{D}_{\mathcal{F}} f_1(Z_{ij}) + \sum_{(i,j) \neq (i_1, j_1) \in H_l} \text{Cov}_{\mathcal{F}} \{f_i(Z_{ij}), f_{i_1}(Z_{i_1 j_1})\}, \\ (r+s)^2 \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1k} &\leq 2(r+s)\sigma_f^2 + (r+s)M^2\sigma_f^2, \quad \mathbb{D}_{\mathcal{F}} \tilde{\rho}_{1k} \leq 2r^{-1}M^2\sigma_f^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq l} |\rho_{1k}| > y, A_n\right) \leq 2\sigma_f^2 n M^3 r^{-2} y^{-2},$$

а потому

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq l} |\rho_{1k}| > y\right) \leq 2\sigma_f^2 n M^3 r^{-2} y^{-2} + \mathbb{P}\left(\max_{i=1, \dots, n} m_i > M\right).$$

Для завершения доказательства леммы 2 остается положить $\eta_{l,r} = \max_{1 \leq k \leq l} |\rho_{1k}|$. \square

Завершим доказательство теоремы 1. Положим $\zeta_{l,r,h} = \sup_{t \in [0,1]} |\nu_{l,r,h}(t)|$ и заметим, что

$$\mathbb{P}(\zeta_{l,r,h} > y, \delta_l \leq h/(8L)) = \mathbb{E}I(\delta_l \leq h/(8L))\mathbb{P}_{\mathcal{F}}(\zeta_{l,r,h} > y).$$

Первое утверждение теоремы следует теперь из тождества (11) и лемм 1, 2.

В силу оценки $m_1^\alpha \leq \max_{i \leq n} m_i^\alpha \leq \sum_i^n m_i^\alpha$ предположение о том, что при некотором α и всех $i \leq n$ выполнено $\mathbb{E}m_i^\alpha < \infty$, эквивалентно соотношению $\lambda_{\alpha,n} \equiv \mathbb{E}(\max_{i \leq n} m_i^\alpha) < \infty$. Поэтому с учетом неравенства Маркова

$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2\sigma_f^2 n M^3 r^{-2} y^{-2} + \lambda_{\alpha,n} M^{-\alpha}.$$

Приравнивая теперь оба слагаемых в правой части этого соотношения, находим оптимальный уровень «срезки», равный $M = (r^2 y^2 \lambda_{\alpha,n} / (2\sigma_f^2 n))^{1/(3+\alpha)}$. В итоге

$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2(2\sigma_f^2)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \lambda_{\alpha,n}^{\frac{3}{3+\alpha}} n^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} (ry)^{-\frac{2\alpha}{3+\alpha}}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Заключение

В работе предложены новые оценки ядерного типа для функции математического ожидания непрерывного случайного процесса в случае разреженных данных. Доказана равномерная состоятельность оценок при более слабых ограничениях относительно корреляции временных точек, чем были известны ранее. В отличие от известных ранее результатов, не предполагается, что набор временных точек состоит из независимых или слабо зависимых случайных величин. Относительно временных точек требуется лишь, чтобы совокупность этих точек из всех серий с высокой вероятностью образовывала измельчающееся разбиение области определения случайного процесса. Предлагаемые ограничения на временные точки универсальны относительно стохастической природы этих точек, поскольку наши ограничения включают и случай детерминированных временных точек наблюдения.

В работе используются также достаточно общие ограничения на количество временных точек в каждой серии. В отличие от известных ранее результатов, предлагаемые условия равномерной состоятельности оценок универсальны и относительно стохастической природы количества наблюдений в каждой серии и включают в себя в качестве частных случаев как ситуацию независимых и одинаково распределенных целочисленных величин, так и случай детерминированных равномерно ограниченных величин — два наиболее популярных варианта в исследованиях предшественников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borisov I. S., Linke Yu. Yu., Ruzankin P. S. Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models // *Metrika*. 2021. Vol. 84, № 2. P. 141-166. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00184-020-00768-0>
2. Bunea F., Ivanescu A. E., Wegkamp M. H. Adaptive inference for the mean of a Gaussian process in functional data // *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* 2011. Vol. 73, № 4. P. 531-558. <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9868.2010.00768.x>
3. Cuevas A. A partial overview of the theory of statistics with functional data // *J. Stat. Plan. Inference*. 2014. Vol. 147, № 4. P. 1-23. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378375813000748>

4. James G. M., Hastie T. J. Functional linear discriminant analysis for irregularly sampled curves // *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* 2001. Vol. 63, № 3. P. 533-550.
<https://www.jstor.org/stable/2680587>
5. Hall P., Müller H.-G., Wang J.-L. Properties of principal component methods for functional and longitudinal data analysis // *Ann. Statist.* 2006. Vol. 34, № 3. P. 1493-1517.
<https://www.jstor.org/stable/25463465>
6. Hsing T., Eubank R. Theoretical foundations of functional data analysis, with an introduction to linear operators. Wiley, 2015. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781118762547>
7. Kim S., Zhao Z. Unified inference for sparse and dense longitudinal models // *Biometrika.* 2013. Vol. 100, № 1. P. 203-212. <https://www.jstor.org/stable/43304546>
8. Kokoszka P., Reimherr M. Introduction to functional data analysis. Chapman and Hall/CRC, 2017. <https://www.routledge.com/Introduction-to-Functional-Data-Analysis/Kokoszka-Reimherr/p/book/9781032096599>
9. Li Y., Hsing T. Uniform convergence rates for nonparametric regression and principal component analysis in functional/longitudinal data // *Ann. Statist.* 2010. Vol. 38, № 6. P. 3321-3351.
<https://www.jstor.org/stable/29765266>
10. Lin Z. Wang J.-L. Mean and covariance estimation for functional snippets // *J. Amer. Statist. Assoc.* 2022. Vol. 117, № 537. P. 348-360. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.2020.1777138>
11. Linke Y., Borisov I., Ruzankin P., Kutsenko V., Yarovaya E., Shalnova S. Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression // *Mathematics.* 2022. Vol.10, № 15. P. 2693.
<https://www.mdpi.com/2227-7390/10/15/2693>
12. Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation // *Commun. Stat. Theory Methods.* 2022. Vol. 51, № 19. P. 6909-6918.
<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610926.2021.1876884>
13. Linke Yu. Yu. Asymptotic properties of one-step M-estimators // *Commun. Stat. Theory Methods.* 2019. Vol.48, № 16. P. 4096-4118. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610926.2018.1487982?journalCode=lsta20>
14. Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Constructing initial estimators in one-step estimation procedures of nonlinear regression // *Statist. Probab. Lett.* 2017. Vol. 120, № 1. P. 87-94.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715216301857>
15. Linke Yu. Yu. Asymptotic normality of one-step M-estimators based on non-identically distributed observations // *Statist. Probab. Lett.* 2017. Vol.129, № 10. P. 216-221.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715217302031>
16. Linke, Yu. Yu. & Borisov I. S. 2023, “An approach to constructing explicit estimators in nonlinear regression“, *Siberian Adv. Math.*, vol. 33, no. 4, pp. 338-346. <https://link.springer.com/article/10.1134/S1055134423040065>
17. Muller H.-G. Functional modelling and classification of longitudinal data // *Scand. J. Statist.* 2005. Vol. 32, № 2. P. 223-246. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9469.2005.00429.x>

18. Song Q., Liu R., Shao Q., Yang L. A simultaneous confidence band for dense longitudinal regression // *Commun. Stat. Theory Methods*. 2014. Vol. 43, № 24. P. 5195-5210. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610926.2012.729643>
19. Wang J.-L., Chiou J.-M., Muller H.-G. Review of functional data analysis // *Annu. Rev. Statist.* 2016. Vol. 3. P. 257-295.
20. Wu H., Zhang J.-T. Nonparametric regression methods for longitudinal data analysis: mixed-effects modeling approaches. John Wiley and Sons, 2006. <https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-statistics-041715-033624>
21. Yao F. Asymptotic distributions of nonparametric regression estimators for longitudinal or functional data // *J. Multivariate Anal.* 2007. Vol. 98, № 1. P. 40-56.
22. Yao F., Muller H.-G., Wang J.-L. Functional data analysis for sparse longitudinal data // *J. Amer. Statist. Assoc.* 2005. Vol. 100, № 470. P. 577-590. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/016214504000001745>
23. Zhang J.-T., Chen J. Statistical inferences for functional data // *Ann. Statist.* 2007. Vol. 35, № 3. P. 1052-1079. <https://www.jstor.org/stable/25463592>
24. Zhang X., Wang J.-L. Optimal weighting schemes for longitudinal and functional data // *Stat. Prob. Lett.* 2018. Vol. 138, № 7. P. 165-170. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715218301214>
25. Zhang X., Wang J.-L. From sparse to dense functional data and beyond // *Ann. Statist.* 2016. Vol. 44, № 5. P. 2281-2321. <https://www.jstor.org/stable/43974716>
26. Zheng S., Yang L., Hardle W. A smooth simultaneous confidence corridor for the mean of sparse functional data // *J. Amer. Statist. Assoc.* 2014. Vol. 109, № 506. P. 661-673. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.2013.866899>
27. Zhou L., Lin H., Liang H. Efficient estimation of the nonparametric mean and covariance functions for longitudinal and sparse functional data // *J. Amer. Statist. Assoc.* 2018. Vol. 113, № 524. P. 1550-1564. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.2017.1356317>
28. Линке Ю. Ю. К вопросу о нечувствительности оценок Надарая–Ватсона относительно корреляции элементов дизайна // *Теория вероятн. и ее примен.* 2023. Т. 68, № 2. С. 236-252.
29. Линке Ю. Ю. Асимптотические свойства одношаговых взвешенных М-оценок с приложениями к задачам регрессии // *Теория вероятн. и ее примен.* 2017. Т. 62, № 3. С. 468-498.
30. Линке Ю. Ю., Борисов И. С. Построение явных оценок в задачах нелинейной регрессии // *Теория вероятн. и ее примен.* 2018. Т. 63, № 1. С. 29-56.

REFERENCES

1. Borisov, I. S., Linke, Yu. Yu. & Ruzankin, P. S. 2021, “ Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models”, *Metrika*, vol. 84, no. 2, pp. 141-166.
2. Bunea, F., Ivanescu, A. E. & Wegkamp, M. H. 2011, “Adaptive inference for the mean of a Gaussian process in functional data”, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, vol. 73, no. 4, pp. 531-558.

3. Cuevas A. 2014, “A partial overview of the theory of statistics with functional data”, *J. Stat. Plan. Inference.*, vol. 147, no. 4, pp. 1-23.
4. James, G.M. & Hastie, T.J. 2001, “Functional linear discriminant analysis for irregularly sampled curves”, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, vol. 63, no. 3, pp. 533-550.
5. Hall, P., Müller, H.-G. & Wang, J.-L. 2006, “Properties of principal component methods for functional and longitudinal data analysis”, *Ann. Statist.*, vol. 34, no. 3, pp. 1493-1517.
6. Hsing, T. & Eubank, R. Theoretical foundations of functional data analysis, with an introduction to linear operators. Wiley, 2015.
7. Kim, S. & Zhao, Z. 2013, “Unified inference for sparse and dense longitudinal models”, *Biometrika*, vol. 100, no. 1, pp. 203-212.
8. Kokoszka, P. & Reimherr, M. Introduction to functional data analysis. Chapman and Hall/CRC, 2017.
9. Li, Y. & Hsing, T. 2010, “Uniform convergence rates for nonparametric regression and principal component analysis in functional/longitudinal data”, *Ann. Statist.*, vol. 38, no. 6, pp. 3321-3351.
10. Lin, Z. & Wang, J.-L. 2022, “Mean and covariance estimation for functional snippets”, *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 117, no. 537, pp. 348-360.
11. Linke, Y., Borisov, I., Ruzankin, P., Kutsenko, V., Yarovaya, E. & Shalnova, S. 2022, “Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression”, *Mathematics*, vol.10, no. 15, pp. 2693.
12. Linke, Yu.Yu. & Borisov, I.S. 2022, “Insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation”, *Commun. Stat. Theory Methods.*, vol. 51, no. 19, pp. 6909-6918.
13. Linke, Yu.Yu. 2019, “Asymptotic properties of one-step M-estimators”, *Commun. Stat. Theory Methods*, vol.48, no. 16, pp. 4096-4118.
14. Linke, Yu.Yu. & Borisov, I.S. 2017, “Constructing initial estimators in one-step estimation procedures of nonlinear regression”, *Statist. Probab. Lett.*, vol. 120, no. 1, pp. 87-94.
15. Linke, Yu.Yu. 2017, “Asymptotic normality of one-step M-estimators based on non-identically distributed observations”, *Statist. Probab. Lett.*, vol.129, no. 10, pp. 216-221.
16. Linke, Yu.Yu. & Borisov I.S. 2023, “An approach to constructing explicit estimators in nonlinear regression”, *Siberian Adv. Math.*, vol. 33, no. 4, pp. 338-346.
17. Muller, H.-G. 2005, “Functional modelling and classification of longitudinal data”, *Scand. J. Statist.*, vol. 32, no. 2. pp. 223-246.
18. Song, Q., Liu, R., Shao, Q. & Yang, L. 2014, “A simultaneous confidence band for dense longitudinal regression”, *Commun. Stat. Theory Methods*, vol. 43, no. 24, pp. 5195-5210.
19. Wang, J.-L., Chiou, J.-M. & Muller, H.-G. 2016, “Review of functional data analysis”, *Annu. Rev. Statist.*, vol. 3. pp. 257-295.
20. Wu, H. & Zhang, J.-T. Nonparametric regression methods for longitudinal data analysis: mixed-effects modeling approaches. John Wiley and Sons, 2006.
21. Yao, F. 2007, “Asymptotic distributions of nonparametric regression estimators for longitudinal or functional data”, *J. Multivariate Anal.*, vol. 98, no. 1, pp. 40-56.

22. Yao, F., Muller, H.-G. & Wang, J.-L. 2005, "Functional data analysis for sparse longitudinal data", *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol.100, no. 470, pp. 577-590.
23. Zhang, J.-T. & Chen, J. 2007, "Statistical inferences for functional data", *Ann. Statist.*, vol. 35, no. 3, pp. 1052-1079.
24. Zhang, X. & Wang, J.-L. 2018, "Optimal weighting schemes for longitudinal and functional data", *Stat. Prob. Lett.*, vol. 138, no. 7, pp. 165-170.
25. Zhang, X. & Wang, J.-L. 2016, "From sparse to dense functional data and beyond", *Ann. Statist.*, vol. 44, no. 5, pp. 2281-2321.
26. Zheng, S., Yang, L. & Hardle, W. 2014, "A smooth simultaneous confidence corridor for the mean of sparse functional data", *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 109, no. 506, pp. 661-673.
27. Zhou, L., Lin, H. & Liang, H. 2018, "Efficient estimation of the nonparametric mean and covariance functions for longitudinal and sparse functional data", *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 113, no. 524, pp. 1550-1564.
28. Linke, Yu. Yu. 2023, "Towards insensitivity of Nadaraya–Watson estimators with respect to design correlation", *Theory Probab. Appl.*, vol. 68, no. 2, pp. 236-252. [in Russian]
29. Linke, Yu. Yu. 2017, "Asymptotic properties of one-step weighted M-estimators with application to some regression problems", *Theory Probab. Appl.*, vol. 62, no. 3, pp. 373-398.
30. Linke, Yu. Yu. & Borisov I. S. 2018, "Constructing explicit estimators in nonlinear regression models", *Theory Probab. Appl.*, vol. 63, no. 1, pp. 22-44.

Получено: 26.05.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.745.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-126-135

**Проверка обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр
Ли малой размерности**

Ф. И. Лобзин

Лобзин Федор Игоревич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: fiadat@mail.ru

Аннотация

В случае алгебр Ли \mathfrak{g} малой размерности ≤ 7 доказан усиленный вариант обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко, а именно показано, что для любого элемента $a \in \mathfrak{g}^*$ на двойственном пространстве \mathfrak{g}^* существует полный набор полиномов в бинволюции относительно стандартной скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом, ассоциированной с ковектором a .

Ключевые слова: Скобка Пуассона–Ли, согласованные скобки Пуассона, бинволютивные наборы многочленов.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:

Ф. И. Лобзин. Проверка обобщенной гипотезы Мищенко — Фоменко для алгебр Ли малой размерности // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 126–135.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 514.745.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-126-135

**Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko
for Lie algebras of small dimension**

F. I. Lobzin

Lobzin Fedor Igorevich — Lomonosov Moscow State University; The Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: fiadat@mail.ru

Abstract

In the case of Lie algebras \mathfrak{g} of small dimension ≤ 7 , an enhanced version of the Generalised argument shift conjecture is proved, namely, it is shown that for any element $a \in \mathfrak{g}^*$ on the dual space \mathfrak{g}^* there is a complete set of polynomials in the bi-involution with respect to the standard Poisson–Lie bracket and the frozen argument bracket associated with the covector a .

Keywords: Lie–Poisson bracket, compatible Poisson bracket, sets of polynomials in bi-involution.

Bibliography: 9 titles.

For citation:

F. I. Lobzin, 2023, “Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 126–135.

1. Введение

Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли, соответственно \mathfrak{g}^* — сопряженное пространство. Рассмотрим на \mathfrak{g}^* тензорное поле:

$$(\mathcal{A}_x(x))_{ij} = (c_{ij}^k x_k), \quad x \in \mathfrak{g}^*,$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли \mathfrak{g} в некотором базисе e_1, \dots, e_n , x_k — координаты элемента $x \in \mathfrak{g}^*$ в двойственном к e_1, \dots, e_n базисе. Данное тензорное поле определяет скобку Пуассона–Ли на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: $\{f, g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x))$. Функции $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, лежащие в ядре скобки Пуассона–Ли, называются функциями Казимира. Также можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой Пуассона с замороженным аргументом:

$$(\mathcal{A}_a(x))_{ij} = (c_{ij}^k a_k), \quad a, x \in \mathfrak{g}^*, \quad \{f, g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x)).$$

Эти скобки являются согласованными в том смысле, что любая линейная комбинация $\mathcal{A}_x(x)$ и $\mathcal{A}_a(x)$ задает алгебру Ли на пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Набор из s коммутирующих функций над \mathfrak{g}^* считается полным, если они функционально независимы и $s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$. Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. В 70-х годах прошлого века была сформирована следующая гипотеза, касающаяся существования полных наборов в инволюции.

Гипотеза (Гипотеза Мищенко–Фоменко). *На двойственном пространстве \mathfrak{g}^* любой алгебры Ли \mathfrak{g} существует полный набор многочленов в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли.*

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали эту гипотезу для полупростых и редуцированных алгебр Ли в [1] при помощи метода, описанного в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (Метод Мищенко–Фоменко сдвига аргумента). *Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли, f_1, \dots, f_m — полиномиальные функции Казимира скобки Пуассона–Ли. Разложим $f_i(x + \lambda \cdot a)$, по степеням λ :*

$$f_i(x + \lambda \cdot a) = f_{i,0} + \lambda \cdot f_{i,1} + \dots + \lambda^j \cdot f_{i,j} \dots, \quad x, a \in \mathfrak{g}^*, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда набор многочленов $(f_{i,j})$ находится в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли.

Отметим, что наборы многочленов, построенные методом сдвига аргумента, будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение гипотезы 1 (сформулированное в [2], [3, conjecture 5.5]).

Гипотеза (Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко). *Для любой алгебры Ли \mathfrak{g} , для всех регулярных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ существует полный набор многочленов в бинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$ и скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$.*

Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли, даже если элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ регулярный. Также наборы, построенные сдвигом аргумента, для которых элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ является параметром, могут становиться функционально зависимыми для некоторых сингулярных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ (см. определение 1).

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[4]), но полученные его алгоритмом наборы редко оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (для полупростых элементов $a \in \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ в [1], для остальных регулярных элементов [2]). Также подобная задача была рассмотрена в [6], где полные наборы в бинволюции

были построены для всех комплексных (в этой работе этот результат будет обобщен и на вещественные случаи) семимерных нильпотентных алгебр Ли. Несмотря на то, что обобщенная гипотеза была сформулирована только для регулярных элементов a , в данной работе эта задача рассмотрена и для сингулярных элементов тоже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ называется сингулярным, если

$$\dim(\text{Ann } a) > \text{ind } \mathfrak{g}, \text{ где } \text{Ann } a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\xi^* a = 0\}, \text{ ind } \mathfrak{g} = \min_b(\dim \text{Ann}(b)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в алгебре Ли \mathfrak{g} существует коммутативная подалгебра, размерности $s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$. Тогда существует полный набор многочленов в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли, который будет в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом для любого элемента $a \in \mathfrak{g}^*$. А именно Пусть e_1, \dots, e_k – базис этой подалгебры. Тогда соответствующие линейные функции $f_i : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = x(e_i)$, $x \in \mathfrak{g}^*$, образуют полный набор в бинволюции относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$ для любого $a \in \mathfrak{g}^*$.

Доказательство этого предложения тривиально. В следующем разделе мы разберем все случаи вещественных алгебр Ли размерности меньше 6 и вещественных нильпотентных алгебр Ли, размерностей 6 и 7, для которых не выполняются условия этого предложения.

2. Построение наборов в бинволюции

Рассмотрим пример (обозначения из статьи [9]):

Алгебра	Функции Казимира	Многочлены, полученные методом сдвига аргумента
23457G $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = -e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_5^3 - 3x_4^2x_7 - 6x_4x_5x_6 +$ $+6x_3x_6^2 + 6x_3x_5x_7 -$ $-6x_2x_6x_7 - 6x_1x_7^2$	$f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_5^3 - 3x_4^2x_7 - 6x_4x_5x_6$ $+6x_3x_6^2 + 6x_3x_5x_7 - 6x_2x_6x_7$ $-6x_1x_7^2,$ $f_4 = \text{сдвиг},$ $f_5 = \text{сдвиг}$

Найдем такие a , что многочлены f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 будут функционально зависимыми, то есть найдем такие a , что $\text{rk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) < 5$. Так как $f_1 = x_6, f_2 = x_7$, из условия $\text{rk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) < 5$ следует

$$\text{rk} \begin{pmatrix} -x_7^2 & -x_6x_7 & x_6^2 + x_5x_7 \\ -a_7^2 & -a_6a_7 & a_6^2 + a_5a_7 \\ -2a_7x_7 & -a_6x_7 - a_7x_6 & 2a_6x_6 + a_5x_7 + a_6x_5 \end{pmatrix} < 3,$$

В предыдущей матрице первый столбец — производные по x_1 , второй столбец — производные по x_2 , третий столбец — производные по x_3 , тогда:

$$\det \begin{pmatrix} -x_7^2 & -x_6x_7 & x_6^2 + x_5x_7 \\ -a_7^2 & -a_6a_7 & a_6^2 + a_5a_7 \\ -2a_7x_7 & -a_6x_7 - a_7x_6 & 2a_6x_6 + a_5x_7 + a_6x_5 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

следовательно коэффициенты при всех мономах равны нулю. Коэффициент при x_6^3 равен $a_7^3 = 0$, следовательно $a_7 = 0$. Коэффициент при x_7^3 равен $a_6^3 = 0$, следовательно $a_6 = 0$.

Аналогично можно рассмотреть другую подматрицу матрицы Якоби, а именно: первый столбец — производные по x_4 , второй столбец — производные по x_5 , третий столбец — производные по x_6 . Проведя такие же рассуждения получим: $a_5 = 0$.

При $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ подойдет набор : $x_4, x_5, x_6, x_7, x_3x_6^2 + x_3x_5x_7 - x_2x_6x_7 - x_1x_7^2$. Этот полный инволютивный набор взят из [8], то что все эти многочлены попарно коммутируют относительно скобок с такими замороженными аргументами можно проверить явно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть вещественная алгебра Ли \mathfrak{g} удовлетворяет одному из следующих условий: либо $\dim \mathfrak{g} \leq 5$, либо \mathfrak{g} нильпотентна и $\dim \mathfrak{g}$ равна 6 или 7. Тогда для алгебры Ли \mathfrak{g} верна обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко. Более того для каждого сингулярного элемента $a \in \mathfrak{g}^*$, существует полный набор многочленов в бинволюции относительно скобок $\{\cdot, \cdot\}$ и $\{\cdot, \cdot\}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Теорема следует из таблицы, представленной далее. Таблица состоит из алгебр Ли для которых не выполняются условия предложения 1 (для остальных утверждение теоремы следует из этого предложения).

Комментарии к таблице: В первых двух столбцах таблицы выписаны алгебры Ли (в обозначениях из статей [7] (размерности меньше 6), [9] (размерности 7)), их коммутационные соотношения и функции Казимира (функции Казимира для всех алгебр из таблицы кроме последних 7 взяты из [8], для остальных случаев функции Казимира вычислены автором). В третьем столбце предъявлены полные бинволютивные наборы многочленов для всех регулярных ковекторов. В четвертом столбце отдельно выписаны полные бинволютивные наборы (построены различными методами) для тех сингулярных ковекторов (их множество описано аналогично примеру), для которых набор многочленов из третьего столбца является не полным. Также в четвертом столбце указаны размерности аннуляторов соответствующих ковекторов (у семимерных алгебр Ли размерность аннуляторов в четвертом столбце таблицы не указана, так как всегда равна 5). Первая строчка в каждой ячейке 3-го и 4-го столбца обозначает условия на координаты ковектора. Запись $(a_1, a_2, a_3) \neq 0$ означает, что хотя бы одна из этих координат не равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В следующей таблице опущены алгебры (обозначения из [7]):

A_{3,8}, A_{3,9}, A_{4,8}, A_{4,10}, A_{4,23}, A_{5,3}.

Так как для этих алгебр Ли полные бинволютивные наборы многочленов получаются методом сдвига аргумента для всех a , кроме a , таких что $\mathcal{A}_a(x) \equiv 0$.

<p>A_{5,37} $[e_2, e_3] = e_1,$ $[e_1, e_4] = 2e_1,$ $[e_2, e_4] = e_2,$ $[e_3, e_4] = e_3,$ $[e_2, e_5] = -e_3,$ $[e_3, e_5] = e_2$</p>	$\frac{x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_5}{x_1}$	<p>$(a_1, a_2, a_3) \neq 0$ $f_1 = x_1,$ $f_2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_5,$ $f_3 = a_2x_2 + a_3x_3 + a_1x_5$</p>	<p>$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ $\dim(\text{Ann}(a)) = 5$ $g_1 = x_1, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_5$</p>
<p>A_{5,40} $[e_1, e_2] = 2e_1,$ $[e_1, e_3] = -e_2,$ $[e_2, e_3] = 2e_3,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_4,$ $[e_2, e_5] = -e_5,$ $[e_3, e_5] = e_4$</p>	$x_2x_4x_5 - x_1x_4^2 + x_3x_5^2$	<p>$(a_4, a_5) \neq 0$ $f_1 = x_2x_4x_5 - x_1x_4^2 + x_3x_5^2,$ $f_2 = x_2a_4a_5 + x_4a_2a_5 + x_5a_2a_4 - x_1a_4^2 - 2x_4a_1a_4 + x_3a_5^2 + 2x_5a_3a_5,$ $f_3 = x_2x_4a_5 + x_2x_5a_4 + x_4x_5a_2 - 2x_1x_4a_4 - x_4^2a_1 + 2x_3x_5a_5 + a_3x_5^2$</p>	<p>$a_4 = a_5 = 0$ $\dim(\text{Ann}(a)) = 3$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_2x_4x_5 - x_1x_4^2 + x_3x_5^2$</p>

A_{6,21} $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_4,$ $[e_2, e_4] = e_5,$ $[e_3, e_4] = e_6$	$x_6,$ $x_4^2 + 2x_2x_6 -$ $-2x_3x_5$	$(a_4, a_5, a_6) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6,$ $f_3 = x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5,$ $f_4 = a_4x_4 + a_6x_2 - a_5x_3$	$a_4 = a_5 = a_6 = 0$ $\dim(\text{Ann}(a)) = 4$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_2x_6 - x_3x_5$
A_{6,22} $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_4,$ $[e_2, e_4] = e_5,$ $[e_3, e_4] = e_6$	$x_6,$ $2x_5^3 + 3x_4^2x_6 -$ $-6x_2x_6^2 -$ $-6x_3x_5x_6$	$(a_4, a_5, a_6) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6,$ $f_3 = x_4^2 - 2x_2x_6 - 2x_3x_5,$ $f_4 = a_4x_4 - a_6x_2 - a_5x_3$	$a_4 = a_5 = a_6 = 0$ $\dim(\text{Ann}(a)) = 4$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_2x_6 - x_3x_5$
247E₁ $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_7,$ $[e_3, e_5] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_4^2 + x_5^2 -$ $-2x_2x_6 + 2x_1x_7$	$(a_4, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_4^2 - 2x_2x_6 + 2x_1x_7,$ $f_5 = a_4x_4 - a_6x_2 + a_7x_1$	$a_4 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = x_2x_6 - x_1x_7$
23457C $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_5] = -e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_4^2 - 2x_3x_5 +$ $+2x_2x_6 +$ $+2x_1x_7$	$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = x_1x_7 - x_2x_6 + x_3x_5 - \frac{x_4^2}{2},$ $f_4 = a_7x_1 - a_6x_2 + a_3x_5 +$ $+a_5x_3 - a_4x_4,$ $f_5 = -a_5x_5x_7 + \frac{1}{2}x_5^2a_7 +$ $+a_6x_4x_7 - x_4x_6a_7$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_4 = -x_3x_5 + x_2x_6 + x_1x_7$
12457H $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_5x_7,$ $x_4x_5 - x_3x_6 +$ $+x_2x_7$	$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_7, f_2 = x_6, f_3 = x_5,$ $f_4 = x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7,$ $f_5 = a_5x_4 - x_3a_6 + a_7x_2$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_4 = x_2x_6 - x_1x_7$
12457C $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_6] = e_7,$ $[e_4, e_5] = -e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_3x_7,$ $x_5^2 - 2x_4x_6 -$ $-2x_1x_7$	$(a_4, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_3, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_5^2 - 2x_4x_6 - 2x_1x_7,$ $f_5 = a_5x_5 - a_6x_4 - a_7x_1$	$a_4 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_3, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = x_1x_7 - x_4x_6$
12457L $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_6] = e_7,$ $[e_3, e_4] = -e_7,$ $[e_3, e_5] = e_7$	$x_7,$ $x_4^2 - 2x_3x_6 + x_5^2 -$ $-2x_1x_7 + 2x_2x_7,$ $x_6^2 - 2x_4x_7 -$ $-2x_5x_7$	$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_7,$ $f_2 = x_4^2 - 2x_3x_6 + x_5^2 -$ $-2x_1x_7 + 2x_2x_7,$ $f_3 = a_4x_4 - a_3x_6 - a_6x_3 +$ $+a_5x_5 - a_7x_1 + a_7x_2,$ $f_4 = x_6^2 - 2x_4x_7 - 2x_5x_7,$ $f_5 = a_6x_6 - a_7x_4 - a_7x_5$	$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6 + x_1x_7 - x_2x_7$
247Q $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_5x_6^2 - x_3x_6x_7 +$ $+x_4x_5x_7 + x_1x_7^2$	$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = -x_3x_6 + x_4x_5 + x_1x_7,$ $f_5 = -a_6x_3 + a_5x_4 + a_7x_1$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = x_3x_6 - x_1x_7$

<p>23457B</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, \\ [e_1, e_3] &= e_4, \\ [e_1, e_4] &= e_6, \\ [e_2, e_3] &= e_5, \\ [e_2, e_6] &= e_7, \\ [e_3, e_4] &= -e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_5, \\ x_7, \\ x_5x_6^2 + x_4^2x_7 - \\ -2x_3x_6x_7 - \\ -2x_1x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= x_4^2 - 2x_3x_6 - 2x_1x_7, \\ f_5 &= a_4x_4 - a_6x_3 - a_7x_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_3x_6 + x_1x_7 \end{aligned}$
<p>247J</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_4, \\ [e_1, e_3] &= e_5, \\ [e_1, e_5] &= e_6, \\ [e_2, e_5] &= e_7, \\ [e_3, e_4] &= e_7, \\ [e_3, e_5] &= e_6 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ x_4^2x_6 - \\ -2x_4x_5x_7 + \\ +2x_2x_6x_7 - \\ -2x_1x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= -x_4x_5 + x_2x_6 - x_1x_7, \\ f_5 &= -a_4x_5 + a_6x_2 - a_7x_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_7 = a_6 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_2x_6 - x_1x_7 \end{aligned}$
<p>257L</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_5, \\ [e_1, e_5] &= e_6, \\ [e_2, e_3] &= e_6, \\ [e_2, e_5] &= e_7, \\ [e_3, e_4] &= e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ 2x_4^2x_6 - x_5^2x_7 + \\ +2x_2x_6x_7 - \\ -2x_1x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_5, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= -x_5^2 + 2x_2x_6 - 2x_1x_7, \\ f_5 &= -a_5x_5 + a_6x_2 - a_7x_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_5 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_2x_6 - x_1x_7 \end{aligned}$
<p>247G</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_4, \\ [e_1, e_3] &= e_5, \\ [e_1, e_4] &= e_7, \\ [e_2, e_4] &= e_6, \\ [e_3, e_5] &= e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ x_5^2x_6 + x_4^2x_7 + \\ +2x_1x_6x_7 - \\ -2x_2x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= x_4^2 + 2x_1x_6 - 2x_2x_7, \\ f_5 &= a_4x_4 + a_6x_1 - a_7x_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_1x_6 - x_2x_7 \end{aligned}$
<p>23457F</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, \\ [e_1, e_3] &= e_4, \\ [e_1, e_4] &= e_6, \\ [e_2, e_3] &= e_5, \\ [e_2, e_5] &= -e_7, \\ [e_2, e_6] &= -e_7, \\ [e_3, e_4] &= e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_5 - x_6, \\ x_7, \\ x_5^3 - 3x_5^2x_6 + \\ +3x_4^2x_7 - \\ -6x_3x_6x_7 + \\ +6x_1x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= x_4^2 - 2x_3x_6 + 2x_1x_7, \\ f_5 &= a_5x_4 - a_6x_3 + a_7x_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_3x_6 - x_1x_7 \end{aligned}$
<p>2357C</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_4, \\ [e_1, e_4] &= e_5, \\ [e_1, e_5] &= e_7, \\ [e_2, e_3] &= e_5, \\ [e_2, e_4] &= e_6, \\ [e_3, e_4] &= -e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ x_5^3 - 3x_4x_5x_7 + \\ +3x_3x_6x_7 + \\ +3x_2x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_5, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= -x_4x_5 + x_3x_6 + x_2x_7, \\ f_5 &= -a_5x_4 + a_6x_3 + a_7x_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_5 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_3x_6 + x_2x_7 \end{aligned}$
<p>2357D</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_4, \\ [e_1, e_3] &= e_6, \\ [e_1, e_4] &= e_5, \\ [e_1, e_5] &= e_7, \\ [e_2, e_3] &= e_5, \\ [e_2, e_4] &= e_6, \\ [e_3, e_4] &= -e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ x_5^3 - 3x_5x_6^2 - \\ -3x_4x_5x_7 + \\ +3x_3x_6x_7 + \\ +3x_2x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= -x_4x_5 + x_3x_6 + x_2x_7, \\ f_5 &= -a_5x_4 + a_6x_3 + a_7x_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_3x_6 + x_2x_7 \end{aligned}$
<p>247R₁</p> $\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_4, \\ [e_1, e_3] &= e_5, \\ [e_1, e_4] &= e_6, \\ [e_2, e_3] &= e_6, \\ [e_2, e_4] &= e_7, \\ [e_3, e_5] &= e_7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_6, \\ x_7, \\ 2x_5x_6^2 - x_4^2x_7 - \\ -x_5^2x_7 + \\ +2x_2x_6x_7 - \\ -2x_1x_7^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a_4, a_6, a_7) &\neq 0 \\ f_1 &= x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7, \\ f_4 &= -x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_1x_7, \\ f_5 &= -a_4x_4 + a_6x_2 - a_7x_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_4 &= a_6 = a_7 = 0 \\ g_1 &= x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6, \\ g_4 &= x_7, g_5 = x_2x_6 - x_1x_7 \end{aligned}$

23457D $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_5] = -e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_4x_6^2 - x_5^2x_6 +$ $+x_4^2x_7 -$ $-2x_3x_5x_7 +$ $+2x_2x_6x_7 +$ $+2x_1x_7^2$	$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_4x_6^2 - x_5^2x_6 + x_4^2x_7 -$ $-2x_3x_5x_7 + 2x_2x_6x_7 +$ $+2x_1x_7^2,$ $f_4 = \text{сдвиг},$ $f_5 = \text{сдвиг}$	$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_5 = -x_3x_5 + x_2x_6 + x_1x_7$
247K $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_3x_6^2 - x_5^2x_6$ $+2x_4x_5x_7$ $-2x_2x_6x_7$ $+2x_1x_7^2$	$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_3x_6^2 - x_5^2x_6 +$ $+2x_4x_5x_7 - 2x_2x_6x_7 +$ $+2x_1x_7^2,$ $f_4 = \text{сдвиг},$ $f_5 = \text{сдвиг}$	$a_7 = a_6 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6^2 - x_2x_6x_7 + x_1x_7^2$
247H $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_7,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_5] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_3x_6^2 - x_5^2x_6 -$ $-x_4^2x_7 -$ $-2x_1x_6x_7 +$ $+2x_2x_7^2$	$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_3x_6^2 - x_5^2x_6 - x_4^2x_7 -$ $-2x_1x_6x_7 + 2x_2x_7^2,$ $f_4 = \text{сдвиг},$ $f_5 = \text{сдвиг}$	$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6^2 - x_1x_6x_7 + x_2x_7^2$
23457G $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = -e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_5^3 - 3x_4^2x_7 -$ $-6x_4x_5x_6 +$ $+6x_3x_6^2 +$ $+6x_3x_5x_7 =$ $-6x_2x_6x_7 =$ $-6x_1x_7^2$	$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_5^3 - 3x_4^2x_7 -$ $-6x_4x_5x_6 + 6x_3x_6^2 +$ $+6x_3x_5x_7 - 6x_2x_6x_7 -$ $-6x_1x_7^2,$ $f_4 = \text{сдвиг},$ $f_5 = \text{сдвиг}$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6^2 + x_3x_5x_7 - x_1x_7^2 -$ $-x_2x_6x_7$
12457N₁, $\lambda = 1$ $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_6 + e_7$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_5] = e_6,$ $[e_3, e_5] = e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_4x_7 +$ $+x_6x_7,$ $2x_6^3 + 3x_6^2x_7$ $+3x_4^2x_7$ $+3x_5^2x_7$ $-6x_3x_6x_7$ $-6x_4x_6x_7$ $+6x_2x_7^2$	$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_5^2 - 2x_3x_6 + 2x_2x_7,$ $f_5 = a_5x_5 - a_6x_3 + a_7x_2$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5,$ $g_3 = x_6, g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6 - x_2x_7$
12457K $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_2, e_6] = e_7,$ $[e_3, e_5] = -e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_4x_7,$ $x_6^3 + 3x_4x_5x_6$ $-3x_3x_6x_7$ $-3x_4x_6x_7$ $-3x_1x_7^2$	$(a_4, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_4x_5 - x_3x_6 - x_1x_7,$ $f_5 = a_4x_5 - a_6x_3 - a_7x_1$	$a_4 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6 + x_1x_7$
12457F $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_6] = e_7,$ $[e_4, e_5] = -e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_3x_7,$ $2x_6^3 + 3x_5^2x_7 -$ $-6x_4x_6x_7 -$ $-6x_1x_7^2$	$(a_5, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_5^2 - 2x_1x_7,$ $f_5 = a_5x_5 - a_7x_1$	$a_5 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_4x_6 + x_1x_7$

<p>123457I, $\lambda = 0$ $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_4] = e_7$</p>	<p>$x_7,$ $x_6^2 - 2x_5x_7,$ $2x_6^5 - 10x_5x_6^3x_7$ $+15x_5^2x_6x_7^2$ $-15x_4x_5x_7^3$ $+15x_3x_6x_7^3$ $-15x_2x_7^4$</p>	<p>$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = -x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7,$ $f_5 = a_5x_4 + a_6x_3 - a_7x_2$</p>	<p>$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6 - x_2x_7$</p>
<p>37D₁ $[e_1, e_2] = e_5,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_1, e_4] = e_7,$ $[e_2, e_3] = -e_7,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_4] = -e_5$</p>	<p>$x_5,$ $x_6,$ x_7</p>	<p>$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_7,$ $f_5 = a_5x_2 + a_6x_3 + a_7x_4$</p>	<p>$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = x_2x_5 + x_3x_6$</p>
<p>247E $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$</p>	<p>$x_6,$ $x_7,$ $x_4x_5 - x_2x_6 -$ $-x_3x_6 + x_1x_7$</p>	<p>$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4 - x_5, f_2 = x_6,$ $f_3 = x_7,$ $f_4 = x_4x_5 - x_2x_6 - x_3x_6 +$ $+x_1x_7,$ $f_5 = a_4x_5 + a_5x_4 + a_7x_1 -$ $-a_6(x_2 + x_3)$</p>	<p>$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = -x_2x_6 - x_3x_6 + x_1x_7$</p>
<p>247H₁ $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7,$ $[e_3, e_5] = -e_6$</p>	<p>$x_6,$ $x_7,$ $2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1 -$ $-2x_2x_6^2 -$ $-2x_3x_6x_7 +$ $+x_4^2x_6 +$ $+2x_5x_6x_7 -$ $-x_5^2x_6$</p>	<p>$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1 -$ $-2x_2x_6^2 - 2x_3x_6x_7 +$ $+x_4^2x_6 + 2x_5x_6x_7 -$ $= x_5^2x_6,$ $f_4 = \text{СДВИГ},$ $f_5 = \text{СДВИГ}$</p>	<p>$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = 2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1 -$ $-2x_2x_6^2 - 2x_3x_6x_7$</p>
<p>247R $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$</p>	<p>$x_6,$ $x_7,$ $-x_5x_6^2 +$ $+x_2x_7x_6 +$ $+x_3x_7x_6 -$ $-x_1x_7^2 +$ $+x_4x_6^2 - x_4x_5x_7$</p>	<p>$(a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6, f_2 = x_7,$ $f_3 = -x_5x_6^2 + x_2x_7x_6 +$ $+x_3x_7x_6 - x_1x_7^2 +$ $+x_4x_6^2 - x_4x_5x_7,$ $f_4 = \text{СДВИГ},$ $f_5 = \text{СДВИГ}$</p>	<p>$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_2x_7x_6 + x_3x_7x_6 -$ $-x_1x_7^2 + x_4x_6^2$</p>
<p>2357D₁ $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = -e_6,$ $[e_3, e_4] = -e_7$</p>	<p>$x_6,$ $x_7,$ $x_5^3 + 3x_5x_6^2 -$ $-3x_4x_5x_7 -$ $-3x_3x_6x_7 +$ $+3x_2x_7^2$</p>	<p>$(a_4, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = -x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7,$ $f_5 = -a_5x_4 - a_6x_3 + a_7x_2$</p>	<p>$a_4 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = -x_3x_6 + x_2x_7$</p>
<p>12457L₁ $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = -e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_5] = -e_6,$ $[e_3, e_5] = -e_7$</p>	<p>$x_7,$ $x_6^2 + 2x_4x_7,$ $x_4^2 + 2x_3x_6 +$ $+x_5^2 - 2x_2x_7$</p>	<p>$(a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4, f_2 = x_6, f_3 = x_7,$ $f_4 = 2x_3x_6 + x_5^2 - 2x_2x_7,$ $f_5 = a_6x_3 + a_5x_5 - a_7x_2$</p>	<p>$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = 2x_3x_6 + x_5^2 - 2x_2x_7$</p>

12457N , $\lambda = 1$	$x_7,$ $x_7x_4 + x_7x_4 -$ $-\frac{1}{2}x_6^2 - x_6x_7,$ $3x_3x_6x_7 -$ $-3x_3x_7^2 -$ $-3x_4x_5x_7 +$ $+3x_1x_7^2 -$ $-3x_2x_7^2 +$ $+3x_4x_6x_7 +$ $+3x_5x_6x_7 -$ $-\frac{3}{2}x_6^2x_7 - x_6^3.$	$(a_5 - a_5, a_6, a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4 + x_5, f_2 = x_6,$ $f_3 = x_7,$ $f_4 = 2(x_6 - x_7)x_3 +$ $+\frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 + 2x_7(x_1 - x_2),$ $f_5 = 2(a_6 - a_7)x_3 +$ $+(a_4 - a_5)(x_4 - x_5) +$ $+2a_7(x_1 - x_2)$	$a_4 = a_5, a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4, g_2 = x_5, g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7, g_5 = 2(x_6 - x_7)x_3 +$ $+2x_7(x_1 - x_2)$
-------------------------------	--	--	--

Наборы многочленов в биинволюции строятся не однозначно. В таблице приведены примеры таких многочленов.

□

Можно рассмотреть естественное обобщение известной гипотезы Милованова на биинволютивные наборы.

Гипотеза (Милованов (Обобщенная)). *На любой нильпотентной алгебре Ли существуют полные биинволютивные наборы состоящие только из линейных и квадратичных многочленов.*

Подобная задача была рассмотрена в [6], однако, в [6] были построены полные биинволютивные наборы состоящие только из линейных и квадратичных многочленов для некоторых алгебр Ли из [8]. Этот результат был улучшен а именно, в алгебрах

247G, 257R, 12457N($\lambda = 1$), 123457I, 2357D₁, 12457N₁($\lambda = 1$).

были построены наборы из квадратичных и линейных многочленов, которые не получаются методом сдвига аргумента. Таким образом это обобщение не проверено только для следующий нильпотентных 7-ных алгебр Ли:

23457D, 247K, 247H, 23457G, 247H₁, 247R.

Автор считает, что в перечисленных выше алгебрах сформулированное ранее обобщение гипотезы Милованова не будет выполнено.

Автор благодарен А.А. Ошемкову за постоянное внимание к работе и плодотворные дискуссии, а также А. В. Болсинову за ценные комментарии и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мищенко А. С. Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. 1978. Сер. матем. Т. 42, № 2. С. 396-415.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, P. 51-86.
3. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // Phil. Trans. R. 2018. vol.376.
4. Sadetov S. T. A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture // Dokl. Math. 2004. Vol. 70, № 1. P. 635-638.

5. Bolsinov A. V. Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution // *Math. USSR–Izv.* 1992. Vol. 38, № 1. P. 69-90.
6. Ворушилов К. С. Полные наборы полиномов в бинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли // *Матем. сб.* 2021. Т. 212, № 9. 3-17.
7. Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // *J. Mathematical Phys.* 1976. vol. 17, № 6. P. 986-994.
8. Ooms A. I. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven // *journal of algebra.* 2012. Vol. 365, P. 83-113.
9. Ming-Peng Gong Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over algebraically closed fields and \mathbb{R}) // PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada. <http://hdl.handle.net/10012/1148>, 1998.

REFERENCES

1. Mishchenko A. S. Fomenko A. T. 1978, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, Vol. 12, no. 2, pp. 371–389.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, “Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras”, *Transformation Groups.*, Vol. 21, pp. 51–86.
3. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. 2018, “Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems” // *Phil. Trans. R.*, Vol. 376.
4. Sadetov S. T. 2004, “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”, *Dokl. Math.*, Vol. 70, no. 1, pp. 635–638.
5. Bolsinov A. V. 1992, “Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution”, *Math. USSR–Izv.*, Vol. 38, no. 1, pp. 69–90.
6. Vorushilov K. C. 2021, “Complete sets of polynomials in bi-involution on nilpotent seven-dimensional Lie algebras”, *Sb. Math.*, Vol. 212, no. 9, pp. 1193–1207.
7. Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. 1976, “Invariants of real low dimension Lie algebras”, *J. Mathematical Phys.* .vol. 17, no. 6, pp. 986–994.
8. Ooms A. I. 2012, “The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven”, *Journal of algebra.*, Vol. 365, pp. 83–113.
9. Ming-Peng Gong. 1998, “Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over algebraically closed fields and \mathbb{R})”, *PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada*, <http://hdl.handle.net/10012/1148>.

Получено: 26.05.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-136-152

Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге¹

К. Г. Малютин, А. А. Наумова

Малютин Константин Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Курский государственный университет (г. Курск).

e-mail: malyutinkg@gmail.com

Наумова Алена Александровна — аспирант, Курский государственный университет (г. Курск).

e-mail: aliona.filatowa2013@yandex.ru

Аннотация

Работа содержит в себе результаты, в которых даются представления субгармонических функций на наиболее упоминаемых множествах в полуплоскости — полукольце и полукруге. Классическими результатами в этом направлении являются, например, формулы Неванлинны, Пуассона — Иенсена и Симидзу — Альфорса о представлении мероморфной функции в замкнутом круге и в замкнутом полукруге, а также теорема Рисса — Мартина о представлении субгармонических функций. В работах Т. Карлемана (1933) и Б. Я. Левина (1941) для функций, аналитических и мероморфных в замыкании полукольца и в замыкании полукруга на комплексной плоскости, были получены формулы, связывающие логарифм модуля функции с расположением её нулей и полюсов. Эти формулы нашли многочисленные приложения в теории целых и мероморфных функций. Независимо друг от друга Дж. Ито и А. Ф. Гришин (1968) распространили формулы Левина и Карлемана на функции субгармонические в открытом полукруге. Заметим, однако, что формулы А. Ф. Гришина с использованием функции Мартина, на наш взгляд, являются более наглядными и удобными для практического применения. Кроме того, А. Ф. Гришин сформулировал (без доказательства) теорему о представлении субгармонической функции в полуоткрытом полукольце. Н. В. Говоров (1968) распространил формулы Левина и Карлемана на функции аналитические в полузамкнутом полукруге и в полузамкнутом полукольце. Под выражением "полузамкнутое множество" мы понимаем множество на комплексной плоскости, часть границы которого принадлежит множеству, а остальная часть границы ему не принадлежит. В частности, под полузамкнутым полукольцом или полузамкнутым полукругом в верхней полуплоскости комплексного переменного мы понимаем полукольцо или полукруг, пересечение границы которого с вещественной осью не принадлежит данному множеству.

В статье мы распространяем формулу Гришина на субгармонические функции в открытом полукольце. Мы вводим понятие полной меры субгармонической функции в открытом полукольце, которое обобщает понятие полной меры в смысле Гришина. Благодаря этому получается наиболее простое по форме и при наименьших ограничениях на функцию представление субгармонической функции в открытом полукольце.

Ключевые слова: формула Левина, формула Карлемана, полуплоскость, полукольцо, полукруг, субгармоническая функция, граничная мера, полная мера, мера Рисса, сингулярная мера.

Библиография: 30 названий.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № . 22-21-00012, <https://rscf.ru/project/22-21-00012/>).

Для цитирования:

К. Г. Малютин, А. А. Наумова. Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 136–152.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-136-152

Representation of subharmonic functions in the half-ring and in the half-disk

K. G. Malyutin, A. A. Naumova

Malyutin Konstantin Gennadyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kursk State University (Kursk).

e-mail: malyutinkg@gmail.com

Naumova Alena Aleksandrovna — postgraduate student, Kursk State University (Kursk).

e-mail: aliona.filatowa2013@yandex.ru

Abstract

The work contains results in which representations of subharmonic functions on the most mentioned sets in a half-plane — in a half-ring and in a half-disk — are given. Classical results in this direction are, for example, the Nevanlinna, Poisson-Jensen and Shimizu-Ahlfors formulas of the representation of a meromorphic function in a closed disk and in a closed half-disk, as well as the Riesz-Martin theorem on the representation of subharmonic functions. In the works of T. Carleman (1933) and B. Ya. Levin (1941) for functions that are analytic and meromorphic in the closure of a half-ring and in the closure of a half-disk on the complex plane, formulas that relate the logarithm of the modulus of a function with the location of its zeros and poles were obtained. These formulas have found numerous applications in the theory of entire and meromorphic functions. Independently of each other, Jun-Iti Ito and A. F. Grishin (1968) extended the Levin and Carleman formulas to subharmonic functions in an open half-disk. Note, however, that Grishin's formulas using the Martin function, in our opinion, are more visual and convenient for practical use. In addition, A. F. Grishin formulated (without proof) a theorem on the representation of a subharmonic function in a semi-open half-ring. N. V. Govorov (1968) extended the Levin and Carleman formulas to analytic functions in a semi-closed half-disk and in a semi-closed half-ring. By the expression "semi-closed set" we mean a set on the complex plane, part of the boundary of which belongs to the set, and the rest of the boundary does not belong to it. In particular, by a semi-closed half-ring or a semi-closed half-disk in the upper half-plane of a complex variable we mean a half-ring or half-disk whose intersection of boundary with the real axis does not belong to the given set.

In the article, we extend Grishin's formula to subharmonic functions in an open half-ring. We introduce the concept of full measure of a subharmonic function in an open half-ring, which generalizes the concept of full measure in the sense of Grishin. Due to this, the representation of the subharmonic function in the open half-ring, which is the simplest in form and with the least restrictions on the function, is obtained.

Keywords: Levin formula, Carleman formula, half-plane, half-ring, half-disk, subharmonic function, boundary measure, full measure, Riesz measure, singular measure.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

K. G. Malyutin, A. A. Naumova, 2023, "Representation of subharmonic functions in the half-ring and in the half-disk", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 136–152.

1. Введение

Будем использовать следующие определения и терминологию. Обозначим через $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество целых положительных (натуральных) чисел, $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$ — комплексная плоскость с вещественной осью \mathbb{R} , $\text{Im } z = y$, $\text{Re } z = x$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ — верхняя полуплоскость без границы. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим замкнутый круг, \overline{G} — замыкание множества G , G_+ означает пересечение множества G с полуплоскостью \mathbb{C}_+ , то есть $G_+ = G \cap \mathbb{C}_+$, $\overset{\circ}{G}$ — внутренность множества G . Через $x^+ = \max\{x; 0\}$ обозначаем неотрицательную часть вещественного числа x . В частности, $\ln^+ 0 = 0$. Для расширенной числовой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ через $f^+ : x \rightarrow (f(x))^+$ обозначаем её неотрицательную, а $f^- : x \rightarrow (f(x))^-$ — её неположительную часть. Под выражением "полузамкнутое множество" мы понимаем множество на комплексной плоскости, часть границы которого принадлежит множеству, а остальная часть ему не принадлежит. В частности, под полузамкнутым полукольцом или полукругом в верхней полуплоскости мы понимаем полукольцо или полукруг, пересечение границы которого с вещественной осью не принадлежит данному множеству.

Обозначим через $D(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty\}$ — открытое кольцо на плоскости, а через $D_+(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty, \text{Im } z > 0\}$ — открытое полукольцо на верхней полуплоскости. В работах Т. Карлемана [10] и Б. Я. Левина [7] были получены формулы, связывающие логарифм модуля функции, аналитической в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ с расположением её нулей. Эти формулы нашли многочисленные приложения в теории целых и мероморфных функций (см. [3, 17]). Независимо друг от друга Дж. Ито [15] и А. Ф. Гришин [5, 6] распространили формулы Б. Я. Левина и Т. Карлемана на ограниченные аналитические функции в полузамкнутом полукруге $B_+^*(0, R) = B_+(0, R) \cap \mathbb{C}_+$. Аналитичность в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ равносильна аналитичности в $D_+(R'_1, R'_2, \delta) = \{z : 0 < R'_1 < |z| < R'_2 < +\infty, \text{Im } z > -\delta\}$ при некоторых $R'_1 < R_1 < R_2 < R'_2$, $\delta > 0$. Поэтому функции аналитические и ограниченные внутри открытого полукольца $D_+(R_1, R_2)$ образуют более широкий класс, чем аналитические в замыкании $\overline{D_+(R_1, R_2)}$ полукольца. В совместной статье А. Ф. Гришина и М. А. Фёдорова [11] формулы А. Ф. Гришина использовались для построения неванлинновской теории мероморфных функций в полуплоскости, а в совместной статье А. Ф. Гришина и Т. И. Малютиной [13] эти формулы использовались для изучения субгармонических функций, удовлетворяющих локальному условию Левина. Формулы А. Ф. Гришина использовались в работах [19, 20] при построении теории множеств регулярного роста в полуплоскости и решения некоторых интерполяционных задач в классах аналитических функций в полуплоскости с индикатором равным (и не превосходящим) данного, а в статье [21] для построения рядов Фурье дельта-субгармонических функций в полуплоскости. Эти формулы использовались в совместной работе К. Г. Малютина и Н. М. Садыка [22] для построения обобщенных представлений функций, аналитических в полуплоскости. Теория А. Ф. Гришина нашла применение в работах [23, 24] для изучения интегралов и индикаторов субгармонических функций и для нахождения новых формул индикаторов субгармонических функций. Ряд актуальных интерполяционных задач с использованием формулы Гришина решен в серии работ [18, 25, 26, 27, 28]. Независимо от А. Ф. Гришина, Н. В. Говоров [12] распространил формулы Б. Я. Левина и Т. Карлемана на функции аналитические в полузамкнутом полукруге $B_+^*(0, R)$ и в полузамкнутом полукольце $D_+^*(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| \leq R_2 < +\infty, \text{Im } z > 0\}$

В настоящей статье формулы Ито — Гришина и Ито — Гришина — Говорова распространяются на функции аналитические и ограниченные в открытом полукольце $D_+(R_1, R_2)$ и в открытом полукруге $C_+(0, R)$. Основным результатом является теорема 7.

2. Предварительные сведения

Нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ — мера на вещественной оси такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|\mu|(t)}{1+t^2} < \infty, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

где $\mu = \mu^+ - \mu^-$ — разложение Жордана меры μ . Пусть

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2}, \quad z = x + iy.$$

1) Если в точке x_0 существует конечная или бесконечная (определённого знака) производная $\mu'(x_0)$, то

$$\lim_{y \rightarrow +0} v(x_0 + iy) = \mu'(x_0).$$

2) Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx = \mu([a, b]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) — это известная теорема Фату для случая полуплоскости, её доказательство можно найти, например, в [16, Chapter VI].

2) Зафиксируем $\delta > 0$. Пусть $I_\delta = \mathbb{R} \setminus [a - \delta, b + \delta]$. Представим функцию v в виде суммы

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{y}{\pi} \int_{I_\delta} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2} = v_1(z) + v_2(z).$$

При $x = \operatorname{Re} z \in [a, b]$, $t \in I_\delta$, справедлива оценка

$$\frac{t^2 + 1}{(t-x)^2 + y^2} \leq K(a, b, \delta),$$

где $K(a, b, \delta) > 0$ — константа. Поэтому

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b |v_2(x + iy)| dx \leq \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b \left(K(a, b, \delta) \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|\mu|(t)}{1+t^2} \right) dx = 0.$$

Оценим интеграл от функции v_1 :

$$\int_a^b v_1(x + iy) dx = \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{b-t}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a-t}{y} \right) d\mu(t).$$

Подынтегральная функция $f(t, y; a, b)$ в правой части последнего равенства ограничена. Кроме того,

$$\lim_{y \rightarrow +0} f(t, y; a, b) = \begin{cases} 0, & t \notin \mathbb{R} \setminus [a, b], \\ 1, & t \in (a, b), \\ 1/2, & t \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Поскольку $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, то $f(t, y; a, b)$ $|\mu|$ -почти всюду сходится при $y \rightarrow +0$ к характеристической функции $\chi_{[a,b]}$ интервала $[a, b]$. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v_1(x + iy) dx = \int_a^b d\mu(t) = \mu([a, b]).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема — это вариант теоремы Рисса о представлении [14, Chapter 3, 3.5], [29, 30], который можно найти в [8, Глава V].

ТЕОРЕМА 2. Пусть D — область, имеющая функцию Грина $G(z, \zeta)$. Пусть v — субгармоническая функция в области D , μ — её риссовская мера. Для того, чтобы имело место представление

$$v(z) = - \iint_D G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + h(z), \quad (1)$$

где h — гармоническая функция в области D , необходимо и достаточно, чтобы функция v имела в области D гармоническую мажоранту. Если равенство (1) имеет место, то h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D .

Следующая теорема доказана в диссертации А. Ф. Гришина [4, Теорема 31].

ТЕОРЕМА 3 (Гришин). Пусть D — область, имеющая функцию Грина $G(z, \zeta)$. Пусть v — субгармоническая функция в области D , имеющая в этой области гармоническую мажоранту. Пусть h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D . Для того, чтобы функция v имела в области D положительную гармоническую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы функция h имела в области D положительную гармоническую мажоранту. В случае, если положительные гармонические мажоранты у этих функций существуют, то наилучшие положительные гармонические мажоранты функций v и совпадают h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам неизвестна публикация этой теоремы в других источниках, кроме диссертации А. Ф. Гришина, поэтому для полноты изложения, не претендуя на авторство, приведем доказательство, которое использует идеи из [4].

Пусть H_1 и H_2 — наилучшие положительные гармонические мажоранты в области D (если они существуют) функций v и h , соответственно. Пусть существует H_2 . Тогда $v \leq h \leq H_2$. Отсюда следует, что функция v имеет положительную гармоническую мажоранту и одна из них — H_2 . Очевидно, что $H_1 \leq H_2$.

Наоборот, пусть существует H_1 . Рассмотрим последовательность вложенных областей D_m , исчерпывающую область D , обладающую свойствами: 1) $\overline{D_m} \subset D_{m+1}$, 2) $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, 3) $\overline{D_m}$ — компакт, 4) D_m — конечно-связная область, 5) граница D_m есть объединение конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых.

Пусть $\partial E = \Gamma$ — граница области E , состоящая из конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых. Для функции u , ограниченной и гармонической в области E , непрерывной в замыкании \overline{E} , справедлива формула Грина [2, Глава VI]:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n_{\zeta}} u(\zeta) ds, \quad (2)$$

где $G(z, \zeta)$ — функция Грина области E , $\partial/\partial n_{\zeta}$ — производная по внутренней нормали в точке ζ , $\zeta = \zeta(s)$ — параметризация границы Γ .

Пусть теперь $G_m(z, \zeta)$, $G(z, \zeta)$ — функции Грина областей D_m и D . Известно [2, Глава VI], что $G_m(z, \zeta) \uparrow G(z, \zeta)$ при $m \rightarrow \infty$, $z \in D_m$, начиная с некоторого номера m .

Пусть h — наилучшая гармоническая мажоранта функции v в области D . Согласно формуле (2) имеем

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} h(\zeta_m) ds, \quad \Gamma_m = \partial D_m.$$

Используя равенство (1), получаем

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} v(\zeta_m) ds + \iint_D \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} G(\zeta_m, \zeta) ds \right) d\mu(\zeta).$$

Из формулы (2) следует равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} G(\zeta_m, \zeta) ds = \begin{cases} G(z, \zeta) - G_m(z, \zeta), & \zeta \in D_m, \\ G(z, \zeta), & \zeta \notin D_m. \end{cases}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} v(\zeta_m) ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{\partial G_m(z, \zeta_m)}{\partial n_{\zeta_m}} H_1(\zeta_m) ds = H_1(z).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} h(z) &\leq H_1(z) + \iint_{D_m} (G(z, \zeta) - G_m(z, \zeta)) d\mu(\zeta) + \iint_{D \setminus D_m} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) \\ &\leq H_1(z) + \iint_{D_{m_0}} (G(z, \zeta) - G_m(z, \zeta)) d\mu(\zeta) + \iint_{D \setminus D_{m_0}} G(z, \zeta) d\mu(\zeta), \end{aligned}$$

если $m_0 \leq m$. Так как $G(z, \zeta) - G_m(z, \zeta) \leq G(z, \zeta)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} (G(z, \zeta) - G_m(z, \zeta)) = 0$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$h(z) \leq H_1(z) + \iint_{D \setminus D_{m_0}} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) = H_1(z) + \iint_D \chi_{D \setminus D_{m_0}}(\zeta) G(z, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Вновь применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что $h(z) \leq H_1(z)$. Таким образом, функция $h(z)$ имеет положительную гармоническую мажоранту и $H_1(z)$ — одна из таких мажорант. Тогда $H_1(z) \geq H_2(z)$, $H_1(z) = H_2(z)$.

Теорема доказана

Следующая теорема — это знаменитая теорема Мартина о представлении положительных гармонических функций. Её доказательство можно найти в [9].

ТЕОРЕМА 4. Пусть D — область, имеющая функцию Грина, и пусть Γ — граница Мартина области D , $M(z, \zeta)$ — функция Мартина области D , $\zeta \in \Gamma$. Пусть $u(z)$ — положительная гармоническая функция в области D . Тогда существует единственная конечная, положительная, сосредоточенная на множестве минимальных точек границы Γ , мера λ на Γ такая, что

$$u(z) = \int_{\Gamma} M(z, \zeta) d\lambda(\zeta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. О функции Мартина и границе Мартина можно прочесть в [9].

Доказательство следующей теоремы можно найти в [9].

ТЕОРЕМА 5. Пусть D — односвязная область, евклидова граница которой Γ есть жорданова кривая. Тогда граница Мартина области D гомеоморфна Γ и каждая точка границы минимальна. Если $\zeta \in \Gamma$, то функция Мартина $M(z, \zeta)$ области D , отвечающая этой точке, имеет вид

$$M(z, \zeta) = \lim_{\substack{\zeta_1 \rightarrow \zeta \\ \zeta_1 \in D}} \frac{G(z, \zeta)}{G(z_0, \zeta_1)},$$

где $G(z, \zeta)$ — функция Грина области D , z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D — односвязная область, ограниченная жордановой кривой Γ . Пусть в точке $\zeta \in \Gamma$ кривая Γ имеет касательную, а функция Грина $G(z, \zeta)$ области D — нормальную производную. Тогда

$$M(z, \zeta) = \frac{\partial G(z, \zeta) / \partial n_\zeta}{\partial G(z_0, \zeta) / \partial n_\zeta}.$$

Нам понадобится ещё одна теорема А. Ф. Гришина, доказанная в его докторской диссертации [4, Теорема 36].

ТЕОРЕМА 6 (Гришин). Пусть область D ограничена замкнутой жордановой кривой Γ , которая является объединением конечного числа дважды непрерывно дифференцируемых дуг Γ_j и пусть ζ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — множество угловых точек кривой Γ . Пусть v — субгармоническая функция в D , имеющая в этой области положительную гармоническую мажоранту, μ — её риссовская мера. Тогда существуют однозначно определяемые функцией v вещественные числа a_j , $j = 1, 2, \dots, n$, и мера ν на границе Γ , конечная на каждом компакте, не содержащем точек ζ_j , такие, что имеет место равенство

$$v(z) = - \iint_D G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} d\nu(\zeta) + \sum_{j=1}^n a_j M(z, \zeta_j), \quad (3)$$

где $G(z, \zeta)$ — функция Грина области D , $M(z, \zeta)$ — функция Мартина области D , отвечающая граничной точке ζ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интеграл по контуру Γ нужно понимать как несобственный интеграл с особыми точками $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам неизвестна публикация этой теоремы в других источниках, кроме диссертации А. Ф. Гришина, поэтому для полноты изложения, не претендуя на авторство, приведем доказательство, которое использует идеи из [4].

По теореме 2 справедливо равенство

$$v(z) = - \iint_D G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + h(z).$$

По теореме 3 функция h имеет положительную гармоническую мажоранту в области D и поэтому представляется в виде разности положительных гармонических функций $h = h_1 - h_2$. Тогда из теорем 4 и 5 следует, что существует конечная мера λ на Γ такая, что

$$h(z) = \int_\Gamma M(z, \zeta) d\lambda(\zeta).$$

Положим $a_j = \lambda(\{\zeta_j\})$, $\lambda_1 = \lambda - \sum_{j=1}^n a_j \delta(\zeta - \zeta_j)$, где $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$h(z) = \int_{\Gamma} M(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta) + \sum_{j=1}^n a_j M(z, \zeta_j).$$

На открытой дважды непрерывно дифференцируемой дуге, лежащей на границе односвязной области D , для любого $z \in D$ существуют и непрерывны по переменной ζ функции

$$\frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n_\zeta}, \quad \left(\frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} \right)^{-1},$$

где $G(z, \zeta)$ — функция Грина области D .

Далее, из следствия 1 следует, что почти всюду по мере $|\lambda_1|$ на кривой Γ выполняется равенство

$$M(z, \zeta) = \frac{\partial G(z, \zeta) / \partial n_\zeta}{\partial G(z_0, \zeta) / \partial n_\zeta}.$$

Обозначим через ν меру

$$d\nu(\zeta) = 2\pi \left(\frac{\partial G(z_0, \zeta)}{\partial n_\zeta} \right)^{-1} d\lambda_1(\zeta).$$

Мера ν — конечна на каждом компакте, не содержащем точек ζ_j . Кроме того, имеет место равенство (3). Теорема доказана.

3. Представление субгармонических функций в полукольце

Теперь мы докажем основную теорему нашей работы о представлении субгармонической функции в открытом полукольце.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция v — субгармоническая функция в полукольце $D_+(R_1, R_2)$, имеющая в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z, \zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1, R_2)$. Тогда существуют вещественные числа a_j , $j = 1, \dots, 4$, меры ν_j , $j = 1, 2$, на интервале $(0, \pi)$, причем, если z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$, то меры $\tilde{\nu}_j$, где $d\tilde{\nu}_j = \frac{\partial G(z_0, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}$, $j = 1, 2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0, \pi)$,

мера ν на множестве $I = (-R_2, -R_1) \cup (R_1, R_2)$, причем мера $\tilde{\nu}$, где $d\tilde{\nu} = \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_\zeta}$ имеет ограниченную полную вариацию на множестве I , такие, что при $z \in D_+(R_1, R_2)$ имеет место равенство

$$v(z) = - \iint_{D_+(R_1, R_2)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} d\nu_j(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_I \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t) \quad (4)$$

$$+ a_1 M(z, R_1) + a_2 M(z, -R_1) + a_3 M(z, R_2) + a_4 M(z, -R_2),$$

где $M(z, \zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ , а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Имеют место формулы:

$$\nu_1([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_1+0} R_1 \int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad \nu_2([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_2-0} R_2 \int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad (5)$$

если $0 < \alpha < \beta < \pi$, $\nu_j(\{\alpha\}) = \nu_j(\{\beta\}) = 0$, $j = 1, 2$,

$$\nu([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx, \text{ если } [a, b] \in I, \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0, \quad (6)$$

$$d\nu_j(\varphi) = R_j v(R_j e^{i\varphi}) d\varphi + d\sigma_j(\varphi) d\varphi, \quad j = 1, 2, \quad d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t), \quad (7)$$

где почти всюду

$$v(R_1 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(R_2 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy), \quad (8)$$

а σ_j , $j = 1, 2$, σ , — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0, \pi)$, на I , для которых почти всюду $\sigma'_j = 0$, $\sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукольце $D_+(R'_1, R'_2)$, $0 < R'_1 < R_1 < R_2 < R'_2$, то

$$v(z) = - \iint_{D_+(R_1, R_2)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(R_j e^{i\varphi}) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_I \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4) и соответствующие свойства мер ν_j , $j = 1, 2$, и ν являются следствиями теоремы 6. Докажем равенство (5). Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < \pi$. Положим

$$B_1 = D_+(R_1, R_1 + \delta) \cap \{\zeta : \alpha_1 < \arg \zeta < \beta_1\}, \quad B_2 = D_+(R_2 - \delta, R_2) \cap \{\zeta : \alpha_1 < \arg \zeta < \beta_1\},$$

$$v_j(z) = \iint_{D_+(R_1, R_2)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) = \iint_{B_j} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \iint_{D_+(R_1, R_2) \setminus B_j} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + v_{j1}(z) + v_{j2}(z), \quad j = 1, 2.$$

Пусть z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$. Тогда мера μ_1 , $d\mu_1(\zeta) = G(z_0, \zeta) d\mu(\zeta)$ есть конечная мера. Далее, поскольку равномерно по $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \frac{G(re^{i\varphi}, \zeta)}{G(z_0, \zeta)} \Rightarrow 0 \quad (\zeta \in D_+(R_1, R_2) \setminus B_1), \quad \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \frac{G(re^{i\varphi}, \zeta)}{G(z_0, \zeta)} \Rightarrow 0 \quad (\zeta \in D_+(R_1, R_2) \setminus B_2),$$

то

$$\lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \int_\alpha^\beta v_{12}(re^{i\varphi}) d\varphi = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \int_\alpha^\beta \iint_{D_+(R_1, R_2) \setminus B_1} \frac{G(re^{i\varphi}, \zeta)}{G(z_0, \zeta)} d\mu_1(\zeta) d\varphi = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \int_\alpha^\beta v_{22}(re^{i\varphi}) d\varphi = \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \int_\alpha^\beta \iint_{D_+(R_1, R_2) \setminus B_2} \frac{G(re^{i\varphi}, \zeta)}{G(z_0, \zeta)} d\mu_1(\zeta) d\varphi = 0.$$

Пусть $G_1(z, \zeta)$ — функция Грина кольца $D(R_1, R_2)$, $\Phi(z, \zeta) = \frac{G(z, \zeta) - G_1(z, \zeta)}{G(z_0, \zeta)}$. Функция $\Phi(z, \zeta)$ непрерывно продолжается на множество $\overline{B_j}$, $j = 1, 2$, причём, если $\varphi \in [\alpha_1, \beta_1]$, то $\Phi(R_j e^{i\varphi}, \zeta) = 0$ при каждом $\zeta \in \overline{B_j}$.

Пусть $v_{j3}(z) = \iint_{B_j} G_1(z, \zeta) d\mu(\zeta)$, $j = 1, 2$. Тогда $v_{j1}(z) - v_{j3}(z) = \iint_{B_j} \Phi(z, \zeta) d\mu(\zeta)$. Поскольку

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \Phi(re^{i\varphi}, \zeta) \Rightarrow 0, \quad \zeta \in B_2, \quad \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \Phi(re^{i\varphi}, \zeta) \Rightarrow 0, \quad \zeta \in B_1, \quad \text{при } \varphi \in [\alpha, \beta], \text{ то}$$

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \int_\alpha^\beta (v_{21}(z) - v_{23}(z)) d\varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \int_\alpha^\beta (v_{11}(z) - v_{13}(z)) d\varphi = 0.$$

Далее

$$\int_{\alpha}^{\beta} v_{j3}(z) d\varphi \leq \int_0^{2\pi} v_{j3}(z) d\varphi = \iint_{B_j} \int_0^{2\pi} G_1(re^{i\varphi}, \zeta) d\varphi d\mu(\zeta) = \iint_{B_j} \min\left(\ln \frac{R_j}{r}; \frac{R_j}{r}\right) d\mu(\zeta), j = 1, 2.$$

Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{21}(z) d\varphi = \lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{23}(z) d\varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{11}(z) d\varphi = \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{13}(z) d\varphi = 0.$$

Далее $M(z, R_j) = \lim_{\zeta \rightarrow R_j} \frac{G(z, \zeta)}{G(z_0, \zeta)}, j = 1, 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} M(re^{i\varphi}, R_2) d\varphi &= \lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} M(re^{i\varphi}, -R_2) d\varphi = 0, \\ \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} M(re^{i\varphi}, R_1) d\varphi &= \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} M(re^{i\varphi}, -R_1) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Положим $v_4(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t)$. Так как мера $\tilde{\nu}$ имеет ограниченную полную вариацию и равномерно по $\varphi \in [\alpha, \beta], t \in I$,

$$\lim_{r \rightarrow R_2-0} \frac{\partial G(re^{i\varphi}, t)}{\partial n_t} \bigg/ \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_t} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1+0} \frac{\partial G(re^{i\varphi}, t)}{\partial n_t} \bigg/ \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_t} = 0,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} v_4(re^{i\varphi}) d\varphi = \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} v_4(re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Пусть теперь $I_1 = (0, \pi) \setminus [\alpha_1, \beta_1], v_{5j}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{I_1} \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} d\tilde{\nu}_j(t), j = 1, 2$. Так как меры $\tilde{\nu}_j(t)$ имеют ограниченную полную вариацию и равномерно по $\theta \in [\alpha, \beta], \varphi \in I_1$,

$$\lim_{r \rightarrow R_2-0} \frac{\partial G(re^{i\theta}, Re^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} \bigg/ \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1+0} \frac{\partial G(re^{i\theta}, Re^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} \bigg/ \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} = 0,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow R_2-0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{52}(re^{i\theta}) d\varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1+0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{51}(re^{i\theta}) d\varphi = 0.$$

Рассмотрим теперь функции

$$v_{6j}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} d\tilde{\nu}_j(\varphi), v_{7j}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\partial G_1(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_{\zeta}} d\tilde{\nu}_j(\varphi), j = 1, 2.$$

Так как меры $\tilde{\nu}_j(t)$ имеют ограниченную полную вариацию на сегменте $[\alpha_1, \beta_1]$ и так как

$$\frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G_1(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} \xrightarrow{r \rightarrow R_2 - 0} 0, \quad \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G_1(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} \xrightarrow{r \rightarrow R_1 + 0} 0,$$

при $\theta \in [\alpha, \beta]$, $\varphi \in [\alpha_1, \beta_1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \int_{\alpha}^{\beta} (v_{62}(re^{i\theta}) - v_{72}(re^{i\theta})) d\theta = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \int_{\alpha}^{\beta} (v_{61}(re^{i\theta}) - v_{71}(re^{i\theta})) d\theta = 0.$$

Равенство

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{72}(re^{i\theta}) d\theta = \nu_2([\alpha, \beta]), \quad \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \int_{\alpha}^{\beta} v_{71}(re^{i\theta}) d\theta = \nu_2([\alpha, \beta]),$$

если $\nu_j(\{\alpha\}) = \nu_j(\{\beta\}) = 0$, $j = 1, 2$, хорошо известно и доказано, например, в книге И. И. Привалова [8].

Тем самым равенство (5) доказано.

Аналогично доказывается равенство (6). В этом случае всё дело сводится к вычислению

предела $\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v_9(x + iy) dx$, где $v_9(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{\partial G_2(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t)$, $G_2(z, \zeta)$ — функция Грина

верхней полуплоскости. Здесь вместо ссылки на книгу И. И. Привалова нужно сослаться на теорему 1.

Равенства (7) и (8) являются следствием равенств (5) и (6).

Пусть теперь функция v является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукольце $D_+(R'_1, R'_2)$, $0 < R'_1 < R_1 < R_2 < R'_2$. Тогда по доказанному мера ν имеет ограниченную полную вариацию на множестве $[-R_2, -R_1] \cup [R_1, R_2]$. Кроме того, в этом случае

$$\lim_{r \rightarrow R_2 - 0} R_2 \int_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\theta}) d\theta = R_2 \int_{\alpha}^{\beta} v(R_2 e^{i\theta}) d\theta, \quad \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} R_1 \int_{\alpha}^{\beta} v(re^{i\theta}) d\theta = R_1 \int_{\alpha}^{\beta} v(R_1 e^{i\theta}) d\theta,$$

и, следовательно, $d\nu_j(\theta) = R_j v(R_j e^{i\theta}) d\theta$, $j = 1, 2$. В этом случае выполняются равенства $a_j = 0$, $j = 1, \dots, 4$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формула (9) приведена в диссертации А. Ф. Гришина без доказательства (см. [4], Теорема 38). Аналог теоремы 7 в математической литературе нам не встречался.

4. Классы функций в $D_+(R_1, R_2)$

Пусть $SK(R_1, R_2)$ — класс субгармонических функций в $D_+(R_1, R_2)$, имеющих в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z, \zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1, R_2)$. Из теоремы 7 следует, что функция v из класса $SK(R_1, R_2)$ обладает следующими свойствами:

а) v имеет почти всюду некасательные пределы

$$v(R_1 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(R_2 e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R_2 - 0} v(re^{i\varphi}), \quad v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy);$$

b) существуют меры ν_j , $j = 1, 2$, на интервале $(0, \pi)$, причем, если z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$, то меры $\tilde{\nu}_j$, где $d\tilde{\nu}_j = \frac{\partial G(z_0, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}$, $j = 1, 2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0, \pi)$, мера ν на множестве $I(R_1, R_2) = (-R_2, -R_1) \cup (R_1, R_2)$, причем мера $\tilde{\nu}$, где $d\tilde{\nu} = \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_\zeta}$ имеет ограниченную полную вариацию на множестве I , такие, что

$$\nu_1([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_1+0} R_1 \int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi}) d\varphi, \nu_2([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R_2-0} R_2 \int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

если $0 < \alpha < \beta < \pi$, $\nu_j(\{\alpha\}) = \nu_j(\{\beta\}) = 0$, $j = 1, 2$,

$$\nu([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx, \text{ если } [a, b] \in I, \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0.$$

Мера $\hat{\nu} = \nu_1 + \nu_2 + \nu$ называется граничной мерой функции v .

c) $d\nu_j(\varphi) = R_j v(R_j e^{i\varphi}) d\varphi + d\sigma_j(\varphi) d\varphi$, $j = 1, 2$, $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ_j , $j = 1, 2$, σ , — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0, \pi)$, на I , для которых почти всюду $\sigma'_j = 0$, $\sigma' = 0$).

Для функции $v \in SK(R_1, R_2)$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{D_+(R_1, R_2) \cap K} \text{Im } \zeta d\mu(\zeta) - \hat{\nu}(K),$$

где μ риссовская мера функции v . Мера λ обладает следующими свойствами:

- 1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$,
- 2) λ — неотрицательная мера в $D_+(R_1, R_2)$,
- 3) λ равна нулю в дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R_1, R_2)}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1) – 3), то существует функция $v \in SK(R_1, R_2)$, с полной мерой равной λ . Совокупность условий 1) – 3) в дальнейшем будем обозначать через $\{G\}$, если, кроме того, мера λ неотрицательная и на \mathbb{R} , то через $\{G^+\}$.

Используя введенные определения, формулу (4) для функции $v \in SK(R_1, R_2)$ можно записать в виде:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\overline{D_+(R_1, R_2)}} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + a_1 M(z, R_1) + a_2 M(z, -R_1) + a_3 M(z, R_2) + a_4 M(z, -R_2),$$

где

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} K(z, \zeta), & \zeta \in D_+(R_1, R_2), \\ \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}, & \zeta = R_j e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi), \\ \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t}, & \zeta \in I(R_1, R_2). \end{cases}$$

5. Обобщённая формула Гришина

Приведём теорему Гришина для субгармонических функций в открытом полукруге $C_+(0, R)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция v — субгармоническая функция в полукруге $C_+(0, R)$, имеющая в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту, $G(z, \zeta)$ — функция Грина полукруга $C_+(0, R)$. Тогда существуют вещественные числа a_j , $j = 1, 2$, мера ν_1 на интервале $(0, \pi)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причем мера $\tilde{\nu}_1$, где $d\tilde{\nu}_1 = \frac{\partial G(z_0, Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}$ имеет ограниченную полную вариацию на интервале $(0, \pi)$, мера ν на интервале $(-R, R)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причем мера $\tilde{\nu}$, где $d\tilde{\nu} = \frac{\partial G(z_0, t)}{\partial n_\zeta}$ (z_0 такая точка, что $v(z_0) > -\infty$), имеет ограниченную полную вариацию на интервале $(-R, R)$, такие, такие, что при $z \in C_+(0, R)$ имеет место равенство

$$v(z) = - \iint_{C_+(0, R)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} d\nu_1(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t) + a_1 M(z, R) + a_2 M(z, -R),$$

где $M(z, \zeta)$ — функция Мартина полукруга $C_+(0, R)$, отвечающая граничной точке ζ , а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Имеют место формулы:

$$\nu_1([\alpha, \beta]) = \lim_{r \rightarrow R+0} R \int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi}) d\varphi, \text{ если } 0 < \alpha < \beta < \pi, \quad \nu_1(\{\alpha\}) = \nu_1(\{\beta\}) = 0,$$

$$\nu([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx, \text{ если } [a, b] \in (-R, R), \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0,$$

$$d\nu_1(\varphi) = Rv(Re^{i\varphi}) d\varphi + d\sigma_1(\varphi) d\varphi, \quad j = 1, 2, \quad d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t),$$

где почти всюду

$$v(Re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow R-0} v(re^{i\varphi}), \quad v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy),$$

а σ_1, σ , — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0, \pi)$, на $(-R, R)$, для которых почти всюду $\sigma'_1 = 0, \sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукруге $C_+(0, R_1)$, $R < R_1$, то

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, R)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(Re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} d\nu(t).$$

Теорема 8 доказана в диссертации А. Ф. Гришина [4, Теорема 37]. В других источниках (например, в [5, Теорема 1, Теорема 2]) она приводится без доказательства. Доказательство легко провести, используя рассуждения выше при доказательстве теоремы 7.

В несколько другой формулировке теорема 8 доказана в работе [15].

6. Заключение

В проблеме представления субгармонических функций в различных областях комплексной плоскости остается много открытых вопросов. На наш взгляд, одна из основных проблем, являющейся камнем преткновения, является вычисление функции Грина данной области, особенно для многосвязных областей. Кроме того, интересно получить аналог формулы Карлемана для открытого полукольца $D_+(R_1, R_2)$. В этих случаях эффективным инструментом решения проблемы является теория тонкой топологии и пространств Мартина, в частности теорема Рисса — Мартина о представлении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 157 с.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970. 592 с.
4. Гришин А. Ф. Субгармонические функции конечного порядка. Дисс. док. физ.-мат. наук. Харьков, 1992. 434 с.
5. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I // Матем., Физ., Анализ, Геом. 1994. Т. 1, № 2. С. 193–215.
6. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. II // Матем., Физ., Анализ, Геом. 1995. Т. 2, № 2. С. 177–193.
7. Левин Б. Я. О функциях голоморфных в полуплоскости // Труды Одесского державного ун-та. 1941. Т. 3. С. 5–14.
8. Привалов И. И. Субгармонические функции. Москва, Ленинград: ГРМТЛ, 1937. 199 с.
9. BreLOT M. On topologies and boundaries in potential theory. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1971. 224 p.
10. Carleman T. Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques // C. r. Acad. Sci. 1933. Vol. 196. P. 995–997.
11. Fedorov M. A., Grishin A. F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 1998. Vol. 1, No 3. P. 1–49.
12. Govorov N. V. Riemann's Boundary Problem with Infinite Index. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1994. 263 p.
13. Grishin A. F., Malyutina T. I. Subharmonic Functions Satisfying the Local Levin Condition // Israel Mathematical Conference Proceedings. 2001. Vol. 15. P. 137–147.
14. Hayman W. K., Kennedy P. B. Subharmonic Functions. Volume I. London New York San Francisco: Academic Press, 1976. 284 p.
15. Ito Jun-Iti. Subharmonic functions in a half-plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 129, No 3. P. 479–499.

16. Koosis P. Introduction to H_p Spaces. Cambridge: Cambridge university press, 1998. 295 p.
17. Levin B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 1980. 523 p.
18. Malyutin K. G. The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type // Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. Vol. 78, No 1. P. 253-266.
19. Malyutin K. G. On sets of regular growth of functions in a half-plane. I // Izvestija RAN. Mathematics. 1995. Vol. 59, No 4. P. 125–154.
20. Malyutin K. G. On sets of regular growth of functions in a half-plane. II // Izvestija RAN. Mathematics. 1995. Vol. 59, No 5. P. 103–126.
21. Malyutin K. G. Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane // Sb. Math. 2001. Vol. 192, No 6. P. 843–861.
22. Malyutin K. G., Sadik N. M. Presentation of subharmonic functions in a half-plane // Russian Acad. Sci. Sb. Math. 2007. Vol. 198, No 12P. 47–62.
23. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Integrals and indicators of subharmonic functions. I // Chebyshevskii sbornik. 2018. Vol. 19, No 2. P. 272–303.
24. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Integrals and indicators of subharmonic functions. II // Chebyshevskii sbornik. 2019. Vol. 20, No 4. P. 236–269.
25. Malyutin K. G., Gusev A. L. The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. Vol. 7, No 25, Special Issue. P. 113–123.
26. Malyutin K. G., Gusev A. L. The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal. 2019. Vol. 8, No 26. P. 96–104.
27. Malyutin K. G., Kabanko M. V. Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-Plane // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, No 11. P. 2211–2222.
28. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kozlova I. I. Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-Plane. II // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No 4. P. 811–822.
29. Riesz F. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport a la théorie du potentiel // Acta Math. 1926. Vol. 48. P. 329–343.
30. Riesz F. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport a la théorie du potentiel // Acta Math. 1930. Vol. 54. P. 321–360.

REFERENCES

1. Ahiezer N. I. 1970, “Elements of the theory of elliptic functions”, *M. Nauka*.
2. Goluzin G. M. 1966, “Geometric theory of functions of a complex variable”, *M. Nauka*.
3. Gol’dberg, A. A. & Ostrovskii, I. V. 1970, “Value Distribution of Meromorphic Functions”, *M. Nauka*.

4. Grishin A. F. 1992, “Subharmonic functions of finite order”, Abstract Dr. Sc. dissertation, Kharkov, Ukraine.
5. Grishin, A. F. 1994, “Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. I” , *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no 2, pp. 193–215.
6. Grishin, A. F. 1995, “Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. II” , *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 2, no 2, pp. 177–193.
7. Levin, B. Ya. 1941, “On functions holomorphic in a half-plane” , *Trudy.* , vol. 2, pp. 5-14.
8. Privalov I. I. 1937, *Subharmonic functions*. GRTTL, Moskva, Leningrad.
9. Brelot M. 1971, *On topologies and boundaries in potential theory*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York.
10. Carleman T. 1993, “On an equal basis, there is a difference in the theory analytic functions” , *C. r. Acad. Sci.*, vol. 196, pp. 995–997.
11. Fedorov M. A., Grishin A. F. 1998, “Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane” , *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no 3. pp. 1–49.
12. Govorov N. V. 1994, *Riemann’s Boundary Problem with Infinite Index*. Birkäuser, Basel–Boston–Berlin.
13. Grishin A. F., Malyutina T. I. 2001, “Subharmonic Functions Satisfying the Local Levin Condition” *Israel Mathematical Conference Proceedings*, vol. 15. pp. 137–147.
14. Hayman W. K., Kennedy P. B. 1976, *Subharmonic Functions. Volume I.* : Academic Press, London–New York– San Francisco.
15. Ito Jun-Iti. 1967, “Subharmonic functions in a half-plane” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 129, no 3. pp. 479–499.
16. Koosis P. 1998, *Introduction to \mathbf{H}_p Spaces*. Cambridge university press, Cambridge.
17. Levin, B. Ya. 1980, *Distribution of zeros of entire functions*. Providence, RI: Amer. Math. Soc.
18. Malyutin K. G. 1994, “The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type” , *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, vol. 78, no 1. pp. 253-266.
19. Malyutin K. G. 1995, “On sets of regular growth of functions in a half-plane.I” , *Izvestija RAN. Mathematics.*, vol. 59, no 4. pp. 125–154.
20. Malyutin K. G. 1995, “On sets of regular growth of functions in a half-plane. II” , *Izvestija RAN. Mathematics.*, vol. 59, no 5. pp. 103–126.
21. Malyutin K. G. 2001, “Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane” , *Sb. Math.*, vol. 192, no 6. pp. 843–861.
22. Malyutin K. G., Sadik N. M. 2007, “Presentation of subharmonic functions in a half-plane” , *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* vol. 198, no 12, pp. 47–62.
23. Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. & Malyutina, T. I. 2018, “Integrals and indicators of subharmonic functions. I” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 2, pp. 272–303.

24. Malyutin K. G., Kabanko M. V. & Malyutina T. I. “Integrals and indicators of subharmonic functions. II” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 4. pp. 236–269.
25. Malyutin K. G., Gusev A. L. 2018, “The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane” , *Probl. Anal. Issues Anal.*, vol. 7, no. 25, Special Issue. pp. 113–123.
26. Malyutin K. G., Gusev A. L. 2019, “The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane” , *Probl. Anal. Issues Anal.*, vol. 8, no 26, pp. 96–104.
27. Malyutin K. G., Kabanko M. V. 2020, “Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-Plane” , *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 11, pp. 2211–2222.
28. Malyutin K. G., Kabanko M. V. & Kozlova I. I. 2021, “Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-Plane. II” , *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 42, no 4, pp. 811–822.
29. Riesz F. 1926, “On subharmonic functions and their relation to the theory of potential”, *Acta Math.*, vol. 48, pp. 329–343.
30. Riesz F. 1930, “On subharmonic functions and their relation to the theory of potential”, *Acta Math.*, vol. 54, pp. 321–360.

Получено: 12.05.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-153-166

Приближенно трансасакиевые почти $C(\lambda)$ -многообразия

А. Р. Рустанов, Г. В. Теплякова, С. В. Харитонова

Рустанов Алигаджи Рабаданович — кандидат физико-математических наук, Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (г. Москва).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Теплякова Галина Васильевна — кандидат педагогических наук, Институт математики и цифровых технологий, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: galinka-78@list.ru

Харитонова Светлана Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и цифровых технологий, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: hcb@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматриваются приближенно трансасакиевые многообразия, являющиеся почти $C(\lambda)$ -многообразиями. На пространстве присоединенной G -структуры получены компоненты тензора римановой кривизны, тензора Риччи приближенно трансасакиевых многообразий и почти $C(\lambda)$ -многообразий. Получено тождество, которому удовлетворяет тензор Риччи приближенно трансасакиевых многообразий. Доказано, что Риччи-плоское почти $C(\lambda)$ -многообразие локально эквивалентно произведению Риччи-плоского келерова многообразия на вещественную прямую. Получены тождества, которым удовлетворяет тензор Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия. Доказано, что кривизна Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Получено тождество, которому удовлетворяет тензор римановой кривизны приближенно трансасакиевого многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием. Доказано, что для приближенно трансасакиевого многообразия M следующие условия эквивалентны: 1) многообразие M является почти $C(\lambda)$ -многообразием; 2) многообразие M является точнее косимплектическим многообразием; 3) многообразие M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. В случае, когда многообразие M является трансасакиевым почти $C(\lambda)$ -многообразием, многообразие M является косимплектическим, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Для NTS-многообразия размерности больше трех, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием, из точечного постоянства Φ -голоморфной секционной кривизны следует глобальное постоянство. Получена полная классификация таких многообразий.

Ключевые слова: приближенно трансасакиево многообразие, почти $C(\lambda)$ -многообразие, многообразие Кенмоцу, косимплектическое многообразие, многообразие Сасаки.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

А. Р. Рустанов, Г. В. Теплякова, С. В. Харитонова. Приближенно трансасакиевые почти $C(\lambda)$ -многообразия // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 153–166.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-153-166

Nearly trans-Sasakian almost $C(\lambda)$ -manifolds

A. R. Rustanov, G. V. Teplyakova, S. V. Kharitonova

Rustanov Aligadzhi Rabadanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction; Moscow State University of Civil Engineering (Moscow).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Teplyakova Galina Vasilyevna — candidate of pedagogical sciences, Institute of Mathematics and Digital Technologies; Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: galinka-78@list.ru

Kharitonova Svetlana Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Institute of Mathematics and Digital Technologies; Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: hcb@yandex.ru

Abstract

The nearly trans-Sasakian manifolds, which are almost $C(\lambda)$ -manifolds, are considered. On the space of the adjoint G-structure, the components of the Riemannian curvature tensor, the Ricci tensor of the nearly trans-Sasakian manifolds, and the almost $C(\lambda)$ -manifolds are obtained. Identities are obtained that are satisfied by the Ricci tensor of nearly trans-Sasakian manifolds. It is proved that a Ricci-flat almost $C(\lambda)$ -manifold is locally equivalent to the product of a Ricci-flat Kähler manifold and a real line. Identities are obtained that are satisfied by the Ricci tensor of an almost $C(\lambda)$ -manifold. It is proved that the Ricci curvature of an almost $C(\lambda)$ -manifold in the direction of the structure vector is equal to zero if and only if it is cosymplectic, and hence locally equivalent to the product of a Kähler manifold and a real line. An identity is obtained that is satisfied by the Riemannian curvature tensor of a nearly trans-Sasakian manifold, which is an almost $C(\lambda)$ -manifold. It is proved that for a nearly trans-Sasakian manifold M the following conditions are equivalent: 1) the manifold M is an almost $C(\lambda)$ -manifold; 2) the manifold M is a closely cosymplectic manifold; 3) the manifold M is locally equivalent to the product of a nearly Kähler manifold and the real line. In the case when the manifold M is a trans-Sasakian almost $C(\lambda)$ -manifold, the manifold M is cosymplectic, and hence locally equivalent to the product of a Kähler manifold and a real line. For an NTS-manifold of dimension greater than three, which is almost a $C(\lambda)$ -manifold, the pointwise constancy of the Φ -holomorphic sectional curvature implies global constancy. A complete classification of such manifolds is obtained.

Keywords: nearly trans-Sasakian manifold, almost $C(\lambda)$ -manifold, Kenmotsu manifold, cosymplectic manifold, Sasakian manifold.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. R. Rustanov, G. V. Teplyakova, S. V. Kharitonova, 2023, “Nearly trans-Sasakian almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 153–166.

1. Введение

Понятие почти $C(\lambda)$ -многообразий было введено Д. Янссеном и Л. Ванхеке [1]. Авторы определили такие многообразия некоторым условием на тензор кривизны Римана-Кристоффеля. Д. Янссен и Л. Ванхеке показали, что примерами почти $C(\lambda)$ -многообразий являются сасакиевые и косимплектические многообразия, а также многообразия Кенмоцу.

Далее, в работе З. Ольчека и Р. Роска [2], почти $C(\lambda)$ -многообразия появляются как подкласс локально конформно почти косимплектических многообразий. Авторы исследуют $C(\lambda)$ -многообразия постоянной кривизны.

С. В. Харитоновна [3] изучала конформно плоские почти $C(\lambda)$ -многообразия. В частности, получено необходимое и достаточное условие того, что почти контактное метрическое многообразие является почти $C(\lambda)$ -многообразием. Доказано, что на почти $C(\lambda)$ -многообразиях выполняются контактные аналоги второго и третьего тождеств кривизны А. Грея, причём аналог первого тождества Грея выполняется тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим. Доказано, что конформно плоское почти $C(\lambda)$ -многообразие является многообразием постоянной кривизны λ .

В работах [4]–[16] геометры изучали различные аспекты геометрии почти $C(\lambda)$ -многообразий.

Интерес исследователей к изучению геометрии почти $C(\lambda)$ -многообразий объясняется тем, что эти многообразия являются обобщением косимплектических, Кенмоцу и сасакиевых многообразий. Геометрия приближенно трансасакиевых многообразий, являющихся почти $C(\lambda)$ -многообразиями, богаче, чем геометрия почти $C(\lambda)$ -многообразий или приближенно трансасакиевых многообразий. В данной работе мы изучаем приближенно трансасакиевые почти $C(\lambda)$ -многообразия.

Статья имеет следующую структуру. В параграфе 2 мы даем определение приближенно трансасакиевой структуры и приводим некоторые свойства этих структур. Получены существенные ненулевые компоненты тензора римановой кривизны приближенно трансасакиевого многообразия на пространстве присоединенной G -структуры. Получены компоненты тензора Риччи на пространстве присоединенной G -структуры и некоторые тождества тензора Риччи приближенно трансасакиева многообразия.

В параграфе 3 исследуем приближенно трансасакиевы многообразия, являющиеся почти $C(\lambda)$ -многообразиями. В частности, получено тождество, которому удовлетворяет тензор римановой кривизны приближенно трансасакиева многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием, а также доказано, что кривизна Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия M в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Исследуются вопросы постоянства Φ -голоморфной секционной кривизны приближенно трансасакиева многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием.

2. Приближенно трансасакиевые многообразия

Пусть M – гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$; $\mathcal{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на многообразии M ; d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [17, 18]. Почти контактной структурой на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ – векторное поле, называемое характеристическим, Φ – эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом.

При этом:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi.$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad (1)$$

то четверка (η, ξ, Φ, g) называется почти контактной метрической (короче, АС-) структурой.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим (короче, АС-) многообразием.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы i, j, k, \dots пробегают значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, \dots – значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [19]. АС-структура называется приближенно трансасакиевой (короче, NTS-) структурой, если ее линейное расширение принадлежит классу $W_1 \oplus W_4$ почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы [20].

АС-многообразие, снабженное NTS-структурой, называется NTS-многообразием.

Полная группа структурных уравнений NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [19]:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\theta^a &= -\theta_b^a \wedge \theta^b + C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c - \frac{\beta^0}{\sqrt{2}}\theta \wedge \theta^a; \\ 2) \quad d\theta_a &= \theta_a^b \wedge \theta_b + C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c - \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}\theta \wedge \theta_a; \\ 3) \quad d\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0 - \beta_0)\delta_a^b\theta^a \wedge \theta_b; \\ 4) \quad d\theta_b^a + \theta_c^a \wedge \theta_b^c &= (A_{bc}^{ad} - 2C^{adh}C_{hbc} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0 - \beta_0)\delta_{[b}^a\delta_{c]}^d)\theta^c \wedge \theta_d, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} 1) \quad C^{[abc]} &= C^{abc}; \quad 2) \quad C_{[abc]} = C_{abc}; \quad 3) \quad A_{[bc]}^{ad} = 0; \\ 4) \quad A_{ac}^{[bd]} &= -\frac{1}{2}\{(\beta^0)^2 - (\beta_0)^2\}\delta_a^{[b}\delta_c^{d]}; \\ 5) \quad \overline{A_{bc}^{ad}} &= A_{ad}^{bc} + \frac{1}{2}\{(\beta^0)^2 - (\beta_0)^2\}\delta_a^{[b}\delta_c^{d]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 1) \quad dC^{abc} + C^{dbc}\theta_d^a + C^{adc}\theta_d^b + C^{abd}\theta_d^c &= C^{abcd}\theta_d + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 C^{abc}\theta; \\ 2) \quad dC_{abc} - C_{dbc}\theta_a^d - C_{adc}\theta_b^d - C_{abd}\theta_c^d &= C_{abcd}\theta^d + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0 C_{abc}\theta; \\ 3) \quad d\beta^0 &= \beta^{00}\theta; \\ 4) \quad d\beta_0 &= \beta_{00}\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где C^{abcd} , C_{abcd} , C^{abc}_d , C_{abc}^d , β^{00} , β_{00} – подходящие функции на пространстве присоединенной G-структуры, причем,

$$\begin{aligned} 1) \quad (\beta^0 - \beta_0)C_{abc} &= 0; \\ 2) \quad (\beta^0 - \beta_0)C^{abc} &= 0; \\ 3) \quad (\beta^{00} - \beta_{00}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\beta^0)^2 - (\beta_0)^2\}; \\ 4) \quad C^{a[bcd]} &= 0; \\ 5) \quad C_{a[bcd]} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2:4), получим:

$$dA_{bc}^{ad} + A_{bc}^{hd}\theta_h^a + A_{bc}^{ah}\theta_h^d - A_{hc}^{ad}\theta_b^h - A_{bh}^{ad}\theta_c^h = A_{bch}^{ad}\theta^h + A_{bc}^{adh}\theta_h + A_{bc0}^{ad}\theta, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} 1) & A_{b[ch]}^{ad} = A_{bc}^{a[dh]} = 0; \\ 2) & (A_{bc}^{a[d} - 2C^{a[d|h}C_{hbc})C^{c|fg]} = 0; \\ 3) & (A_{b[c}^{ad} - 2C^{adf}C_{fb|c})C_{|d|hg]} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируя внешним образом (4:1), получим:

$$dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta_h^a + C^{abcd}\theta_h^d + C^{abhd}\theta_h^c + C^{abch}\theta_h^d = C^{abcdh}\theta_h + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0 - \beta_0)C^{abcd}\theta, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} 1) & C^{abc[dh]} = 0; \\ 2) & C^{abcg}C_{gdh} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Напомним, что тензорные компоненты формы римановой связности на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид [17, 18]:

$$\begin{aligned} 1) & \theta_b^a = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,i}^a\theta^i; \\ 2) & \theta_b^{\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,i}^{\hat{a}}\theta^i; \\ 3) & \theta_0^a = \sqrt{-1}\Phi_{0,i}^a\theta^i; \\ 4) & \theta_0^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,i}^{\hat{a}}\theta^i; \\ 5) & \theta_a^0 = -\sqrt{-1}\Phi_{a,i}^0\theta^i; \\ 6) & \theta_{\hat{a}}^0 = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},i}^0\theta^i; \\ 7) & \theta_0^0 = 0; \\ 8) & \theta_j^i + \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом следствия 3.5 из [19], соотношения (10) на пространстве присоединенной G -структуры переписуются в форме:

$$\begin{aligned} 1) & \theta_b^a = C^{abc}\theta_c; \\ 2) & \theta_b^{\hat{a}} = C_{abc}\theta^c; \\ 3) & \theta_0^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\delta_b^a\theta^b; \\ 4) & \theta_0^{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\delta_a^{\hat{b}}\theta_b; \\ 5) & \theta_a^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\delta_a^{\hat{b}}\theta_b; \\ 6) & \theta_{\hat{a}}^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\delta_b^a\theta^b; \\ 7) & \theta_0^0 = 0; \\ 8) & \theta_j^i + \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Дифференцируя внешним образом (11), получим:

$$\begin{aligned}
1) \quad d\theta_b^a &= -C^{dbc}\theta_d^a \wedge \theta_c - C^{adc}\theta_d^b \wedge \theta_c + C^{abh}C_{hcd}\theta^c \wedge \theta^d - C^{ab[cd]}\theta_c \wedge \theta_d; \\
2) \quad d\theta_b^{\hat{a}} &= C_{dbc}\theta_a^d \wedge \theta^c + C_{adc}\theta_b^d \wedge \theta^c - C_{ab[cd]}\theta^c \wedge \theta^d + C_{abh}C^{hcd}\theta_c \wedge \theta_d; \\
3) \quad d\theta_0^a &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta_b^a \wedge \theta^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\theta \wedge \theta^a; \\
4) \quad d\theta_0^{\hat{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta_a^b \wedge \theta_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\theta \wedge \theta_a; \\
5) \quad d\theta_a^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta_a^b \wedge \theta_b - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\theta \wedge \theta_a; \\
6) \quad d\theta_{\hat{a}}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta_b^a \wedge \theta^b - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\theta \wedge \theta^a. \tag{12}
\end{aligned}$$

Напомним, что вторая группа структурных уравнений римановой связности имеет вид [17, 18]:

$$d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}R_{jkl}^i\theta^k \wedge \theta^l, \tag{13}$$

где $\{R_{jkl}^i\} \subset C^\infty(BM)$ – компоненты тензора Римана-Кристоффеля. Расписывая (13) на пространстве присоединенной G-структуры, для NTS-многообразия получим:

$$\begin{aligned}
1) \quad d\theta_b^a &= -C^{dbc}\theta_d^a \wedge \theta_c - C^{adc}\theta_d^b \wedge \theta_c + \frac{1}{2}(R_{bcd}^a + (\beta^0)^2\delta_{[c}^a\delta_{b]}^d)\theta^c \wedge \theta^d + \\
&\quad + R_{bcd}^a\theta^c \wedge \theta_d + \frac{1}{2}R_{bcd}^a\theta_c \wedge \theta_d + R_{b0c}^a\theta \wedge \theta^c + R_{b0\hat{c}}^a\theta \wedge \theta_c; \\
2) \quad d\theta_b^{\hat{a}} &= C_{dbc}\theta_a^d \wedge \theta^c + C_{adc}\theta_b^d \wedge \theta^c + \frac{1}{2}R_{bcd}^{\hat{a}}\theta^c \wedge \theta^d + \\
&\quad + R_{bcd}^{\hat{a}}\theta^c \wedge \theta_d + \frac{1}{2}\left\{R_{bcd}^{\hat{a}} + (\beta_0)^2\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}\right\}\theta_c \wedge \theta_d + R_{b0c}^{\hat{a}}\theta \wedge \theta^c + R_{b0\hat{c}}^{\hat{a}}\theta \wedge \theta_c; \\
3) \quad d\theta_0^a &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta_b^a \wedge \theta^b + \frac{1}{2}R_{0bc}^a\theta^b \wedge \theta^c + R_{0b\hat{c}}^a\theta^b \wedge \theta_c + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}R_{0\hat{b}\hat{c}}^a + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0C^{abc}\right)\theta_b \wedge \theta_c + R_{00b}^a\theta \wedge \theta^b + R_{00\hat{b}}^a\theta \wedge \theta_b; \\
4) \quad d\theta_0^{\hat{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta_a^b \wedge \theta_b + \left(\frac{1}{2}R_{0bc}^{\hat{a}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0C_{abc}\right)\theta^b \wedge \theta^c + R_{0b\hat{c}}^{\hat{a}}\theta^b \wedge \theta_c + \\
&\quad + \frac{1}{2}R_{0\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}}\theta_b \wedge \theta_c + R_{00b}^{\hat{a}}\theta \wedge \theta^b + R_{00\hat{b}}^{\hat{a}}\theta \wedge \theta_b; \\
5) \quad d\theta_a^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta_a^b \wedge \theta_b + \left(\frac{1}{2}R_{abc}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0C_{abc}\right)\theta^b \wedge \theta^c + R_{a\hat{b}\hat{c}}^0\theta^b \wedge \theta_c + \\
&\quad + \frac{1}{2}R_{a\hat{b}\hat{c}}^0\theta_b \wedge \theta_c + R_{a0b}^0\theta \wedge \theta^b + R_{a0\hat{b}}^0\theta \wedge \theta_b; \\
6) \quad d\theta_{\hat{a}}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta_b^a \wedge \theta^b + \frac{1}{2}R_{\hat{a}bc}^0\theta^b \wedge \theta^c + R_{\hat{a}b\hat{c}}^0\theta^b \wedge \theta_c + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_0C^{abc}\right)\theta_b \wedge \theta_c + R_{\hat{a}0b}^0\theta \wedge \theta^b + R_{\hat{a}0\hat{b}}^0\theta \wedge \theta_b; \\
7) \quad d\theta_b^a + \theta_c^a \wedge \theta_b^c &= \frac{1}{2}R_{bcd}^a\theta^c \wedge \theta^d + \left(R_{bcd}^a - C^{adh}C_{hbc} + \frac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta_c^a\delta_b^d\right)\theta^c \wedge \theta_d + \\
&\quad + \frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a\theta_b \wedge \theta_c + R_{b0c}^a\theta \wedge \theta^c + R_{b0\hat{c}}^a\theta \wedge \theta_c. \tag{14}
\end{aligned}$$

Сравнивая (14) с (2:4) и (12), получим, что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид:

$$\begin{aligned}
 1) R_{bcd}^a &= 2C^{abh}C_{hcd} - (\beta^0)^2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b; \\
 2) R_{bcd}^{\hat{a}} &= 2C_{abh}C^{hcd} - (\beta_0)^2\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}; \\
 3) R_{bcd}^{\hat{a}} &= -2C_{ab[cd]}; \\
 4) R_{bcd}^{\hat{a}} &= -2C^{ab[cd]}; \\
 5) R_{00b}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2 \right\} \delta_b^a; \\
 6) R_{00\hat{b}}^{\hat{a}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2 \right\} \delta_a^{\hat{b}}; \\
 7) R_{a0\hat{b}}^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2 \right\} \delta_a^{\hat{b}}; \\
 8) R_{\hat{a}0b}^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2 \right\} \delta_b^a; \\
 9) R_{bcd}^a &= A_{bc}^{ad} - C^{adh}C_{hbc} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0 - \beta_0)\delta_{[b}^a\delta_{c]}^d - \frac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta_c^a\delta_b^d,
 \end{aligned} \tag{15}$$

плюс соотношения, полученные из них с учетом свойств симметрии.

Компоненты тензора Риччи вычисляются по формуле $S_{ij} = -R_{ijk}^k$. Подсчитаем компоненты тензора Риччи NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры:

$$\begin{aligned}
 1) S_{00} &= -\sqrt{2}n \left\{ \beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2 \right\} = -\sqrt{2}n \left\{ \beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2 \right\}; \\
 2) S_{\hat{a}\hat{b}} &= \left\{ A_{ac}^{cb} - C^{cbd}C_{dac} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0 - \beta_0)\delta_{[a}^c\delta_{c]}^b - \frac{1}{2}n\beta^0\beta_0\delta_a^b \right\} - \\
 &\quad - \left\{ 2C_{cad}C^{dbc} - (\beta_0)^2\delta_c^{[b}\delta_a^{c]} \right\} - \sqrt{2} \left\{ \beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2 \right\} \delta_a^{\hat{b}}; \\
 3) S_{\hat{a}\hat{b}} &= \left\{ A_{cb}^{ac} - C^{acd}C_{dcb} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0 - \beta_0)\delta_{[c}^a\delta_{b]}^c - \frac{1}{2}n\beta^0\beta_0\delta_b^a \right\} - \\
 &\quad - \left\{ 2C^{cad}C_{dbc} - (\beta^0)^2\delta_{[b}^c\delta_{c]}^a \right\} - \sqrt{2} \left\{ \beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2 \right\} \delta_b^{\hat{a}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Остальные компоненты нулевые.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Используя (3:4), (16:2), (16:3), легко показать, что $S_{ab} = S_{\hat{b}\hat{a}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Поскольку для NTS-многообразия $S_{0a} = S_{0\hat{a}} = S_{a0} = S_{\hat{a}0} = 0$, $S_{ab} = S_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, то согласно теореме 6 из [15] следует, что NTS-многообразию имеет Φ -инвариантный тензор Риччи.

ТЕОРЕМА 1. Тензор Риччи NTS-многообразия удовлетворяет тождествам:

$$\begin{aligned}
 1) S(\xi, \Phi^2 X) &= 0; \\
 2) S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) &= S(\Phi X, \Phi Y); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).
 \end{aligned} \tag{17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя процедуру восстановления тождества [17, 18] к равенствам $S_{0a} = 0$, $S_{ab} = 0$, получим требуемые тождества. \square

3. Почти $C(\lambda)$ -NTS-многообразия

Пусть $\{M^{2n+1}, \eta, \xi, \Phi, g\}$ – AC-многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [1, 2]. Почти контактное метрическое многообразие называется почти $C(\lambda)$ -многообразием, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет соотношению

$$\langle R(Z, W)Y, X \rangle = \langle R(\Phi Z, \Phi W)Y, X \rangle - \\ - \lambda \{g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W) - g(X, \Phi W)g(Y, \Phi Z) + g(X, \Phi Z)g(Y, \Phi W)\},$$

где $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, а λ – вещественное число.

Нормальное почти $C(\lambda)$ -многообразие называется $C(\lambda)$ -многообразием.

Косимплектическое, сасакиево и Кенмоцу многообразия являются соответственно $C(0)$ -, $C(1)$ -, $C(-1)$ -многообразиями [1].

Доказано, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. [3]. AC -многообразие является почти $C(\lambda)$ -многообразием тогда и только тогда, когда компоненты его тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G -структуры удовлетворяют соотношениям: $R_{bcd}^a = R_{dab}^c = \lambda \delta_{cd}^{ab}$, $R_{0b0}^a = -R_{00b}^a = -R_{ab0}^0 = R_{a0b}^0 = \lambda \delta_b^a$, $R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a$ – любое, в силу тождества Риччи, удовлетворяющее тождеству $R_{bcd}^a - R_{cbd}^a = -\lambda \delta_{bc}^{ad}$, где λ – вещественное число, $\delta_{cd}^{ab} = \delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b$, и комплексно-сопряжённые компоненты. А остальные компоненты равны нулю.

По известным компонентам тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G -структуры, по формуле $S_{ij} = -R_{ijk}^k$ в работе [3] были получены выражения для компонент тензора Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия на пространстве присоединённой G -структуры:

$$S_{00} = 2\lambda n, \\ S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = R_{ca\hat{c}}^b + \lambda n \delta_a^b, \quad (18)$$

остальные компоненты нулевые.

ТЕОРЕМА 3. Риччи-плоское почти $C(\lambda)$ -многообразие локально эквивалентно произведению Риччи-плоского келерова многообразия на вещественную прямую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть почти $C(\lambda)$ -многообразие является Риччи-плоским. Тогда из (18) следует, что $\lambda = 0$, т.е. многообразие является косимплектическим. Поскольку косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [18, 20], то теорема доказана. \square

Из (18), применяя процедуру восстановления тождества [17, 18], можно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1) S(\xi, \xi) &= 2\lambda n; \\ 2) S(\xi, \Phi^2 X) &= 0; \\ 3) S(\xi, X) &= 2\lambda n \eta(X); \\ 4) S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) &= S(\Phi X, \Phi Y); \\ 5) S(\Phi X, \Phi Y) - S(X, Y) &= -2\lambda n \eta(X) \eta(Y); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19:1) непосредственно следует

ТЕОРЕМА 4. Кривизна Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия M в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M – косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Пусть теперь M – NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием. Тогда согласно теореме 2 компоненты тензора римановой кривизны удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} 1) R_{bcd}^a &= R_{d\hat{a}b}^{\hat{c}} = \lambda\delta_{cd}^{ab}; \\ 2) R_{0b0}^a &= -R_{00b}^a = -R_{\hat{a}b0}^0 = R_{\hat{a}0b}^0 = \lambda\delta_b^a; \\ 3) R_{bcd}^a &= -R_{b\hat{a}c}^a. \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая (15) и (20), получим:

$$\begin{aligned} 1) R_{bcd}^a &= 2C^{abh}C_{hcd} - (\beta^0)^2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b = \lambda\delta_{cd}^{ab}; \\ 2) R_{bcd}^{\hat{a}} &= -2C_{ab[cd]} = 0; \\ 3) R_{\hat{a}0b}^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta_b^a = \lambda\delta_b^a; \\ 4) R_{bcd}^a &= -R_{b\hat{a}c}^a = A_{bc}^{ad} - C^{adh}C_{hbc} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0 - \beta_0)\delta_{[b}^a\delta_{c]}^d - \frac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta_c^a\delta_b^d. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (5:5) и (21:2) следует, что $C_{abcd} = 0$. Таким образом, для приближенно трансасакиевского почти $C(\lambda)$ -многообразия имеет место равенство

$$C_{abcd} = 0. \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 5. *Тензор римановой кривизны NTS-многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием, удовлетворяет тождеству*

$$\begin{aligned} R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z &= R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + \\ &+ R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z; \quad X, Z, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (15) с учетом (22) имеем на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = R_{bcd}^{\hat{a}} = R_{bcd}^0 = 0$, т.е. $R_{bcd}^i = 0$. Применяя к последнему равенству процедуру восстановления тождества [17, 18], получим то, что и требовалось доказать. \square

Рассмотрим тождество $R_{bcd}^a - R_{cb\hat{d}}^a = -\lambda\delta_{bc}^{ad}$. Запишем это тождество с учетом (3:3) и (15:9) в виде:

$$C^{adh}C_{hbc} = \{\beta^0(\beta^0 - \beta_0) + \lambda\}\delta_{[b}^a\delta_{c]}^d. \quad (24)$$

Из (21:1) имеем:

$$C^{adh}C_{hbc} = \left\{\frac{1}{2}(\beta^0)^2 + \lambda\right\}\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b. \quad (25)$$

Из последних двух равенств получаем:

$$\frac{1}{2}(\beta^0)^2 = \beta^0(\beta^0 - \beta_0). \quad (26)$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\beta^0 = \beta_0 = 0$ либо $\beta^0 = 2\beta_0$. Но, так как $\bar{\beta}^0 = \beta_0$ (что следует из (2:3)), то второе равенство возможно только при

$$\beta^0 = \beta_0 = 0. \quad (27)$$

Значит, согласно следствию 5 из [19], многообразие является точнее косимплектическим. Поскольку всякое точнее косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [18], то доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть M – NTS-многообразие, тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) M является почти $C(\lambda)$ -многообразием;
- 2) M является точнейше косимплектическим многообразием;
- 3) M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если M – трансасакиево многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, то многообразие M является косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Пусть M – NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием. Из (21) следует, что

$$R_{bcd}^a = A_{bc}^{ad} - \frac{1}{2}\lambda\delta_{bc}^{ad} - \frac{1}{4}\beta^0\beta_0\tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \quad (28)$$

где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a\delta_c^d + \delta_b^d\delta_c^a$.

Поскольку для NTS-многообразий, являющихся почти $C(\lambda)$ -многообразиями, выполняется (27), получим

$$R_{bcd}^a = A_{bc}^{ad} - \frac{1}{2}\lambda\delta_{bc}^{ad}, \quad (29)$$

а также из (3) будем иметь

$$A_{bc}^{[ad]} = A_{[bc]}^{ad} = 0. \quad (30)$$

Согласно предложению 6.11 [18], АС-многообразие является многообразием точечно-постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}_{(bc)}{}^{d)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \quad (31)$$

Произведем симметризацию (29) по a и d , а также по b и c , с учетом (30) получим:

$$R^{(a}_{(bc)}{}^{d)} = A_{bc}^{ad}. \quad (32)$$

Таким образом, справедливо утверждение

ТЕОРЕМА 7. NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, есть многообразие точечно-постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры справедливо

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \quad (33)$$

Найдем аналитический критерий глобального постоянства Φ -голоморфной секционной кривизны рассматриваемых многообразий. Продифференцируем внешним образом соотношение (33). С учетом (6) получим

$$-A_{bc}^{hd}\theta_h^a - A_{bc}^{ah}\theta_h^d + A_{hc}^{ad}\theta_b^h + A_{bh}^{ad}\theta_c^h + A_{bch}^{ad}\theta^h + A_{bc}^{adh}\theta_h + A_{bc0}^{ad}\theta = -\frac{1}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}dc. \quad (34)$$

Последнее равенство после необходимых сокращений с учетом (33) примет вид

$$A_{bch}^{ad}\theta^h + A_{bc}^{adh}\theta_h + A_{bc0}^{ad}\theta = -\frac{1}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}dc. \quad (35)$$

Поскольку $c \in C^\infty(M)$, dc является горизонтальной формой, а значит $dc = c^f \theta_f + c_f \theta^f + c_0 \theta$. С учетом этого, в силу линейной независимости базисных форм, получим

$$\begin{aligned} 1) A_{bch}^{ad} &= -\frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} c_h; \\ 2) A_{bc}^{adh} &= -\frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} c^h; \\ 3) A_{bc0}^{ad} &= -\frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} c. \end{aligned} \tag{36}$$

Свернем (36:1) по d и c :

$$A_{bch}^{ac} = -\frac{1}{2} \delta_b^a c_h (n+1). \tag{37}$$

Альтернируем последнее соотношение по b и h , с учетом (7:1) и (30) получим: $c_h \delta_b^a (n-1) = 0$. Свернем это выражение по индексам a и b : $c_h (n-1) = 0$. Следовательно, при $n \neq 1$, $c_h = 0$. Аналогично из (36:2) и (36:3) получим $c^h = c_0 = 0$, т.е. $dc = 0$, а значит $c = const$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 8. *Если NTS-многообразие размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, есть многообразие точечно-постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c , то оно является и многообразием глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c .*

ЗАМЕЧАНИЕ 9. *Любое трехмерное AC-многообразие является многообразием точечно-постоянной, но, вообще говоря, не глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.*

Напомним [18], всякое точнее косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными. Используя полную классификацию приближенно келеровых многообразий голоморфной кривизны [18], мы, с учетом теоремы 6, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть M — NTS-многообразие размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, тогда M является многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально конформно одному из следующих многообразий: 1) $CP^n \times \mathbf{R}$; 2) $C^n \times \mathbf{R}$; 3) $CH^n \times \mathbf{R}$; 4) $M^2 \times \mathbf{R}$; 5) $S^6 \times \mathbf{R}$, снабженных канонической точнее косимплектической структурой. Здесь S^6 — шестимерная сфера, M^2 — келерова многообразия.*

4. Заключение

Основными результатами работы являются следующие утверждения. Кривизна Риччи почти $C(\lambda)$ -многообразия t в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Тензор римановой кривизны NTS-многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$ -многообразием, удовлетворяет тождеству

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) \Phi^2 Z = R(\Phi^2 X, \Phi Y) \Phi Z + R(\Phi X, \Phi^2 Y) \Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y) \Phi^2 Z; X, Z, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Если M — NTS-многообразие, тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) M является почти $C(\lambda)$ -многообразием; 2) M является точнее косимплектическим многообразием; 3) M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если M — трансасакиево многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, то многообразие M является косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если M —

NTS-многообразии размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$ -многообразием, тогда M является многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально конформно одному из следующих многообразий: 1) $\mathbf{C}P^n \times \mathbf{R}$; 2) $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$; 3) $\mathbf{C}H^n \times \mathbf{R}$; 4) $M^2 \times \mathbf{R}$; 5) $S^6 \times \mathbf{R}$, снабженных канонической точнее косимплектической структурой. Здесь S^6 — шестимерная сфера, M^2 — келерово многообразие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Janssen D., Vanhecke L. Almost contact structures and curvature tensors // Kodai Math. J. 1981. Vol. 4. P. 1-27. DOI: 10.2996/kmj/1138036310.
2. Olszak Z., Rosca R. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds // Publ. Math. Debrecen. 1991. Vol. 39. P. 315-323. DOI: 10.5486/PMD.1991.39.3-4.12.
3. Харитонова С.В. Почти $C(\lambda)$ -многообразия // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 139-146.
4. Ali Akbar. Some Results on Almost $C(\lambda)$ -manifolds // International J. of Math. Sci. and Engg. Appls. 2013. Vol. 7, № 1. P. 255-260.
5. Ali Akbar, Sarkar A. On the Conharmonic and Conircular curvature tensors of almost $C(\lambda)$ -Manifolds // Int. J. Adv. Math. Sci. 2013. Vol. 1, № 3. P. 134-138. DOI: 10.14419/ijams.v1i3.981.
6. Ali Akbar, Sarkar A. Almost $C(\lambda)$ -manifolds admitting W_2 curvature tensor // J. Rajashtan Acad. Phys. Sci. 2014. Vol. 13, № 1. P. 31-38.
7. Рустанов А.Р., Харитонова С.В., Казакова О.Н. О двух классах почти $C(\lambda)$ -многообразий // Вестник ОГУ. 2015. № 3. С. 228-231.
8. Ashoka S. R., Bagewadib S. C., Gurupadavva Ingalahalic. Curvature tensor of almost $C(\lambda)$ -manifolds // Malaya J. Math. 2014. Vol. 2, № 1. P. 10-15.
9. Ashoka S. R., Bagewadib S. C., Gurupadavva Ingalahalic. A Study on Ricci Solitons in almost $C(\lambda)$ Manifolds // Sohag J. Math. 2016. Vol. 3, № 2. P. 83-88. DOI: 10.18576/sjm/030206.
10. Chaturvedi B. B., Gupta B. G. C-Bochner curvature tensor on almost $C(\lambda)$ -manifolds // Palestine J. Math. 2019. Vol. 8, № 2. P. 258-265.
11. Atceken M., Yildirim U. On curvature tensors of an almost $C(\alpha)$ -manifold // Int. J. Phys. Math. Sci. 2015. Vol. 5, № 1. P. 53-61.
12. Atceken M., Yildirim U. Almost $c(\alpha)$ -manifolds satisfying certain curvature conditions // Adv. Stud. Contemp. Math. 2016. Vol. 26, № 3. P. 567-578.
13. Atceken M., Yildirim U. On almost $C(\alpha)$ -manifold satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor // Pure Appl. Math. J., Special Issue: Appl. Geom. 2015. Vol. 4, № 1-2. P. 31-34. DOI: 10.11648/j.pamj.s.2015040102.18.
14. Yildirim U. On almost $C(\alpha)$ -manifold satisfying some conditions on the Weyl projective curvature tensor // J. Adv. Math. 2018. Vol. 15. P. 8145-8154. DOI: 10.24297/jam.v15i0.8020.
15. Рустанов А.Р., Полькина Е.А., Харитонова С.В. О некоторых аспектах геометрии почти $C(\lambda)$ -многообразий // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. 2020. № 3. С. 19-24. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-19-24.

16. Rustanov A. R., Polkina E. A., Kharitonova S. V. Projective invariants of almost $C(\lambda)$ -manifolds // *Ann. Glob. Anal. Geom.* 2022. Vol. 61. P. 459-467. DOI: 10.1007/s10455-021-09818-w.
17. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-асакиевых многообразий // *Мат. сб.* 2002. Т. 193, № 8. С. 71-100. DOI: 10.4213/sm675.
18. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный Дом», 2013. 458 с.
19. Rustanov A. R., Melekhina T. L., Kharitonova S. V. On the geometry of nearly trans-Sasakian manifolds // *Turk. J. Math.* 2023. Vol. 47, № 4, Article 7. DOI: 10.55730/1300-0098.3417.
20. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // *Ann. Math. Pure ed Appl.* 1980. Vol. 326, № 123. P. 35–58.

REFERENCES

1. Janssen, D. & Vanhecke, L. 1981, “Almost contact structures and curvature tensors”, *Kodai Math. J.*, vol. 4, pp. 1–27. DOI: 10.2996/kmj/1138036310.
2. Olszak, Z. & Rosca R. 1991, “Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Publ. Math. Debrecen*, vol. 39, pp. 315–323. DOI: 10.5486/PMD.1991.39.3-4.12.
3. Kharitonova, S. V. 2011, “Almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *J. Math. Sci.*, vol. 177, no. 5, pp. 742–747. DOI: 10.1007/s10958-011-0504-6.
4. Ali Akbar. 2013, “Some Results on Almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *International J. of Math. Sci. and Engg. Appls.*, vol. 7, no. 1, pp. 255–260.
5. Ali Akbar & Sarkar, A. 2013, “On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost $C(\lambda)$ -Manifolds”, *Int. J. Adv. Math. Sci.*, vol. 1, no. 3, pp. 134–138. DOI: 10.14419/ijams.v1i3.981.
6. Ali Akbar & Sarkar, A. 2014, “Almost $C(\lambda)$ -manifolds admitting W_2 curvature tensor”, *J. Rajashtan Acad. Phys. Sci.*, vol. 13, no. 1, pp. 31–38.
7. Rustanov, A. P., Kharitonova, S. V. & Kazakova, O. N. 2015, “About two classes of almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Vestnik OSU*, no. 3, pp. 228–231. (in Russian).
8. Ashoka, S. R., Bagewadib, S. C. & Gurupadavva Ingalahalic. 2014, “Curvature tensor of almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Malaya J. Math.*, vol. 2, no. 1, pp. 10–15.
9. Ashoka, S. R., Bagewadib, S. C. & Gurupadavva Ingalahalic. 2016, “A Study on Ricci Solitons in almost $C(\lambda)$ Manifolds”, *Sohag J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp. 83-88. DOI: 10.18576/sjm/030206.
10. Chaturvedi, B. B. & Gupta, B. G. 2019, “C-Bochner curvature tensor on almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Palestine J. Math.*, vol. 8, no. 2, pp. 258-265.
11. Atceken, M. & Yildirim, U. 2015, “On curvature tensors of an almost $C(\alpha)$ -manifold”, *Int. J. Phys. Math. Sci.*, vol. 5, no. 1, pp. 53-61.
12. Atceken, M. & Yildirim, U. 2016, “Almost $c(\alpha)$ -manifolds satisfying certain curvature conditions”, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, vol. 26, no. 3, pp. 567-578.

13. Atceken, M. & Yildirim, U. 2015, “On almost $C(\alpha)$ -manifold satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor”, *Pure Appl. Math. J.*, Special Issue: Appl. Geom., vol. 4, no. 1-2, pp. 31-34. DOI: 10.11648/j.pamj.s.2015040102.18.
14. Yildirim, U. 2018, “On almost $C(\alpha)$ -manifold satisfying some conditions on the Weyl projective curvature tensor”, *J. Adv. Math.*, vol. 15, pp. 8145-8154, DOI: 10.24297/jam.v15i0.8020.
15. Rustanov, A. R., Polkina, E. A. & Kharitonova, S. V. 2020, “On some aspects of the geometry of almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Izv. Vuzov. Sev.-Kav. Reg. Nat. Sci.*, no. 3, pp. 19–24. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-19-24.
16. Rustanov A. R., Polkina E. A. & Kharitonova S. V. 2022, “Projective invariants of almost $C(\lambda)$ -manifolds”, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, vol. 61, pp. 459-467. DOI: 10.1007/s10455-021-09818-w.
17. Kirichenko, V. F. & Rustanov, A. R. 2002, “Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 7-8, pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
18. Kirichenko, V. F. 2013, “Differential-geometric structures on manifolds”, *Odessa, Pechatnyy dom*, 458 p. (in Russian).
19. Rustanov, A. R., Melekhina, T. L. & Kharitonova, S. V. 2023, “On the geometry of nearly trans-Sasakian manifolds”, *Turk. J. Math.*, vol. 47, no. 4, Article 7. DOI: 10.55730/1300-0098.3417.
20. Gray, A. & Hervella L. 1980, “The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants”, *Ann. Math. Pure ed Appl.*, vol. 326, no. 123, pp. 35–58.

Получено: 03.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.18

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-167-179

Про котангенс¹

С. Ю. Соловьев

Соловьев Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: soloviev@glossary.ru

Аннотация

В работе описывается прием рассуждений, позволяющий получать относительно простые оценки значений котангенса для углов из полуинтервала $(0, \pi/2]$. Прием базируется на способности котангенса уточнять некоторые свои оценки, ранее полученные из сторонних соображений. В качестве иллюстрации приема приводятся выводы оценок котангенса для двух подклассов дробно-рациональных функций.

Ключевые слова: котангенс, оценки, миноранты, мажоранты.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

С. Ю. Соловьев. Про котангенс // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 167–179.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.18

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-167-179

About Cotangent

S. Y. Soloviev

Soloviev Sergey Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: soloviev@glossary.ru

Abstract

In this paper we describe a reasoning method which allows to get relatively simple estimates of cotangent values for angles in the half-interval $(0, \pi/2]$. The method is based on the ability of the cotangent to refine some of its estimates that were derived from other considerations. As an illustration of the method we give cotangent estimates for two subclasses of rational functions.

Keywords: cotangent, estimations, minorants, majorants.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

S. Y. Soloviev. 2023, “About Cotangent”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 167–179.

¹Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова (факультет ВМК)

1. Введение

Котангенс [1, 2] является нечетной периодической функцией с периодом π и вертикальными асимптотами $0, \pm\pi, \pm2\pi$ и т.д. [3]. В пределах одного периода график котангенса – рисунок 1(а) – обладает осевой симметрией, другими словами, график котангенса состоит из различных повторений его фрагмента на полуинтервале $(0, \pi/2]$.

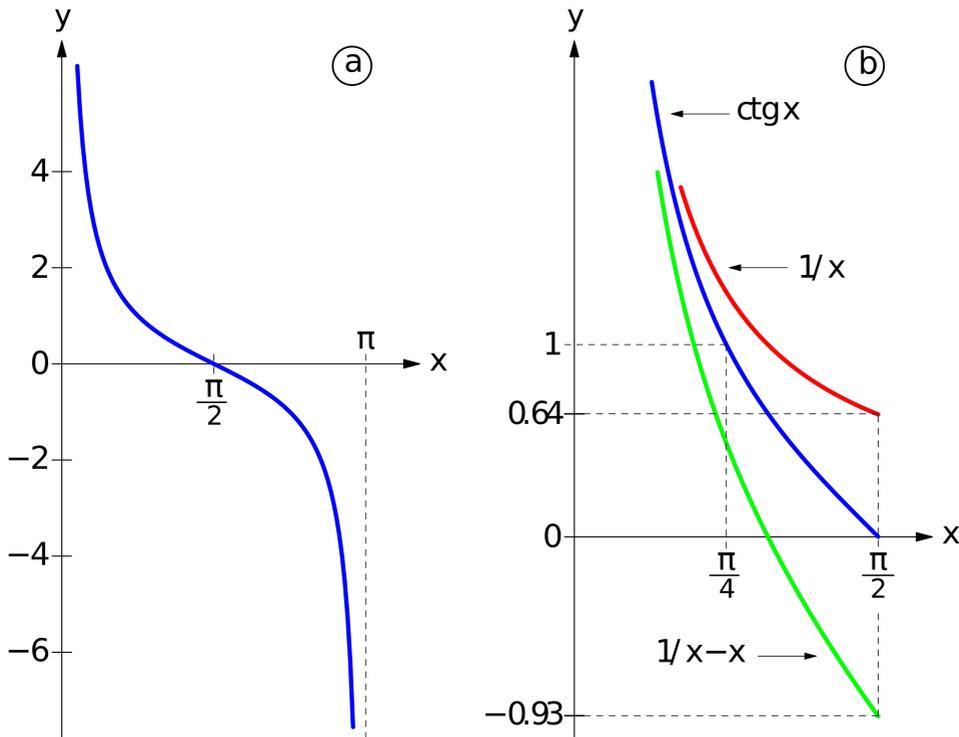


Рис. 1 (а) график котангенса на $(0, \pi)$; (б) иллюстрация двойной оценки (2).

По традиции котангенс считается лишь вспомогательной функцией, пребывающей в тени своего звездного кузена тангенса: $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x-\pi/2)$. Вместе с тем котангенс обладает, по крайней мере, одним уникальным свойством, порождающим интересные формальные выводы. Речь идет о формуле котангенса двойного угла:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ctg}(x/2)}. \quad (1)$$

Из курса школьной тригонометрии достаточно просто выводится (секция 10, упр. 1) неравенство

$$1/x - x < \operatorname{ctg} x < 1/x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]. \quad (2)$$

В последующих рассуждениях формула (1) и неравенство (2) играют – вспомним Архимеда – роли рычага и точки опоры, а в роли Земли выступают оценки [4] котангенса (рисунок 2):

- ▷ двусторонняя оценка – неравенство вида $f(x) \leq \operatorname{ctg} x \leq F(x)$;
- ▷ оценка сверху – неравенство вида $\operatorname{ctg} x \leq F(x)$;
- ▷ оценка снизу – неравенство вида $f(x) \leq \operatorname{ctg} x$;
- при этом
- ▷ функции $f(x)$ и $F(x)$ называются соответственно минорантой и мажорантой [5];
- ▷ будем говорить, что

- > миноранта $f(x)$ уточняет миноранту $f_1(x)$, если $f_1(x) \leq f(x)$;
- > мажоранта $F(x)$ уточняет мажоранту $F_1(x)$, если $F(x) \leq F_1(x)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{миноранта} & & \text{оценка сверху} \\
 \overbrace{f(x)} & \leq & \overbrace{\text{ctg } x} \\
 \underbrace{} & & \underbrace{\phantom{\text{ctg } x}} \\
 \text{оценка снизу} & & \text{мажоранта} \\
 \overbrace{F(x)} & & \overbrace{}
 \end{array}$$

Рис. 2. Двусторонняя оценка котангенса

СОГЛАШЕНИЕ. Везде далее будем полагать, что все миноранты удовлетворяют условию

$$0 < f(x/2),$$

(а) справедливому для всех x из $(0, \pi/2]$, (б) гарантирующему существование величин $1/f(x/2)$ и (в) проверяемому во всех рассматриваемых случаях без затруднений.

Обычно в двусторонних оценках миноранты и мажоранты принадлежат одному и тому же параметрическому классу функций и различаются лишь значениями параметра. Так, в двусторонней оценке (2) и миноранта, и мажоранта принадлежат классу функций $1/x - px$, причем миноранте соответствует параметр $p = 1$, а мажоранте – параметр $p = 0$.

Для практических применений оценка (2) непригодна: в окрестности нуля миноранта и мажоранта от котангенса почти не отличаются, но в прочих областях – рисунок 1(б) – называть двойное неравенство оценкой – явное преувеличение. Приведем более точные оценки котангенса в упомянутом классе функций $1/x - px$, а также в его “законном наследнике” – классе $1/x - x/(3 - tx^2)$. Заметим, что при всех числовых значениях параметров p и t , функции обоих классов относятся к семейству дробно-рациональных функций [4].

2. Основной прием трансформации оценок котангенса

Допустим для некоторых функций f и F имеет место оценка

$$f(x) \leq \text{ctg } x \leq F(x) \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]. \quad (3)$$

В частности,

$$f(x/2) \leq \text{ctg}(x/2) \leq F(x/2) \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2], \quad (4)$$

или (с учетом принятого соглашения)

$$-\frac{1}{f(x/2)} \leq -\frac{1}{\text{ctg}(x/2)} \leq -\frac{1}{F(x/2)} \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2], \quad (5)$$

В результате суммирования-по-частям (с коэффициентами 0.5) оценок (4) и (5) получается двойное неравенство:

$$\frac{1}{2} f(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{f(x/2)} \leq \frac{1}{2} \text{ctg}(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{\text{ctg}(x/2)} \leq \frac{1}{2} F(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{F(x/2)}$$

Формула котангенса удвоенного угла (1) позволяет трансформировать полученное неравенство в оценку котангенса:

$$\frac{1}{2} f(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{f(x/2)} \leq \text{ctg } x \leq \frac{1}{2} F(x/2) - \frac{1}{2} \frac{1}{F(x/2)}.$$

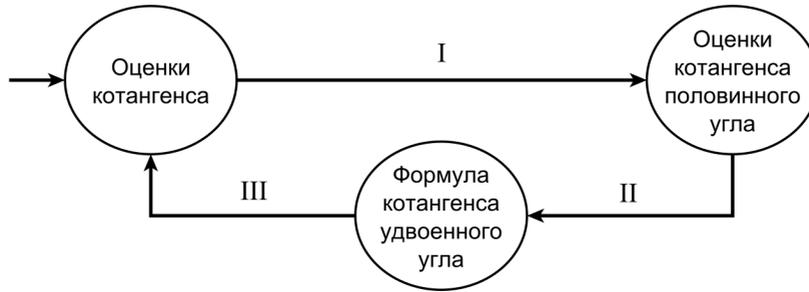


Рис. 3 Схема трансформации: (3) → (4)+(5) → (1) → (3')

В окончательном виде последнюю оценку можно переписать в виде

$$\hat{f}(x) \leq \operatorname{ctg} x \leq \hat{F}(x) \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]; \quad (3')$$

для случая новых миноранты и мажоранты:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} \left(f(x/2) - \frac{1}{f(x/2)} \right) \quad \text{и} \quad \hat{F}(x) = \frac{1}{2} \left(F(x/2) - \frac{1}{F(x/2)} \right).$$

Круг замкнулся: оценки (3) трансформированы в (3'), а схема трансформации зафиксирована на рисунке 3. В качестве примера приведем результат трансформации оценки (2):

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4-x^2} \right) x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - \frac{1}{4} x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]. \quad (2')$$

Нетрудно установить, что новые варианты миноранты и мажоранты уточняют их исходные версии. Единственная возникающая при трансформации проблема, требующая индивидуального подхода, состоит в том, что вновь полученные мажоранты и миноранты могут выходить за пределы выбранного класса функций. В примере (2') за пределы класса функций $1/x - px$ выходит новая миноранта. Вместе с тем циклический характер трансформаций позволяет надеяться на возможность многократного уточнения оценок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Специальным преобразованием функции $g(x)$, определенной на $[0, \pi/2]$ и удовлетворяющей условию $g(x/2)x^2 \neq 4$, будем называть функцию*

$$g^\#(x) = \frac{1}{4} \left(g(x/2) + \frac{1}{1 - (x/2)^2 g(x/2)} \right).$$

Примеры:

$$1^\# = \frac{1}{4} \frac{8-x^2}{4-x^2}, \quad \left(\frac{1}{3-0.4x^2} \right)^\# = \frac{1}{4} \frac{24-1.9x^2+0.02x^4}{18-2.7x^2+0.07x^4}.$$

Специальное преобразование появляется в результате единичной трансформации минорант и мажорант вида $1/x - g(x)x$:

$$\text{ЕСЛИ } \frac{1}{x} - f_+(x)x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - F_+(x)x, \quad \text{ТО } \frac{1}{x} - f_+^\#(x)x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - F_+^\#(x)x.$$

3. Первое уточнение мажоранты

Из оценки (2) следует, что в классе функций $1/x - px$,

- ▷ минорантами гарантированно являются все функции, для которых $p \geq 1$, поэтому
- ▷ любая мажоранта соответствует некоторому значению параметра $p < 1$, и
- ▷ известной мажоранте $1/x$ соответствует значение $p = 0$.

Допустим

$$\operatorname{ctg} x < 1/x - px \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2] \text{ и некоторого } p < 1. \quad (6)$$

Трансформация мажоранты приводит к оценке $\operatorname{ctg} x < 1/x - p^\#x$, а поскольку для всех x из $(0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$-p^\# = -\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{4 - px^2}\right) < -\frac{p+1}{4},$$

то

$$\operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - \frac{p+1}{4}x, \quad \text{причем } \frac{p+1}{4} < 1.$$

Фактически повторилась ситуация (6) с точностью до константы $\hat{p} = (p+1)/4$:

$$\operatorname{ctg} x < 1/x - \hat{p}x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2] \text{ и числа } \hat{p} < 1,$$

а значит приведенные в настоящей секции рассуждения можно повторить многократно. Результатом такого повторения является числовая последовательность $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, в которой $p_0 = 0$, $p_{n+1} = (p_n+1)/4$:

$$0, 0.25, 0.3125, 0.328125, 0.33203125, \dots$$

Каждому члену p_n этой последовательности соответствует мажоранта $1/x - p_n x$, а поскольку последовательность $\{p_n\}$ монотонно возрастает (секция 10, упр. 2), то каждая последующая мажоранта уточняет предыдущую:

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x} - 0.25x > \frac{1}{x} - 0.3125x > \frac{1}{x} - 0.328125x > \dots > \operatorname{ctg} x.$$

Пределом последовательности $\{p_n\}$ является число $1/3$, поэтому (секция 10, упр. 3а) уточнением мажоранты является функция $1/x - x/3$ и соответствующая оценка котангенса сверху имеет вид:

$$\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]. \quad (7)$$

4. Первое уточнение миноранты

Во избежание накладок в рассуждениях о миноранте вместо параметра p будем использовать параметр q . Как следует из оценок (7) и (2) в классе функций $1/x - qx$

- ▷ мажорантами гарантированно являются все функции, для которых $q \leq 1/3$, поэтому
- ▷ любая миноранта соответствует некоторому значению параметра $q > 1/3$, и
- ▷ известной миноранте $1/x - x$ соответствует значение $q = 1$.

Зафиксируем некоторое число ω из полуинтервала $(0, \pi/2]$. В этом случае для любого x из $(0, \omega]$ оценка снизу из (2') может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 - \omega^2}\right)x < \operatorname{ctg} x, \quad \text{причем } \frac{1}{4} + \frac{1}{4 - \omega^2} > \frac{1}{3}.$$

Допустим

$$1/x - qx < \operatorname{ctg} x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \omega] \text{ и некоторого } q > 1/3. \quad (8)$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} x > \frac{1}{x} - q^\# x = \frac{1}{x} - \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{4-qx^2} \right) x \geq \frac{1}{x} - \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{4-q\omega^2} \right) x,$$

а поскольку для всех x из $(0, \omega]$ имеет место (секция 10, упр. 4) неравенство

$$\hat{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{4} + \frac{1}{4-q\omega^2} > \frac{1}{3}, \quad (9)$$

то фактически повторилась ситуация (8) с точностью до константы \hat{q} :

$$1/x - \hat{q}x < \operatorname{ctg} x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \omega] \text{ и числа } \hat{q} > 1/3.$$

Приведенные в настоящем разделе рассуждения можно повторить многократно, трансформируя таким образом миноранту. Полученная последовательность трансформаций задает параметрическое семейство числовых последовательностей $\{q_n\}$:

$$q_0 = 1, \quad q_{n+1} = \frac{q_n}{4} + \frac{1}{4-q_n\omega^2}, \quad \text{где } \omega \text{ - параметр.} \quad (10)$$

Приведем, округляя до тысячных, первые члены некоторых последовательностей этого семейства:

$$\begin{aligned} \omega = \pi/2 &\Rightarrow q_n: 1, 0.902, 0.790, 0.685, 0.604, 0.549, 0.516, \dots \\ \omega = \pi/4 &\Rightarrow q_n: 1, 0.546, 0.409, 0.369, 0.357, 0.354, 0.353, \dots \\ \omega = \pi/8 &\Rightarrow q_n: 1, 0.510, 0.383, 0.349, 0.341, 0.339, 0.338, \dots \end{aligned}$$

При фиксированном значении параметра ω каждому члену последовательности $\{q_n\}$ соответствует миноранта $1/x - q_n x$, а поскольку последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает (секция 10, упр. 5), то каждая последующая миноранта уточняет предыдущую:

$$\frac{1}{x} - x < \frac{1}{x} - q_1 x < \frac{1}{x} - q_2 x < \frac{1}{x} - q_3 x < \dots < \operatorname{ctg} x.$$

Пределом последовательности $\{q_n\}$ является (секция 10, упр. 6) число $q_\omega = 2/(3+\sqrt{9-3\omega^2})$, поэтому (секция 10, упр. 3б) первым уточнением миноранты является функция $1/x - q_\omega x$, которой соответствует оценка котангенса снизу

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3+\sqrt{9-3\omega^2}} x \leq \operatorname{ctg} x \quad \text{для всех } x \text{ из } (0, \omega].$$

Полученная оценка существенно зависит от верхней границы диапазона варьирования аргумента:

$$\begin{aligned} \text{если } \omega = \pi/2, \text{ т.е. } x \in (0, \pi/2], \text{ то } 1/x - 0.470x &\leq \operatorname{ctg} x, \\ \text{если } \omega = \pi/4, \text{ т.е. } x \in (0, \pi/4], \text{ то } 1/x - 0.353x &\leq \operatorname{ctg} x, \\ \text{если } \omega = \pi/8, \text{ т.е. } x \in (0, \pi/8], \text{ то } 1/x - 0.338x &\leq \operatorname{ctg} x \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (11)$$

5. Второе уточнение миноранты (часть 1)

Полученные оценки снизу отмечены печатью коллективизма: неравенство $1/x - q_\omega x \leq \text{ctg } x$ выполняется для *всех* чисел из $(0, \omega]$. Переход к индивидуальным оценкам связан с выходом за пределы класса функций вида $1/x - qx$.

Поскольку наилучшая оценка снизу в отдельно взятой точке x достигается при $\omega = x$, то

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 3x^2}} x \leq \text{ctg } x.$$

В этом неравенстве в позиции числа q появилась функция $\lambda_0(x)$:

$$\lambda_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 3x^2}} \implies \frac{1}{x} - \lambda_0(x) x \leq \text{ctg } x. \quad (12)$$

Трансформация оценки (12) порождает оценку:

$$\text{ctg } x \geq \frac{1}{x} - \lambda_1(x) x, \quad \text{где } \lambda_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0^\#(x) = qw \frac{\lambda_0(x/2)}{4} + \frac{1}{4 - \lambda_0(x/2) x^2}.$$

Аналогичным образом (для всех $n \geq 2$) устанавливаются оценки

$$\text{ctg } x \geq \frac{1}{x} - \lambda_n(x) x, \quad \text{где } \lambda_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{n-1}^\#(x) = \frac{\lambda_{n-1}(x/2)}{4} + \frac{1}{4 - \lambda_{n-1}(x/2) x^2}. \quad (13)$$

Результатом описанных трансформаций является последовательность функций $\{\lambda_n(x)\}$, члены которой определяются формулами (12) и (13). Для каждого фиксированного x числовая последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ монотонно убывает и сходится (секция 10, упр. 7) к некоторому числу, обозначим его $\lambda(x)$. Таким образом, можно считать установленным факт существования функции $\lambda(x)$ – предела функциональной последовательности $\{\lambda_n(x)\}$. В свою очередь последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ и ее предел порождают цепочку уточняющих оценок:

$$\frac{1}{x} - \lambda_0(x) x < \frac{1}{x} - \lambda_1(x) x < \frac{1}{x} - \lambda_2(x) x < \dots < \frac{1}{x} - \lambda(x) x \leq \text{ctg } x \quad (14)$$

Конкретный вид функции $\lambda(x)$ остается неизвестным, однако факт ее существования позволяет выявить достаточно простой класс функций для минорант и мажорант. С этой целью зафиксируем некоторое $n > 0$ и обозначим

$$a_i = \frac{\lambda_{n-i}(x/2^i)}{4^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (15)$$

тогда (раскрывая первое слагаемое)

$$\lambda_n(x) = a_1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - a_1 x^2} = a_2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4^i} \frac{1}{1 - a_i x^2} = \dots = a_n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \frac{1}{1 - a_i x^2}. \quad (16)$$

Из (11) и (12) следует, что $\lambda_0(x/2) < 0.36$ для всех x из $(0, \pi/2]$,

а поскольку (секция 10, упр. 8) $a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 = \lambda_{n-1}(x/2)/4 < \lambda_0(x/2)/4 < 0.09$, то

$$\lambda_n(x) < \frac{0.36}{4^n} + \frac{1}{1 - 0.09 x^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} < \frac{0.36}{4^n} + \frac{1}{3 - 0.27 x^2}.$$

Следовательно, для функции $\lambda(x)$ как предела последовательности функций $\{\lambda_n(x)\}$ справедливо неравенство

$$\lambda(x) \leq \frac{1}{3-0.27x^2}, \quad (17)$$

которое с учетом цепочки (14), порождает оценку снизу:

$$\frac{1}{x} - \lambda(x)x \leq \operatorname{ctg} x \implies \frac{1}{x} - \frac{1}{3-0.27x^2}x \leq \operatorname{ctg} x.$$

Полученная миноранта относится к классу функций $1/x - x/(3-tx^2)$. Константа 0.27 появился в миноранте в результате ряда огрублений, поэтому имеет смысл ее уточнить.

6. Свойства функций $(3-tx^2)^{-1}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $g(x)$ – функция, определенная на $[0, \pi/2]$, и пусть для некоторых чисел T и R из отрезка $[0.18, 0.27]$ и всех x из $[0, \pi/2]$ имеет место двойное неравенство

$$(3-Tx^2)^{-1} \leq g(x) \leq (3-Rx^2)^{-1}, \quad (18)$$

тогда

$$(3-\tilde{T}x^2)^{-1} \leq g^\#(x) \leq (3-\tilde{R}x^2)^{-1},$$

где

$$\tilde{T} = \frac{T+3}{16}, \quad \tilde{R} = 4 \frac{48(R+3) - R(R+4)\pi^2}{3072 - 16(7R+1)\pi^2 + R^2\pi^4}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $h = (x/2)^2$ и применим прием из секции 2: во-первых, просуммируем-по-частям (с коэффициентом 0.25) две версии неравенства (18) и, во-вторых, используя определение специального преобразования, имеем:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3-Th} + \frac{1}{1-(3-Th)^{-1}h} \right) \leq g^\#(x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3-Rh} + \frac{1}{1-(3-Rh)^{-1}h} \right).$$

В результате эквивалентных преобразований последнее неравенство сводится к виду:

$$\frac{1}{3-\theta(x, T)x^2} \leq g^\#(x) \leq \frac{1}{3-\theta(x, R)x^2}, \quad \text{где } \theta(x, u) = \frac{12(u+3) - u(u+4)x^2}{192 - 4(7u+1)x^2 + u^2x^4}. \quad (20)$$

Функция двух переменных $\theta(x, u)$

- ▷ определена в прямоугольнике $[0, \pi/2] \times [0.18, 0.27]$,
- ▷ порождает две функции: $\theta(0, u)$ и $\theta(\pi/2, u)$, и
- ▷ удовлетворяет двойному неравенству (секция 10, упр. 9):

$$\theta(0, u) \leq \theta(x, u) \leq \theta(\pi/2u) \quad (21)$$

Из (20) и (21) вытекает неравенство

$$(3-\theta(0, T)x^2)^{-1} \leq g^\#(x) \leq (3-\theta(\pi/2R)x^2)^{-1},$$

из которого, в свою очередь, извлекаются искомые выражения (19):

$$\tilde{T} = \theta(0, T) \quad \text{и} \quad \tilde{R} = \theta(\pi/2R).$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\theta(0, u)$ на отрезке $[0.18, 0.27]$ имеет неподвижную точку (секция 10, упр. 10), в которой уравнение $t = \theta(0, t)$ имеет единственное решение. Точным решением этого уравнения, обозначим его t_∞ , является число 0.2, и любая последовательность $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, в которой $t_0 \in [0.18, 0.27]$ и $t_{n+1} = \theta(0, t_n)$, сходится к t_∞ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция $\theta(\pi/2, u)$ на отрезке $[0.18, 0.27]$ имеет неподвижную точку (секция 10, упр. 10), в которой уравнение $r = \theta(\pi/2, r)$ имеет единственное решение. Решение этого уравнения сводится к нахождению меньшего корня² (обозначим его r_∞) уравнения $\pi^4 r^3 - 108 \pi^2 r^2 + 2880 r - 576 = 0$; $r_\infty = 0.217097744\dots$. Любая последовательность $\{r_n\}_{n=0}^\infty$, в которой $r_0 \in [0.18, 0.27]$ и $r_{n+1} = \theta(\pi/2, r_n)$, сходится к r_∞ .

Заметим, что приведенные первые девять цифр дробной части иррационального числа r_∞ указаны точно.

7. Второе уточнение миноранты (часть 2)

Полученная в секции 5 оценка котангенса

$$1/x - g_0(x)x \leq \operatorname{ctg} x, \quad \text{где } g_0(x) = (3 - r_0 x^2)^{-1} \text{ и } r_0 = 0.27,$$

в результате однократного применения основного приема трансформации (в части построения минорант) порождает оценку

$$1/x - g_0^\#(x)x \leq \operatorname{ctg} x$$

Функция $g_0(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1, поэтому

$$1/x - g_1(x)x \leq \operatorname{ctg} x, \quad \text{где } g_1(x) = (3 - r_1 x^2)^{-1} \text{ и } r_1 = \theta(\pi/2, r_0).$$

Повторяя для вновь полученной оценки те же построения, имеем:

$$1/x - g_2(x)x \leq \operatorname{ctg} x, \quad \text{где } g_2(x) = (3 - r_2 x^2)^{-1} \text{ и } r_2 = \theta(\pi/2, r_1) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, для любого q_n из последовательности $\{r_n\}_{n=0}^\infty$, описанной в следствии 2, имеет место неравенство

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_n x^2} x \leq \operatorname{ctg} x,$$

а значит (секция 10, упр. 3б)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_\infty x^2} x \leq \operatorname{ctg} x.$$

Для практических целей иррациональное число r_∞ следует округлять с избытком³, в частности, на месте r_∞ могут использоваться константы 0.2171, 0.217098 и др.

²искомый корень локализован на отрезке $[0, 1]$, что позволяет найти его методом дихотомии [6] с точностью, ограниченной лишь разрядностью мантиссы

³равно “округлять с усилением“ [7]

8. Второе уточнение мажоранты

Оценка котангенса (7) вида $1/x - x/3 \leq \operatorname{ctg} x$ в результате однократной трансформации порождает неравенство

$$\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\#} x.$$

Как нетрудно убедиться,

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{\#} = -\frac{1}{12} \frac{48 - x^2}{12 - x^2} \leq -\frac{1}{3 - 0.1875x^2} \implies \operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - 0.1875x^2} x.$$

Полученная мажоранта принадлежит тому же классу $1/x - x/(3 - tx^2)$, что и уточненная миноранта. Использованная в секции 7 схема рассуждений (с очевидными модификациями) продуцирует множество оценок

$$\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - t_n x^2} x,$$

где $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность, описанная в следствии 1, в которой $t_0 = 0.1875$, а значит

$$\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - t_{\infty} x^2} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - 0.2x^2} x.$$

9. Заключение

Описанный прием трансформации оценок котангенса позволил установить два двойных неравенства, справедливых для любой пары чисел x и ω , удовлетворяющих соотношениям $0 < x \leq \omega \leq \pi/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - q_{\omega} x &\leq \operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x, & \text{где } q_{\omega} &= \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 3\omega^2}}, \text{ и} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_{\infty} x^2} x &\leq \operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - 0.2x^2} x, & \text{где } r_{\infty} &= 0.217097744\dots \end{aligned}$$

Для сравнения этих двусторонних оценок можно, например, использовать отклонения от точного значения в точке $\pi/2$, то есть значения минорант и мажорант в этой точке. Для первой оценки (при $\omega = \pi/2$) соответствующие числа есть -0.100 и $+0.113$, а для второй (при $r_{\infty} = 0.2171$) – числа -0.0008 и $+0.0099$.

Поскольку

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 3\omega^2}} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_{\infty} \omega^2} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_{\infty} x^2} x,$$

то первая из приведенных оценок допускает следующее уточнение:

$$\frac{1}{x} - q'_{\omega} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x, \quad \text{где } q'_{\omega} = \frac{1}{3 - r_{\infty} \omega^2},$$

для справки: $q'_{\omega} \approx 0.40579$ при $\omega = \pi/2$.

На полуинтервале $(0, \pi/2]$ котангенс не может принимать отрицательные значения. Учесть это обстоятельство можно за счет привлечения очевидного неравенства $\pi/2 - x \leq \operatorname{ctg} x$. При этом миноранта, скажем, $1/x - q'_{\omega} x$, преобразуется к виду

$$\min(\pi/2 - x, 1/x - q'_{\omega} x).$$

10. Математический инструментарий

В этой секции собраны вспомогательные утверждения, задействованные в основных рассуждениях и сформулированные как упражнения для начинающих математиков.

Упражнение 1. Докажите неравенство (2). (*Указание.* Рассмотрите случаи $x \in (0, \pi/2)$ и $x = \pi/2$, а также воспользуйтесь выводом

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} \geq \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \sin x,$$

а также неравенствами $\sin x < x$ и $x < \operatorname{tg} x$ – примеры 1.3 и 2.5 из [1].)

Упражнение 2. Докажите, что рекурсивная [8, 9] последовательность $\{p_n\}$, в которой $p_0 = 0$, $p_{n+1} = p_n/4 + 1/4$, является ограниченной, монотонно возрастающей и сходится к $1/3$. (*Указание.* Предварительно докажите равенство $p_n = 1/3 - 4^{-n}/3$.)

Упражнение 3. Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ сходится к числу γ . Докажите, что
(а) если для любого n выполняется условие $\gamma_n \geq A$, то $\gamma \geq A$;
(б) если для любого n выполняется условие $\gamma_n \leq A$, то $\gamma \leq A$.

Упражнение 4. Докажите неравенство (9). (*Указание.* Учтите, что $3 > 4 - 3q$ и $4 \geq 4 - q\omega^2$.)

Упражнение 5. Пусть ω – число из $(0, \pi/2]$, и $\{q_n\}$ – последовательность, члены которой определяются формулами (10). Докажите, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает. (*Указание.* Используйте метод математической индукции [10, 11].)

Упражнение 6*. Докажите, что пределом последовательности $\{q_n\}$, члены которой определяются формулами (10), является число

$$\beta = 2/(3 + \sqrt{9 - 3\omega^2}).$$

(*Указание.* Докажите существование числа $h < 1$ такого, что для любого значения параметра ω имеет место представление $c_n = \beta + \delta_n$ причём $\delta_n < h^n$, а число β есть корень уравнения $z = z/4 + 1/(4 - z\omega^2)$. *Подсказка:* $h \approx 0.85$.)

Упражнение 7. Пусть $\{\lambda_n(x)\}$ – последовательность функций $\{\lambda_n(x)\}$, члены которой определяются формулами (12) и (13). Докажите, что при каждом фиксированном x из полуинтервала $(0, \pi/2]$ последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ является монотонно убывающей и ограниченной: $1/3 \leq \lambda_n(x) < 1$. (*Указание.* Используйте метод математической индукции.)

Упражнение 8. Докажите справедливость неравенства $a_{k+1} < a_k$ для любых целых $0 < k < n$ и величин a_i , определенных формулами (15).

Упражнение 9. Докажите, что функция $\theta(x, u)$, заданная в (20) и определенная на множестве $[0, \pi/2] \times [0.18, 0.27]$, монотонно возрастает по x при каждом фиксированном u . (*Указание.* Воспользуйтесь методикой отыскания участков монотонности дифференцируемой функции [12].)

Упражнение 10. Докажите существование неподвижных точек у функций $\theta(0, u)$ и $\theta(\pi/2, u)$, определенных в секции 6. (*Указание.* Воспользуйтесь определением неподвижной точки [13, 14] и докажите, что обе функции удовлетворяют условиям Липшица [15] с константой меньшей единицы.)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. – М.: МЦНМО, 2008. – 199 с.
2. Gelfand I. M., Saul M. Trigonometry. – Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001. – 229 с.

3. Гурский И. П. *Функции и построение графиков.* – М.: Просвещение, 1968. – 215 с.
4. Каазик Ю. А. *Математический словарь.* – М.: Физматлит, 2007. – 336 с.
5. *Математическая энциклопедия, том 3 / Глав.ред. И.М.Виноградов.* – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 592 с.
6. Шарый С. П. *Курс вычислительных методов.* – Новосибирск: НГУ, 2022. – 668 с.
7. Брадис В. М. *Теория и практика вычислений.* – М.: Учпедгиз, 1935. – 280 с.
8. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности.* – М.: Наука, 1975. – 48 с.
9. Головешкин В. А., Ульянов М. В. *Теория рекурсии для программистов.* – М.: Физматлит, 2006. – 296 с.
10. Соминский И. С. *Метод математической индукции.* – М.: Физматлит, 1967. – 64 с.
11. Gunderson D.S. *Handbook of mathematical induction: Theory and applications.* – Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. – 893 с.
12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа (часть I).* – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
13. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. *Дифференциальные уравнения.* – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
14. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
15. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа, том 2.* – М.: Юрайт, 2022. – 720 с.

REFERENCES

1. Gelfand, I. M., Lvovsky, S. M. & Toom, A. L. 2008, *Trigonometry*, MCCME, Moscow, 199 p. (in Russian)
2. Gelfand, I. M., Saul M. 2001, *Trigonometry*, Birkhäuser, Boston, MA, 229 p.
3. Gursky, I. P. 1968, *Functions and graphs build*, Prosveschenie, Moscow, 215 p. (in Russian)
4. Kaazik, Y. A. 2007, *Mathematical dictionary*, Fizmatlit, Moscow, 336 p. (in Russian)
5. Vinogradov, I. M. (ed.) 1982, *Encyclopedia of mathematics*, Sov.Entsiklopediya, Moscow, 592 p. (in Russian)
6. Shary, S. P. 2022, *Course of computational methods*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 668 p. (in Russian)
7. Bradis, V. M. 1935, *Theory and practice of computing*, UchPegGiz, Moscow, 280 p. (in Russian)
8. Markushevich, A. I. 1975, *Recursion sequences*, Mir Publishers, Moscow, 48 p. (in Russian)
9. Goloveshkin, V. A., Ulyanov, M. V. 2006, *Recursion theory for programmers*, Fizmatlit, Moscow, 296 p. (in Russian)
10. Sominsky, I. S. 1975 *The Method of Mathematical Induction*, Mir Publishers, Moscow, 63 p. (in Russian)

-
11. Gunderson, D. S. 2011 *Handbook of mathematical induction: Theory and applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 893 p.
 12. Пуйн, В. А., Позняк, Е. Г. 2005, *Basics of Mathematical Analysis (part 1)*, Fizmatlit, Moscow, 648 p. (in Russian)
 13. Tikhonov, A. N., Vasil'eva, A. B., Sveshnikov, A. G. 1985, *Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 256 p.
 14. Trenogin, V. A. 2002, *The Functional Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 488 p. (in Russian)
 15. Kudriavtsev, L. D. 2022, *Course of Mathematical Analysis, vol. 2*, Iurait Publ., Moscow, 720 p. (in Russian)

Получено: 06.07.2022

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.3 + 517.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193

Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно¹

П. Н. Сорокин

Сорокин Павел Николаевич — кандидат физико-математических наук, Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).

e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Аннотация

В центре внимания статьи лежит классическая формула Фаа Ди Бруно для вычисления производных высших порядков сложной функции $F(u(x))$. Здесь приведен вариант доказательства этой формулы. Затем доказывается обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции с внутренней функцией $u(x, y)$, зависящей от двух независимых переменных. В работе представлена формула для n -ой производной сложной функции, когда аргументом внешней функции является вектор с произвольным числом компонент (функций от одной переменной). В статье также рассмотрены примеры нахождения производных высших порядков, иллюстрирующие как классическую формулу Фаа Ди Бруно, так и ее обобщения.

Ключевые слова: формула Фаа Ди Бруно, n -ая производная сложной функции многих переменных, обобщения формулы Фаа Ди Бруно для этих функций, формулы бинома и полинома Ньютона.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

П. Н. Сорокин. Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 180–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.3 + 517.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193

Some generalizations of the Faa Di Bruno formula

P. N. Sorokin

Sorokin Pavel Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Scientific Research Institute for System Analyze of the Russian Academy of Science (Moscow).

e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

¹Исследование выполнено в рамках проекта ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления» FNEF-2022-0007 (Per. № 1021060909180-7-1.2.1).

Abstract

The focus of the article is the classical Faa Di Bruno formula for computing higher-order derivatives of a complex function $F(u(x))$. Here is a version of the proof of this formula. Then we prove a generalization of the Faa Di Bruno formula to the case of a complex function with an inner function $u(x, y)$ depending on two independent variables. The paper presents a formula for the n -th derivative of a complex function, when the argument of the outer function is a vector with an arbitrary number of components (functions of one variable). The article also considers examples of finding higher-order derivatives, illustrating both the classical Faa Di Bruno formula and its generalizations.

Keywords: Faa Di Bruno's formula, n -th derivative of complex functions of several variables, generalizations of Faa Di Bruno's formula for these functions, Newton's binomial and polynomial formulas.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

P. N. Sorokin, 2023, "Some generalizations of the Faa Di Bruno formula", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 180–193.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается хорошо известная формула для нахождения производных высших порядков сложной функции, которая называется формулой Фаа Ди Бруно. Свое имя ей дал итальянский математик Франческо Фаа Ди Бруно [1, 2], хотя, по мнению некоторых исследователей [15], французский математик Луи Арбогаст открыл ее раньше [16]. Существуют различные варианты формулы Фаа Ди Бруно (например, [4, 6-8]). Историю вопроса можно проследить, например, в работах [9], [15]. Приложения формулы Фаа Ди Бруно можно посмотреть, например, в [11], [12], [14].

Мы рассмотрим и докажем несколько обобщений этой формулы для различных модификаций сложной функции, а именно, для $F(u(x), v(x))$, $F(\bar{u}(x))$, где $\bar{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_s(x))$, и $F(u(x, y))$.

2. Бином и полином Ньютона

ТЕОРЕМА 1. (Формула бинома Ньютона). Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда для любых чисел x и y имеет место

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

где числа $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, которые связаны рекуррентным соотношением

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции [10]. При $n = 0$ формула верна. Предположим ее справедливость для $n = t$. Докажем формулу для $n = t + 1$. Пользуясь рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов и предположением индукции, имеем

$$\begin{aligned}
(x+y)^{t+1} &= (x+y) \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} x^k y^{t-k} = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} x^{k+1} y^{t-k} + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} x^k y^{t-k+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t}{k-1} x^k y^{t-k+1} + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} x^k y^{t-k+1} = \sum_{k=1}^t \binom{t}{k-1} x^k y^{t-k+1} + \binom{t}{t} x^{t+1} + \\
&+ \sum_{k=1}^t \binom{t}{k} x^k y^{t-k+1} + \binom{t}{0} y^{t+1} = \binom{t}{t} x^{t+1} + \binom{t}{0} y^{t+1} + \sum_{k=1}^t \left(\binom{t}{k-1} + \binom{t}{k} \right) x^k y^{t-k+1} = \\
&= \binom{t}{0} y^{t+1} + \sum_{k=1}^t \binom{t+1}{k} x^k y^{t-k+1} + \binom{t}{t} x^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} x^k y^{t-k+1},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

ТЕОРЕМА 2. (Формула полинома Ньютона). Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда для любых чисел x_1, \dots, x_t имеем

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_t=n \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_t \leq n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_t^{k_t},$$

где числа $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_t!}$ — полиномиальные коэффициенты, $k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции [10]. При $t = 1$ формула верна. Предположим ее справедливость для $t - 1$ переменных. Докажем формулу для t переменных. По формуле бинорма Ньютона имеем

$$(x_1 + \dots + x_{t-1} + x_t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x_1 + \dots + x_{t-1})^k x_t^{n-k}.$$

По предположению индукции имеем

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{t-1})^k = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_{t-1}=k \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_{t-1} \leq k}} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_{t-1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{t-1}^{k_{t-1}}.$$

Отсюда получаем

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x_t^{n-k} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_{t-1}=k \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_{t-1} \leq k}} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_{t-1}!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{t-1}^{k_{t-1}}.$$

Учитывая, что $n - k = n - k_1 - \dots - k_{t-1} = k_t$, получаем искомое равенство. \square

3. Формула Фаа Ди Бруно

Приведем формулировку (в терминах [6]) и докажем формулу Фаа Ди Бруно:

ТЕОРЕМА 3. (Формула Фаа Ди Бруно). Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n -го порядка. Тогда для n -ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} F^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+\dots+k_n},$$

$$P_{k_1+k_2+\dots+k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным числам k_1, k_2, \dots, k_n , которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные m -го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем утверждение о том, что, применяя n раз правило дифференцирования сложной функции $G(x)$, получаем равенство вида

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{k,n} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{k,n}$ — некоторые выражения, независимые от конкретного задания функции $F(u)$ (задача 1229 в сборнике задач и упражнений по математическому анализу Б.П.Демидовича [13]).

Действительно это легко проверяется методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $G^{(1)}(x) = F^{(1)}(u) \cdot u^{(1)}(x) = A_{1,1} F^{(1)}(u)$, где $A_{1,1} = u^{(1)}(x)$ не зависит от вида $F(u)$. Пусть для производной $(m-1)$ -го порядка функции $G(x)$ справедливо равенство

$$G^{((m-1))}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} A_{k,m-1} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{k,m-1}$ — функции, не зависящие от вида $F(u)$. Докажем равенство с тем же свойством для m -ой производной функции $G(x)$. Продифференцируем предыдущее равенство:

$$G^{((m))}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(A_{k,m-1}^{(1)} \cdot F^{(k)}(u) + A_{k,m-1} \cdot F^{(k+1)}(u) \cdot u^{(1)}(x) \right) = \sum_{k=1}^m A_{k,m} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{1,m} = A_{1,m-1}^{(1)}$; $A_{k,m} = A_{k,m-1}^{(1)} + A_{k-1,m-1} \cdot u^{(1)}(x)$, $k = 2, \dots, m-1$; $A_{m,m} = A_{m-1,m-1} \cdot u^{(1)}(x)$, т.е. наша формула справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$ и $A_{k,m}$ не зависят от вида функции $F(u)$.

Для нахождения $A_{k,n}$ будем считать, что $F(u)$ и $u(x)$ — многочлены n -ой степени:

$$F(u) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}(u - u_0) + \dots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u - u_0)^n, \quad (1)$$

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

или при $u_0 = u(x_0)$:

$$u - u_0 = \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2)$$

Подставляя в (1) вместо $u - u_0$ правую часть (2), получим

$$G(x) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right) + \dots + \quad (3)$$

$$+ \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right)^n.$$

Отсюда видно, что $G(x)$ — многочлен степени n^2 имеет следующий вид:

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{G^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots + \frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!} (x - x_0)^{n^2}. \quad (4)$$

Далее, раскрывая скобки в (3) с помощью формулы полинома Ньютона (теорема 2):

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_m \leq n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m},$$

а затем сравнивая коэффициент при $(x - x_0)^n$ с соответствующим коэффициентом в формуле (4), приходим к утверждению теоремы. Действительно, имеем

$$G(x) = F(u_0) +$$

$$+ \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=1 \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq 1}} \frac{1!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} \right)^{k_1} (x - x_0)^{k_1} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} \right)^{k_n} (x - x_0)^{nk_n} +$$

$$+ \frac{F^{(2)}(u_0)}{2!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=2 \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq 2}} \frac{2!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} \right)^{k_1} (x - x_0)^{k_1} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} \right)^{k_n} (x - x_0)^{nk_n} + \dots +$$

$$+ \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} \right)^{k_1} (x - x_0)^{k_1} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} \right)^{k_n} (x - x_0)^{nk_n}.$$

Для того, чтобы степень многочлена $x - x_0$ была равна n , необходимо выполнение равенства $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, следовательно из равенства

$$\frac{G^{(n)}(x)}{n!} = \left(\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=1 \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq 1}} \frac{1!}{k_1! \dots k_n!} + \frac{F^{(2)}(u_0)}{2!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=2 \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq 2}} \frac{2!}{k_1! \dots k_n!} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n \\ 0 \leq k_1, \dots, k_n \leq n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \right) \left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x_0)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} \right)^{k_n}$$

получаем

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = n} \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} \cdot F^{(k_1 + \dots + k_n)} \cdot \left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{u^{(n)}(x)}{n!} \right)^{k_n},$$

что и требовалось доказать. \square

ПРИМЕР 6. Пользуясь формулой Фаа Ди Бруно, находим

$$G^{(1)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(1)}, \quad G^{(2)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(2)} + F^{(2)} \cdot (u^{(1)})^2,$$

$$G^{(3)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(3)} + 3 \cdot F^{(2)} \cdot u^{(1)} \cdot u^{(2)} + F^{(3)} \cdot (u^{(1)})^3,$$

$$G^{(4)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(4)} + F^{(2)} \left(4 \cdot u^{(1)} \cdot u^{(3)} + 3 \cdot (u^{(2)})^2 \right) + 6 \cdot F^{(3)} \cdot (u^{(1)})^2 \cdot u^{(2)} + F^{(4)} \cdot (u^{(1)})^4,$$

$$G^{(5)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(5)} + F^{(2)} \left(5 \cdot u^{(1)} \cdot u^{(4)} + 10 \cdot u^{(2)} \cdot u^{(3)} \right) +$$

$$+ F^{(3)} \left(10 \cdot (u^{(1)})^2 \cdot u^{(3)} + 15 \cdot u^{(1)} \cdot (u^{(2)})^2 \right) + 10 \cdot F^{(4)} \cdot (u^{(1)})^3 \cdot u^{(2)} + F^{(5)} \cdot (u^{(1)})^5.$$

Несколько примеров использования формулы можно посмотреть в [5]. Формула Фаа Ди Бруно может быть также записана в комбинаторной форме:

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $y = x(t)$ дифференцируема n раз в точке t_0 , а функция $z = f(y)$ дифференцируема n раз в точке $y_0 = x(t_0)$. Тогда сложная функция $z(t) = f(x(t))$ дифференцируема n раз в точке t_0 , причем

$$z^{(n)}(t_0) = \sum_{\delta \in \Delta} f^{(|\delta|)}(y_0) \prod_{\theta \in \delta} x^{(|\theta|)}(t_0),$$

где Δ — все разбиения множества $\{1, 2, \dots, n\}$, множество θ состоит из всех частей (блоков) разбиения $\delta \in \Delta$, $|\delta|$ — число блоков в δ , $|\theta|$ — размер блока в θ .

ПРИМЕР 7. Найдем $z^{(3)}(t) = f^{(3)}(x(t))$.

Выпишем разбиения множества $\{1, 2, 3\}$: $\delta_1 = (\{1, 2, 3\})$, $|\delta_1| = 1$, $\delta_2 = (\{1, 2\}, \{3\})$, $|\delta_2| = 2$, $\delta_3 = (\{1, 3\}, \{2\})$, $|\delta_3| = 2$, $\delta_4 = (\{1\}, \{2, 3\})$, $|\delta_4| = 2$, $\delta_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$, $|\delta_5| = 3$.

Размеры блоков в разбиениях: $\theta_1 = (\{1, 2, 3\})$, $|\theta_{11}| = 3$, $|\theta_{12}| = |\theta_{13}| = 0$, $\theta_2 = (\{1, 2\}, \{3\})$, $|\theta_{21}| = 2$, $|\theta_{22}| = 1$, $|\theta_{23}| = 0$, $\theta_3 = (\{1, 3\}, \{2\})$, $|\theta_{31}| = 2$, $|\theta_{32}| = 1$, $|\theta_{33}| = 0$, $\theta_4 = (\{1\}, \{2, 3\})$, $|\theta_{41}| = 1$, $|\theta_{42}| = 2$, $|\theta_{43}| = 0$, $\theta_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$, $|\theta_{51}| = 1$, $|\theta_{52}| = 1$, $|\theta_{53}| = 1$. Отсюда по формуле Фаа Ди Бруно (теорема 4) получаем:

$$\begin{aligned} z^{(3)}(t) &= \sum_{k=1}^5 f^{(|\delta_k|)}(x) \prod_{j=1}^3 x^{(|\theta_{kj}|)}(t) = f^{(1)}x^{(3)} + f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)} + f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)} + f^{(2)}x^{(1)}x^{(2)} + f^{(3)}(x^{(1)})^3 = \\ &= f^{(1)}x^{(3)} + 3f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)} + f^{(3)}(x^{(1)})^3. \end{aligned}$$

4. Обобщения формулы Фаа Ди Бруно

Сформулируем обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(u(x, y))$:

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $F(u)$ имеет все производные до n -го порядка, а функция $u(x, y)$ имеет все частные производные до n -го порядка. Тогда для n -го дифференциала сложной функции $G(x, y) = F(u(x, y))$ имеет место формула:

$$d^n G(x, y) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} F^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+\dots+k_n},$$

$$P_{k_1+k_2+\dots+k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\frac{du(x, y)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{d^2u(x, y)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{d^n u(x, y)}{n!} \right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным числам k_1, k_2, \dots, k_n , которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, $d^m u(x, y)$ — m -ый дифференциал функции $u(x, y)$, $F^{(m)}(u)$ — производная m -го порядка для функции $F(u)$, $m = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично классическому случаю (теорема 3), найдя n -ый дифференциал сложной функции $G(x, y) = F(u(x, y))$, получаем выражение вида

$$d^n G(x, y) = \sum_{k=1}^n B_{k,n} \cdot F^{(k)}(u(x, y)),$$

где $B_{k,n}$ — некоторые выражения, вид которых не зависит от конкретного задания функции $F(u(x, y))$.

Чтобы найти выражения $B_{k,n}$ считаем, что $F(u(x, y))$ и $u(x, y)$ — многочлены n -ой степени:

$$F(u) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}(u - u_0) + \dots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u - u_0)^n,$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{du(x_0, y_0)}{1!} + \dots + \frac{d^n u(x_0, y_0)}{n!}.$$

Определим переменные: $z = u - u_0 = u - u(x_0, y_0)$, $s = x - x_0$, $t = y - y_0$. Тогда

$$F(u) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \cdot z + \dots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \cdot z^n, \quad (5)$$

$$z = u - u_0 = \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u. \quad (6)$$

Подставим в (5) вместо z правую часть (6):

$$G(x, y) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right) + \dots + \quad (7)$$

$$+ \dots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right)^n,$$

Многочлен $G(x, y)$ имеет степень n^2 :

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + \frac{dG(x_0, y_0)}{1!} + \dots + \frac{d^n G(x_0, y_0)}{n!} + \dots + \frac{d^{n^2} G(x_0, y_0)}{(n^2)!}. \quad (8)$$

Затем, раскрывая скобки в (7) с помощью формулы полинома Ньютона (теорема 2), имеем

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= F(u_0) + \\
 &+ \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \sum_{k_1+\dots+k_n=1} \frac{1!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right)^{k_n} + \\
 &+ \frac{F^{(2)}(u_0)}{2!} \sum_{k_1+\dots+k_n=2} \frac{2!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right)^{k_n} + \\
 &\quad + \dots + \\
 &+ \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right)^{k_n}.
 \end{aligned}$$

Далее сравниваем последнюю формулу с формулой (8). Для того, чтобы порядок дифференциала функции $G(x, y)$ был равен n , необходимо выполнение равенства $k_1 + \dots + nk_n = n$, т.е.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n G(x_0, y_0)}{n!} &= \left(\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!} \sum_{k_1+\dots+k_n=1} \frac{1!}{k_1! \dots k_n!} + \dots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!} \sum_{k_1+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right) u \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial}{\partial y} \cdot t \right)^n u \right)^{k_n}.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$d^n G(x, y) = \sum_{k_1+\dots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \cdot F^{(k_1+\dots+k_n)} \cdot \left(\frac{du(x, y)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{d^2u(x, y)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{d^n u(x, y)}{n!} \right)^{k_n},$$

что и требовалось доказать. \square

Далее рассмотрим случай сложной функции вида $F(u(x), v(x))$ (приведен в [12]):

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $F(u, v)$ имеет все частные производные до n -го порядка, а функции $u(x), v(x)$ имеют все производные до n -го порядка. Тогда для n -ой производной сложной функции $F(u(x), v(x))$ имеет место формула:

$$\frac{F^{(n)}}{n!} = \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{A_1^{k_1} A_2^{k_2} \dots A_n^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \right) F(u, v),$$

где

$$A_j = \frac{u_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \quad u_j = \frac{\partial^j u(x)}{\partial x^j}, \quad v_j = \frac{\partial^j v(x)}{\partial x^j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

ПРИМЕР 8.

$$\begin{aligned}
 F^{(1)} &= (A_1)F, \quad F^{(2)} = (2A_2 + A_1^2)F, \quad F^{(3)} = (6A_3 + 6A_2A_1 + A_1^3)F, \\
 F^{(4)} &= (24A_4 + 24A_3A_1 + 12A_2^2 + 12A_2A_1 + A_1^4)F,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\partial u(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \quad A_2 = \frac{\partial^2 u(x)}{2\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2 v(x)}{2\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \\
 A_3 &= \frac{\partial^3 u(x)}{6\partial x^3} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^3 v(x)}{6\partial x^3} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \quad A_4 = \frac{\partial^4 u(x)}{24\partial x^4} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^4 v(x)}{24\partial x^4} \cdot \frac{\partial}{\partial v}.
 \end{aligned}$$

Далее рассмотрим обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(\bar{u}(x))$, где $\bar{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_s(x))$ [3]:

ТЕОРЕМА 7. Пусть $G(x) = F(\bar{u}(x))$, $\bar{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до n -го порядка, а функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)$ имеют все производные до n -го порядка. Тогда для n -го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:

$$d^n G(x) = \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\bar{u})}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2} \dots \partial u_s^{p_s}} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} \dots \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},$$

где суммирование ведется по целочисленным решениям следующих диофантовых уравнений:

$$\sum_n : k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n, \\ \sum_{k_1} : a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1s} = k_1, \\ \sum_{k_2} : a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2s} = k_2, \\ \dots \\ \sum_{k_n} : a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{ns} = k_n,$$

$d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, k — порядок промежуточной производной, p_j — порядок частной производной по u_j . Параметры k, k_j, p_j, a_{ij} связаны соотношениями:

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}, \quad j = \overline{1, s}, \\ k = p_1 + p_2 + \dots + p_s = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Классическую формулу Фаа ди Бруно (теорема 3) можно переписать в следующем виде:

$$F_x^{(n)} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{n!(\partial_u u^{(1)})^{k_1} (\partial_u u^{(2)})^{k_2} \dots (\partial_u u^{(n)})^{k_n} F(u)}{k_1! k_2! \dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}}.$$

Здесь $\partial_u = \partial/\partial u$ — дифференциальный оператор, $\partial_u^i = \partial^i/\partial u^i$, а с учетом $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ имеем $\partial^k/\partial u^k = \partial^k/\partial u^{k_1+k_2+\dots+k_n}$.

Производные $F_x^{(i)}, i = 1, \dots, n$ являются функциями с возрастающим числом аргументов:

$$F_x^{(1)} = F_x^{(1)}(u, u^{(1)}), F_x^{(2)} = F_x^{(2)}(u, u^{(1)}, u^{(2)}), \dots, F_x^{(n)} = F_x^{(n)}(u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}).$$

Найдем производные $F_x^{(i)}, i = 1, 2, 3, \dots$, воспользовавшись формулой для первой производной сложной функции с произвольным числом аргументов:

$$F_x^{(1)} = (\partial_u u^{(1)})F, \\ F_x^{(2)} = (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)})F_x^{(1)} = [(\partial_u u^{(1)})^2 + \partial_u u^{(2)}]F,$$

$$\begin{aligned}
F_x^{(3)} &= (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)} + \partial_{u^{(2)}} u^{(3)}) F_x^{(2)} = [(\partial_u u^{(1)})^3 + 3\partial_u u^{(1)} \partial_u u^{(2)} + \partial_u u^{(3)}] F, \\
F_x^{(4)} &= (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)} + \partial_{u^{(2)}} u^{(3)} + \partial_{u^{(3)}} u^{(4)}) F_x^{(3)} = \\
&= [(\partial_u u^{(1)})^4 + 6(\partial_u u^{(1)})^2 \partial_u u^{(2)} + 4\partial_u u^{(1)} \partial_u u^{(3)} + 3(\partial_u u^{(2)})^2 + \partial_u u^{(4)}] F, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\bar{u}(x)$ является s -мерным вектором

$$\bar{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)),$$

соответственно

$$\partial_u = \frac{\partial}{\partial \bar{u}(x)} = \left[\frac{\partial}{\partial u_1(x)}, \frac{\partial}{\partial u_2(x)}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_s(x)} \right]$$

— векторный дифференциальный оператор. Для сложной функции $F(\bar{u}(x))$ определены все необходимые производные. Производные $F_x^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ получаем последовательным применением правила первой производной сложной функции с произвольным числом аргументов, подставляя все предыдущие производные:

$$\begin{aligned}
F_x^{(1)} &= (\partial_u \bar{u}^{(1)}) F, \\
F_x^{(2)} &= (\partial_u \bar{u}^{(1)} + \partial_{\bar{u}^{(1)}} \bar{u}^{(2)}) F_x^{(1)} = [(\partial_u \bar{u}^{(1)})^2 + \partial_u \bar{u}^{(2)}] F, \\
F_x^{(3)} &= (\partial_u \bar{u}^{(1)} + \partial_{\bar{u}^{(1)}} \bar{u}^{(2)} + \partial_{\bar{u}^{(2)}} \bar{u}^{(3)}) F_x^{(2)} = [(\partial_u \bar{u}^{(1)})^3 + 3\partial_u \bar{u}^{(1)} \partial_u \bar{u}^{(2)} + \partial_u \bar{u}^{(3)}] F, \\
F_x^{(4)} &= (\partial_u \bar{u}^{(1)} + \partial_{\bar{u}^{(1)}} \bar{u}^{(2)} + \partial_{\bar{u}^{(2)}} \bar{u}^{(3)} + \partial_{\bar{u}^{(3)}} \bar{u}^{(4)}) F_x^{(3)} = \\
&= [(\partial_u \bar{u}^{(1)})^4 + 6(\partial_u \bar{u}^{(1)})^2 \partial_u \bar{u}^{(2)} + 4\partial_u \bar{u}^{(1)} \partial_u \bar{u}^{(3)} + 3(\partial_u \bar{u}^{(2)})^2 + \partial_u \bar{u}^{(4)}] F, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Последовательность вывода производных в классической формуле Фаа ди Бруно тождественна последовательности вывода производных в векторном случае. Они имеют одинаковую операторную форму, только в первом случае операторы скалярные, а во втором векторы. Поэтому их общую форму можно записать в следующем виде:

$$F_x^{(n)} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{n!(\partial_u \bar{u}^{(1)})^{k_1} (\partial_u \bar{u}^{(2)})^{k_2} \dots (\partial_u \bar{u}^{(n)})^{k_n} F(\bar{u})}{k_1! k_2! \dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}}.$$

Данная формула является векторной формой n -ой производной сложной функции, частные производные и нелинейные функции $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ явно не показаны. Чтобы получить явный вид формулы для n -ой производной сложной функции $F(\bar{u}(x))$ необходимо возвести полиномы $(\partial_u \bar{u}^{(i)})^{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ в соответствующие степени, а затем перемножить их. Для i -го полинома, воспользовавшись формулой полинома Ньютона (теорема 2), имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_{u_1} u_1^{(i)} + \partial_{u_2} u_2^{(i)} + \dots + \partial_{u_s} u_s^{(i)} \right)^{k_i} = \\
&= \sum_{a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{is}=k_i} \frac{k_i!}{a_{i1}! a_{i2}! \dots a_{is}!} \left(\partial_{u_1} u_1^{(i)} \right)^{a_{i1}} \left(\partial_{u_2} u_2^{(i)} \right)^{a_{i2}} \dots \left(\partial_{u_s} u_s^{(i)} \right)^{a_{is}},
\end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным решениям диофантова уравнения $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{is} = k_i$. Перемножив все n полиномов, и введя обозначения

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} &\equiv \sum_n, \\
\sum_{a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1s}=k_1} &\equiv \sum_{k_1}, \\
\sum_{a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2s}=k_2} &\equiv \sum_{k_2}, \\
&\dots \\
\sum_{a_{n1}+a_{n2}+\dots+a_{ns}=k_n} &\equiv \sum_{k_n},
\end{aligned}$$

в результате получим

$$\begin{aligned}
F_x^{(n)} &= \sum_n \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}} \times \\
&\times \sum_{k_1} \frac{k_1!}{a_{11}!a_{12}!\dots a_{1s}!} \cdot \frac{\partial^{k_1} F(\bar{u})}{\partial u_1^{a_{11}} \partial u_2^{a_{12}} \dots \partial u_s^{a_{1s}}} \cdot \left(u_1^{(1)}\right)^{a_{11}} \left(u_2^{(1)}\right)^{a_{12}} \dots \left(u_s^{(1)}\right)^{a_{1s}} \times \\
&\times \sum_{k_2} \frac{k_2!}{a_{21}!a_{22}!\dots a_{2s}!} \cdot \frac{\partial^{k_2} F(\bar{u})}{\partial u_1^{a_{21}} \partial u_2^{a_{22}} \dots \partial u_s^{a_{2s}}} \cdot \left(u_1^{(2)}\right)^{a_{21}} \left(u_2^{(2)}\right)^{a_{22}} \dots \left(u_s^{(2)}\right)^{a_{2s}} \times \\
&\times \dots \times \sum_{k_n} \frac{k_n!}{a_{n1}!a_{n2}!\dots a_{ns}!} \cdot \frac{\partial^{k_n} F(\bar{u})}{\partial u_1^{a_{n1}} \partial u_2^{a_{n2}} \dots \partial u_s^{a_{ns}}} \cdot \left(u_1^{(n)}\right)^{a_{n1}} \left(u_2^{(n)}\right)^{a_{n2}} \dots \left(u_s^{(n)}\right)^{a_{ns}}.
\end{aligned}$$

Далее, положив $p_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$, $j = 1, 2, \dots, s$, имеем

$$\begin{aligned}
F_x^{(n)} &= \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \frac{n!k_1!k_2!\dots k_n!}{k_1!k_2!\dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} a_{11}!a_{12}!\dots a_{1s}!\dots a_{n1}!a_{n2}!\dots a_{ns}!} \times \\
&\times \frac{\partial^k F(\bar{u})}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2} \dots \partial u_s^{p_s}} \left(u_1^{(1)}\right)^{a_{11}} \left(u_2^{(1)}\right)^{a_{12}} \dots \left(u_s^{(1)}\right)^{a_{1s}} \dots \left(u_1^{(n)}\right)^{a_{n1}} \left(u_2^{(n)}\right)^{a_{n2}} \dots \left(u_s^{(n)}\right)^{a_{ns}} = \\
&= \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\bar{u})}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2} \dots \partial u_s^{p_s}} \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^n \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} \dots \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

ПРИМЕР 9.

$F(u_1(x), u_2(x)) = e^{u_1(x)u_2(x)}$. Найми $F^{(3)}$.

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = \sum_3 \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{6}{\prod_{i=1}^3 (i!)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^2 a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2}} \prod_{i=1}^3 \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}},$$

$$\sum_3 : k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3, \quad \sum_{k_1} : a_{11} + a_{12} = k_1, \quad \sum_{k_2} : a_{21} + a_{22} = k_2, \quad \sum_{k_3} : a_{31} + a_{32} = k_3,$$

$$p_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \quad p_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \quad p_1 + p_2 = k = k_1 + k_2 + k_3.$$

Подставляя значения параметров, получаем:

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = e^{u_1 u_2} \cdot [u_2^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3(2u_2 + u_1 u_2^2) \left(u_1^{(1)}\right)^2 u_2^{(1)} + 3(2u_1 + u_1^2 u_2) u_1^{(1)} \left(u_2^{(1)}\right)^2 + \\ + u_1^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3u_2^2 u_1^{(1)} u_1^{(2)} + 3(1 + u_1 u_2)(u_1^{(1)} u_2^{(2)} + u_1^{(2)} u_2^{(1)}) + u_2 u_1^{(3)} + u_1 u_2^{(3)}].$$

5. Заключение

Заметим, что формула Фаа Ди Бруно, ее модификации и обобщения очень полезны при изучении дифференциального исчисления функций в математическом анализе, а также при формировании комбинаторного мышления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faá di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzione // Annali di Scienze Matematiche e Fisiche. 1855. 6. P. 479-480.
2. Faá di Bruno F. Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel // Quart. J. Math. 1857. 1. P. 359-360.
3. Mishkov R. L. Generalization of the formula of Faá di Bruno for a composite function with a vector argument // Internat. J. Math. & Math. Sci. 2000. Vol. 24, № 7. P. 481-491.
4. Roman S. The formula of Faá di Bruno // Amer. Math. Monthly. 1980. Vol. 87, №10. P. 805-809.
5. Дворянинов С. В., Сильванович М. И. О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Математическое образование, 2009, 1 (49), 22-26.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.
7. Bell E. T. Partition polynomials // Ann. Math. 1927. Vol. 29. P. 38-46.
8. Comtet L. Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.
9. Johnson W. P. The curious history of Faá di Bruno's formula // Amer. Math. Monthly. 2002. Vol. 109. P. 217-234.
10. Чубариков В. Н. Обобщенная формула биннома Ньютона и формулы суммирования // Чебышевский сборник, 2020, 21, № 4. 270-301.

11. Constantine G. M., Savits T. H. A multivariate Faá di Bruno formula with applications // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1996. vol. 348, № 2. P. 503-520.
12. Шабат А. Б., Эфендиев М. Х. О приложениях формулы Фаа-Ди-Бруно // *Уфимский математический журнал*, 2017, 9, № 3. 132–137.
13. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учебное пособие. 14 издание, испр. — М.: Изд-во Московского университета, 1998. 624 с.
14. Frabetti A., Manchon D. Five interpretation of Faá di Bruno's formula, 2014, <https://arxiv.org/pdf/1402.5551.pdf>.
15. Craik A. D. D. Prehistory of Faá di Bruno's formula // *Amer. Math. Monthly*, 2005. vol. 112, № 2, P. 119–130.
16. Arbogast L. F. A. *Du Calcul des Dérivations*, Levrault, Strasbourg, 1800.

REFERENCES

1. Faá di Bruno F. 1855, "Sullo sviluppo delle funzioni", *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, 6, pp. 479-480.
2. Faá di Bruno F. 1857, "Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel", *Quart. J. Math.*, 1, pp. 359-360.
3. Mishkov R. L. 2000, "Generalization of the formula of Faá di Bruno for a composite function with a vector argument", *Internat. J. Math., Math. Sci.*, vol. 24, no. 7, pp. 481-491.
4. Roman S. 1980, "The formula of Faá di Bruno", *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, no. 10, pp. 805-809.
5. Dvoryaninov S. V., Silvanovich M. I. 2009, "On the Faá di Bruno formula for derivatives of a complex function", *Matematicheskoye obrazovaniye*, 1 (49), pp. 22-26.
6. Arhipov G. I., Chubarikov V. N., Sadovnichiy V. A. 2003, *Lectures on mathematical analysis*. M. — Drofa, pp. 640.
7. Bell E. T. 1927, "Partition polynomials", *Ann. Math.*, vol. 29, pp. 38-46.
8. Comtet L. 1974, *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
9. Johnson W. P. 2002, "The curious history of Faá di Bruno's formula", *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, pp. 217-234.
10. Chubarikov V. N. 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulas", *Chebyshevskii Sbornik*, 21 (4), pp. 270-301.
11. Constantine G. M., Savits T. H., 1996, "A multivariate Faá di Bruno formula with applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 348, no. 2, pp. 503-520.
12. Shabat A. B., Efendiev M. Kh., 2017, "Applications of the Faá di Bruno formula", *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal*, vol. 9, no. 3, pp. 132–137.
13. Demidovich B. P. 1998, *Sbornik zadach i uprazhneniy po matematicheskomu analizu*. Uchebnoye posobiye. 14 izdaniye, ispr. M. — Izd-vo Moskovskogo universiteta, pp. 624.

-
14. Frabetti A., Manchon D., 2014, “Five interpretation of Faá di Bruno’s formula”, <https://arxiv.org/pdf/1402.5551.pdf>.
 15. Craik A.D.D., 2005, “Prehistory of Faá di Bruno’s formula”, *Amer. Math. Monthly*, vol. 112, no 2, pp. 119–130.
 16. Arbogast L. F. A., 1800, “Du Calcul des Dérivations”, Levrault, Strasbourg.

Получено: 30.08.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207

О перечислении выпуклых RR -многогранников

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова; Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).

e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

Задача перечисления класса многогранников с заданными условиями симметрии — одна из важных задач современной теории выпуклых многогранников. Известно много работ, в которых ставится задача о полном перечислении многогранников с условиями симметрии. Если ограничиться многогранниками в E^3 , то примерами таких многогранников являются правильные, правильные звёздчатые, Архимедовы многогранники, класс Джонсона-Залгаллера, многогранники с условными рёбрами и многогранники с паркетными гранями. Конкретно, условия симметрии для класса замкнутых выпуклых правильных многогранников состоят в условиях правильности равных граней многогранника и однотипности его вершин. Для многогранников Джонсона-Залгаллера — в условии правильногранности замкнутого выпуклого многогранника. Известно, что последний класс помимо правильных и архимедовых многогранников, бесконечной серии призм и антипризм, содержит 92 многогранника с правильными гранями.

Ранее автором были найдены новые классы многогранников (например, так называемые многогранники, сильно симметричные относительно вращения); они обладают такой симметрией элементов, при которой условия правильности граней не предполагаются заранее. При этом была доказана полнота списков рассмотренных классов.

Возвращаясь к таким условиям симметрии, которые включают условия правильности граней, автором был введён класс замкнутых выпуклых RR -многогранников (от слов rhombic и regular). Коротко этот класс определяется следующими условиями симметрии. Грани RR -многогранника можно разбить на два непустых непересекающихся множества — множество равных симметричных ромбических звёзд, не имеющих общих рёбер, и множество правильных граней.

При этом вершина V называется ромбической, если гранная звезда $Star(V)$ вершины V многогранника состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V . Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами. Примером RR -многогранника является удлинённый ромбододекаэдр.

В настоящей работе приводится изменённое доказательство теоремы о существовании и единственности замкнутого выпуклого RR -многогранника, связанного с икосаэдром и доказано существование двадцать четвёртого RR -многогранника с треугольными гранями и с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами. Доказаны также теоремы о несуществовании некоторых многогранников с правильными гранями различного типа, "близких" к RR -многогранникам.

Ключевые слова: условия симметрии, симметричные ромбические вершины, RR -многогранник, звезда ромбической вершины

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

В. И. Субботин. О перечислении выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 194–207.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207

On the enumeration of convex RR -polyhedra

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Platov South Russian State Polytechnic University; Don State Agrarian University (Novocherkassk).

e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

The problem of enumerating a class of polyhedra with given symmetry conditions is one of the important problems of the modern theory of convex polyhedra. There are many works in which the problem of a complete enumeration of polyhedra with symmetry conditions is posed. If we limit ourselves to polyhedra in E^3 , then examples of such polyhedra are regular, regular stellate, Archimedean polyhedra, the Johnson-Zalgaller class, polyhedra with conditional edges, and polyhedra with parquet faces. Specifically, the symmetry conditions for the class of closed convex regular polyhedra consist in the conditions that the polyhedron's equal faces are regular and its vertices are of the same type. For Johnson-Zalgaller polyhedra — under the condition that the faces of a closed convex polyhedrons are regular. It is known that the last class, in addition to regular and Archimedean polyhedra, is an infinite series prisms and antiprisms, contains 92 polyhedra with regular faces.

Previously, the author found new classes of polyhedra (for example, the so-called polyhedra that are strongly symmetric with respect to rotation); they have such a symmetry of elements in which the conditions for the regularity of the faces are not presupposed. At the same time, the completeness of the lists of the considered classes was proven.

Returning to such symmetry conditions, which include the conditions of regularity of faces, the author introduced a class of closed convex RR -polytopes (from the words rhombic and regular). Briefly, this class is defined by the following symmetry conditions. The faces of an RR -polytope can be divided into two non-empty disjoint sets — a set of equal symmetrical rhombic stars that do not have common edges, and a set of regular faces.

Moreover, a vertex V is called rhombic if the faceted star $Star(V)$ of a vertex V of the polyhedron consists of n equal and identically spaced rhombuses (not squares) having a common vertex V . If the vertex V belongs to the rotation axis of order n of the star $Star(V)$, then V is called symmetric. A symmetric rhombic vertex V is called obtuse if the rhombuses of the star $Star(V)$ at the vertex V meet at their obtuse angles. An example of a RR -polyhedron is the elongated rhombic dodecahedron.

This paper provides a modified proof of the theorem on the existence and uniqueness of a closed convex RR -polyhedron associated with the icosahedron and proves the existence of a twenty-fourth RR -polyhedron with triangular faces and four obtuse rhombic vertices. Theorems on the non-existence of certain polyhedra with regular faces of various types, “close” to RR -polytopes, have also been proven.

Keywords: symmetry conditions, rhombic vertices, RR -polyhedron, rhombic vertex star

Bibliography: 28 titles.

For citation:

V. I. Subbotin, 2023, “On the enumeration of convex RR -polyhedra”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 194–207.

1. Введение

Многие современные работы посвящены полному описанию классов многогранников с заданными условиями симметрии (см., например, [1] – [14]). Под "условиями симметрии" понимаются, в частности, условия правильности граней, условия транзитивности группы симметрии, действующей на элементах многогранника, и другие. Хотя сам этот термин практически не употреблялся, но его использование позволяет смотреть на работы в этом направлении с единой точки зрения.

В дальнейшем удобно разделить условия симметрии на жёсткие и нежёсткие. *Жёсткими* можно назвать такие условия, что все многогранники с этими условиями могут быть перечислены с точностью до подобия, даже если список многогранников бесконечен. А те условия, задание которых даёт по крайней мере комбинаторное перечисление класса многогранников, но не с точностью до подобия, будем называть *нежёсткими*. Например, класс правильногранных замкнутых выпуклых многогранников в E^3 , изученный в [11] и [12], определяется жёсткими условиями симметрии. В [12] было доказано, что эмпирически найденные многогранники работы [11] исчерпывают класс всех замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с правильными гранями.

Нежёсткие условия симметрии можно найти, например, в работе автора [15], в которой найдены все многогранники в E^3 , *сильно симметричные относительно вращения граней*.

В работе автора [16], в которой продолжена тема влияния условий симметрии на геометрию выпуклых многогранников, в частности был определён класс симметричных многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами—так называемых *RR*-многогранников. Также, в [16] было дано доказательство существования двух *RR*-многогранников с двумя ромбическими вершинами: 24-гранника и 20-гранника. У обоих этих многогранников имеются зеркальные оси симметрии, 8-го и 10-го порядка соответственно.

Ромбическая вершина — это такая вершина V , звезда $Star(V)$ ("ромбическая звезда") граней которой состоит из n равных и одинаково расположенных относительно V ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V .

Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V (а также и $Star(V)$) называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами. Предполагается, что ромбы различных ромбических звёзд не имеют общих сторон, но могут иметь общие вершины. В последнем случае ромбические вершины (или звёзды вершин) называются *неизолированными*.

Определение *RR*-многогранника можно дать в следующем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *RR*-многогранником (от слов *rhombic* и *regular*), если множество его граней состоит из двух непустых непересекающихся множеств — множества равных симметричных ромбических звёзд, не имеющих общих рёбер, и множества правильных граней.*

Таким образом, *RR*-многогранники являются как бы правильногранниками с остроугольными или тупоугольными ромбическими вершинами. *RR*-многогранником с остроугольными ромбическими вершинами является, например, известный в кристаллографии удлинённый ромбододекаэдр.

Для краткости, *RR*-многогранники, у которых все правильные грани одного типа, называются *RR*-многогранниками первого типа. Если правильные грани различного типа — *RR*-многогранниками второго типа.

В [18]-[20] найден список из двадцати трёх *RR*-многогранников первого типа как с тупоугольными, так и с остроугольными ромбическими вершинами. Таким образом, условия симметрии для *RR*-многогранников первого типа являются жёсткими.

В работе [21] найдены пятьдесят четыре составных RR -многогранника второго типа и доказана полнота этого списка. Таким образом, условия симметрии для составных RR -многогранников второго типа являются жёсткими.

Существуют также несоставные RR -многогранники второго типа — некоторые из них найдены в работе [22].

В настоящей работе дано изменённое доказательство теоремы из [19] о существовании и единственности замкнутого выпуклого RR -многогранника с треугольными правильными гранями, связанного с икосаэдром.

Также, в дополнение доказательства полноты списка из двадцати трёх RR -многогранников, доказано существование двадцать четвёртого, не замеченного ранее автором, RR -многогранника первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами и треугольными гранями.

Для решения задачи перечисления несоставных RR -многогранников второго типа необходимо убедиться, что некоторые многогранники не могут принадлежать этому классу. Поэтому, в настоящей работе будет доказана невозможность некоторых RR -многогранников с правильными гранями различного вида, хотя рассматриваемые многогранники и будут в уточнённом ниже смысле "близки" к RR -многогранникам.

2. О существовании и единственности RR -многогранника первого типа, связанного с икосаэдром

Те многогранники, которые могут быть получены из некоторого известного многогранника M удалением некоторых его граней и (или) добавлением новых граней и, возможно, последующим изгибанием естественно называть *связанными с M* .

Здесь будет дано изменённое и подробное доказательство существования и единственности RR -многогранника с правильными треугольными гранями из [19], который получается преобразованием икосаэдра.

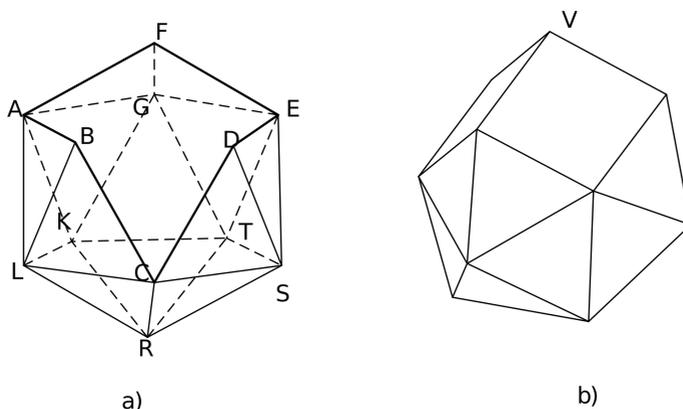


Рис. 1: К доказательству теоремы 1

Напомним это преобразование.

Удалим одну из треугольных граней икосаэдра, а также три грани, соседние с ней по ребру икосаэдра. Получим многогранник M с треугольными гранями, ограниченный замкнутой ломаной $ABCDEF$ (Рис.1, а). Обозначим эту ломаную Γ . Плоский угол между звеньями BA и BC ломаной, а также углы, эквивалентные ему относительно оси вращения третьего порядка многогранника M , перпендикулярной грани RTK , обозначим α . Углы между звеньями CB и CD и им эквивалентные, обозначим β .

ТЕОРЕМА 1. *Существует RR -многогранник с девятнадцатью гранями, связанный с икосаэдром и имеющий одну тупоугольную вершину.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для того, чтобы путём присоединения ромбов к граничной ломаной Γ достроить многогранник M до RR -многогранника с трёхгранной ромбической вершиной, должно выполняться условие: $\alpha = \beta$. Найденная в [19] связь углов α и β имеет вид:

$$\begin{aligned} \cos \beta = \cos^2 \theta + \\ + \sin^2 \theta \cos \left(2 \operatorname{sign} \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \arccos \frac{1 + (1 - \cos \theta) (2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)}{\sin \theta \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \right. \\ \left. + \arccos \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где:

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Формула (1) даёт необходимую связь величин углов α и β . Она показывает, что при непрерывном изменении угла α непрерывно будет изменяться и угол β .

Докажем, что при некотором изгибании поверхности с краем к краю Γ поверхности на рисунке 1, а) возможно присоединение ромбической звезды, то есть существует RR -многогранник с ромбической вершиной V , рисунок 1, б).

Независимо от уравнения (1) покажем, что при уменьшении всех трёх углов α углы β будут необходимо возрастать.

Рассмотрим боковую поверхность 5-угольной пирамиды $SCDETR$. Заметим, что при сближении вершин C и E этой поверхности угол α будет уменьшаться. В силу леммы Коши, двугранные углы при рёбрах SC и SE будут при этом увеличиваться, а углы при рёбрах SR и ST будут уменьшаться. Будем уменьшать все три угла α при вершинах B, D, F на одну и ту же величину, то есть сохраняя симметрию относительно оси вращения 3-го порядка. При этом, двугранные углы при рёбрах SC и SE и им эквивалентных будут увеличиваться. Двугранный угол при ребре CR и ему эквивалентных не может уменьшиться, что видим, применяя лемму Коши к 5-гранному углу с вершиной R .

Как известно, если при деформации выпуклого многогранного угла, сохраняющей его выпуклость и неизменность его граней кроме одной грани, (обозначим её f), двугранные углы между неизменными гранями не убывают и хотя бы один из них возрастает, то плоский угол грани f возрастает. Поэтому угол между граничными рёбрами CB и CD возрастает; то же верно и для двух пар рёбер, эквивалентных этой паре. При сохранении выпуклости $\min \alpha = \frac{\pi}{3}$ достигается при распрямлении двугранных углов при рёбрах CL, CS, CR . При этом распрямлении $\max \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Положив в формуле (1) $\beta = \alpha$ и решая с помощью компьютерных вычислений полученное уравнение относительно α , получим приближённое значение тупого угла ромба в градусах: $\alpha \approx 91,4397^\circ$.

Теорема 1 доказана.

3. Многогранник, связанный с правильным тетраэдром

В следующей теореме 2 прямым построением доказано существование RR -многогранника первого типа с двадцатью восемью гранями.

ТЕОРЕМА 2. *Существует RR -многогранник первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами, имеющий тетраэдральную симметрию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим правильный тетраэдр $VTWU$ с ребром длины 2, рисунок 2, а). На каждой грани этого тетраэдра надстроим четыре тетраэдра, равные $VTWU$. От каждого из надстроенных тетраэдров отсечём тетраэдры с единичными рёбрами так, что на гранях тетраэдра $VTWU$ окажутся построенными усечённые тетраэдры, два из которых, $TVWCDO$ и $UVWFEG$, изображены на рисунке 2, а).

Пусть WV одно из рёбер полученного невыпуклого многогранника M , общее для двух усечённых тетраэдров. Найдём величину плоского угла \widehat{CWE} и равного ему угла \widehat{OVF} , которые обозначим λ . Рассмотрим трёхгранный угол \widehat{WCVU} , для которого имеем:

$$\cos \lambda = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos \widehat{\phi}, \tag{2}$$

где $\widehat{\phi}$ — тупой двугранный угол с ребром WV . Так как двугранный угол тетраэдра равен $\arccos \frac{1}{3}$, то из рисунка 2, а) видим: $\widehat{\phi} = 2\pi - 3\arccos \frac{1}{3}$. Поэтому из (2) находим: $\cos \lambda = 0,25 + 0,75 \cos \widehat{\phi} \approx 0,5 + 0,75 \cos 148,4136619^\circ \approx -0,388888$, $\lambda \approx 112,88538^\circ$.

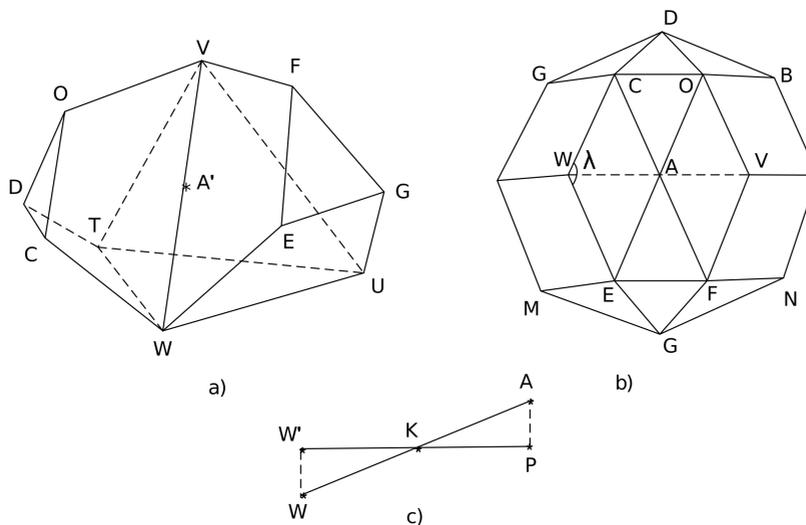


Рис. 2: К доказательству теоремы 2

Из построения следует, что каждая из граней — равнобедренных трапеций — $COVW$ и $FEWV$ составлена из трёх правильных треугольников, два из которых имеют общую вершину A' в середине ребра WV .

Рассмотрим прямоугольник $COFE$. Обозначим α равные углы, которые треугольники COA' и FEA' составляют с плоскостью прямоугольника $COFE$. Повернём треугольники COA' и FEA' около рёбер CO и FE на угол 2α . В результате поворота получим два правильных треугольника COA и FEA с общей вершиной, которую обозначим A . Очевидно, A' является проекцией точки A на ребро WV .

Покажем, что 4-угольник $WCAE$ является ромбом, рисунок 2, б).

Проведём плоскость (π) , содержащую прямоугольник $COFE$. Обозначим W' и P проекции точек соответственно W и A на плоскость (π) . Пусть K — середина отрезка CE . Имеем: $|W'K| = |KP|$, $|WW'| = |AP|$. Следовательно, отрезок AW пересекает отрезок $W'P$ в точке K , рисунок 2, с); значит, отрезки CE и WA пересекаются в точке K . Поэтому четыре точки C, E, W, A принадлежат одной плоскости. Так как 4-угольник $WCAE$ равносторонний, то он является ромбом.

Точно так же, 4-угольник $AOVF$ является ромбом.

Проводя такие же рассуждения для остальных пяти рёбер многогранника M , являющихся общим ребром пар трапециевидных граней, получаем RR -многогранник первого типа с правильными треугольными гранями и с четырьмя ромбическими вершинами V, T, W, U . В каждой из этих вершин ромбы сходятся своими тупыми углами $\lambda \approx 112,88538^\circ$.

Очевидно, построенный RR -многогранник имеет тетраэдральную симметрию и двадцать восемь граней, рисунок 2, б).

Теорема 2 доказана.

4. Многогранники, близкие к RR -многогранникам

Отметим, что приведённые ниже три теоремы, в частности имеют отношение к вопросу, поставленному в [12]: "допускает ли конкретная гомеоморфная кругу многогранная выпуклая поверхность такие изгибания, при которых сохраняется ее выпуклость и твердость граней? Какие признаки могут подтвердить такую неизгибаемость, если недостаточно леммы Коши?"

Ниже всюду под *изгибанием* многогранной поверхности Φ в классе выпуклых поверхностей будем понимать любую многогранную поверхность Φ' , полученную из Φ изменением некоторых или всех двугранных углов между гранями Φ при неизменности (твёрдости) граней. При этом, все рассматриваемые изгибания предполагают сохранение симметрии изгибаемой многогранной поверхности. Иногда такие изгибания, сохраняющие симметрию многогранной поверхности с краем, будем называть S -изгибаниями.

1. Многогранник, связанный с плосконосом кубом.

Рассмотрим плосконосый куб \widehat{K} . Пусть $F \in \widehat{K}$ — некоторая квадратная грань. Звезда $Star(F)$ состоит из четырёх правильных треугольников $T_i, i = 1, \dots, 4$. Построим правильную 4-угольную пирамиду Π с основанием F так, чтобы каждая боковая грань G_i пирамиды находилась в одной плоскости с соответствующим треугольником T_i . Пусть L_4 — ось вращения куба \widehat{K} , проходящая через вершину построенной пирамиды и центр квадрата Q , противоположного грани F . Плоские 4-угольники $T_i \cup G_i$ не будут ромбами для любого i . Действительно, в правильной 4-угольной пирамиде с правильными боковыми гранями двугранный угол боковых граней с квадратным основанием $\approx 54,7^\circ$, а двугранный угол треугольной грани плосконосого куба с его квадратной гранью $\approx 142,9^\circ$. Поэтому угол $\alpha \approx 162,4^\circ$, где α — двугранный угол треугольной грани 4-угольной пирамиды с соседним по ребру треугольником T_i . Таким образом, α незначительно отличается от развёрнутого угла.

Заметим, что именно это, не слишком большое расхождение α с развёрнутым углом, даёт основание предположению о существовании RR -многогранника, связанного с плосконосом кубом. При этом, материальная модель предполагаемого RR -многогранника может быть построена.

Удалим построенную пирамиду Π , одну квадратную грань F в \widehat{K} и четыре треугольные грани T_i , которые имеют с удалённой квадратной гранью общее ребро. Оставшуюся после такого удаления граней часть многогранной поверхности плосконосого куба \widehat{K} обозначим \widetilde{K} ,

рисунок 3, а).

Пусть \tilde{K} допускает такое изгибание, что ось L_4 при этом сохраняется, а двугранные углы при ребре AB , рисунок 3,а) и эквивалентных ему относительно оси L_4 изменяются. Пусть в результате такого изгибания получена поверхность \tilde{K}' . Тогда выпуклая оболочка $\text{conv } \tilde{K}'$ — выпуклый многогранник, у которого вместо четырёх треугольных граней T_i будут новые треугольники, \tilde{T}_i , а вместо грани F — новая квадратная грань \tilde{F} . Построим правильную четырёхугольную пирамиду \tilde{P} с основанием \tilde{F} . Пусть вершина пирамиды \tilde{P} является 4-ромбической, то есть $\tilde{T}_i \cup \tilde{G}_i$, $i = 1, \dots, 4$, являются ромбами с общей вершиной в вершине пирамиды \tilde{P} . Здесь \tilde{G}_i — боковые грани пирамиды \tilde{P} . Таким образом, в результате такого изгибания и последующего построения пирамиды \tilde{P} , мы должны получить RR -многогранник $\tilde{K}' \cup \tilde{T}_i \cup \tilde{G}_i$ с одной симметричной 4-ромбической вершиной.

Хотя материальная модель предполагаемого RR -многогранника $\tilde{K}' \cup \tilde{T}_i \cup \tilde{G}_i$ легко строится, но далее будет показано, что такой многогранник не существует.

ТЕОРЕМА 3. *RR -многогранник, связанный с плосконосим кубом, не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим "нижнюю" часть многогранной поверхности \tilde{K} , состоящую из квадрата Q , через центр которого проходит ось L_4 , и всех двенадцати треугольных граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с гранью Q ; рисунок 3, б). Обозначим нижнюю часть поверхности \tilde{K} через N . Так как в результате изгибания поверхности \tilde{K} должна получиться 4-ромбическая вершина RR -многогранника, то ось симметрии L_4 должна сохраниться, и следовательно, должна сохраниться симметрия части N . Проследим подробнее за возможным изгибанием отдельно части N . При указанном изгибании двугранные углы у ребра EG и ему эквивалентных относительно оси L_4 должны или все увеличиться, или все уменьшиться.

В дальнейшем, говоря об изменении двугранного угла при некотором данном ребре будем подразумевать, что точно такое же изменение происходит и у всех рёбер, эквивалентных данному относительно оси L_4 . На рисунке 3 рёбра и вершины, эквивалентные относительно оси L_4 обозначены одинаковыми буквами.

Рассмотрим первый случай, когда двугранные углы при ребрах EG увеличиваются.

Тогда углы у рёбер CG , в силу сохранения симметрии относительно оси L_4 , уменьшаются. Рёбра, при которых двугранные углы увеличиваются, обозначать будем как обычно знаком $+$, а рёбра, при которых двугранные углы уменьшаются, будем обозначать знаком $-$. В этом случае угол при ребре BC не может увеличиться, так как при обходе вершины C не будет по крайней мере четырёх перемен знака. Если угол при ребре BC уменьшится, то в случае нетривиального изгибания углы при рёбрах CE должны увеличиться, иначе не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины C . Но тогда не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины E . В частности, не меняется угол при ребре EG , что противоречит тому, что углы при рёбрах EG увеличиваются.

Рассмотрим второй случай, когда двугранные углы при рёбрах EG уменьшаются. Тогда углы при рёбрах CG , в силу сохранения симметрии относительно оси L_4 , увеличиваются, и угол при ребре BC не может уменьшиться, так как при обходе вершины C не будет по крайней мере четырёх перемен знака. Если же угол при ребре BC увеличивается, то в случае нетривиального изгибания углы при рёбрах CE должны уменьшиться, иначе не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины C . Но тогда не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины E , то есть 5-гранный угол с вершиной E в этом случае не деформируется. Получаем противоречие с тем, что двугранные углы при рёбрах EG уменьшаются.

Пусть P — замкнутый пояс граней, $P \in \tilde{K}$, состоящий из четырёх квадратов и восьми треугольников, в котором каждая грань имеет только одно ребро с двумя соседними гранями. При этом, каждая грань пояса имеет хотя бы одну общую вершину с частью N . Развёртка пояса P изображена на рисунке 3, с), на котором рёбра, обозначенные цифрой 1, отождествляются.

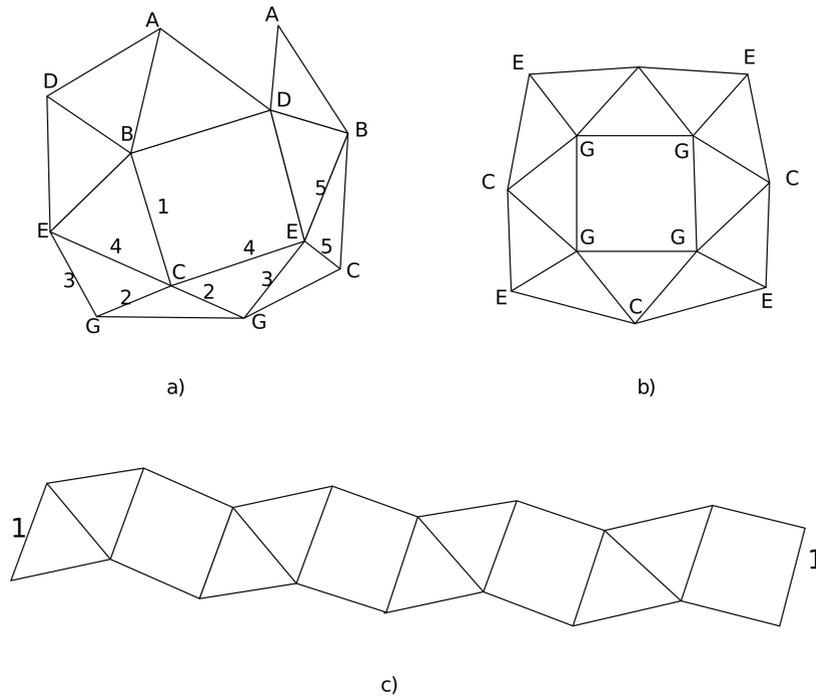


Рис. 3: Нижняя часть (b) и боковой пояс (c) поверхности \tilde{K} (a)

Пусть γ — нижняя граница пояса \mathbb{P} , то есть пространственная ломаная из рёбер пояса, которые имеют общие рёбра с частью \mathbb{N} ; δ — пространственная ломаная, которая является верхней частью пояса \mathbb{P} . Если поверхность \tilde{K} допускает изгибание, то двугранные углы при рёбрах AB изменяются, а значит, изменяются углы между звеньями ломаной δ . Но тогда, в силу сохранения оси вращения L_4 , изменяться будут и пространственные углы ломаной γ . Следовательно, будут изменяться двугранные углы части \mathbb{N} , то есть часть \mathbb{N} будет изгибаться: двугранные углы при рёбрах EG будут изменяться. Это противоречит доказанному ранее, что такое изменение углов при рёбрах EG невозможно.

Теорема 3 доказана.

2. Многогранник, связанный с додекаэдром.

Рассмотрим три грани правильного додекаэдра \mathcal{D} , имеющие общую вершину V . Постро-

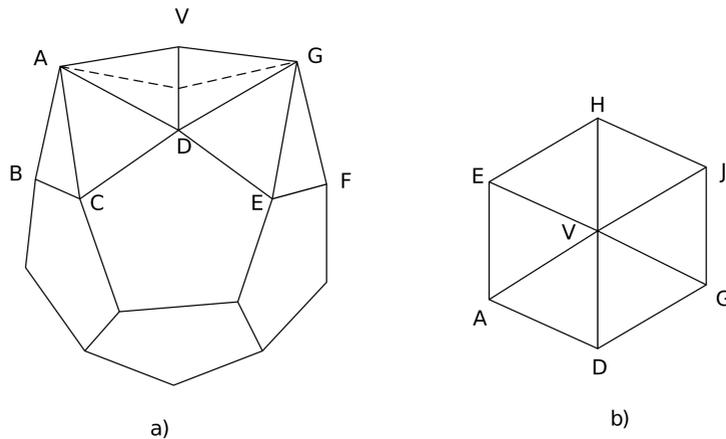


Рис. 4: К доказательству теоремы 4

им на этих гранях правильные 5-угольные пирамиды $\Pi_i, i = 1, 2, 3$. Новый многогранник обозначим $\mathfrak{D} \cup \Pi_i$.

Обозначим ψ — двугранный угол при ребре DV , ϕ — двугранный угол боковой грани 5-угольной пирамиды Π_i с её основанием, α — двугранный угол при ребре додекаэдра.

Заметим, что угол ψ вогнутый, то есть многогранник, полученный после пристраивания пирамид Π_i , не является выпуклым. Действительно, $\alpha = 116,565^\circ$, а для угла ϕ получаем: $\cos \phi = \frac{\tan 54^\circ}{\tan 60^\circ}$, $\phi \approx 37,377^\circ$.

Находим двугранный угол $\psi \approx 360^\circ - 74,755^\circ - 116,565^\circ = 168,68^\circ$. Поскольку угол ψ отличается от развёрнутого угла, то пунктирная линия AG отличается от отрезка прямой.

Рассмотрим многогранник $\mathfrak{D} \cup \Pi_i, i = 1, 2, 3$. Удалим из каждой пирамиды по две те треугольные грани, которые имеют общую вершину V . Удалим также 5-угольные основания каждой пирамиды Π_i . Новую многогранную поверхность обозначим $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$. Заметим, что границей этой поверхности является симметричный относительно оси L_3 3-го порядка, проходящей через вершину V , пространственный 6-угольник $ADGJHE$, рисунок 4, б).

Покажем, что к этой границе нельзя присоединить никакую тупоугольную ромбическую звезду. Для этого сравним два плоских угла \widehat{ADG} и \widehat{DGJ} , которые обозначим α и β соответственно.

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos \psi = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos 168,68 \approx -0,49, \alpha \approx 119^\circ;$$

угол $\beta = 108^\circ$ как равный углу правильного пятиугольника.

Так как $\alpha \neq \beta$, то пространственный 6-угольник $ADGJHE$ не может быть границей тупоугольной ромбической звезды.

Возникает вопрос: допускает ли поверхность $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$ такое изгибание, что в результате изгибания возможно присоединение к границе изогнутой поверхности тупоугольной ромбической звезды?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, рассмотрим одну из точек, например E , инцидентную двум треугольникам, оставшимся от боковой поверхности одной из пирамид Π_i , и двум пятиугольным граням, рисунок 4, а). В случае существования нужного изгибания, двугранный угол при ребре EG (и двугранные углы при рёбрах, эквивалентных EG , так как симметрия относительно оси L_3 должна сохраняться) должен измениться. Но тогда в 4-гранном угле с вершиной E , в силу леммы Коши, все четыре двугранных угла должны измениться. Значит, изменится и двугранный угол между 5-угольными гранями. Это будет противоречить тому, что часть поверхности $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$, состоящая из девяти граней додекаэдра, является, очевидно, неизгибаемой.

Таким образом, в случае существования изгибания для $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$ существовало бы изгибание части додекаэдра. Но так как оставшаяся часть додекаэдра неизгибаема, то не существует и изгибания поверхности $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. *RR -многогранник, связанный с правильным додекаэдром, не существует.*

3. Многогранник, связанный с икосододекаэдром.

Рассмотрим часть икосододекаэдра, состоящую из следующих семи граней: 1) треугольник (T), 2) соседние с T по сторонам три 5-угольника, 3) три треугольника (S), имеющих общие вершины с T . Присоединим к каждому 5-угольнику по два квадрата так, чтобы каждая пара квадратов имела общую сторону. В образовавшееся пространство между каждой парой квадратов поместим ещё по одному треугольнику Δ . Через центр треугольника T перпендикулярно его плоскости проходит ось вращения L_3 .

Тогда возможно поместить три равных ромба с тупыми углами, которые равны углам 5-угольных граней, т.е. по 108° .

Действительно, двугранные углы между соседними квадратными гранями равны внутренним углам 5-угольных граней, потому что эти грани перпендикулярны плоскости 5-угольной грани. Кроме того, в пространственном 6-угольнике, образованном рёбрами шести квадратных граней, имеются три пары параллельных сторон, рисунок 5, б). Стороны, отмеченные одинаковыми цифрами на рисунке 5, б), параллельны, так как в каждой паре 5-угольных граней, в силу симметрии части икосододекаэдра, имеются по одной паре параллельных рёбер.

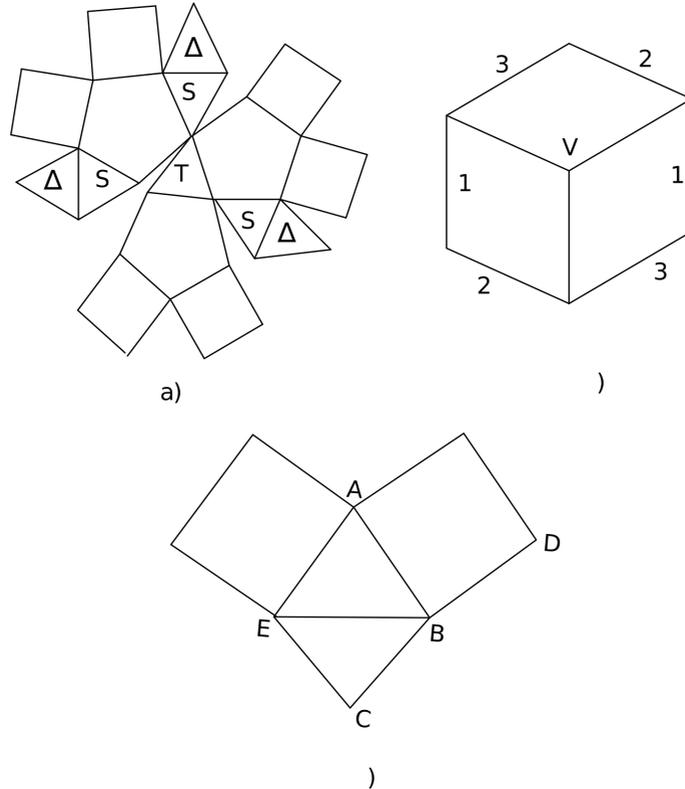


Рис. 5: К теореме 5

Заполняя оставшееся пространство так, чтобы три ромба тупыми углами сходились в одной вершине V , получим модель 19-гранника с тупоугольной симметричной ромбической вершиной V , развёртка которого (без трёх ромбов) показана на рисунке 5, а).

Однако, и здесь имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Не существует RR -многогранника, связанного с икосододекаэдром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем, что треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных. И, следовательно, построенный многогранник с одной симметричной ромбической вершиной не является RR -многогранником, но близок к нему и материализованная модель его может быть построена.

На рисунке 5, в) представлен фрагмент построенного 19-гранника. Обозначим α равные углы B и E в $\triangle ABE$. Угол \widehat{ABC} между квадратной и 5-угольной гранью равен 90° . Двугранные углы при рёбрах BC и EC равны углам между треугольной и 5-угольной гранью, то есть равны $\approx 142,623^\circ$. Для трёхгранного угла $BACE$ получаем:

$$\cos \alpha \approx \cos 90^\circ \cos 60^\circ + \sin 90^\circ \sin 60^\circ \cos (142,623^\circ - 90^\circ),$$

$$\cos \alpha \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 52,623^\circ \approx 0,5257, \alpha \approx 58,28^\circ.$$

Таким образом, треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных. Построенный многогранник не является RR -многогранником, однако близок к нему и материализованная модель такого многогранника может быть построена.

И здесь, S -изгибание поверхности, получаемой из построенного многогранника удалением трёх ромбов, невозможно, так как невозможно S -изгибание части икосододекаэдра построенного многогранника.

Теорема доказана.

5. Заключение

Таким образом, дано обновлённое доказательство существования RR -многогранника первого типа, связанного с икосаэдром. Доказано также существование RR -многогранника первого типа с тетраэдральной симметрией, с четырьмя конгруэнтными тупоугольными ромбическими звёздами, имеющими общие вершины.

Доказана невозможность RR -многогранника, связанного с плосконосим кубом и прямым построением доказано существование двух многогранников, близких к RR -многогранникам второго типа, что сужает поиск всех таких RR -многогранников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grünbaum В. Regular polyhedra — old and new.// Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, № 1-2. P.1-20.
2. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.
3. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.
4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.
5. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.
6. Makarov P. V. On the derivation of four-dimensional semi-regular polytopes// Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.1988. Vol. 103. P.139–150.
7. Макаров В. С. Правильные многогранники и многогранники с правильными гранями трехмерного пространства Лобачевского // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения". М.: МГУ. 2010. С.58-66.
8. Farris S.L. Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra.// Geometriae Dedicata. 1988. Vol. 26, № 1. P.111-124.
9. McMullen P. Geometric Regular Polytopes. Cambridge University Press. 2020.
10. Blind, G.; Blind, R. The semiregular polytopes // Commentarii Mathematici Helvetici. 1991. Vol.66, № 1. P.150–154.
11. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, № 1. P. 169–200.

12. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.
13. Милка А. Д. Почти правильные многогранники. // Труды Ин-та мат. СО АН СССР. 1987. Т.9. С.136-141.
14. Timofeenko A. V. Junction of noncomposite polytopes // St. Petersburg Math. J. 2010. Vol.21, № 3. P.483–512.
15. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2016. № 4. С. 132-140.
16. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018. – Т. 476, – С. 153-164.
17. Субботин В. И. Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т.169. С. 86-95.
18. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник. 2020. Т.21, № 1. С. 297-309.
19. Субботин В. И. О существовании RR -многогранников, связанных с икосаэдром // Чебышевский сборник. 2021. Т.22, № 4. С. 253-264.
20. Субботин В. И. О существовании и полноте перечисления трёхмерных RR -многогранников // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т.216. С. 106-115.
21. Субботин В. И. On the composite RR -polyhedra of the second type // Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol.64, No.2. P.500–506.
22. Субботин В. И. О несоставных RR -многогранниках второго типа // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т.221. С. 104-114.

REFERENCES

1. Grunbaum V. 1977, “Polyhedra — old and new”, *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no. 1-2, pp.1-20.
2. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.
3. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, “Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices”, *MCNMO, Moscow*.
4. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, “Polyhedra. Graph. Optimization”, *Nauka, Moscow*.
5. Cromwel P. R. 1997, “Polyhedra”, *Cambridge University Press, Cambridge*.
6. Makarov, P. V. 1988, “The derivation of four-dimensional semi-regular polytopes”, *Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.*, vol. 103, pp.139–150.
7. Makarov V. S. 2010, “Regular polytopes and polyhedra with regular faces of the three-dimensional Lobachevsky space”, (*Proc. Int. Seminar “Discrete Mathematics and Its Applications”*), Moscow, pp.58-66.

8. Farris, S. L. 1988, “Classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra”, *Geometriae Dedicata*, vol. 26, no. 1, pp.111-124.
9. McMullen P. 2020, *Geometric Regular Polytopes*, Cambridge University Press.
10. Blind, G.; Blind, R. 1991, “The semiregular polytopes”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.66, no.1, pp.150–154.
11. Johnson N. W. 1966, “Convex polyhedra with regular faces”, *Can. J. Math.*, vol. 18, no.1, pp. 169–200.
12. Zalgaller V. A. 1967, “Convex polyhedra with regular faces”, *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.
13. Milka A.D. 1987, “Almost regular polyhedra”, *Trudy In-ta mat. SO AN SSSR*, vol.9, pp. 136-141.
14. Timofeenko A. V. 2010, “Junction of noncomposite polytopes”, *St. Petersburg Math. J.*, vol.21, no.3, pp.483–512.
15. Subbotin V. I. 2016, “On a class of strongly symmetric polytopes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.
16. Subbotin V. I. 2018, “On two classes of polyhedra with rhombic vertices”, *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol.476, pp.153-164.
17. Subbotin V. I. 2019, “On one class of polyhedra with symmetric vertex stars”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol. 169. pp. 86-95.
18. Subbotin V. I. 2020, “On the completeness of the list of convex RR -polytopes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no.1, pp. 297-309.
19. Subbotin V. I. 2021, “On the existence of RR -polyhedra related to the icosahedron”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no.4, pp. 253-264.
20. Subbotin V. I. 2022, “On the existence and completeness of the enumeration of three-dimensional RR -polytopes”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol.216, pp. 106-115.
21. Subbotin V. I. 2023, “On the composite RR -polyhedra of the second type”, *Siberian Mathematical Journal*, vol.64, no.2, pp.500–506.
22. Subbotin V. I. 2023, “On non-composite RR -polytopes of the second type”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol.221, pp. 104-114.

Получено: 14.08.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-208-216

Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки¹

А. Я. Канель-Белов, В. В. Павлова, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, профессор, Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: kanelster@gmail.com

Павлова Виолетта Вячеславовна — Институт проблем механики Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: kanelster@gmail.com

Кирова Валерия Орлановна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: kirova_vo@mail.ru

Аннотация

Рассматривается разбиение трещинами массивов горных пород на блоки. Взяв за основу модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей, в статье изучено распределение блоков по объемам и формам и представлен метод, который позволяет находить распределение блоков не только по объемам, как все разработанные ранее методы, но и по другим геометрическим параметрам.

Ключевые слова: Комбинаторная геометрия, разбиение пространства, самозаклинивающиеся структуры

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, В. В. Павлова, В. О. Кирова. Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208–216.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-208-216

Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks

А. Яа. Kanel-Belov, V. V. Pavlova, V. O. Kirova

¹Работы выполнены при поддержке гранта РФФ 22-19-20073.

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Magnitogorsk State Nosov Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: kanelster@gmail.com

Pavlova Violetta Vyacheslavovna — Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: kanelster@gmail.com

Kirova Valeria Orlanovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: kirova_vo@mail.ru

Abstract

The splitting of rock massifs into blocks by cracks is considered. Taking as a basis a model in which cracks are systems of unlimited equidistant (i.e. parallel and equidistant) plane systems, the article examines the distribution of blocks by volumes and shapes and presents a method that allows you to find the distribution of blocks not only by volume, as all previously developed methods, but also by other geometric parameters.

Keywords: Combinatorial geometry, space partitioning, self-locking structures

Bibliography: 13 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Belov, V. V. Pavlova, V. O. Kirova. 2023, “Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 208–216.

1. Введение

Массивы горных пород часто бывают разбиты трещинами на блоки. Геомеханические свойства трещиноватого массива горной породы зависят как от физических характеристик составляющей его породы, так и от геометрии слагающих его блоков. Знание геометрии блоков, их числа необходимо также для решения ряда задач горного дела, например, при разработке месторождений облицовочного камня, а также может быть полезным при решении ряда задач фильтрации.

Геометрическая классификация трещин горных пород была разработана С. Н. Чернышевым [4]. В соответствии с этой классификацией одной из моделей, в ряде случаев верно описывающих действительность, является модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей.

Данная работа посвящена изучению распределения блоков по объемам и формам для вышеописанной модели, а также сравнению полученных теоретических и экспериментальных данных. Оказывается, что в ряде случаев законы распределения объемов блоков носят бимодальный характер.

Рядом авторов рассматривались ранее методы изучения геометрических свойств блоков массивов, описываемых такими моделями, например [1], [7]. Однако эти методы основаны на простом моделировании, что является неэффективным для протяженных областей. Кроме того, разработанные ранее методы позволяют оценивать только объемы блоков и не учитывают их геометрии.

Метод, предлагаемый в данной работе, не требует явного моделирования и позволяет находить распределения блоков не только по объемам, но и по другим геометрическим параметрам, например таким, как количество и ориентация граней блоков. Как отмечается в работе Р. Гудмена [5], в некоторых случаях ориентация граней блока определяет его подвижность.

Предлагаемый метод позволяет также строить распределения площадей граней блоков в заданных направлениях, что может быть полезным при решении ряда задач фильтрации.

В центре внимания работы находится исследование модели, для которой третины моделируются несколькими системами равноотстоящих плоскостей. По мнению авторов, разбиение n -мерного пространства $k > n$ системами равноотстоящих плоскостей интересно геометрически и одной из целей данной работы является привлечение внимания к данному объекту, возникшему из решения прикладных задач.

2. Метод эргодичности в применении к изучению блочности

Предлагаемый в данной работе метод определения блочности эффективен для протяженных областей массивов, явное моделирование которых требует значительных ресурсов либо невозможно.

Заметим, что число блоков пропорционально кубу размера рассматриваемой области, поэтому даже сравнительно небольшой по размерам участок содержит значительное число блоков, что и является препятствием к изучению блочности массивов методами явного моделирования с помощью ЭВМ.

В данной работе для решения вышеописанной проблемы предлагается подход, основанный на соображениях эргодичности. Идея состоит в том, чтобы описать локальные участки массива, то есть вычислить характеристики каждого участка. Усреднение этих характеристик дает характеристику всего массива. Применительно к рассматриваемой задаче это означает следующее.

Заметим, что, поскольку в случае трех систем плоскостей ($n = 3$) задача имеет тривиальное решение (пространство разбивается такими системами на параллелепипеды), то рассматривается случай, когда $n > 3$.

Из всех систем равноотстоящих плоскостей мы выберем три, находящиеся в общем положении, то есть разбивающие пространство массива на параллелепипеды, которые и будем считать локальными областями. Каждая такая локальная область (параллелепипед) разбивается плоскостями остальных $n - 3$ систем на монолитные блоки. Оказывается, что разбиение каждого параллелепипеда можно описать $n - 3$ параметрами, характеризующими сдвиги систем с номерами $4, \dots, n$ относительно этого параллелепипеда. Можно доказать, что все сдвиги равновероятны и независимы (см. ниже). Поэтому процедура вычисления содержания блоков с заданными свойствами состоит, в общем виде, в следующем:

1. Генерации параметров, определяющих сдвиги систем и являющихся реализациями равномерно-распределенной случайной величины,
2. Вычисления содержания блоков с заданными свойствами в локальных областях, соответствующих каждому параметру сдвига,
3. Усреднении всех полученных величин.

На основе вышеописанного метода разработана программа для ЭВМ, которая строит распределения блоков по объемам, типам форм, а также распределения площадей граней блоков вдоль направлений систем плоскостей. Тип формы блока в рассматриваемой модели определяется набором номеров систем, плоскости которых ограничивают блок.

Распределение блоков по типам форм может быть полезным, поскольку тип формы в рассматриваемой модели определяет ориентацию граней блока, то есть, согласно Р. Гудмену [5], его подвижность.

3. Примеры вычислений и их сравнение с экспериментальными данными

Пример 1.

Параметры систем плоскостей:

NN систем	1	2	3	4
угол падения ($^{\circ}$)	0	90	90	54.75
азимут простирания ($^{\circ}$)	0	0	90	45
расстояния между соседними трещинами (м)	1	1	1	0.557

То есть первые три системы разбивают пространство на единичные кубы; четвертая система нормальна к диагонали куба, и расстояния в этой системе близки к трети диагонали куба.

Построенная гистограмма распределения блоков по объемам имеет вид:

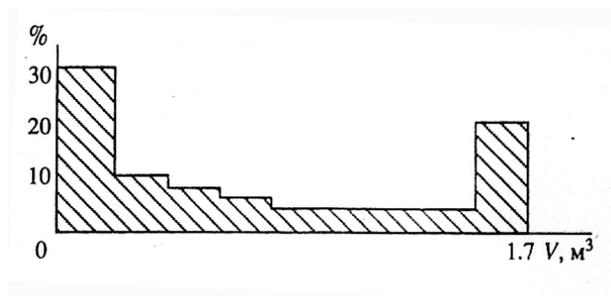


Рис. 1: гистограмма распределения блоков по объемам

Гистограмма, полученная Никитиным В. В. [8] для аналогичного случая, имеет вид:

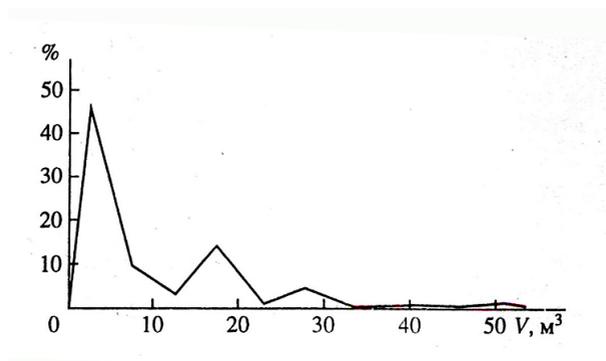


Рис. 2: гистограмма распределения блоков по объемам

Как можно видеть, обе гистограммы имеют максимум при относительно больших значениях объемов. Различие в их поведении в окрестности нуля связано с тем, что мелкие блоки, как неинтересные, маркшейдерами не учитываются. Однако в обоих случаях имеется относительно большое число мелких блоков.

Пример 2.

Исходная информация о геометрических параметрах систем плоскостей разрывов соответствует данным о трещиноватости Овалтунского месторождения высокодекоративных мраморизованных известняков [1].

NN систем	1	2	3	4	5
угол падения (°)	78	82	81	74	74
азимут простирания (°)	138	182	40	98	73
расстояния между соседними трещинами (м)	0.46	0.6	0.7	1.2	1.4

Гистограмма плотности распределения блоков по объемам имеет вид, изображенный на рисунке:

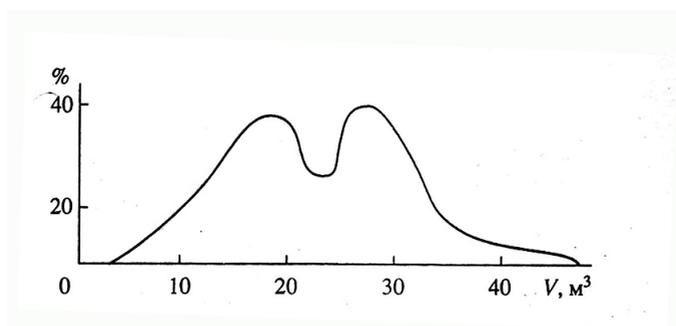


Рис. 3: Гистограмма плотности распределения блоков по объемам

Как можно видеть, около 30 процентов блоков состоят из мелких блоков, имеющих объем меньше 0.18 м^3 , около 19 процентов блоков состоят из относительно больших блоков с объемами от 1.5 м^3 до 1.7 м^3 .

Также было получено распределение блоков по типам форм:

тип формы	12234	112235	1122334	112233	11223345	122345
содержание блоков(в процентах)	21.25	15.83	12.5	9.7	8.4	6.46

Процентное содержание блоков остальных форм незначительно или их нет совсем. Таким образом, наибольшее относительное число составляют блоки типа формы 12234, то есть блоки, представляющие собой пятигранники, причем две из их граней параллельны трещинам системы с номером 2. Кроме того, 15.83 процента блоков состоят из блоков с шестью гранями, причем две пары граней параллельны первой и второй системам.

Также построены гистограммы плотностей распределений граней блоков по площадям вдоль направлений каждой из систем.

Заметим, что в примере 2 также имеется второй максимум в гистограмме распределения объемов блоков. Более того, гистограммы распределения площадей граней также имеют более или менее выраженный второй максимум.

Таким образом, несмотря на грубость модели, наблюдается качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

4. Качественное объяснение гистограммы

Объясним на качественном интуитивном уровне явление второго максимума. Объяснения будут основаны на соображениях эргодичности.

Заметим, что в принципе разработанный метод и соответствующие ему программы позволяют вывести закон зависимости поведения второго максимума в зависимости от количества и параметров систем плоскостей разрывов. Однако это требует огромного количества вычислений и, соответственно, большого количества машинного времени.

Рассмотрим для простоты случай четырех систем, из которых первые три разбивают пространство на единичные кубы, а четвертая параллельна их диагонали.

Так как все сдвиги f четвертой системы относительно кубов равновероятны, то плотность вероятности того, что объем i -й части разбиения куба равен V , пропорциональна $\frac{\Delta f}{\Delta V_i} = V_i'(f)$. Таким образом, плотность вероятности того, что часть имеет объем V , тем больше, чем меньше меняется объем V в зависимости от f . Объем пересечения куба с полосой, образованной четвертой системой, имеет максимум, и, кроме того, в момент прохождения этого максимума при сдвигении полосы меняется мало, то есть $V_i'(f)$ имеет максимум.

Поведение гистограммы вблизи нуля можно объяснить тем, что плотность вероятности $P(V)$ при $V \rightarrow 0$ имеет асимптотику $V^{-2/3}$, поскольку объем самой малой части разбиения куба пропорционален f^3 , а его производная – f^2 .

По мере роста расстояний между плоскостями в четвертой системе второй максимум увеличивается, поскольку картина приближается к той, в которой все блоки представляют собой кубы.

Как показывают расчеты, для шести и более систем плоскостей второй максимум обычно сглаживается.

Можно предположить, что появление второго максимума в данных случаях является подтверждением выводов М. А. Садовского [9] о характерных наиболее частых размерах отдельностей, образующих дискретный ряд.

М. А. Садовским [9] было показано, что естественные блоки, выявленные при изучении горных пород, обнаруживают некоторую упорядоченную иерархию преимущественных размеров, а статистические распределения размеров в пределах каждого иерархического уровня схожи между собой. В работах ([9],[10],[11],[12]) показано, что примеры существования “преимущественных” размеров обнаруживаются во многих процессах. Все это позволило предположить, что наблюдающаяся иерархия размеров – следствие некоторых общих закономерностей процесса расчленения породы на отдельные блоки [11]. Приведенные в работах М. А. Садовского и его соавторов примеры иерархии преимущественных размеров касались блочности земной коры, естественной блочности массивов горных пород, блочности пород после взрывов различных масштабов, размеров частиц грунтов, массы планетных тел Солнечной системы. Подчеркивалось также характерное свойство в распределении отдельностей соответствующих иерархических уровней, заключающееся в их “двугорбости”.

Факт полимодальности (бимодальности) распределений объемов естественных структурных блоков массивов горных пород, а также кусков пород после взрывного разрушения массивов отмечается также в работе [2] (стр.141). В качестве примеров можно привести гистограммы, изображенные на рисунках ниже:

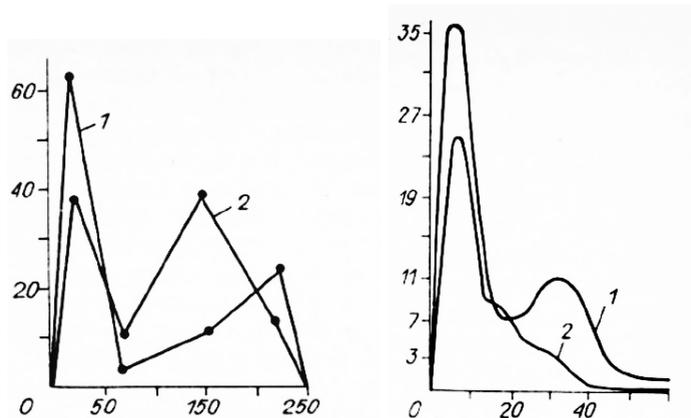


Рис. 4: гистограммы распределения блоков по размерам куска (мм) и размерам частиц (мкм)

Таким образом, можно отметить качественное совпадение поведения гистограмм (двугорбость), полученных в работах ([13], [9],[10],[11],[12]), и результатов, полученных с помощью описанных в данной статье расчетов.

Указанное совпадение подтверждает правильность модели с равноотстоящими системами плоскостей (трещин) в системах по сравнению с моделью пуассоновского распределения межтрещинных расстояний. То есть имеется корреляция между наличием трещины в одной области и отсутствием ее в соседних областях. Это, вероятно, связано с разгрузкой материала при образовании трещины.

5. Математическое обоснование метода

Пусть имеется N систем плоскостей. Пусть первые три системы находятся в общем положении, то есть разбивают пространство массива на параллелепипеды ((1, 2, 3)-параллелепипеды), которые будем считать элементарными областями.

Каждый (1, 2, 3)-параллелепипед разбивается оставшимися $n - 3$ системами на монолитные блоки. Это разбиение описывается $n - 3$ параметрами ξ_4, \dots, ξ_N , характеризующими сдвиги систем с номерами $4, \dots, N$ относительно (1, 2, 3)-параллелепипеда. В качестве ξ_i примем расстояние от фиксированной вершины (1, 2, 3)-параллелепипеда до подходящей плоскости системы i , при этом $0 \leq \xi_i \leq C_i$, где C_i – расстояния между соседними плоскостями в системе i . Процентное содержание блоков L_W с заданными геометрическими параметрами может быть вычислено как среднее:

$$L_W = \lim_{Q \rightarrow \infty} Q^{-1} \sum_{q \leq Q} L_W^q, \quad q \in \mathbf{N},$$

где $L_W^q = L_W^q(\xi_4, \dots, \xi_N)$, величины ξ_4, \dots, ξ_N характеризуют сдвиги систем относительно (1, 2, 3)-параллелепипеда, L_W^q -процентное содержание блоков с заданными свойствами в локальной области.

Распределение точек $\{\Gamma^j = (\xi_1, \dots, \xi_N)\}$ является равномерным. Доказательство этого факта основано на том, что коэффициенты уравнений плоскостей всегда можно считать взаимно иррациональными, поскольку множество иррациональных чисел всюду плотно в \mathbf{R} , и воспользоваться теоремой о равномерном распределении линейных форм [3] (с.80–82).

Таким образом, оценка \hat{L}_W может быть вычислена как

$$\hat{L}_W = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n L_W(\Gamma^j).$$

ТЕОРЕМА 1. а)

$$L_V = \frac{1}{C_4 \dots C_N} \int_{\Phi} L_V(\Gamma) d\Gamma,$$

где L_V – относительное число блоков, имеющих объем выше заданного V , и $\Phi = [0, C_4] \times \dots \times [0, C_N]$.

б)

$$L_F = \frac{1}{C_4 \dots C_N} \int_{\Phi} L_F(\Gamma) d\Gamma,$$

где L_F – относительное число блоков, имеющих заданный тип формы F .

Доказательство теоремы следует из критерия Вейля равномерного распределения последовательности векторов ([3], с.82–83) и интегрируемости $L_V(\Gamma)$ по Риману как функции от Γ . Доказательство интегрируемости содержится в [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анощенко Н. Н., *Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня*. Методические указания, Москва, Изд. МГИ, 1983.
2. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М., *Гранулометрия геоматериалов*. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.
3. Касселс Дж. В., *Введение в теорию диофантовых приближений*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
4. Чернышев С. Н., *Трещины горных пород*. Москва, Наука, 1983.
5. Goodman R. E., Gen-hua Shi, *Block Theory and Its Application to Rock Engineering*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
6. Белов А. Я., *Геометрические свойства блочных сред*. Деп. в ВИНТИ 16.1.91, N 272-B91.
7. Количко А. В., *Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород*. Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.
8. Никитин В. В., *Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня*. Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97.
9. Садовский М. А., *Естественная кусковатость горной породы*. Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.
10. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., *О свойствах дискретности горных пород*. Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).
11. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., *О свойстве дискретности горных пород*. *Физика Земли*, 1982, N12, с. 3–18.
12. Садовский М. А., *О распределении твердых отдельностей*. ДАН СССР, 1983, т.269, N1, с.69–72.
13. Pavlova V. V., *Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry*. Proceedings of the 23rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11, 1992, pp.367–373.

REFERENCES

1. Anoshchenko, N. N. 1983, “Geometric analysis of fracturing and blockiness of deposits of facing stone”, *Methodical instructions, Moscow, Izd. MGI*.
2. Batugin S. A., Biryukov A. V., Krylatchanov R. M. 1989, “Granulometry of geomaterials”, *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch*.
3. Cassels J. W. 1961, “Introduction to the theory of Diophantine approximations”, *Moscow, Izd-Vo Foreign Literature*.
4. Chernyshev S. N. 1983, “Cracks of rocks”, *Moscow, Nauka*.

5. Goodman R. E., Gen-hua Shi. 1985, "Block Theory and Its Application to Rock Engineering", *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
6. Belov A. Ya., "Geometrical properties of block environments", *Dep. in VINITI 16.1.91, № 272-B91*.
7. Kolichko A. V. 1966, "Experience of estimation of blockiness of the fractured rock massif. rocks", *Works of Gidroproekt, Collection 14, Moscow-Leningrad, Energia*.
8. Nikitin V. V. 1987, Development of Mining-Geometric Method of forecasting of block yield for rational mining of deposits of of facing stone, Diss. on nomin. kand. tehn. nauk, Moscow, MGI, p.97.
9. Sadvskii M. A. 1979, "Natural lumpiness of a rock", *Dokl. of the USSR Academy of Sciences*, vol. 247, N4 – pp. 829–831.
10. Sadvsky M. A., Bolkhovitinov L. G., Pisarenko V. F. 1981, "On the Properties of Discreteness of Rocks", *Moscow, Institute of Physics of the Earth im. O. J. Schmidt*, 36 p.
11. Sadvsky M. A., Bolkhovitinov L. G., Pisarenko V. F. 1982, "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, N12, pp. 3–18.
12. Sadvskii M. A. 1983, "On the distribution of solid separations", , *DAN USSR*, vol.269, N1, pp. 69–72.
13. Pavlova V. V. 1992, "Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry", , *Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA*, April 7–11, pp. 367–373.

Получено: 17.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-217-221

Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток¹

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский

Крылов Александр Петрович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе изучаются свойства гиперболической дзета-функции диагональных двумерных унимодулярных решёток. Доказывается теорема об аналитическом продолжении этой функции.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция решёток, метрическое пространство решётки, унимодулярные решётки, диагональные решетки, фундаментальные решётки.

Библиография: 4 название.

Для цитирования:

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 217–221.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-217-221

Hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices²

A. P. Krylov, N. M. Dobrovolsky

Krylov Alexander Petrovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

¹Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

²The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic “Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics”.

Abstract

The paper studies the properties of the hyperbolic zeta function of diagonal two-dimensional unimodular lattices. A theorem on the analytic continuation of this function is proved.

Keywords: hyperbolic zeta function of lattices, metric lattice space, unimodular lattices, diagonal lattices, fundamental lattices.

Bibliography: 4 title.

For citation:

A. P. Krylov, N. M. Dobrovolsky, 2023, “Hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 217–221.

1. Введение

В работе [3] была доказана полнота метрического пространства двумерных диагональных унимодулярных решёток. Каждая двумерная диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (см. [1], [4]).

Цель нашей работы — изучить свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток в левой полуплоскости.

2. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки \mathbb{Z}^2 : $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1 m_1, d_2 m_2) | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, ($d_1, d_2 > 0$).

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d) = \Lambda(d, \frac{1}{d})$, $d > 0$. Она имеет простой базис $\vec{\lambda}_1 = (d, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, \frac{1}{d})$ и базисную матрицу $M(d)$ вида

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*(d) = \Lambda(\frac{1}{d}, d)$ имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что всегда в этой работе $d \geq 1$, так как взаимная решётка будет симметричной к ней диагональная решётка с параметром $\frac{1}{d} \leq 1$.

В работе [3] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [2], стр.165).

ЛЕММА 1. Пусть $d_1 \geq d_2$, тогда $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leq \ln \left(2 \frac{d_1}{d_2} - 1 \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3]. □

ЛЕММА 2. Пусть $d_1 \geq d_2$, $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$ и $\|A - E_2\| \leq \delta < 1$, тогда $d_1 - d_2 = d_2 \delta_1$, где $0 \leq \delta_1 \leq \frac{\delta}{2}$.

Доказательство. См. [3]. \square

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$ имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{dm^\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{d}m^\alpha} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4}{dm^\alpha \cdot \frac{1}{d}n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{d}\right)|\alpha\right)$.

Пользуясь тем, что $d \geq 1$, и вводя обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{d}m\right)^\alpha}\right) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d^\alpha}{m^\alpha}\right),$$

получим

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\zeta(\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4\zeta^2(\alpha) + 4\zeta(\alpha)f(d|\alpha). \quad (1)$$

3. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, где у неё полюс второго порядка.

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1 - \alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1 - \alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - \text{множитель Римана}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0.$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера.

ЛЕММА 3. *Для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1 - \alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4(M(\alpha)\zeta(1 - \alpha))^2 + 4M(\alpha)\zeta(1 - \alpha)f(d|\alpha)$$

при $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0$.

Доказательство. Действительно, функция $f(d|\alpha)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому, подставляя в выражение для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки функциональное уравнение для дзета-функции Римана, получим утверждение леммы. \square

ТЕОРЕМА 1. *Для любой диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d)$ ($d \geq 1$) гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка с вычетом*

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d\right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, дзета-функция Римана мероморфна с единственным полюсом первого порядка при $\alpha = 1$ и раскладывается в ряд Лорана в точке $\alpha = 1$

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n,$$

где

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} \right) - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

— константы Стилтеса, а $\gamma_0 = \gamma$ — константа Эйлера.

Таким образом, для дзета-функции Римана справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \gamma + r(\alpha),$$

где

$$r(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n = (\alpha - 1)r_1(\alpha), \quad r_1(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^{n-1}$$

и функции $r(\alpha)$ и $r_1(\alpha)$ — голоморфные функции на всей комплексной области.

Отсюда следует, что

$$\zeta^2(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2\gamma}{\alpha - 1} + 2r_1(\alpha) + (\gamma + r(\alpha))^2, \quad \text{Res}_1 \zeta^2(\alpha) = 2\gamma.$$

Так как все функции, стоящие в правой части равенства (1) являются либо голоморфными, либо мероморфными кроме точки $\alpha = 1$, то и левая часть является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка. Для вычета в этой точке имеем равенство

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m} \right)$$

и теорема полностью доказана. \square

ТЕОРЕМА 2. *На метрическом пространстве двумерных диагональных унимодулярных решёток гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ и её вычет в точке $\alpha = 1$ являются непрерывными функциями, как функции от параметра d .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda(\frac{1}{d})|\alpha)$, то при $0 < d < 1$ необходимо положить $f(d|\alpha) = f(\frac{1}{d}|\alpha)$, тогда равенство (1) будет справедливо для любого $d > 0$.

Все функции, стоящие в правой части равенства (1) являются непрерывными функциями от d при $d > 0$, поэтому и левая часть будет непрерывной функцией от d .

Аналогично, имеем

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4f(d|1),$$

поэтому вычет в точке $\alpha = 1$ является непрерывной функцией от d .

Так как метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток гомеоморфно пространству $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, то теорема полностью доказана. \square

4. Заключение

Из доказанных теорем возникает вопрос о справедливости их на пространстве всех диагональных решёток. Ответ на этот вопрос будет темой нашей следующей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.
4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
2. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], *Mir, Moscow*, (Russia).
3. Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M. 2022, "Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices", *Notes of scientific seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 1, pp. 37–41.
4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62.

Получено: 28.07.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-222-227

**Алгоритмические вопросы построения обобщённых
параллелепипедальных сеток¹**

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный педагогический университет (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В статье предложены алгоритмы построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

Ключевые слова: целочисленные решётки, обобщённые параллелепипедальные сетки.

Библиография: 2 названия.

Для цитирования:

А. В. Родионов. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 222–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-222-227

**Algorithmic issues of constructing generalized
parallelepipedal grids**

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

The definition of a generalized parallelepipedal net does not provide a simple idea of how to construct it. The article proposes algorithms for constructing generalized parallelepipedal nets corresponding to integer lattices.

Keywords: integer lattices, generalized parallelepipedal grids.

Bibliography: 2 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2023, "Algorithmic issues of constructing generalized parallelepipedal grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 222–227.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

1. Введение

При решении задач многомерного численного интегрирования большую роль играет выбор сеток, с помощью которых строятся квадратурные формулы.

Использование равномерных сеток в этом случае затруднено в силу «проклятья размерности», а при применении случайных или псевдослучайных последовательностей нельзя на классе аналитических функций получить оценку погрешности лучшую, чем $|R_N[f]| = O(N^{-1})$, где N — число точек сетки.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с использованием параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от размерности s и порядка гладкости α .

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Подробнее о классах функций и погрешностях интегрирования с использованием различных видов сеток см., например [1].

Данная работа посвящена алгоритмам построения одного из видов таких сеток — обобщённых параллелепипедальных сеток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть в вещественном арифметическом пространстве \mathbb{R}^s задана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$n_1 \vec{a}_1 + \dots + n_s \vec{a}_s,$$

где n_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в \mathbb{R}^s , а сами векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ — базисом этой решетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \tag{1}$$

Если $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js})$ ($1 \leq j \leq s$) — произвольный базис решетки Λ , то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{a}_j^* = (a_{j1}^*, a_{j2}^*, \dots, a_{js}^*)$ ($1 \leq j \leq s$), который определяется равенством

$$(\vec{a}_j, \vec{a}_i^*) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (1 \leq j, i \leq s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Символом G_s будем обозначать полукоткрытый единичный s -мерный куб $G_s = [0; 1]^s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется пересечение взаимной решетки к решетке Λ с единичным s -мерным кубом $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

В дальнейшем в статье будут рассматриваться только целочисленные решётки и соответствующие им рациональные сетки.

Пусть базис целочисленной решетки Λ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Тогда базис взаимной решетки Λ^* задается матрицей

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix},$$

где $b_{\nu\mu} = \frac{A_{\nu\mu}}{\det \Lambda}$, а величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A .

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ ($\nu = 1, \dots, s$) взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \quad (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}. \quad (2)$$

Из определения обобщённой параллелепипедальной сетки легко увидеть, что она состоит из $\det \Lambda$ узлов.

Равенство (2) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$. Вопросу построения такой сетки посвящён следующий раздел.

2. Приведение базиса решётки к треугольному виду

Как было сказано выше, обобщённая параллелепипедальная сетка с рациональными узлами представляет собой пересечение решётки, взаимной к целочисленной, с s -мерным единичным кубом. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \dots, b_{\nu\nu}, 0, \dots, 0)$.

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию $0 \leq a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$ ($1 \leq \mu < \nu \leq s$).

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [2].

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории цепных дробей.

Пусть p и q — произвольные натуральные числа. Тогда дробь $\frac{p}{q}$ можно представить в виде конечной цепной дроби

$$\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \dots, a_n) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Отрезки этой дроби $\frac{p_k}{q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$ ($k \leq n$) называются подходящими дробями к данному числу $\frac{p}{q}$. Понятно, что $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$.

Сформулируем некоторые свойства подходящих дробей.

1. Для всех $0 \leq k \leq n$ подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ — несократима.
2. Для всех $0 \leq k \leq n$ выполнено равенство $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$.

ЛЕММА 1. Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is})$ и $\vec{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{js})$ — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки Λ , при чём для некоторого t ($1 \leq t \leq s$) числа a_{it} и a_{jt} — натуральные. Пусть, также, дроби $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$ — подходящие дроби к числу $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$.

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов \vec{a}_i и \vec{a}_j соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

- 1) $b_t = 0$;
- 2) $c_t = (a_{it}, a_{jt})$, где (a_{it}, b_{it}) — наибольший общий делитель чисел a_{it} и a_{jt} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство следует из равенства $\frac{a_t}{a_t} = \frac{p_n}{q_n}$.

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима. Тогда $a_t = (a_t, b_t) \cdot p_n$, $b_t = (a_t, b_t) \cdot q_n$. Получим $c_t = (-1)^{n+1} ((a_t, b_t) \cdot q_{n-1} p_n - (a_t, b_t) \cdot p_{n-1} q_n) = (a_t, b_t)$.

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если A — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -q_n & \dots & p_n & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & (-1)^{n+1} q_{n-1} & \dots & (-1)^n p_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице B элементы $b_{ii} = -q_n$, $b_{ij} = p_n$, $b_{ji} = (-1)^{n+1} q_{n-1}$, $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя $|\det B| = |(-1)^{n+1} (q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})| = 1$, из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица $B \cdot A$ является базисной для данной решётки. \square

Теперь опишем алгоритм приведения базиса решётки Λ к нижнему треугольному виду.

Шаг 1. Запишем базисную матрицу решётки Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $i = s$.

Шаг 2. Каждую строку матрицы с первой по i -тую, для которой $a_{ji} < 0$ ($1 \leq j \leq i$) заменим на противоположную. Если $a_{ii} = 0$, то поменяем местами i -тую строку с произвольной j -той строкой ($1 \leq j \leq i$), в которой $a_{ji} \neq 0$.

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки Λ . Существование такой строки, в которой $a_{ji} \neq 0$ следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки Λ , в которой все элементы $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ii}$ неотрицательны, при этом $a_{ii} \neq 0$.

Шаг 3. Для строки с номером $j = 1$ выполним следующую операцию. Если $a_{ji} \neq 0$, заменим первую строку матрицы на строку $-q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j$, а i -тую строку на $(-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j)$. Здесь \vec{a}_i и \vec{a}_j — i -тая и j -тая строки матрицы соответственно, p_{n-1}, p_n — числители, q_{n-1}, q_n — знаменатели подходящих дробей к дроби $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ ($\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}}$).

Повторим шаг 3 для значений $j: 2 \leq j \leq i-1$.

Согласно лемме 1 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{i-1i} = 0, a_{ii} > 0$.

Повторим шаги 2–3 для $i = s-1, \dots, 1$. В результате получим базисную матрицу решётки Λ , приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

3. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки Λ имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (3)$$

Её детерминант равен $\det \Lambda = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss}$.

В этом случае базисная матрица взаимной решётки Λ^* будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

- при $i > j$ $b_{ij} = 0$;
- при $i = j$ $b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$;
- при $i < j$ $b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} a_{jk}$.

Её детерминант равен $\det \Lambda^* = \frac{1}{\det \Lambda}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть базисная матрица целочисленной решётки Λ задана равенством (3), а базисная матрица взаимной решётки Λ^* — равенством (4). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \right\} \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}, \quad (5)$$

где $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$ — дробная часть вектора \vec{x} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символом M обозначим конечное подмножество векторов решётки Λ^*

$$M = \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}. \quad (6)$$

Поскольку $k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s$, то мощность $|M| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss} = |M(\Lambda)|$.

Покажем теперь, что разность любых двух различных векторов из множества M вида $\vec{x}_1 = k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s$ и $\vec{x}_2 = m_1 \vec{b}_1 + \dots + m_s \vec{b}_s$ не является целым вектором.

Так как векторы \vec{x}_1 и \vec{x}_2 различны, то найдётся такое значение t , что $k_t \neq m_t$. Будем считать, что $k_t > m_t$, и t — наименьшее среди таких значений, то есть $k_i = m_i$, при $i < t$.

Рассмотрим t -тую компоненту разности $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$y_t = (k_1 - m_1)b_{1t} + \dots + (k_{t-1} - m_{t-1})b_{(t-1)t} + (k_t - m_t)b_{tt} + (k_{t+1} - m_{t+1})b_{(t+1)t} + \dots + (k_s - m_s)b_{st}.$$

В ней $k_1 - m_1 = \dots = k_{t-1} - m_{t-1} = 0$, так как значение t выбрано минимальным, для которого $k_t \neq m_t$. С другой стороны, $b_{(t+1)t} = \dots = b_{st} = 0$, так как базисная матрица решётки Λ^* имеет верхний треугольный вид.

Таким образом, получаем $y_t = (k_t - m_t)b_{tt}$. Поскольку $0 \leq m_t < k_t < a_{tt}$, то $0 < k_t - m_t < a_{tt}$. Из данных неравенств и равенства $b_{tt} = \frac{1}{a_{tt}}$ имеем $0 < y_t = (k_t - m_t)b_{tt} < a_{tt}b_{tt} = 1$.

Из сказанного следует, что разность любых двух векторов из множества M имеет хотя бы одну нецелую компоненту y_t , а значит дробные части этих векторов различны, что и доказывает утверждение теоремы. \square

4. Заключение

Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной работе предложен алгоритм построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

С вопросами построения параллелепипедальных сеток связаны вопросы нахождения оптимальных алгоритмов построения абсолютно минимальной полной гиперболической системы вычетов и гиперболических параметров решётки. Эти вопросы требуют дополнительного исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolskii, M. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, 2018, “On classical number-theoretic nets”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

Получено: 13.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-228-236

Неравенство типа Колмогорова в пространстве Бергмана B_2 и некоторые его приложения

Д. К. Тухлиев

Тухлиев Дилшод Камаридинович — кандидат физико-математических наук, Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова (г. Худжанд, Таджикистан).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Аннотация

Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{Z}_+ — множество неотрицательных целых чисел, \mathbb{C} — множество комплексных чисел, $A(U)$ — множество аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций, B_2 — пространство Бергмана функций $f \in A(U)$, наделенных конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Для $f \in A(U)$ обычную производную порядка $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $f^{(m)}(z)$ и введём класс функций

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Пусть $E_{n-1}(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in B_2$ комплексными алгебраическими полиномами степени $\leq n-1$. В данной работе найден ряд точных неравенств между величиной наилучшего приближения промежуточных производных $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1; m \geq 2$) и наилучшего приближения $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2$ старшей производной $f^{(m)}$.

Пусть $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$ ($m \in \mathbb{N}$) — класс функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. В работе доказано, что при любых $n, m \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq \nu$ имеет место равенство

$$E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 = \sup \{ E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)} \} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}},$$

а также для функций $f \in B_2^{(m)}$ при всех $1 \leq \nu \leq m-1, m \geq 2$ найдено точное неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq A_{m,\nu}(n) (E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m} \cdot (E_{n-m-1}(f^{(m)})_2)^{\nu/m},$$

где постоянная $A_{m,\nu}(n)$ явно выписывается. Дано некоторые приложения полученного неравенства.

Ключевые слова: пространство Бергмана, точные неравенства, среднеквадратическое приближение, наилучшее полиномиальное приближение, экстремальные задачи, неравенство типа Колмогорова.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Д. К. Тухлиев. Неравенство типа Колмогорова в пространстве Бергмана B_2 и некоторые его приложения // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 228–236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-228-236

Kolmogorov's type inequalities in Bergman space B_2 and some of its applications

D. K. Tukhliev

Tukhliev Dilshod Kamaridinovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khujand State University (Khujand, Tajikistan).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Abstract

Let \mathbb{N} be the set of natural numbers, \mathbb{Z}_+ be the set of non-negative integers, \mathbb{C} be the set of complex numbers, $A(U)$ be the set of analytic functions in the unit circle $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, B_2 — be the Bergman spaces of functions $f \in A(U)$, endowed with a finite norm

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_U |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

For $f \in A(U)$, we denote the usual derivative of order $m \in \mathbb{N}$ by $f^{(m)}(z)$ and introduce a class of functions

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Let $E_{n-1}(f)_2$ be the magnitude of the best approximation of function $f \in B_2$ by complex algebraic polynomials of degree $\leq n-1$. In this paper, a number of exact inequalities are found between the value of the best approximation of intermediate derivatives $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1; m \geq 2$) and the best approximation $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2$ of the highest derivative $f^{(m)}$.

Let $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$ ($m \in \mathbb{N}$) be a class of functions $f \in B_2^{(m)}$ for which $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. In this paper is proved that for any $n, m \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq \nu$, the equality of takes place

$$E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 = \sup\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)}\} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}},$$

and also, in the space B_2 for functions $f \in B_2^{(m)}$ for all $1 \leq \nu \leq m-1, m \geq 2$, an exact inequality of the Kolmogorov type

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq A_{m,\nu}(n)(E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m} \cdot (E_{n-m-1}(f^{(m)})_2)^{\nu/m},$$

is found, where the constant $A_{m,\nu}(n)$ is explicitly written out. Some applications of the resulting inequality are given.

Keywords: Bergman space, exact inequalities, mean-square approximations, best polynomial approximation, extremal problems, Kolmogorov type inequality.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

D. K. Tukhliev, 2023, "Kolmogorov's type inequalities in Bergman space B_2 and some of its applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 228–236.

1. Введение

В работах [1], [2] рассмотрена экстремальная задача о совместном полиномиальном приближении аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций и их промежуточных производных в пространстве Бергмана B_2 . Здесь мы продолжим наши исследования в этом направлении и докажем ряд точных неравенств о совместном полиномиальном приближении функции $f \in B_2$ и её промежуточных производных.

Введём нужные нам в дальнейшем вспомогательные факты и определения. Через $A(U)$ обозначим множество аналитических в круге U функций. Будем говорить, что функция $f \in A(U)$ принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ —элемент площади.

Известно, [3, стр.44], что функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k \in A(U)$ имеет производные $f^{(m)}(z)$ любых порядков $m \in \mathbb{N}$, которые определяются формулой

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m},$$

где

$$\alpha_{k,m} := k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1), \quad k \geq m, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha_{k,0} \equiv 1, \alpha_{k,1} \equiv k,$$

$c_k(f)$ —тейлоровы коэффициенты функции $f(z)$. Всюду далее полагаем

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2; \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Пусть P_{n-1} — множество комплексных алгебраических полиномов степени не более $n-1$:

$$P_{n-1} := \left\{ p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E_{n-1}(f, P_{n-1})_2 = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1}(z) \in P_{n-1} \}$$

определим наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функции $f \in B_2$ элементами множества P_{n-1} в метрике пространства B_2 . Хорошо известно, что [4, стр.209]

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

— частная сумма n -го порядка разложения функции $f \in A(U)$ в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k.$$

Очевидно, что для функции $f \in B_2^{(m)}$ все её последовательные производные $f^{(\nu)}(z)$ ($1 \leq \nu \leq m - 1$) также принадлежат пространству B_2 : Так как

$$f^{(\nu)}(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu}.$$

то легко доказать, что

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 &= \inf \left\{ \|f^{(\nu)} - p_{n-1}^{(\nu)}\|_2 : p_{n-1} \in P_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(\nu)} - S_{n-1}(f^{(\nu)})\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k - \nu + 1} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$S_{n-1}(f^{(\nu)}) = \sum_{k=\nu}^n \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu}.$$

В работе [2] установлено, что для любой функции $f \in B_2^{(m)}$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 2$ и $n > m \geq \nu$, справедливо точное неравенство

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n - m + 1}{n - \nu + 1}} \cdot E_{n-m-1}(f^{(m)})_2, \tag{3}$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$.

Введём в рассмотрение класс $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$, ($m \in \mathbb{N}$)-функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. Далее, при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in W_2^{(m)}$ в соотношениях общего характера условимся, что $f \notin P_m$. Исходя из неравенства (3), можно убедиться в том, что если $f \in B_2^{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$), то $f \in B_2^{(\nu)}$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$ таком, что $\nu < m$. В связи с этим представляет определённый интерес найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 := \sup \left\{ E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq m - 1$, $m \geq 2$, для которых выполняется ограничение $n > m > \nu$, имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 &= \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n - m + 1}{n - \nu + 1}} = \\ &= \frac{1}{(n - \nu)(n - \nu - 1) \cdots (n - m + 1)} \cdot \sqrt{\frac{n - m + 1}{n - \nu + 1}}. \end{aligned} \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для произвольной функции $f \in W_2^{(m)}$, в силу неравенства $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq \|f^{(m)}\|_2 \leq 1$ из соотношения (3) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \sqrt{\frac{n - m + 1}{n - \nu + 1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}},$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \leq \sqrt{\frac{n - m + 1}{n - \nu + 1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \tag{5}$$

Оценку снизу для величины, расположенной в левой части равенства (4), получаем для функции $g_0(z) = \frac{\sqrt{n-m+1}}{\alpha_{n,m}} \cdot z^n$, $n > m$, для которой в силу (1) имеем

$$E_{n-1}(g_0)_2 = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}. \quad (6)$$

Кроме того, так как

$$g_0^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{n-m+1} \cdot z^{n-\nu}, \quad E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \quad (7)$$

$E_{n-m-1}(g_0^{(m)})_2 = \|(g_0^{(m)})\|_2 = 1$, то функция $g_0 \in W_2^{(m)}$, а потому учитывая (7), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \geq E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \quad (8)$$

Первое равенство в (4) вытекает из сопоставления неравенств (5) и (8). Далее, при $n > m > \nu$ пользуясь равенством

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)}{n(n-1) \cdots (n-m+1)} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)}{\underbrace{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)} \cdot (n-\nu)(n-\nu-1) \cdots [(n-\nu) - (m-\nu) + 1]} = \\ &= \frac{1}{(n-\nu)(n-\nu-1) \cdots (n-m+1)} = \frac{1}{\alpha_{n-\nu, m-\nu}}, \end{aligned}$$

первое равенство в (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 &= \frac{1}{\alpha_{n-\nu, m-\nu}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} = \\ &= \frac{1}{(n-\nu)(n-\nu-1) \cdots (n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

При фиксированном $\nu \in [1, m-1]$ вводим обозначение

$$A_m(k) := \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,m}^2)^{\nu/m}}$$

и докажем следующее утверждение.

ЛЕММА. При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq m-1$, удовлетворяющих ограничению $n > m > \nu$, справедливо равенство

$$\max_{k \geq n} A_m(k) = A_m(n) := \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь равенством $\alpha_{n,m} = \alpha_{n,\nu} \cdot \alpha_{n-\nu, m-\nu}$, полученным в завершающей части доказательства теоремы 1, запишем $A_m(k)$ в следующем виде:

$$A_m(k) = \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}^{2(1-\nu/m)}}{(\alpha_{k-\nu, m-\nu}^2)^{\nu/m}} =$$

$$= \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{[k(k-1)\dots(k-\nu+1)]^{2(1-\nu/m)}}{[(k-\nu)(k-\nu-1)\dots(k-\nu-(m-\nu)-1)]^{2\nu/m}}. \quad (10)$$

Так как при всех $k > n > m$ функция натурального аргумента $A_m(k) > 0$, то прологарифмировав обе части соотношения (10), получаем

$$\begin{aligned} \ln A_m(k) &= \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) + \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \ln \alpha_{k,\nu} - \frac{2\nu}{m} \ln \alpha_{k-\nu, m-\nu} = \\ &= \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) + \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \ln(k-s) - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \ln(k-s) := B_m(k) + C_m(k), \end{aligned} \quad (11)$$

где положено

$$B_m(k) = \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1), \quad (12)$$

$$C_m(k) = 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \ln(k-s) - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \ln(k-s). \quad (13)$$

Переходя к функции непрерывного аргумента, из равенств (11)–(13) получаем

$$\frac{A'_m(x)}{A_m(x)} = B'_m(x) + C'_m(x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x-\nu+1} - \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} \right), \\ C'_m(x) &= 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{1}{x-s} - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \frac{1}{x-s}. \end{aligned}$$

В [5, стр.682] доказано, что при всех $x \geq n$ производная $C'_m(x) < 0$, то есть, $C_m(x)$ является монотонно убывающей при $x \geq n$. Докажем, что и $B'_m(x) < 0$, при $x \geq n$. Так как $1 \leq \nu \leq m-1$, то учитывая неравенство $x-m+1 > x-\nu+1$, и пользуясь тем, что

$$-\frac{1}{x-\nu+1} < -\frac{1}{x-m+1},$$

получаем

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x-\nu+1} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} + \left(\frac{\nu}{m} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-m+1} = \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-m+1} \right) = -\frac{m-\nu}{(x+1)(x-m+1)} < 0. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (10) $A_m(k) > 0$ при всех $k \geq n > m \geq \nu$, то из (14) следует, что производная $A'_m(x) < 0$, при $x \geq n$. Таким образом, функция $A_m(k)$ при $k \geq n > m \geq \nu$ является монотонно убывающей. Следовательно,

$$\sup \{ A_m(k) : k \geq n \} = A_m(n)$$

и имеет место равенство (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа $n, m, \nu \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ удовлетворяют ограничениям $n > m > \nu$. Тогда для любого $1 \leq \nu \leq m - 1$ имеет место точное неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/(2m)} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \times \\ \times \left(E_{n-m+1}(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m} \cdot \left(E_{n-1}(f)_2 \right)^{1-\nu/m}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in B_2^{(m)}$, используя соотношения (2),(1) и равенство

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1},$$

представим $E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2$ в виде

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \right)^{\nu/m} \cdot \\ \cdot \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}}{(\alpha_{k,m})^{\nu/m}},$$

и применяя неравенство Гельдера для сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i|^p \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

положив $p = \frac{m}{m-\nu}$, $q = \frac{m}{\nu}$, получаем

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 < \\ < \sup\{A_m(k) : k \geq n\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \right)^{\nu/m} = \\ = A_m(n) \cdot \left(E_{n-1}^2(f)_2 \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m} = \\ = \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \cdot \left(E_{n-1}^2(f)_2 \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m},$$

откуда и следует неравенство (15).

Теперь докажем, что неравенство (15) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$, $n, m, \nu \in \mathbb{N}$, $n > m > \nu$, $1 \leq \nu \leq m - 1$, $m \geq 2$ обращается в равенство. Для функции f_0 имеем

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$E_{n-\nu-1}^2(f_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu-1}, \quad E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2 = \frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1}.$$

Пользуясь этими равенствами, непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot (E_{n-1}^2(f_0)_2)^{1-\nu/m} \cdot (E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2)^{\nu/m} = \\ & = \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1}\right)^{\nu/m} = \\ & = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1} = E_{n-\nu-1}^2(f_0)_2. \end{aligned}$$

Точность неравенства (15) установлена, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq m-1$, $m \geq 2$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} = \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию $f \in W_2^{(m)}$, $m \geq 2$, которая не является элементом подпространства P_m . Для такой функции имеем

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq \|f^{(m)}\|_2 \leq 1. \quad (17)$$

Учитывая (17) из неравенства (15) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \cdot (E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m}.$$

Из последнего неравенства сразу вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (10):

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \quad (18)$$

Оценку снизу указанной величины получаем для функции $g_0(z) = \frac{\sqrt{n-m+1}}{\alpha_{n,m}} \cdot z^n \in W_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, ранее использованной нами при доказательстве теоремы 1.

Воспользуясь равенствами (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \geq \frac{E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(g_0)_2} = \\ & = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \left(\alpha_{n,m} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-m+1}}\right)^{1-\nu/m} = \\ & = \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь требуемое равенство (16) получаем из сравнения оценок (18) с оценкой снизу (19). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН Таджикистана. 2018. Т. 61. № 5. С. 419-426.
2. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 258-272.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. —М.: Наука. 1969. 239 с.
4. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. —М.—Л.: Наука. 1964. 440 с.
5. Вакарчук С. В. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 5. С. 666-684.

REFERENCES

1. Shabozov, M. Sh., Tukhliev, D. K. 2018, "On the joint approximation of functions and their successive derivatives in the Bergman space", *DAN Tajikistan*, vol. 61, no. 5, pp. 419-426.
2. Shabozov, M. Sh., Saidusajnov, M. S. 2019, "Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems", *Trudy IMM UrO RAN*, vol. 25, no. 2, pp. 258-272.
3. Bitsadze, A. V. 1969, "Fundamentals of the theory of analytical functions of a complex variable", —*Moscow.: Nauka*, 239 p (in Russian).
4. Smirnov, V. I., Lebedev, N. A. 1964, "Constructive theory of functions of a complex variable", —*M.—L.: Nauka*, 440 p (in Russian).
5. Vakarchuk, S. V. 2014, "Mean Approximation of Functions on the Real Axis by Algebraic Polynomials with Chebyshev–Hermite Weight and Widths of Function Classes", *Math. Notes*, vol. 95, no. 5, pp. 666-684.

Получено: 27.07.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-237-243

Трансцендентность некоторых 2-адических чисел¹

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: *vgchirskii@yandex.ru*

Аннотация

В работе доказывается трансцендентность в поле 2-адических чисел хотя бы одного из двух 2-адических чисел, представляющих собой суммы в поле \mathbb{Q}_2 рядов типа Эйлера

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число, $z = 1$. Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле \mathbb{Q}_p . Мы рассматриваем поле \mathbb{Q}_2 . Параметром рассматриваемых рядов типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел \mathbb{Q}_p . Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Ранее было доказано простое утверждение о том, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля \mathbb{Q}_p . Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцендентное число. Это позволяет, используя некоторое тождество для обобщённых гипергеометрических рядов и предыдущие результаты автора доказать, что существует бесконечное множество полей \mathbb{Q}_p , в которых трансцендентно хотя бы одно из значений рядов $f_0(z)$, $f_1(z)$. В этой работе доказывается трансцендентность значений в конкретном поле \mathbb{Q}_2 .

Ключевые слова: трансцендентность, полиадическое число, полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 237–243.

¹Работа выполнена при поддержке проекта «Ведущие научные школы МГУ».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-237-243

Transcendence of certain 2-adic numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigor'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We prove here that at least one of the two 2-adic numbers which are the values at $z = 1$ of the sums in \mathbb{Q}_2 of the series

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field \mathbb{Q}_p . We deal here with \mathbb{Q}_2 . The symbol $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)$. The values of these series were also calculated at polyadic Liouville number. The canonic expansion of a polyadic number λ is of the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of p -adic numbers \mathbb{Q}_p .

We call a polyadic number λ a polyadic Liouville number, if for any n and P there exists a positive integer A such that for all primes p , satisfying $p \leq P$ the inequality

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}$$

holds.

It was proved earlier that the Liouville polyadic number is transcendental in any field \mathbb{Q}_p . In other words, the Liouville polyadic number is globally transcendental. It allowed to prove using some equality that there exists an infinite set of p -adic fields \mathbb{Q}_p where at least one of the numbers $f_0(z), f_1(z)$. Here we prove the transcendence of values in the field \mathbb{Q}_2 .

Keywords: transcendence, polyadic number, polyadic Liouville number,

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2023, "Transcendence of certain 2-adic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 237–243.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Теория трансцендентных чисел достаточно подробно освещена в [1]. Лиувиллевы числа, с изучения которых фактически и началась теория трансцендентных чисел, изучались во многих работах. Отметим две из них, [2],[3], наиболее близких по содержанию к настоящей работе. Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую работ автора [4], где параметром рассматриваемого ряда типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля и [5], где значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля. В работах [6]- [10] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отметим работу Е.Ю. Юденковой [11], в которой значения F - рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля, работу В.Ю. Матвеева [12], работу Е.С. Крупицына [13], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля. В упомянутых выше работах доказывалось существование бесконечного множества полей p - адических чисел, в которых заданный многочлен от значений рассматриваемых рядов не обращается в ноль. Исследования арифметических свойств рядов рассматриваемого типа в конкретном поле p - адических чисел представляет собой значительно более трудную задачу. См. например, [14]. В работе автора [15] установлено существование бесконечного множества полей p - адических чисел, в которых хотя бы одно из двух значений некоторых гипергеометрических рядов трансцендентно.

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p - адических чисел \mathbb{Q}_p .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathbb{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\frac{n - S_n}{p-1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр p -ичного разложения числа n . Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях p - адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p - адических чисел по всем простым числам p . Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых p - адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$\left| \lambda^{(p)} - A \right|_p < |A|^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля p -адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$ этого ряда.

2. Основное тождество и его следствия

Для гипергеометрических рядов общего вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha_1)_{n\dots\alpha_r})_n}{((\beta_1)_{n\dots\beta_s})_n} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha_1 + 1)_{n\dots\alpha_r + 1})_n}{((\beta_1 + 1)_{n\dots\beta_s + 1})_n} z^n$$

справедливо тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z F_1(z).$$

Это равенство означает, что если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ и значение z - алгебраические, то оба значения $F_0(z), F_1(z)$ либо одновременно алгебраические, либо трансцендентные числа. Если же число $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z$ трансцендентное и число $F_1(z) \neq 0$, то хотя бы одно из этих чисел является трансцендентным. Высказанные выше утверждения относятся как к полю комплексных чисел, так и к любому полю \mathbb{Q}_p . В работе [15] рассмотрены ряды

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1)_{n\dots\alpha_m})_n z^n,$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1 + 1)_{n\dots\alpha_m + 1})_n z^n$$

и доказано, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - полиадические числа Лиувилля и если ξ - натуральное число или если Ξ - полиадическое число Лиувилля, то существует бесконечное множество полей \mathbb{Q}_p , в которых хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$) является трансцендентным числом. Цель этой работы - рассмотрение конкретного поля \mathbb{Q}_2 .

3. Формулировка и доказательство теоремы

Пусть

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n.$$

Мы рассматриваем $p = 2$, т.е. поле \mathbb{Q}_2 , однако будем рассматривать ряд, сходящийся в любом поле \mathbb{Q}_p . Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [\exp \lambda_0] + 1 = 3.$$

Пусть λ_1 - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_1 \geq 2s_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [\exp \lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2 = 5$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq 2s_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле \mathbb{Q}_p .

ТЕОРЕМА. *Хотя бы одно из 2-адических чисел $f_0(1), f_1(1)$ - трансцендентное 2-адическое число.*

Для доказательства теоремы заметим, что ввиду тождества

$$f_0(z) = 1 + \lambda z f_1(z)$$

достаточно доказать, что, во-первых, λ - трансцендентное 2-адическое число и, во-вторых, что $f_1(1) \neq 0$ в поле \mathbb{Q}_2 . Докажем, что λ - полиадическое число Лиувилля. Пусть выбраны величины n и P . В качестве натурального числа A выберем число λ_k при достаточно большом k . Предполагаем, что

$$P \leq s_k + 2\lambda_k^2, n \leq 2s_k.$$

Тогда

$$|\lambda - \lambda_k|_p \leq |\lambda_{k+1}|_p \leq p^{-2s_k \ln s_k} \leq \lambda_k^{-2s_k},$$

что и утверждалось. В работе [16] доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля \mathbb{Q}_p . Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцендентное число.*

Таким образом, λ - трансцендентное 2-адическое число. Для доказательства того, что $f_1(1) \neq 0$ в поле \mathbb{Q}_2 рассмотрим разложение

$$f_1(1) = 1 + (\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots$$

Заметим, что при $n \geq 1$ выполняется неравенство $\text{ord}_2(\lambda + 1)_n \geq 1$. Действительно,

$$\lambda_0 = 1, \text{ord}_2 \lambda_1 \geq 6 \ln 3 \geq 6.$$

Более того, по условию, значения $\text{ord}_2 \lambda_k$ быстро возрастают. Поэтому

$$\text{ord}_2(\lambda + 1) \geq 1.$$

Ряд $f_1(1)$ сходится и представляет собой сумму числа 1 и 2-адического числа

$$(\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots,$$

для которого

$$\text{ord}_2((\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots) \geq 1.$$

Из этого следует неравенство $f_1(1) \neq 0$ и доказываемая теорема.

4. Заключение

Полученная теорема представляет собой первый результат подобного типа. Здесь удалось не только доказать существование бесконечного множества полей, в которых хотя одно из значений рассматриваемых рядов трансцендентно, но и доказать это утверждение в конкретном поле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
2. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers.//J.Pure and Appl. Algebra. -1978.-13.-pp.41-47.
3. Waldschmidt M. Independance algebrigue de nombres de Liouville.//Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.
4. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312
6. Чирский В.Г. Обобщение понятия глобального соотношения.//Труды по теории чисел. Зап.научн.сем.ПОМИ.-322.-ПОМИ,Спб.-2005.-220-232.
7. Чирский В.Г.О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем.,мех.-1994.-№ 3.-с.93-95.
8. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
9. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
10. Чирский В.Г. Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами .//Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506.-с.95-107.
11. Юденкова Е.Ю.Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346
12. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник. -2019. -т.20. - вып. 2.-с. 383 – 390
13. Крупицын Е. С.Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. -2019. -т. 20. - вып. 2.-с. 374 – 382
14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. Euler’s factorial series, Hardy integral, and continued fractions.//J.Number Theory. 2023.-v.244.-pp.224-250.
15. Чирский В. Г.Трансцендентность p -адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами .//Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2023.-т.510.-с.29-32.
16. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 3.-с. 245 – 255

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental Numbers", *W. de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp.
2. Adams. W. 1990, "On the algebraic independence of certain Liouville numbers", *J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol, 13, pp.41-47.
3. Waldschmidt. M. 1990, "Independance algebrique de nombres de Liouville", *Lect.Notes Math.*, Vol, 1415, pp.225-235.
4. Chiskii V. G. 2020, "Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp.412-413.
5. Chiskii V. G.,2021, " Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.304-312.
6. Chiskii V. G. 2006, "Generalization of the Notion of a Global Relation", *J. Math. Sci(N.Y)*, Vol.137, no.2, pp.4744-4754.
7. Chiskii V. G.V. G. 1994, "Qn series which are algebraically independent in all local fields", *Vestn.Mosc.univ.Ser.1.,Math.,mech.*, n0.3, pp.93-95.
8. Chirskii V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286-305.
9. Chirskii V. G. 2020, " Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175-184.
10. Chirskii V. G. 2022, " Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameter", *Dokl. Math.*, Vol. 106, no.2, pp.386-397
11. Yudenkova E. Yu. 2021, " Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.334-346.
12. Matveev V. Yu. 2019, " Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.383-390.
13. Krupitsin E. S. 2019, " Arithmetic properties of series of certain classes", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.374-382.
14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. 2023, " Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions", *J.Number Theory*, Vol. 244, pp.224-250.
15. Chirskii V. G. 2023, "Transcendence of p-adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameter", *Dokl. Math.*, Vol. 107, no.2, pp.109-111.
16. Chirskii V. G. 2021, " Polyadic Liouvillean numbers", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245-255.

Получено: 15.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-244-255

Использование МКЭ для решения задачи дифракции акустической волны на совокупности упругих анизотропных тел

Д. Р. Бирюков

Бирюков Данила Русланович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Аннотация

В работе рассматривается прямая задача дифракции гармонической звуковой волны на совокупности линейно упругих тел. Приведена постановка задачи о дифракции плоской акустической волны, распространяющейся в идеальной жидкости, на заданной совокупности неоднородных анизотропных упругих тел. Постановка задачи является двумерной. В качестве метода решения задачи предлагается модификация метода конечных элементов. Описывается как общая идея метода применительно к задачам дифракции, так и алгоритм решения данной поставленной задачи. Для дискретизации в пространстве, окружающем упругие тела, в двумерном случае выделяется область, ограниченная окружностью. Область разбивается на элементы: в данном работе предлагается использовать треугольные элементы первого порядка. Для каждого треугольного элемента строится локальная матрица, структура которой основывается на уравнении Гельмгольца (для жидких элементов) или общих уравнениях движения сплошной среды и законе Гука (для упругих элементов), а также граничных условиях. Локальные матрицы элементов позволяют сформировать разреженную глобальную матрицу для системы линейных алгебраических уравнений, решение которой определяет искомые значения давления и смещений в узлах сетки. Процедура интерполяции позволяет вычислить давление и смещения в произвольной точке внутри области, а граничные условия – определить рассеянную волну в точках вне области.

Ключевые слова: метод конечных элементов, гармоническая волна, плоская волна, идеальная жидкость, упругое тело.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

Д. Р. Бирюков. Использование МКЭ для решения задачи дифракции акустической волны на совокупности упругих анизотропных тел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 244–255.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-244-255

Using of the finite element method for solving the problem of diffraction of acoustic wave on a set of elastic inhomogeneous bodies

D. R. Biryukov

Biryukov Danila Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Abstract

The paper considers the direct problem of diffraction of a harmonic sound wave by a set of linearly elastic bodies. The statement of the problem of the diffraction of a plane acoustic wave propagating in an ideal fluid by a given set of inhomogeneous anisotropic elastic bodies is presented. The problem statement is two-dimensional. As a method for solving the problem, a modification of the finite element method is proposed. Both the general idea of the method as applied to diffraction problems and the algorithm for solving this problem are described. For discretization in the space surrounding elastic bodies, in the two-dimensional case, a region bounded by a circle is selected. The area is divided into elements: in this work, it is proposed to use triangular elements of the first order. For each triangular element, a local matrix is built, the structure of which is based on the Helmholtz equation (for liquid elements) or general equations of motion of a continuous medium and Hooke's law (for elastic elements), as well as boundary conditions. Local matrices of elements make it possible to form a sparse global matrix for a system of linear algebraic equations, the solution of which determines the required values of pressure and displacements at the grid nodes. The interpolation procedure makes it possible to calculate the pressure and displacements at an arbitrary point inside the region, and the boundary conditions determine the scattered wave at points outside the region.

Keywords: finite element method, harmonic wave, plane wave, ideal fluid, elastic body.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

D. R. Biryukov, 2023, "Using of the finite element method for solving the problem of diffraction of acoustic wave on a set of elastic inhomogeneous bodies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 244–255.

1. Введение

Среди численных методов решения краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных занимает метод конечных элементов [1-3]. Данный метод отличается своей универсальностью и возможностью существенно влиять на качество результата решения с помощью изменения многочисленных параметров (в том числе размером, формой и внутренней структурой конечных элементов). Математическая физика, в том числе механика сплошной среды – классические области применения метода конечных элементов. В частности, данный метод широко используется при численном решении задач механики упругих тел, гидродинамики, гидроакустики.

Хотя для задач дифракции (как прямых, так и обратных) гармонических звуковых волн найдено большое количество аналитических решений, большинство из них касаются дифракции звуковых волн на телах простой формы: плоской, цилиндрической или сферической. Аналитическое решение задач рассеяния звука на телах сложной формы может быть чрезвычайно трудоёмким или вовсе невозможным. Именно в этом случае оптимальным является использование метода конечных элементов как одного из наиболее универсальных численных методов. В качестве примеров работ, посвящённых применению метода конечных элементов к задачам дифракции акустических волн, можно привести [6-10].

Текущая работа посвящена подробному описанию алгоритма применения метода конечных элементов для численного решения задачи рассеяния плоской гармонической звуковой волны на совокупности линейно упругих тел, расположенных в идеальной жидкости. Подробно описываются постановка задачи, дискретизация области решения, построение локальных матриц элементов. Особое внимание в работе уделяется особенностям, присущим конкретно дифракционным задачам при их решении с помощью метода конечных элементов.

2. Постановка задачи

Рассматривается двумерное пространство, заполненное идеальной жидкостью с плотностью ρ_i . В жидкость помещено некоторое количество конечных по размеру линейно упругих тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$, где N_B – целое неотрицательное число. Тела G_i не имеют общих точек и границ. Граница тела G_i обозначается Γ_i . Физические свойства тел характеризуются скалярным полем плотности $\rho(\bar{r})$ и тензорным полем упругих постоянных $\Lambda(\bar{r})$: оба данных поля определены в области $\bigcup_{i=1}^{N_B} G_i$.

В жидкости, окружающей систему тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$, распространяется плоская звуковая волна давления [11]

$$p_0(\bar{r}, t) = A e^{i(\bar{k}_0 \bar{r} - \omega t)} \quad (1)$$

где A – амплитуда (имеет размерность давления); \bar{k}_0 – волновой вектор; $\bar{r} = (x, y) = (x_1, x_2)$ – радиус-вектор; $\omega = |\bar{k}_0| \cdot c$ – циклическая частота; c – скорость звука в идеальной жидкости. После рассеяния волны p_i на системе тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$ образуется результирующее волновое поле $p(\bar{r}, t)$. Разность результирующего и первичного полей $p_s(\bar{r}, t) = p(\bar{r}, t) - p_0(\bar{r}, t)$ есть искомое рассеянное акустическое поле.

В жидкости, окружающей тела G_i , выделяется круглая область Q с центром в начале координат такая, что все тела G_i лежат внутри Q . В дальнейшем в работе под точками области Q понимаются точки, лежащие в Q , но не внутри упругих тел G_i . Таким образом, граница Γ_i является границей между G_i и Q . Участок границы Q , не входящий ни в одно из множеств Γ_i , то есть внешняя граница Q , обозначается в дальнейшем Γ_0 . То есть, Γ_0 – граница между выделенной областью и внешним пространством. Внутри области Q рассматривается результирующее акустическое поле p , вне Q – падающее p_0 и рассеянное p_s поля. Если существуют 2 элемента с общей границей, один из которых принадлежит Q , а другой – G_i , то все их общие узлы лежат на Γ_i .

Поле давления p в Q удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k_0^2 p = 0 \quad (2)$$

где $k_0 = |\bar{k}_0|$. На границе Γ_0 должны выполняться граничные условия

$$p|_{\Gamma_0} = (p_0 + p_s)|_{\Gamma_0} \quad \frac{\partial p}{\partial \eta}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial}{\partial \eta} (p_0 + p_s)|_{\Gamma_0} \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial \eta}$ – производная по направлению внешней нормали $\bar{\eta}$ к Γ_0 . Так как граница является окружностью с центром в начале координат, то $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r}$, где радиальная координата $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поля смещений \bar{u} и напряжений σ в G_i удовлетворяют общим уравнениям движения сплошной среды (модифицированным для случая гармонических колебаний) и обобщённому закону Гука [4]

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad \sigma = \Lambda \cdot \nabla \bar{u} \quad (4)$$

Подставляя закон Гука – второе уравнение (4) – в первое, получаем уравнение относительно \bar{u} , описывающее распространение колебаний в G_i :

$$\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (5)$$

На границе Γ_i должны выполняться граничные условия:

$$\sigma_{\eta\eta}|_{\Gamma_i} = p\bar{\eta}|_{\Gamma_i} \quad \bar{u}|_{\Gamma_i} = \frac{\nabla p}{\rho_i \omega^2} \Big|_{\Gamma_i} \quad (6)$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в совместном интегрировании уравнений (2), (5) с граничными условиями (3), (6).

3. Дискретизация области решения задачи

Операция дискретизации выполняется для областей Q и G_i . Совокупность данных областей разбивается на треугольные конечные элементы. Узлы конечно-элементной сетки нумеруются от 1 до M_U , элементы – от 1 до M_E . Узлы внутри элемента имеют также локальную нумерацию от 1 до 3. Сетка строится таким образом, чтобы каждый элемент можно было однозначно определить как принадлежащей жидкой области Q или одному из тел G_i (при этом допускается, что участок элемента может выходить за пределы обозначенной области или тела, но подобными участками при решении пренебрегаем).

Каждый ξ -ый элемент снабжается локальной системой координат (e_1, e_2) , связанной с глобальной декартовой системой (x, y) посредством соотношений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 \begin{pmatrix} x^{(\beta\xi)} \\ y^{(\beta\xi)} \end{pmatrix} N_{\beta}(e_1, e_2) \quad (7)$$

где $x^{(\beta\xi)}$ и $y^{(\beta\xi)}$ – глобальные координаты β -ого узла ξ -ого элемента, $N_{\beta}(e_1, e_2)$ – функции формы (координатные функции), определяемые для треугольного элемента первого порядка по формулам

$$N_1 = 1 - e_1 - e_2 \quad N_2 = e_1 \quad N_3 = e_2 \quad (8)$$

Локальные координаты элемента могут принимать значения в следующих пределах: $0 \leq e_1 \leq 1$, $0 \leq e_2 \leq 1$, $0 \leq e_1 + e_2 \leq 1$. Значения искомым величин p , u_x , u_y в β -ом узле (в глобальной нумерации) обозначаются $p^{(\beta)}$, $u_x^{(\beta)}$, $u_y^{(\beta)}$. При необходимости использования локальной нумерации, значения искомым величин p , u_x , u_y в β -ом узле ξ -ого элемента обозначаются $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$. Как давление, так и смещения считаются определёнными во всех узлах сетки. При этом в случае, если β -ый узел лежит вне жидкости, принимается $p^{(\beta)} = 0$. Если β -ый узел лежит вне упругих тел, принимается $u_x^{(\beta)} = 0$, $u_y^{(\beta)} = 0$. Пусть q – какая-либо из величин p , u_x , u_y . Тогда в произвольной точке ξ -ого элемента значение q определяется как

$$q = \sum_{\beta=1}^3 q^{(\beta\xi)} N_{\beta}(e_1, e_2) \quad (9)$$

В соответствии с технологией метода конечных элементов, уравнения (2), (5) и граничные условия (3), (6) необходимо заменить дискретными аналогами.

Одной из основных операций, выполнение которой необходимо в процессе решения задачи дифракции с помощью метода конечных элементов, является вычисление градиента функции формы: ∇N_{β} . Несмотря на то, что N_{β} определяется как функция локальных координат элемента, производные берутся по глобальным координатам:

$$\nabla N_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_j} \begin{pmatrix} \frac{\partial e_j}{\partial x} \\ \frac{\partial e_j}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Производные $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_j}$ определяются из формул (8). Для вычисления производных $\frac{\partial e_j}{\partial x}$ и $\frac{\partial e_j}{\partial y}$ необходимо выразить локальные координаты через глобальные, используя формулу (7), и выполнить дифференцирование. Решая уравнение (7) с учётом (8) относительно e_1 и e_2 , получаем:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(2\xi)} - x^{(1\xi)} & x^{(3\xi)} - x^{(1\xi)} \\ y^{(2\xi)} - y^{(1\xi)} & y^{(3\xi)} - y^{(1\xi)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x^{(1\xi)} \\ y - y^{(1\xi)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Вычисляя производные $\frac{\partial e_j}{\partial x}$ и $\frac{\partial e_j}{\partial y}$ с помощью (11) и подставляя их в (10), получаем искомые производные $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial x}$ и $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial y}$. Одним из применений формулы (10) является дифференцирование искомых величин p , u_x и u_y :

$$\nabla q = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 q^{(i\xi)} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 \left[q^{(\beta\xi)} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_l} \begin{pmatrix} \frac{\partial e_l}{\partial x} \\ \frac{\partial e_l}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \quad (12)$$

4. Построение локальной матрицы упругого элемента

Рассмотрим элемент E_{ξ} сетки с номером ξ , принадлежащий упругой области G_k . Колебания в элементе удовлетворяют (5). Если участок границы ∂E_{ξ} элемента находится на Γ_k , то выполняются граничные условия (6). В соответствии с методом Галеркина [5], умножим обе части (5) на функцию формы N_{β} и проинтегрируем по площади элемента E_{ξ} :

$$\int_{E_{\xi}} N_{\beta} (\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u}) dS = 0$$

где dS – элемент площади элемента E_j . Преобразуем полученное уравнение:

$$\int_{E_{\xi}} \nabla \cdot (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_{\xi}} \nabla N_{\beta} \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS + \int_{E_{\xi}} N_{\beta} \rho \omega^2 \bar{u} dS = 0 \quad (13)$$

На основе формулы Гаусса-Остроградского, первый интеграл в (13) равен

$$\int_{E_{\xi}} \nabla \cdot (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS = \int_{\partial E_{\xi}} (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{\eta} dL$$

где dL – элемент длины границы элемента E_{ξ} , $\bar{\eta}$ – внешняя нормаль к границе элемента. Тогда (13) принимает вид

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\partial E_\xi} (N_\beta \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{\eta} dL = 0$$

Граница ∂E_ξ в общем случае состоит из участков, лежащих на Γ_k , и участков границы между несколькими упругими элементами. Последними можно пренебречь, так как они вносят взаимно противоположные вклады в глобальную матрицу (внешние нормали $\bar{\eta}$ граничащих элементов противоположны). Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\Gamma_{kj}} (N_\beta \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{\eta} dL = 0 \quad (14)$$

где $\Gamma_{k\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_k . Для дальнейшего преобразования уравнения (14) следует рассмотреть условия (6). Первое условие для его использования в численном алгоритме следует модифицировать, дополнив его вектором дополнительных неизвестных \bar{f} , равным нулю во всех узлах, кроме находящихся на границе Γ_k . Домножим обе части модифицированного первого условия (6) на N_β и проинтегрируем по $\Gamma_{k\xi}$:

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta (\bar{\eta} \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \bar{f} - p\bar{\eta}) dL = 0$$

Сравнивая данное условие с (14), можем преобразовать (14):

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\Gamma_{kj}} N_\beta (p\bar{\eta} - \bar{f}) dL = 0 \quad (15)$$

Домножим обе части второго условия (6) на N_β и проинтегрируем по $\Gamma_{k\xi}$:

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \bar{\eta} \left(\bar{u} - \frac{\nabla p}{\rho_0 \omega^2} \right) dS = 0 \quad (16)$$

Локальная матрица W_ξ упругого элемента строится на основе векторных уравнений (15) и (16), записанных для каждой функции формы N_n . 3 узла элемента имеют всего 15 неизвестных комплексных параметров ($p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ для каждого β -ого узла данного ξ -ого элемента). Каждому из параметров соответствует отдельная строка матрицы и отдельный столбец. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в 1-ой и 2-ой компонентах уравнения (15) есть элемент матрицы в строках соответственно $u_x^{(\beta\alpha i)}$ и $u_y^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в 1-ой и 2-ой компонентах уравнения (16) есть элемент матрицы в строках соответственно $f_x^{(\beta\xi)}$ и $f_y^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках: в случае упругого элемента правая часть равна нулю, так как свободные члены отсутствуют. Строка $p^{(\beta\xi)}$ в случае упругого элемента также является нулевой (до построения глобальной матрицы).

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{E_\xi} \left\{ \sum_{J=1}^2 \left[\frac{\partial N_\beta}{\partial x_J} \sum_{m,n=1}^2 \frac{\Lambda_{IJ\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_m} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_n} \right) \right] - N_\beta N_\alpha \rho \omega^2 \right\} dS$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $f_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\rho_0\omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha \eta_I dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_I} dL$$

Интегралы, входящие в описанные ячейки матриц, могут быть посчитаны численно. Следует помнить, что в общем случае компоненты Λ и плотность ρ являются функциями координат, что учитывается при интегрировании. Ячейки матрицы упругого элемента, не упомянутые в списке выше, равны нулю.

5. Построение локальной матрицы жидкого элемента

Рассмотрим элемент E_ξ сетки с номером ξ , принадлежащий жидкой области. Колебания в элементе удовлетворяют (2). Если участок границы элемента находится на Γ_0 , то выполняются граничные условия (3). Если участок границы элемента находится на Γ_k , то выполняются граничные условия (6). В соответствии с методом Галеркина [1, 2, 3], умножим обе части (2) на функцию формы N_β и проинтегрируем по площади элемента E_ξ :

$$\int_{E_\xi} N_\beta (\Delta p + k_0^2 p) dS = 0$$

где dS – элемент площади элемента E_ξ . Преобразуем полученное уравнение:

$$\int_{E_\xi} \nabla \cdot (N_\beta \nabla p) dS - \int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS + \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS = 0 \quad (17)$$

На основе формулы Гаусса-Остроградского, первый интеграл в (17) равен

$$\int_{E_\xi} \nabla \cdot (N_\beta \nabla p) dS = \int_{\partial E_\xi} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL$$

где dL – элемент длины границы элемента E_ξ , $\bar{\eta}$ – внешняя нормаль к границе элемента. Тогда (17) принимает вид

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\partial E_\xi} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL = 0$$

Граница ∂E_j в общем случае состоит из участков, лежащих на Γ_0 ; участков, лежащих на Γ_k ; участков границы между несколькими жидкими элементами. Последними можно пренебречь, так как они вносят взаимно противоположные вклады в глобальную матрицу (внешние нормали $\bar{\eta}$ граничащих элементов противоположны). Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL - \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL = 0 \quad (18)$$

где $\Gamma_{0\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_0 ; $\Gamma_{k\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_k . Для дальнейшего преобразования (18) следует рассмотреть граничные условия. Из второго условия (6) получаем равенство $\nabla p = \rho_0 \omega^2 \bar{u}$. При его подстановке в (18) получаем:

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL - \rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta u_\eta dL = 0 \quad (19)$$

где $u_\eta = \bar{u} \cdot \bar{\eta}$ – смещение в направлении внешней нормали $\bar{\eta}$.

Далее следует рассмотреть условия (3). Падающую p_0 и рассеянную p_s волны вне области Q представим в виде бесконечных сумм:

$$p_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m J_m(k_0 r) e^{im\varphi} \quad p_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m(k_0 r) e^{im\varphi} \quad (20)$$

где $\gamma_m = Ai^m$; A_m – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий; J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m ; H_m – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m ; r и φ – цилиндрические координаты, связанные с декартовыми посредством соотношений $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$.

Подставляя (20) в первое условие (3), получаем:

$$p|_{r=R} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\gamma_m J_m(k_0 R) + A_m H_m(k_0 R)) e^{im\varphi}$$

где R – радиус внешней поверхности области Q . Левую часть равенства следует выразить через узловые значения давления на пов-ти Γ_0 . Введём обозначение: $\vartheta_{\beta\xi} = 1$, если участок границы ξ -ого элемента, содержащий β -ый узел данного элемента (в локальной нумерации), лежит на Γ_0 ; и $\vartheta_{\beta\xi} = 0$ в противном случае. Тогда последнее равенство переписывается в виде:

$$\sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 p^{(\beta\xi)} \vartheta_{\beta\xi} N_\beta = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\gamma_m J_m(k_0 R) + A_m H_m(k_0 R)) e^{im\varphi}$$

Учитывая равенство $\int_0^{2\pi} e^{im_1\varphi} e^{-im_2\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}$ (где $\delta_{m_1 m_2} = \begin{cases} 1, & m_1 = m_2 \\ 0, & m_1 \neq m_2 \end{cases}$ – символ Кронекера), применим к обеим частям последнего равенства оператор скалярного произведения, домножив их на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрировав по окружности $r = R$. В итоге, выразив из полученной формулы A_m , для каждого целого m получим:

$$A_m = -\frac{\gamma_m J_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} + \frac{1}{2\pi R H_m(k_0 R)} \sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 p^{(\beta\xi)} \vartheta_{\beta\xi} \langle N_\beta, e^{-im\varphi} \rangle \quad (21)$$

где $\langle N_\beta, e^{-im\varphi} \rangle = \int_0^{2\pi} N_\beta e^{-im\varphi} dL = 2\pi R \int_0^{2\pi} N_\beta e^{-im\varphi} d\varphi$. Теперь подставим (20) во второе условие (3), получим:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_{r=R} = (\nabla p \cdot \bar{\eta})|_{r=R} = k_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) + A_m H'_m(k_0 R) \right) e^{im\varphi}$$

Подставим в данную формулу представление (21), получим:

$$\begin{aligned} (\nabla p \cdot \bar{\eta})|_{r=R} = & \sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 \left[p^{(\beta\xi)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 H'_m(k_0 R) \langle N_{\beta}, e^{-im\varphi} \rangle}{2\pi R H_m(k_0 R)} \right] + \\ & + k_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) - \frac{\gamma_m J_m(k_0 R) H'_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

В итоге, правая часть подставляется в интеграл по $\Gamma_{0\xi}$ в уравнении (19) вместо $\nabla p \cdot \bar{\eta}$. Можно видеть, что в данном выражении присутствуют значения давления для узлов, не входящих в элемент E_{ξ} . Это является особенностью дифракционных задач: если в других задачах механики непосредственно друг с другом связаны только узлы, расположенные в одном элементе, то в задачах дифракции связаны друг с другом все узлы, находящиеся на внешней поверхности области Q , для которой выполнена дискретизация. Это не позволяет в дальнейшем рассматривать матрицу системы как «приближённо диагональную». В связи с данным фактом, матрицы для каждого жидкого элемента, получаемые из (19), удобно разделить на два типа: матрицы, учитывающие связи узлов внутри элемента (обычные локальные матрицы); и матрицы, учитывающие связи узлов всей внешней границы Q (далее они называются матрицами внешних узлов).

Локальная матрица W_{ξ} жидкого элемента строится на основе скалярного уравнения (19) без учёта интеграла по $\Gamma_{0\xi}$, записанного для каждой функции формы N_{β} . Каждому из параметров $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ для каждого узла соответствует отдельная строка матрицы и отдельный столбец. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в уравнении (19) есть элемент матрицы в строке $p^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках: в случае жидкого элемента без учёта интеграла по $\Gamma_{0\xi}$ правая часть равна нулю. Строки $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ в случае жидкого элемента являются нулевыми (до построения глобальной матрицы).

Содержимое ячейки матрицы жидкого элемента на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $q^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{E_{\xi}} \left(-k_0^2 N_{\beta} N_{\alpha} + \sum_{J=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_J} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_J} \right) dS$$

Содержимое ячейки матрицы жидкого элемента на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_{\beta} N_{\alpha} \eta_I dL$$

Матрица внешних узлов W'_{ξ} (и правая часть \bar{F}_{ξ} расширенной матрицы) строится на основе интеграла по $\Gamma_{0\xi}$ в составе скалярного уравнения (19), записанного для каждой функции формы N_{β} данного элемента ξ , для которой верно равенство $\vartheta_{\beta\xi} = 1$. Каждому из параметров $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ каждого узла, для которого верно равенство $\vartheta_{\beta\xi} = 1$, соответствует отдельная строка матрицы. Каждому узлу с глобальным номером α соответствуют столбцы $p^{(\alpha)}$, $u_x^{(\alpha)}$, $u_y^{(\alpha)}$, $f_x^{(\alpha)}$, $f_y^{(\alpha)}$, которые могут быть ненулевыми только в случае, если для некоторого элемента ξ' , содержащего узел α (локальный номер узла в данном элементе равен α') верно $\vartheta_{\alpha'\xi'} = 1$. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha'\xi')}$ в уравнении

(19) есть элемент матрицы в строке $p^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha'\xi')}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках. Строки $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ в случае данной матрицы являются нулевыми (до построения глобально).

Содержимое ячейки матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $q^{(\alpha'\xi')}$ имеет вид

$$- \int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_0 H'_m(k_0 R)}{2\pi R H_m(k_0 R)} \times \langle N_{\alpha'}, e^{-im\varphi} \rangle \right) dL$$

Содержимое правой части (столбца свободных членов) расширенной матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{0\xi}} k_0 N_\beta \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) - \frac{\gamma_m J_m(k_0 R) H'_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} \right) dL$$

Интегралы, составляющие ячейки матриц жидких элементов и внешних узлов, могут быть посчитаны численно. Интегралы в ячейке матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $q^{(\alpha'\xi')}$ суммируются по всем элементам ξ' , содержащим узел $p^{(\alpha'\xi')}$.

6. Построение глобальной матрицы и определение рассеянной волны

После формирования локальных матриц W_ξ , матриц внешних узлов W'_ξ и векторов свободных членов \bar{F}_ξ расширенных матриц внешних узлов для каждого элемента ξ на их основе строится глобальная матрица W_{glob} и вектор \bar{F}_{glob} . Каждый элемент глобальной матрицы W_{glob} можно вычислить по формуле:

$$(W_{glob})_{\substack{5(I-1)+a \\ 5(J-1)+a}} = \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \left(\delta_{I u_{\beta\xi}} \cdot \delta_{J u_{\alpha\xi}} \cdot (W_\xi)_{\substack{5(\beta-1)+a \\ 5(\alpha-1)+a}} \right) \right] + \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \left(\delta_{I u_{\beta\xi}} \cdot (W'_\xi)_{\substack{5(\beta-1)+a \\ 5(J-1)+a}} \right) \right] \quad (23)$$

где $u_{\beta\xi}$ – глобальный номер β -ого узла ξ -ого элемента; параметр a принимает натуральные значения от 1 до 5. Матрицу, построенную по формуле (23), следует подвергнуть следующей процедуре модификации: в нулевых строках следует задать единичное значение в ячейке, расположенной на диагонали. Вообще говоря, это касается строк, соответствующих давлению в узлах, не входящих в жидкую область, и соответствующих смещениям и вспомогательным неизвестным в узлах, не входящих в упругие области.

Аналогично, каждая компонента вектора свободных членов \bar{F}_{glob} представим в виде:

$$(\bar{F}_{glob})_I = \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \left(\delta_{I u_{\beta\xi}} \cdot (\bar{F}_\xi)_{5(\beta-1)+a} \right) \right] \quad (24)$$

После формирования матрицы W_{glob} по формуле (23) и вектора \bar{F}_{glob} по формуле (24) решается следующее СЛАУ:

$$W_{glob} \cdot X = \bar{F}_{glob} \quad (25)$$

Решение СЛАУ (25) позволяет отыскать значения давления и смещений в каждом узле множества Q : $p^{(\beta)} = X_{5\beta+1}$, $u_x^{(\beta)} = X_{5\beta+2}$, $u_y^{(\beta)} = X_{5\beta+3}$. Ввиду того, что большинство элементов матрицы W_{glob} являются нулевыми (так как в большинстве случаев взаимодействуют друг с другом только узлы, находящиеся в одном элементе), матрица W_{glob} является разреженной, что значительно упрощает решение СЛАУ (25).

После вычисления узловых значений давления следует воспользоваться формулой (21) для вычисления коэффициентов A_m рассеянной волны (заметим, что для этого используются только значения давления во внешних узлах). Затем – второй формулой (20) для определения рассеянной волны p_s . Таким образом, задача решена.

7. Заключение

В работе описано использование метода конечных элементов для решения задачи плоской звуковой волны на жидкой области, содержащей произвольную конфигурацию линейно упругих тел. Приведена соответствующая постановка задачи. Подробно описан процесс дискретизации задачи, в том числе особенность дифракционного типа задач, при котором особую важность имеет выражение локальных координат элемента сетки через глобальные. Приведены формулы элементов локальных матриц упругих и жидких элементов сетки. Выявлена отличительная особенность дифракционных задач, в которых связь может существовать между узлами, не лежащими в одном элементе. Таким образом, описан процесс применения МКЭ к дифракционным задачам вне зависимости от конфигурации рассеивающих звук тел.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., проф. Скобельцыну Сергею Алексеевичу за помощь в подготовке материала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация – М.: Мир, 1986. 318 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. 543 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Скобельцын С.А. Программа расчета коэффициента линейной неоднородности плотности упругого слоя по отражению монохроматической плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663467, 18.12.2015. 1 с.
6. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Использование МКЭ для решения задачи о рассеянии звука ограниченной неоднородной анизотропной термоупругой пластиной // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007.Т. 13, вып. 2. С. 172–182.
7. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 187–200.

8. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Особенности конечно-элементной формулировки задач о рассеянии звука // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: ТулГУ, 2007. С. 205–207.
9. Скобельцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов / Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 224 с.
10. Скобельцын С.А. Решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим цилиндром с помощью МКЭ // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. С. 298–300.
11. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 348 с.

REFERENCES

1. Gallagher R. 1984, "Finite element method. Basics", *M.: Mir*, 428 p.
2. Zenkevich O., Morgan K. 1986, "Finite elements and approximation", *M.: Mir*, 318 p.
3. Zenkevich O. 1975, "Finite element method in technology", *M.: Mir*, 543 p.
4. Novatsky V. 1975, "Theory of elasticity", *M.: Mir*, 872 p.
5. Skobeltsyn S.A. A program for calculating the coefficient of linear inhomogeneity of the density of an elastic layer based on the reflection of a monochromatic plane sound wave. Certificate of state registration of a computer program No. 2015663467, 12/18/2015. 1 с.
6. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2007, "Using FEM to solve the problem of sound scattering by a limited inhomogeneous anisotropic thermoelastic plate", *Bulletin of TulGU. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, Vol. 13, no. 2. pp. 172–182.
7. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2005, "Finite element method in the problem of scattering of a plane elastic wave by an inhomogeneous cylinder", *Izv. Tula State University. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, Vol. 11. Iss. 5. pp. 187–200.
8. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2007, "Features of the finite element formulation of sound scattering problems", *Mater. international scientific conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"*, *Tula: Tula State University*, pp. 205–207.
9. Skobeltsyn S.A. 2018, "Solving acoustics problems using the finite element method", *Tula: Tula State University Publishing House*, 224 p.
10. Skobeltsyn S.A. 2008, "Solution of the problem of scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic cylinder using FEM", *Mater. international scientific conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"* *Tula: Tula State University Publishing House*, pp. 298–300.
11. Shenderov E.L. 1972, "Wave problems of hydroacoustics", *L.: Shipbuilding*, 348 p.

Получено: 22.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.421

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-256-265

Модель предразрушения слоя с вырезом на основе концепции дуги взаимодействия¹

В. В. Глаголев, В. В. Козлов, А. А. Маркин

Глаголев Вадим Вадимович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vvkozloutsu@mail.ru

Маркин Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: markin.nikram@yandex.ru

Аннотация

Для упругого симметричного тела в виде слоя, ослабленного вырезом и нагружаемого по моде 1 вводится понятие дуги взаимодействия (ДВ). ДВ образует малая окрестность точки максимума удельной свободной энергии в срединном сечении слоя. Поток свободной энергии через ДВ представляется энергетическим произведением (ЭП) - произведением удельной свободной энергии на линейный параметр. Используя известные асимптотические выражения поля напряжений в окрестности вершины выреза получена связь между линейным параметром и радиусом кривизны вершины выреза, обеспечивающая независимость ЭП от радиуса кривизны и линейного параметра. При нулевом значении радиуса кривизны вырез вырождается в математический разрез. В этом случае ЭП сводится к формуле Ирвина. Таким образом, если какой-либо вырез, вырождается в математический разрез, то независимо от геометрии берегов выреза в пределе мы должны приходиться к одному и тому же коэффициенту интенсивности напряжений (КИН). В частности, используем полуэллиптический вырез. Предложена методика определения КИН-1, основанная на представлении аппроксимирующего КИН через безразмерные потоки свободной энергии, принимающие стационарное значение при стремлении радиуса кривизны к нулю. Полученные данным методом значения КИН совпадают с их значениями, приведенными в других источниках на основании анализа раскрытия математического разреза. В частности, рассмотрен слой прямоугольной формы, подвергаемый воздействию распределенной нагрузки. Решения получены МКЭ с использованием программного комплекса CAE Fidesys Разница с известными результатами составила менее одного процента.

Ключевые слова: дуга взаимодействия, энергетическое произведение, поток свободной энергии, коэффициент интенсивности напряжений

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. В. Глаголев, В. В. Козлов, А. А. Маркин. Модель предразрушения слоя с вырезом на основе концепции дуги взаимодействия // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 256–265.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.421

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-256-265

Prefracture model of a layer with a hole based on the interaction arc concept

V. V. Glagolev, V. V. Kozlov, A. A. Markin

Glagolev Vadim Vadimovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Kozlov Viktor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Markin Alexey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: markin.nikram@yandex.ru

Abstract

For an elastic symmetric body in the form of a layer weakened by a hole and loaded in mode 1, the concept of an interaction arc (IA) is introduced. The IA forms a small neighborhood of the point of maximum specific free energy in the middle section of the layer. The free energy flow through IA is represented by the energy product (EP) - the product of the specific free energy and a linear parameter. Using the well-known asymptotic expressions for the stress field in the neighborhood of the hole apex, a relationship is obtained between the linear parameter and the radius of curvature of the hole apex, which ensures the independence of the EP from the radius of curvature and the linear parameter. When the radius of curvature is zero, the hole degenerates into a mathematical cut. In this case, the EP is reduced to the Irwin formula. Thus, if any hole degenerates into a mathematical cut, then regardless of the geometry of the cut edges, in the limit, we must come to the same stress intensity factor (SIF). In particular, we use a semi-elliptical hole. A technique for determining the SIF-1 is proposed, based on the representation of the approximating SIF in terms of dimensionless free energy flows that take a stationary value as the radius of curvature tends to zero. The values of the SIF obtained by this method coincide with their values given in other sources based on the analysis of the disclosure of the mathematical cut. In particular, a rectangular layer subjected to a distributed load is considered. The solutions were obtained by the FEM using the CAE Fidesys software package. The difference with the known results was less than one percent.

Keywords: interaction arc, energy product, free energy flow, stress intensity factor

Bibliography: 18 titles.

For citation:

V. V. Glagolev, V. V. Kozlov, A. A. Markin, 2023, "Prefracture model of a layer with a hole based on the interaction arc concept", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 256–265.

1. Введение

В основополагающей статье Ирвина [1] получена связь между упругой энергией, выделяемой при продвижении трещины в виде математического разреза на единицу длины и коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). По существу Ирвин связал чисто энергетический

подход Гриффитса [2] к описанию процессов разделения с распределением полей напряжений и перемещений в окрестности математического разреза в слое конечных размеров. При этом граница слоя и расположение математического разреза определяют величину КИН, пропорциональную внешней нагрузке. Решению данной задачи посвящены многочисленные публикации, в которых рассматриваются как теоретические [3-9], так и экспериментальные методы [10-13] определения КИН. В статьях [14-16] на основе концепции слоя взаимодействия показана стабилизация энергетического произведения (произведения удельной свободной энергии в торцевой части слоя на его толщину) при достижении толщиной слоя малого, но конечного значения. Таким образом устанавливается множество физических разрезов ЭП которых не зависит от их толщины и в энергетическом смысле эквивалентных математическому разрезу. В данной статье концепция ЭП распространяется на слои ослабленные симметричными вырезами, вырождающимися в математический разрез при нулевом значении радиуса кривизны в вершине выреза. Поток свободной энергии через дугу взаимодействия (ДВ) представляется ЭП - произведением удельной свободной энергии на линейный параметр. Используя известные асимптотические выражения поля напряжений в окрестности вершины выреза [17] получена связь между линейным параметром и радиусом кривизны, обеспечивающая независимость ЭП от радиуса кривизны и линейного параметра. В этом случае ЭП сводится к формуле Ирвина. Предложена методика определения K_1 на основе анализа сходимости безразмерного ЭП при уменьшении радиуса кривизны. Приведены примеры численного и аналитического определения КИН.

2. 1. Постановка задачи

Рассматривается материальный слой толщиной h , ослабленный вырезом. Уравнение выреза представим в виде

$$x_1 = x_1(\alpha_2), x_2 = x_2(\alpha_2) \quad (1)$$

где α_2 - параметр, отсчитываемый от точки $x_1 = a$; $x_2 = 0$, данная точка совпадает с точкой минимума кривизны с радиусом кривизны ρ .

При $\rho = 0$ вырез вырождается в математический разрез. В этом случае распределение напряжений в окрестности кончика разреза определяется выражением

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{r}} \Phi_{ij}(\theta)$$

где r, θ - полярные координаты, отсчитываемые от кончика разреза; K_1 (КИН)- коэффициент концентрации напряжений, зависящий от размеров тела и распределения внешней нагрузки по поверхности тела.

Пусть максимальное значение плотности свободной энергии - ψ_0 достигается в точке минимума кривизны выреза. Определим поток свободной энергии через дугу взаимодействия (ДВ). ДВ - образует окрестность точки $\alpha_2 = 0$, с дуговой координатой $-\frac{S_P}{2} \leq S \leq \frac{S_P}{2}$. Поток свободной энергии через ДВ выражается формулой

$$2\gamma = \int_{-\frac{S_P}{2}}^{\frac{S_P}{2}} \vec{n} \cdot \vec{e} \psi ds \quad (2)$$

где \vec{n} - вектор единичной нормали к поверхности выреза; \vec{e} - единичный вектор вдоль вектора потока.

Представим выражение 2 в виде энергетического произведения [14]

$$2\gamma = \delta_0 \psi_0(\rho) \quad (3)$$

где δ_0 - линейный параметр (ЛП).

Из выражений 2 и 3 получим связь ДВ и ЛП в виде

$$\delta_0 = \int_{-\frac{s_p}{2}}^{\frac{s_p}{2}} \vec{n} \cdot \vec{e} \frac{\psi}{\psi_0} ds \quad (4)$$

Из 4 следует, что величина ЛП зависит от длины ДВ, при $s_p \rightarrow 0$, $\delta_0 \rightarrow 0$. Процесс нагружения внешних поверхностей выреза полагаем простым - внешние нагрузки пропорциональны параметру t . При этом плотность свободной энергии неограниченно растет с уменьшением радиуса кривизны при сколь угодно малом t и постоянном a . Потребуем, чтобы поток свободной энергии принимал конечное, не зависящее от радиуса кривизны значение, в некоторой окрестности $0 \leq \rho \leq \rho^*$.

В статье [17] приведены асимптотические формулы распределения напряжений в окрестности точки $x_1 = a$; $x_2 = 0$ произвольного выреза, вырождающегося в математический разрез. Используется полярная система координат с центром в точке $x_1 = a - \frac{\rho}{2}$; $x_2 = 0$. Распределение напряжений вдоль осевой прямой $x_1 \geq a$; $x_2 = 0$ имеет вид

$$\sigma_{11} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right); \sigma_{22} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right); r \geq \frac{\rho}{2} \quad (5)$$

При $\rho = 0$ имеем распределение напряжений на продолжении математического разреза. Напряжения в точке $x_1 = a$; $x_2 = 0$ получаем из 5

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = \frac{2K_1}{\sqrt{\pi\rho}} \quad (6)$$

Находим выражение свободной энергии в точке максимума. Используя 6, получим

$$\psi_0 = \frac{2K_1^2}{\hat{E}\pi\rho} \quad (7)$$

Условие независимости потока свободной энергии будет выполнено, если положить зависимость радиуса кривизны от ЛП в виде

$$\rho = \frac{2\delta_0}{\pi} \quad (8)$$

Из формул (1.3), (1.7) и (1.8) получим следующее выражение потока через ДВ для асимптотических вырезов на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$:

$$2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}} \quad (9)$$

Таким образом на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$ поток энергии не зависит от конфигурации кончика выреза и непосредственно от величины радиуса кривизны и определяется формулой Ирвина 9, при этом раскрытие математического разреза не рассматривается.

Распространим 9 на вырезы с $\rho < \rho^* + \Delta\rho$. Получим представление аппроксимирующего потока в виде

$$2\gamma_\rho = \frac{1}{2}\psi_0(\rho, t)\pi\rho > \psi_0(\rho, t)\delta_0^* \quad (10)$$

В отличие от 9 аппроксимирующий поток зависит от радиуса кривизны, но при стремлении выреза к математическому разрезу выполняется условие

$$2\gamma|_{\rho \rightarrow 0} = 2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}} \quad (11)$$

Исходя из (1.10) и 11 введем при $\rho < \rho^* + \Delta\rho$ аппроксимирующий КИН, зависящий от радиуса кривизны

$$K_{1\rho}^2 = \frac{1}{2}\pi\hat{E}\rho\Psi_0(\rho, t).$$

При стремлении ρ к нулю выполняется условие

$$K_1 = \lim K_{1\rho}|_{\rho \rightarrow 0} \quad (12)$$

Внешнюю нагрузку, распределенную по поверхности выреза представим в виде

$$\vec{P}(\vec{x}_\Sigma, t) = tP_0(\vec{x}_\Sigma)\vec{e}_2,$$

где \vec{x}_Σ - радиус- вектор поверхностных точек.

Учитывая линейную зависимость $K_{1\rho}$ от параметра t запишем аппроксимирующий КИН в виде

$$K_{1\rho} = t\left(\frac{1}{2}\pi\hat{E}\rho\Psi_0(\rho, P_0(x_\Sigma))\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Выделим в выражении 13 составляющую, зависящую от распределения внешней нагрузки и от радиуса кривизны

$$C_{1\rho} = \left(\frac{1}{2}\rho\Psi_0(\rho, P_0(x_\Sigma))\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Теперь, с учетом 14, представим аппроксимирующий КИН 13 в виде

$$K_{1\rho} = t\sqrt{\pi\hat{E}C_{1\rho}} \quad (15)$$

При вырождении выреза в математический разрез из 12 и 15 находим соответствующий КИН как

$$K_1 = t\sqrt{\pi\hat{E}} \lim C_{1\rho}|_{\rho \rightarrow 0} \quad (16)$$

Таким образом, если для какого либо выреза, вырождающегося в математический разрез при $\rho \rightarrow 0$, установлена аналитически или численно зависимость 14, то независимо от геометрии берегов выреза в пределе мы должны, в соответствии с условием 16, приходиться к одному и тому же КИН. В частности, используем полуэллиптический вырез с полуосями $a \gg b$. Уравнение выреза имеет вид

$$\hat{x}_1 = \cos \alpha_2; \hat{x}_2 = \sqrt{\hat{\rho}} \sin \alpha_2; 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

где $\hat{x}_1 = \frac{x_1}{a}$; $\hat{x}_2 = \frac{x_2}{a}$ - безразмерные координаты; $\hat{\rho} = \frac{b^2}{a^2}$ - безразмерный радиус кривизны в точке A , где $\hat{x}_1 = 1$; $\hat{x}_2 = 0$.

В качестве примера определим по предложенной методике КИН прямоугольного в плане тела с размерами $0 \leq x_1 \leq l$; $0 \leq x_2 \leq \frac{h}{2}$. На внешних плоскостях $x_2 = \pm \frac{h}{2}$ тело нагружается растягивающей нагрузкой постоянной интенсивности P . При фиксированном значении внешней нагрузки с помощью МКЭ находим зависимость (1.14) от ρ , уменьшая радиус кривизны выреза.

3. 2. Последовательность решения задачи

С учетом компонент напряжений 6 свободная энергия в точке максимума принимает вид

$$\psi_0 = \frac{\sigma_{22}^2}{2\hat{E}} \quad (18)$$

Используя (2.1) и (1.8) представим поток энергии 3 в следующем виде:

$$2\gamma = \frac{\sigma_{22}^2}{4\hat{E}} \pi \rho. \quad (19)$$

Введем безразмерный (приведенный) поток энергии для полуэллиптического выреза 17

$$2\hat{\gamma} = C_2^2 \hat{\rho} \quad (20)$$

где $C_2 = \frac{\sigma_{22}}{P}$ - коэффициент концентрации напряжений.

С учетом 20 и 17 выражение потока энергии 19 получим в виде

$$2\gamma = \frac{P^2}{4\hat{E}} \pi a 2\hat{\gamma}$$

Используя формулу 20 для последовательности уменьшающихся $\hat{\rho}$, с помощью МКЭ находим численное стационарное значение $2\hat{\gamma} = 2\hat{\gamma}_0$, $\rho < \rho^*$. Зная $2\hat{\gamma}_0$ из условия 11 находим соответствующий КИН, который представим в известной форме

$$K_1 = P \sqrt{\pi a} \cdot Y \quad (21)$$

Здесь $Y = \frac{\sqrt{2\hat{\gamma}_0}}{2}$ - поправочный множитель, который определяется через найденное значение $2\hat{\gamma}_0$.

Для параметров $l = 0.1$ м, $h = 0.2$ м, $a = 0.03$ м, $E = 3 \cdot 10^7$ Па, $\nu = 0.3$, $P = 10^6$ Па на рис. 2.1 показан график зависимости КИН $K_{1Fem}(\lg \rho)$, определенный формулой (2.4). Значения получены из расчетов МКЭ моделей с различными относительными размерами слоя.

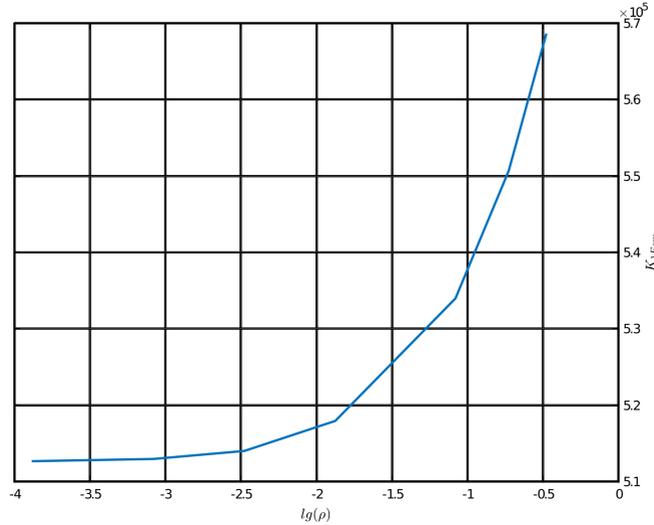


Рис. 1: Зависимость $K_{1Fem}(\lg \rho)$

Из графика устанавливаем пороговое значение радиуса кривизны $\rho^* \approx 10^{-3}$, соответствующее переходу выреза к трещиноподобному дефекту, когда аппроксимирующий КИН достигает стационарного значения - $K_{1Fem}(\rho^*) = K_{1Fem}^* \approx 5.127 \cdot 10^5$ кг $\sqrt{м}/с^2$.

В соответствии с [18] следует эталонное значение $K_1 \approx 5.096 \cdot 10^5$ кг $\sqrt{м}/с^2$. Таким образом, относительная погрешность K_{1Fem}^* по сравнению со справочным значением составляет 0.603

В случае бесконечной пластины зависимость σ_{22} от $\hat{\rho}$ может быть представлена в виде

$$\sigma_{22} = P \frac{2 + \sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}} \quad (22)$$

Из (2.3) и (2.5) получим

$$2\hat{\gamma}_0 = \lim_{\hat{\rho} \rightarrow 0} \frac{(2 + \sqrt{\hat{\rho}})^2}{\hat{\rho}} \hat{\rho} = 4$$

В результате приходим к классическому значению КИН-1 для бесконечной плоскости с математическим разрезом

$$K_1 = P\sqrt{\pi a}$$

4. Заключение

Предложенное представление потока свободной энергии через дугу взаимодействия в виде энергетического произведения позволило, используя асимптотические формулы, установить связь между ЛП и радиусом кривизны, обеспечивающую независимость потока от радиуса кривизны при его стремлении к нулю, при переходе к математическому разрезу данное представление сводится к формуле Ирвина.

Предложена методика определения КИН-1, основанная на представлении аппроксимирующего КИН через безразмерные потоки свободной энергии, принимающие стационарное значение при стремлении радиуса кривизны к нулю. Полученные данным методом значения КИН совпадают с их значениями приведенными в других источниках на основании анализа раскрытия математического разреза.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Irwin G. R. Fracture dynamics // *Fracturing of Metals*. American Society for Metals, Cleveland. 1948. P. 147-166.
2. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1920. A221. P. 163-198.
3. Vainshtok V.A., Kravets P.Y. Calculation of the stress intensity factors and nominal stresses in the plane of a crack from the opening of its edges // *Strength of Materials*. 1990. Vol. 22. P. 807–815. <https://doi.org/10.1007/BF00767438>
4. Гудков Н.А., Чернятин А.С. Расчет параметров механики разрушения на основе эвристического подхода к определению положения вершины трещины // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2018. Т. 2 (119). С. 4-16. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2018-2-4-16>
5. Дильман В.Л., Уткин П.Б. Двухпараметрический метод определения коэффициента интенсивности напряжений КІ трещиноподобных дефектов методом голографической интерферометрии // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. 2022. Т. 14, № 3. С. 60-67. <https://doi.org/10.14529/mmph220307>
6. Захаров А.П., Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 2. С. 100-115. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.08>
7. Miyazaki N., Ikeda T., Munakata T. Analysis of stress intensity factor using the energy method combined with the boundary element method // *Computers and Structures*. 1989. Vol. 33, Issue 3. P. 867-871. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90261-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90261-7)

8. Hellen T.K., Blackburn W.S. The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading // *International Journal of Fracture*. 1975. Vol. 11. P. 605–617. <https://doi.org/10.1007/BF00116368>
9. Diaz F., Patterson E., Yates, J. Assessment of effective stress intensity factors using thermoelastic stress analysis // *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2009. Vol. 44. P. 621-632. <https://doi.org/10.1243/03093247JSA515>
10. Chandra R. Experimental determination of stress intensity factors in patched cracked plates // *Engineering Fracture Mechanics*. 1989. Vol. 33. Issue 1. P. 65-79. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90055-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90055-6)
11. Cerniglia D., Nigrelli V., Pasta A. Experimental and numerical determination of stress intensity factor in composite materials // *Proceedings of the 1999 International Conference on Composite Materials*. 1999. P. 1-8.
12. Lopez-Crespo P. The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2008. Vol. 43, № 8. P. 769-780. <https://doi.org/10.1243/03093247JSA419>
13. Camacho Reyes A., Vasco-Olmo J.M., Lopez-Alba E., Felipe-Sese L., Molina-Viedma A. J., Almazan-Lazano J. A., Diaz F. Evaluation of the Effective Stress Intensity Factor Using Thermoelastic Stress Analysis and 2D Digital Image Correlation // *The 19th International Conference on Experimental Mechanics*. 2022. P. 1-7. <https://doi.org/10.3390/psf2022004027>
14. Glagolev, V.V., Markin, A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *Int. J. Solids and Struct.* 2019. Vol. 158. P. 141-149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
15. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters // *International Journal of Solids and Structures* 2020. Vol. 193-194. P. 447–454. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039>
16. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. № 4. P. 93–97. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.4.08>
17. Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack / *Masters Thesis*. Lehigh University. 1966. P. 40.
18. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений в 2-х томах. Том 2. М.: Мир. 1990. 568 с.

REFERENCES

1. Irwin, G. R 1948, “Fracture dynamics”, *Fracturing of Metals*. *American Society for Metals, Cleveland*, pp. 147-166.
2. Griffith A.A. 1920, “The phenomenon of rupture and flow in solids”, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221, pp. 163-198.
3. Vainshtok V.A. & Kravets P.Y. 1990, “Calculation of the stress intensity factors and nominal stresses in the plane of a crack from the opening of its edges”, *Strength of Materials*, vol. 22, pp. 807–815. doi: 10.1007/BF00767438

4. Gudkov N.A. & Chernyatin A.S. 2018, "Computing parameters of fracture mechanics based on a heuristic approach to determining the location of the crack tip", *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman*, vol. 2 (119), pp. 4-16. doi: 10.18698/0236-3941-2018-2-4-16
5. Dilman V.L. & Utkin P.B. 2022, "Two-parameter method of determining stress intensity factor KI of crack-like defects using holographic interferometry", *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, vol. 14, issue 3, pp. 60–67. doi: 10.14529/mmph220307
6. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N. & Ishtyryakov I.S. 2019, "Plastic stress intensity factor in fracture mechanics", *PNRPU Mechanics Bulletin, 2019*, no. 2, pp. 100-115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
7. Miyazaki N., Ikeda T. & Munakata T. 1989, "Analysis of stress intensity factor using the energy method combined with the boundary element method", *Computers and Structures*, vol. 33, issue 3, pp. 867-871. doi: 10.1016/0045-7949(89)90261-7
8. Hellen T.K. & Blackburn W.S. 1975, "The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading", *International Journal of Fracture*, vol. 11, pp. 605–617. doi: 10.1007/BF00116368
9. Diaz F., Patterson E. & Yates J. 2009, "Assessment of effective stress intensity factors using thermoelastic stress analysis", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 44, pp. 621-632. doi: 10.1243/03093247JSA515
10. Chandra R. 1989, "Experimental determination of stress intensity factors in patched cracked plates", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 33, issue 1, p. 65-79. doi: 10.1016/0013-7944(89)90055-6
11. Cerniglia D., Nigrelli V. & Pasta A. 1999, "Experimental and numerical determination of stress intensity factor in composite materials", *Proceedings of the 1999 Internatoinal Conference on Composite Materials*, pp. 1-8.
12. Lopez-Crespo P. 2008, "The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 43, no. 8, p. 769-780. doi: 10.1243/03093247JSA419
13. Camacho Reyes A., Vasco-Olmo J.M., Lopez-Alba E., Felipe-Sese L., Molina-Viedma A. J., Almazan-Lazano J. A. & Diaz F. 2022, "Evaluation of the effective stress intensity factor using thermoelastic stress analysis and 2D digital image correlation", *The 19th International Conference on Experimental Mechanics*, pp. 1-7. doi: 10.3390/psf2022004027
14. Glagolev, V.V. & Markin, A.A. 2019, "Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter", *Int. J. Solids and Struct*, vol. 158, pp. 141-149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
15. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V. & Markin A.A. 2020 "Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 193-194, pp. 447–454. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039
16. Berto F., Glagolev V.V. & Markin A.A. "A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 4, pp. 93–97. doi:10.15593/perm.mech/2018.4.08
17. Creager M. 1966, "The elastic stress field near the tip of a blunt crack", *Masters thesis, Lehigh University*, p. 40.

18. Murakami Yu. 1990, "Spravochnik po koeffitsiyentam intensivnosti napryazheniy v 2-kh tomakh. Tom 2." ,*Handbook of stress intensity factors in 2 volumes. Vol. 2, Moscow: Mir*, p. 568

Получено: 26.04.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 669.017.12.872

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-266-273

Закономерности изменения энергии взаимодействия индия с элементами периодической таблицы (ПТ) от их порядкового номера

Т. Д. Джураев, А. С. Джафаров, К. Б. Нуров, М. Т. Тошев

Джураев Тухтасун Джураевич — доктор химических наук, профессор, Таджикский технический университет имени академика М. С. Осими (г. Душанбе, Таджикистан).

e-mail: tct45@mail.ru

Джафаров Амиршо Сайобидович — аспирант, Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни (г. Душанбе, Таджикистан).

e-mail: jafarov_as@mail.ru

Нуров Курбонали Бозорович — кандидат химических наук, Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни (г. Душанбе, Таджикистан).

e-mail: nurov-58@mail.ru

Тошев Мансур Толибжонович — кандидат технических наук, Таджикский технический университет имени академика М. С. Осими (г. Душанбе, Таджикистан).

e-mail: toshev1102@mail.ru

Аннотация

Энергия взаимодействия аналогично многим другим характеристикам, является периодическим свойством, зависящим от положения элемента в ПТ Д.И. Менделеева. В работе для установления этой закономерной периодичности используется график, представляющий собой зависимость энергии взаимодействия индия с другими элементами от их порядкового номера.

Графически изображая зависимость, полученную расчетом, величины энергии взаимодействия индия с другими элементами в пределах отдельных групп ПТ от заряда ядра между атомами, можно установить виды взаимодействия компонентов. Исходя из представления о разновидностях типов диаграмм состояния, показывающих на взаимную растворимость элементов друг в друге как в жидком, так и в твердом состояниях в зависимости от температуры и давления, в работе установленным закономерностям удается дать объяснение.

Ключевые слова: индий, элементы ПТ, энергия взаимодействия, периодическое свойство, заряд ядра, закономерность, типы диаграмм состояния, взаимная растворимость, температура, давление, расслаивание.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Т. Д. Джураев, А. С. Джафаров, К. Б. Нуров, М. Т. Тошев. Закономерности изменения энергии взаимодействия индия с элементами периодической таблицы (ПТ) от их порядкового номера // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 266–273.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 669.017.12.872

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-266-273

Patterns of changes in the energy of indium interchange with the elements of the periodic table (PT) from their serial number

T. D. Dzhuraev, A. S. Jafarov, K. B. Nurov, M. T. Toshev

Dzhuraev Tukhtasun Dzhuraevich — doctor of chemical sciences, professor, Tajik Technical University named after academician M. S. Osimi (Dushanbe, Tajikistan).

e-mail: mcm45@mail.ru

Jafarov Amirsho Sayobidovich — postgraduate student, Tajik State Pedagogical University (Dushanbe, Tajikistan).

e-mail: jafarov_as@mail.ru

Nurov Kurbonali Bozorovich — candidate of chemical sciences, Tajik State Pedagogical University (Dushanbe, Tajikistan).

e-mail: nurov-58@mail.ru

Toshev Mansur Tolibzhonovich — candidate of technical sciences, Tajik Technical University named after academician M. S. Osimi (Dushanbe, Tajikistan).

e-mail: toshev1102@mail.ru

Abstract

The energy of interchange, like many other characteristics, is a periodic property of the position of the element in the D.I. Mendeleev. To establish this periodicity, a graph is used that represents the dependence of the energy of interchange of indium with other elements on their serial number.

Graphically depicting the dependence of the energy of interchange within individual groups (IC) on the charge of the nucleus between atoms, it is possible to establish new patterns. Based on the concept of varieties of types of state diagrams, showing the mutual solubility of elements in each other both in liquid and solid states, depending on temperature and pressure, these regularities can be given a satisfactory explanation.

Keywords: Indium, PT elements, interchange energy, periodic property, nuclear charge, regularity, types of state diagrams, mutual solubility, temperature, pressure, separation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

T. D. Dzhuraev, A. S. Jafarov, K. B. Nurov, M. T. Toshev, 2023, "Patterns of changes in the energy of indium interchange with the elements of the periodic table (PT) from their serial number", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 266–273.

1. Введение

Индий находит широкое применение в разработке легкоплавких сплавов. Известны многочисленные трехкомпонентные сплавы на основе индия, которые плавятся при температурах от 15 до 315 °С. Они обладают высокими физико-механическими характеристиками и устойчивостью против коррозии. Применяются в ювелирном деле для лужения и пайки элементов золотых и серебряных изделий. В медицине используются взамен гипсовых повязок и хирургических отливок. Используются сплавы индия также в качестве смазки высоковакуумных

и жидкометаллических затворов. Легкоплавкие индий содержащие сплавы применяются для систем сигнализации и даже в качестве нейтральных сред для синтеза материалов в промышленности полупроводниковой и электронной техники [1].

Исходя из того, что фундаментальной основой для создания новых сплавов являются диаграммы состояния, мы проанализировали имеющуюся информацию о двойных диаграммах состояния, строения, структуре и свойствах сплавов индия с элементами ПТ, приведенную в справочных руководствах, охватывающих публикации до 1971 г., и обобщенную в монографии [1]. Данные по изученным системам индия за период 1971-2000 гг. вошли в справочные издания, вышедшие в 1996-2000 гг. [2-5]. Ряд двойных сплавов систем индия с тугоплавкими металлами до настоящего времени ещё не изучался. Например, отсутствуют данные по взаимной растворимости ниобия, вольфрама, молибдена, рения, тантала, осмия, рутения и др. металлов с индием.

2. Методика и обработка результатов

На основе полученной информации провели разделение систем с участием индия, для которых возможно применение статистических и термодинамических критериев по определению растворимости некоторых тугоплавких элементов в индии. При сравнении полученных другими авторами расчетных данных с экспериментальными установлено существенное их различие [1]. Этим и определился наш интерес по оценке параметров термодинамического взаимодействия для того, чтобы на их основе выяснить виды возможных фазовых равновесий в двойных системах индия с другими элементами ПТ и уточнить их растворимости.

При расчете использовали термодинамическое выражение [6, 7-12]:

$$Q_{12} = ZN_o[H_{12} - 0.5(H_{11} + H_{22})], \quad (1)$$

где Q_{12} – энергия взаимообмена, H_{12} , H_{11} , H_{22} – энтальпии связи различных сочетаний пар атомов, Z – координационное число сплава и N_o – число Авогадро.

Из уравнения (1) следует, что при известных величинах Q_{12} , H_{12} , H_{11} и H_{22} можно найти значения ΔH_{12} , которые количественно определяют возможность образования растворов:

$$\Delta H_{12} = Q_{12} \cdot x_{11} \cdot x_{22}.$$

Поскольку Q_{12} не зависит от состава, ΔH_{12} является параболической функцией состава и должна быть симметричной.

Если Q_{12} будет отрицательной то, следовательно, взаимодействия разнородных пар 1-2 атомов сильнее, чем однородных, то при определенной температуре компоненты 1-2 образуют растворы. Если же Q_{12} будет положительной, то при определенной температуре происходит распад раствора на две несмешивающиеся фазы.

Для оценки возможности взаимной растворимости индия с другими элементами ПТ на основании справочных данных [13] рассчитали значение энергии взаимообмена (Q_{12}) в приближении Гильдебранда - Мотта с использованием электроотрицательностей (E), мольных объемов (V) и параметров растворимости (δ) [7-12]:

$$Q_{12} = V(\delta_1 - \delta_2)^2 - 23,06Z/2(E_1 - E_2)^2 : \text{ккал/г-атом}; \quad (2)$$

Оценка энтальпии атомизации ($\Delta H^{ат}$) и мольного объема (V) даёт возможность определить параметры растворимости (δ) в уравнении (2):

$$\delta = [(\Delta H^{0B} - RT/V)]^{1/2} \quad (3)$$

,где R – газовая постоянная; T – абсолютная температура.

Величина значений энергии взаимнообмена, аналогично многим другим характеристикам [7-12], является периодическим свойством от положения элемента в ПТ Д.И. Менделеева. Для установления этой периодичности используется график, представляющий собой зависимость энергии взаимнообмена индия с другими элементами от их порядкового номера.

Результаты расчетов энергии взаимнообмена индия с элементами ПТ по уравнениям (2) и (3) приведены на рисунке 1 в зависимости от их порядкового номера. Можно видеть, что энергия взаимнообмена (Q_{12}) характеризуется закономерной периодичностью.

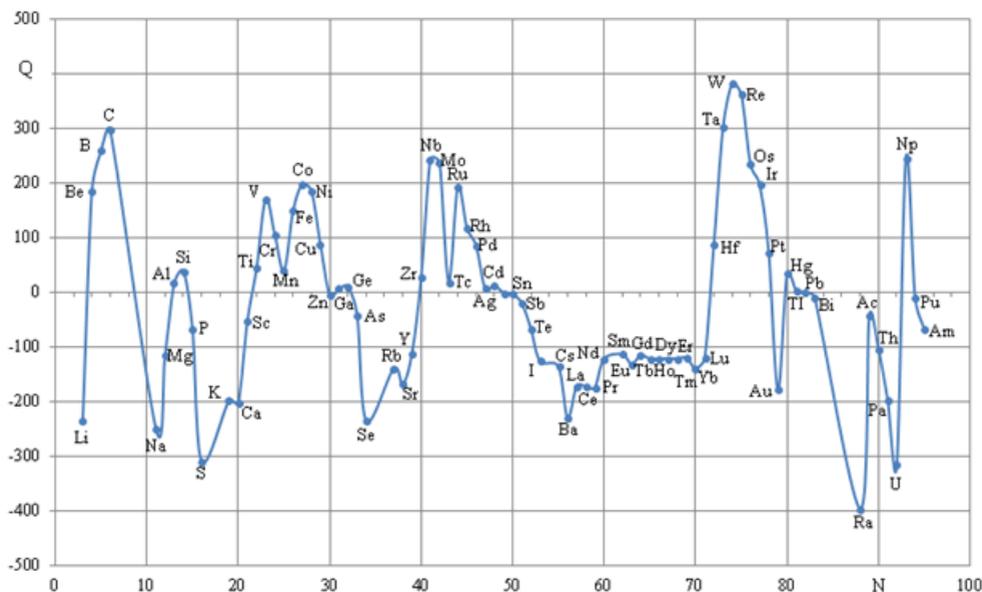


Рис. 1: Кривая зависимости значений энергии взаимнообмена (Q , кДж/г-ат.) индия с элементами ПТ от их порядкового номера (N)

Для значений энергии взаимнообмена индия с элементами в коротких периодах ПТ наблюдается по одному максимуму: во 2-ом периоде на C, в 3-м периоде наибольшее положительное значение приходится на Si, а в длинных периодах - по два максимума: 4-м периоде на V и Co, в 5-м периоде на Nb и Ru, в 6-м периоде на W и Hg и в 7-м периоде на Ac и Np. Можно видеть, что максимумы приходятся на элементы, имеющие высокие значения энергии взаимнообмена (кроме кремния и ртути) и представляющие собой характеристику прочности кристаллической решетки, обнаруживают сложную периодическую зависимость от атомного номера элемента. В пределах каждого периода эти значения растут, достигают максимума, после чего падают. Максимумы в коротких периодах приходятся для бериллия, бора, углерода и алюминия, и кремния, соответственно. Для элементов длинных периодов эти зависимости изменяются несколько сложнее. В пределах периодов эти зависимости обнаруживают несколько максимумов. Первые и вторые максимумы, приходятся на тугоплавкие переходные металлы (ПМ): титан, ванадий, хром, железо, кобальт, никель, ниобий, молибден, тантал, вольфрам, рений, рутений, родий, палладий, осмий, иридий, платина, а также на актиний, торий, протактиний и нептуний. Минимумы приходятся на элементы группы инертных газов (они здесь не указаны), а также на щелочные (ЩМ), щелочноземельные (ЩЗМ) и редкоземельные металлы (РЗМ), золото, серебро, уран и на америций.

Таким образом, графически изображая зависимость энергии взаимнообмена в пределах отдельных групп (ПТ) от заряда ядра между атомами, можно установить новые закономерности. Исходя из представления о разновидностях типов диаграмм состояния, показывающих на взаимную растворимость элементов друг в друге как в жидком, так и в твердом состояниях

в зависимости от температуры и давления, этим закономерностям удается дать удовлетворительное объяснение. Поскольку энергия взаимодействия между компонентами, является одним из лучших критериев растворимости в жидком состоянии [6]. Можно видеть (см. рис.1), что по значениям Q_{12} элементы разделяются на два класса [7-12]:

- 1) с энергией взаимодействия $Q_{12} < 0$; [$H_{12} < 0.5 (H_{11} + H_{22})$],
- 2) с энергией взаимодействия $Q_{12} > 0$; [$H_{12} > 0.5 (H_{11} + H_{22})$].

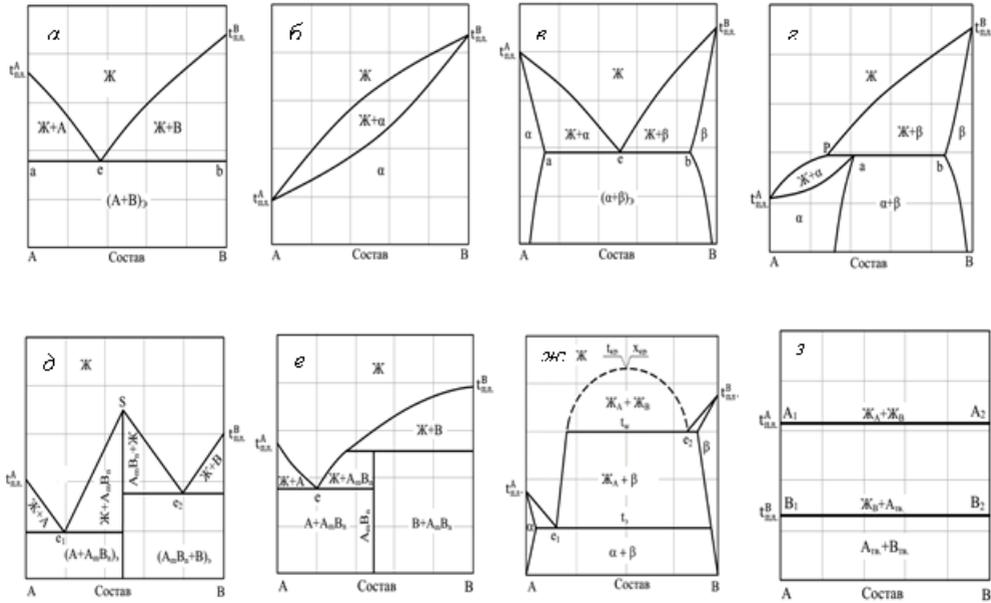


Рис. 2: Виды фазовых равновесий в бинарных системах:первого типа – а, второго типа – б, третьего типа – в, г, четвертого типа – д, е, пятого типа – ж, з

Отрицательные значения Q_{12} указывают на сплавообразование в системах индий - элементы ПТ, на диаграммах состояния которых возможно наблюдать наличие механических смесей, областей жидких, твёрдых растворов и интерметаллидов (см. рис. 2. а - е). Расслаиванием компонентов в жидкости и образованием незначительных твёрдых растворов характеризуются двухкомпонентные системы индия, когда $Q_{12} > 0$ (рис. 2.ж, з). Анализ показал, что они подтверждаются имеющимися расчётными и опытными данными [2-5, 7-12].

Несмотря на удобность использования значений энергии взаимодействия для оценки взаимодействия, они оказались недостаточными для прогноза диаграмм состояния с расслаиванием, монотектикой и полным отсутствием взаимодействия индия с другими компонентами. В связи с этим, в работах [7-13] предложен новый критерий – степень ближнего порядка σ_{12} для определения взаимодействия в подобных системах, который хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Для разграничения расслаивающихся систем индия с другими элементами нами также в расчётах применён указанный критерий, значения которого определяли по следующему уравнению [7-12]:

$$(1 - \sigma)/(1 + \sigma) = \exp(-\Delta H/kT) \quad (4)$$

, где k - постоянная Больцмана, а $\Delta H = [0.5(H_{11} + H_{22})]$.

Мы исходили из того, что если значения ΔH положительны, то σ_{12} аналогично примет плюсовые значения. Это указывает на ближний порядок. Если ΔH отрицательна, σ_{12} также будет отрицательной, то есть происходит взаимодействие одноименных частиц 1-1 (индий-индий) и 2-2 (элемент-элемент), а взаимодействие пар 1-2 (индий-элемент) невозможно.

Если принять в расчет теплоты атомизации, то энтальпии образования связей можно рассчитать для компонентов систем индия, учитывая, что имеется 1 грамм-моль атомов 1-1 и 2-2 [7-13]:

$$-\delta_1^{0B} = 0.5zN_0H_{11и} - \Delta_2^{0B} = 0.5zN_0H_{22} \quad (5)$$

Следовательно, с учетом уравнения (4), получим:

$$12zN_0 = Q_{12} - \delta_1^{0B} - \delta_2^{0B}. \quad (6)$$

Вычисленные по уравнениям (1) – (6) значения Q_{12} и σ_{12} для систем индия с другими элементами подверглись анализу. Общий вид диаграмм состояния систем с положительными значениями энергии взаимодействия представлен на рисунке 3.

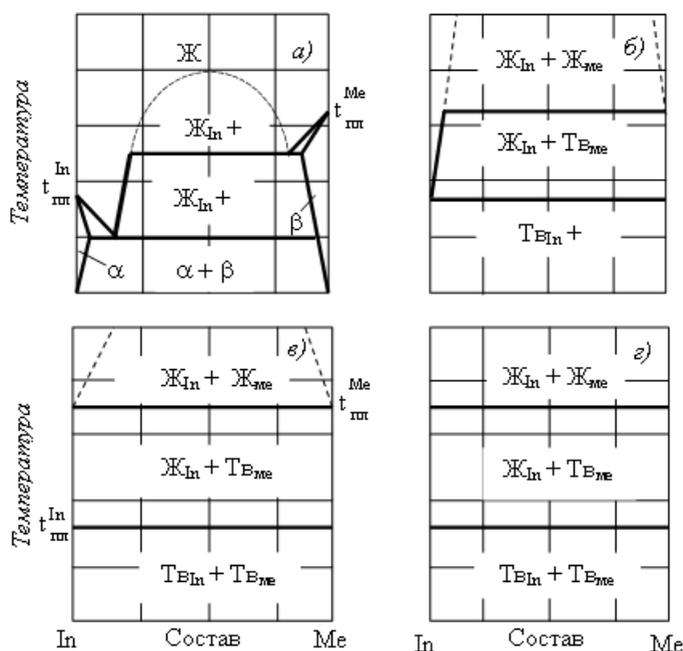


Рис. 3: Виды расслаивания (предельные (а, г) и (б, в)) в двухкомпонентных системах индия с другими элементами ПТ Д. И. Менделеева

3. Выводы

Проведённый анализ расчёта показал, что к системам, имеющим $Q_{12} > 0$ и $\sigma_{12} \approx 1$, относятся системы индия с элементами: Be, Al, Si, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zr, Mo, Tc, Ru, Rh, Pd, Hf, Ta, W, Re, Os, Ir, Pt, Hg, Np. Их диаграммы состояния характеризуются не смешиваемостью компонентов в жидком и образованием ограниченных растворов в твёрдом состояниях, то есть в них наблюдается монотектический тип взаимодействия (рис. 3, а).

К системам, имеющим $Q_{12} > 0$ и $\sigma_{12} \approx -1$, относятся системы индия с В, С, Nb, в которых компоненты полностью не смешиваются как в жидком, так и в твёрдом состояниях. В них при охлаждении наблюдается, вначале, кристаллизация легкоплавкого, затем тугоплавкого элементов (рис. 3, г).

Если значения степени ближнего порядка (σ_{12}) близки к нулевым отметкам, то система будет характеризоваться проявлением промежуточных видов расслаивания (рис. 3 (б) и (в)), многие из которых подтверждены экспериментально [14-16]. Таким образом, установленные

закономерности следует рассматривать как возможное средство оценки значения энергии взаимнообмена для проверки экспериментальных результатов по типам диаграмм состояния индия с элементами ПТ Д.И. Менделеева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яценко, С.П. Индий. Свойства и применение / С.П. Яценко. – М.: Наука, 1987. – 250 с.
2. Диаграммы состояния двойных металлических систем: Справочник / под. общ. ред. Н.П. Лякишева. – М.: Машиностроение, 1996. – Т.1. – 992 с.
3. Диаграммы состояния двойных металлических систем: Справочник / под. общ. ред. Н.П. Лякишева. – М.: Машиностроение, 1997. – Т.2. – 1024 с.
4. Диаграммы состояния двойных металлических систем: Справочник / под. общ. ред. Н.П. Лякишева. – М.: Машиностроение, 2001. – Т.3. Кн. 1. – 872 с.
5. Диаграммы состояния двойных металлических систем: Справочник / под. общ. ред. Н.П. Лякишева. – М.: Машиностроение, 2000. – Т.3. Кн. 2. – 448 с.
6. Мельвин-Хьюз, Э.А. Физическая химия / Э.А. Мельвин-Хьюз. – М.: ИЛ, 1962. – Т.2. – 1148с.
7. Бурыйлёв, Б.П. Термодинамика металлических растворов внедрения. / Б.П. Бурыйлёв. – Ростов-на-Дону: Ростовский университет, 1984. – 160 с.
8. Джураев, Т.Д. Диаграмма состояния и термодинамические свойства системы барий-лантан / Т.Д. Джураев // Докл. АН Тадж.ССР, – 1989. Т. 32. – № 11. – С. 754-756.
9. Джураев Т.Д., Расчет термодинамических свойств сплавов системы Cu-Nb. / Т.Д. Джураев, М.Т. Тошев, Р.А. Нимонов // Вестник педагогического университета. – Душанбе, № 1(10-11). 2021. С 82-85.
10. Джураев, Т.Д. Диаграммы состояния и термодинамика сплавов бария: монография / Т.Д. Джураев, Э.Р. Газизова, У.А. Муминов. – Германия: LAP LAMBERT AP, 2014. – 132 с.
11. Свелин, Р.А. Термодинамика твердого состояния / Р.А. Свелин – М.: Металлургия, 1968. – 315 с.
12. Джураев, Т.Д. Разработка композиций и сплавов кальция, стронция и бария: дис. док. хим. наук: 02.00.01 / Джураев Тухтасун Джураевич. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1991. – 327с.
13. Физико-химические свойства элементов: Справочник / Под ред. Г.В. Самсонова. – Киев: Наукова думка, 1965. – 807с.
14. Джураев, Т.Д., Степень ближнего порядка, критерий для определения разновидности расслаивающихся систем / Т.Д. Джураев, А.В. Вахобов // Докл. АН Тадж. ССР, – 1986. – Т.29. №1. – С. 32-35.
15. Джураев, Т.Д. Степень ближнего порядка и разновидности диаграмм состояний расслаивающихся систем / Т.Д. Джураев // Мат. Всесоюзной конференции «По диаграммам состояния металлических систем» М.: ИМЕТ им. Байкова А.А., 1989. – С. 8-9.
16. Джураев, Т.Д. Диаграммы состояния и термодинамика сплавов свинца: монография / Т.Д. Джураев, Ф.К. Ходжаев, Э.Р. Газизова, И.Ш. Муслимов. – Душанбе: ТТУ им. акад. М.С. Осими, 2021. – 116 с.

REFERENCES

1. Yatsenko, S.P., 1987, "Indium. Properties and Application", Moscow: Nauka, - 250 p.
2. Lyakishev, N. P., 1996, "State Diagrams of Dual Metallic Systems: Handbook", M.: Mashinostroenie, Vol. 1. 992 p.
3. Lyakishev, N. P., 1997, "State diagrams of double metal systems: Handbook", M.: Engineering, Vol. 2, 1024 p.
4. Lyakishev, N. P., 2001, "Diagrams of state of binary metal systems: Handbook", Moscow: Mashinostroenie, Vol. 3. 1. - 872 p.
5. Lyakishev, N. P., 2000, "Diagrams of state of binary metal systems: Handbook", M.: Engineering, Vol. 3. 2. - 448 p.
6. Melvin-Hughes, E.A., 1962, "Physical Chemistry", M.: IL, Vol.2., 1148 p.
7. Burylev, B. P., 1984, "Thermodynamics of metallic solutions of introduction", Rostov-on-Don: Rostov University, 160 p.
8. Dzhuraev, T. D., 1989, "State diagram and thermodynamic properties of the barium-lanthanum system", Dokl. of the Academy of Sciences of the Tajik SSR, Vol. 32, № 11, pp. 754–756.
9. Dzhuraev, T. D., Toshev, M. T., Nimonov, R. A., 2021, "Calculation of thermodynamic properties of alloys of Cu-Nb system", Bulletin of Pedagogical University. - Dushanbe, № 1(10-11), pp. 82–85.
10. Dzhuraev, T. D., Gazizova, E. R., Muminov, U. A., 2014, State diagrams and thermodynamics of barium alloys: monograph, Germany: LAP LAMBERT AP, 132 p.
11. Svelin, R. A., 1968, "Thermodynamics of solid state", M.: Metallurgy, 315 p.
12. Dzhuraev, T. D., 1991, "Development of compositions and alloys of calcium, strontium and barium: Ph.D. in Chemistry: 02.00.01", M.: Lomonosov Moscow State University, 327 p.
13. Samsonov, G. V., 1965, "Physical and chemical properties of elements: Handbook", Kiev: Naukov Dumka, 807 p.
14. Dzhuraev, T. D., Vakhobov A. V., 1986, "Degree of near-order, a criterion for determining the variety of stratifying systems", Dokl. SSR, Vol. 29. № 1, pp. 32–35.
15. Dzhuraev, T. D., 1989, "Degree of near-order and varieties of state diagrams of stratifying systems", Mat. All-Union Conference on State Diagrams of Metal Systems, (IMET named after A.A. Baykov), pp. 8–9.
16. Dzhuraev, T.D., Khojaev, F.K., Gazizova, E.R., Muslimov, I.S., 2021, State diagrams and thermodynamics of lead alloys: monograph, Dushanbe: TTU named after Acad. M. S. Osimi, 116 p.

Получено: 30.04.2022

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-274-288

Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины¹

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается дифракция звуковых волн неоднородной изотропной цилиндрической оболочкой конечной длины произвольной толщины. Полагается, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Плотность и модули упругости материала оболочки описываются непрерывными функциями радиальной координаты. Первичное поле возмущений представляет собой плоскую гармоническую звуковую волну, наклонно падающую на тело.

Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Показано, что использование квадратурных формул по параллелепipedальным сеткам Коробова позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом последовательного интегрирования по квадратурной формуле трапеций. Проведено сопоставление времени вычисления потенциала поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой, двумя методами вычисления интегралов.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала оболочки на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, конечная цилиндрическая оболочка, квадратурные формулы, периодизация, параллелепipedальные сетки Коробова.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 274–288.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-274-288

Diffraction of sound waves on an inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length

N. N. Dobvol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov

Dobvol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: nikolai.dobvol'skiy@gmail.com

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

The article considers the diffraction of sound waves by an inhomogeneous isotropic cylindrical shell of finite length of arbitrary thickness. It is assumed that there is a vacuum in the cavity of the cylindrical shell. The density and elastic modulus of the shell material are described by continuous functions of the radial coordinate. The primary field of disturbances is a plane harmonic sound wave falling obliquely on the body.

For the scattered field, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used. It is shown that the use of quadrature formulas for parallelepipedal Korobov grids makes it possible to reduce the number of calculations with approximate calculation of integrals. This method is compared with the calculation of integrals by the method of sequential integration using the quadrature formula of trapezoids. The calculation time of the field potential scattered by a finite cylindrical shell is compared by two methods of calculating integrals.

A significant effect of the inhomogeneity of the shell material on the sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies has been revealed.

Keywords: scattering, sound waves, a finite cylindrical shell, quadrature formulas, periodization, parallelepipedal Korobov grids.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

N. N. Dobvol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov, 2023, "Diffraction of sound waves on an inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 274–288.

1. Введение

Тело, имеющее форму конечного цилиндра, хорошо аппроксимирует многие реальные объекты и элементы конструкций. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах. Конечные цилиндрические рассеиватели звука изучены в гораздо меньшей степени.

В [1] найдено приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на жестком цилиндре конечной длины в случае, когда длина цилиндра много больше

длины волны. Рассеяние плоской звуковой волны конечной упругой цилиндрической оболочкой и конечным упругим сплошным круговым цилиндром изучено в [2, 3]. В [4] экспериментально определено сечение обратного рассеяния сплошного упругого цилиндра конечной длины в водной среде при широком диапазоне изменения длины и радиуса цилиндра. Рассеяние звука упругим сплошным цилиндром, ограниченным на концах полусферами рассмотрено в [5]. Работы [6, 7] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [10] построена приближенная формула для давления акустического поля, рассеянного конечным импедансным цилиндром, в дальней зоне. В [11] изучено рассеяние акустических полей упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины. В [12] исследованы некоторые особенности рассеяния звука упругими цилиндрическими оболочками с полусферическими законцовками. В [13, 14] получена формула для звукового давления поля, рассеянного конечным сплошным цилиндром, в дальней зоне. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрические рассеиватели являются однородными изотропными телами. Рассеяние плоской звуковой волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием исследовано в [15].

В настоящей работе решается задача дифракции плоских звуковых волн на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины L . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус – r_1 ($r_1 < L$), а внутренний – r_0 . Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$ (рис. 1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Полагаем, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} , который лежит в плоскости xz и образует угол θ_0 с положительным направлением оси z .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t], \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; ω – круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0, 0, k \cos \theta_0)$ – волновой вектор; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; $k = |\mathbf{k}|$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой.

3. Аналитическое решение

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

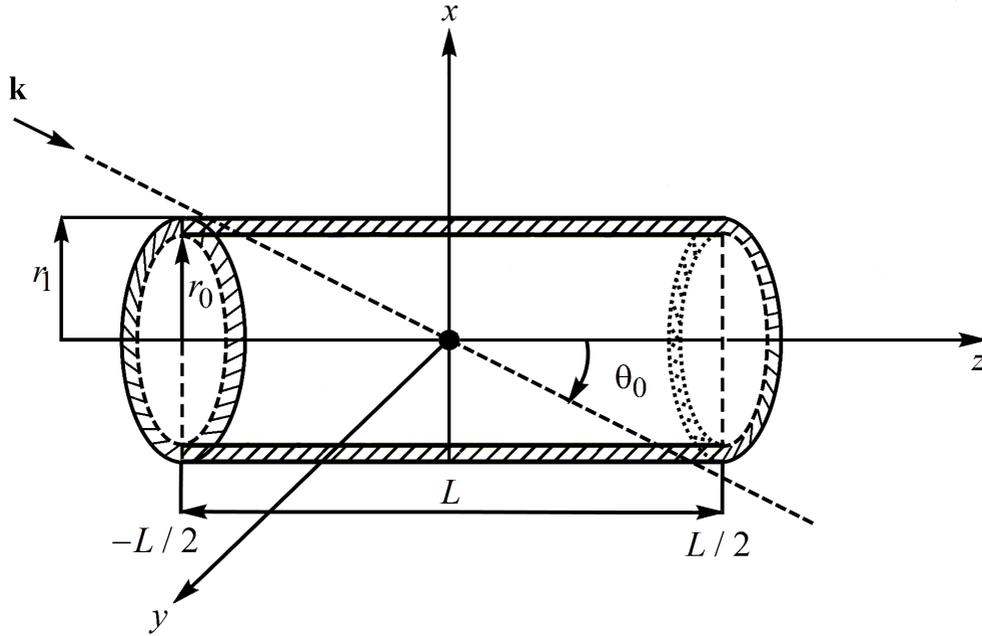


Рис. 1: Геометрия задачи

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_S$ – потенциал скорости полного акустического поля; Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [17]

$$\Psi_0 = A \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi), \quad (2)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (3)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im } k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности [16] для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [18]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z,
\end{aligned} \tag{4}$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [18], соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\
\sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\
\sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Будем считать, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [15]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \tag{6}$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $k_q = \pi q/L$. Выбор функций u_r, u_φ, u_z в виде (7) обеспечивает выполнение условий (6).

Подставляя разложения (7) в уравнения (4) с учетом (5), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \widehat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \widehat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned}
a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0, & (p \neq m), \\
b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu) r, & b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu) r^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0, & b_{nq31} &= k_q (\lambda + \mu) r^2, \\
 c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu (k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{nq12} &= in (\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, \\
 c_{nq21} &= in (\mu' r + \lambda + 3\mu), & c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu (2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), \\
 c_{nq23} &= -ink_q (\lambda + \mu) r, & c_{nq31} &= k_q (\mu' r + \lambda + \mu) r, \\
 c_{nq32} &= ink_q (\lambda + \mu) r, & c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu (2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$ разложения (3) и функции $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ в разложениях (7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (9)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (10)$$

Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh.$$

Используя формулу [19]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей звуковой волны, определяемого (2)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}_0(h) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \delta(h - \alpha), \\
 \Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_0(h) dh.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_r(h) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi), \\
 u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh,
 \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$g_q(h) = (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)} L}{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)} L}{k_q^{(-)}} \right],$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q) / 2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q) / 2.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ с учетом (3), (11), (12) находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[A i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (13)$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

Подставим во второе граничное условие (9) выражения (2), (3) и (7), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате, учитывая выражение для вронскиана [20], получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{(r_1)} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh. \quad (15)$$

Подробный анализ интеграла вида (15) приведен в работе [15].

Из третьего и четвертого граничных условий (9) с учетом (5) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0, \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из граничных условий (10) получим следующие краевые условия для системы (8):

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами

$$f_{nq11} = \lambda(r)/r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r)/r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r)k_q,$$

$$f_{nq21} = in\mu(r)/r, \quad f_{nq22} = -\mu(r)/r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q\mu(r).$$

Построенная краевая задача (8), (14), (16), (17) может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известному потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [10]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (18)$$

где \mathbf{R}_2 – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$.

Применение формулы (18) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [17]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(\xi) d\xi, \quad (19)$$

где

$$\tilde{G}_0(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_2)] \begin{cases} H_m(\eta r_2) J_m(\eta r), & r < r_2; \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2. \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Подставляя (3), (11), (19) в (18) с учетом (13) и формулы [10]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ лежит внутри } [a, b],$$

а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_S

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (20)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{Ai^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)}, \quad W_{2n} = Ai^n \beta J'_n(\beta r_1),$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi) z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi,$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi) z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi.$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (20) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению (3), в интегралах I_{1n} , I_{2n} , I_{3nq} , I_{4nq} следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Интегралы, входящие в (20), подлежат вычислению каким-либо численным методом. Для вычисления интегралов по переменным h , ξ может быть применен прием обрезания бесконечных пределов и интегрирование по вещественной прямой заменено интегрированием по конечному отрезку.

4. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала рассеянного поля (20) вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на последовательном интегрировании по квадратурной формуле трапеций ;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коровова.

Интегрирование по квадратурной формуле трапеций (метод А) является классическим методом численного интегрирования и подробно изложен, например, в [21].

Интегрирование по методу (В) сводится к построению параллелепедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ состоящей из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

где N — количество узлов параллелепедальной сетки; \vec{a} — набор оптимальных коэффициентов. Данный метод и способы периодизации интегрируемых функций подробно изложены в [24].

В данной работе применяется простейшая периодизация, предложенная в работе [25], позволяющая далее применять Фурье-интерполяцию.

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости $|\Psi_S/A|$ от координаты φ в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$. В этом случае интегралы из (20) принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi, \\ I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi, \\ I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi, \\ I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбутирала ($r_1 = 1$ м, $r_0 = 0.5$ м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривалась как однородная цилиндрическая оболочка с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ н/м², так и неоднородная, физико-механические характеристики которой изменялись по закону

$$\lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 \cdot f(r),$$

$$f(r) = 0.75 \left[(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1 \right], \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Расчеты выполнены при волновом размере тела $kr_1 = 4$, угле падения $\theta_0 = \pi/2$, для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи (8), (14), (16), (17) получено методом сплайн-коллокации [22].

Суммирование в (20) проводилось в диапазоне от $-S$ до S по индексу n и от 1 до S по индексу q , где $S = 2[kr_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Вычисления интегралов (21) проводилось двумя методами (А и В): последовательным интегрированием по квадратурной формуле трапеций [21] на равномерной сетке и по квадратурной формуле на основе параллелепедальной сетки Коробова [24]. При расчетах по формуле трапеций использовались следующие параметры: $M_1 = 2(W \times L) / h_1^2$, $M_2 = 4(W \times Q \times L) / h_2^3$ – число узлов сеток для расчета двойных и тройных интегралов из (21) соответственно, h_1 и h_2 – шаги этих сеток.

В первой серии численных экспериментов определялись параметры M_1, M_2, N_1, N_2 сеток разбиения методов А и В так, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления $\Psi_S(\varphi)$. Через N_1, N_2 обозначено количество узлов параллелепедальных сеток для вычисления двойных и тройных интегралов соответственно. С целью подбора оптимальных параметров сеток использовалось предположение, сделанное на основании работы [15], что при $L/r_1 \gg 1$ поле $\Psi_S(\varphi)$, рассеянное цилиндрической оболочкой конечной длины, должно совпадать с рассеянным полем $\Psi_S^{(\infty)}(\varphi)$, полученным при дифракции на цилиндрической оболочке бесконечной длины. Решение задачи рассеяния плоской звуковой волны однородной упругой цилиндрической оболочкой бесконечной длины получено в работе [23], не содержит интегралов и может служить базой при выборе параметров M_1, M_2, N_1, N_2 . При этом степень согласованности результатов оценивалось величинами

$$R_A = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi, \quad R_B = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(B)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

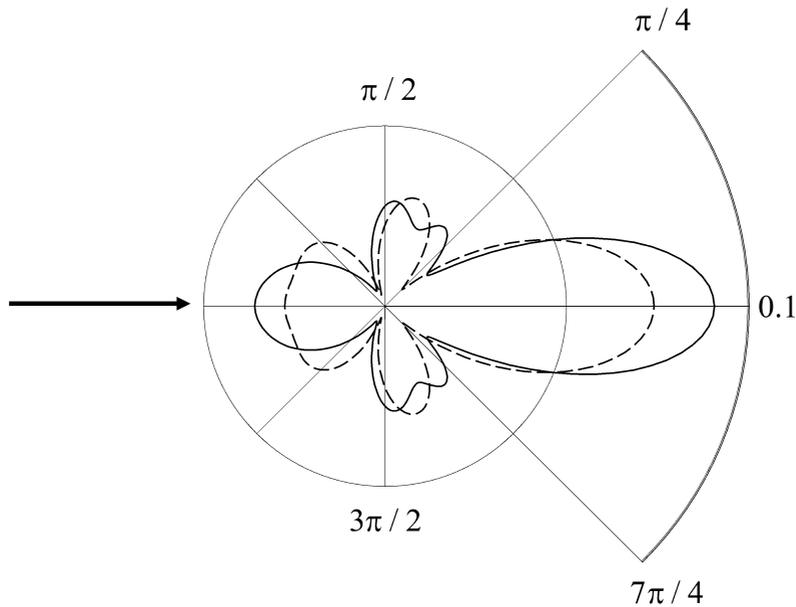
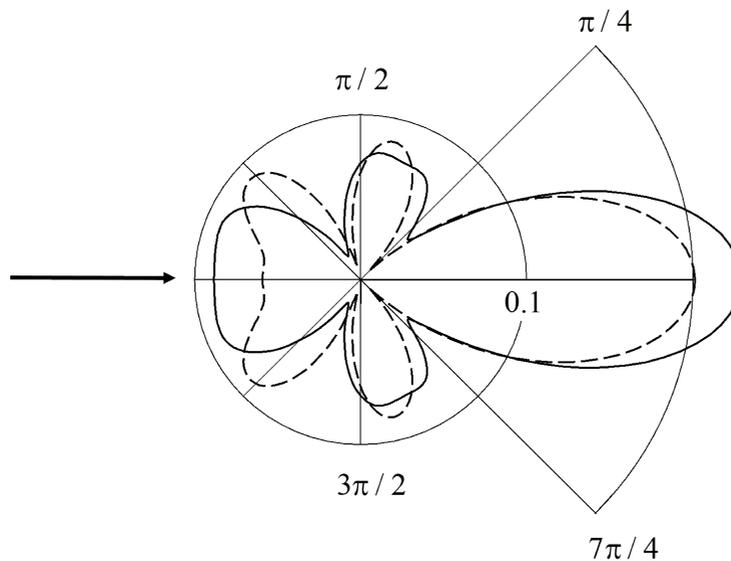
В результате было получено, что для достижения ошибки $R_A, R_B < 10^{-6}$ следует выбрать значения $M_1 = 3.2 \cdot 10^5$, $M_2 = 5.12 \cdot 10^6$, $N_1 = 96077$ ($a = 35489$), $N_2 = 907956$ ($a_1 = 178379$, $a_2 = 657577$). В скобках указаны значения оптимальных коэффициентов \vec{a} .

Следует отметить, что вычисление интегралов (21), входящих в (20), сопряжено с некоторыми трудностями, связанными с тем, что цилиндрическая функция Ганкеля первого рода $H_n(x)$ при $x = 0$ имеет полюс n -го порядка при $n \neq 0$ и логарифмическую особенность при $n = 0$. При численных расчетах интегралов (21) отрезки интегрирования по переменным ξ, h разбивались на участки $(-Y, -k - \varepsilon), (-k - \varepsilon, -k + \varepsilon), (-k + \varepsilon, k - \varepsilon), (k - \varepsilon, k + \varepsilon), (k + \varepsilon, Y)$, где $Y = W, Q$ соответственно, $\varepsilon > 0$ малый параметр. На участках $(\pm k - \varepsilon, \pm k + \varepsilon)$ цилиндрические волновые функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n , а также их производные заменялись асимптотическими формулами при малых значениях аргумента [20], так как в окрестностях точек $\xi, h = \pm k$ значения η, k_h малы.

На рис. 2-4 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Штриховые линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Сравнение кривых на рис. 3 и 4 показывает, что при достаточно больших значениях L/r_1 поведение амплитуды рассеяния звука отличается незначительно.

Важно отметить, что штриховая кривая на рис. 4, построенная для случая однородной упругой оболочки при $L/r_1 = 100$, полностью повторяет кривую, построенную с использова-

Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 5$.Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 50$.

нием аналитического решения из [23], что позволяет сделать вывод о корректности используемых методов численного интегрирования. Установлено, что пределы интегрирования W , Q имеют сильную зависимость от значения волнового числа внешней области k , поэтому для различных значений частоты падающей волны ω следует подбирать параметры сеток индивидуально, основываясь на величинах R_A , R_B .

Отметим, что используемые параметры N_1 , N_2 , M_1 , M_2 обеспечивают достаточное сов-

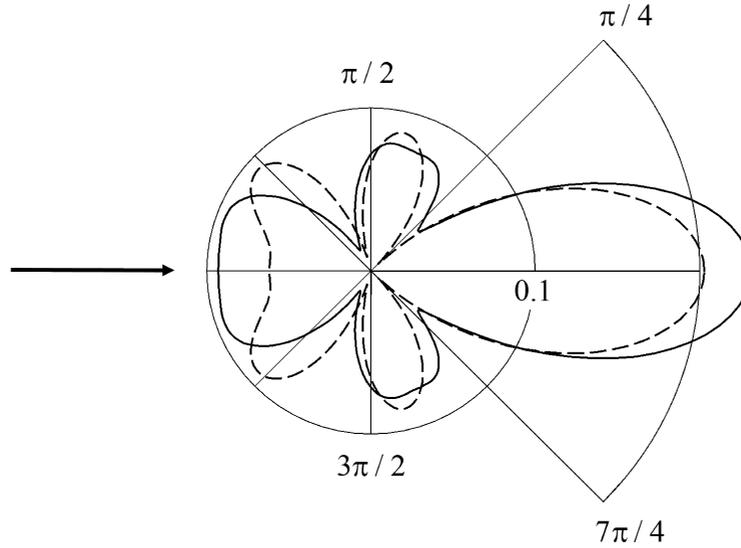


Рис. 4: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 100$.

падение результатов, полученных двумя методами (А и В) вычисления интегралов (21), где согласованность результатов оценивалась величиной

$$R = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(B)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

Поэтому на диаграммах построено только по одной линии для каждого набора входных геометрических и физико-механических параметров.

Заметим, что отношение числа точек $M_1/N_1 \approx 3.33$, $M_2/N_2 \approx 5.63$, однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ методом В – t_B по отношению к t_A составляет только 10-12% для двойных и 14-17% для тройных интегралов.

6. Заключение

Сравнение двух подходов приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении, не превышающей 10^{-6} по абсолютной величине, при использовании второго метода можно получить сокращение времени вычислений интегралов от 10% до 12% для двойных и от 14% до 17% для тройных интегралов.

Установлено, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Гельмгольца-Кирхгофа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Williams W. E., Lighthill M. J. Diffraction by a cylinder of finite length // Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V.52. no. 2. P. 322-335.
2. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271-273.
3. Лямшев Л. М. Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 1. С. 51-58.
4. Андреева И. Б., Самоволькин В. Г. Рассеяние звука упругими цилиндрами конечной длины // Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 5. С. 637-643.
5. Su J.-H., Varadan V. V., Varadan V. K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68, No 2. P. 686-691.
6. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // Акустический журнал/ 1986. Т. 32. № 1. С. 129-131.
7. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 5. С. 699-701.
8. Белогорцев А. С., Музыченко В. В. Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 2. С. 228-234.
9. Доценко И. Е., Музыченко В. В., Рыбак С. А. Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 5. С. 922-932.
10. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
11. Лебедев А. В., Хилько А. И. Рассеяние звука упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1057-1065.
12. Белогорцев А. С., Бугаев В. В., Музыченко В. В. Некоторые особенности рассеяния звука упругими оболочками в жидкости // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 4. С. 598-604.
13. Косарев О. И. Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. №4. С. 99-103.
14. Косарев О. И. Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-техн. развития. 2017. № 3. С. 30-37.
15. Толоконников Л. А., Ефимо Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. №4. С. 3-23.
16. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

19. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
20. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
21. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
22. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
23. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // *Акустический журнал*. 1990. Т. 36. № 1. С. 12-16.
24. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
25. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.

REFERENCES

1. Williams, W. E. & Lighthill, M. J. 1956., "Diffraction by a cylinder of finite length", *Math. Proceed. Camb. Phil. Soc.*, vol. 52. no. 2. P. 322-335.
2. Lyamshev, L. M. 1957, "Sound diffraction on a thin bounded elastic cylindrical shell", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 115, no. 2, pp. 271-273, [in Russian].
3. Lyamshev, L. M. 1958, "Sound scattering by a thin rod of finite length", *Akust. Zhurnal*, vol. 4, no. 1, pp. 51-58, [in Russian].
4. Andreeva, I. B. & Samovol'kin, V. G. 1976, "Sound scattering by elastic cylinders of finite length", *Akust. Zhurnal*, vol. 22, no. 5, pp. 637-643, [in Russian].
5. Su J.-H., Varadan, V. V., Varadan, V. K. & Flax L. 1980, "Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68. no. 3. P. 686-691.
6. Muzychenko, V. V. & Rybak, S. A. 1986, "Amplitude of resonant sound scattering by a finite cylindrical shell in a liquid", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 1, pp. 129-131, [in Russian].
7. Muzychenko, V. V. & Rybak, S. A. 1986, "Some features of sound scattering by finite cylindrical shells", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 5, pp. 699-701, [in Russian].
8. Belogortsev, A. S. & Muzychenko, V. V. 1991, "Influence of a restriction of a cylindrical shell on a backscattering amplitude", *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 2, pp. 228-234, [in Russian].
9. Dotsenko, I. E., Muzychenko, V. V. & Rybak, S. A. 1991, "Sound scattering on the limited elastic cylindrical shell with semispherical endings", *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 5, pp. 922-932, [in Russian].
10. Shenderov, E. L. 1989, "*Radiation and Scattering of Sound*", Sudostroenie, Leningrad, 302 p. [in Russian].
11. Lebedev, A. V., & Khil'ko, A. I. 1992, "Sound scattering by limited length elastic cylindrical shells with thin walls", *Akust. Zhurnal*, vol. 38, no. 6, pp. 1057-1065, [in Russian].

12. Belogortsev, A. S., Bugayev, V. V. & Muzychenko, V. V. 1991, "Sound scattering on the limited elastic cylindrical shell with semispherical endings", *Akust. Zhurnal*, vol. 39, no. 4, pp. 598-604, [in Russian].
13. Kosarev, O. I. 2015, "Secondary hydroacoustic field generated by a solid finite cylinder in the far field", *Probl. Mashinostr. Avtom.*, no. 4, pp. 99-103, [in Russian].
14. Kosarev, O. I. 2017, "Diffraction of sound by a hard cylinder of finite length in the far field", *Vestn. Nauchno-Tekh. Razvit.*, no. 3 (115), pp. 30-37, [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2023, "Scattering of Sound Waves by a Finite Length Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 15, no. 5, pp. 863-876.
16. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
17. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
18. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
19. Kurant, R. 1964, "Partial Differential Equations", Mir, Moscow, 830 p., [in Russian].
20. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
21. Kalitkin, N. N. 1978, "Numerical methods", Fizmatgiz, Moscow, 512 p., [in Russian].
22. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].
23. Veksler, N. D., Korsunskii, V. M. & Rybak, S. A. 1990, "Scattering of an obliquely incident plane acoustic wave by circular cylindrical shell", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 1, pp. 12-16, [in Russian].
24. Korobov, N. M. 2004, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., *MTSNMO*, Moscow, Russia.
25. Dobvol'skii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 15.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-289-306

Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы

Д. Ю. Ефимов

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи границы полупространств. Полагается, что цилиндр находится в верхнем полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью, граничащем с однородным упругим полупространством.

Для представления рассеянного поля в идеальной жидкости используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, которое впоследствии сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье соответствующих разложений полного потенциала поля и его нормальной производной в жидком полупространстве.

Колебания неоднородного изотропного упругого слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды. Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Методом перевала получена асимптотическая формула для дальней зоны поля.

Представлены численные расчеты угловых характеристик рассеянного поля. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных покрытий, а также присутствия плоскости вблизи цилиндрического рассеивателя, на дифракционную картину рассеянного поля.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 289–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-289-306

Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary

D. Yu. Efimov

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru***Abstract**

In paper the problem of the diffraction of a spherical monochromatic sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the boundary of half-spaces. It is assumed that the cylinder is located in the upper half-space filled with an ideal homogeneous liquid bordering on a homogeneous elastic half-space.

To represent a scattered field in an ideal fluid, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used, which is subsequently reduced to a system of linear algebraic equations with respect to the Fourier coefficients of the corresponding expansions of the total potential of the field and its normal derivative in a liquid half-space.

The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic layer are described by the general equations of motion of a continuous medium. To find the displacement field in an inhomogeneous coating, a boundary value problem for a system of second-order ordinary differential equations is constructed.

The asymptotic formula for the far field zone is obtained by the steepest descent method.

Numerical calculations of the angular characteristics of the scattered field are presented. A significant influence of continuously inhomogeneous coatings, as well as the presence of a plane near a cylindrical diffuser, on the diffraction pattern of the scattered field is revealed.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

D. Yu. Efimov, 2023, “Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 289–306.

1. Введение

Задачи дифракции плоских гармонических звуковых волн на изотропных упругих телах цилиндрической формы обсуждались в ряде работ. Например, случай нормального падения на однородный упругий цилиндр исследовался в [1], а случай наклонного падения – в [2]. В работах [3,4] решались задачи рассеяния наклонно падающей звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием. При этом в работе [3] покрытие полагалось радиально-неоднородным, а в [4] – дискретно-неоднородным.

Однако падающую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя значительно больше длины волны. На практике приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками, представляет значительный интерес.

Рассеяние цилиндрической волны на упругом цилиндре рассматривалось в [5], а задача дифракции цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием решена в [6]. Задачи дифракции сферических звуковых волн на рассеивателях цилиндрической формы являются значительно более сложными по сравнению со случаями дифракции плоских и цилиндрических форм, так как геометрия тела и фронта падающей волны в этом случае различны. Такие задачи исследовались в [7-9]. В [7] решается задача дифракции сферической звуковой волны однородным упругим цилиндром с применением потенциалов Дебая. В [8] показано, что решение задачи рассеяния сферических звуковых волн на упругом рассеивателе цилиндрической может быть получено с использованием известного решения рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны, а в [9] данный подход был применен для случая упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием.

В ряде работ исследовалась возможность изменения звукоотражающих свойств тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия. Например, моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [10].

В упомянутых выше работах полагалось, что цилиндрические тела располагаются в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В работах [11-14] решались задачи рассеяния плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) поверхности. В [11, 12] рассматривался случай нормального падения, а в [13, 14] – случай наклонного падения. При этом в [11, 13] решались прямые задачи дифракции, а в [12, 14] обратные задачи о моделировании неоднородных покрытий с требуемыми звукоотражающими свойствами. Во всех четырех работах задача решалась методом мнимых источников. В [15] с использованием интегральной теоремы Гельмгольца-Кирхгофа получено решение задачи дифракции звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Используя тот же подход, в [16] была рассмотрена задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. При этом следует отметить, что метод, используемый в [15,16] не ограничивает тип рассматриваемой звуковой волны.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с упругим радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный и изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией ради-

альной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ – дифференцируемыми функциями координаты r . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -d$.

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится точечный источник, который генерирует гармоническую сферическую звуковую волну с частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей цилиндрические координаты (r_i, φ_i, z_i) . Точка наблюдения M имеет координаты (r, φ, z) .

Определим акустическое поле в жидком полупространстве.

3. Аналитическое решение

Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой сферическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = AG_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где A – амплитуда; $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|)}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|}$ – трехмерная функция Грина для свободного пространства; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; \mathbf{R} и \mathbf{R}_i – радиус-векторы точек M и M_0 ; t – время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (2)$$

где Ψ_{s1} – потенциал скорости волны, отраженной от упругой поверхности; Ψ_{s2} – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругой поверхностью).

Скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega \Psi.$$

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца [17]

$$\Psi(\mathbf{R}) = AG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – трехмерная функция Грина для уравнения Гельмгольца; $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 – поверхность упругого полупространства, Ω_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности Ω_1 точка \mathbf{R}_2 находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности Ω_1 , а в интеграле по поверхности Ω_2 точка \mathbf{R}_2 находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности Ω_2 .

Используя разложение сферической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям, представим $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ в виде [18]

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh, \quad (4)$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

где $J_n(x)$ и $H_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n соответственно, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Для того, чтобы в (3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности Ω_1 , воспользуемся функцией Грина [16]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2), \quad (5)$$

где $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ от поверхности Ω_1 . Таким образом функция Грина (5) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности Ω_1 , т.е. является функцией Грина полупространства.

Запишем функцию (4) в декартовой системе координат. Воспользуемся теоремой сложения для цилиндрических волновых функций [18]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2. \end{cases}$$

Такое выражение содержится в формуле (4). Определим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами выражениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$. Тогда используя интегральное представление цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка [18]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \exp[ik_h \sin \varphi_1 (x - x_2) + ik_h \cos \varphi_1 (y - y_2)] d\varphi_1,$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости φ_1 (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$), получим выражение для $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$, записанное в декартовой системе координат

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{\exp(ik |\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|)}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta (y - y_2) + ih (z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}. \quad (6)$$

Тогда, основываясь на (6), функция $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ может быть записана как

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'(\xi, h) \exp[ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta (y + y_2) + ih (z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}, \quad (7)$$

где $A'_1(\xi, h) = \exp(i2k_h d\eta) A_1(\xi, h)$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$, $A_1(\xi, h)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство.

Функция Грина (5) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругой поверхности тем же граничным условиям что и потенциал скорости акустического поля

$$y = -d: \quad -i\omega u_{1y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \sigma_{1yy} = -i\omega \rho_* G, \quad \sigma_{1xy} = 0, \quad \sigma_{1zy} = 0,$$

где u_{1y} и σ_{1yy} , σ_{1xy} , σ_{1zy} – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве. При таком выборе функции Грина интеграл по поверхности полупространства Ω_1 в (3) обращается в ноль, и остается только интеграл по поверхности цилиндра Ω_2 .

Задача об отражении плоской звуковой волны, падающей на границу раздела идеальной жидкости и упругой поверхности решена в [19]. Коэффициент отражения плоской волны, падающей на границу полупространств под полярным и азимутальным углами падения θ_1 , φ_1 имеет вид

$$A_1(\varphi_1, \theta_1) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (8)$$

где

$$d_1 = k_y [\lambda_1 k_{1l}^2 (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2\mu_1 k_{1ly} (k_{1ly} (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2k_{1\tau y} (k_x^2 + k_z^2))],$$

$$d_2 = k_{1ly} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*.$$

Здесь $k_x = k \sin \theta_1 \sin \varphi_1$, $k_y = k \sin \theta_1 \cos \varphi_1$, $k_z = k \cos \theta_1$; $k_{1l} = \omega/c_{1l}$ и $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве; $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ и $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорости продольных и поперечных волн; $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2 - k_z^2}$, $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2 - k_z^2}$.

Выполняя в (7) замену переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$, $\xi = \sin \varphi_1$, $\eta = \cos \varphi_1$ а в (8) $k_x = k_h \sin \varphi_1$, $k_y = k_h \cos \varphi_1$, $k_z = h$, $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ примет вид

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} A'_1(\varphi_1, h) \exp[ih(z - z_2)] \times$$

$$\times \exp[ik_h r \sin(\varphi + \varphi_1)] \exp[-ik_h r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 dh.$$

Используя разложение [18]

$$\exp(\pm ikr \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m J_m(kr) \exp(im\varphi),$$

получим

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} A'_1(\varphi_1, h) e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp[in(\varphi + \varphi_1)] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp[im(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 dh. \quad (9)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра Ω_2 . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности Ω_2 в виде рядов Фурье по координате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\Psi|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (11)$$

где $p_q(\sigma)$ и $v_q(\sigma)$ – коэффициенты, подлежащие определению.

В уравнении (3) устремим точку наблюдения на поверхность Ω_2 и учтем, что при выборе функции Грина в виде (5) достаточно ограничиться интегрированием по поверхности Ω_2 . Подставим в левую часть (3) разложение (10), а в первое слагаемое правой части (3) – функцию

Грина в виде суммы (5), составленной из суммы выражений (4) и (9), в которых r_2, φ_2 следует заменить на r_i, φ_i . В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что координата положения сферического источника $z_i = 0$. Далее подставим разложения (10), (11) и функцию Грина (5) в подынтегральное выражение уравнения (3). При этом дифференцирование по нормали следует выполнять по переменной r_2 . При выполнении дифференцирования выражения (4) следует выбрать нижнюю строчку в первом слагаемом, определяемым формулой (8). После выполнения дифференцирования следует положить $r = r_2 = r_1$.

Осуществляя интегрирование по поверхности цилиндра $d\Omega_2 = r_1 d\varphi_2 dz_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi], z_2 \in (-\infty, \infty)$, при интегрировании по координате z_2 будем пользоваться следующими свойствами [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\sigma - h)z] dz = 2\pi\delta(\sigma - h),$$

$$\int_a^b f(\sigma)\delta(\sigma - h) d\sigma = f(h), \sigma \in [a, b],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $p_q(h)$ и $v_q(h)$

$$p_q(h) + \alpha_q(h)v_q(h) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta_{qn}^{(1)}(h)p_n(h) + \beta_{qn}^{(2)}(h)v_n(h)] = X_q(h), \quad (12)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$\alpha_q(h) = \frac{H_q(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)},$$

$$\beta_{qn}^{(1)}(h) = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h), \quad \beta_{qn}^{(2)}(h) = (-1)^{n+1} \frac{J_n(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h),$$

$$X_q(h) = -\frac{A}{4\pi^2 k_h r_1 H'_q(k_h r_1)} \left[H_q(k_h r_i) \exp(-iq\varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{m+q}(h) \right],$$

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\varphi_1, h) \exp [i(2k_h d \cos \varphi_1 + l\varphi_1)] d\varphi_1.$$

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\varphi_1, h) \exp [i(2k_h d \cos \varphi_1 + l\varphi_1)] d\varphi_1.$$

Для вычисления коэффициентов $g_l(h)$ следует выполнить замену $\xi_1 = \sin \varphi_1, \eta_1 = \cos \varphi_1$. В таком случае интегралы будут вычисляться не по комплексному контуру Γ , а по вещественной прямой

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi_1, h) (\eta_1 + i\xi_1)^l \frac{d\xi_1}{\eta_1}, \quad (13)$$

где $A'_1(h, \xi_1) = \exp(i2k_h d \eta_1) A_1(h, \xi_1)$. Следует отметить, что при осуществлении интегрирования в (13) функция $A_1(h, \xi_1)$ может обращаться в бесконечность в некоторых точках $\xi^*(h)$.

Однако все такие точки являются интегрируемыми особыми точками в смысле в главного значения.

Теперь воспользуемся результатами работы [9]. Согласно [9] компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье по координате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_z(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \end{aligned} \quad (14)$$

где функции $U_{1q}(r, h)$, $U_{2q}(r, h)$, $U_{3q}(r, h)$ для каждого q и h являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \widehat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \widehat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, h), U_{2q}(r, h), U_{3q}(r, h))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_q$, $\widehat{\mathbf{B}}_q$, $\widehat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в [9].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при $r = r_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (16)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [20] с учетом (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r, h) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r, h) + iqU_{2q}(r, h) + ihrU_{3q}(r, h)) \right] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \\ \sigma_{r\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r, h) + U_{2q}'(r, h) - \frac{U_{2q}(r, h)}{r} \right] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \\ \sigma_{rz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu [U_{3q}'(r, h) + ihU_{1q}(r, h)] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Omega_q(\varphi, z, h) = e^{ihz} \exp[iq(\varphi - \varphi_i)]$.

Подставляя (10), (11), (14) и (17) в первые два граничных условия (16), получаем

$$\begin{aligned} v_q(h) &= -i\omega U_{1q}(r_1, h) \exp(-iq\varphi_i), \\ p_q(h) &= \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r_1, h) + \frac{\lambda}{r_1} (U_{1q}(r_1, h) + iqU_{2q}(r_1, h) + ihr_1 U_{3q}(r_1, h)) \right] \times \\ &\quad \times \frac{i}{\rho_* \omega} \exp(-iq\varphi_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя выражения (18) в систему (12), получаем краевое условие при $r = r_1$ для нахождения частного решения системы (15)

$$F_{1q}U'_{1q}(r_1, h) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(r_1, h) + F_{3q}U_{2q}(r_1, h) + F_{4q}U_{3q}(r_1, h) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n}U'_{1n}(r_1, h) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(r_1, h) + F_{3n}U_{2n}(r_1, h) + F_{4n}U_{3n}(r_1, h) \right] F_{5qn} = X_q(h), \quad (19)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$F_{1q} = \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i),$$

$$F_{2q}^{(j)} = \frac{i}{\rho_*\omega} \left[\frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(k_h r_1)}{k_h Z_q^{(j)}(k_h r_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1 \rho_* \omega} \exp(-iq\varphi_i),$$

$$F_{4q} = -\frac{h\lambda(r_1)}{\rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h),$$

$$Z_q^{(1)}(k_h r_1) = H_q(k_h r_1), \quad Z_q^{(2)}(k_h r_1) = J_q(k_h r_1).$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (15) при $r = r_1$, находим из третьего и четвертого граничных условий (16) с учетом (17)

$$iqU_{1q}(r_1, h) + r_1 U'_{2q}(r_1, h) - U_{2q}(r_1, h) = 0, \\ U'_{3q}(r_1, h) + ihU_{1q}(r_1, h) = 0. \quad (20)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = r_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \quad (21)$$

где $u_{0r}, u_{0\varphi}, u_{0z}$ и $\sigma_{0rr}, \sigma_{0r\varphi}, \sigma_{0rz}$ – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [9], из (21) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (15) при $r = r_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \widehat{\mathbf{F}}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=r_0} = 0. \quad (22)$$

Компоненты матрицы $\widehat{\mathbf{F}}_q$ в уравнении (22) приведены в [9].

Решение краевой задачи (15), (19), (20), (22) может быть найдено методом сплайн-коллокации [21] для $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N$, выбрав в качестве порядка усечения величину $N = 2[kr_1] + 1$, где $[]$ – целая часть числа. После нахождения $U_{1q}(r, h), U_{2q}(r, h), U_{3q}(r, h)$ определяем по формулам (18) коэффициенты $p_q(h), v_q(h)$. В результате получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения M . Обратимся к интегральному уравнению (3), используя представление потенциала Ψ в виде (2), запишем выражения для Ψ_0 , Ψ_{s1} , Ψ_{s2} . Будем иметь

$$\Psi_0 = A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh, \quad (23)$$

$$\tilde{\Psi}_0(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_i), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i, \end{cases}$$

$$\Psi_{s1} = A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}(h) dh, \quad (24)$$

$$\Psi_{s2} = \iint_{\Omega_2} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (25)$$

Подставим в (25) разложения (10), (11), а также функцию Грина в виде суммы (5), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (4), а второе слагаемое – формулой (9). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\Psi_{s2} = \frac{ir_1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [p_q(h) k_h J'_q(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1)] \times$$

$$\times \left[H_q(k_h r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(h) \right] dh, \quad (26)$$

где коэффициенты $p_q(h)$ и $v_q(h)$ определяются согласно (18).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_{s1} + \Psi_{s2}. \quad (27)$$

4. Асимптотические формулы

В дальней зоне акустического поля ($kr \gg 1$) интегралы (24) и (26), могут быть вычислены методом перевала [22]:

$$\int_C g(\gamma) e^{Wf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{W|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Wf(\gamma_0)+i\phi}, \quad W \gg 1, \quad (28)$$

где C – некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ϕ – угол, определяющий направление линии наиболее быстрого убывания функции $\text{Re } f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Рассмотрим интеграл (26). Используя асимптотические формулы для цилиндрических волновых функций [23]

$$H_q(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp[i(k_h r - \pi q/2 - \pi/4)], \quad J_n(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \cos(k_h r - \pi n/2 - \pi/4),$$

а также тождество $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, позволяющее записать асимптотическую формулу функции Бесселя через экспоненциальные функции, представим интеграл (26) в виде суммы трех интегралов, каждый из которых может быть вычислен методом перевала при $kr \gg 1$

$$\Psi_{s2} = \frac{ir_1}{4} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[I_{1q} \exp(iq\varphi) + \frac{1}{2}(-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_{2qn} + I_{3qn}) \exp(in\varphi) \right],$$

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(-ik_h r) dh,$$

$$w_q(h) = p_q(h) k_h J'_q(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1).$$

В каждом из полученных интегралов выполним замену $h = k \sin \gamma$:

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma - \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma.$$

Точка перевала для интегралов I_{1q} и I_{2qn} определяется как

$$\gamma_0 = \arctan \left(\frac{z}{r} \right),$$

а для интеграла I_{3qn}

$$\tilde{\gamma}_0 = -\arctan \left(\frac{z}{r} \right).$$

Определим направление линии наискорейшего спуска из точки γ_0 . Запишем разложение в ряд Тейлора функции $f(\gamma)$ вблизи точки γ_0

$$f(\gamma) \approx f(\gamma_0) + \frac{1}{2} f''(\gamma_0) (\gamma - \gamma_0)^2.$$

Выполним параметризацию $f''(\gamma_0) = |f''(\gamma_0)| \exp(i \arg f''(\gamma_0))$, $\gamma - \gamma_0 = \tilde{\rho} \exp(i\phi)$. Получим

$$f(\gamma) - f(\gamma_0) = \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 |f''(\gamma_0)| \exp [i (2\phi + \arg f''(\gamma_0))].$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность $\text{Re} [f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ быстрее всего убывает с увеличением $\tilde{\rho}$, а $\text{Im} [f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ остается неизменной. Тогда направление наискорейшего спуска может быть найдено из уравнения

$$2\phi + \arg f''(\gamma_0) = \pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{29}$$

По формуле (29) получаем $\phi = -\pi/4$ для интегралов I_{1q} и I_{2qn} , и $\phi = \pi/4$ для интеграла I_{3qn} . В результате в соответствии с (28) будем иметь

$$\begin{aligned} I_{1q} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{q+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] w_q(k \sin \gamma_0) \cos \gamma_0, \\ I_{2qn} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{n+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma_0) w_q(k \sin \gamma_0) \cos \gamma_0, \\ I_{3qn} &\approx \frac{2}{r}i^{n+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \tilde{\gamma}_0 - \cos \tilde{\gamma}_0 \right) \right] g_{n+q}(k \sin \tilde{\gamma}_0) w_q(k \sin \tilde{\gamma}_0) \cos \tilde{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (30)$$

В частном случае, когда точка наблюдения и точка, в которой находится источник, расположены в одной плоскости, перпендикулярной оси, т.е. $z = z_i$, выражения (30) значительно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1q} &\approx 2(-i)^{q+1} w_q(0) \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ I_{2qn} &\approx 2(-i)^{n+1} g_{n+q}(0) w_q(0) \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ I_{3qn} &\approx 2i^{n+1} g_{n+q}(0) w_q(0) \frac{\exp(-ikr)}{r}. \end{aligned}$$

И асимптотическая формула для дальней зоны акустического поля может быть записана в виде

$$\Psi_{s2} \approx \frac{ir_1}{2r} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[I_{1q} \exp(iq\varphi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{2qn} \exp(in\varphi) \right] w_q(0), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1q} &= (-i)^{q+1} \exp(ikr), \quad W_{2qn} = (-1)^{q+1} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - kr\right) g_{n+q}(0), \\ w_q(0) &= p_q(0) k J'_q(kr_1) - v_q(0) J_q(kr_1). \end{aligned}$$

Используя ту же процедуру, что и для предыдущих интегралов, может быть получена асимптотическая формула для Ψ_{s1} в дальней зоне акустического поля при $z = z_i$

$$\Psi_{s1} \approx -A \frac{i}{4\pi r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - kr\right) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}(0). \quad (32)$$

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_s/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м) в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $d = 1 + r_1$ м. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (r - r_0) / (r_1 - r_0) + 0.5, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Предполагалось, что сферический источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_i = 4$, $\varphi_i = \pi/4$, $z_i = 0$.

На рис. 1 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_s/A|$ от полярного угла φ при волновом размере тела $kr_1 = 5$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, пунктирная – однородному покрытию. Сравнение диаграмм направленности для тел с однородным и неоднородным покрытиями показывает, что неоднородность покрытия существенно влияет на дифракционную картину.

На рис. 2 приведены угловые зависимости $|\Psi_s/A|$ при значении волнового размера $kr_1 = 5$ для случая цилиндра с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства (сплошная линия), и для того же цилиндра, находящегося в безграничном пространстве [9] (пунктирная линия). Как видно из диаграмм направленности, присутствие подстилающей поверхности сильно влияет на характер рассеяния звука.

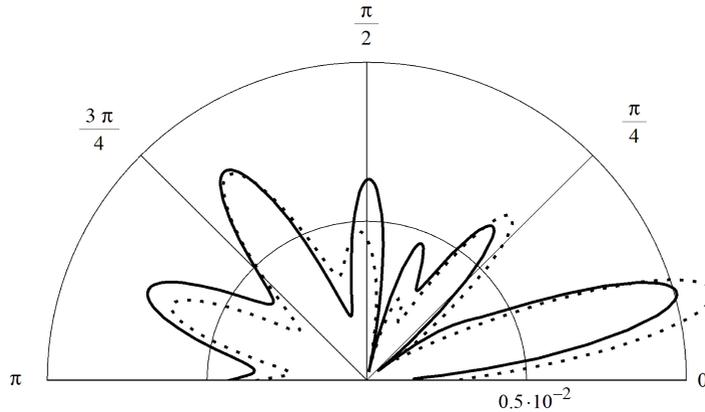


Рис. 1: Диаграммы направленности в случае упругой поверхности

Следует отметить, что полученное решение не ограничивается рассмотрением только упругой границы полупространства. В том случае, если цилиндр расположен вблизи абсолютно жесткой поверхности, функция Грина (7) при $y = -d$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0. \tag{33}$$

Если же поверхность является акустически мягкой, то

$$G = 0 \tag{34}$$

при $y = -d$.

Условие (33) выполняется при $A_1 = 1$, а условие (34) при $A_1 = -1$ [15]. Тогда выражение (13) может быть сведено к интегральному представлению цилиндрической функции Ганкеля [18]. Получаем $g_l(h) = \pm(-i)^{-l} H_l(2k_h d)$, где знаки плюс и минус относятся к абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностям соответственно.

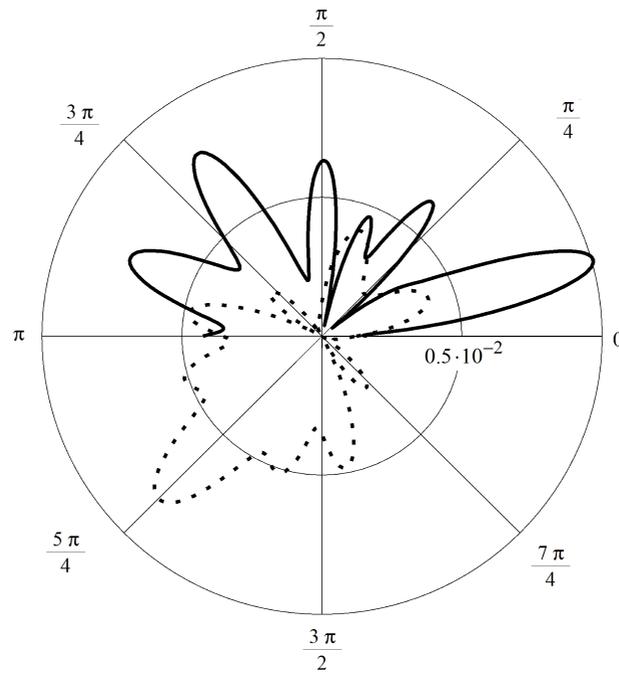


Рис. 2: Диаграммы направленности в случае упругой поверхности

На рис. 3 и 4 изображены диаграммы направленности рассеянного акустического поля для цилиндра с покрытием, расположенного вблизи абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностей соответственно. Значение волнового размера полагалось $kr_1 = 5$. При этом сплошные линии соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные – однородного покрытия.

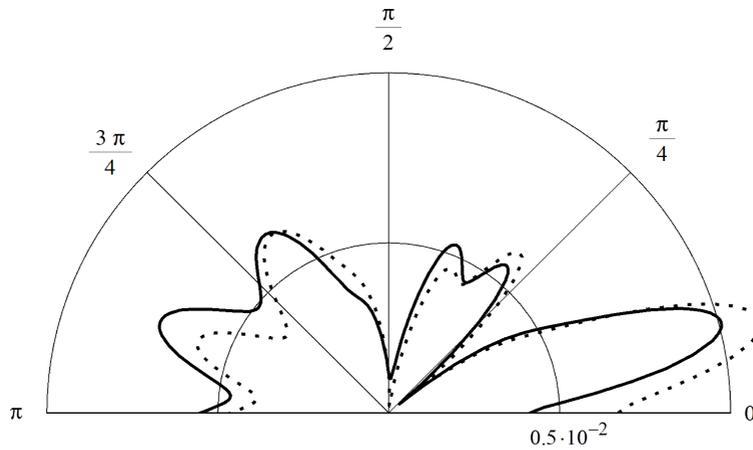


Рис. 3: Диаграммы направленности в случае абсолютно жесткой поверхности

Сравнивая кривые на рис. 1, 3 и 4 можно сделать вывод о том, что тип границы полупространства оказывает существенное влияние на рассеянное акустическое поле.

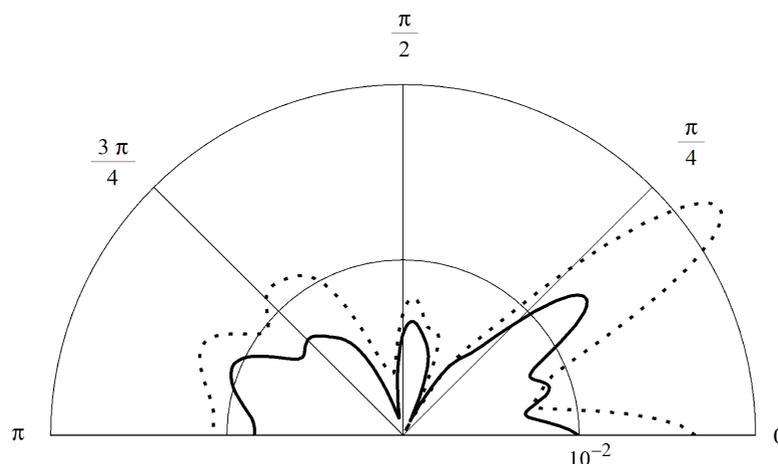


Рис. 4: Диаграммы направленности в случае акустически мягкой поверхности

6. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. На основе полученного аналитического решения проведены численные расчеты, показывающие возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Л.А. Толоконникову за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405–418.
2. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832–1835.
3. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
4. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
5. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26–31.
6. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.
7. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 86–89.

8. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871–1879.
9. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
10. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. № 4. С. 189–199.
11. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
12. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2020. Вып. 9. С. 111–118.
13. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369–381.
14. Ефимов Д. Ю. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами в полупространстве // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2021. Вып. 4. С. 125–133.
15. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Акустический журн.* 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
16. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
17. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
18. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
19. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
22. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
23. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 4, pp. 405–418.

2. Flax, L., Varadan, V.K. & Varadan, V.V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no. 6, pp. 1832-1835.
3. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164-169.
5. Lee F.A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no. 3. pp. 26-31.
6. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, " Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
7. Kleshchev A. A. 2004, "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no. 1, pp. 74-76.
8. Li T., Ueda M. 1980, "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no. 5, pp. 1871-1879.
9. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733-742.
11. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no. 9, pp. 276-289, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2020, "About influence of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder on sound scattering in the presence of the flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 111-118, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2020, "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369–381, [in Russian].
14. Efimov, D. Yu. 2021, "Modeling of a continuously non-uniform coating of an elastic cylinder with specified sound-reflecting properties in a half-space", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 4, pp. 125-133, [in Russian].
15. Shenderov, E. L. 2002, "Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace", *Acoustical Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 225–234.
16. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1657-1667.
17. Shenderov, E. L. 1989, "Emission and Scattering of Sound", *Sudostroenie*, Leningrad, 304 p, [in Russian].

18. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", *Nauka i tekhnika*, Minsk, 584 p., [in Russian].
19. Brekhovskikh, L. M. 1973, "Waves in Layered Media", *Nauka*, Moscow, 344 p., [in Russian].
20. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprezystosci", *PWN*, Warszawa.
21. Zavyalov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroschnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", *Nauka*, Moscow, 352 p., [in Russian].
22. Пуйн, А. М. & Данилин, А. Р. 2009, "Asymptotic Methods in Analysis", *Fizmatlit*, Moscow, 248 p., [in Russian].
23. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", *Fizmatgiz*, Moscow, 358 p., [in Russian].

Получено: 15.08.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-307-319

Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца¹

Е. В. Манохин, Р. А. Жуков, И. В. Бормотов, И. В. Добрынина, Е. А. Назырова

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Жуков Роман Александрович — доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: pluszh@mail.ru

Бормотов Игорь Владимирович — кандидат философских наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: ivdobrynina@rambler.ru

Назырова Екатерина Александровна — кандидат исторических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Аннотация

Авторы статьи ставят перед собой задачу: ознакомить математическую общественность с неопубликованной статьей выдающегося советского математика М. И. Кадеца, возглавлявшего Харьковскую школу, известную своими работами в области теории банаховых пространств, рассказать историю этой статьи. Данная работа продолжает статью автора о долгом сотрудничестве и взаимодействии преподавателей и ученых Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого и Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца.

Под его руководством вел научную работу тульский студент, которые впоследствии после обучения в Харьковской школе Михаила Иосифовича Кадеца стал кандидатом физико-математических наук. Михаилом Иосифовичем Кадецем получены глубокие, содержательные научные результаты. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область. Харьковская школа Кадеца в то время получила мировую известность. М. И. Кадец щедро делился своими математическими идеями со своими учениками. В статье приводятся некоторые совместные результаты, полученные М. И. Кадецем и его учеником в 1988-1990 годах, которые готовились к публикации в виде совместной статьи, но тогда не были опубликованы из-за высокой требовательности, которую предъявлял к себе выдающийся советский математик М. И. Кадец, требовательности, которая может служить примером для современной молодежи, особенно для научной молодежи. Исследование выполнено за счет бюджетных средств по государственному заданию Финансового университета № 15841п-П8.

¹Статья подготовлена по результатам исследования, выполненного за счет бюджетных средств по государственному заданию Финансового университета № 15841п-П8.

Ключевые слова: история математики, функциональный анализ, банаховы пространства, математики Тулы, математики Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Е. В. Манохин, Р. А. Жуков, И. В. Бормотов, И. В. Добрынина, Е. А. Назырова. Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 307–319.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-307-319

From history of one unpublished paper of M. I. Kadets

E. V. Manokhin, R. A. Zhukov, I. V. Bormotov, I. V. Dobrynina, E. A. Nazirova

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfnun@mail.ru

Zhukov Roman Aleksandrovich — doctor of economic sciences, candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: pluszh@mail.ru

Bormotov Igor Vladimirovich — candidate of philosophical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfnun@mail.ru

Dobrynina Irina Vasilyevna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).

e-mail: ivdobrynina@rambler.ru

Nazirova Ekaterina Aleksandrovna — candidate of historical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfnun@mail.ru

Abstract

Authors of paper put before themselves a problem: to acquaint the mathematical public with unpublished paper of the outstanding Soviet mathematician M.I.Kadets heading the Kharkov school, known for the works in the field of the theory of Banach spaces, to tell story of this paper. The given work continues paper of the author about part cooperation and interaction of teachers and scientists of the Tula state pedagogical university of L.N.Tolstoy and Michael Iosifovich Kadetsa's Kharkov school.

Under its management the Tula student which afterwards after training at Michael Iosifovich Kadetsa's Kharkov school became the candidate of physical and mathematical sciences conducted scientific work. Michael Iosifovich by right is considered one of founders of the theory of equivalent renormings of the Banach spaces, turned now in independent area. The Kharkov school Kadetsa has at that time become world-famous. M.I.Kadets generously shared the mathematical ideas with the pupils. In paper some joint outcomes received by M.I.Kadets and its pupil in 1988-1990 which prepared for the publication in the form of joint paper but then have not been published because of high insistence which was shown to itself by outstanding Soviet mathematician M. I. Kadets, to insistence which can be an example for modern youth,

especially for scientific youth are reduced. The study was carried out at the expense of budgetary funds according to the state assignment of the Financial University No. 15841p-P8.

Keywords: history of mathematics, functional analysis, Banach spaces, Tula mathematics, mathematicians of the Mikhail Iosifovich Kadets Kharkiv School

Bibliography: 30 titles.

For citation:

E. V. Manokhin, R. A. Zhukov, I. V. Bormotov, I. V. Dobrynina, E. A. Nazirova, 2023, "From history of one unpublished paper of M. I. Kadets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 307–319.

1. Введение

В 1986 году после окончания математического факультета Тульского пединститута, автор поступил в аспирантуру Михаила Иосифовича Кадеца. О математической школе Кадеца в городе Харькове он узнал за год до этого от своего учителя Рыбакова Владислава Ивановича. В это время Харьковская школа Михаила Иосифовича Кадеца уже получила мировую известность. В частности, о ней как об особом явлении в области теории банаховых пространств упоминает А. Пич в своей книге "History of Banach spaces and linear operators" (Birkhauser, 2007). Харьковской школе и годам сотрудничества с ней автор посвятил работу [1].

Заметим, что Владиславом Ивановичем Рыбаковым [2] получены глубокие, содержательные научные результаты [3-7]. Например, о «the classical theorem of Rybakov» можно прочитать в книгах и статьях, опубликованных в международной математической печати. Работа [8] 1970 года содержит эту самую "the classical theorem of Rybakov" (название взято нами, например, из англоязычных работ [9-10] 1997-1998 годов. Теперь поговорим о М.И. Кадеце.

«Михаил Иосифович (30 ноября 1923 г.- 7 марта 2011 г.) был блестящим и одновременно необычайно глубоким математиком, добрым и отзывчивым человеком, остроумным и приятным собеседником. Таким он и останется в нашей памяти» [11]. Среди полученных им выдающихся результатов, отметим, что Михаил Иосифович решил в положительном смысле давно стоявшую проблему Фреше–Банаха о гомеоморфизме всех сепарабельных бесконечномерных банаховых пространств. Этот замечательный результат сразу стал классическим [12-13].

Одним из средств, предложенных Михаилом Иосифовичем при решении этой проблемы, является построение эквивалентных норм, удовлетворяющих специальным условиям выпуклости. При этом оказалось, что техника эквивалентных норм эффективна в гораздо более широком круге проблем геометрии банаховых пространств и нелинейного анализа [14-21]. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область.

2. Из истории неопубликованной статьи М. И. Кадеца, Е. В. Манохина

Теория эквивалентных норм для банаховых пространств $C(K)$ непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха (пространство $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — метрический компакт, сопряженное пространство к $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — счетный метрический компакт. Был установлен факт существования эквивалентных строго выпуклых и локально равномерно выпуклых норм на всех пространствах непрерывных функций, определенных на метрических компактах [22-23]. Для случая неметризуемых компактов теория до сих далека от завершения.

Среди всех компактов естественно выделяется класс компактов с первой аксиомой счетности. Он включает класс метрических компактов, но не совпадает с ним. Примеры неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности: две стрелки, лексикографический квадрат, компакт Хелли и другие хорошо известны и приводятся в учебниках топологии [24].

М. И. Кадеца и Е.В. Манохин готовили статью, в которой рассматривали банахово пространство $C(H)$ всех непрерывных функций $f(x)$ на компакте Хелли с обычной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in H\}$. Неизвестно, допускает ли $C(H)$ эквивалентную локального равномерно норму. Более того, неизвестно, обладает ли $C(H)$ эквивалентной нормой с H -свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!). В это время начали выходить из печати работы Хейдона [25-29], которые подчеркнули значение H -свойства: из того, что банахово пространство X обладает H -свойством не следует, что оно имеет эквивалентную локального равномерно норму. В статье М. И. Кадеца и Е.В. Манохина была доказана теорема о том, что на банаховом пространстве $C(H)$ существует эквивалентная норма с H -свойством. Е.В. Манохин начал готовить статью к печати, сначала в виде рукописи, но внезапно получил письмо от Кадеца: Михаил Иосифович засомневался, что теорема в конце статьи вытекает из предшествующих рассуждений, он решил, что на самом деле требуется более сильная версия леммы 2. Манохину Е.В. показалась непонятным в чем проблема, но он подумал, что к статье можно вернуться позднее. Рукопись была положена в ящик стола. Публикация статьи был отложена и к ее рассмотрению авторы так и не вернулись. Представляем математической общественности эту неопубликованную работу, как часть истории математики.

Отметим что статья не была опубликована из-за высокой требовательности, которую предъявлял к себе выдающийся советский математик М. И. Кадец, требовательности, которая может служить примером для современной молодежи, особенно для научной молодежи. Ценностный мир молодежи [30] должен отражать все многообразие современного российского общества и обладать своеобразием, уникальностью, неповторимостью, иметь отличительные особенности и черты.

Построение такого мира ценностей сегодня - одна из болевых точек не только российской молодежи, но и общества в целом, поскольку вакуум, образовавшийся в результате смены, трансформации социальных ценностей в постсоветский период должен быть преодолен.

3. Статья М. И. Кадеца, Е.В. Манохина «Компакт Хелли H и банахово пространство $C(H)$ »

Компактом Хелли H называются множеством всех неубывающих, отображений $x = x(t)$ отрезка $[0; 1] = I$ в себя, наделенное топологией поточечной сходимости. В этой топологии компакт Хелли – неметризуемое сепарабельное топологическое пространство с первой аксиомой четности [24]. Кроме того H – выпуклое множество (выпуклое подмножество линейного пространства всех функция определённых на I). Фундаментальной системой окружностей элемента $x \in H$ являются «параллелепипеды» $O(x, S, \varepsilon) = \{y \in H : |x(t) - y(t)| < \varepsilon, t \in S\}$, где S – конечное подмножество отрезка I .

Каждый элемент компакта Хелли – функция на I , непрерывная во всех точках кроме, быть может, счётного множества. Подмножество H , образованное всеми непрерывными элементами, обозначим H_c .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. H_c -всюду плотное G_δ – подмножество в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества $H(\varepsilon) \subseteq H$, таких элементов, для которых

$$Osc x = \max\{x(t+0) - x(t-0) : t \in I\} < \varepsilon.$$

$H(\varepsilon)$ – открытое множество. Действительно, пусть для некоторого элемента $x_0 \in H(\varepsilon)$ имеем $osc x_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon$. Возьмём конечное множество $S = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ так, чтобы все

разности $x(t_k) - x(t_{k-1})$ был менее чем $(\varepsilon_1 - \varepsilon)/2$. Возьмём $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon)/4$. Пусть $y \in O(x_0, S, \delta)$. Тогда, если $t_{k-1} < t < t(k)$, то $y(t+0) - y(t-0) \leq y(t_k) - y(t_{k-1}) \leq x(t_k) - y(t_k) + 2\delta < \varepsilon$.

Итак, для каждого $x_0 \in H(\varepsilon)$ найдётся окрестность целиком состоящая из точек $y \in H(\varepsilon)$. Так как $H_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(1/n)$, то $H_c - G_\delta$ множество в H . Плотность H_c в H проверяется непосредственно:

Если $x \in H$, а $O(x, T, \varepsilon)$ – произвольная окрестность, то любая функция $y(t) \in H_c$, совпадающая с $x(t)$ в точках $t \in T$, а в остальном произвольная, принадлежит $O(x, T, \varepsilon)$.

Итак, множества H_c непрерывных элементов массивно в H . Отметим ещё одно свойство элементов из H_c . С этой целью на ряду с окрестностями $O(x, T, \delta)$, определяющими в H топологию поточечной сходимости, определим «равномерные окрестности»: $O(x, I, \varepsilon) = \{y \in H : |x(t) - y(t)| < \varepsilon, t \in I\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $x_0 \in H_c$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся T и $\delta > 0$ такие, что

$$O(x_0, I, \varepsilon) \supset O(x_0, T, \delta) \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Так как $x_0(t)$ – непрерывная функция на I , то найдётся множество $T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ такое, что $x_0(t_k) - x_0(t_{k-1}) < \varepsilon/2, 1 \leq k \leq n$. Пусть $y \in O(x_0, T, \varepsilon/2)$. Возьмем произвольное $t(t_{k-1} < t < t_k)$ и оценим разность $x(t) - y(t)$:

- $x(t) - y(t) = x(t_k) - y(t_{k-1}) < x(t_k) - (x(t_{k-1}) - \varepsilon/2)$;
- $x(t) - y(t) \geq x(t_{k-1}) - y(t_k) > x(t_{k-1}) - (x(t_k) + \varepsilon/2)$.

Итак, $|x(t) - y(t)| \leq x(t_k) - x(t_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, откуда и следует включение (1) с $\delta = \varepsilon/2$.

СЛЕДСТВИЕ. Если последовательность $(x_n)_1^\infty \subset H$ сходится поточечно к элементу $x \in H_c$, то она сходится и равномерно.

Топологическое пространство X называется **топологически однородным**, если для любых его элементов x и y найдется гомеоморфизм X на себя, переводящий x в y . Окружность однородна, отрезок не однороден (мешают концы). Известно, что каждый бесконечномерный выпуклый метрический компакт однороден [24]. Неизвестно однороден ли компакт Хелли.

Перейдем к рассмотрению Банахова пространства $C(H)$ всех непрерывных функций $f(x)$ на компакте Хелли с обычной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in H\}$. В силу неметризуемости компакта Хелли, пространство $C(H)$ несепарабельно. Поэтому для него актуален вопрос о существовании или не существовании «хороших» эквивалентных норм. Так как H – сепарабельный компакт, то $C(H)$ допускает эквивалентную строго выпуклую норму [22]. Неизвестно, допускает ли $C(H)$ эквивалентную локально равномерно норму. Более того, неизвестно, обладает ли $C(H)$ эквивалентной нормой с H -свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!) Напомним соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Банахово пространство X называется локально равномерно выпуклым, если для его элементов условия $\|x_n\| = \|x\| = 1$ и $\lim \|x_n + x\| = 2$ влекут сильную сходимость: $\lim \|x_n - x\| = 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Банахово пространство X обладает H -свойством; если из условий x_n слабо сходится к x и $\lim \|x_n\| = \|x\|$ следует сильная сходимость.*

Каждое локально равномерно выпуклое пространство обладает H -свойством; обратное не обязательно. Более подробно по поводу эквивалентных норм в пространстве Банаха (см. [22-23]). Основная цель настоящей заметки – в предположении, что H -однородный компакт, доказать, что $C(H)$ обладает H -свойством. Для дальнейшего нам потребуются понятия, обобщающие на функции из $C(H)$ понятия модуля непрерывности функции из $C(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть T – конечное подмножество отрезка I (обозначение: $T \in F$) и $0 < \delta \leq 1$. Модулем непрерывности T функции $f \in C(H)$ назовём функционал $\omega(f, T, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, T, \delta)\}$.

Равномерная непрерывность функции $f \in C(H)$ записывается так: $\forall \varepsilon \exists T \exists \delta : \omega(f, T, \delta) < \varepsilon$. Заметим, что при данном T число $\omega(f, T, +0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, T, \delta)$ не обязательно равно 0. В остальном T – модуль обладает всеми свойствами обычного модуля непрерывности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При данном T модуль непрерывности $\omega(f, T, \delta)$ обладает следующими свойствами:

$$(3.1) \quad \omega(f, T, \delta) \text{ — неубывающая непрерывная функция от } \delta.$$

$$(3.2) \quad \omega(f + g, T, \delta) \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta).$$

$$(3.3) \quad \omega(f, T, \delta + h) \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, h).$$

$$(3.4) \quad \omega(\lambda f, T, \delta) = |\lambda| \omega(f, T, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Модуль непрерывности функции на подмножестве не превышает модуля непрерывности функции на множестве, поэтому величина $\omega(f, T, \delta)$ есть убывающая функция от δ . Пусть $\delta_n \rightarrow \delta_0$. Тогда $\lim_{\delta_n \rightarrow \delta_0} \omega(f, T, \delta_n) = \lim_{\delta_n \rightarrow \delta_0} \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, T, \delta_n)\} = \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, T, \delta_0)\} = \omega(f, T, \delta_0)$.

Таким образом $\omega(f, T, \delta)$ непрерывная функция от δ .

2. Для любых $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ выполнено $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta)$. Беря в левой части верхнюю грань по всем $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ получим $\omega(f + g, T, \delta) < \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta)$.

3. Пусть $x_0 \in H$ и для простоты $\omega(f, T, \delta + h) = |f(x_0 + \delta + h) - f(x_0)|$.

Так как $|f(x_0 + \delta + h) - f(x_0)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0) + f(x_0 + \delta + h) - f(x_0 + \delta)| \leq |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| + |f(x_0 + \delta + h) - f(x_0 + \delta)| \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(f, T, h)$, то $\omega(f, T, \delta + h) \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(f, T, h)$.

4. Для любых $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ выполнено $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda(f(x) - f(y))| = |\lambda| |f(x) - f(y)|$.

Беря верхнюю грань по всем $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ получим $\omega(\lambda f, T, \delta) = |\lambda| \omega(f, T, \delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Модулем непрерывности функции $f \in C(H)$ назовем функционал

$$\omega(f, \delta) = \inf\{\omega(f, T, \delta) : T \in F\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ обладает следующими свойствами:

$$(4.0) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0 \text{ для всех } f \in C(H),$$

$$(4.1) \quad \omega(f, \delta) \text{ — неубывающая непрерывная функция от } \delta,$$

$$(4.2) \quad \omega(f + g, \delta) \leq \omega(f, \delta) + \omega(g, \delta),$$

$$(4.3) \quad \omega(f, \delta + h) \leq \omega(f, \delta) + \omega(f, h),$$

$$(4.4) \quad \omega(\lambda f, \delta) = |\lambda| \omega(f, \delta),$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 приложения 4 следуют, соответственно, из утверждения 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 приложения 3. Докажем 4.0: Пусть $\varepsilon_0 > 0$. Так как $f \in C(H)$ равномерно непрерывно, то $\exists T_0 \exists \delta_0 : \omega(f, T_0, \delta_0 < \varepsilon_0$. (*) Из предложения 3 следует, что для любых δ , таких что $\delta < \delta_0$ выполнено $\omega(f, T_0, \delta) < \omega(f, T_0, \delta_0)$ (**)

Сопоставляя (**) и (*) получим, что для $\delta < \delta_0 : \text{Inf}\{\omega(f, T, \delta) : T \in F\} < \omega(f, T_0, \delta_0 < \varepsilon_0$. Это означает, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $\gamma : H \rightarrow H$ — гомеоморфизм компакта Хелли на себя. Каждой функции $f(x) \in C(H)$ сопоставим функцию

$$f = g(u) = f(\gamma u) = f(x).$$

Модули непрерывности этих функций связаны соотношением

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \omega(g, \delta) \leq \omega(f, \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность (равномерная) отображения γ означает, что

$$\forall (S, \varepsilon) \exists (T, \delta) \forall u : \gamma O(u, T, \delta) \subset O(\gamma u, S, \varepsilon) \quad (2)$$

Напомним выражения для модулей непрерывности:

$$\omega(g, T, \delta) = \sup\{|g(u) - g(\nu)| : u \in H, \nu \in O(u, T, \delta)\},$$

$$\omega(f, S, \varepsilon) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, S, \varepsilon)\}. \quad (3)$$

Последнее выражение перепишем как:

$$\omega(f, S, \varepsilon) = \sup\{|g(u) - g(\nu)| : u \in H, \gamma \in O(\gamma u, S, \varepsilon)\} \quad (4)$$

Сопоставляя 2, 3 и 4 получаем, что

$$\omega(g, T, \delta) \leq \omega(f, S, \varepsilon). \quad (5)$$

Возьмём S , (которое было до сих пор произвольным), таким чтобы для некоторого $\alpha > 0$ выполнялось в соответствии с определением 4 неравенство

$$\omega(f, S, \varepsilon) \leq \omega(f, \varepsilon) + \alpha \quad (6)$$

Сопоставив (5) и (6) и очевидное неравенство $\omega(g, T, \delta) \geq \omega(g, \varepsilon)$, получим:

$$\omega(g, \delta) \leq \omega(f, \varepsilon) + \alpha,$$

что в силу произвольности α даёт требуемое соотношение.

ЛЕММА 2. *Допустим, что компакт Хелли топологически однороден. Пусть последовательность: $(fn_1)^\infty \subset C(H)$ сходится слабо (т.е. последовательность ограничена и сходится поточечно) к $f \in C(H)$ и пусть существует положительное число ζ и последовательность $(xn_1)^\infty \subset H$ сходящаяся к $\bar{x} \in H$, такие что*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \zeta. \quad (7)$$

Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in N$, что

$$\omega(f, \varepsilon) = \frac{1}{6}\zeta \omega(f_n, \varepsilon) \geq \frac{1}{2}\zeta \text{ для любых } n \geq n_0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось равенство из (8). Определим гомеоморфизм γ так, чтобы он переводил некоторый непрерывный элемент $\bar{u} \in H$ в \bar{x} из условия леммы: $\gamma\bar{u} = \bar{x}$ (если \bar{x} сам непрерывен, то в качестве γ берём тождественное отображение, и доказательство существенно упрощается). Введём в рассмотрение функцию $g(u) = f(\gamma u) = f(x)$ и функцию $g_n(u)$, определение аналогично. Заметим, что для функций $g(u)$ и $g_n(u)$ сохраняется соотношение (7): $\gamma u_n = x_n$, $u_n \rightarrow \bar{u}$,

$$|g_n u_n - g(u_n)| \geq \zeta > 0. \quad (9)$$

Для введённого ε возьмём δ из леммы 1. Для каждого n пусть T_n – тот конечный набор значений t , для которого в силу определения 4 будет

$$\omega(g_n, \delta) \geq \omega(g_n, T_n, \delta) - \frac{1}{6}\zeta. \quad (10)$$

Возьмём n_0 настолько большим, чтобы для всех $n_0 \geq n$ выполнялись условия (11-13) ниже:

$$|u_n(t) - \bar{u}(t)| < \delta, \text{ для всех } 0 \leq t \leq 1 \quad (11)$$

что возможно согласно предложению 2 (непрерывность \bar{u})

$$|g(u_n) - g(u)| \leq \frac{1}{6}\zeta, \quad (12)$$

что возможно в силу непрерывности функции g ;

$$|g_n(\bar{u}) - g(\bar{u})| \leq \frac{1}{6}\zeta, \quad (13)$$

что возможно в силу поточечной сходимости $g_n \rightarrow g$.

Продолжим оценку (10), применив последовательно (11), (12), (13):

$$\begin{aligned} \omega(g_n, \delta) &\geq \omega(g_n, S_n, \delta) - \frac{1}{6}\zeta \geq |g_n(u_n) - g_n(\bar{u})| - \frac{1}{6}\zeta \geq \\ &\geq |g_n(u_n) - g(u_n)| - |g(u_n) - g(\bar{u})| - |g(\bar{u}) - g_n(\bar{u})| - \frac{1}{6}\zeta \geq \frac{1}{2}\zeta. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством из леммы 1, получим требуемую оценку (8).

ТЕОРЕМА. Если компакт Хелли топологически однороден, то на банаховом пространстве $C(H)$ существует эквивалентная норма с H -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомую эквивалентную норму определим формулой:

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \int_0^1 \omega(f, \tau) d\tau \quad (*)$$

Пусть последовательность: $f_n \in C(H)$ сходится к $f \in C(H)$ слабо, но не сильно.

Не ограничивая общности, будем считать, что существует (как в лемме 2) $\zeta > 0$ и сходящаяся последовательность $x_n \rightarrow \bar{x}$ такая, что $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \zeta$.

Согласно лемме 2 при этом найдется число $\delta > 0$, для которого, начиная с некоторого n_0 , будем иметь $\omega(f, \delta) = \frac{1}{6}\zeta$ и $\omega(f_n, \delta) \geq \frac{1}{2}\zeta$. (8)

Рассмотрим поведение интеграла от модуля непрерывности на отрезке $[\delta, 2\delta]$, опираясь на оценки (8):

$$\int_\delta^{2\delta} \omega(f_n, \tau) d\tau \geq \omega(f_n, \delta) \cdot \delta \geq \frac{\delta\zeta}{2}$$

$$\int_\delta^{2\delta} \omega(f, \tau) d\tau \leq \omega(f, 2\delta) \cdot \delta \leq 2\omega(f, \delta) \cdot \delta = \frac{\delta\zeta}{3}$$

$$\text{Значит, } \int_\delta^{2\delta} \omega(f_n, \tau) d\tau \geq \int_\delta^{2\delta} \omega(f, \tau) d\tau + \frac{\delta\zeta}{6} \quad (14)$$

Оценим снизу $\liminf_n \rightarrow \infty \|f_n\|$:

$$\liminf \|f_n\| \geq \liminf \|f_n\|_\infty + \liminf \int_0^\delta \omega(f_n, \tau) d\tau + \liminf \int_\delta^{2\delta} \omega(f_n, \tau) d\tau + \liminf \int_{2\delta}^1 \omega(f_n, \tau) d\tau.$$

Для каждого из слагаемых имеем:

$$\liminf \|f_n\|_\infty \geq \|f\|_\infty, \liminf \int_0^\delta \omega(f_n, \tau) d\tau \geq \int_0^\delta \omega(f, \tau) d\tau$$

$$\liminf \int_{2\delta}^1 \omega(f_n, \tau) d\tau \geq \int_{2\delta}^1 \omega(f, \tau) d\tau$$

$$\liminf \int_\delta^{2\delta} \omega(f_n, \tau) d\tau \geq \int_\delta^{2\delta} \omega(f, \tau) d\tau + \frac{\delta\zeta}{6}$$

Все эти неравенства, кроме последнего, следуют из теоремы Хана—Банаха в силу однородной выпуклости функционалов $\|f\|_\infty$ и $\omega(f, \tau)$ (см. [22]). Последнее же неравенство получается из (14).

Все эти оценки дают нам:

$$\liminf \|f_n\| \geq \|f\| + \frac{\delta\zeta}{6}$$

откуда и следует, что норма (*) обладает H -свойством.

4. Заключение

В этой небольшой статье, касающейся времени 1988-1990 гг., выпускаемой к 35-летию неопубликованной работы представителя Тульской математической школы и выдающегося руководителя Харьковской математической школы Михаила Иосифовича Кадеца, мы видим пример сотрудничества в научном творчестве того периода. Он дает представление о том, как формировались научные направления того периода, периода последних лет СССР.

Статья подготовлена по результатам исследований выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета № 15841п-П8 «Социологический портрет ценностного мира молодежи в субъектах Российской Федерации».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В. Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов. Харьковская школа М. И. Кадеца и математики Тулы // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 323–330.
2. Е. В. Манохин, А. Е. Устьян, Г. В. Кузнецов. Ученый и педагог. К 80-летию юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939–27.09.2016) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4 с. 450 – 457.
3. В. И. Рыбаков, “Об условных математических ожиданиях для интегрируемых в смысле Петтиса функций”, Матем. заметки, 10:5 (1971), 565–570; Math. Notes, 10:5 (1971), 764–767
4. В. И. Рыбаков, “О векторных мерах со значениями в локально выпуклых пространствах”, Функци. анализ и его прил., 7:4 (1973), 95–96; Funct. Anal. Appl., 7:4 (1973), 339–340
5. В. И. Рыбаков, “Выделение из векторной меры части, представимой интегралом Бохнера”, Матем. заметки, 17:5 (1975), 797–808; Math. Notes, 17:5 (1975), 476–482
6. В. И. Рыбаков, “Одно обобщение интеграла Бохнера на случай локально выпуклых пространств”, Матем. заметки, 18:4 (1975), 577–588; Math. Notes, 18:4 (1975), 933–938
7. В. И. Рыбаков, “Некоторые случаи сведения изучения слабо интегрируемых функций к изучению функций, интегрируемых в смысле Петтиса”, Изв. вузов. Матем., 1975, № 11, 98–101; Soviet Math. (Iz. VUZ), 19:11 (1975), 84–86
8. В. И. Рыбаков, “К теореме Баргла–Данфорда–Шварца о векторных мерах”, Матем. заметки, 7:2 (1970), 247–254; Math. Notes, 7:2 (1970), 147–151.
9. W. J. Ricker. Rybakov's theorem in Frechet spaces and completeness of L1-spaces. Austral. Math. Soc. (Series A) 64 (1998). 247-252
10. A. Fernandez and F. Naranjo, ‘Rybakov’s theorem for vector measures in Frechet spaces’. Indag. Math. (NewSeries) 8 (1997), 33–42.
11. Ю. И. Любич, В. А. Марченко, С. П. Новиков, М. И. Островский, Л. А. Пастур, А. Н. Пличко, М. М. Попов, Е. М. Семёнов, С. Л. Троянский, В. П. Фонф, Е. Я. Хруслов, “Михаил Иосифович Кадец (некролог)”, УМН, 66:4(400), (2011), 179–180; Russian Math. Surveys, 66:4 (2011), 809–811
12. Кадец М.И. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств. // ДАН СССР. 1966, Том 167. С. 23-25.
13. М. И. Кадец, “Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха”, Функци. анализ и его прил., 1:1 (1967), 61–70

14. Милютин А.А. Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1966. Вып 2. С. 150-156.
15. Кадец М.И. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств. // ДАН СССР. 1966, Том 167. С. 23-25.
16. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. v. 40. 3. P. 396-414.
17. Lovaglia A.R. Locally uniformly convex Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. v. 78 1. P. 225-238.
18. Кадец М.И. О пространствах изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам // Изв. вузов. Математика. 1959. Т. 6. С. 51-57.
19. Lindenstrauss J. Weakly compact sets-their topological properties and Banach spaces they generate. // Ann. Math. Studies. 1972. v. 69. P. 235-273.
20. Троянски С.Л. Об эквивалентных нормах и минимальных системах в несепарабельных пространствах Банаха. // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. т. 43. с. 125-138.
21. Кадец М.И. О связи между слабой и сильной сходимостью. // ДАН УССР. 1959. У 9. с. 949-952.
22. BeazamvB. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. Oxford. 1985. s. 334.
23. Deville R., Godefrov G., Zizler V. Smoothness and renorming in Banach spaces. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics . Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill. Harrow. 1993.
24. Александров И.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва: Изд-во Наука, 1977. 370 с.
25. Havdon R.G. Trees in renorming theory. // Proc. London Math. Soc. 1999. Vol. 78. P. 541-584.
26. Havdon R.G., Zizler V. A new spaces with no locally uniformly rotund renorming. // Can. Math. Bull. 1989. Vol. 32(1). P. 122-128.
27. Havdon R.G., Hajek Petr. Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type $C(K)$. // The Quarterly Journal of Mathematics. 2007. Vol. 58. P. 221-228.
28. Havdon R.G., Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals.// J. Funct. Anal. 2008. Vol. 254(8). P. 2023-2039.
29. Havdon R.G., Argyros S.A. A hereditarily indecomposable L-infinity-space that solves the scalar-plus-compact problem. // АСТА МАТЕМАТИКА. 2011. Vol. 206(1). pp. 1-54.
30. Бормотов И.В, Ценностный мир современной российской молодежи (социально-философский анализ: монография / И.В. Бормотов. - Москва: ИНФРА-М, 2022.-178с

REFERENCES

1. Manokhin, E. V., Kozlova, N. O., Komov, V. E. 2021, “Kharkiv school of M. I. Kadets and mathematics of Tula”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 323–330.
2. Manokhin, E. V., Ustyan, A. E., Kuznetsov, G. V. 2019, “Scholar and teacher. To the 80-th anniversary of Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939–27.09.2016)”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 450–457.
3. Rybakov, V. I. 1971, “On conditional mathematical expectations for functions integrable in the Pettis sense”, *Math. Notes*, 10:5, pp.764–767.
4. Rybakov, V. I. 1973, “Vector measures with values in locally convex spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, 7:4, pp. 339–340 .
5. Rybakov, V. I. 1975, “The separation from a vector measure of the part representable by a Bochner integral”, *Math. Notes*, 17:5, pp.476–482
6. Rybakov, V. I. 1975, “A generalization of the Bochner integral to locally convex spaces”, *Math. Notes*, 18:4, pp.933–938
7. Rybakov, V. I. 1975, “Certain cases of the reduction of the study of weakly integrable functions to the study of Pettis-integrable functions”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 19:11, pp.84–86.
8. Rybakov, V. I. 1968, “The Radon-Nikodým theorem and the representation of vector measures by an integral”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (Russian), 180, pp. 282–285.
9. Rybakov, V. I., 1970, “Theorem of Bartle, Dunford, and Schwartz concerning vector measures“, (*English. Russian original*) *Math. Notes* 7, pp. 147-151; *translation from Mat. Zametki* 7:2, pp. 247–254.
10. Fernandez, A. and Naranjo, F. 1997, “Rybakov’s theorem for vector measures in Frechet spaces” *Indag. Math. (New Series)*, 8, pp.33–42.
11. Lyubich, Yu. I., Marchenko, V. A., Novikov, S. P., Ostrovskii, M. I., Pastur, L. A., Plichko, A. N., Popov, M. M., Semenov, E. M., Troyanskii, S. L., Fonf V. P., Khruslov, E. Ya. 2011, “Mikhail Iosifovich Kadets (obituary)”, *Russian Math. Surveys*, 66:4, pp.809–811.
12. Kadets M. I. 1966, “Topological equivalence of all separable Banach spaces”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.167, pp.23-25. (Russian)
13. Kadets, M. I. 1967, “Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, 1:1, pp. 61–70.
14. Milvutin A. A. 1966, “Isomorphism of spaces of continuous functions over compact sets of continuum cardinality”, *The Function theory, a functional analysis and their applications*, vol 2, pp. 150–156. (Russian)
15. Kadets M. I. 1966, “Topological equivalence of all separable Banach spaces”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.167, pp.23–25. (Russian)
16. Kadets M. I. 1967, “Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces”, *Funktsional. Anal, i Prilozhen*, vol. 1, № 1, pp. 61–70. (Russian)
17. Lovaglia A.R. 1955, “Locally uniformly convex Banach spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 78(1), pp.225–238.

18. Kadets M. I. 1959, "Spaces isomorphic to a locally uniformly convex space", *Izv. Vvssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol.6, pp.51–57. (Russian)
19. Lindenstrauss J. 1972, "Weakly compacts sets-their topological properties and Banach spaces they generate", *Ann. Math. Studies*, vol.69, pp.235–273.
20. Trojanski S.L. 1972, "About equivalent norms and the minimum systems in nonseparable Banach spaces", *The Function theory, Funkts. analysis and their applications*, vol.43, pp.125–138. (Russian)
21. Kadets M. I. 1959, "About connection between weak and a strong convergence", *DAN UkrSSRAM*. pp.949–952. (Russian)
22. Beazamv B. 1985, "Introduction to Banach Spaces and their Geometry", *Oxford*.
23. Deville R. Godefrov G. Zizler V. 1993, "Smoothness and renorming in Banach spaces", *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill, Harrow*.
24. Aleksandrov P. S. 1977, "Introduction in the theory of sets and the general topology", *The Science, Moscow*.
25. Havdon R.G. 1999, "Trees in renorming theory", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 78, pp. 541–584.
26. Havdon R.G., Zizler V. 1989, "A new spaces with no locally uniformly rotund renorming", *Can. Math. Bull.*, vol. 32(1), pp. 122–128.
27. Havdon R.G., Petr Hajek. 2007, "Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type $C(K)$ ", *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 221–228.
28. Havdon R.G. 2008, "Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals", *J. Funct. Anal.*, vol. 254(8), pp. 2023–2039.
29. Havdon R.G., Argyros S.A. 2011, "A hereditarily indecomposable L-infinity-space that solves the scalar-plus-compact problem", *ACTA MATHEMATICA*, vol. 206(1), pp. 1–54.
30. Bormotov I.V. 2022, "The valuable world of modern Russian youth (The social-philosophical analysis: the monography)", *Infra-M, Moscow*.

Получено: 17.05.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-320-330

Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости¹

Л. А. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что однородное изотропное упругое полупространство покрыто непрерывно-неоднородным плоским слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе решения аналогичной задачи в случае падения плоской волны.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по плоским волнам. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению для давления в плоской падающей волне. Поэтому давление в рассеянной волне в случае падения сферической волны на полупространство с неоднородным жидким слоем записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению для давления в рассеянной волне при падении плоской волны. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, приближенное аналитическое решение которой получено методом степенных рядов.

Ключевые слова: сферические звуковые волны, упругое полупространство, неоднородный слой жидкости.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 320–330.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-03-2023-303/2).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-320-330

Reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer

L. A. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Abstract

In paper the problem of reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer is considered. It is assumed that a homogeneous isotropic elastic half-space is covered by a continuously-inhomogeneous of a plane liquid layer with an arbitrary law of inhomogeneity. A point source of harmonic sound waves is placed in an ideal homogeneous liquid bordering an inhomogeneous layer.

The analytical solution of the viewed problem is obtained on the basis of the solution of a similar problem for the case of a plane incident wave.

The acoustic pressure in a spherical wave is represented in integral form as a decomposition on a plane waves. The integrand expression turns out to be similar in form to the expression for pressure in a plane incident wave. Therefore, the pressure in a scattered wave in the case of a spherical wave falling on a half-space with an inhomogeneous liquid layer is written as an integral, the integral expression of which is similar in form to the expression for the pressure in a scattered wave when a plane wave falls. For the determination of the wave field in an inhomogeneous liquid layer the boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order is built, the approximate analytical solution of which is obtained by the power series method.

Keywords: spherical sound waves, elastic half-space, inhomogeneous liquid layer.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2023, “Reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 320–330.

1. Введение

Изучению распространения звуковых волн в присутствии плоских границ раздела сред посвящено большое количество работ. При этом в большинстве работ первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако часто возникает необходимость учитывать конечную удаленность источника звука от границ раздела сред. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоскую границу.

Задача о поле точечного источника, расположенного на конечном удалении от плоской границы раздела сред рассматривалась в ряде работ. Анализ отражения и преломления сферической волны на границе раздела двух однородных жидких и упругих полупространств

проведен в [1, 2]. Задача об отражении сферической звуковой волны от плоскости, на которой заданы импедансные условия, решена в [3]. Отражение сферической звуковой волны от однородного вязкоупругого полупространством рассмотрено в [4].

В ряде работ исследовалось прохождение сферической звуковой волны через однородные изотропные упругие плоские слои. В [5, 6] исследовано прохождение сферической волны через тонкую бесконечную пластину, находящуюся в однородной жидкости. Взаимодействие сферической волны с однородной изотропной упругой пластиной конечной толщины и с двухслойной пластиной, состоящей из однородных и изотропных твердых слоев, изучено в [7, 8]. В [9] решена задача дифракции сферической волны на тонкой бесконечной пластине, разделяющей однородную и слоисто-неоднородную среды. В [10] проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. В [11] построено точное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский однородный упругий слой. В качестве источника поля рассматривался сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Прохождение сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным изотропным упругим покрытием исследовано в [12].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине слоем жидкости в случае произвольного закона неоднородности.

2. Постановка задачи

Пусть все пространство R^3 разделено плоскостями $z = 0$ и $z = h$ на три области: $D_1(z < 0)$, $D_2(0 < z < h)$, $D_3(z > h)$. Область D_1 — однородное упругое полупространство, которое характеризуется плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ и μ . Область D_2 представляет собой плоский слой идеальной неоднородной жидкости толщиной h , прилегающий к границе упругого полупространства $z = 0$. Полагаем, что плотность неоднородной жидкости ρ_2 является дифференцируемой функциями координаты z , а скорость звука c_2 — непрерывной функцией этой координаты. Область D_3 заполнена однородной идеальной жидкостью с плотностью ρ_3 и скоростью распространения звука c .

В области D_3 в точке $M_0(0, 0, z_0)$ расположен точечный излучатель гармонических звуковых волн. Звуковое давление гармонической сферической звуковой волны записывается в виде

$$p_0 = A \frac{\exp[i(kR - \omega t)]}{R}, \quad (1)$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число однородной жидкости; ω — круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и с точечным источником M_0 соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, отраженное упругим полупространством, покрытым неоднородным слоем жидкости.

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном полупространстве в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [6]

$$\Delta \Psi + k_t^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi + k_t^2 \Phi = 0, \quad \operatorname{div} \Phi = 0, \quad (3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения частиц упругой среды \mathbf{u} ; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho_1}$ — скорости продольных и поперечных волн. При этом вектор смещения частиц упругого однородного полупространства

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi, \quad (4)$$

где

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы осей x, y и z прямоугольной декартовой системы координат.

Векторное уравнение (3) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора Φ

$$\Delta \Phi_x + k_\tau^2 \Phi_x = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \Phi_y + k_\tau^2 \Phi_y = 0,$$

$$\Delta \Phi_z + k_\tau^2 \Phi_z = 0. \quad (6)$$

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора Φ будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца (5) и (6), а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения $\text{div } \Phi = 0$, из которого следует

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Согласно (4) компоненты вектора \mathbf{u} выражаются через функции Ψ, Φ_x, Φ_y и Φ_z по формулам

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \quad (8)$$

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [1]

$$\Delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} p_2 - \frac{1}{\rho_2} \text{grad } \rho_2 \cdot \text{grad } p_2 = 0, \quad (9)$$

где p_2 — звуковое давление в неоднородном слое; $c_2 = c_2(z)$, $\rho_2 = \rho_2(z)$.

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае гармонического движения описывается уравнением Гельмгольца [6]

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0, \quad (10)$$

где $p_1 = p_0 + p_s$ — звуковое давление полного акустического поля в области D_3 , p_s — звуковое давление в рассеянной волне.

Скорости частиц в однородной жидкости и в неоднородном слое определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega} \text{grad } p_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{i\rho_2\omega} \text{grad } p_2. \quad (11)$$

Решения дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10) должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях $z = 0$ и $z = h$, а также условиям излучения на бесконечности [6].

Граничные условия на поверхности полупространства $z = 0$ заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и неоднородной жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = 0 : \quad -i\omega u_z = v_{2z}, \quad \sigma_{zz} = -p_2, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (12)$$

На границе раздела однородной и неоднородной жидкостей $z = h$ должны быть равны нормальные скорости частиц жидкостей и акустические давления

$$z = h : \quad v_{1z} = v_{2z}, \quad p_1 = p_2. \quad (13)$$

Связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и составляющими вектора смещения \mathbf{u} в упругом полупространстве устанавливается на основе обобщенного закона Гука [13] и имеет вид

$$\sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10), удовлетворяющих граничным условиям (12) и (13), а также дополнительным условиям — условиям излучения на бесконечности.

4. Аналитическое решение задачи

Представим давление падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [1, 2]

$$p_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (15)$$

где

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i(\xi x + \eta y + \chi|z - z_0|)}, \quad \chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \quad (16)$$

При $z < z_0$ формула (16) принимает вид (волна падает на неоднородный слой, покрывающий полупространство)

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = I(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y - \chi z)}, \quad I(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i\chi z_0}. \quad (17)$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (15), определяемое (17), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на полупространство с неоднородным слоем. Акустическое давление такой волны записывается в виде

$$p_{0pl} = A_0 e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}, \quad (18)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_z = k \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора плоской волны \mathbf{k} на оси координат x , y , z ; $|\mathbf{k}| = k$; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (17) и (18) находим, что ξ соответствует k_x , $\eta - k_y$, $\chi - k_z$, а $I(\xi, \eta) - A_0$. Поэтому решение поставленной задачи можно найти, воспользовавшись решением задачи об отражении плоской звуковой волны от полупространства с прилегающим неоднородным слоем.

Действительно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, акустические давления в отраженной волне \tilde{p}_s и неоднородном слое \tilde{p}_2 , потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в упругом полупространстве определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны p_{0pl} , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины p_s , p_2 , Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z подлежат определению путем интегрирования \tilde{p}_s , \tilde{p}_2 , $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$ по ξ и η в бесконечных пределах.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным жидким покрытием.

5. Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости

Пусть из области $D_3(z > h)$ на полупространство, покрытым неоднородным слоем жидкости падает под произвольным углом плоская звуковая волна, давление в которой определяется выражением (18). Определим волновые поля в областях D_1 , D_2 и D_3 . Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl .

Потенциалы смещения в упругом полупространстве, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (2), (5) и (6) будем искать в виде

$$\Psi_{pl} = B e^{i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)}, \quad (19)$$

$$\Phi_{xpl} = C e^{i[k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z]}, \quad (20)$$

$$\Phi_{zpl} = D e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (21)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{lx} = k_{\tau x} = k_x$, $k_{ly} = k_{\tau y} = k_y$.

Подставим выражения (20) и (21) в (7) и проинтегрируем по y . Получим

$$\Phi_{ypl} = -\frac{1}{k_{\tau y}}(k_{\tau x}C - k_{\tau z}D)e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}. \quad (22)$$

Давление p_{2pl} является решением уравнения (9). Согласно закону Снеллиуса зависимость p_{2pl} от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_x x)$, а от координаты y — $\exp(ik_y y)$. Поэтому функцию p_{2pl} будем искать в виде

$$p_{2pl} = P(z)e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (9), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $P(z)$

$$P''(z) + \alpha(z)P'(z) + \beta(z)P(z) = 0, \quad (24)$$

где $\alpha(z) = -\frac{\rho_2'(z)}{\rho_2(z)}$; $\beta(z) = \frac{\omega^2}{c_2^2(z)} - k_x^2 - k_y^2$.

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Давление в отраженной волне p_{spl} , являющееся решением уравнения Гельмгольца (10), будем искать в виде

$$p_{spl} = A_1 e^{i[k_x x + k_y y + k_z(z-h)]}. \quad (25)$$

Подставляя (18) – (23) и (25) в граничные условия (12) и (13) и учитывая (8), (11) и (14), получим выражения для неизвестных коэффициентов A_1 , B , C , D

$$A_1 = -A_0 e^{-ik_z h} + P(h), \quad (26)$$

$$B = \frac{a_9 d_1}{\Delta} P(0), \quad C = -\frac{a_9 d_2}{\Delta} P(0), \quad D = \frac{-a_7 d_1 + a_8 d_2}{\Delta} P(0) \quad (27)$$

и два краевых условия для дифференциального уравнения (24)

$$\begin{aligned} P'(0) + \gamma_1 P(0) &= 0, \\ P'(h) + \gamma_2 P(h) &= g, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{k_{\tau y} \Delta}; & \gamma_2 &= \frac{ik_z \rho_2(h)}{\rho_1}; & g &= 2A_0 e^{-ik_z h} \gamma_2; & \Delta &= (a_1 a_9 - a_7 a_3) d_1 - (a_2 a_9 - a_8 a_3) d_2; \\ a_1 &= -\lambda k_l^2 - 2\mu k_{lz}^2; & a_2 &= -\frac{k_{\tau z}}{k_{\tau y}} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2); & a_3 &= \frac{k_{\tau x} k_{\tau z}^2}{k_{\tau y}}; & a_4 &= 2k_{lx} k_{ly} k_{\tau y}; \\ a_5 &= k_{\tau x} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2); & a_6 &= k_{\tau z} (-k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 + k_{\tau z}^2); & a_7 &= 2k_{ly} k_{lz}; \\ a_8 &= k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2; & a_9 &= -2k_{\tau x} k_{\tau z}; & d_1 &= a_5 a_9 - a_8 a_6; & d_2 &= a_4 a_9 - a_7 a_6.\end{aligned}$$

Коэффициенты A_1, B, C, D выражаются через значения функции $P(z)$ на концах отрезка $[0, h]$. Поэтому для их вычисления необходимо прежде всего решить краевую задачу (24), (28).

Найдем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24), (28) методом степенных рядов [14].

Аппроксимируем функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ многочленами относительно переменной z

$$\alpha(z) = \sum_{m=0}^M \alpha_m (z - h/2)^m, \quad \beta(z) = \sum_{m=0}^M \beta_m (z - h/2)^m, \quad (29)$$

где M — степень многочлена.

Решение линейного уравнения с переменными коэффициентами (24) будем искать в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (z - h/2)^n. \quad (30)$$

Если коэффициенты уравнения (24) $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — многочлены, то степенной ряд (30) будет сходиться при любом значении z из отрезка $[0, h]$ [14].

Производные $P'(z)$ и $P''(z)$ согласно (30) запишем в виде

$$\begin{aligned}P'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1} (z - h/2)^n, \\ P''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) P_{n+2} (z - h/2)^n.\end{aligned} \quad (31)$$

Тогда

$$\alpha(z) P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} (n+1-m) \alpha_m P_{n+1-m} \right] (z - h/2)^n, \quad (32)$$

$$\beta(z) P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} \beta_m P_{n-m} \right] (z - h/2)^n, \quad (33)$$

где $M_1 = \min(M, n)$.

Подставляя выражения (31) – (33) в уравнение (24) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени $(z - h/2)$, получаем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов P_n

$$P_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m) \alpha_m P_{n+1-m} + \beta_m P_{n-m}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

которое позволяет вычислить все коэффициенты разложения (30) за исключением P_0 и P_1 .

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу (24), (28) к задачам с начальными условиями в точке $z = h/2$. Найдем два линейно независимых решения дифференциального уравнения (24). В качестве фундаментальных решений можно выбрать два решения задачи Коши $P^{(1)}(z)$ и $P^{(2)}(z)$ уравнения (24) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} P^{(1)}|_{z=h/2} &= 1, & P^{(1)'}|_{z=h/2} &= 0, \\ P^{(2)}|_{z=h/2} &= 0, & P^{(2)'}|_{z=h/2} &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Однородность уравнения (24) позволяет представить решение краевой задачи (24), (28) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$P(z) = T_1 P^{(1)}(z) + T_2 P^{(2)}(z), \quad (36)$$

где T_1 и T_2 — постоянные.

Функции $P^{(l)}(z)$ ($l = 1, 2$) будем искать в виде (30)

$$P^{(l)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(l)}(z - h/2)^n \quad (l = 1, 2). \quad (37)$$

Все коэффициенты разложений (37) за исключением $P_0^{(l)}$ и $P_1^{(l)}$ ($l = 1, 2$) вычисляются по формуле (34)

$$P_{n+2}^{(l)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} \left[(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m}^{(l)} + \beta_m P_{n-m}^{(l)} \right], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

Подставляя (37) в начальные условия (35), находим

$$P_0^{(1)} = 1, \quad P_1^{(1)} = 0, \quad P_0^{(2)} = 0, \quad P_1^{(2)} = 1.$$

Подставляя (36) в краевые условия (28), получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных T_1 и T_2

$$c_{11}T_1 + c_{12}T_2 = 0,$$

$$c_{21}T_1 + c_{22}T_2 = g,$$

где

$$c_{11} = P^{(1)'}(0) + \gamma_1 P^{(1)}(0); \quad c_{12} = P^{(2)'}(0) + \gamma_1 P^{(2)}(0);$$

$$c_{21} = P^{(1)'}(h) + \gamma_2 P^{(1)}(h); \quad c_{22} = P^{(2)'}(h) + \gamma_2 P^{(2)}(h).$$

Определив из этой системы коэффициенты T_1 и T_2 , получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24),(28)

$$P(z) = \frac{c_{12}}{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}} \left[c_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(z - h/2)^n - c_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(z - h/2)^n \right]. \quad (39)$$

6. Отражение сферической волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, соответствующие величины $\tilde{p}_s, \tilde{p}_2, \tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y$ и $\tilde{\Phi}_z$ определяются формулами (19)–(23), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны давления $p_0 pl$, в которых следует сделать замену k_x на ξ , k_y на η , k_z на χ , A_0 на $I(\xi, \eta)$.

Искомое акустическое давление в рассеянной волне p_s определяется путем интегрирования \tilde{p}_s

$$p_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_s(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Аналогичным образом путем интегрирования находятся $p_2, \Psi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$.

Будем иметь

$$p_s(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} + \tilde{P}(h) \right] e^{i[\xi x + \eta y + \chi(z-h)]} d\xi d\eta, \quad (40)$$

где

$$\tilde{P}(h) = \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21} - \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} \left[\tilde{c}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(h/2)^n - \tilde{c}_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(h/2)^n \right];$$

$$\tilde{c}_{11} = P^{(1)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(1)}(0); \quad \tilde{c}_{12} = P^{(2)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(2)}(0);$$

$$\tilde{c}_{21} = P^{(1)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(1)}(h); \quad \tilde{c}_{22} = P^{(2)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(2)}(h);$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{\eta \tilde{\Delta}}; \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{i\chi \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad \tilde{g} = 2I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} \tilde{\gamma}_2; \quad \tilde{\Delta} = (\tilde{a}_1 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_7 \tilde{a}_3) \tilde{d}_1 - (\tilde{a}_2 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_8 \tilde{a}_3) \tilde{d}_2;$$

$$\tilde{a}_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_1^2; \quad \tilde{a}_2 = -\frac{1}{\eta}(\xi^2 + \eta^2)k_2; \quad \tilde{a}_3 = \frac{\xi}{\tau}k_2^2; \quad \tilde{a}_4 = 2\xi\eta k_1; \quad \tilde{a}_5 = \xi(\xi^2 + \eta^2 - k_2^2);$$

$$\tilde{a}_6 = k_2(k_7^2 - 2\xi^2); \quad \tilde{a}_7 = 2\eta k_1; \quad \tilde{a}_8 = \xi^2 + \eta^2 - k_2^2; \quad \tilde{a}_9 = -2\xi k_2;$$

$$\tilde{d}_1 = \tilde{a}_5 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_8 \tilde{a}_6; \quad \tilde{d}_2 = \tilde{a}_4 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_7 \tilde{a}_6; \quad k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad k_2 = \sqrt{k_7^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Чтобы обеспечить ограниченность \tilde{p}_s при $z \rightarrow \infty$ выбор знака корня $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ осуществим из условия $\text{Im}\chi \geq 0$, то есть $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 < k^2$, $\chi = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 > k^2$.

Величины k_1 и k_2 определяются по формулам

$$k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_l^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_l^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_l^2;$$

$$k_2 = \sqrt{k_7^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_7^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_7^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_7^2.$$

Оценить аналитически интеграл (40) не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету.

7. Заключение

Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией поверхностей полупространства и жидкого слоя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Поэтому для получения аналитического решения задачи отражения сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине

плоским слоем жидкости применен метод, использующий решение аналогичной задачи в случае падения плоской волны. Такой подход к решению поставленной задачи позволил избежать необходимости непосредственного решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями. Найденное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
3. Ingard U. On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane // J. Acoust. Soc. Am. 1951. Vol. 23. No. 3. P. 329 – 335.
4. Magnuson A. H. Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space // J. Acoust. Soc. Am. 1975. Vol. 57. No. 5. P. 1017 – 1024.
5. Lamb Jr. The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate // Ann. Phys. 1957. Vol. 1. No. 3. P. 233 – 246.
6. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
7. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
8. Piquette J. C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 84. No. 4. P. 1526 – 1535.
9. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // Акуст. журн. 1969. Т. 15. Вып. 4. С. 560 – 566.
10. Шендеров Е. Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 800 – 807.
11. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика. 2014. Вып. 2. С. 36 – 48.
12. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш.. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1969. 656 с.

REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “Waves in layered media, *Nauka*, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Brekhovskikh, L. M., Godin, O. A. 1989, “Acoustics of layered media”, *Nauka*, Moscow, 416 p., [in Russian].

3. Ingard, U. 1951, "On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 23, no. 3, pp. 329 – 335.
4. Magnuson, A. H. 1975, "Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, no. 5, pp. 1017 – 1024.
5. Lamb, Jr. 1957, "The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate", *Ann. Phys.*, vol. 1, no. 3, pp. 233 – 246.
6. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie*, Leningrad, 352 p., [in Russian].
7. Piquette, J. C. 1988, "Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, no. 4, pp. 1284 – 1294.
8. Piquette, J. C. 1988, "Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 84, no. 4, pp. 1526 – 1535.
9. Kurtepov, V. M. 1969, "The sound field of a point source in the presence of a thin infinite plate in the medium (discrete spectrum)", *Akust. Zhurnal*, vol. 15, no. 4, pp. 560 – 566, [in Russian].
10. Shenderov E. L. 1991, "Transmission of a spherical sound wave through an elastic layer", *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 4, pp. 800 – 807, [in Russian].
11. Shushkevich G. Ch., Kiselyova N. N. 2014, "Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell", *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A., Nguyen, T. S. 2022, "Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 305 – 319, [in Russian].
13. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", *Mir*, Moscow, 872 p., [in Russian].
14. Smirnov, V. I. 1969, "Higher mathematics course, vol. 2", *Nauka*, Moscow, 656 p., [in Russian].

Получено: 14.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-331-342

**Моделирование деформационной повреждаемости металлов
при деформациях пластического сжатия**

Н. Д. Тутышкин

Тутышкин Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Аннотация

Эксплуатационные свойства многих изделий точного машиностроения, изготавливаемых методами пластической деформации, существенно зависят от структурной деформационной повреждаемости их материала. В связи с этим существенное значение для расчета и прогнозирования надежных эксплуатационных характеристик этих изделий имеют методы математического моделирования сложного физического процесса структурной повреждаемости. Согласно систематизированным экспериментальным данным, повреждаемость металлов при больших пластических деформациях связана, главным образом, с образованием, ростом и коалесценцией пор. Для формулировки определяющих соотношений и определения входящих в них материальных функций используется геометрическая модель элементарного объема (RVE) со стохастически распределенными мезоэлементами (ME), представляющими материальную оболочку с порой. Для поэтапного расчета компонент тензора приращения деформации на RVE- и ME- уровнях их начальная (недеформированная) и текущая (деформированная) конфигурация определяются метрическим тензором. Приводится расчет мер повреждаемости на основе экспериментального определения и моделирования материальных функций пластической дилатансии и девиаторной деформации ME в зависимости от девиаторной деформации RVE в опытах на пластическое сжатие.

Ключевые слова: структурная повреждаемость, математическое моделирование, тензор деформации, физико-структурные параметры, макро- и мезоэлементы, определяющие соотношения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Н. Д. Тутышкин. Моделирование деформационной повреждаемости металлов при деформациях пластического сжатия // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 331–342.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-331-342

Modeling of deformation damage of metals in case of plastic compression deformations

N. D. Tutyshkin

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Abstract

The performance properties of many precision mechanical engineering products manufactured by plastic deformation methods depend significantly on the structural deformation damage of their material. In this regard, methods of mathematical modeling of the complex physical process of structural damage are essential for calculating and predicting reliable operational characteristics of these products. According to systematic experimental data, the damage of metals in large plastic deformations is mainly associated with the formation, growth and coalescence of pores. To formulate the defining relations and determine the material functions included in them, a geometric model of elementary volume (RVE) with stochastically distributed mesoelements (ME) representing a material shell with sometimes is used. For step-by-step calculation of strain increment tensor components at RVE- and ME- levels, their initial (undeformed) and current (deformed) configurations are determined by the metric tensor. Calculation of damage measures based on experimentation, determination and modeling of material functions of plastic dilatancy and deviator deformation of ME depending on deviator deformation of RVE in plastic compression experiments, is given.

Keywords: structural damageability, mathematical modeling, strain tensor, physical and structural parameters, macro- and mesoelements, determining relationships.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. D. Tutyshkin, 2023, "Modeling of deformation damage of metals in case of plastic compression deformations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 331–342.

1. Введение

Прогнозирование пластической повреждаемости является очень существенным технологическим фактором, особенно при изготовлении металлоизделий с качественной мезоструктурой и высокими эксплуатационными свойствами (испытывающих интенсивные силовые и тепловые нагрузки, высокие скорости деформации и физико-химические воздействия). Повреждаемость металлов при больших конечных пластических деформациях связана главным образом с образованием, ростом и коалесценцией пор [1-3]. Например, известно, что при больших пластических деформациях в направлении полос сдвига происходит коалесценция пор с образованием пустот большого размера. В свою очередь эти пустоты являются источниками полос локализованной деформации и могут приводить к пластическому разрушению материала [4].

Важной проблемой в механике пластической повреждаемости остается создание физически обоснованных моделей, описывающих повреждаемость. Неучёт повреждаемости, особенно при больших конечных пластических деформациях, может приводить к существенным погрешностям при решении прикладных задач.

Поры при больших пластических деформациях сжатия приобретают сплюснутую эллипсоидальную форму. При этом пространственная ориентация главных осей мезоэллипсоида оказывается связанной с направлениями главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ малой частицы материала, содержащей пору (мезоэлемента, представляющего собой материальную оболочку с одной порой). Таким образом металлические материалы обладают тензорными свойствами деформационной повреждаемости. Целесообразность использования тензорной модели для оценки деформационной повреждаемости основывается на известных результатах по экспериментальному исследованию и моделированию процесса роста и коалесценции пор при пластической деформации.

В работах [5-9], на основе физической концепции роста и изменения формы пор при больших пластических деформациях, формулируется потенциал диссипации и определяющие соотношения пластической повреждаемости металлов. Для модели пластического повреждаемого материала вводятся два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов). Термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводит к симметричному тензору повреждаемости второго ранга (ω) с ясным физическим смыслом. Его первый инвариант ($\omega_{\cdot k}^k$) определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор. А второй инвариант $(1/2)\tilde{\omega}_{\cdot j}^i\tilde{\omega}_{\cdot i}^j$ девиаторного тензора $\tilde{\omega}$ (мера $\left((1/2)\tilde{\omega}_{\cdot j}^i\tilde{\omega}_{\cdot i}^j\right)^{1/2}$) - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов. Введение двух нормированных мер (ω_1 и ω_2) с соответствующим физическим смыслом позволяет отобразить кинетический процесс деформационной повреждаемости эквивалентным параметром ω (ω_1, ω_2) в фазовом пространстве ω_1, ω_2 , включая критериальные условия для начала стадии коалесценции пор и пластического разрушения. Целесообразность совместного использования этих мер обосновывается экспериментальными исследованиями кинетического процесса пластической повреждаемости металлических материалов, проведенными рядом исследователей.

2. Основные соотношения

В дальнейшем используются следующие обозначения. Символы $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ обозначают соответственно скалярное и тензорное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Тензоры второго порядка, как векторы, обозначены буквами, набранными жирным шрифтом. В связи с определением деформаций на RVE - и мезоуровнях вводятся в рассмотрение тензоры приращения деформации и ее скорости на RVE -уровне: $d\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и мезоуровне: $d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (тензоры будут обозначаться буквами с жирным шрифтом). Следуя работам [9, 10], соответствующими буквами (с нежирным шрифтом) будут обозначаться их (например, ковариантные) компоненты: $d\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, d\tilde{\varepsilon}_{ij}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$, в том числе, шаровые $d\varepsilon_{\cdot k}^k, \dot{\varepsilon}_{\cdot k}^k, d\tilde{\varepsilon}_{\cdot k}^k, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{\cdot k}^k$ и девиаторные $d\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, d\tilde{\varepsilon}_{ij}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$, а также эквивалентные меры $d\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq}, \varepsilon_{eq}, d\tilde{\varepsilon}_{eq}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{eq}, \tilde{\varepsilon}_{eq}$. Эквивалентная деформация, определенная из тензора логарифмических деформаций:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - главные компоненты тензора деформаций.

Эквивалентная (накапливаемая) деформация (параметр Одквиста) при сложном (непропорциональном) нагружении определяется интегрированием по пути деформации [11]:

$$\varepsilon_{eq} = \int \dot{\varepsilon}_{eq} dt = \int d\varepsilon_{eq}, \quad (2)$$

где эквивалентная скорость и приращение деформации

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{(2/3) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^i \dot{\varepsilon}_{ij}^j - \dot{\varepsilon}_{ij}^i \dot{\varepsilon}_{ij}^j \right)}, d\varepsilon_{eq} = \sqrt{(2/3) \left(d\varepsilon_{ij}^i d\varepsilon_{ij}^j - d\varepsilon_{ij}^i d\varepsilon_{ij}^j \right)}. \quad (3)$$

На мезоуровне для МЕ вводятся аналогичные соотношения. Рассеянные по объему RVE поры имеют различные исходные и текущие размеры и форму, а также положение главных осей. Поэтому экспериментальные измерения изменяющихся размеров совокупности пор в пределах RVE за период времени Δt приводят к рассеянным значениям тензора приращения деформации мезоэлементов $\Delta \widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon} \Delta t$ и, соответственно, их эквивалентной деформации $\widehat{\varepsilon}_{eq}$. В связи с этим возникает необходимость определения наиболее вероятных (модальных) значений величин $\Delta \widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\varepsilon}_{eq}$ по экспериментально определяемым распределениям величин $\Delta \widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\varepsilon}_{eq}$. Модальные значения тензоров $\Delta \widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\varepsilon}_{eq}$ являются мерами, ассоциированными по отношению к N -совокупности пор в пределах RVE . Они будут также являться локальными характеристиками деформации RVE на мезоуровне.

Для моделирования процессов пластического формоизменения металлоизделий с высокими эксплуатационными свойствами целесообразно вводить два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов).

Разложение тензора приращения поврежденности $d\omega$ на шаровый тензор и девиатор $d\omega_{ij} = (1/3) \delta_{ij} d\omega_{ij}^k + d\omega_{ij}^k$, где $d\omega_{ij}^k$ - первый инвариант тензора $d\omega$, δ_{ij} - символ Кронекера, имеет ясный физический смысл. Шаровый тензор $(1/3) \delta_{ij} d\omega_{ij}^k$ описывает приращение поврежденности, связанное с изменением объема пор. Девиатор $d\omega_{ij}^k$ описывает приращение поврежденности, связанное с изменением формы пор. Подобное представление кинетического процесса повреждаемости деформируемого материала позволяет ввести для его оценки две меры (ω_1 и ω_2) следующими дифференциальными уравнениями [9]:

$$d\omega_1 = d\omega_{ij}^k = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^k}{\bar{\varepsilon}_f} dt, d\omega_2 = \sqrt{3 \dot{\omega}_{ij}^i \dot{\omega}_{ij}^i} dt = \frac{\sqrt{3 \dot{\varepsilon}_{ij}^i \dot{\varepsilon}_{ij}^i}}{\bar{\varepsilon}_f} dt = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\bar{\varepsilon}_f} dt. \quad (4)$$

Рассмотрим интегральную функцию $\bar{\varepsilon}_f$. Представим ее зависимость через приращения деформаций:

$$\bar{\varepsilon}_f = \int_{t_f} \left(\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \right)^{1/2} dt = \int_{t_f} \dot{\zeta} dt = \int_{\zeta_f} d\zeta, \dot{\zeta} = \left(\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Введем изображающее пространство с декартовыми прямоугольными координатами $\xi = \varepsilon_{ij}^k$, $\eta = (3/\sqrt{2}) \varepsilon_{eq}$, $\xi, \eta \in [0; \infty]$ (рис. 1). Накопленное значение параметра $\bar{\varepsilon}_f = \int_{\zeta_f} d\zeta$ определяется длиной дуги $O\zeta_f$, где точка ζ_f соответствует моменту макроразрушения. В случае пропорционального роста дилатансии ε_{kk} и эквивалентной деформации ε_{eq} мезоэлементов параметр $\bar{\varepsilon}_f = \int_{\zeta_f} d\zeta = \left| \overrightarrow{O\zeta_f} \right|$ определяется модулем вектора $\overrightarrow{O\zeta_f}$. Фазовый угол вектора разрушения $\overrightarrow{O\zeta_f} \vartheta_f = \arctg \left((3/\sqrt{2}) \varepsilon_{eqf} / \varepsilon_{ijf}^k \right)$. Соответственно вводится вектор коалесценции $\overrightarrow{O\zeta_c}$ с фазовым углом $\vartheta_c = \arctg \left((3/\sqrt{2}) \varepsilon_{eqc} / \varepsilon_{ijc}^k \right)$.

Интегральные нормированные меры повреждаемости ($\omega_1, \omega_2 \in [0; 1]$), в соответствии с дифференциальными уравнениями (4):

$$\omega_1 = \int_t \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{\cdot k}^k}{\bar{\varepsilon}_f} dt = \int_{\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k} \frac{d\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k}{\bar{\varepsilon}_f}, \omega_2 = \int_t \frac{\sqrt{3\dot{\bar{\varepsilon}}_{\cdot j}^i \dot{\bar{\varepsilon}}_{\cdot i}^j}}{\bar{\varepsilon}_f} dt = \int_t \frac{(3/\sqrt{2}) \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq}}{\bar{\varepsilon}_f} dt = \int_{\bar{\varepsilon}_{eq}} \frac{3\sqrt{2}}{\bar{\varepsilon}_f} d\bar{\varepsilon}_{eq}. \quad (6)$$

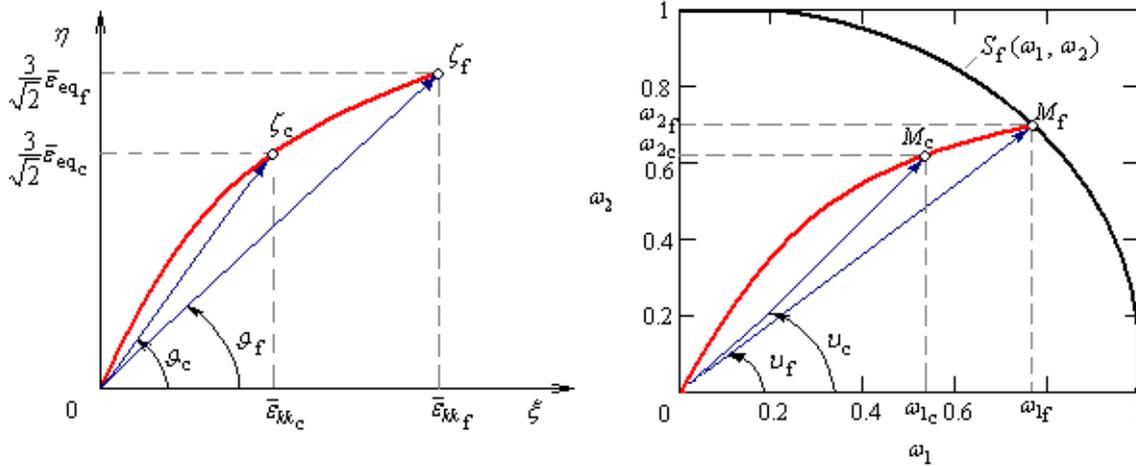


Рис 1: Изображающее пространство развития повреждаемости: слева – в плоскости параметров $\eta = \bar{\varepsilon}_{kk}$, $\xi = (3/\sqrt{2}) \bar{\varepsilon}_{eq}$; справа – в плоскости нормированных параметров ω_1 , ω_2

Введем пространство нормированных параметров ω_1, ω_2 (рис. 1). Процесс повреждаемости деформируемого материала от начального состояния до макроразрушения изображается траекторией OM_cM_f , где точка M_c соответствует началу стадии коалесценции пор. Подобная интерпретация процесса повреждаемости позволяет ввести в рассмотрение рабочую гипотезу о существовании годографа разрушения $S_f(\omega_1, \omega_2)$ (рис. 1). Система N -опытов с варьированием мер повреждаемости ω_1, ω_2 позволяет определить совокупность точек, принадлежащих годографу разрушения $S_f(\omega_1, \omega_2)$. Точка годографа $S_f(1, 0)$ соответствует разрушению образца в результате достижения критической величины пластической дилатансии, без изменения формы пор. Точка годографа $S_f(0, 1)$ соответствует разрушению образца в результате достижения критической величины эквивалентной деформации мезоэлементов, содержащих вытянутые эллипсоидальные поры, без изменения их объема. Пространство ω_1, ω_2 позволяет ввести эквивалентную повреждаемость $\omega_{eq} = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}$.

При экспериментальном изучении и моделировании деформационной повреждаемости с использованием мер ω_1 и ω_2 удобно входящие в соотношения (6) величины $\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k$, $\bar{\varepsilon}_{eq}$ и их производные определять как материальные функции от текущей эквивалентной девиаторной деформации RVE ε_{eq} :

$$\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k = \bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k(\varepsilon_{eq}), \dot{\bar{\varepsilon}}_{\cdot k}^k = \left[\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k(\varepsilon_{eq}) \right]' \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt}, \bar{\varepsilon}_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq}), \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq} = \left[\bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq}) \right]' \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt}, \quad (7)$$

где штрих означает производную по Λ .

Таким образом, тензор повреждаемости ω и связанные с его инвариантами нормированные меры ω_1 и ω_2 описывают как возможность макроразрушения деформируемого материала в определенной опасной зоне, так и возможность начала стадии активной коалесценции эллипсоидальных пор и образования полостных дефектов (как критерий микроразрушения на мезоуровне). Эти меры могут оказаться полезными для оценки качества мезоструктуры металлоизделий. Качественная структура металлических материалов (без крупных полостных

дефектов, кластеров) существенно повышает способность деталей выдерживать динамические ударные нагрузки, а также их усталостную прочность.

3. Моделирование экспериментально определяемых материальных функций

Расчет повреждаемости и прогнозирование разрушения в процессах пластического течения металлов связан с экспериментальным определением и моделированием материальных функций, входящих в определяющие соотношения. Вводя в дифференциальные уравнения (4) материальные функции (7), получаем:

$$d\omega_1 = \frac{[\bar{\varepsilon}_{kk}(\varepsilon_{eq})]'}{\bar{\varepsilon}_f} d\varepsilon_{eq}, d\omega_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{[\bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq})]'}{\bar{\varepsilon}_f} d\varepsilon_{eq}. \quad (8)$$

Для расчета повреждаемости в конкретном процессе пластической деформации представим дифференциальные уравнения (8) в интегральной форме:

$$\omega_1 = \int_0^{\varepsilon_{eq}} \frac{[\bar{\varepsilon}_{kk}(\varepsilon_{eq})]'}{\bar{\varepsilon}_f(\varepsilon_{eqf})} d\varepsilon_{eq}, \omega_2 = \int_0^{\varepsilon_{eq}} \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{[\bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq})]'}{\bar{\varepsilon}_f(\varepsilon_{eqf})} d\varepsilon_{eq}. \quad (9)$$

В соотношения (9) входят следующие зависимости (материальные функции): пластической дилатансии мезоэлементов $\bar{\varepsilon}_{kk}$ от девиаторной деформации RVE ε_{eq} , девиаторной деформации мезоэлементов $\bar{\varepsilon}_{eq}$ от девиаторной деформации ε_{eq} , предельной пластической деформации мезоэлементов $\bar{\varepsilon}_f$ от предельной девиаторной деформации RVE ε_{eqf} .

Рассмотрим моделирование экспериментально определяемых материальных функций в процессах пластического сжатия. План эксперимента предусматривал использование в опытах на сжатие цилиндрических образцов пяти типов (рис. 2) из конструкционной стали (Steel DC01) и чистой меди (Сopper). Тип А – сплошной, без искусственных пор, остальные четыре – с различным расположением цепочки из трех цилиндрических пор-отверстий. Образец В имеет вертикально расположенные отверстия в меридиональном сечении. Остальные три типа С, D, Е имеют горизонтально расположенные отверстия, однако их цепочки расположены под разным углом к оси сжимающей нагрузки: 90° (С), 45° (D) и 0° (Е). Варианты расположения отверстий приняты с учетом предварительных опытов по осадке образцов из чистой меди. Принятые варианты расположения отверстий и их цепочки имеет следующий смысл. Образцы В и С варьируют расположение оси отверстий относительно направления осевой сжимающей нагрузки; их деформация позволит в сравнении «контрасно» выявить влияние гидростатического давления

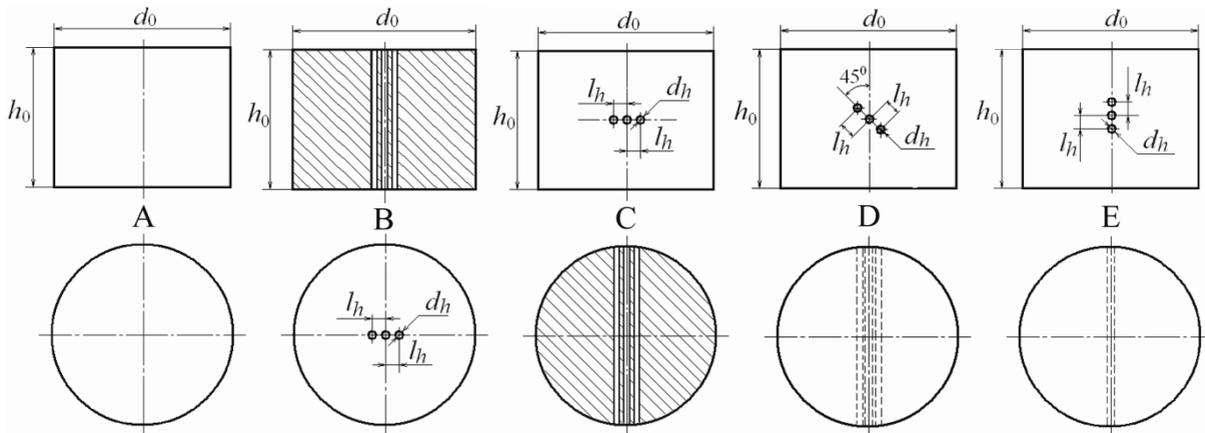


Рис. 2: Исходные цилиндрические образцы

(отрицательных значений triaxiality) на дилатансию материала в зоне искусственных пор. Ожидалось, что образец В с вертикально расположенными отверстиями в меридиональном сечении будет испытывать наибольшую дилатансию, так как радиальная деформация при осадке будет растягивать отверстия в радиальном направлении. Горизонтально расположенные отверстия в поперечном сечении образца С будут испытывать деформацию сжатия, которая может привести к отрицательной дилатансии. Образцы С, D, E варьируют направление цепочки искусственных пор относительно направления сжимающей нагрузки и соответственно, относительно направления сдвиговых деформаций. В образце D направление цепочки дефектов (с углом 45°) будет наиболее близким к направлению сдвиговых деформаций, и расположение дефектов будет способствовать сдвиговому разрушению. Выявление зависимости предельной деформации (Δ_f) образцов С, D, E от расположения линии дефектов является существенным фактором деформационной повреждаемости. План эксперимента предусматривал варьирование в опытах на сжатие еще двух факторов: отношения начального диаметра к начальной высоте ($d_0/h_0 = 0.75; 1.00; 1.25$) и относительного расстояния между центрами соседних отверстий ($l_h/d_h = 1.5; 2.5$). Эти факторы оказывают немаловажное влияние на развитие повреждаемости и деформацию при разрушении осаживаемого образца. Интервал значений фактора d_0/h_0 выбран соответствующим начальным размерам цилиндрических заготовок из пруткового проката, применяемых в технологии.

Осадка образцов осуществлялась на испытательной универсальной машине с измерительным комплексом. В каждом опыте идентичные образцы осаживались до различных нарастающих степеней, включая разрушение образца). Момент разрушения образца устанавливался по появлению на его боковой поверхности трещины (разрушение при сдвиге). Этому моменту соответствует деформация разрушения образца ε_{eqf} . После деформации измерялись под оптическим микроскопом размеры искусственных пор и RVE. Распределение естественных пор в окрестности отверстий, а также при осадке сплошных образцов анализировалось с применением сканирующего электронного микроскопа (SEM).

Основной задачей при проведении опытов было определение и моделирование входящих в определяющие зависимости пластической повреждаемости материальных функций $\bar{\varepsilon}_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ (рис. 3), а также их предельных значений при экспериментально устанавливаемой деформации разрушения образца (ε_{eqf}). Последняя точка каждого графика соответствует образованию макротрещины на боковой поверхности образца. При осадке образцов типа С, D, E из всех материалов макротрещина всегда проходила через искусственные поры. Все образцы из малоуглеродистой стали выявили разрушение. Однако сплошные образцы (типа А) и с вертикальным расположением отверстий (типа В) из чистой меди, осаживаемые до высокой степени деформации $\varepsilon_{eq} = 1.56 \dots 1.63$, не выявили следов разрушения. Опыты на образцах типа В с центральным расположением вертикальных отверстий согласуются с результатами работ [12, 13], согласно которым разрушение происходит на меридиональной поверхности, а не в центре образца. Значительное гидростатическое давление в центре заготовки, даже при исходной поврежденности центральной части искусственными дефектами, залечивает их и не позволяет развиваться разрушению. Подтверждается существование triaxiality ($(ST)_{nf}$), при котором разрушение не наступает и на меридиональной поверхности [14]. Большое гидростатическое давление приводит к залечиванию дефектов с образованием химических связей между соединяемыми поверхностями дефектов (процесс микросварки давлением на мезоуровне).

Экспериментальные зависимости $\bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ (рис. 3) позволяют отобразить процесс повреждаемости траекториями $s(\omega_1, \omega_2)$ в плоскости параметров ω_1, ω_2 (рис. 4). Траектории $s(\omega_1, \omega_2)$ сильно смещены влево к оси ω_2 по сравнению с соответствующими траекториями повреждаемости при растяжении образцов [15]. Это смещение связано с сильным изменением формы ME и малой их дилатансией. Образующиеся цепочки вытянутых эллипсоидальных пор инициируют образование проходящей через них трещины. Для неразрушаемых в

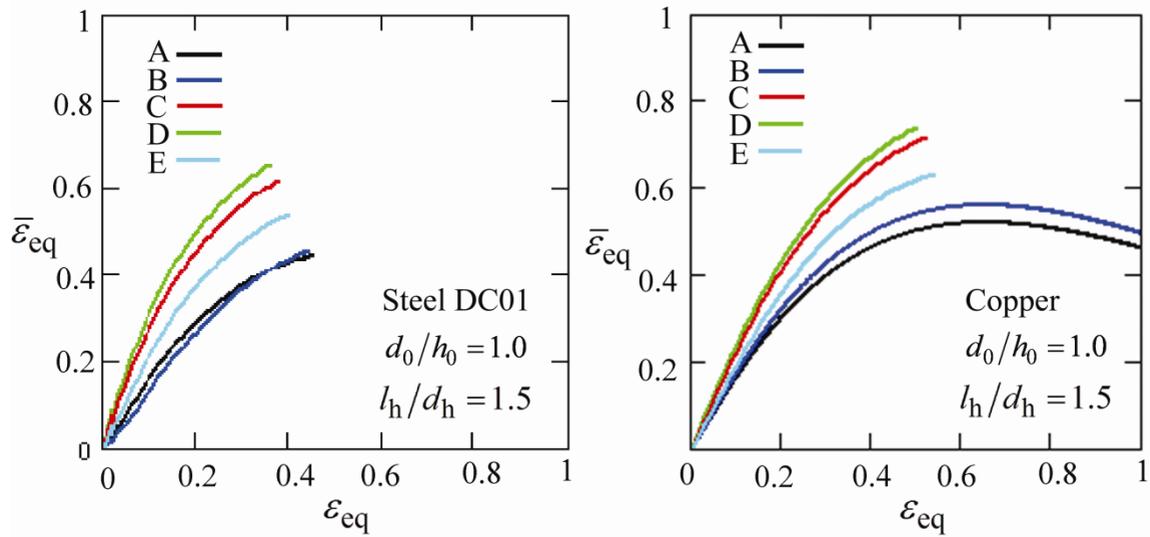


Рис. 3: Экспериментальные зависимости $\bar{\varepsilon}_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ для исследуемых материалов Steel DC01 и Copper

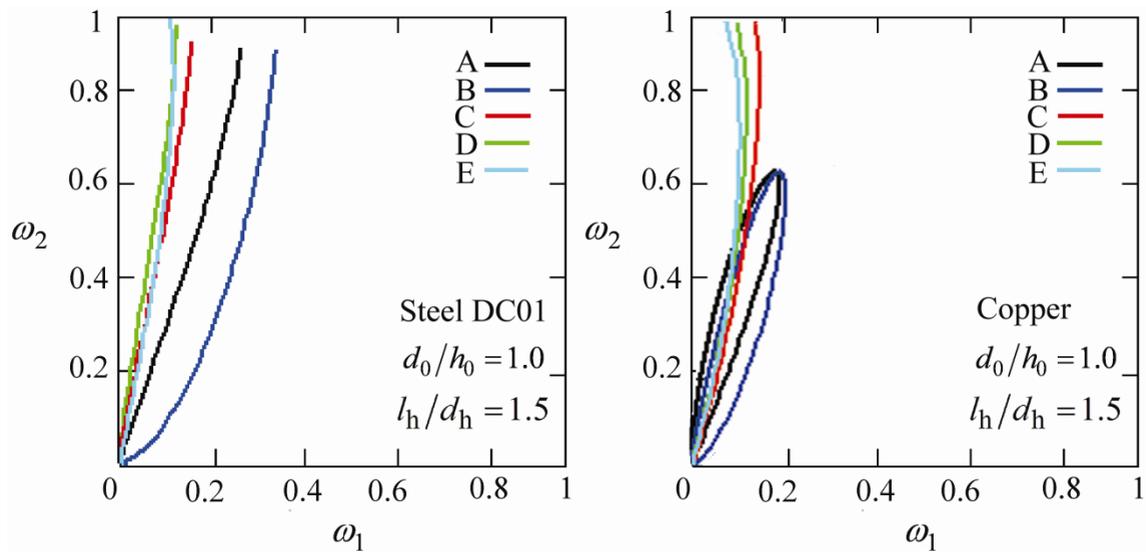


Рис. 4: Траектории повреждаемости в плоскости нормированных параметров ω_1, ω_2 для исследуемых материалов Steel DC01 и Copper

процессе осадки образцов из меди (типа А и В) траектории $s(\omega_1, \omega_2)$ изображаются петлей, восходящая ветвь которой отображает процесс развития повреждаемости, а нисходящая – интенсивного залечивания дефектов.

Зависимости эквивалентной повреждаемости от эквивалентной деформации RVE (рис. 5) показывают разрушение всех образцов типов А, В, С из материала Steel DC01 при достижении величины $\omega_{eq} = 1$.

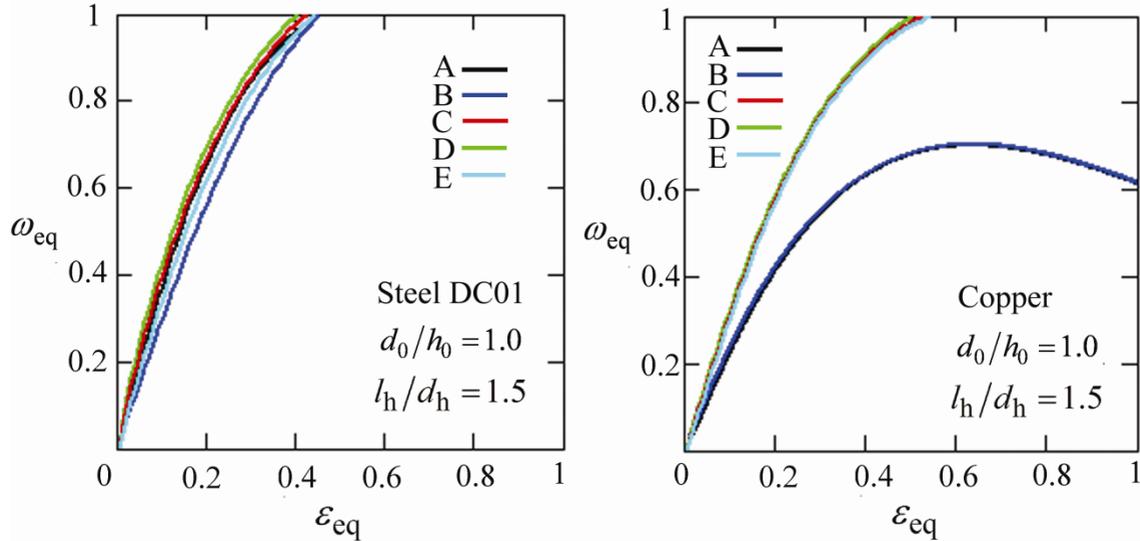


Рис. 5: Зависимость эквивалентной повреждаемости от эквивалентной деформации для материалов Steel DC01 и Copper

С увеличением соотношения исходных размеров образцов d_0/h_0 и относительного расстояния между отверстиями l_h/d_h происходит смещение показателя напряженного состояния в область больших отрицательных значений; в результате повреждаемость несколько уменьшается, а предельная деформация увеличивается. Зависимости $\omega_{eq} = \omega_{eq}(\epsilon_{eq})$ выявляют максимум ω_{eqmax} . В зоне максимума интенсивность процесса залечивания дефектов достигает интенсивности повреждаемости, поэтому в этой зоне приращение эквивалентной повреждаемости $d\omega_{eq}/d\epsilon_{eq} \approx 0$. При дальнейшем смещении показателя напряженного состояния в область больших отрицательных значений процесс залечивания дефектов развивается с нарастающей интенсивностью и приводит к быстрому снижению эквивалентной поврежденности. Кинетический процесс повреждаемости вполне удовлетворительно описывается аналитической зависимостью следующего вида:

$$\omega_{eq} = b_D \epsilon_{eq}^a \cdot b_h e^{-c\epsilon_{eq}} = b \epsilon_{eq}^a e^{-c\epsilon_{eq}}, \quad (10)$$

где $b_D \epsilon_{eq}^a$, $b_h e^{-c\epsilon_{eq}}$ - составляющие функции, описывающие, соответственно, процессы повреждаемости и залечиваемости; (b_D , b_h и a , c - модульные и степенные коэффициенты повреждаемости и залечиваемости, определяемые по характерным точкам графиков $\omega_{eq} = \omega_{eq}(\epsilon_{eq})$); b - эквивалентный коэффициент.

Соотношение коэффициентов a/c имеет ясный физический смысл и определяет эквивалентную деформацию RVE, при которой наступает равновесие кинетического процесса повреждаемости и залечивания мезодефектов: при $\epsilon_{eq} = a/c$ функция (10) имеет экстремум $\omega_{eqmax} = b(a/c)^a$. При нарастании деформации после точки равновесия $\epsilon_{eq} = a/c$ функция (10) быстро убывает и асимптотически приближается к оси $\omega_{eq} = 0$.

Зависимость (10) является довольно универсальной и позволяет установить связь меры эквивалентной повреждаемости ω_{eq} с деформацией разрушения ϵ_{eqf} . В момент разрушения $\omega_{eq} = \bar{b} \epsilon_{eqf}^a e^{-c\epsilon_{eqf}} = 1$, и прогнозируемая деформация разрушения образцов из стали изображается точкой пересечения кривых составляющих функций $\bar{b} \epsilon_{eq}^a(\epsilon_{eq})$ и $e^{-c\epsilon_{eq}}(\epsilon_{eq})$ (рис. (6, слева). Для неразрушаемых в процессе осадки образцов (типа А и В) из чистой меди кривые составляющих функций $\bar{b} \epsilon_{eq}^a(\epsilon_{eq})$ и $e^{-c\epsilon_{eq}}(\epsilon_{eq})$ не пересекаются, а максимальное их сближение по оси ординат соответствует равновесию кинетического процесса повреждаемости и залечивания микродефектов в точке $\epsilon_{eq} = a/c$ (рис. (6, справа). Эта точка соответствует значению показателя напряженного состояния, при котором разрушение образца при пластическом сжатии не произойдет при любых деформациях.

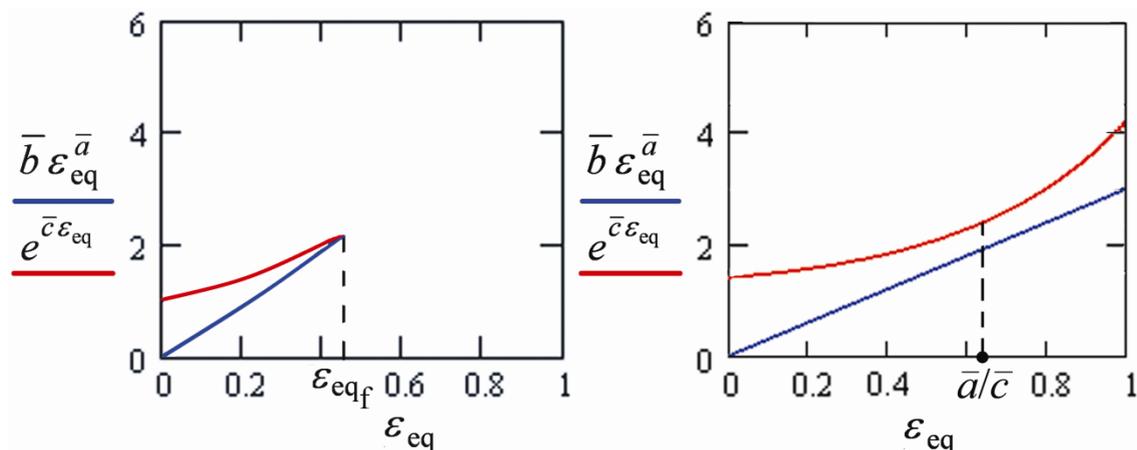


Рис. 6: Графики составляющих функций модели повреждаемости и залечивания дефектов при пластическом сжатии сплошного образца с соотношением исходных размеров $d_0/h_0 = 1.00$ и $d_0/h_0 = 1.5$: слева – для стали Steel DC01; справа – для чистой меди Copper

4. Заключение

Экспериментальные исследования свидетельствуют о существенном влиянии изменения формы пор на развитие деформационной повреждаемости и возможное пластическое разрушение материала. Моделирование повреждаемости связывается с ростом пор (изменением их объемной фракции) и с изменением их формы (приобретением эллипсоидальной формы, связанной с направлением главных деформаций). Тензорная теория повреждаемости позволяет построить термодинамически обоснованную математическую модель с материальными функциями для моделирования повреждаемости деформируемого материала в технологических процессах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. М.: Мир, 1970. 444 с.
2. McClintock F. A criterion for ductile fracture by the growth of holes // J. Appl. Mech. 1968. Vol. 90. P. 363-371.
3. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // Int. J. Mech. Sci. 2004. Vol. 46. P. 81-98.
4. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твёрдых тел. – М.: Металлургия, 1971. – 264 с.
5. Brünig M. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics // Int. J. Plasticity. 2003. Vol. 19. P. 1679–1713.
6. Bammann D., Solanki K. On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material // Int. J. Plasticity. 2010. Vol. 26. P. 775-793.
7. Khan A., Liu H. A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy // Int. J. Plasticity. 2012. Vol. 35. P. 1–12.
8. Hosokawa A., Wilkinson D., Kang J., Maire E. Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography // Int. J. Acta Materialia. 2013. Vol. 61. P. 1021-1036.

9. Tutyshkin N., Müller W., Wille R., Zapara M. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // *Int. J. of Plasticity*. 2014. Vol. 59. P. 133–151.
10. Тутьшкин Н.Д., Травин В.Ю. Тензорная теория деформационной повреждаемости // *Чебышевский сборник*. 2022. – Том 23. № 5. С. 320 – 336.
11. Хилл Р. Математическая теория пластичности / Пер. с англ. Э.И. Григолюка. М.: Госуд. изд-во технико-теорет. лит-ры. 407 с.
12. Dunand M., Maertens A., Luo M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity // *Int. J. Plasticity*. 2012 Vol. 36. P. 34–49.
13. Luo M., Dunand M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture. // *Int. J. Plasticity*. 2012. Vol. 32-33, May. P. 36–58.
14. Bao Y., Wierzbicki T. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. // *J. Eng. Fract. Mech.* 2005. Vol. 72. P. 1049–1069.
15. Zapara M., Tutyshkin N., Müller W., Wille R. Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals // *J. Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2012. Vol. 24. P. 697-717.

REFERENCES

1. McClintock F. & Argon A. 1970, “Deformation and destruction of materials”, *M.: Mir*, 444 p. (In Russ.)
2. McClintock F. 1968, “A criterion for ductile fracture by the growth of holes”, *J. Appl. Mech.*, vol. 90, pp. 363–371.
3. Bao Y. & Wierzbicki T. 2004, “On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 46, pp. 81–98.
4. Ekobori T. 1971, “Physics and mechanics of destruction and strength of solids”, *M.: Metallurgy*, 264 p. (In Russ.)
5. Brünig M. 2003, “An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermo-dynamics”, *Int. J. Plasticity*, vol. 19, pp. 1679–1713.
6. Bammann D. & Solanki K. 2010, “On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material”, *Int. J. Plasticity*, vol. 26, pp. 775-793.
7. Khan A. & Liu H. 2012, “A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy”, *Int. J. Plasticity*, vol. 35, pp. 1–12.
8. Hosokava A., Wilkinson D., Kang J. & Maire E. 2013, “Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography”, *Int. J. Acta Materialia*, vol. 61, pp. 1021-1036.
9. Tutyshkin N.D, Müller W.X, Wille R. & Zapara M.A. 2014, “Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments”, *Int. J. of Plasticity*, vol. 59, pp. 133–151.

10. Tutyshkin N.D. & Travin V.Yu. 2022, “Tensor theory of deformation damage”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no 5, pp. 320 – 336. (In Russ.)
11. Hill R. 1950, “Mathematical theory of plasticity”, *M.: State. edition of the technical-theoretical literature*, 407 p.
12. Dunand M., Maertens A., Luo M. & Mohr D. 2012, “Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity”, *Int. J. Plasticity*, vol. 36, pp. 34–49.
13. Luo M., Dunand M. & Mohr D. 2012, “Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture”, *Int. J. Plasticity*, vol. 32-33, May, pp. 36–58.
14. Bao Y. & Wierzbicki T. 2005, “On the cut-off value of negative triaxiality for fracture”, *J. Eng. Fract. Mech.*, vol. 72, pp. 1049–1069.
15. Zapara M.A., Tutyshkin N.D, Müller W.X. & Wille R. 2012, “Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals”, *J. Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 24, pp. 697-717.

Получено: 11.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 669.537.7:621.357.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-343-356

Морфология технологических несплошностей в структуре изделий аддитивного производства как причина анизотропии их физико-механических свойств¹

А. Н. Чуканов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Яковенко Александра Александровна — кандидат технических наук, ООО «Металлург-Туламаш» (г. Тула).

e-mail: despozisiya100@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tsoyev@tspu.ru

Аннотация

На основе разработанного метода определения границ областей напряжённо-деформированного состояния (НДС) и координат зон пластичности, развивающихся в окрестностях пор в нагруженных порошковых изделиях SLM технологии, высказана гипотеза и проведены расчёты, подтверждающие влияние морфологии пор в порошковых аддитивных сплавах на анизотропию их физико-механических свойств. Учтено влияние внешнего растягивающего напряжения и возможного давления газов в порах.

Сделанный расчет позволил уточнить место зарождения, форму и координаты границы развития зоны пластичности (трещинообразования) в окрестностях сферической поры в зависимости от соотношения внешнего напряжения и давления газов в порах.

Полученные выражения для оценки размера зоны пластичности могут быть использованы для уточнения параметров кинетики процессов деструкции изделий из порошковых сталей, изготовленных по SLM технологии в условиях их стресс-коррозии.

Ключевые слова: порошковые сплавы, технология SLM, растяжение, анизотропия, пора, поле напряжений, силовые линии, функции комплексных переменных, тензор напряжений.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. Н. Чуканов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой. Морфология технологических несплошностей в структуре изделий аддитивного производства как причина анизотропии их физико-механических свойств // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 343–356.

¹Представленные в данной статье исследования выполнены на средства гранта 2022 г. по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований малыми отдельными научными группами» по научному проекту: «Волновая деформация и ее взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления» (соглашение № 23-29-00433 от 13.01.2023 г.)

https://rscf.ru/project/№_23-29-00433/.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 669.537.7:621.357.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-343-356

Morphology of technological discontinuities in the structure of additive manufacturing products as a cause of anisotropy of their physical and mechanical properties

A. N. Chukanov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi

Chukanov Alexander Nikolaevich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Yakovenko Alexandra Alexandrovna — candidate of technical sciences, Metallurg-Tulamash LLC (Tula).

e-mail: despozisiya100@yandex.ru

Tsoi Evgeny Vladimirovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: tsoyev@tsput.ru

Abstract

Based on the developed method for determining the boundaries of the stress-strain state (VAT) regions and the coordinates of plasticity zones developing in the vicinity of pores in loaded powder products of SLM technology, a hypothesis is proposed and calculations are carried out confirming the influence of pore morphology in powder additive alloys on the anisotropy of their physico-mechanical properties. The influence of the external tensile stress and the possible pressure of gases in the pores is taken into account.

The calculation made it possible to clarify the place of origin, shape and coordinates of the boundary of the development of the plasticity zone (cracking) in the vicinity of a spherical pore, depending on the ratio of external stress and gas pressure in the pores.

The obtained expressions for estimating the size of the plasticity zone can be used to clarify the parameters of the kinetics of the destruction processes of products made of porous steels manufactured using SLM technology under conditions of their stress corrosion. *Keywords:* powder alloys, SLM technology, stretching, anisotropy, pore, stress field, lines of force, functions of complex variables, stress tensor.

Keywords: powder alloys, SLM technology, tensile, anisotropy, pore, stress field, force lines, functions of complex variables, stress tensor.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. N. Chukanov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi, 2023, "Morphology of technological discontinuities in the structure of additive manufacturing products as a cause of anisotropy of their physical and mechanical properties", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 343–356.

1. Введение

Для изготовления ответственных деталей авиационной, ракетной техники, двигателестроения применяют изделия, получаемые из порошковых коррозионностойких и жаропрочных

сталей и сплавов системы Fe-Cr-Ni-Mo с помощью аддитивных технологий. *Наряду с их высокими механическими свойствами требуется более детальное изучение долговечности этих изделий при длительной эксплуатации в условиях жёсткого температурно-силового воздействия.* Одним из последствий температурно-силового воздействия на структуру порошковых композиций системы Fe-Cr-Ni-Mo при их производстве с использованием технологии SLM является формирующаяся неравновесная структура (анизотропия структуры) [1,2]. Технологическая структурная анизотропия формирует анизотропию физико-механических свойств. Изделия выращенные в различных направлениях относительно платформы 3d-принтера имеют различные механические свойства.

В литературе сформировалось мнение о том, что анизотропия свойств изделий SLM технологии не в последнюю очередь связана с наличием технологической пористости. Это могут быть газовые поры, вызванные неполнотой выхода газов из расплава при сплавлении порошка, а также образующиеся из-за недостаточного проплавления порошкового слоя. На анизотропию свойств изделий влияет количество несплошностей, ориентация их ансамблей в объёме изделия, а также морфология индивидуальных пор. Газовые поры – пузырьки газа в жидкости имеют, как правило, сферическую форму, сохраняемую после затвердевания. Поры от непроплавления, формирующиеся в местах, где порошок не расплавился полностью, либо не прошло слияния расплавленных частиц порошка с ранее обработанным слоем, имеют форму плоских пор, расположенных перпендикулярно направлению выращивания [3,4]. Перечисленные несплошности оказывают значительное влияние на механические свойства готовых изделий [5-10].

Описанные структурные дефекты влияют на характеристики механических свойств изделий при их нагружении по-разному в разных направлениях, проявляя анизотропию.

Несмотря на большое количество исследований по изучению анизотропии свойств в изделиях SLM технологии причины её проявления и способы устранения до конца не выявлены. Помимо этого, контакт с агрессивными средами, стимулирует развитие несплошностей (пор, трещин), их дальнейшее газонаполнение, ускоряющий разрушение. Влияние эволюции морфологии пор и размеров областей НДС, а также зон пластичности, окружающих поры и определяющих изменение свойств сталей, требует более тщательного изучения.

Цель работы - анализ влияния морфологии пор в изделиях SLM технологии на вид областей напряженно-деформированного состояния (НДС), окружающих поры и механические свойства (пластификацию) окружающего их объёма.

Контакт с агрессивными средами порошковых 3d-изделий в ходе механического нагружения стимулирует развитие несплошностей (пор), ведет к накоплению в них газов (например, водорода) и увеличению внутреннего давления. В результате вокруг поры формируется микрообъём повышенных напряжений. Наличие градиента внутренних напряжений, усиленного внешними растягивающими напряжениями в окрестностях такого концентратора, активизирует перераспределение напряжений, ускоряет диффузию к концентраторам атомов внедрения (водорода и углерода) из окружающей матрицы. Водород под действием напряжений транспортирует атомы углерода к перенапряженным микрообъёмам [6]. В самих порах возможно взаимодействие водорода и углерода с образованием метана, дополнительно увеличивающего давление в порах. Описанные процессы ведут к обезуглероживанию прилегающих к порам областей [11]. В итоге, перераспределение и аккомодация накопленных в порах и их окрестностях напряжений приводит к формированию радиальных и кольцеобразных (сферических) трещин, окружающих пору [12].

Появление перечисленных свободных поверхностей порождает в окрестностях несплошностей микрообъёмах зоны пластичности. Образование таких зон играет существенную роль в ускорении диффузионных процессов и развитии замедленного разрушения. Изучение эволюции зон пластичности является важным для прогнозирования работоспособности изделий из порошковых композиций аддитивного производства.

Дополнительно в работе описали условия формирования объёмных зон пластичности и выполнили расчет координат их границ с учетом условий стресс-коррозии.

2. Материалы и методики исследования

Поставленную задачу решали на базе анализа распределения компонент тензора напряжений в окрестностях несплошностей (пор) в форме цилиндра, сферы, двояковыпуклой линзы [13-15]. Использовали методики аппарата теории функций комплексных переменных [16]. Функции, описывающие распределение напряжений около поры, моделировали по аналогии с полем скоростей идеальной жидкости. Использовали описание потенциального обтекания идеальной жидкостью поверхности твёрдого тела «обтекаемой» формы [14,15]. Действующую силу заменили на скорость частицы жидкости. Вектор скорости частицы жидкости на поверхности твёрдого тела направлен по касательной к ней. Ближайшие к поверхности линии тока проходили по поверхности поры. При рассмотрении упруго напряжённого состояния металлической среды использовали термин «силовая линия» (аналог линии тока). Под ним понимали линию, касательная к которой в каждой её точке совпадает с направлением максимальной силы взаимодействия между соседними элементами среды. Ввели функции φ (потенциал) и ψ (аналог функции тока).

Указанный подход ранее успешно применили для оценки распределения напряжений около поверхности поры в форме цилиндра (цилиндрическая пора) в образце, подвергнутом одноосному растяжению в ходе наводороживания [17-19].

Связав с функциями φ или ψ компоненты тензора напряжений σ_{ik} : $\sigma_{zz} \sim \partial\varphi/\partial z$, $\sigma_{yz} \sim \partial\varphi/\partial y$, получили выражение

$$\sigma_{zz} = \sigma \left[1 + \frac{a^2 (y^2 - z^2)}{r^2} \right]; \sigma_{zy} = \sigma \frac{-2a^2 zy}{r^4}.$$

Функции $\sigma_{zz}(z,y)$ и $\sigma_{zy}(z,y)$ подчинялись условию равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0.$$

Компонент тензора напряжений σ_{yy} определяли с помощью дополнительного условия равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Для σ_{yy} получили выражение $\sigma_{yy} = \sigma \left[\text{const}(z) - \frac{a^2(y^2 - z^2)}{r^4} \right]$.

Полученные уравнения, выражающие условия равновесия, эквивалентны уравнению Лапласа для функции φ или ψ . Таким образом, функции σ_{zz} , σ_{zy} , σ_{yy} удовлетворяют уравнению сплошности, куда входят вторые производные от этих функций, а также коэффициент Пуассона.

2.1. Определение координат зоны пластичности в окрестностях плоской поры в форме двояковыпуклой линзы

Рассмотрели особенности поля напряжений около плоской полости по форме близкой к двояковыпуклой линзе, когда наряду с объёмом и поверхностью заметную роль могут играть заострённые края линзы [20].

Уравнение истинной силовой линии описывает связь между ρ и z в виде $\rho = \rho(z, a, b)$, (ρ, z – координаты в цилиндрической системе, « a » и « b » – параметры). С помощью функции $\rho(z, b)$ компоненты тензора напряжений σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ определяли в виде (1):

$$\sigma_{z\rho}^{-1} = \frac{\partial \rho^2}{\partial b^2} = \frac{\rho}{b} \frac{\partial \rho}{\partial b}; \sigma_{zz}^{-1} = \frac{\rho}{b} \frac{\partial z}{\partial b}. \quad (1)$$

Здесь и далее под σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ понимали приведённые величины, то есть, результаты деления истинных величин на величину внешнего напряжения σ_0 .

Уравнение условной линии (или реальной линии при $z > h$) имеет вид $\rho_a = \rho_a(z, a, b)$,

$$b^2 = \rho_a^2 \left[1 - \frac{a^4}{(\rho_a^2 + L_z^2)^2} \right], (L_z = L + z) \quad (2)$$

Здесь $L_z = L + z$. Функция ρ_a задана в неявном виде. При установлении вида зависимости предполагали, что силовые линии проходят мимо сферической полости радиусом $a = l$. Силовая линия с прицельным расстоянием b , пересекает плоскость $z = 0$ на расстоянии ρ_1 от центра сферы, причём, согласно ранее полученному результату,

$$b^2 = \rho_1^2 \left[1 - \frac{l^4}{\rho_1^4} \right].$$

Предполагали, что в случае сферической линзы того же габарита l силовая линия с параметром b пересечёт плоскость $z = 0$ на расстоянии от центра, не превышающем ρ_1 . Величина ρ_1 является первой приближительной оценкой ρ_m . Дальнейшее уточнение было основано на том, что край поры – двояковыпуклой линзы сильнее концентрирует силовые линии нежели край сферической поры. При этом считали, что силовая линия « b » встречает на своём пути сферическую пору радиусом « a » ($a^2 = l^2 + L^2$). Искривление первоначально прямой силовой линии начинается у полюса сферической поверхности радиусом « a ». В итоге, для ρ_m получили выражение

$$\rho_m^2 = l^2 + b^2 + \frac{l^2}{2a^2} b^2 + Bb^4, B = \frac{3l^2 L^2 + a^4}{8l^2 a^4}. \quad (3)$$

Используя этот результат, получили выражения для численного расчёта, описывающие поле напряжений около сферической линзы. Для истинной функции силовой линии $\rho = \rho(z, a, b)$ можно записать $\rho = \rho_a - S(z, b)$, где

$$b^2 = \rho_b^2 \left[1 - \frac{a^4}{(\rho_b^2 + L_z^2)^2} \right]$$

Для вспомогательной функции $S(z, b)$ считали известным следующее: $z=0, S = \rho_b - \rho_m = f_b$. Тогда

$$S = f_b g. \quad (4)$$

Функция g является безразмерной. Её график – спадающая линия, имеющая горизонтальные касательные в точке $z = 0$ и в бесконечно удалённой точке.

При малых $z (z \ll h)$ можно записать уравнение (5):

$$\rho = \rho_m + \frac{d^2 \rho}{dz^2} \Big|_0 z^2 \quad (5)$$

(в точке $z = 0$ первая производная равна нулю). Применяя правило (6)

$$\sigma_{zz}^{-1} = \frac{\rho}{b} \frac{d\rho}{db} \Big|_z, \quad (6)$$

получим для точки $z = 0$

$$\sigma_{zz}^{-1} = \frac{l^2}{2a^2}, \dots, \sigma_{zz} = \frac{2a^2}{l^2}. \quad (7)$$

На основании этого результата можно сказать, что в точке $z = 0, \rho = l$ (вершина профиля двояковыпуклой линзы) величина σ_{zz} будет превышать в a^2/l^2 раз таковую в случае, когда вместо линзы будет рассматриваться сфера радиусом «а» (и точка $z = 0, \rho = l$ есть обычная точка сферы). Подобное можно сказать и про другие точки окрестности $z = 0, \rho = l$.

Представим, что вначале в нагруженном образце имелась полость в виде сферы радиусом равным l . Функции σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ при этом имели бы вид (8):

$$\sigma_{zz}^{(o)} = 1 + \frac{l^4 (\rho^2 - z^2)}{(\rho^2 + z^2)^3}; \dots, \sigma_{z\rho}^{(o)} = \frac{l^4 2\rho z}{(\rho^2 + z^2)^3}. \quad (8)$$

(знаком «о» специально отмечен случай сферы). Исходя из (8) в точке $z = 0, \rho = l$ будет $\sigma_{zz}^o = 2, \sigma_{z\rho}^o = 0$; а в точке $z = l, \rho = 0$ обе эти величины равны нулю.

Допустим, что пора в виде сферы трансформируется в двояковыпуклую сферическую линзу с параметрами l (внешний радиус), h (полутолщина в центре), «а» (радиус кривизны поверхности), тогда точке $z = 0, \rho = l$ будет в соответствии с результатом (7) реализовано условие $\sigma_{zz} = 2a^2/l^2 = 2(1 + L^2/l^2)$, (где $L^2 = a^2 - l^2$).

Функция $\rho(z, p)$: при $z > 0$ имеет отрицательную производную $(\partial\rho/\partial z)_p$. Отрицательна и вторая её производная. При $z = 0$ предел второй производной функции при $b \rightarrow 0 (L \neq 0)$ равен $-\infty$. При значениях $z > h$ функция $\rho(z, b)$ будет близка к функции $\rho_a(z, b)$. Чем больше z , тем меньше разность между ними.

Второе допущение состоит в том, что в точке, являющейся полюсом поверхности (как сферы, так и линзы) величины σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ должны равняться нулю. Для поры-линзы с параметрами l, h - это должно происходить при $z = h$.

С учетом указанных допущений, в отношении общей формулы для σ_{zz} или $\sigma_{z\rho}$ было принято следующее: 1) при $L = 0, l \ll a$ и малых z она должна иметь вид (8); 2) при $L \neq 0, l < a$ и z , близких к h она имеет вид

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{(l^2 + L^2)^2 [\rho^2 - (L + z)^2]}{[\rho^2 + (L + z)^2]^3}.$$

(Эту формулу можно получить из (1) и (2), считая $\rho = \rho_a$).

Исходя из этих соображений, функцию σ_{zz} получили в виде

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{A_{(z)} [\rho^2 - Z_{(z)}^2]}{[\rho^2 + Z_{(z)}^2]^3}, \quad (9)$$

где $A_{(z)}$ – переходная функция от начального значения $A_0(\beta_0 - 1)l^4$ до значения $A_1 = a^4$ при $z = h$; $Z_{(z)}$ – функция z , описывающая переход от z при $z \ll h$ к $L + z$ при $|z - h| \ll h$.

Как показывают оценки, интервал значений функции A незначителен. Так в случае $l = 0, 8$, величина $A_1/A_0 - 1$ составляет 0,1296; в случае $l = 0, 5$ таковая будет равна 0,5625.

При использовании (9) и условия равновесия

$$\partial\sigma_{zz}/\partial z + (1/\rho)(\rho\sigma_{z\rho})/\partial\rho = 0 \quad (10)$$

для $\sigma_{z\rho}$ получили:

$$\sigma_{z\rho} = \frac{-2A\rho Z Z_z^l}{(\rho^2 + Z^2)^3} + \frac{A_z^l \rho}{2(\rho^2 + Z^2)^2} + \frac{f}{\rho},$$

где $Z_z^l = dZ/dz$, $A_z^l = \partial A/\partial z$, f – постоянная интегрирования (может быть функцией z).

Постоянная f должна быть принята равной нулю, как это имеет место в случае $l = a$, $L = 0$. Выражение для $\sigma_{z\rho}$ можно упростить, воспользовавшись свободой подбора функций Z и A с учётом выполнения соотношения (11)

$$\frac{A_z^l}{A} = \frac{4Z(Z_z^l - 1)}{\rho^2 + Z^2}; (Z_z^l = dZ/dz) \quad (10)$$

В этом случае функция $\sigma_{z\rho}$ будет выглядеть как

$$\sigma_{z\rho} = \frac{-2AZ\rho}{(\rho^2 + Z^2)^3}. \quad (11)$$

В итоге была разработана следующая процедура подсчёта величин σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$:

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{A_0}{(S_i^2 + Z^2)} \frac{S_i^2 - Z^2}{S_i^2 + Z^2} \left(1 + \frac{Z^2}{S_i^2}\right)^{3\varepsilon_i}; \quad (12)$$

$$\sigma_{z\rho} = \frac{A_0}{(S_i^2 + Z^2)^2} \frac{-2S_i Z}{S_i^2 + Z^2} \left(1 + \frac{Z^2}{S_i^2}\right)^{3\varepsilon_i}. \quad (13)$$

В этих и в последующих формулах: $Z = ax$; $x = z/h$;

$$3\varepsilon_i = \frac{\ln A_f/A_0}{\ln(1 + a^2/S_i^2)}; \quad (14)$$

S_i – параметр, значение которого близко к величине ρ .

В случае, когда пара имеет форму сферы, величины « a » и l совпадают, поэтому при $z = 0$, $\rho \rightarrow 1$ будет $\sigma_{zz} = 2$ (что было получено ранее). Данная методика расчёта применима при небольшом различии между параметрами линзы l и a ($l/a > 0,65$).

3. Анализ результатов эксперимента

При выяснении геометрии границы возможной зоны пластичности около пор, необходимо рассмотреть главные слагаемые, входящие в левую часть критерия пластичности Губера – Мизеса. Анализировали точки области, окружающей кромку линзы. К главным слагаемым отнесли σ_{zz}^2 и $3\sigma_{z\rho}^2$. Слагаемые - $\sigma_{\rho\rho}\sigma_{zz}$ и $\sigma_{\rho\rho}^2$ считали поправочными, так как по оценкам максимальная величина $\sigma_{\rho\rho}$ составляет лишь несколько процентов от величины $(\sigma_{zz})_{max}$. В общем виде уравнение на условие пластичности записали:

$$\sigma_{zz}^2 + 3\sigma_{z\rho}^2 = (\sigma_T/\sigma)^2 = \beta^2, \quad (15)$$

где σ_t – предел текучести при растяжении, $\sigma_t/\sigma = \beta$ – приведённый к внешнему напряжению предел текучести. При подстановке σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ из формул (12), (13) выражение (1) получит вид

$$\frac{2A(\rho^2 - Z^2)}{(\rho^2 + Z^2)^3} \left[1 - \frac{A(\rho^2 - Z^2)}{(\rho^2 + Z^2)^3}\right] + 3\frac{A^2}{(\rho^2 + Z^2)^4} = \beta^2 - 1, \quad (16)$$

где $A = A_0(1 + Z^2/\rho^2)^{3\varepsilon}$.

l/a	ρ_m/a	ρ_m/l	z_1/a	z_1/h	ρ_r/a	z_r/a	ρ_+/a	z_+/a
0,8	0,966	1,2075	0,17	0,425	0,57	0,2215	0,6955	0,278
0,707	0,9305	1,316	0,145	0,495	0,48	0,17	0,684	0,200
0,6	0,8765	1,461	0,144	0,72	0,305	0,153	0,6675	0,135
0,5	0,8135	1,6265	0,100	0,74	0,25	0,103	0,651	0,088

Таблица 1: Результаты расчетов для величин ρ_{max}/a ; ρ_{max}/l ; ρ_1/l ; z_1/h при $l/a = 0,8$ и $0,707(\beta = 2)$.

h/l	0,5	0,4085	0,333	0,268
$\rho_{max} - l$, мкм	2,075; 10,375 20,75;	3,16; 15,8; 31,6	4,61; 23,05; 46,1	6,26; 31,3; 62,6
z_1 , мкм	2,125; 10,62 21,25	2,02; 10,1; 20,2	2,40; 12,0; 24,0	1,98; 9,90; 19,8
$l - \rho_r$, мкм	2,875; 14,40; 28,75	1,605; 8,03; 16,05	4,65; 23,8; 46,5	5,14; 25,7; 51,4

Таблица 2: Размер зоны пластичности около поры для разных l и h

При заданном ρ подбирались значения S_i и S_{i+1} , так чтобы ρ было внутри интервала $S_i - -S_{i+1}$. Далее при этих S_i и разных пробных z подсчитывали значения σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ (по формулам (13) и (13)) и проводили проверку выполнения равенства (15).

Характерной точкой зоны пластичности является точка с координатами $z = 0, \rho = \rho_{max}$, где ρ_{max} определяется из равенства (вырожденного уравнения) (15):

$$\sigma_{zz} = \beta, \rightarrow \rightarrow \beta - 1 = (\beta_0 - 1) \frac{l^4}{\rho^4}, \rho_{max} = l \left(\frac{\beta_0 - 1}{\beta - 1} \right)^{1/4}. \quad (17)$$

При $\beta = 2\rho_{max} = l(\beta_0 - 1)^{1/4}$. Это - самая удалённая (верхняя) точка зоны пластичности. В качестве других характерных точек можно указать точки границы поверхности зоны пластичности: точку $z = z_1$ на уровне $\rho = l$; самую крайнюю точку на поверхности линзы $z = z_r, \rho = \rho_r$; точку на пересечении с линией $\rho = Z$. Координаты последней определяли с помощью уравнения (16), из которого при $\rho = Z$ получается

$$A^{1/2} = \left(\frac{\beta^2 - 1}{3} \right)^{1/4} 2Z^2.$$

Для достаточно точного численного решения данного равенства принимали $A \approx 0,5(A_0 + A_f)$.

В таблице 1 приведены результаты вычислений для величин ρ_{max}/a ; ρ_{max}/l ; ρ_1/l ; z_1/h при $l/a = 0,8$ и $0,707(\beta = 2)$.

Для последующего сопоставления с экспериментальными результатами был сделан переход к базовым величинам l и h (вместо использованных « a » и « l »).

В таблице 2 приведены данные в микронах для зоны пластичности около пор с разными значениями l (продольный размер) и h/l (форма полости).

(Цифры в ячейках относятся к случаям $l = 10$ мкм, 50 мкм и 100 мкм соответственно. Цифры в верхней строке соответствуют $l/L = 4/3..1$, получаемым из верхней строки таблицы 1).

На рис. 1 приведены границы зоны пластичности у плоской поры, полученные в ходе описанного расчёта.

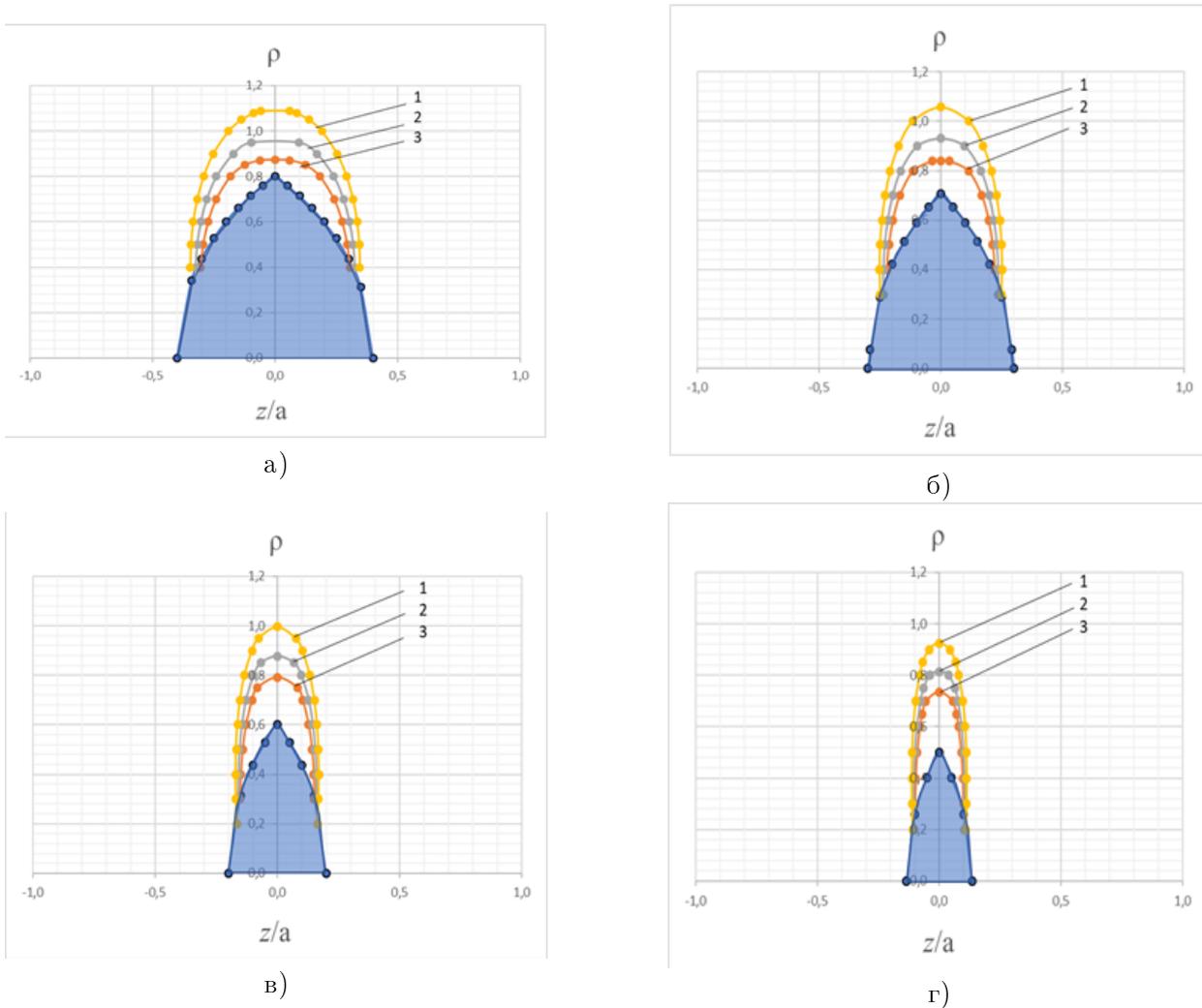


Рис. 1: Эволюция границы зоны пластичности около вершины плоской поры в виде двояковыпуклой линзы: а- $l=0,8$; б- $l=0,7071$; в- $l=0,6$; г- $l=0,5$ (1- $\beta=1,6$; 2- $\beta=2,0$; 3- $\beta=2,5$)

4. Заключение

В изложенных рассуждениях, пластическая зона представлена в виде «шины, охватывающей сферическую линзу». При l/a , близких к единице (например, в случае $l = 0,8a$) сечение этой «шины» близко к сечению, полученному ранее [21-23] для случая полости сферической формы (случай $l/a = 1, h/a = 1$). Чем меньше отношение h/l для полости, тем дальше в поперечном направлении распространяется зона пластичности (больше $\rho_{max}/l - 1$). $l - \rho_1$.

Характерными геометрическими параметрами пластической зоны около линзообразной поры можно считать: 1) наибольшую протяжённость в радиальном направлении от вершины и её долю от длины $l - (\rho_{max} - l)$ и $(\rho_{max}/l) - 1$; 2) характерную толщину $(\rho_{max} - l)/a$; 3) площадь линзы, закрываемую зоной, и её долю ε от площади поверхности линзы $2\pi l \sqrt{(z_1 - d)^2 + (l - \rho_1)^2}$ и $\frac{2l}{l^2 + h^2} \sqrt{(z_1 - d)^2 + (l - \rho_1)^2}$, $d = a^2 \varepsilon / l$; 4) объём и его долю от объёма линзы $\pi l (z_1 - d) \rho_{max} - l$ и $3l(\rho_{max} - l)(z_1 - d)/h^2(3a - h)$.

Развитие зоны пластичности около сферической полости в порошковых сталях SLM производства в условиях стресс-коррозии стимулирует изменение (рост) кинетических характеристик металла и создаёт благоприятные условия для формирования анизотропии механиче-

ских свойств. Концентрация напряжений, а затем их аккомодация в виде пластических зон в окрестностях поры ведут к появлению новых диффузионных путей в радиальном направлении (каналов облегченной диффузии) [23].

Таким образом, предложенный алгоритм анализа распределения напряжений позволяет прогнозировать интенсивность развития зоны пластичности (трещинообразования) в описанных условиях в зависимости от соотношения параметров β ($\beta = \sigma_T/\sigma$) и $S(s) = \rho/\sigma$, то есть от соотношения величин внешнего напряжения, предела текучести стали и давления газов в поре.

Сделанный расчет позволил уточнить место зарождения, форму и координаты границы развития зоны пластичности (трещинообразования) в окрестностях сферической поры в зависимости от соотношения внешнего напряжения и давления газов в порах.

Полученные выражения оценки размера зоны пластичности могут быть использованы для уточнения параметров кинетики процессов деструкции изделий из порошковых сталей, изготовленных по SLM технологии в условиях их стресс-коррозии.

Благодарности

Представленные в данной статье исследования выполнены на средства гранта 2022 г. по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований малыми отдельными научными группами» по научному проекту: «Волновая деформация и ее взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления» (соглашение № 23-29-00433 от 13.01.2023 г.) (<https://rscf.ru/project/№ 23-29-00433/>).

The research presented in this article was carried out with the funds of a 2022 grant in the priority area of activity of the Russian Science Foundation “Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by small individual scientific groups” under the scientific project: “Wave deformation and its relationship with orthotropy of structure and physico-mechanical properties in selective laser fusion products” (Agreement No. 23-29-00433 dated 01/13/2023) (<https://rscf.ru/project /No. 23-29-00433/>).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попович А.А., Суфияров В.Ш., Борисов Е.В., Полозов И.А., Масайло Д.В., Григорьев А.В. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов//Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. - 2016. – Вып. 3. – С. 4 – 11.
2. Simonelli M., Tse Y.Y., Tuck C. Effect of the build orientation on the Mechanical Properties and Fracture Modes of SLM Ti-6Al-4V. Mater. Sci. Eng. A. 2014. Vol. 616. Pp. 1-11.
3. Vroncken B., Thijs L., Kruth J.P., Van Hambeeck J. Microstructure and Mechanical Properties of novel β titanium metallic composite by selective laser melting/ Acta Mater. 2014/ Vol. 68. Pp. 150-158.
4. Frazier W.E., Metal additive manufacturing: A review. J. Mater. Eng. Perform. 2014. Vol. 23. No 6. Pp. 1917-1928.
5. Wu M.W., Lai P.H., Chen J.K. Anisotropy in the impact toughness of selective laser melted Ti-6Al-4V alloy. Mater.Sci. Eng.: A. 2016. Vol. 650. P. 295-299.

6. Чуканов А.Н. Анизотропия деформации при послойном лазерном синтезе изделий // «Перспективные технологии и материалы». Матер. Всеросс. НПК с межд. уч., (Севастополь, 14–16.10.2020 г.), Научное изд. - Севастополь, СевГУ. 222с., С. 169 -174.
7. Чуканов А.Н. Влияние ориентации изделий аддитивных технологий на их анизотропию деформации // Научные чтения им. чл.-корр. РАН И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов». - Москва. 17-18 сентября 2020 г./ Сб. матер. – М: ИМЕТ РАН, 2020, 194 с. С. 79-80. (<http://odin.imetran.ru/>)
8. Чуканов А.Н. Анизотропия физико-механических свойств при послойном лазерном синтезе // МНТК «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-лет. со дня рожд. акад. А.А. Байкова: Сб. научн. статей (18.09.2020 г.)/ Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: ЮЗГУ, 2020. - 271 с. - С. 244-247.
9. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Свойства изделий, полученных селективным лазерным синтезом. 2. Изделия ячеистых структур // XIII-я МНТК «Современные автомобильные материалы и технологии (САМИТ-2021)», (20.11.2021 г.), Сб. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. С. 338-340.
10. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Свойства изделий, полученных селективным лазерным синтезом. 1. «Сплошные» изделия // XIII-я МНТК «Современные автомобильные материалы и технологии (САМИТ-2021)», (20.11.2021 г.), Сб. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. С. 341-346.
11. Колачёв Б.А. Водородная хрупкость металлов. - М.: Металлургия, 1985. - 217 с.
12. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. – 2015. - vol.57.- № 1-2.- P. 63-68.
13. Владимиров В.И. Физическая природа разрушения металлов. - М.: Металлургия, 1984. - 280 с.
14. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения. - М.: Металлургия, 1978. - 256 с.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. Уч. пособие. – М.: Наука, Гл. ред. физматлитературы, 1982,- 248 с.
16. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2010. - 336 с.
17. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М., Широкий И.Ф. Моделирование зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23.- № 122. - С. 314-319.
18. Sergeev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeev A.N., Leontiev I.M., Khoneliidze D.M., Gvozdev A.E., Formation of plastic zones near spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion // Inorganic Materials: Applied Research. 2018. Т. 9. № 4. С. 663-669.
19. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Моделирование эволюции микронесплошностей в напряжённых металлических средах различного производства // Матер. XXI МК, посвящ.

- году математики. (17-21.05.2022 г.) - Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - 187 с.- Тула, 2022. С. 371-375.
20. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Математическое моделирование полей напряжений у стресс-коррозионных дефектов // *Современные материалы, техника и технологии*. 2021.- т.6 (39) -. С. 65 -70.
 21. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Цой Е.В. Использование векторных функций для описания НДС в металлических средах с дефектами // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». - Матер. XIX МК посвящ. 200-летию со дня рожд. акад. П.Л. Чебышева, Тула, 18-22.05.2021 г.- Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - 442 с.- С.395-399.
 22. Чуканов А.Н., Терешин В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния материала на основе концепции силовых линий // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории».- Матер. XVIII МК посвящ. столетию со дня рожд. проф. Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина, Тула, 23-26.09.2020 г.- Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - 478 с.- С.459-463.
 23. Чуканов А.Н. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии / А.Н. Чуканов, В.А. Терешин, А.Е. Гвоздев, С.Н. Кутепов, А.Н. Сергеев, Е.В. Агеев, А.А. Яковенко // *Известия Юго-Западного государственного университета*. - 2019; вып. 23 (5). - С. 35-52. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-5-35-52>.

REFERENCES

1. Popovich A.A., Sufiyarov V.Sh., Borisov E.V., Polozov I.A., Masailo D.V., Grigoriev A.V. 2016, "Anisotropy of mechanical properties of products manufactured by selective laser melting of powder materials", *News of universities. Powder metallurgy and functional coatings*, Iss. 3. – pp. 4–11.
2. Simonelli M., Tse Y.Y., Tuck C. 2014, "Effect of the build orientation on the Mechanical Properties and Fracture Modes of SLM Ti-6Al-4V", *Mater. Sci. Eng. A*, Vol. 616, pp. 1–11.
3. Vroncken B., Thijs L., Kruth J.P., Van Hambeeck J. 2014, "Microstructure and Mechanical Properties of novel β titanium metallic composite by selective laser melting", *Acta Mater*, Vol. 68. pp. 150–158.
4. Frazier W.E. 2014, "Metal additive manufacturing: A review", *J. Mater. Eng. Perform.* Vol. 23. No 6. pp. 1917–1928.
5. Wu M.W., Lai P.H., Chen J.K. 2016, "Anisotropy in the impact toughness of selective laser melted Ti-6Al-4V alloy", *Mater.Sci. Eng.: A*, Vol. 650. pp. 295–299.
6. Chukanov A.N. 2020, "Anisotropy of deformation in layered laser synthesis of elements", *"Promising technologies and materials". Mater. All-Russian. NPC with international studies*, (Sevastopol, 14-16.10.2020), Scientific publishing house - Sevastopol, SevSU. 222s., pp. 169 -174.
7. Chukanov A.N. 2020, "Influence of orientation of products of additive technologies on their deformation anisotropy", *Scientific readings named after chl.-corr. RAS I.A. Odinga "Mechanical properties of modern structural materials"*. - Moscow. September 17-18, 2020/ ", *Sat. mater.* – M: IMET RAS., 194 p. pp. 79–80. (<http://odin.imetran.ru/>)

8. Chukanov A.N. 2020, "Anisotropy of physico-mechanical properties in layered grain synthesis", *ISTK "Modern problems and directions of development of metallurgy and heat treatment of metals and alloys", dedicated. 150 years old. since the day of birth. Academician A.A. Baykova: Collection of scientific papers. articles (09/18/2020)/* South-West State University. Kursk: South Ural State University. - 271 p. - pp. 244–247.
9. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "Properties of products obtained by selective laser synthesis. 2. Products of cellular structures", *XIII-I MNTK "Modern automotive materials and technologies (SAMIT-2021)", (11/20/2021),* Collection of articles., Kursk: Yugo-Zap. gos. un-t, pp. 338–340.
10. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "Properties of products obtained by selective laser synthesis. 1. "Solid" products", *XIII-I ISTK "Modern automotive materials and technologies (SAMIT-2021)", (11/20/2021),* Collection of articles, Kursk: Yugo-Zapad. gos. un-t, pp. 341–346.
11. Kolachev B. A. 1985, "Hydrogen brittleness of metals", *M.: Metallurgy*, 217 p.
12. Sergeev N. N., Chukanov A. N., Baranov V. P., Yakovenko A. A. 2015, "Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement", *Metal Science and Heat Treatment*. vol.57.- No. 1-2.- pp. 63–68.
13. Vladimirov V.I. 1984, "The physical nature of the destruction of metals", *M.: Metallurgy*, 280 p.
14. Nott J. F. 1978, "Fundamentals of fracture mechanics", *M.: Metallurgy*, 256 p.
15. Landau L.D., Lifshits E.M. 1982, "Theoretical physics. In 10 vols. Vol. VII. Theory of elasticity. Textbook", *M.: Nauka, Gl. ed. of physical literature*, - 248 p.
16. Sveshnikov A.G., Tikhonov A.N. 2010, "Theory of functions of a complex variable", *M.: Fizmatlit*, 336 p.
17. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Yakovenko A.A., Khonelidze D.M., Shirokiy I.F. 2018, "Modeling of plasticity zones in gas-filled pores in cast and powder steels under stress corrosion conditions", *Bulletin of the Tambov University. Series: Natural and Technical Sciences* vol. 23. No. 122. - pp. 314–319.
18. Sergeev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeev A.N., Leontiev I.M., Khonelidze D.M., Gvozdev A.E. 2018, "Formation of plastic zones near spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 9. No. 4. pp. 663–669.
19. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2022, "Modeling of the evolution of micro-continuities in stressed metallic media of various production", *Mater. XXI MK, dedicated. the year of mathematics*. Tula, pp. 371–375.
20. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "Mathematical modeling of stress fields in stress-corrosion defects", *Modern materials, technique and technologies*. vol.6 (39), pp. 65–70.
21. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "The use of vector functions to describe VAT in metallic media with defects", *"Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history". - Mater. XIX MK dedicated. the 200-th anniversary of the birth. Academician P. L. Chebyshev*, Tula, pp.395–399.

22. Chukanov A.N., Tereshin V.A. 2020, “Modeling of the stress-strain state of a material based on the concept of force lines”, *“Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”*.- *Mater. XVIII MK dedicated. to the centenary of the birth of Prof. B.M. Bredikhin, V.I. Nechaev and S.B. Stechkin*, Tula, pp.459–463.
23. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Sergeev A.N., Ageev E.V., Yakovenko A.A. 2019, “Morphology of volumetric plasticity zones in gas-filled pores in cast and powder steels under stress corrosion conditions”, *From the Southwestern State University*, iss. 23 (5), pp. 35–52. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-5-35-52> .

Получено: 18.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 669.537.7:621.357.5:552.08

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-357-372

Метод Оцу в оценке пористости и распределении структурных дефектов по изображению компьютерной томографии изделий SLM^{1 2}

А. Н. Чуканов, А. Я. Канель-Белов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой, М. Ю. Моденов

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, профессор, Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: kanelster@gmail.com

Яковенко Александра Александровна — кандидат технических наук, ООО «Металлург-Туламаш» (г. Тула).

e-mail: despozisiya100@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tsoyev@tsput.ru

Моденов Михаил Юрьевич — генеральный директор, ООО «Тульские мехатронные системы» (г. Тула).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

Аннотация

Описана методика наблюдения и статистического анализа количества и расположения структурных дефектов (несплошностей различной морфологии и неметаллических включений) в объёме нагруженных образцов порошковых нержавеющей и жаропрочных сплавов систем Fe-Cr-Ni, Fe-Cr-Ni-Mo, изготовленных по аддитивной технологии SLM.

Задача оценки пористости по изображению компьютерной томографии (КТ) сводится к установлению наличия на изображении элементов (объектов), с некоторыми индивидуальными характеристиками. Такой характеристикой принята яркость элементов изображения. Наиболее простым и естественным способом обнаружения объекта/объектов является выбор порога яркости или пороговая классификация (thresholding). В работе для указанных целей использовали метод Нобуюки Оцу, разработанный в 1979 году.

Представлено сравнение информативности результатов пористости по анализу изображений, полученных при помощи методик рентгеновской компьютерной томографии и металлографического анализа (оптического, РЭМ). Наибольшее содержание пористости

¹Представленные в данной статье исследования выполнены на средства гранта 2022 г. по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований малыми отдельными научными группами» по научному проекту: «Волновая деформация и ее взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления» (соглашение № 23-29-00433 от 13.01.2023 г.) ([https://rscf.ru/project/№ 23-29-00433/](https://rscf.ru/project/№%2023-29-00433/)).

²А.Я. Канель-Белов был поддержан грантом РНФ 22-19-20073 «Комплексное исследование возможности применения самозаклинивающих структур для повышения жесткости материалов и конструкций» ([https://rscf.ru/project/No 22-19-20073](https://rscf.ru/project/No%2022-19-20073)). Ему принадлежит только раздел постановка задач.

в образце, отсканированном методом КТ, составило $\sim 0,61-0,82\%$. Поры в образцах SLM сплавов в обоих случаях (при оптической микроскопии и компьютерной томографии) распределены неравномерно. Анализируются проблемы, оказывающие влияние на объём информации и количественные характеристики концентраторов напряжений, фиксируемых в объектах.

Показана перспективность применения алгоритма Оцу для обработки изображений КТ и оценки распределения пористости в образцах аддитивного производства, позволившего детально визуализировать внутренние поры в образцах в 3D без их физического и химического разрушения по сравнению с металлографической подготовкой.

Ключевые слова: порошковые сплавы, Fe-Cr-Ni, Fe-Cr-Ni-Mo, технология SLM, растяжение, микроструктура, рентгеновская компьютерная томография, пористость, метод Оцу.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:

А. Н. Чуканов, А. Я. Канель-Белов, А. А. Яковенко, Е. В. Цой, М. Ю. Моденов. Метод Оцу в оценке пористости и распределении структурных дефектов по изображению компьютерной томографии изделий SLM // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 357–372.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 669.537.7:621.357.5:552.08

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-357-372

The Otsu method for assessing porosity and distribution of structural defects in the image of computed tomography of SLM products^{3 4}

A. N. Chukanov, A. Y. Kanel-Belov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi, M. Y. Modenov

Chukanov Alexander Nikolaevich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Magnitogorsk State Nosov Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: kanelster@gmail.com

Yakovenko Alexandra Alexandrovna — candidate of technical sciences, Metallurg-Tulamash LLC (Tula).

e-mail: despozisiya100@yandex.ru

Tsoi Evgeny Vladimirovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: tsoyev@tspu.ru

Mikhail Yuryevich Modenov — general director, Tula Mechatronic Systems LLC (Tula).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

³The research presented in this article was carried out with the funds of a 2022 grant in the priority area of activity of the Russian Science Foundation “Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by small individual scientific groups” under the scientific project: “Wave deformation and its relationship with orthotropy of structure and physico-mechanical properties in selective laser fusion products” (Agreement № . 23-29-00433 dated 01/13/2023) (<https://rscf.ru/project/№.23-29-00433/>).

⁴A.Ya. Kanel-Belov was supported by the grant of the Russian Academy of Sciences 22-19-20073 “Comprehensive investigation of the possibility of using self-locking structures to increase the rigidity of materials and structures” (<https://rscf.ru/project/№22-19-20073>). He owns only the setting tasks section.

Abstract

The method of observation and statistical analysis of the number and distribution of structural defects (discontinuities of various morphologies and non-metallic inclusions) in the volume of loaded samples of powder stainless and high-strength alloys of Fe-Cr-Ni, Fe-Cr-Ni-Mo systems manufactured according to additive technology SLM is described.

The task of assessing porosity from a computed tomography (CT) image is to determine the presence of elements (objects) in the image with certain individual characteristics. This characteristic is the brightness of the image elements. The simplest and most natural way to detect an object/objects is to select a brightness threshold or threshold classification (thresholding). In the work, the Nobuyuki Otsu method, developed in 1979, was used for these purposes.

A comparison of the informative value of porosity results for the analysis of images obtained using X-ray computed tomography and metallographic analysis (optical, SEM) techniques is presented. The highest porosity content in the CT scanned sample was ~0.61-0.82%. The pores in the samples of SLM alloys in both cases (optical microscopy and computed tomography) are unevenly distributed. The problems affecting the amount of information and quantitative characteristics of stress concentrators recorded in objects are analyzed.

The prospects of using the Ots algorithm for processing CT images and estimating the porosity distribution in samples of additive manufacturing are shown, which made it possible to visualize in detail the internal pores in samples in 3D without their physical and chemical destruction compared with metallographic preparation.

Keywords: powder alloys, *Fe-Cr-Ni*, *Fe-Cr-Ni-Mo*, SLM technology, stretching, microstructure, X-ray computed tomography, porosity, the Otsu method.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

A. N. Chukanov, A. Y. Kanel-Belov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi, M. Y. Modenov, 2023, "The Otsu method for assessing porosity and distribution of structural defects in the image of computed tomography of SLM products", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 357–372.

1. Введение

Недостатком изделий из порошковых коррозионностойких и жаропрочных сталей и сплавов систем Fe-Cr-Ni, Fe-Cr-Ni-Mo, изготовленных с помощью технологии послойного лазерного сплавления (SLM), является анизотропия их физико-механических свойств, сформированная структурной анизотропией [1-5]. Она связана с формированием неравновесной микроструктуры и её отдельных элементов: сферических и плоских пор, а также нерасплавившихся неметаллических включений. Перечисленные структурные дефекты являются концентраторами напряжений и могут стимулировать при нагружении в окружающем их микрообъёме развитие локализованной пластичности в виде автоволнового процесса [6-10], который при эксплуатационном температурно-силовом воздействии может приводить к фрагментации изделия и его разрушению.

Традиционным методами структурного и фазового анализа в металловедении являются микроскопия и рентгеновский анализ и их разновидности: РЭМ и рентгеновская компьютерная томография (КТ). Эти методы наиболее апробированы и перспективны для слитковых изделий, а также порошковой металлургии и аддитивных производств.

Постановка задачи исследования. При оценке пористости, формирующейся в процессе SLM, анализируют как сферические поры, вызванные защитными газами, так и пористость, обусловленную технологическим процессом непроплавления последовательно наносимых слоёв порошка. При этом возникает ряд вопросов, связанных с разработкой эффективных характеристик выращиваемого материала. Требуется найти как распределение пор по природе

их происхождения, так распределение по морфологии. Кроме того, необходимо выяснить перспективу эволюции указанных несплошностей в процессе нагрузки. Требуется выбрать математические характеристики, наиболее точно характеризующие несплошности.

Такого рода вопросы исследуются в стохастической геометрии. В частности, в трудах [11-13]. В этих работах строится математический аппарат для исследования случайных прерывистых сред (суммы Минковского, дилатации Минковского), описания разного рода сред.

В этой связи возникает следующая задача. Разработать математические модели неоднородных сред и выбора их численных характеристик, в том числе применительно к исследованным металлическим средам.

Суть задачи - определение свойств несплошностей по имеющимся экспериментальным данным: изображениям, полученным в ходе металлографического анализа и компьютерной томографии. Задача стереологии в данных условиях состоит в том, чтобы сделать выводы о геометрических свойствах трехмерных структур по их плоским и линейным сечениям. Такая постановка возникает, в частности, если необходимо восстановить геометрические образы внутри непрозрачных тел (включений, пор в металлах, горных породах, искусственных веществах, и т.д.). Все это задачи томографии.

Один из подходов для решения описанной задачи состоит в рассмотрении таких классических алгоритмов распознавания линий (LSD), как преобразование Радона. Оно позволяет по интегралам вдоль прямых восстанавливать значение функции. При этом используется обратное преобразование Фурье. Однако при работе с реальными растровыми изображениями эта задача является некорректной и возникает необходимость разработки численных методов.

Решавшаяся в данной работе задача оценки пористости по изображению КТ сводилась к установлению порогового значения яркости, разграничивающего матрицу и поры. Выбор порога яркости осуществляли с использованием пороговой классификации по методу Н. Оцу.

Цель работы – проведение методами рентгеновской компьютерной томографии (КТ) и микроструктурного анализа (оптического, РЭМ) статистического анализа распределения структурных дефектов типа несплошностей различной морфологии и неметаллических включений в изделиях SLM технологии с использованием метода Н. Оцу.

Самостоятельный интерес у авторов вызывали последствия реакции структурных дефектов изделий SLM технологии и анизотропии их механических свойств при контакте с коррозионными средами. В ходе нагружения он стимулирует развитие несплошностей (пор), ведет к накоплению в них газов (например, водорода) и увеличению внутреннего давления. В объеме пор возможно химическое взаимодействие водорода и углерода с образованием метана, увеличивающего давление в порах. Описанные процессы ведут к обезуглероживанию и формированию зон пластичности в прилегающих к порам областях [14]. Они могут играть существенную роль в анизотропии механических свойств. Изучение эволюции зон пластичности важно для прогнозирования работоспособности изделий из порошков SLM производства [15].

Подобно деталям, изготовленным традиционным способом, на механические свойства компонентов, изготовленных методом SLM, влияют результирующие профили микроструктуры и пористости (размер и морфология).

Несмотря на большое количество микроструктурных и рентгеноструктурных исследований анизотропии структуры и свойств в изделиях SLM технологии, её связь с распределением пористости и способы контроля до конца не выявлены.

Материал и методики исследования. Объектами исследований являлись образцы (ГОСТ 1497-84, плоские тип I, 160x30x7 мм) порошковой нержавеющей стали марки 03X18H12M2 (аналог *AISI 316L*) и жаропрочного сплава 08XН53БМТЮ (аналог *Inconel 718*), изготовленные по SLM-технологии на 3d-принтере SLM280 2.0HL. Анализ микроструктуры образцов проводили на оптическом микроскопе *Meiji MT8100*, растровом электронном микроскопе *Jeol JSM-6390* и инвертированном микроскопе *Altami MET-1C*. Исследования рентгеновской компьютерной томографии проводили на импульсном рентгеновском дефектоскопе

семейства АРИНА компании ООО «Продис НДТ» с использованием программного обеспечения *X-Vizor Viewer* (версия 07.10.2200) компании «Ньюком-НДТ».

Выполняли анализ микроструктуры различных участков образцов до и после испытаний при помощи КТ и микроскопии.

2. Анализ результатов эксперимента

Технологии микрофокусной рентгеноסקопии и КТ быстро развиваются и получили статус метрологических [16]. Рентгеновские системы КТ обеспечивают высокую точность и возможность измерения внутренних и внешних габаритов исследуемого образца и элементов его структуры, а также получать информацию о плотности объекта. Преимуществом КТ является прямая трёхмерная визуализация пористой структуры в сочетании с данными объёма и геометрии [17-19].

Использованный метод КТ основан на получении в детекторе серии рентгеновских изображений объекта, из которых с помощью ПО *X-Vizor Viewer* получали объёмное изображение. Образец помещали в держатель, который вращался вокруг вертикальной оси на 360° . Снимок формировали на цифровой кремниевой матрице, установленной напротив рентгеновской пушки. Он представлял собой пиксельное полутоновое изображение, в котором яркость характеризовала степень поглощения рентгеновского излучения. Степень поглощения зависела от физических свойств материала (плотности). Для преобразования двумерных снимков в трёхмерное изображение использовали алгоритмы, основанные на преобразовании Радона [20,21].

Согласно классификации уровней структуры вещества в КТ выделяют четыре масштабных уровня детализации: макроструктурный (> 1 мм), мезоструктурный (0,2–1 мм), микроструктурный (1–100 мкм) и наноструктурный (< 1 мкм). Согласно ей тип исследованных в работе микроструктурных дефектов по соответствию нано- и микроуровням. Выполнили съёмку с использованием рентгеновских трубок с фильтрами из разных материалов при напряжении от 80 до 130 кВ. С помощью ПО *X-Vizor Viewer* обрабатывали статические и динамические радиографические изображения структурных дефектов с импульсного рентгеновского дефектоскопа семейства АРИНА. Оценивали линейные размеры и интенсивность/оптическую плотность объектов (рис.1а-в).

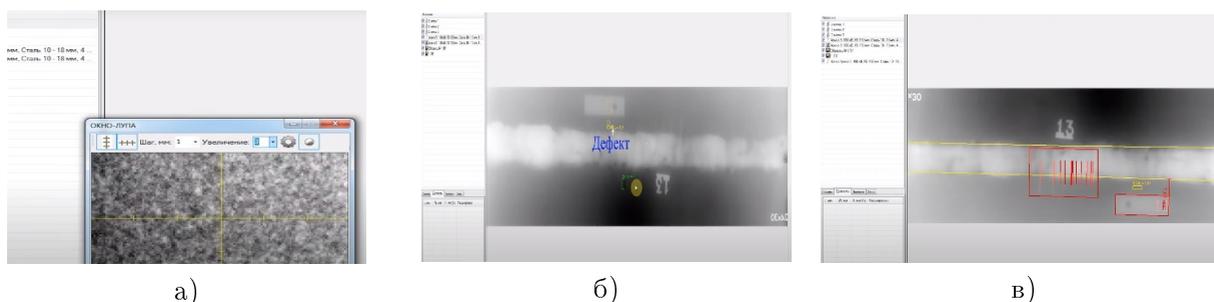


Рис. 1: Структура (а) и обнаружение дефектов (типа пора) (а) по заданной толщине (б) в стали 03X18H12M2 после растяжения (ПО «X-Vizor («Newcom-Ndt»))

На КТ снимках (рис. 1а-в) фиксировали дефекты в виде пор. Оценили геометрические характеристики исследованных образцов в процедуре измерения размеров дефекта (рис. 1в). Пористость образцов, отсканированных методом КТ, определяли с использованием метода Otsu [22].

Параллельно с КТ проводили металлографические исследования образцов в продольном и поперечном направлении (перпендикулярно направлению выращивания образца) (рис. 2). Поверхность образцов исследовали на электронном микроскопе (РЭМ) JOEL «JSM 6390» с

энергодисперсионным рентгеновским спектрометром BRUKER «QUANTEX QX1». Образцы имели шероховатую поверхность со значительным количеством сферических частиц, на которой наблюдаются микротрещины (рис. 2в). Количество сферических частиц на поверхности как горизонтальных, так и вертикальных образцов было идентичным.

В плоскости шлифов наблюдали множественные оксидные включения вермикулярной формы (непроплавленные фрагменты частиц порошка) и упорядоченно расположенные оксидные включения округлой формы (рис. 2 а,б). После травления структура на образцах была однородной по сечению образца и представляла собой расплав, разделённый на фрагменты, состоящие из ячеек.

В структуре горизонтально выращенных образцов сплава 08ХН53БМТЮ в нетравленном состоянии границы неспеченных частиц обнаружены не были. На площади шлифа размером $\sim 177 \text{ мм}^2$ фиксировали более 10 пор размером до 80 мкм и включения оксидного характера размером до 10 мкм (рис. 1а-в). Полуколичественный химический анализ определил данные включения как оксиды на основе *Al* и *Ti*. Кроме того, в плоскости шлифа обнаружено много беспорядочно расположенных включений светлого-серого цвета геометрической и неправильной формы, идентифицированных как включения на основе *Ti*.

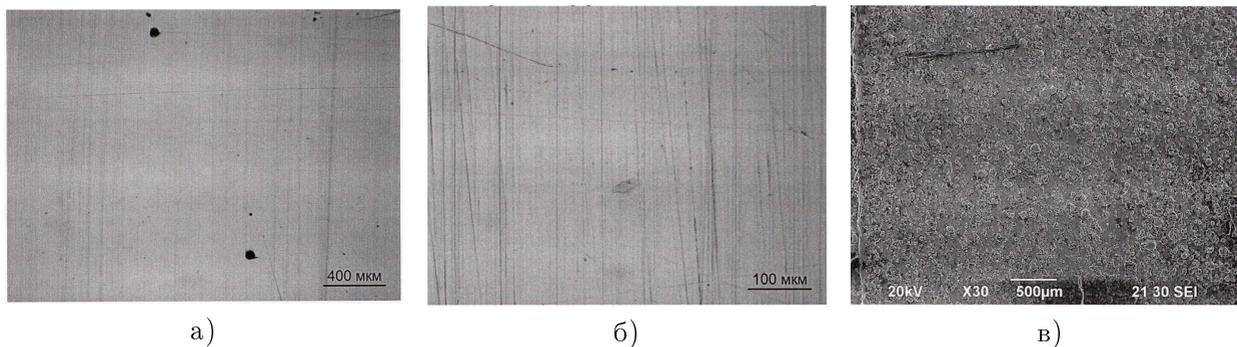


Рис. 2: Поры (а), оксидные включения на основе *Al* и *Ti* (б) и микротрещины (в) в сплаве 08ХН53БМТЮ, образец горизонтальный (шлиф нетравленный в продольном направлении; $\times 50$ (а), $\times 200$ (б), $\times 30$ (РЭМ) (в))

После травления структура горизонтальных образцов однородная в продольном и поперечном сечениях. В продольном направлении (по длине образца) микроструктура представляла собой ванны расплава, разделённые на фрагменты. Микроструктура в поперечном направлении горизонтальных образцов представляла ванны расплава, в форме сегментов круга, дуги которых являлись фронтами кристаллизации.

Анализ пористости. Пористость является распространенным дефектом при изготовлении SLM металлических деталей и ею можно управлять, регулируя скорость сканирования, мощность лазера и толщину слоя порошка. Несмотря на способность технологию SLM создавать детали с высокой плотностью ($\sim 98\%-99\%$), наличие остаточной пористости в них, препятствует использованию в качестве деталей с высокой прочностью и усталостной стойкостью [23].

Метод Оцу. Объект изображения (пора) с определённой яркостью в алгоритме Оцу - это совокупность тех пикселей, яркость которых превышает порог ($I > T$), а фон (матрица) - совокупность остальных пикселей, яркость которых ниже порога ($I < T$). Таким образом, ключевым параметром является порог T . Быстрым и эффективным методом реализации метода Оцу [22] является следующая последовательность шагов.

Рассматривают изображение в градациях серого и решают вопрос о приведении его к бинарному виду. Например, изображение может представлять собой результат классификации, когда «черные» пиксели относятся к одному классу, а «белые» к другому, и возникает вопрос,

как автоматически провести границу между классами, т.е. как выбрать такой порог яркости, ниже которого пиксели будут считаться первым классом, а выше - вторым.

Пусть L - число возможных градаций серого на изображении $([1, 2, \dots, L])$, n_i - число пикселей для каждой градации и $N = n_1 + \dots + n_L$.

Пусть $p_i = n_i/N$ - частоты, с которыми встречаются соответствующие яркости пикселей.

Пусть k - граница между классами (искомый порог яркости), тогда C_0 - пиксели с яркостью, не превышающей порога $([1, 2.. k])$, а C_1 - пиксели с яркостями выше порога $([k + 1 + 1, \dots L])$.

Изображение делят на два класса в соответствии с порогом k . Для пикселей каждого класса по отдельности рассчитывают частоту их встречаемости, а также выборочные средние и дисперсии.

Частоты: $\omega_0(k) = \sum i = p_i$, $\sum = 1$; $\omega_1(k) = \sum i = p_i$.

Средние по классам: $\mu_0(k) = \sum iPr(i|C_0)$, $\mu_1(k) = \sum iPr(i|C_1)$.

Общее среднее: $\mu_1(k) = \sum ip_i$.

Дисперсии $\sigma_0(k) = \sum (i - \mu_0)Pr(i|C_0)$; $\sigma_1(k) = \sum (i - \mu_1)Pr(i|C_1)$.

Далее применяют подход, используемый в дискриминантном и кластерном анализе. Выбирают такую величину k , которая позволяет максимально чётко отделить друг от друга классы C_0 и C_1 . То есть, порог выбирают таким образом, чтобы внутриклассовая дисперсия была как можно меньше по сравнению с общей дисперсией или межклассовой дисперсией.

Оцу рассматривал три критерия и показывал, что они эквивалентны между собой (для краткости записи опустим функциональную зависимость дисперсий от k):

$\lambda(k) = \sigma_b^2/\sigma_w^2 \rightarrow \max(1 \leq k \leq L)$, $\kappa(k) = \sigma_t^2/\sigma_w^2 2\omega \rightarrow \max(1 \leq k \leq L)$, $\eta(k) = \sigma_b^2/\sigma_t^2 \rightarrow \max(1 \leq k \leq L)$, где σ_b , σ_w и σ_t - соответственно межклассовая, внутриклассовая и общая дисперсии, которые можно вычислить по формулам:

$$\sigma_b^2 = \omega_0\omega_1(\mu_1 - \mu_2)^2, \sigma_w^2 = \omega_0\sigma_0^2 + \omega_1\sigma_1^2, \sigma_t^2 = \sum (i - \mu_t)^2.$$

По мнению авторы представленной работы задача поиска максимума по данным критериям в конечном итоге эквивалентна задаче максимизации величины σ_b и, таким образом, оптимальный порог k должен быть выбран таким, чтобы он давал максимум величины σ_b .

ЗАМЕЧАНИЕ. Данный подход подразумевает присутствие на изображении пикселей двух классов. То есть, он будет хорошо работать в случае бимодальной функции распределения яркостей пикселей изображения. Возникают сомнения о возможности использования данного подхода для решения задачи бинаризации растровых изображений.

Пусть в случае анализа изображения, полученного методом КТ, имеется 8-битное изображение, для которого требуется вычислить порог T . В случае 24-битной картинке, ее легко трансформировать в 8-битную с помощью приведения к серому (grayscale) (1):

$$I = 0.2125 R + 0.7154 G + 0.0721 B \quad (1)$$

Метод Оцу (Otsu's Method) для расчета порога использует гистограмму изображения (рис.3,4). Гистограмма - это набор бинов, каждый из которых характеризует количество попаданий в него элементов выборки. В нашем случае выборка - это пиксели различной яркости, которая может принимать целые значения от 0 до 255.

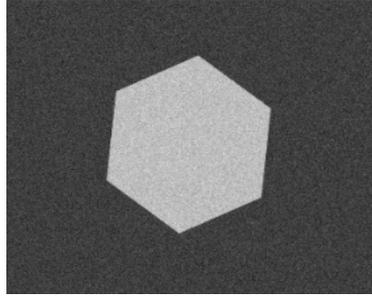


Рис. 3: Пример изображения с объектом

На гистограмме (рис. 4) четко видны два разделяющихся класса. Суть метода Оцу заключается в том, чтобы установить порог между классами, когда каждый из них был как можно более «плотным». Это сводится к минимизации внутриклассовой дисперсии, которая определяется как взвешенная сумма дисперсий двух классов:

$$\sigma_{\omega}^2 = \omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_2^2 \quad (2)$$

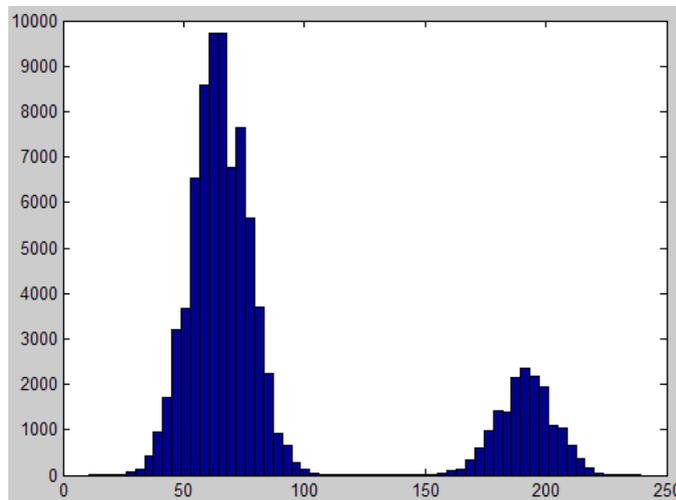


Рис. 4: Гистограмма изображения, приведенного на рис. 3.

Здесь ω_1 и ω_2 - вероятности первого и второго классов соответственно. В своей работе Оцу показывает, что минимизация внутриклассовой дисперсии эквивалентна максимизации межклассовой дисперсии, которая равна:

$$\sigma_b^2 = \omega_1 \omega_2 (a_1 - a_2)^2 \quad (3)$$

где a_1 и a_2 — средние арифметические значения для каждого из классов. Особенность выражения (3) заключается в том, что $\omega_1(t+1)$, $\omega_2(t+1)$, $a_1(t+1)$, $a_2(t+1)$ легко выражаются через предыдущие значения $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ (t - текущий порог).

Эта особенность позволяет использовать следующий быстрый алгоритм:

1. Вычисляем гистограмму (один проход через массив пикселей). Используем гистограмму (проходов по всему изображению больше не требуется);
2. Начиная с порога $t = 1$, проходим через всю гистограмму, на каждом шаге пересчитывая дисперсию $\sigma_b(t)$. Если на каком-то из шагов дисперсия оказалась больше максимума, то обновляем дисперсию и $T = t$;

3. Искомый порог равен T .

В точной реализации алгоритма осуществляют много дополнительных оптимизаций. Например, проход через гистограмму делают не от 1 до 254, а от минимальной до максимальной яркости минус единица. В использованной в данной работе версиях метод Оцу реализован на языке C++ с учетом некоторых подобных оптимизаций. На рис. 5 представлена реализация вышеописанного алгоритма относительно примера на рис. 3,4.

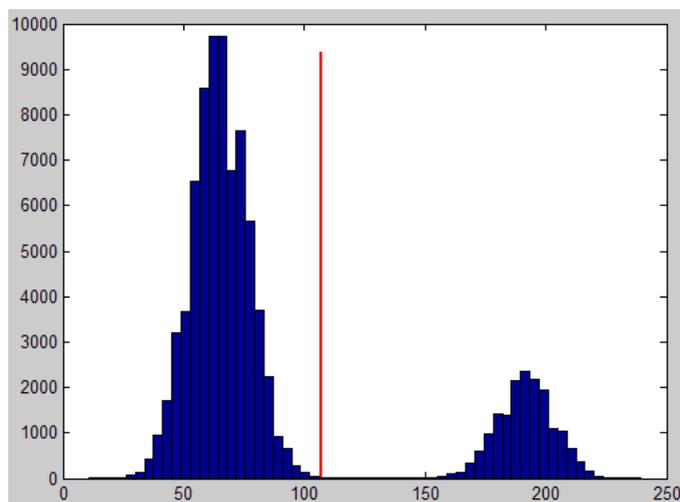


Рис. 5: Гистограмма с рассчитанным порогом

На рис. 6 показано среднее распределение пор по размерам в образцах стали 03X18H12M2 (316L), полученное методом оптической микроскопии при реализации метода Оцу. Размеры пор варьировались от ~ 5 мкм до ~ 45 мкм. На мелкие поры (≤ 5 мкм) приходилось до $\sim 60\%$, а на более крупные поры (> 30 мкм) приходилось менее 3% .

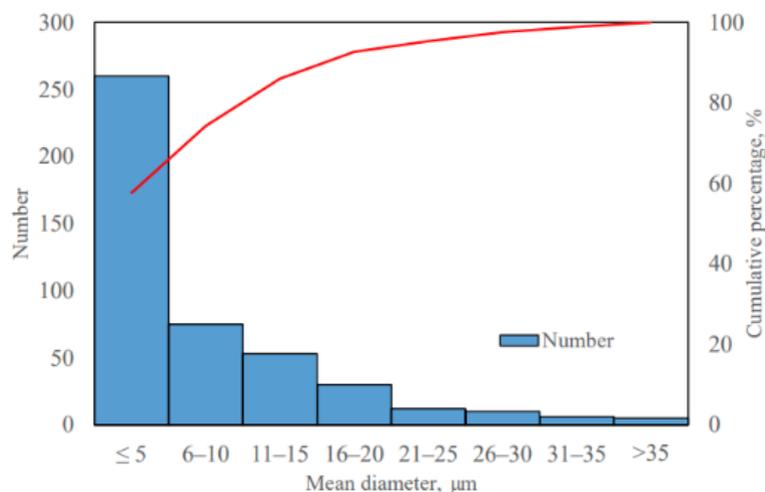


Рис. 6: Распределение пор по размерам в образцах 316L SLM, полученных с помощью оптической микроскопии. Красная кривая - суммарное распределение пор

Средняя пористость образцов SLM, по расчетам, составила $0,82\% \pm 0,36\%$, что означает достижение высокого уровня уплотнения ($\geq 99\%$). Поры были распределены не равномерно по всем образцам, и некоторые из них были сконцентрированы в большей степени в определенных областях по сравнению с другими (рис.7).

Было замечено, что для образцов, разрезанных вдоль плоскости $x-y$ (вдоль направления сканирования), поры были в основном сосредоточены на границе «островка», использованного в качестве стратегии сканирования входе SLM в этом исследовании (рис. 7).

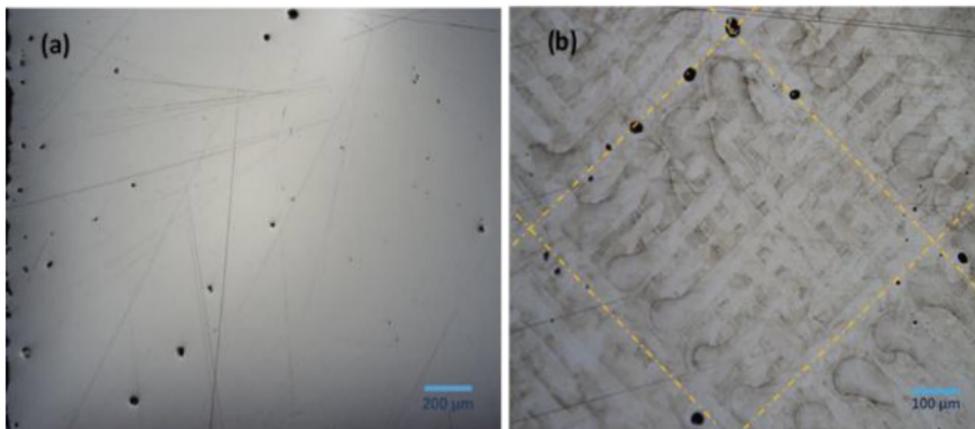


Рис. 7: Распределение пористости в (а) неотравленном и (б) протравленном срезах образца, вырезанного вдоль плоскости $x-y$.

Поры располагались в области перекрытия между двумя «островками», аналогично данным Густмана и др. [24]. Выровненные поры регулярно фиксировали вдоль направление среза образцов вдоль плоскостей $x-z$ и $y-z$.

По результатам КТ с низким разрешением, было обнаружено, что небольшая область вблизи профиля внутренней окружности образца имеет самое высокое содержание пористости по сравнению с другими областями по всей выборке.

При детальном сканировании этой области с высоким разрешением было обнаружено, что содержание пористости составляет 0,61%, а размеры пор варьируются от 5 мкм до ~ 74 мкм.

Пористость в отсканированной области также не была равномерно распределена. При этом большинство пор сосредоточено близко к поверхности (внутренней стенке) сканируемой области. Однако сравнительное исследование пористости провести не удалось, поскольку рентгеновскому сканированию был подвергнут только один образец. Полученные результаты были ограниченно репрезентативны для большего количества образцов 316L, изготовленных SLM.

Аналогичные результаты наблюдали для образцов в плоскости $y-z$. Это может быть результатом включений, таких как оксиды, присутствующие при затвердевании расплавленной ванны [25-27]. Пористость в этих областях с высокой концентрацией пор составила $\sim 1,68\%$, что все является небольшим показателем в целом, но относительно более высоким, чем рассчитанное среднее содержание пористости (рис. 8,9).

В работе были выявлены два типа пористости. Поры, вызванные действием защитного газа, и пористость, вызванная технологическим процессом [28]. Газовые поры сферической формы могут образоваться во время распыления газом исходного материала (порошка 316L) из сопла дозатора перед обработкой SLM или из-за присутствия влаги или загрязняющих веществ на поверхности частиц порошка [29]. Поры, образующиеся в результате технологии SLM, обычно несферические. Они формируются при недостатке приложенной энергии для полного расплавления порошка (отсутствует слияние между последовательно наносимыми слоями порошка [30] или в ходе приложения чрезмерной энергии, приводящей к формированию брызг [31]).

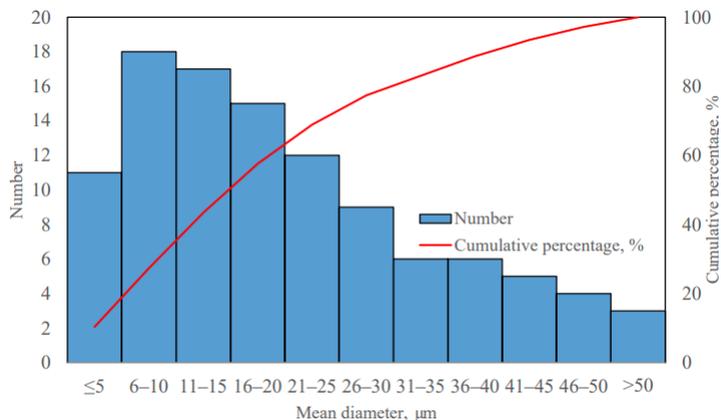


Рис. 8: Распределение пор по размерам для образца SLM в плоскости $y - z$ (КТ). Красная кривая - суммарное распределение пор

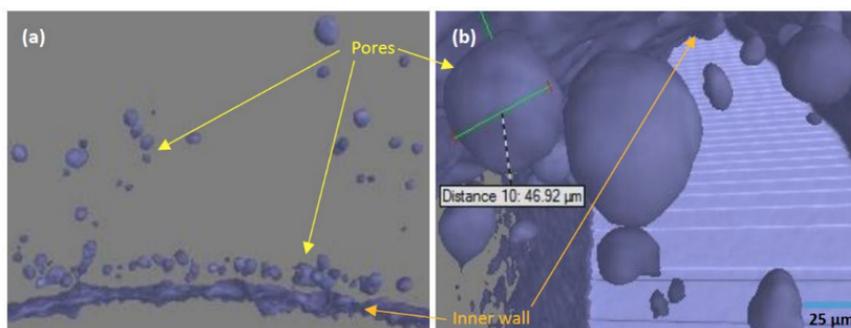


Рис. 9: Поры вблизи поверхности (а) исследуемой области и моделирование их формы и размера (б) в образце 316L (КТ)

В данном исследовании сферические поры преобладали над несферическими, где поры прямоугольной формы были видны только вблизи краев срезаемых образцов. Это указывает на то, что большинство дефектов пористости в образцах SLM были вызваны газовыми порами во время распыления порошков 316L газом, аналогично работе, проведенной Таммасом-Уильямсом и др. [32].

3. Заключение

Наличие пор и трещин отрицательно сказывается на качестве металлических деталей, изготовленных методом SLM, поскольку они снижают механические свойства, такие как предел текучести и прочность на растяжение.

Представленные в данной работе результаты исследований эволюции структурных дефектов в изделиях SLM технологии с помощью метода КТ показали его высокие возможности и хорошие перспективы. Средняя пористость образцов SLM, по расчетам, составила $0,82\% \pm 0,36\%$, что означает достижение высокого уровня уплотнения ($\geq 99\%$).

При сканировании КТ приповерхностных областей с высоким разрешением было обнаружено, что содержание пористости составляет $0,61\%$, а размеры пор варьируются от $5 \mu\text{m}$ до $\sim 74 \mu\text{m}$. Характер технологического воздействия при выращивании образцов определял морфологию структурных дефектов (неплотностей) и влиял на последующее их развитие в ходе нагружения.

Метод обработки изображений КТ с использованием алгоритма Оцу перспективен для изучения распределения пористости в образцах аддитивного производства. Он позволил детально визуализировать внутренние поры в образцах в 3D без их физического и химического разрушения по сравнению с металлографической подготовкой для оптической микроскопии или РЭМ. Лишь небольшой процент пор малого размера (средний диаметр < 5 мкм) сложно зафиксировать КТ с разрешением 3,2 мкм по сравнению с результатами оптической микроскопии. Для получения более высокого разрешения и обнаружения пор меньшего размера КТ требуются высокие существенные затраты и больше времени, что ограничивает использование описанной технологии.

Параллельно выполненные металлографические исследования дополнили результаты КТ и подтвердили наличие и параметры зафиксированных на томограммах структурных дефектов. Проведённый совместный анализ может использоваться для уточнения параметров кинетики процессов деструкции изделий из порошковых сталей, изготовленных по SLM технологии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попович А.А., Суфияров В.Ш., Борисов Е.В., Полозов И.А., Масайло Д.В., Григорьев А.В. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. - 2016. - Вып. 3. - С. 4 - 11.
2. Simonelli M., Tse Y.Y., Tuck C. Effect of the build orientation on the Mechanical Properties and Fracture Modes of SLM Ti-6Al-4V // Mater. Sci. Eng. A. 2014. Vol. 616. Pp. 1-11.
3. Vroncken B., Thijs L., Kruth J.P., Van Hambeeck J. Microstructure and Mechanical Properties of novel β titanium metallic composite by selective laser melting // Acta Mater. 2014/ Vol. 68. Pp. 150-158.
4. Frazier W.E., Metal additive manufacturing // A review. J. Mater. Eng. Perform. 2014. Vol. 23. No 6. Pp. 1917-1928.
5. Wu M.W., Lai P.H., Chen J.K. Anisotropy in the impact toughness of selective laser melted Ti-6Al-4V alloy // Mater.Sci. Eng.: A. 2016. Vol. 650. P. 295-299.
6. Чуканов А.Н. Анизотропия деформации при послойном лазерном синтезе изделий // «Перспективные технологии и материалы». Матер. Всеросс. НПК с межд. уч., (Севастополь, 14–16.10.2020 г.), Научное изд. - Севастополь, СевГУ. 222с., С. 169 -174.
7. Чуканов А.Н. Влияние ориентации изделий аддитивных технологий на их анизотропию деформации // Научные чтения им. чл.-корр. РАН И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов». - Москва. 17-18 сентября 2020 г./ Сб. матер. – М: ИМЕТ РАН, 2020, 194 с. С. 79-80. (<http://odin.imetran.ru/>)
8. Чуканов А.Н. Анизотропия физико-механических свойств при послойном лазерном синтезе // МНТК «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-лет. со дня рожд. акад. А.А. Байкова: Сб. научн. статей (18.09.2020 г.)/ Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: ЮЗГУ, 2020. - 271 с. - С. 244-247.
9. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Свойства изделий, полученных селективным лазерным синтезом. 2. Изделия ячеистых структур // XIII-я МНТК «Современные авто-

мобильные материалы и технологии (САМИТ-2021)», (20.11.2021 г.), Сб. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. С. 338-340.

10. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Свойства изделий, полученных селективным лазерным синтезом. 1. «Сплошные» изделия // XIII-я МНТК «Современные автомобильные материалы и технологии (САМИТ-2021)», (20.11.2021 г.), Сб. статей., Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. С. 341-346.
11. Маттерона Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир. 1978 год, 320 с.
12. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983, 360 с.
13. Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука, 1989, 400 с.
14. Sergeev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeev A.N., Leontiev I.M., Khonelidze D.M., Gvozdev A.E., Formation of plastic zones near spherical cavity in hardened low-carbon steels under conditions of hydrogen stress corrosion // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. Т. 9. № 4. С. 663-669.
15. Чуканов А.Н., Терёшин В.А., Цой Е.В. Математическое моделирование полей напряжений у стресс-коррозионных дефектов // *Современные материалы, техника и технологии*. 2021.- т.6 (39) -. С. 65 -70.
16. Hounsfield G.N. Computerized transverse axia scanning (tomography). Part 1: Description of system // *British Journal of Radiology*. – 1973. – № 46. – P. 1016–1022. DOI: 10.1259/0007-1285-46-552-1016
17. Ketcham R.A., Carlson W.D. Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences // *Computers & Geosciences – Special issue on three-dimensional reconstruction, modelling and visualization of geologic materials*. – 2001. – Vol. 27, iss. 4. – P. 381–400. DOI: 10.1016/S0098-3004(00)00116-3
18. Van Geet M., Swennen R., Wevers M. Quantitative analysis of reservoir rocks by microfocus X-ray computerised tomography // *Sedimentary Geology*. – 2000. – № 132. – P. 25–36. DOI: 10.1016/S0037-0738(99)00127-X
19. Еременко Н.М., Муравьева Ю.А. Применение методов рентгеновской микротомографии для определения пористости в керне скважин [Электронный ресурс] // *Нефтегазовая геология. Теория и практика*. – 2012. – Т. 7, № 3. URL: https://ngtp.ru/rub/2/35_2012.pdf (дата обращения: 15.02.2015).
20. Брандон Д., Каплан У. Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля. – М.: Техносфера, 2004. – 384 с.
21. Van Geet M., Swennen R., David P. Quantitative coal characterisation by means of microfocus X-ray computer tomography, colour image analysis and back scatter scanning electron microscopy // *International Journal of Coal Geology*. – 2001. – Vol. 46, iss. 1. – P. 11–25. DOI: 10.1016/S0166-5162(01)00006-4
22. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histograms // *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.* 1979, 9, 62–66.

23. Yasa, E.; Kruth, J.P. Microstructural investigation of Selective Laser Melting 316L stainless steel parts exposed to laser re-melting // *Proced. Eng.* 2011, 19, 389–395.
24. Gustmann, T.; Neves, A.; Kühn, U.; Gargarella, P.; Kiminami, C.S.; Bolfarini, C.; Eckert, J.; Pauly, S. Influence of processing parameters on the fabrication of a Cu-Al-Ni-Mn shape-memory alloy by selective laser melting // *Addit. Manuf.* 2016, 11, 23–31.
25. Marya, M.; Singh, V.; Marya, S.; Hascoet, J.Y. Microstructural Development and Technical Challenges in Laser Additive Manufacturing: Case Study with a 316L Industrial Part // *Metall. Mater. Trans. B Process Metall. Mater. Process. Sci.* 2015, 46, 1654–1665.
26. Liu, Z.H.; Zhang, D.Q.; Sing, S.L.; Chua, C.K.; Loh, L.E. Interfacial characterization of SLM parts in multi-material processing: Metallurgical diffusion between 316L stainless steel and C18400 copper alloy // *Mater. Charact.* 2014, 94, 116–125.
27. Dadbakhsh, S.; Hao, S. Effect of Al alloys on selective laser melting behaviour and microstructure of in situ formed particle reinforced composites // *J. Alloy. Compd.* 2012, 541, 328–334.
28. Sames, W.J.; List, F.A.; Pannala, S.; Dehoff, R.R.; Babu, S.S. The metallurgy and processing science of metal additive manufacturing // *Int. Mater. Rev.* 2016, 6608, 1–46.
29. Frazier, W.E. Direct digital manufacturing of metallic components: Vision and roadmap // In *Proceedings of the 21st Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium, Austin, TX, USA, 9–11 August 2010*; pp. 717–732.
30. King, W.E.; Barth, H.D.; Castillo, V.M.; Gallegos, G.F.; Gibbs, J.W.; Hahn, D.E.; Kamath, C.; Rubenchik, A.M. Observation of keyhole-mode laser melting in laser powder-bed fusion additive manufacturing // *J. Mater. Process. Technol.* 2014, 214, 2915–2925.
31. Körner, C.; Bauereiß, A.; Attar, E. Fundamental consolidation mechanisms during selective beam melting of powders // *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2013, 21, 1–18.
32. Zhong, Y.; Liu, L.; Wikman, S.; Cui, D.; Shen, Z. Intragranular cellular segregation network structure strengthening 316L stainless steel prepared by selective laser melting // *J. Nucl. Mater.* 2016, 470, 170–178.

REFERENCES

1. Popovich A.A., Sufiyarov V.Sh., Borisov E.V., Polozov I.A., Masailo D.V., Grigoriev A.V. 2016, “Anisotropy of mechanical properties of products manufactured by selective laser melting of powder materials”, *News of universities. Powder metallurgy and functional coatings*. - Issue 3. – pp. 4-11.
2. Simonelli M., Tse Yu.Yu., Tuk S. 2014, “Influence of assembly orientation on mechanical properties and failure modes of SLM Ti-6Al-4V”, *Mater. of sciences. English A.*, vol. 616. pp. 1-11.
3. Vronken B., Thijs L., Krut J.P., Van Hambeck J. 2014, “Microstructure and mechanical properties of a new metal composite of β -titanium by selective laser melting”, *Acta Mater* / vol. 68, pp. 150-158.
4. Fraser W.E., 2014, “Production of metal additives: a review”, *J. Mater. Eng. Performance*. Volume 23. No. 6. pp. 1917-1928.

5. Wu M.V., Lai P.H., Chen J.K. 2016, "Anisotropy of the toughness of Ti-6Al-4V alloy melted by a selective laser", *Mater. of sciences. English: A.* vol. 650. pp. 295-299.
6. Chukanov A.N. Anisotropy of deformation in layered laser synthesis of elements // «*Promising technologies and materials. Mater. All-Russian. SPC with international studies*», (Sevastopol, 14-16.10.2020), Scientific publishing house - Sevastopol, SevSU. 222s., pp. 169 -174.
7. Chukanov A.N. 2020, "Influence of orientation of products of additive technologies on their deformation anisotropy", *Scientific readings named after chl.-corr. RAS I.A. Odina "Mechanical properties of modern structural materials"*. - Moscow. September 17-18, 2020/ Sat. mater. – M: IMET RAS, 194 p. 79-80. (<http://odin.imetran.ru/>)
8. Chukanov A.N. 2020, "Anisotropy of physico-mechanical properties in layered grain synthesis», *ISTC "Modern problems and directions of development of metallurgy and heat treatment of metals and alloys"*, dedicated. 150 years old. since the day of birth. Academician A.A. Baykova: Collection of scientific papers. articles (09/18/2020)/ South-West State University. Kursk: South Ural State University, - 271 p. - pp. 244-247.
9. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "Sequence of actions obtained by selective laser synthesis. 2. Publishing of cellular structures», *XIII ISTC "Modern automated systems and technologies (SAMIT-2021)"*, (11.20.2021), Sat. stat., Kursk: Uygo-zap. State University, pp. 338-340.
10. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V, "Svyaz end obtained by selective laser synthesis. 1. Complex ed.", *XIII ISTC "Modern Information Technologies (SAMIT-2021)"*, (11.20.2021), Sat. stat., Kursk: Uygo-zap. State University, 2021. pp. 341-346.
11. Matherona J. 1978, "Random sets and integral geometry", *Moscow: Mir*, 320 p.
12. Santalo L, 1983, "Integral geometry and geometric probabilities", *M.: Nauka*, 360 p.
13. Ambartsumyan R.V., Mekke Y., Shtoyan D. 1989, "Introduction to stochastic geometry", *Moscow: Nauka*, 400 p.
14. Sergeev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeev A.N., Leontiev I.M., Honelidze D.M., Gvozdev A.E. 2018, "Formation of plastic zones near a spherical cavity in hardened low-carbon steels under stress corrosion by hydrogen", *Inorganic materials: applied research.* vol. 9. No. 4. pp. 663-669.
15. Chukanov A.N., Tereshin V.A., Tsoi E.V. 2021, "Mathematical modeling of stress fields in stress-corrosion defects", *Modern materials, technique and technologies.* -vol.6 (39) -. pp. 65-70.
16. Hounsfield G.N. 1973, "Computerized scanning of the transverse axis (tomography). Part 1: Description of the system", *British Journal of Radiology.* - no. 46.– pp. 1016-1022. DOI: 10.1259/0007-1285-46-552-1016
17. Ketcham R.A., Carlson W.D. 2001, "Obtaining, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic images: applications to Earth sciences", *Computers and Earth Sciences – Special issue dedicated to three-dimensional reconstruction, modeling and visualization of geological materials.* - vol. 27, iss. 4.– pp. 381-400. DOI: 10.1016/S0098-3004(00)00116-3
18. Van Git M., Svennen R., Vevers M. 2000, "Quantitative analysis of reservoir rocks by microfocus X-ray computed tomography", *Sedimentary geology.* — no. 132. – Pp. 25-36. DOI: 10.1016/S0037-0738(99)00127-X

19. Eremenko N.M., Muravyeva Yu.A. 2012, "Application of X-ray micromography methods for determining porosity in the core of wells", *Oil and Gas Geology. Theory and Practice*. - vol. 7, no. 3. – URL: http://www.ngtp.ru/rub/2/35_2012.pdf (date of publication: 02/15/2015).
20. Brandon D., Kaplan U. 2004, "Microstructure of materials. Methods of research and control", *M.: Technosphere*. – 384 p.
21. Van Git M., Svennen R., David P. 2001, "Quantitative characterization of coal using microfocus X-ray computed tomography, color image analysis and backscattering scanning electron microscopy", *International Journal of Coal Geology*. – vol. 46, issue 1. – pp. 11-25. DOI: 10.1016/S0166-5162(01)00006-4
22. Otsu, N. 1979, "A threshold selection method from gray-level histograms", *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, vol.9, pp. 62–66.
23. Yasa, E.; Kruth, J.P. 2011, "Microstructural investigation of Selective Laser Melting 316L stainless steel parts exposed to laser re-melting", *Proced. Eng.* vol. 19, pp. 389–395.
24. Gustmann, T.; Neves, A.; Kühn, U.; Gargarella, P.; Kiminami, C.S.; Bolfarini, C.; Eckert, J.; Pauly, S. 2016, "Influence of processing parameters on the fabrication of a Cu-Al-Ni-Mn shape-memory alloy by selective laser melting", *Addit. Manuf.* - vol. 11, pp. 23–31.
25. Marya, M.; Singh, V.; Marya, S.; Hascoet, J.Y. 2015, "Microstructural Development and Technical Challenges in Laser Additive Manufacturing: Case Study with a 316L Industrial Part. Metall", *Mater. Trans. B Process Metall. Mater. Process. Sci.* vol. 46, pp. 1654–1665.
26. Liu, Z.H.; Zhang, D.Q.; Sing, S.L.; Chua, C.K.; Loh, L.E. 2014, "Interfacial characterization of SLM parts in multi-material processing: Metallurgical diffusion between 316L stainless steel and C18400 copper alloy", *Mater. Charact.* - vol. 94, pp. 116–125.
27. Dadbakhsh, S.; Hao, S. 2012, "Effect of Al alloys on selective laser melting behaviour and microstructure of in situ formed particle reinforced composites", *J. Alloy. Compd.* vol. no 541, pp. 328–334.
28. Sames, W.J.; List, F.A.; Pannala, S.; Dehoff, R.R.; Babu, S.S. 2016, "The metallurgy and processing science of metal additive manufacturing", *Int. Mater. Rev.* vol. 6608, pp. 1–46.
29. Frazier, W.E. 2010, "Direct digital manufacturing of metallic components: Vision and roadmap", *In Proceedings of the 21-st Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, Austin, TX, USA, 9–11 August pp. 717–732.
30. King, W.E.; Barth, H.D.; Castillo, V.M.; Gallegos, G.F.; Gibbs, J.W.; Hahn, D.E.; Kamath, C.; Rubenchik, A.M. 2014, "Observation of keyhole-mode laser melting in laser powder-bed fusion additive manufacturing", *J. Mater. Process. Technol.* 214, 2915–2925.
31. Körner, C.; Bauereiß, A.; Attar, E. 2013, "Fundamental consolidation mechanisms during selective beam melting of powders", *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, vol. 21, pp. 1–18.
32. Zhong, Y.; Liu, L.; Wikman, S.; Cui, D.; Shen, Z. 2016, "Intragranular cellular segregation network structure strengthening 316L stainless steel prepared by selective laser melting", *J. Nucl. Mater.* vol. 470, pp. 170–178.

Получено: 18.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 24 Выпуск 5

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.ujiyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член Академии информатизации образования, президент Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 24 Issue 5

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of

Informatization of Education, President of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 24 Issue 5

I. Allakov, F. Deraman, S. H. Sapar, Sh. Ismail. On cardinality of character sums with Beatty sequences associated with composite modules	5
I. Sh. Jabbarov, S. A. Meshaik, M. M. Ismailova. On number of sheets of coverings defined by a system of equations in n -dimensional spaces	16
A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova. Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrodinger with potential $Q(x) = x^2$	31
I. B. Kazakov. A proof of the L'Hôpital's rule	49
A. Ya. Kanel-Balov, A. O. Suleykin. Estimation of the distribution of fractures by sizes and orientations based on data on fracture traces	70
I. A. Kulguskin. Involutions in the algebra of upper triangular matrices over the ring of algebraic integers of quadratic fields	85
Yu. Yu. Linke. Mean function estimation for a noisy random process under a sparse data condition	112
F. I. Lobzin. Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension	126
K. G. Malyutin, A. A. Naumova. Representation of subharmonic functions in the half-ring and in the half-disk	136
A. R. Rustanov, G. V. Teplyakova, S. V. Kharitonova. Nearly trans-Sasakian almost $C(\lambda)$ -manifolds	153
S. Y. Soloviev. About Cotangent	167
P. N. Sorokin. Some generalizations of the Faa Di Bruno formula	180
V. I. Subbotin. On the enumeration of convex RR -polyhedra	194
BRIEF MESSAGES	
A. Ya. Kanel-Belov, V. V. Pavlova, V. O. Kirova. Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks	208
A. P. Krylov, N. M. Dobrovolsky. Hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices	217
A. V. Rodionov. Algorithmic issues of constructing generalized parallelepipedal grids	222
D. K. Tukhliev. Kolmogorov's type inequalities in Bergman space B_2 and some of its applications	228
V. G. Chirskii. Transcendence of certain 2-adic numbers	237

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

D. R. Biryukov. Using of the finite element method for solving the problem of diffraction of acoustic wave on a set of elastic inhomogeneous bodies	244
V. V. Glagolev, V. V. Kozlov, A. A. Markin. Prefracture model of a layer with a hole based on the interaction arc concept.....	256
T. D. Dzhuraev, A. S. Jafarov, K. B. Nurov, M. T. Toshev. Patterns of changes in the energy of indium interchange with the elements of the periodic table (PT) from their serial number	266
N. N. Dobrovolskii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov. Diffraction of sound waves on an inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length	274
D. Yu. Efimov. Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary	289
E. V. Manokhin, R. A. Zhukov, I. V. Bormotov, I. V. Dobrynina, E. A. Nazirova. From history of one unpublished paper of M. I. Kadets.....	307
L. A. Tolokonnikov. Reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer	320
N. D. Tutyshkin. Modeling of deformation damage of metals in case of plastic compression deformations	331
A. N. Chukanov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi. Morphology of technological discontinuities in the structure of additive manufacturing products as a cause of anisotropy of their physical and mechanical properties.....	343
A. N. Chukanov, A. Y. Kanel-Belov, A. A. Yakovenko, E. V. Tsoi, M. Y. Modenov. The Otsu method for assessing porosity and distribution of structural defects in the image of computed tomography of SLM products.....	357
РЕДКОЛЛЕГИЯ	373
THE EDITORIAL BOARD	377
TABLE OF CONTENTS	381

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXIV. Выпуск 5 (91)

Оригинал-макет подготовлен
А. В. Родионовым, А. П. Крыловым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.

Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдан Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 25.12.2023. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 48,0.
Тираж 150 экз. (первый завод – 30 экз.). Заказ 23/29.
Цена свободная. Дата выхода в свет 29.12.2023.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.