ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 5 раз в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС 77-80049
ISSN 2226-8383

Том XXIV

Выпуск 4 (90)

Тула
2023

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)
В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
А. О. Иванов (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)
Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)
З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)
Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 24 Выпуск 4

С. С. Демидов. Андрей Николаевич Колмогоров на переломе отечественной истории 50-х – 60-х годов 5

А. А. Веселова, И. Б. Кожухов. Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи 12

А. Ф. Галимянов, Т. Ю. Горская. Об одном обобщённом интерполяционном полиномиальном операторе 22

В. А. Горелик, Т. В. Золотова. Методы нахождения оптимальных смешанных стратегий в матричных играх с коррелированными случайными выигрышами 33

В. И. Иванов. Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой ... 48

В. О. Кирова, И. В. Годунов. Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма . 63

В. О. Кирова. Хроматическое число слоек с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями 78

С. Н. Асхабов. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью 85

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, А. В. Афонина, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Теоремы универсальности и антиуниверсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел 104

М. А. Королёв. Об одном распределении, связанном с рядами Фарея 137

Лопес Перес А., Куэльяр Хустис О. О биективных функциях от фиксированных переменных в поле Галуа из p^k элементов и на кольце целых p-адических чисел для нечетного простого числа p 191

Н. В. Максименко, И. Ю. Реброва. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток 206

Ф. М. Малышев. Инвариантные дифференциальные полиномы 212

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах 239

У. М. Пачев, Р. А. Дохов, А. Х. Кодзоков, М. С. Нирова. О некоторых арифметических применениях к теории симметрических групп 252

З. Х. Рахмонов, И. Аллаков, Б. Х. Абраев. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми 264

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток 299

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II .. 311

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Д. В. Горяшин, С. А. Гриценко. О диофантовых неравенствах с простыми числами 325

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О точности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками 335

А. Дуаа, М. Мейсами. Коэффициент и арифметическая сложность объединения $n!$ 341

Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II 345

Ю. Н. Штейников. Об экстремальном множестве частных целых чисел 354

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Р. А. Мельников, О. А. Саввина. Историко-математическое наследие Фёдора Андреевича Медведева (к 100-летию со дня рождения) 361

И. А. Туренова, Е. Л. Туренова, С. П. Моисеева. Об истории научной школы по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания кафедры ТВиМС Томского государственного университета 372

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Н. Х. Агаханов, Н. Н. Андреев, С. Н. Асхабов, Н. М. Добровольский, А. Домошницкий, С. А. Дориченко, М. В. Зайцев, И. А. Иванов-Погодаев, А. А. Колчев, С. Малев, И. В. Митрофанов, А. А. Михалев, С. П. Мищенко, В. Г. Наводнов, Ю. В. Нестеренко, А. М. Песин, Ф. В. Петров, С. В. Пчелинцев, А. М. Райгородский, Ф. Д. Рухович, Л. М. Самойлов, А. Л. Семенов, В. А. Тиморин, О. Н. Тулупов, М. И. Харитонов, А. Л. Чернятьев, А. А. Чиликов, В. Н. Чубариков, А. И. Шафаревич. Алексей Яковлевич Канель-Белов 380

Решение XXII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната №18 при Московском университете 401

РЕДКОЛЛЕГИЯ 403

THE EDITORIAL BOARD 407

TABLE OF CONTENTS 411

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-5-11

Андрей Николаевич Колмогоров на переломе отечественной истории 50-х – 60-х годов

С. С. Демидов

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd42@mail.ru

Для цитирования:
С. С. Демидов. Андрей Николаевич Колмогоров на переломе отечественной истории 50-х – 60-х годов // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 5–11.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-5-11

Andrei Nikolayevich Kolmogorov on the cusp of national history in the 50-s – 60-s

S. S. Demidov

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
email: serd42@mail.ru

For citation:
S. S. Demidov, 2023, “Andrei Nikolayevich Kolmogorov on the cusp of national history in the 50-s – 60-s” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 5–11.

Это было удивительное для страны время. Совсем (по человеческим меркам) недавно завершилась страшная война. Завершилась Великой Победой. Страна вступила в эпоху строительства – послевоенного восстановления и созидания обновлённого современного государства. На языке того времени – строительства коммунизма. Успешно развивалась атомная программа (в 1949 году было проведено первое успешное испытание атомной, а в 1953 – водородной бомбы, в 1954 запущена в эксплуатацию Обнинская АЭС), триумфально шло освоение космического пространства (в 1957 году был выведен на орбиту первый искусственный спутник Земли, в 1959 – первая автоматически пилотируемая станция, совершена посадка на Луну автоматической межпланетной станции, в 1961 состоялся первый полёт человека в космос), несмотря на препятствия чинившиеся идеологами буржуазной псевдонауке – кибернетике, совершенствовалась вычислительная техника – в 1950 заработала МЭСМ (Малая электронная счётная машина), в 1952 – БЭСМ-1, а в 1953 началось серийное производство ЭВМ «Стрела», в 1959 году в МГУ была разработана уникальная (на основе троичной логики) малая ЭВМ «Сетунь» . После кончины в 1953 году И.В. Сталина в стране начал быстро меняться

общественно-политический климат: ослаблялась цензура, повышался уровень свободы слова и творческой деятельности, восстанавливались культурные и экономические связи с Западом. Начиналось время, получившее, с лёгкой руки Ильи Эренбурга, имя «эпохи оттепели». Оттепель пробилась и на мехмат. В 1954 году деканом факультета стал А.Н. Колмогоров.

С университетом была связана вся его творческая жизнь. Здесь в 1920 – 1925 гг. он был студентом математического отделения, в 1929 закончил аспирантуру университетского Научно-исследовательского института математики и механики и был приглашён работать в этом институте в должности научного сотрудника, а затем в 1933 – 1935 гг. мы видим его уже директором института. После разделения этого учреждения на два института – механики и математики – стал директором последнего. В 1933 – 35 гг. заведовал кафедрой общего математического анализа, а в 1935 основал кафедру теории вероятностей.

Рис. 1: Андрей Николаевич Колмогоров

После избрания в январе 1939 г. действительным членом Академии наук СССР центр деятельности Андрея Николаевича переместился в Академию: по инициативе О.Ю. Шмидта он стал членом её Президиума, а также академиком-секретарём Отделения физико-математических наук. На этом посту он оставался до отставки Шмидта в 1942 году, когда подал в отставку.

И вновь центр его деятельности переместился в университет – на механико-математический факультет. Здесь он продолжал руководить кафедрой теории вероятностей. В 1951 г. к этому добавились административные обязанности директора Института математики МГУ, которые он исполнял до 1953 года. В 1953 механико-математический факультет переехал в новое здание университета. Начинался и новый этап в творчестве Андрея Николаевича, связанный с жизнью на Ленинских Горах, которые он любил и на которых чувствовал себя, как нынче говорят, комфортно. В 1954 году, как мы уже сказали, он стал деканом механико-математического факультета.

В этот момент в стране и в его жизни сошлось многое. Ощущения человека пережившего страшную войну, из которой его народ вышел победителем, уход из жизни Отца народов и

начало нового этапа в жизни советского общества. Началась уже упомянутая эпоха оттепели. Дышать стало легче. Мрачная полоса, казалось, миновала и ощущалось приближение светлых времён. Шло освоение нового здания и университетских территорий на Ленинских Горах. Всё это оказывало на Андрея Николаевича благотворное воздействие и способствовало началу творческого подъёма, исключительного по своим масштабам и глубине. А обретение в такой обнадёживающей обстановке деканства сулило открытие периода активной деятельности на благо математической науке и математическому просвещению, деятельности, к которой он питал склонность с юных лет.

Следует заметить, что научно-организационную деятельность, Андрей Николаевич рассматривал как органическую и неотъемлемую часть своей жизни. Когда он считал решение той или иной общественной задачи необходимым, то погружался в неё полностью, не испытывая сожаления о потерянных на неё силах и времени, более того – ощущая удовольствие от достигаемого результата. В этом, вероятно, проявлялись черты его характера, воспитанные в нём в семье «привычки либеральной интеллигенции» [1, с. 20] – непреодолимая тяга к общественному служению. Так считал, судя по всему, его дед Яков Степанович Колмогоров, исполняя обязанности предводителя дворянства Угличского уезда, его мать Мария Яковлевна Колмогорова и её сестры, принимавшие активное участие в революционном движении. Уже в 11 – 12 лет мальчик «затратил немало труда на собирание сведений о необитаемых островах южных океанов, так как собирался навербовать выходцев из разных стран и организовать на этих островах идеальное государство, для которого [им] „, была написана даже конституция» [1, с. 28]. Поставить идеальную общественную цель и искать практические пути её осуществления – это станет для него modus vivendi, проявлениями которого будут озарены многие эпизоды его творческой жизни. Занимаясь преподаванием математики и физики (и руководя кружком юных биологов!) в средней школе в Потылихе в 1922 – 1925, то есть в период, наполненный чрезвычайной активностью в математических исследованиях (в это время появились на свет его классические результаты по теории функций действительного переменного, тригонометрическим рядам, основаниям математики, теории вероятностей) он настолько увлёкся школьным преподаванием, что даже всерьёз рассматривал перспективу стать директором школы[1] [1, с. 50; 2, с. 30; 3].

Серьёзный административный опыт он приобрёл уже в 1933 – 1935 гг. в бытность свою директором Научно-исследовательского института математики и механики МГУ (напомним только об организованной в сентябре 1935 г. Институтом Первой международной топологической конференции), а также в 1939 – 1942, когда он исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук АН СССР (именно на этот период пришлась эвакуация из Москвы в 1941 г. академических учреждений на восток и их обустройство в сложных условиях военного времени).

Так что (возвращаемся в 1954 год) деятельность на посту декана не выглядит чем-то чужеродным в его творческой биографии, она скорее органически в неё вписывается. Вот как вспоминал об этом в 1983 году в своём последнем в жизни (так уж случилось) интервью [3] сам Андрей Николаевич (цитирую по [2, с. 184]):

«– Вы сами тянулись к какой-то административной деятельности или она Вас настигала?
– *Нет, стремиться я никогда не стремился. В некоторых случаях было такое чувство долга, так сказать, вера в то, что если я возьмусь, то сделаю существенно лучше – ну это в случае деканства моего, например.*
– Ну, а как Вы считаете, это Вам удалось, Андрей Николаевич?
– *В какой-то мере удалось. Для факультета, во всяком случае, это был всё-таки один из*

[1]Этой же тягой к общественной пользе будет определяться и его деятельность по реформированию преподавания математики в средней школе, развернувшаяся в последнее двадцатилетие его жизни. Этот период, однако, выходит за временные рамки моего сообщения.

лучших периодов. А вообще говоря, какого-то отвращения к административной деятельности у меня не было».

И, действительно, период его деканства открыл эпоху расцвета механико-математического факультета, ставшего в 60-е – 70-е годы одной из лучших (а скорее всего лучшей!) математической школой мира.

Период деканства Андрея Николаевича – это, прежде всего, время инициированных им серьёзных реформ математического образования на факультете, направленных на его совершенствование, учитывающее современные тенденции в развитии математической науки. Уже в довоенные годы одним из ведущих направлений развития математической мысли стал функциональный анализ. Колмогоров выступил инициатором создания нового курса – теории функций и функционального анализа, получившего наименование «Анализ III». Он разработал его программу и стал первым лектором в 1946 / 47 учебном году. Этот курс, объединивший читавшиеся ранее по отдельности курсы теории функций действительного переменного, интегральных уравнений и вариационного исчисления, ставил своей целью – «приучить студентов к двойному зрению: с одной стороны, следить за внутренней логикой развития теории множеств, общей теории непрерывных отображений метрических и топологических пространств, линейных пространств и функционалов и операторов на них, чистой теории меры и интегрирования в общих "пространствах с мерой", с другой, – не упускать из виду обслуживаемую этими более абстрактными областями математики проблематику классического и даже прикладного анализа» [2](из предисловия ко второму изданию книга А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа» – цитирую по [4, с. 10]).

Как писал В.М. Тихомиров в своём предисловии к 6 изданию учебника [5, с. 11 – 12], «А.Н. Колмогоров всегда пропагандировал мысль о необходимости "синтетических" курсов, идею образования, как бы напоминающего движение по спирали, где обучающийся со всё более и более высокого уровня обозревает весь пройденный путь. В этом учебнике осуществляется синтез идей, с которыми уже на начальном этапе образования студенту приходилось сталкиваться в курсах классического анализа "Анализ I", алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений ("Анализ II")».

Курс «Анализ III», программа и принципы которого были разработаны Андреем Николаевичем в послевоенные годы, не только задал вектор развитию преподавания на механико-математическом факультете Московского университета, но и оказал определяющее влияние на математическое образование во всей стране.

Организуемые им в этот период курсы и семинары по теории вероятностей и теории случайных процессов, по динамическим системам и энтропии поднимали мехмат на новый уровень. Созданный им на факультете математический практикум стал подлинной школой для нескольких поколений студентов, специализировавшихся на самых различных направлениях, чрезвычайно расширившей их горизонты.

К сожалению, Андрей Николаевич не оставил нам текста со связным изложением своих взглядов на то, как должна преподаваться математика на механико-математическом факультете. Поэтому в их реконструкции мы должны исходить из отдельных его высказываний, из логики его действий как декана факультета, а также из его общих взглядов на математику и её преподавание.

Курс математики должен быть современным, то есть студент по окончании мехмата должен иметь представление как о фундаментальных дисциплинах, на которых зиждется современной математика, так и об основных тенденциях в её развитии в последние десятилетия.

[2]Учебник по этому курсу, к написанию которого Колмогоров привлёк С.В. Фомина, читавшего тогда аналогичный курс на физическом факультете, вышел двумя выпусками в издательстве Московского университета в 1954 и 1956 гг. Впоследствии он много раз переиздавался издательством «Наука» и был переведён на многие языки. В 2004 г. седьмое его издание вышло в серии «Классический университетский учебник», приуроченной к 250-летию Московского университета.

Именно в такой перспективе он выстраивал преподавание курса анализа из трёх частей – Анализа I, Анализа II и Анализа III. Именно в этой плоскости лежит пропагандируемая им упомянутая выше его мысль о необходимости «синтетических» курсов. Получивший образование на мехмате должен иметь адекватное представление об основаниях математики и математической логике. Отсюда его настойчивый тезис о необходимости включения соответствующего курса в учебную программу мехмата, что удалось осуществить лишь по прошествии ряда лет[3]. Полноту образования математика обеспечивает курс истории математики, который всегда находил у него поддержку.

Образованный математик должен уметь применять полученные теоретические знания к решению практических задач. Осуществлению этой цели должен был способствовать математический практикум, который был им разработан и введён в практику обучения студентов.

Приобщить студентов к самостоятельному научному творчеству – стало идеальной целью университетского преподавания уже для учителя А.Н. Колмогорова Н.Н. Лузина. Продолжая эту традицию, Андрей Николаевич воспитал целую плеяду замечательных учеников. Большинство из них приходится на рассматриваемый нами период. Список наиболее выдающихся из них можно найти на страницах 195 – 198 в [2]. Невозможно даже представить себе как один человек, пусть даже гениальный, мог направить творческую работу такого количества исследователей, ставших славой отечественной математики.

И вся эта гигантская работа была лишь частью его деятельности, основное содержание которой составляло его собственное научное творчество, которое переживало тогда пору наивысшего расцвета. Вот как охарактеризовал это В.М. Тихомиров в научной биографии своего учителя [1, с. 86 – 87]: «Наибольшие усилия Колмогорова в этот период были, по свидетельству самого Андрея Николаевича, связаны с четырьмя темами.

Это:

- малые знаменатели в задачах классической механики;
- внедрение понятия энтропии в различные области математики;
- представление функций в виде суперпозиций;
- равномерные предельные теоремы теории вероятностей.

И в каждом из этих направлений им были разрешены фундаментальные проблемы». И Тихомиров называет далее наиболее важные из этих достижений – решение проблемы устойчивости планетной системы и созданную для этой цели КАМ-теорию, результаты по теории динамических систем, решение совместно с В.И. Арнольдом 13-й проблемы Гильберта, равномерную предельную теорему о приближении сумм независимых одинаково распределённых случайных величин так называемыми безгранично делимыми распределениями».

Общая политическая обстановка, определявшая течение событий, в том числе на факультете и, шире, в московском математическом сообществе, была непростой. Справляться с выпадавшими на долю декана сложностями было не просто сложно, а чрезвычайно сложно. Достаточно вспомнить о венгерских событиях 1956 года и вызванных ими брожениях в студенческих кругах на факультете[4].

Как удавалось Андрею Николаевичу успешно соединять плохо соединимое: напряжённую творческую работу с исполнением административных обязанностей? Причём делать это в сложное в общественно-политическом отношении время, каким была для страны эпоха оттепели. Попробую наметить возможный ответ на этот вопрос. Первое, что приходит мне на

[3]Представляется уместным подчеркнуть здесь роль Колмогорова в становлении курса математической логики. Основные события в этом направлении развернулись, правда, значительно позднее, уже за пределами обсуждаемого нами временного интервала.

[4]Об этом см. в [1, с. 158 - 160].

ум, это сам его подход к решению организационных задач. Он ставил перед собой цель, цель идеальную, а потому априори, казалось бы, невыполнимую. И для её достижения прилагал максимум возможных усилий. Сама масштабность поставленных целей требовала привлечения многих сотрудников, желательно, идеальных, что увы было практически неосуществимым. Но собрать коллектив сотрудников, которых было бы возможно вдохновить идеальной целью[5], такая задача оказывалась для него разрешимой. Такую задачу он умел решать. При этом в этой деятельности он проявлял себя как сугубый реалист. Учитывая особенности политического момента (а учитывать их было совершенно необходимо, иначе всё предприятие оказывалось под угрозой срыва), необходимо было привлекать сотрудников казалось бы далёких от него самого по духу, лишь бы они оказывались увлечёнными поставленной им идеальной целью.

И здесь нужно обратить внимание на одну особенность творческой личности Андрея Николаевича, проявлявшуюся при обдумывании им возникшей математической идеи. Он мог сосредоточиться на ней на некоторое ограниченное время, полностью отрешившись от всего, связанного с окружающей его действительности. Так, вероятно, в некотором приближении происходило и в случае решения организационных проблем: погрузиться в их решение он мог лишь на определённый срок. Так и его деканство не могло длиться слишком долго. Оно должно было завершиться тогда, когда основные поставленные им для себя цели были бы достигнуты, хотя бы в главном. Продолжить начатое можно было предоставить другим, лишь наблюдая за происходившим со стороны, иногда вмешиваясь и внося, если получиться, некоторые коррективы[6].

Именно поэтому он мог считать, как мы видели из его последнего интервью, своё деканство удавшимся. Мехмат вошёл в 60-е годы первоклассной (может быть даже лучшей в мире!) математической школой с блистательным составом преподавателей – учёных и педагогов – и составил вместе с Московским математическим обществом и Математическим институтом им. В.А. Стеклова один из ведущих мировых математических центров, в котором мечтания Андрея Николаевича о «новом Гёттингене» [6] были не просто реализованными, а получили замечательное воплощение: Москва стала новым этапом в развитии мировой математической мысли.

[5]Идеальность поставленной цели подчёркивает эпизод из биографии А.Н. Колмогорова, приведённый в книге В.М. Тихомирова [1, с. 98 – 99]: «В ту пору он был деканом, и по моему приглашению выступил перед моим курсом. Но он обращался в своей речи как бы не к нам, к некоей группе совершенных людей, живущих в идеальном свободном государстве.

Из его слов следовало, что каждый волен избирать для себя свой метод постижения наук, и значит, на лекции, вообще говоря, ходить вовсе не обязательно (хотя у нас в то время было обязательное посещение, старосты обязаны были представлять сведения о присутствовавших на лекции и Андрей Николаевич как декан должен был проводить это предписание в жизнь). Но мы слышали иное: «Есть же книжки, и поэтому нужно слушать лишь те лекции, которые нельзя восполнить по литературе».

[6]Аналогичным образом ведёт себя Колмогоров и при разработке математических идей. Как пишет В.М. Тихомиров [1, с. 95]: «Андрей Николаевич обычно ограничивал себя лишь глобальным пониманием существа дела, предоставляя доделывать и доводить до конца («до самой сути») другим».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров В.М. Андрей Николаевич Колмогоров, 1803 – 1987: жизнь, преисполненная счастья. М.: Наука. 2006.

2. Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х кн. Кн. 1. Истина – благо. Биобиблиография / Ред.-составитель А.Н. Ширяев. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.

3. Последнее интервью. [Беседа А.Н. Колмогорова с А.Н. Марутяном, 1983] // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. М.: ФАЗИС-МИРОС. 1990. 183 – 214.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е. М.; Наука. 1976.

5. Тихомиров В.М. Предисловие / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; Наука Изд. 6-е. 1989.

6. Тихомиров В.М. О двух письмах А.Н. Колмогорова П.С. Александрову // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 8, (43). 2003. С. 11 – 18.

REFERENCES

1. Tikhomirov V.M. 2006, “Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1803 – 1987: a life full of happiness”, *M.: Nauka.*

2. Kolmogorov. 2003, “Anniversary edition in 3 books. Book 1. Truth – good. Bibliography”, Ed.-compiled by A.N. Shiryaev. *M.: FIZMATLIT.*

3. Tikhomirov V.M., Rozov N.H. 1990, “Last interview. [Conversation of A. N. Kolmogorov with A. N. Marutyan, 1983], An extraordinary phenomenon. The book about Kolmogorov”, *M.: PHASIS-MIROS*, pp. 183 – 214.

4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976, “Elements of the theory of functions and functional analysis”, *M.; Science*, Ed. 4-th.

5. Tikhomirov V.M. 1989, “Preface / Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis”. *M.; Nauka*, Ed. 6-th.

6. Tikhomirov V.M. 2003, “About two letters of A. N. Kolmogorov to P. S. Alexandrov”, *Historical and mathematical research. 2nd episode.* Iss. 8 (43), pp. 11 – 18.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 512.56 + 515.122 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-12-21

Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи[1]

А. А. Веселова, И. Б. Кожухов

Веселова Александра Андреевна —Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: alexandra.912@mail.ru
Кожухов Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, НИУ «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Решёткой квазипорядков универсальной алгебры A называется решётка тех квазипорядков на множестве A, которые согласуются с операциями алгебры, реншётка топологий алгебры – это решётка тех топологий, относительно которых операции алгебры непрерывны. Решётка квазипорядков и решётка топологий алгебры A, наряду с решёткой подалгебр и решёткой конгруэнций, являются важными характеристиками этой алгебры. Известно, что решётка квазипорядков изоморфно вкладывается в решётку, антиизоморфную решётке топологий, а в случае конечной алгебры это вложение является антиизоморфизмом. Цепь X_n из n элементов рассматривается как решётка с операциями $x \wedge y = \min(x, y)$ и $x \vee y = \max(x, y)$. В работе доказано, что решётка квазипорядков и решётка топологий цепи X_n изоморфны булеану из 2^{2n-2} элементов. Найдено простое соответствие между квазипорядками цепи X_n и словами длины $n-1$ в 4-буквенном алфавите. Найдены атомы решётки топологий. Из результатов о квазипорядках выводится известное утверждение о том, что решётка конгруэнций цепи из n элементов является булеаном из 2^{n-1} элементов. Результаты перестанут быть верными, если цепь рассматривать лишь относительно одной и операций $\wedge, \vee$.

Ключевые слова: конечная цепь, решётка квазипорядков конечной цепи, решётка топологий конечной цепи, булева решётка.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
А. А. Веселова, И. Б. Кожухов. Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 12–21.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00052).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 512.56 + 515.122 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-12-21

Lattices of topologies and quasi-orders on a finite chain

A. A. Veselova, I. B. Kozhukhov

Veselova Alexandra Andreyevna —Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: alexandra.912@mail.ru
Kozhukhov Igor Borisovich —doctor of physical and mathematical sciences, professor, NRU «MIET»; Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Abstract

The lattice of quasi-orders of the universal algebra A is the lattice of those quasi-orders on the set A that are compatible with the operations of the algebra, the lattice of the topologies of the algebra is the lattice of those topologies with respect to which the operations of the algebra are continuous. The lattice of quasi-orders and the lattice of topologies of the algebra A, along with the lattice of subalgebras and the lattice of congruences, are important characteristics of this algebra. It is known that a lattice of quasi-orders is isomorphically embedded in a lattice that is anti-isomorphic to a lattice of topologies, and in the case of a finite algebra, this embedding is an anti-isomorphism. A chain X_n of n elements is considered as a lattice with operations $x \wedge y = \min(x, y)$ and $x \vee y = \max(x, y)$. It is proved that the lattice of quasi-orders and the lattice of topologies of the chain X_n are isomorphic to the Boolean lattice of 2^{2n-2} elements. A simple correspondence is found between the quasi-orders of the chain X_n and words of length $n - 1$ in a 4-letter alphabet. Atoms of the lattice of topologies are found. We deduce from the results on quasi-orders a well-known statement that the congruence lattice of an n-element chain is Boolean lattioce of 2^{n-1} elements. The results will no longer be true if the chain is considered only with respect to one of the operations $\wedge, \vee$.

Keywords: finite chain, quasiorder lattice of a finite chain, the lattice of topologies of a finite chain, Boolean lattice.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
A. A. Veselova, I. B. Kozhukhov, 2023, “Lattices of topologies and quasi-orders on a finite chain” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 12–21.

1. Введение

С математическим объектом (универсальной алгеброй, графом, частично упорядоченным множеством и т.д.) естественно связываются различные производные структуры – группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, решётка подобъектов. С универсальной алгеброй можно связать решётки конгруэнций, квазипорядков, топологий. Производные структуры играют важную роль в теории, неся существенную информацию о свойствах данного объекта. В частности, теория простых алгебр, т.е. алгебр, имеющих лишь тривиальные конгруэнции, – это целое направление общей алгебры.

Имеются определённые связи производных структур друг с другом. Так, например, Ш.Раделецки доказал [2, Proposition 2.2], что $\vee$-полурешётка подгрупп группы автоморфизмов

любой унарной алгебры изоморфно вкладывается в $\vee$-полурешётку конгруэнций. А.К.Стейнер доказал [1, теорема 2.6], что решётка квазипорядков любого множества изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке топологий, причём это вложение является изоморфизмом, если множество конечно. А.В.Карташова доказала [3, следствие 1 из теоремы 1] аналогичное утверждение для решёток квазипорядков и топологий, согласованных с операциями этой алгебры. В противоположность этому, В.А.Баранский доказал [4, теорема], что свойства групп автоморфизмов не зависит от свойств решёток конгруэнций в классе всех полугрупп, всех полурешёток, от свойств решёток подполугрупп в классе всех полугрупп, элементарных теорий в классе всех решёток.

Цель данной работы — доказать, что решётка топологий и решётка квазипорядков цепи из n элементов являются булеанами из 2^{2n-2} элементов (эти решётки антиизоморфны друг другу согласно следствию 2 из теоремы 1 работы [3]). При этом цепь рассматривается как алгебра $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ с операциями $x \wedge y = \min\{x, y\}$ и $x \vee y = \max\{x, y\}$, т.е. как решётка. Нами также описаны атомы решётки квазипорядков и решётки топологий конечной цепи. Отметим, что решётка конгруэнций конечной цепи и, вообще, любой конечной модулярной решётки, а значит, и конечной цепи, также является булеаном – см. [6, теорема 9 и упражнение 13]. У цепи из n элементов решётка конгруэнций – булеан из 2^{n-1} элементов.

Необходимые нам сведения из теории полугрупп можно найти в [5], теории решёток – в [6], теории графов – в [7], по топологии – в [8].

2. Основные понятия

Полурешёткой (верхней, нижней) называется частично упорядоченное множество, в котором у любых двух элементов есть супремум или инфимум соответственно. Множество, являющееся относительно одного и того же отношения порядка как верхней, так и нижней полурешёткой, называется решёткой. Понятие полурешётки (в старой терминологии: полуструктуры) (верхней или нижней) фактически тождественно понятию коммутативной полугруппы идемпотентов (см. [5, теорема 1.12]). Если любое непустое подмножество (как конечное, так и бесконечное) имеет супремум и инфимум, то решётка называется полной.

Квазипорядком мы, как обычно, называем рефлексивное и транзитивное бинарное отношение.

Пусть X – множество, σ – бинарное отношение на множестве X и

$$f : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} \to X -$$

n-арная операция. Будем говорить, что отношение σ *стабильно относительно операции* f (по-другому: *операция* f *сохраняет отношение* σ), если для любых $a_1, \ldots, a_n$, $a'_1, \ldots, a'_n \in X$ верна импликация

$$a_1 \sigma a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \sigma a'_n \to f(a_1, \ldots, a_n)\, \sigma\, f(a'_1, \ldots, a'_n).$$

Следующая лемма позволяет упростить проверку того, что σ стабильно относительно операции f. Доказательство леммы опускаем ввиду его очевидности.

Лемма 1. *n-арная операция f на множестве X сохраняет отношение σ в том и только том случае, если для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и для любых элементов $a_1, \ldots, a_{i-1}$, $a_{i+1}, \ldots, a_n, b, c \in X$ верна импликация*

$$b\, \sigma\, c \to f(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n)\, \sigma\, f(a_1, \ldots, c, \ldots, a_n).$$

Пусть теперь X – универсальная алгебра с набором операций (сигнатурой) $\Omega = \{f_i | i \in I\}$. Обозначим через $\mathrm{Qord}X$ множество всех квазипорядков на X, стабильных относительно операций этой алгебры. Отношение эквивалентности, стабильное относительно всех операций из сигнатуры, называется *конгруэнцией* алгебры X. Обозначим множество всех конгруэнций через $\mathrm{Con}X$. Пусть τ – топология на множестве X. Говорят, что *топология τ согласуется с операциями*, если каждая операция $f \in \Omega$ является непрерывным отображением

$$f : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} \to X$$

(здесь n – арность операции f). Обозначим через $\mathrm{Top}X$ множество всех топологий на X, согласующихся с операциями. Нетрудно проверить, что множества $\mathrm{Qord}X$, $\mathrm{Con}X$ и $\mathrm{Top}X$ являются полными решётками относительно порядка $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$. При этом точной нижней гранью в каждом из этих множеств является обычное теоретико-множественное пересечение:

$$\bigwedge\{\alpha_j | j \in J\} = \bigcap\{\alpha_j | j \in J\},$$

а точная верхняя грань такова:

$$\bigvee\{\alpha_j | j \in J\} = \bigcap\{\alpha | \forall j \in J \;\; \alpha \supseteq \alpha_j\}.$$

При этом, очевидно, $\mathrm{Con}X$ – полная подрешётка решётки $\mathrm{Qord}X$, а $\mathrm{Qord}X$ – полная подрешётка решётки $\mathrm{Eq}X$ отношений эквивалентности на множестве X. Нулевым элементом каждой из этих решёток является отношение $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ (отношение равенства), а единичным элементом – $\nabla_X = X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}$ (универсальное отношение).

Назовём *булеаном* решётку, изоморфную решётке подмножеств некоторого множества. Напомним, что в решётке с нулём *атом* – это минимальный ненулевой элемент, а в решётке с единицей *коатом* – максимальный неединичный элемент. Нам потребуется характеризация конечных булеанов, сформулированная в следующей лемме. Конечно, данное утверждение известно специалистам по теории решёток, его доказательство мы приводим для полноты изложения.

Лемма 2. *Пусть L – решётка такая, что выполнены условия:*

(а) L имеет n атомов: $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$;

(б) каждый ненулевой элемент из L единственным образом представим в виде точной верхней грани атомов: $\sigma = \sigma_{i_1} \vee \ldots \vee \sigma_{i_k}$.

Тогда L – булеан из 2^n элементов.

Доказательство. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для непустого подмножества $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ множества X положим $\sigma_A = \sigma_{i_1} \vee \ldots \vee \sigma_{i_k}$, для пустого $\sigma_\emptyset = \Delta_X$. Рассмотрим отображение $\varphi : 2^X \to L$, $\varphi(A) = \sigma_A$. Ясно, что

$$A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B).$$

Докажем обратную импликацию. Пусть $\sigma_A \leqslant \sigma_B$ и $i \in A$. Имеем: $\sigma_B \leqslant \sigma_i \vee \sigma_B \leqslant \sigma_A \vee \sigma_B = \sigma_B$, следовательно, $\sigma_{B \cup \{i\}} = \sigma_B$. Ввиду условия (ii) $B \cup \{i\} = B$, а значит, $i \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$. Итак, $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$. Следовательно, φ – изоморфизм. □

3. Решётка квазипорядков конечной цепи

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, у нас X будет обозначать конечную цепь $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ с операциями $x \wedge y = \min\{x, y\}$ и $x \vee y = \max\{x, y\}$, а $\preccurlyeq$ – некоторый

квазипорядок на X. Обычные отношения обозначаются $\leqslant, \geqslant, <$ и $>$. Соотношение $x \succcurlyeq y$ – то же самое, что $y \preccurlyeq x$. Хорошо известно, что для всякого квазипорядка $\preccurlyeq$ отношение $\sim$, определённое правилом

$$x \sim y \leftrightarrow x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x,$$

является отношением эквивалентности, а на фактор-множестве $X/\sim$ квазипорядок $\preccurlyeq$ индуцирует частичный порядок.

Квазипорядок $\preccurlyeq$, как и всякое бинарное отношение, определяет на множестве X ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества X, а рёбрами – пары (x, y) такие, что $x \preccurlyeq y$. Компоненты сильной связности этого графа, очевидно, совпадают с классами отношения $\sim$. Компоненту сильной связности, содержащую элемент $x \in X$, будем обозначать $\overline{x}$. Мы пишем $\overline{x} \prec \overline{y}$, если $\overline{x} \preccurlyeq \overline{y}$ и $\overline{x} \neq \overline{y}$. Для элементов $x, y \in X$ пишем $x \prec y$, если $\overline{x} \prec \overline{y}$ (т.е. $x \preccurlyeq y$ и $x \not\sim y$). Аналогичные соглашения примем для символов $\succ$ и $\succcurlyeq$.

Для $x, y \in X$ полагаем $[x, y] = \{t | x \leqslant t \leqslant y\}$. Очевидно, $[x, y] = \emptyset$ при $x > y$. Положим $\langle x, y\rangle = [x, y] \cup [y, x]$ для любых $x, y \in X$. Подмножество $A \subseteq X$ назовём *выпуклым*, если $\langle x, y\rangle \subseteq A$ при $x, y \in A$.

Отметим, что ввиду леммы 1 квазипорядок, стабильный относительно операции $\wedge$, – это в точности такой, который удовлетворяет условию

$$\forall x, y, z \in X \ x \preccurlyeq y \to x \wedge z \preccurlyeq y \wedge z,$$

а стабильность относительно операции $\vee$ равносильна условию

$$\forall x, y, z \in X \ x \preccurlyeq y \to x \vee z \preccurlyeq y \vee z.$$

Лемма 3. *Пусть X – конечная цепь, $\preccurlyeq$ – квазипорядок на X и пусть элементы $x, y, t \in X$ таковы, что $x < t < y$ и $x \preccurlyeq y$. Тогда:*

(i) если $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\wedge$, то $x \preccurlyeq t$;

(ii) если $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\vee$, то $t \preccurlyeq y$.

Доказательство. Пусть $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\wedge$. Тогда из $x \preccurlyeq y$ следует, что $x \wedge t \preccurlyeq y \wedge t$, т.е. $x \preccurlyeq t$. Тем самым доказано (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично. □

Так же, как лемма 3, доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть X – конечная цепь, элементы $x, y, t \in X$ таковы, что $x < t < y$, и $x \preccurlyeq y$ – квазипорядок, стабильный относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ на X. Тогда верны следующие импликации:*

(i) $x \preccurlyeq y \to x \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq y$;

(ii) $y \preccurlyeq x \to y \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq x$.

Из леммы 4 и транзитивности отношения $\preccurlyeq$ непосредственно получается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть квазипорядок $\preccurlyeq$ стабилен относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ конечной цепи X. Тогда при $x < t < y$ верны следующие эквивалентности:*

(i) $x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq y$;

(ii) $y \preccurlyeq x \leftrightarrow y \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq x$.

Теперь мы готовы доказать важное свойство компонент сильной и слабой связности графа, соответствующего квазипорядку $\preccurlyeq$ на конечной цепи.

Лемма 6. *Если квазипорядок $\preccurlyeq$ на конечной цепи X стабилен относительно какой-либо из операций $\wedge, \vee$, то компоненты сильной связности и компоненты слабой связности являются выпуклыми множествами.*

Доказательство. Будем считать, что $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\wedge$ (случай, когда $\preccurlyeq$ стабилен относительно $\vee$, разбирается аналогично). Докажем вначале выпуклость сильных компонент. Пусть x, y в одной компоненте сильной связности и $x < t < y$. Из неравенства $x \preccurlyeq y$ следует, что $x \wedge t \preccurlyeq y \wedge t$, т.е. $x \preccurlyeq t$. Аналогичным образом, умножив неравенство $y \preccurlyeq x$ на t, получим $y \wedge t \preccurlyeq x \wedge t$, т.е. $t \preccurlyeq x$. Таким образом, $t \sim x$.

Теперь докажем выпуклость слабых компонент. Пусть K – компонента слабой связности. Если $x, y \in K$, то существуют элементы $u_1, u_2, \ldots, u_{2k} \in X$ такие, что

$$x \preccurlyeq u_1 \succcurlyeq u_2 \preccurlyeq \ldots \succcurlyeq u_{2k} \preccurlyeq y.$$

Очевидно, $u_1, u_2, \ldots, u_{2k} \in K$. Положим $u_0 = x$, $u_{2k+1} = y$. Из леммы 3(i) следует, что $\langle u_i, u_{i+1}\rangle \subseteq K$ при всех i. Отсюда получаем, что $\langle x, y\rangle \subseteq \bigcup_{i=0}^{2k} \langle u_i, u_{i+1}\rangle \subseteq K$. Это означает выпуклость множества K. $\square$

Доказанные леммы позволяют получить полное представление о строении квазипорядка, стабильного относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ конечной цепи $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Опишем это строение. Сначала разобьём X произвольным образом на выпуклые подмножества (это будут компоненты слабой связности): $X = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m$, где $K_1 = \{1, 2, \ldots, i_1\}$, $K_2 = \{i_1 + 1, i_1 + 2, \ldots, i_2\}$, ..., $K_m = \{i_{m-1} + 1, i_{m-1} + 2, \ldots, n\}$ и предполагается, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Каждую слабую компоненту K_j разобьём на выпуклые подмножества, которые потом окажутся сильными компонентами. Элементы цепи X будем рассматривать как точки на числовой прямой. Точку i соединяем с точкой $i + 1$ символом $\sim$, если i и $i + 1$ прринадлежат одной сильной компоненте. Далее, между i и $i + 1$ пишем $\rightarrow$, если $i \prec i + 1$, и символ $\leftarrow$, если $i \succ i+1$. Наконец, между i и $i+1$ пишем $\Diamond$, если i и $i+1$ не лежат в одной слабой компоненте. Таким образом, квазипорядку, стабильному относительно обеих операций цепи, соответствует строка длины $n-1$, составленная из букв алфавита $\mathcal{A} = \{\sim, \rightarrow, \leftarrow, \Diamond\}$. Нетрудно видеть, что верно и обратное: каждое слово длины $n - 1$ из букв алфавита $\mathcal{A}$ определяет квазипорядок, стабильный относительно операций цепи, т.е. соответствие между квазипорядками и словами взаимно однозначное. Сформулируем этот факт в виде следующего утверждения.

Proposition 1. *Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ – конечная цепь. Тогда между квазипорядками на X, стабильными относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X, и словами длины $n-1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\sim, \rightarrow, \leftarrow, \Diamond\}$ имеется взаимно однозначное соответствие.*

Следствие 1. *Если X – цепь из n элементов, то решётка $QordX$ квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X, состоит из 4^{n-1} элементов.*

Приведём пример, иллюстрирующий предложение 1. Пусть $n = 10$. Рассмотрим слово $w = \sim\rightarrow\rightarrow\sim\leftarrow\rightarrow \Diamond \rightarrow\leftarrow$. Ему соответствует квазипорядок, изображённый на рисунке 1.

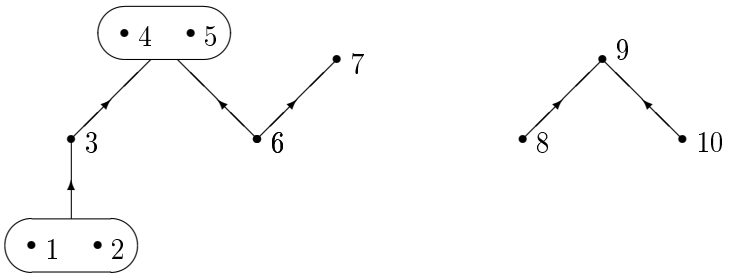


Рис. 1: Квазипорядок на конечной цепи

Введём следующие квазипорядки на множестве $X = \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\kappa_i = \{(i, i + 1)\} \cup \Delta_X, \quad \kappa_i' = \{(i + 1, i)\} \cup \Delta_X$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Нетрудно проверить, что κ_i, κ_i' – квазипорядки, стабильные относительно операций $\wedge$ и $\vee$, т.е. $\kappa_i, \kappa_i' \in \mathrm{Qord}X$. Ясно также, что κ_i, κ_i' являются атомами решётки $\mathrm{Qord}X$. Докажем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 1. *Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка $\mathrm{Qord}X$ всех квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$, является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Атомами этого булеана являются квазипорядки $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$, $\kappa_1', \ldots, \kappa_{n-1}'$.*

Доказательство. Множество $A = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}, \kappa_1', \ldots, \kappa_{n-1}'\}$ содержит ровно $2n-2$ элемента, поэтому всевозможных супремумов элементов из A не более 2^{2n-2} штук (здесь Δ_X рассматривается как супремум пустого множества элементов из A). А наша решётка $\mathrm{Qord}X$, как показывает следствие 1, имеет ровно 2^{2n-2} элемента. Следовательно, если мы покажем, что каждый квазипорядок из $\mathrm{Qord}X$ является супремумом элементов из A, то будет доказана единственность представления элемента из $\mathrm{Qord}X$ в виде супремума элементов из A, и, применив лемму 2, мы получим утверждение нашей теоремы.

Итак, осталось доказать, что супремумы элементов из A – это вся решётка $\mathrm{Qord}X$. Возьмём произвольный элемент κ из $\mathrm{Qord}X$. Ранее мы квазипорядок обозначали символом $\preccurlyeq$, теперь он обозначен буквой через κ. Так что записи $x\,\kappa\,y$, $(x, y) \in \kappa$ и $x \preccurlyeq y$ равносильны. Рассмотрим следующий квазипорядок из $\mathrm{Qord}X$:

$$\tilde{\kappa} = \bigvee\{\kappa_i | i \preccurlyeq i+1\} \vee \bigvee\{\kappa_j' | j+1 \preccurlyeq j\}. \tag{1}$$

Нам достаточно доказать, что $\tilde{\kappa} = \kappa$. Включение $\tilde{\kappa} \subseteq \kappa$ очевидно. Пусть $(i, j) \in \kappa$. Разберём два случая.

1-й случай: $i \leqslant j$. Тогда по лемме 5(i) $(i, i+1), (i+1, i+2), \ldots, (j-1, j) \in \kappa$. Из (1) видно, что $(i, i+1), \ldots, (j-1, j) \in \tilde{\kappa}$. Ввиду транзитивности отношения $\tilde{\kappa}$ получаем: $(i, j) \in \tilde{\kappa}$.

2-й случай: $j \leqslant i$. Этот случай разбирается аналогично, с использованием леммы 5(ii).

Следовательно, $\kappa \subseteq \tilde{\kappa}$. Отсюда получаем требуемое: $\kappa = \tilde{\kappa}$, а значит, κ – супремум элементов множества A. □

Замечание 1. *Если цепь $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ рассматривать относительно только одной из операций $\wedge$, $\vee$, то решётка квазипорядков, стабильных относительно выбранной операции, уже не будет булеаном. Она даже не модулярна, как показывает следующий пример 3-элементной цепи. Пусть $\rho_1 = \{(1, 2)\} \cup \Delta_X$, $\rho_2 = \{(1, 2), (1, 3)\} \cup \Delta_X$, $\sigma = \{(2, 3)\} \cup \Delta_X$, $\tau = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \cup \Delta_X$. Нетрудно видеть, что все эти квазипорядки (они являются даже порядками) стабильны относительно операции $\wedge$, ρ_2 не является стабильным относительно $\vee$. При этом $\rho_1 \subset \rho_2$, $\rho_1 \wedge \sigma = \rho_2 \wedge \sigma = \Delta_X$ и $\rho_1 \vee \sigma = \rho_2 \vee \sigma = \tau$.*

Теперь скажем несколько слов о решётке конгруэнций. Решёткам конгруэнций различных алгебраических систем посвящено весьма значительное число работ. Отметим лишь некоторые из них. Тождества в решётке конгруэнций изучались в монографии [9], обзорная статья Г.Митча [10] посвящена конгруэнциям полугрупп, статьи [11], [12] – конгруэнциям полурешёток, глава 3 моногорафии [6] – конгруэнциям решёток. Так как конечная цепь $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ является модулярной решёткой (даже дистрибутивной), то тот факт, что $\mathrm{Con}X$ – булеан, следует из результатов главы 3 в [6]. В нашем случае цепи X из n элементов в свете леммы 6 и теоремы 1 строение решётки $\mathrm{Con}X$ довольно ясно: каждая конгруэнция – это разбиение цепи X на выпуклые подмножества. Очевидно, таких разбиений ровно 2^{n-1}. Решётка $\mathrm{Con}X$ – это булеан с атомами $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, где $\theta_i = \{(i, i+1), (i+1, i)\} \cup \Delta_X$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

4. Решётка топологий конечной цепи

Перейдём теперь к топологиям конечной цепи $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Цепь X мы рассматриваем как топологическую решётку с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Однако, связи этих операций друг с другом нами использоваться не будут, достаточно будет считать X топологической полугруппой относительно каждой из операций $\wedge$, $\vee$. Одной из этих операций будет недостаточно – см. замечание 3 ниже. Во введении уже говорилось, что решётка $\mathrm{Qord}X$ изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке $\mathrm{Top}X$, а так как множество X конечно и $\mathrm{Qord}X$ – булеан, то имеет место изоморфизм: $\mathrm{Top}X \cong \mathrm{Qord}X$ (здесь мы воспользовались тем, что булеан двойственен самому себе). Очевидно, решётка, двойственная булеану, сама является булеаном. Следовательно, на основании вышеизложенного, а также теоремы 1 мы можем заключить, что решётка $\mathrm{Top}X$ является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Дальнейшие наши рассуждения направлены на то, чтобы получить более наглядное представление о топологиях конечной цепи.

Пусть X – произвольное множество, необязательно конечное, необязательно упорядоченное. Предположим, что на множестве X задана бинарная операция $*$. Непрерывность этой операции означает, что для любых $x, y, z \in X$, где $x * y = z$, и любой окрестности $U(z)$ точки z существуют окрестности $U_1(x)$ и $U_2(y)$ точек x и y такие, что

$$U_1(x) * U_2(y) \subseteq U(z). \tag{2}$$

Далее, для каждого подмножества $A \subseteq X$ множество $\tau_A = \{\emptyset, A, X\}$ является топологией на X. Будем считать, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq X$. Тогда τ_A – атом решётки топологий (всех топологий, не только согласующихся с операциями). Понятно, что если на множестве X заданы алгебраические операции и топология τ_A согласована с этими операциями, то она будет также атомом в решётке тех топологий, которые согласованы с операциями. Выясним, какие из топологий τ_A согласуются с операцией $\wedge$ на конечной цепи $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ответ даст следующая лемма.

Лемма 7. *Топология $\tau_A = \{\varnothing, A, X\}$ где $A \neq \emptyset, X$, согласуется с операцией $\vee$ на конечной цепи X в том и только в том случае, если A выпукло и ровно один из элементов 1, n принадлежит A.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть τ_A согласуется с операцией $\vee$. Докажем вначале, что A выпукло. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие $x, y, z \in X$, что $x < y < z$ и при этом $x, z \in A$, $y \notin A$. Имеем: $y \vee z = z$. Возьмём в качестве окрестности $U(z)$ множество A. Ввиду (2) $U_1(y) \vee U_2(z) \subseteq A$ при некоторых U_1, U_2. Единственное открытое множество, содержащее y, – это X. Поэтому $X \vee U_2(z) \subseteq A$. Но $X \vee B = X$ при любом $B \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что A выпукло.

Ввиду выпуклости A и того, что $A \neq \emptyset$, элементы 1 и n одновременно принадлежать множеству A не могут. Осталось доказать, что $\{1, n\} \cap A \neq \emptyset$. Предположим, что это не так. Тогда $1, n \notin A$. Возьмём любой элемент $a \in A$. Так как $1 \vee a = a$, то ввиду (2) найдутся такие окрестности $U_1(1), U_2(a)$, что $U_1(1) \vee U_2(a) \subseteq A$. Очевидно, $U_1(1) = X$, а $U_2(a) = A$ или X. Отсюда $X \vee A \subseteq A$. Но это невозможно, так как $n \notin A$.

Достаточность. Пусть A выпукло и $|\{1, n\} \cap A| = 1$. Докажем, что операция $\vee$ непрерывна в топологии $\tau_A = \{\varnothing,\ A, X\}$.

1-й случай: $1 \in A$. Тогда $n \notin A$. Пусть $x, y \in X$. Без ограничения общности можно считать, что $x \leq y$. Если $y \notin A$, то $U(y) = X$, и мы имеем включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ при любых $U_1,\ U_2$. Если $y \in A$, то $U(y)$ равно A или X. При $U(y) = X$ включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ верно при любых $U_1,\ U_2$. При $U(y) = A$ можно взять $U_1(x) = U_2(y) = A$ (действительно, из выпуклости множества A ввиду того, что $1 \in A$ и $x \leqslant y$, следует, что $x \in A$). Тогда получим $A \vee A \subseteq A$, что является верным соотношением.

2-й случай: $n \in A$. Тогда $1 \notin A$. Возьмём любые $x, y \in X$. Можно считать, что $x \leq y$. При $y \notin A$ мы имеем $U(y) = X$, и включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ выполняется при любых U_1, U_2. При $y \in A$ возьмём $U_2(y) = A$. Тогда получим: $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq X \vee A = A \subseteq U(y)$. □

Замечание 2. *Утверждение леммы не изменится, если вместо непрерывности операции $\vee$ потребовать непрерывность операции $\wedge$ или непрерывность обеих операций.*

Теперь докажем теорему, дающую полное описание решётки топологий конечной цепи.

Теорема 2. *Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка $\mathrm{Top}X$ всех топологий, относительно которых операции $\wedge = \min$ и $\vee = \max$ непрерывны, является булеаном из 2^{2n-2} элементов, атомами которого являются топологии, определённые по формулам (3).*

Доказательство. Как было показано в начале этого раздела, решётка $\mathrm{Top}X$ является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Докажем, что топологии, получающиеся по формулам (4), – это вся решётка $\mathrm{Top}X$ (при этом мы считаем, конечно, что нулевой элемент Δ_X решётки $\mathrm{Top}X$ получается по формулам (4) при $k = l = 0$). Далее, топологии $\tau_1, \ldots, \tau_n'$ из формулы (3) являются атомами решётки $\mathrm{Top}X$, их ровно $2n - 2$ штук. Очевидно, в каждом булеане, даже бесконечном, любой элемент представим единственным образом в виде супремума атомов. Следовательно, формулы (4) нам дают всю решётку $\mathrm{Top}X$. □

Замечание 3. *Теорема неверна для решётки топологий цепи X, в которых непрерывна лишь одна из операций $\wedge, \vee$ (см. замечание 1). Можно указать топологию на 3-элементном множестве, в которой операция $\wedge$ непрерывна, а операция $\vee$ нет: это $\tau = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 3\}, X\}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steiner A. K. The lattice of topologies: structure and complementation // Trans. Amer. Math. Soc..1966. Vol. 122, №2. P. 379-398.
2. Radeleczki S. The automorphism group of unary algebras // Mathematica Pannonica. 1996. Vol. 7, №2. P. 253-271.
3. Карташова А. В. О решётках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Vol. 14, №5. P.85-92.
4. Баранский В. А.. О независимости свойств групп автоморфизмов от свойств других производных структур // Известия вузов. Математика. 1986. №3. P.17-22.
5. Клиффорд А.,Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, тт. 1,2 // М., Мир. 1972.
6. Гретцер Г. Общая теория решёток // М., Мир. 1982.
7. Дехтярь М. И., Дудаков С. М., Карлов Б. Н. Лекции по дискретной математике : Учебник. — Издание второе, переработанное и дополненное // Тверь, Тверской гос. ун-т.2019.
8. Энгелькинг Р. Общая топология // М., Мир. 1986.
9. Kearnes K. A.,Kiss T. W. The sharp of congruence lattices // Memoirs of the AMS. 2013. Vol. 222, №1046. P. 1-169.
10. Mitsch H. Semigroups and their lattices of congruences// Semigroup Forum. 1983. Vol. 26, №1. P. 1-63.

11. Freese R. S., Nation J. B. Congruence lattices of semilattices // Pacif. J. Math..1973. Vol. 49, №1. P. 51-58.

12. Адаричева К. В. Строение решеток конгруэнций конечных полурешеток // Алгебра и логика.1996. Vol. 35, №1. P. 3-30.

REFERENCES

1. Steiner, A. K. 1966, "The lattice of topologies: structure and complementation", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 122, no. 2, pp. 379-398.

2. Radeleczki, S., 1996, "The automorphism group of unary algebras", *Mathematica Pannonica.*, vol. 7, no. 2, pp. 253-271.

3. Kartashova, A. V. "On quasiorder lattices and topology lattices of algebras", J. Math. Sci., 163:6 (2009), pp. 682–687.

4. Baranskii V. A. "Independence of groups of automorphisms and retracts for semigroups and lattices", Soviet Math. (Iz. VUZ), 30:2 (1986), 70–73. ‘

5. Clifford, A. H., Preston, G. B. "The algebraic theory of semigroups". Vol. 1 and vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).

6. Grätzer, G. "General lattice theory". 2nd Ed. Springer, Birkhäuser Verlag. Berlin, 2003, xx + 663 pp.

7. Dekhtyar, M. I., Dudakov, S. M., Karlov, B. N., 2019, "Lectures on discrete mathematics: Textbook". - Second edition, revised and expanded, *Tver, Tver State Univ.*.

8. Engelking, R. "General topology", Pafistwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977, 2nd Ed., 1985 (Monografie Matematiczne, tom 60).

9. Kearnes, K. A., Kiss T. W., 2013, "The sharp of congruence lattices", *Memoirs of the AMS.*, vol. 222, no. 1046, pp. 1-169.

10. Mitsch, H.,1983, "Semigroups and their lattices of congruences", *Semigroup Forum.*, vol. 26, no. 1, pp. 1-63.

11. Freese, R. S., Nation J. B.,1973, "Congruence lattices of semilattices", *Pacif. J. Math.*, vol. 49, no. 1, pp. 51-58.

12. Adaricheva, K. V., 1996, "The structure of congruence lattices of finite semilattices", Algebra Logika, 35:1 (1996), 3–30.

Получено: 17.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 519.651 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-22-32

Об одном обобщённом интерполяционном полиномиальном операторе[1]

А. Ф. Галимянов, Т. Ю. Горская

Галимянов Анис Фуатович — кандидат физико-математических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).
e-mail: anis_59@mail.ru
Горская Татьяна Юрьевна —кандидат технических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет (г. Казань).
e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается построение обобщённого полиномиального оператора, необходимого для нахождения приближённого решения уравнений с дробным порядком интегрирования. Интегральные уравнения дробного порядка используются в ряде задач, связанных с исследованием процессов, которые ведут себя скачкообразно, например, для задач диффузии, экономических задач, связанных с теорией устойчивого развития и других подобных задач. В настоящее время возрос интерес к подобным уравнениям, о чем говорят публикации последних лет, в которых исследуются процессы, описываемые с помощью таких уравнений. В связи с этим становится актуальным изучение методов решения подобных задач. Так как эти уравнения точно не решаются, возникает необходимость в разработке и применении приближённых методов их решения. В статье получен вид полиномиального оператора для некоторых непрерывных на $(0, 2\pi)$ функций, выраженный через интерполяционный полином Лагранжа по равноотстающим узлам. Также установлена связь обобщённого интерполяционного оператора с оператором Фурье, получена величина близости этих операторов. Для интерполяционного полиномиального оператора найдена оценка погрешности приближения точного значения по метрике пространства непрерывных на $(0, 2\pi)$ функций. Данная работа является продолжением исследований авторов.

Ключевые слова: приближённые методы, интерполяционные полиномиальные операторы, оценка погрешности.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
А. Ф. Галимянов, Т. Ю. Горская. Об одном обобщённом интерполяционном полиномиальном операторе // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 22–32.

[1]Исследование выполнено в КФУ и КГАСУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 519.651 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-22-32

On one generalized interpolation polynomial operator

A. F. Galimyanov, T. Y. Gorskaya

Galimyanov Anis Fuatovich — candidate of physical and mathematal sciences, Kazan (Volga) Federal University (Kazan).
e-mail: anis_59@mail.ru
Gorskaya Tatyana Yur'evna candidate of technical sciences, Kazan State University of Architecture and Engineering (Kazan).
e-mail: gorskaya0304@mail.ru

Abstract

The article deals with the construction of a generalized polynomial operator necessary for finding approximate solutions of equations with fractional order of integration. Integral equations of fractional order are used in a number of problems related to the study of processes that behave discontinuously, for example, for diffusion problems, economic problems related to the theory of sustainable development and other similar problems. At present, interest in such equations has increased, as evidenced by the publications of recent years in which the processes described by such equations are investigated. In this connection, it becomes relevant to study methods for solving such problems. Since these equations cannot be solved exactly, there is a need to develop and apply approximate methods for their solution. In this article we obtain a form of polynomial operator for some continuous functions on $(0, 2\pi)$ expressed through the Lagrange interpolation polynomial on equally spaced knots. The connection of the generalized interpolation operator with the Fourier operator is also established, and the closeness value of these operators is obtained. For the interpolation polynomial operator an estimate of the error of approximation of the exact value by the metric of the space of $(0, 2\pi)$ continuous functions is found. This work is a continuation of the research of the authors.

Keywords: approximate methods, interpolation polynomial operators, error estimation.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. F. Galimyanov, T. Y. Gorskaya, 2023, "On one generalized interpolation polynomial operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 22–32.

1. Введение

В настоящее время возрос интерес к уравнениям с дробно-интегральными операторами, поскольку такие уравнения находят своё применение в ряде теоретических и прикладных задач, связанных с исследованием и построением моделей для задач диффузии, электрохимических процессов, а также экономических процессов, связанных с теорией устойчивого развития. Задачи с операторами дробного интегрирования и дифференцирования как правило, точно не решаются, поэтому возникает необходимость в разработке, обосновании применения приближённых методов решения для этих уравнений. Отметим, что существуют научные публикации, отражающие подобные исследования, приведем обзор некоторых работ. Так, в работах [1] -[3] предложены численные методы для некоторых классов таких уравнений, например,

авторами [1] разработан комплект Fractional Integration Toolbox (FIT), который эффективно выполняет дробное численное интегрирование, работа носит прикладной характер, а в работе [2] были проведены теоретические изучением интегро-дифференциальных уравнений, для частного случая был построен функционал Ляпунова, дающий качественные свойства решений. В диссертации Тарасова В.И. [4] предложены модели для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка, решение которых составляет отдельное исследование, что еще раз говорит об актуальности исследований, связанных с обоснованием применений и поиском аппаратов приближения для решения таких уравнений. Нами также проводились исследования, основанные на известных методологических подходах для решения задач приближения для уравнений с интегралами дробного порядка, сначала проекционно-сеточными методами [5], затем по построению квадратурных формул для интегралов [6]–[8]. В работе [9] авторы для нахождения приближенного решения задачи управления на базе интегральных уравнений дробного порядка сводят задачу дробного оптимального управления в эквивалентную вариационную задачу, которая может быть сведена к задаче, состоящей из решения система алгебраических уравнений с использованием квадратурной формулы Лежандра-Гаусса с методом Рэлея-Ритца, результаты согласуются с тестовыми примерами других авторов. Теоретическим обоснования существования решения ряда обобщённых задач с использованием интегралов дробного порядка посвящены следующие работы, например, для приближенного решения задач затухания для семейство специальных функций с заметными свойствами дробного исчисления в пространствах Соболева авторами [10] получены оптимальные оценки погрешности полиномиальных приближений Чебышева, как следствие,получены оптимальные оценки погрешности для спектральных разложений и связанной с ними чебышевской интерполяции и квадратуры, измеренных в различных нормах. Авторами [11] получены оценки дробных интегральных операторов для различных дробных видов интегралов. В работе [12] теоретически обоснованы решения некоторых обобщённых краевых задач Римана-Лиувиля, определены существование и единственность их решений. В статьях [13],[14] получены некоторые новые обобщённые дробные интегральные неравенства типа средней точки и трапеции для дважды дифференцируемых выпуклых функций [13], для выпуклых функций в[14]. Изучению некоторых новых неравенств для класса дифференцируемых функций, связанных с функционалами Чебышева, обобщенного взвешенного дробного интеграла посвящена работа [15]. Кроме научных работ, носящих прикладной характер, имеются и чисто теоретические исследования, так, в работе [16] авторы установили некоторые обобщенные дробные интегральные неравенства Райна с использованием выпуклой функции по координатам. Для некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка возможно, в частности, найти интегральное преобразование, облегчающее процесс поиска решения, например, в работе [17] найдено интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка. Аппроксимационный аппарат, использующий тригонометрические полиномы, в частности суммы Фурье, также используется в работе [18], применяемый для диофантовых приближений. Анализируя географию публикаций, видно, что исследования в этом направлении ведутся в всем мире, и в основном связаны с решениями частных задач, как прикладных, так и теоретических.

Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остаётся открытым вопрос теоретического обоснования применения приближённых методов для более общего класса подобных задач, в настоящей работе построен интерполяционный оператор для аппроксимации дробных интегралов, использующихся в математических моделях широкого класса задач.

2. Основные результаты

Построение обобщённого полиномиального оператора A_n. Обозначим через

$$H_n^T = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right\} = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right\}$$

– множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Обозначим через A_n линейный оператор, ставящий в соответствие каждой $\varphi(t) \in C_{2\pi}$ полином $T_n(t) \in H_n^T$, удовлетворяющим условиям

$$I_{\mp}^{\alpha}(T_n)(t_k) = I_{\mp}^{\alpha}(\varphi)(t_k), k = \overline{-n, n}, \tag{1}$$

где за t_k возьмём равноотстоящие узлы $t_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{-n, n}$.

Будем рассматривать класс функций $\varphi(t) \in H_n^T$, таких, что свободный член $c_0 = 0$.

Исследуем A_n, для этого напомним, что $I_{\mp}^{\alpha}(\varphi; t) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}}$ – оператор дробного интегрирования Вейля.

Положим $A_n(\varphi; t) = I^{\alpha}(\varphi; t) = \varphi_n(t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k(\varphi_n) e^{ikt}$, где $c_k(\varphi_n)$ – комплексные коэффициенты Фурье $\varphi_n(t)$. Тогда имеем:

$$\sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi_n) e^{ikt_j}}{(\pm ik)^{\alpha}} = I_{n\mp}^{\alpha}(\varphi)(t_j), t_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, j = \overline{-n, n}.$$

Остановимся подробнее для определённости на "левостороннем"дробном интеграле

$$I_{+}^{\alpha}(\varphi; t) = I^{\alpha}(\varphi; t),$$

заметим, что $\Psi_{-}^{\alpha} = \Psi_{+}^{\alpha}$.

Справедлива следующая

Теорема 1 Полиномиальный оператор $A_n(\varphi; t)$ представим в виде

$$A_n(\varphi; t) = \frac{d^{\alpha}}{dt}(L_n(z; t)), \tag{2}$$

где $L_n(z; t)$ – интерполяционный полином Лагранжа по узлам t_{-n},...,t_n для функции $z(t) = I^{\alpha}(\varphi; t), \phi(t) \in C(0, 2\pi)$.

Доказательство. Пусть A_n представимо в виде (2). Полиномиальный оператор удовлетворяет условию (1), следовательно,

$$I^{\alpha}\left(\frac{d^{\alpha}}{dt}[L_n(I^{\alpha}(\varphi; t))]\right)(t_k) = I^{\alpha}(\varphi; t_k), t_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{-n, n}.$$

Рассмотрим представление $A_n(\varphi; t)$: при $c_0 = 0 \quad T_n(\varphi; t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k e^{ikt}$, тогда

$$I^{\alpha}(T_n) = \sum_{|l|=1}^{n} \frac{c_l e^{ilt}}{(il)^{\alpha}}.$$

Видно, что $L_n(z; t) = L_n[I_{+}^{\alpha}(\varphi; t)] = I^{\alpha}(T_n; t)$.

Тогда $L_n(z; t) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k e^{ikt}}{(ik)^{\alpha}}$, по определению $\frac{d^{\alpha}x}{dt}(t) = D^{\alpha}(x; t) = \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^{\alpha} c_k(x) e^{ikt}$.

Следовательно,

$$D^{\alpha}(L_n(z; t)) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{(ik)^{\alpha} c_k e^{ikt}}{(ik)^{\alpha}} = T_n(\varphi; t).$$

Утверждение теоремы полностью доказано.

Найдем вид полиномиального оператора A_n. Положим, что выполняемся

$$z(t_j) = T_n(z;t_j) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi)e^{ikt_j}}{(ik)^\alpha}, j = \overline{-n,n}.$$

$T_n(z;t)$ – многочлен степени n.

$$T_n(z;t) = L_n(z;t), \tag{3}$$

где $L_n(z;t)$ – интерполяционный полином Лагранжа n–й степени для функций $z(t)$ по узлам $t_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, j = \overline{-n,n}$. При этом $c_0 = 0$.

Запишем полином Лагранжа в комплексной форме

$$L_n(z;t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j},$$

из (3) получим

$$\sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi)e^{ikt}}{(ik)^\alpha} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j}.$$

Отсюда находим коэффициенты

$$c_k = \frac{(ik)^\alpha}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j}, k = \overline{-n,n}.$$

Подставляя их в искомый полином $T_n(\varphi;t)$, имеем

$$T_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{|k|=1}^{n} e^{ikt} \frac{(ik)^\alpha}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}.$$

То есть

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}. \tag{4}$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2 Линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in C_{2\pi}$ полином $T_n(t) \in H_n^T$ и удовлетворяющий условиям (1), имеет вид

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}.$$

Если учесть, что в (4) $(ik)^\alpha = k^\alpha e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$, то полином $A_n(\varphi;t)$ можно записать в виде

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (k)^\alpha e^{i[k(t-t_j)+\frac{\pi}{2}\alpha]}.$$

Получим формулу

$$A_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha c_k^{(n)} \left(I^\alpha(\varphi;t)\right) e^{ikt}.$$

Поскольку $I^\alpha(\varphi;t)=z(t)$, то

$$c_m(z)=\frac{c_m(D^\alpha(z))}{(im)^\alpha}=\frac{c_m(\varphi)}{(im)^\alpha}, z(const)=0, m\neq 0.$$

$$c_k^{(n)}(z)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}e^{-ikt_j}\sum_{|m|=1}^{n}c_m(z)e^{-imt_j}=\sum_{|\mu|=1}^{\infty}c_{k+\mu(2n+1)}(z)=\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha}.$$

Подставив $c_k^{(n)}(z)$ в $A_n(\varphi;t)$, получим

$$A_n(\varphi;t)=\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^\alpha\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha}e^{ikt}=$$

$$=\sum_{|k|=1}^{n}e^{ikt}(ik)^\alpha\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi). \tag{5}$$

формулу (4)можно также записать в другом виде, учитывая, что комплексные числа представимы в тригонометрической форме, $e^{ik(t-t_j)}=\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)$, учитывая, что при $k=0\ \ (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}=0$, последовательно преобразуем:

$$\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}=\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^\alpha\left[\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(ik)^\alpha\left[\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)+\cos(-k)(t-t_j)+i\sin(-k)(t-t_j)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(ik)^\alpha 2\cos k(t-t_j).$$

С учётом этого преобразования имеем другое представление полинома $A_n(\varphi;t)$ формулы (4) в виде:

$$A_n(\varphi;t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}I^\alpha(\varphi;t_j)\sum_{k=1}^{n}(ik)^\alpha\cos k(t-t_j).$$

Очевидно, что по построению этот полином является интерполяционным полиномом степени не выше n.

Далее рассмотрим связь обобщённого интерполяционного оператора A_n с оператором Фурье S_n.

$$S_n(\varphi;t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t-x)\varphi(x)dx, \tag{6}$$

где $D_n(t)=\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ – ядро Дирихле, $c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikt}dt$.

Справедлива следующая

Теорема 3 Для любой функции $\varphi(t)\in C_{2\pi}$ справедлива формула

$$A_n(\varphi;t)-S_n(\varphi;t)=\sum_{|k|=1}^{n}e^{ikt}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi), \tag{7}$$

причём ряд (7) сходится в среднем.

Доказательство. Для любой функции $\varphi(t) \in C_{2\pi}$, имеющей производную порядка α, справедливо

$$\frac{d^\alpha}{dt} S_n(\varphi(x);t) = S_n\left\{\frac{d^\alpha}{dx}\varphi(x);t\right\}.$$

$$S_n\varphi - A_n\varphi = \frac{d^\alpha}{dt}\left[S_n(z_0;t) - L_n(z_0;t)\right].$$

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) - c_0(\varphi),$$

$$z_0(t) = I^\alpha(\varphi_0;t), \varphi \in C_{2\pi}.$$

$$S_n(z_0;t) - L_n(z_0;t) = \sum_{k=-n}^{n} (c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0))e^{ikt}.$$

$$S_n(\varphi_0;t) - A_n(\varphi_0;t) = \sum_{k=-n}^{n} (ik)^\alpha (c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0))e^{ikt}.$$

$$\varphi_0(t) = \frac{d^\alpha}{dt} z_0(t).$$

$$c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0) = c_k(z_0) - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{k+\mu(2n+1)}(z_0) =$$

$$= -\sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_{k+\mu(2n+1)}(z_0) = -\sum_{|\mu|=1}^{\infty} \frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha}.$$

$$A_n(\varphi;t) - S_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha} e^{ikt} =$$

$$= \sum_{|k|=1}^{n} \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha e^{ikt} c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi).$$

Скорость сходимости построенного интерполяционного полинома A_n устанавливает следующая

Теорема 4 $A_n(\varphi;t) \forall \varphi(t) \in C_{2\pi}$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ сходится со скоростью

$$E_n^T(\varphi)_c \le \|\varphi - A_n\varphi\|_C \le \sqrt{1+\sigma_n^2} E_n^T(\varphi)_c,$$

$$\sigma_n^2 = \max \sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}.$$

Доказательство. В силу (5),(7) имеем для $\forall \varphi(t) \in C_{2\pi}$

$$\varphi - A_n\varphi = (\varphi - S_n) + (S_n\varphi - A_n\varphi) = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} c_k(\varphi)e^{ikt} - \sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{\infty} \left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi).$$

Так как $S_n\varphi - A_n\varphi \in H_n^T, \varphi - S_n\varphi \notin H_n^T$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$(\varphi - S_n\varphi, S_n\varphi - A_n\varphi) = 0, \varphi \in C_{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\|\varphi - A_n\varphi\|_C^2 = \|\varphi - S_n\varphi\|_C^2 + \|S_n\varphi - A_n\varphi\|_C^2 = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(\varphi)|^2 +$$

$$+\sum_{|k|=1}^{n}\left|\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^{\alpha}c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\leq\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2+$$

$$+\sum_{|k|=1}^{n}\left\{\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\right\}\leq\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2+$$

$$+\sigma_n^2\sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\leq$$

$$\leq(1+\sigma_n^2)\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2=(1+\sigma_n^2)\left\{E_n^T(\varphi)_C\right\}^2,\varphi\in C_{2\pi},$$

где за σ_n^2 обозначили следующую сумму:

$$\sigma_n^2=\max\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}.$$

3. Заключение

В заключении можно отметить, что актуальность исследований интегральных уравнений дробных порядков обусловлена их широким применением в технике, экономике и в других прикладных областях. Несмотря на исследования, проводимые для уравнений с такими операторами, следует отметить, что исследователи, как правило, решают частные случаи задач с использованием дробных интегралов и в каждом отдельном случае применяют тот или иной математический аппарат. Очевидно также, что точно такие задачи не решаются, только лишь в исключительных частных случаях. Поэтому большое значение имеет построение приближённых методов для решения дробных интегральных уравнений. В основе приближенного метода лежит оператор приближения, в виде многочлена, позволяющего приблизить точное решение. Для обоснования применения приближённого аппарата необходимо определить область его применения и определения скорости сходимости приближённого решения к точному решению. В данной работе приводится вид полиномиального оператора, устанавливается его связь с оператором Фурье и на базе этой связи его можно использовать для приближённого решения уравнений, ранее исследуемых авторами, кроме того для полученного полиномиального оператора найдена оценка скорости сходимости по норме пространства непрерывных на $(0,2\pi)$ функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F., Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. Vol. 16, no. 3. – P. 670-681.

2. Barton T. A., Purnaras I. K., Lp-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. – P. 830-841.

3. Saeed R. K., Ahmed C., Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008.V. 2, №. 1. P. 114–124.

4. Тарасов В. Е., Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка // М.: Институт компьютерных исследований. 2011, 298 с.

5. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором // Известия КГАСУ. 2014, №4(30) С.398-402.

6. Галимянов А. Ф., Сафиуллина Д. Э., Квадратурный метод решения интегрального уравнения смешанного типа // Изв. Вузов. Математика, 2009, №12. С. 22-27.

7. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., Воронцова В. Л. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с логарифмически ослабленным ядром // Тезисы докладов 69 международной научной конференции по проблемам архитектуры и строительства, Казань. 2017. С.373.

8. Galimyanov A. Gorskaya T., Fractional Order Integrals for the Sustainable Development Model // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020, 890 012180.

9. Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., Hafez R. M. An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems // Advances in Difference Equations, 2015 (1).

10. Liu W., Wang L. L., Li H. Optimal error estimates for chebyshev approximations of functions with limited regularity in fractional Sobolev-Type Spaces // Mathematics of Computation 2019, 88(320), c. 2857-2895.

11. Chel Kwun, Y., Farid, G., Min Kang, S., Khan Bangash, B., Ullah, S., Deri-vation of bounds of several kinds of operators via (s, m) -convexity // Advances in Difference Equations, 2020, (1),5.

12. Zada A., Alzabut, J., Waheed, H., Popa, I.-L. Ulam–Hyers stability of im-pulsive integrodifferential equations with Riemann–Liouville boundary condi-tions // Advances in Difference Equations, 2020 (1),64.

13. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z. On generalized fractional integral ine-qualities for twice differentiable convex functions // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 372,112740.

14. Rahman G., Nisar K,S., Abdeljawad T., Ullah S. Certain fractional pro-portional integral inequalities via convex functions // Mathematics, 2020, 8(2), 222.

15. Rahman G., Nisar K. S., Khan S. U., Baleanu D., Vijayakumar V. On the weighted fractional integral inequalities for Chebyshev functionals // Advances in Difference Equations, 2021, (1), 18.

16. Baleanu D., Kashuri A., Mohammed P. O., Meftah B. General Raina fractional integral inequalities on coordinates of convex functions // Advances in Difference Equations, 2021, (1), 82.

17. Мамаюсупов Ж. Ш. Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка //Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities.2022. Т. 11. С. 186-188.

18. Ковалевская Э. И., Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 207–220.

REFERENCES

1. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F., 2013, "Fractional integration toolbox", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, . vol. 16, no. 3. pp. 670-681.

2. Barton T. A., Purnaras I. K., 2012, "Lp-solutions of singular integro-differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, no. 386. pp. 830-841.

3. Saeed R. K., Ahmed C., 2008, "Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method", *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 2,no. 1, pp. 114–124

4. Tarasov V. E., 2011, "Modeli teireticheskoi fiziki s integro-differenchirovaniem drobnogo poryadka",[Models of theoretical physics with fractional-order integro-differentiation] *Moscow: Institute for Computer Research*, 298 p.

5. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., 2014, "Obobchennii metod Bubnova-Galerkina dly uravnenii s drobno-integral'nim operatorom", [Generalized Bubnov-Galerkin method for equations with fractional-integral operator] *News KSUAE*, no.4(30) C.398-402.

6. Галимянов А. Ф., Сафиуллина Д. Э.,2009, "Qvadraturnii metod rashenia integral'nogo uravnenia smeshannogo tipa ",[Quadrature method for solving a mixed type integral equation] *Izv. Vuzov. Mathematics*, no.12. pp. 22-27.

7. Gorskaya T. Uy., Galimynov A. F., Vorontsova V. L., 2017, "Kvadraturnaya formyla dly gipersingularnogo integrala s logarifmicheski oslablennim jadrom ",[The quadrature formula for the hypersingular integral with a logarithmically weakened kernel] *Theses of reports of the 69th international scientific conference on problems of architecture and construction, Kazan.* pp.373.

8. . Galimyanov A., Gorskaya T, 2020, "Fractional Order Integrals for the Sustainable Development Model", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 890 012180

9. Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., Hafez R. M., 2015, "An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems",*Advances in Difference Equations*, (1)

10. Liu W., Wang L.-L., Li H., 2019, "Optimal error estimates for chebyshev approximations of functions with limited regularity in fractional Sobolev-Type Spaces",*Mathematics of Computation*, 88(320), pp. 2857-2895.

11. Chel Kwun Y., Farid G., Min Kang S., Khan Bangash B., Ullah S.,2020, "Deri-vation of bounds of several kinds of operators via (s, m) -convexity", *Advances in Difference Equations*, (1),5.

12. Zada A., Alzabut J., Waheed H., Popa I.-L., 2020, "Ulam–Hyers stability of impulsive integrodifferential equations with Riemann–Liouville boundary condi-tions", *Advances in Difference Equations* (1),64.

13. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z., 2020, "On generalized fractional integral ine-qualities for twice differentiable convex functions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 372,112740.

14. Rahman G., Nisar K.S., Abdeljawad T., Ullah S., 2020, "Certain fractional pro-portional integral inequalities via convex functions", *Mathematics*, 8(2),222.

15. Rahman G., Nisar K. S., Khan S. U., Baleanu D., Vijayakumar V., 2021, "On the weighted fractional integral inequalities for Chebyshev functionals", *Advances in Difference Equations*, (1),18.

16. Baleanu D., Kashuri A., Mohammed P.O., Meftah B., 2021, "General Raina fractional integral inequalities on coordinates of convex functions", *Advances in Difference Equations*, (1),82.

17. Mamausupov J. Sh., 2022, "Integral'noe preobrazovanie Mellina dly operatora intagrodifferencirovania drobnogo parydka ",[The Mellin integral transformation for the fractional order integrodifferential operator] *Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities*, vol. 11. pp. 186-188.

Получено: 15.05.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 519.832 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-33-47

Методы нахождения оптимальных смешанных стратегий в матричных играх с коррелированными случайными выигрышами

В. А. Горелик, Т. В. Золотова

Горелик Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН); Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: vgor16@mail.ru
Золотова Татьяна Валерьяновна — доктор физико-математических наук, профессор, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: tgold11@mail.ru

Аннотация

Рассматривается игра с природой при известных вероятностях состояний. Предлагается принцип оптимальности для принятия решений для игр с природой, основанный на оценках эффективности и риска. В отличие от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр, в данной работе рассматривается возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей для начальных альтернатив. Предлагаются два варианта реализации двухкритериального подхода к определению принципа оптимальности. Первый вариант — минимизировать дисперсию как оценку риска с более низким порогом математического ожидания выигрыша. Второй вариант — максимизировать математическое ожидание выигрыша с верхним порогом дисперсии. Получены аналитические решения обеих задач. Рассмотрено применение полученных результатов на примере процесса инвестирования на фондовом рынке. Инвестор, как правило, формирует портфель не сразу, а в виде последовательного процесса приобретения того или иного финансового актива. В этом случае смешанная стратегия может быть реализована в ее имманентном смысле, т.е. покупки осуществляются случайным образом с распределением, определяемым ранее найденным оптимальным решением. Если этот процесс достаточно длительный, то структура портфеля будет примерно соответствовать типу смешанной стратегии. Такой подход использования игры с природой с учетом корреляционной зависимости случайного выигрыша чистых стратегий может быть применен и к задачам принятия решений в других областях управления рисками.

Ключевые слова: управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, стандартное отклонение.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
В. А. Горелик, Т. В. Золотова. Методы нахождения оптимальных смешанных стратегий в матричных играх с коррелированными случайными выигрышами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 33–47.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 519.832 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-33-47

Methods for Determining Optimal Mixed Strategies in Matrix Games with Correlated Random Payoffs

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova

Gorelik Victor Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Federal Research Center "Informatics and Management" of the Russian Academy of Sciences; Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: vgor16@mail.ru
Zolotova Tatiana Valerianovna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: tgold11@mail.ru

Abstract

A game with nature for known state probabilities is considered. An optimality principle is proposed for decision-making for games with nature, based on efficiency and risk estimates. In contrast to the traditional approach to the definition of a mixed strategy in game theory, this paper considers the possibility of correlation dependence of random payoff values for initial alternatives. Two variants of the implementation of the two-criteria approach to the definition of the optimality principle are suggested. The first option is to minimize the variance as a risk estimate with a lower threshold on the mathematical expectation of the payoff. The second option is to maximize the mathematical expectation of the payoff with an upper threshold on the variance. Analytical solutions of both problems are obtained. The application of the obtained results on the example of the process of investing in the stock market is considered. An investor, as a rule, does not form a portfolio all at once, but as a sequential process of purchasing one or another financial asset. In this case, the mixed strategy can be implemented in its immanent sense, i.e. purchases are made randomly with a distribution determined by the previously found optimal solution. If this process is long enough, then the portfolio structure will approximately correspond to the type of mixed strategy. This approach of using the game with nature, taking into account the correlation dependence of random payoff of pure strategies, can also be applied to decision-making problems in other areas of risk management.

Keywords: risk management, optimality principle, two-criteria approach, mathematical expectation, standard deviation.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
V. A. Gorelik, T. V. Zolotova, 2023, "Methods for Determining Optimal Mixed Strategies in Matrix Games with Correlated Random Payoffs" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 33–47.

1. Introduction

Decision theory describes and explains the behavior of a complex system consisting of human and information resources. In this case, the decision maker makes an informed choice between several options, each of which is considered achievable. This selection is based on available information. The result of a combination of the preferences of the decision maker and various decision options is the identification of a subjective decision that best meets the decision criteria [1, 2] [1, 2].

When modeling decision-making processes, the game-theoretic approach is widely used [3–13]. Control processes in complex systems are characterized by incomplete information about the state of the system and the environment. If one participant is explicitly distinguished, then a game with nature can be used as a mathematical model for making decisions in such situations. One of the players is a person or an institution acting as a decision-maker. The other player is nature and can affect the outcome of the game to various degrees. Nature constitutes a set of conditions affecting the results of taken decisions. To resolve a game of nature, it is required to apply certain decision-making criteria indicating the choice of the optimal decision which is to be made under the conditions of uncertainty concerning the future states of nature. In Wald's criterion [14], based on the loss function, the optimal decision corresponds to the lowest value of the maximum loss. On the other hand, when using the effectiveness function, the decision that maximizes the lowest value of the effectiveness function is the optimal one. In the case of Hurwicz's criterion [15], the parameter α is adopted to determine the coefficient of pessimism (expectations as to the realization of a given state of nature) about the possible future states of nature. This criterion determines the optimal decision, which maximizes the average value of the lowest and highest decision efficiency function with the weights α and $1-\alpha$ respectively. For a specific loss function, Hurwicz's criterion determines the optimal decision which minimizes the average value of the highest and the lowest loss function with the weights α and $1-\alpha$ respectively. Savage's criterion [16], which is based on Wald's criterion, refers to the minimum regret function (alternative loss function) resulting from wrong decisions for particular states of nature. The minimum regret function is formulated based on the decision effectiveness function or the loss function. According to Savage's criterion, it is first necessary to find the relative loss matrix (regret matrix). A loss is defined as the difference between the largest win possible in a particular state of nature, and the win corresponding to the decision currently under investigation.

When building a model and setting an optimization problem, the question arises about the availability of information concerning the states of nature. The definition of the concept of optimality or, as is sometimes said, the principle of optimality, depends on this. In this paper, it is assumed that the decision maker has information about the probabilities of the states of nature, i.e. the case of probabilistic uncertainty is considered (or, as it is fashionable to say, we are talking about risk management).

A large number of works are devoted to the application of mathematical methods in risk-based decision making (see, for example, [17–23]). In the paper [20], a two-criteria approach "efficiency – risk" was proposed to determine the principle of optimality when making decisions in stochastic conditions. The mathematical expectation of the gain was used as an efficiency assessment, and the VAR function was used as a risk assessment. As it is known, the VAR function and variance are the most widely used quantities as a risk assessment (see, for example, [24–26]).

The paper [21] outlined the two-criteria approach "efficiency-risk"to the definition of the principle of optimality in decision-making under stochastic conditions, using the mathematical expectation of the payoff as an efficiency estimate and the standard deviation as a risk estimate. Note that if, under known probabilities of states of nature, we are talking about maximizing the mathematical expectation of the payoff, then using a mixed strategy does not make sense. The situation is different with the two-criterion approach, namely, the optimal mixed strategy, generally speaking, gives a greater gain than any pure strategy.

The main difference of this paper from the traditional approach to the definition of a mixed strategy in game theory is that it takes into account the possibility of correlation dependence of random payoff values of the original alternatives (pure strategies). It should be noted that it is in the two-criteria approach that taking into account correlation becomes essential. Usually, in games with nature, either the mathematical expectation of the payoff or the risk according to Savage is considered as a criterion. In this case, the possible correlation of random payoffs under different pure strategies does not play any role. If there are two criteria, one of which is the standard deviation,

taking into account the correlation significantly affects the formulation of the problem and the method of its solution.

Here we consider two problems: the first is to minimize the variance as a risk criterion with a lower threshold on the mathematical expectation of the payoff; the second is to maximize the mathematical expectation of the payoff with an upper threshold on the variance. Analytical and algorithmic results will be obtained concerning the solution of these problems taking into account the correlation of random payoffs of each pair of pure strategies. These results are illustrated by the example of the investment process using real statistical data.

2. Determining the Optimal Mixed Strategy with a Restriction on the Mathematical Expectation of the Payoff

So, we consider the situation when the decision maker can choose one of the strategies (alternatives) $i = 1, \ldots, n$, with a known set of possible options for the states of the environment (nature) $j = 1, \ldots, m$. The gain from the i-th decision in the j-th state of the environment is a_{ij}. The payoff matrix from the implementation of possible solutions is $A = \|a_{ij}\|$. The probabilities of states of nature q_j will be considered known. The decision maker needs to choose the strategy that will lead, if possible, to a greater gain, but at the same time, possible losses due to the ambiguity of the outcome will be as small as possible.

As an estimation of the effectiveness of a pure strategy i we take the mathematical expectation of a payoff $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, and as a risk estimate - the standard deviation $\sigma_i =$
$= \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \overline{a}_i)^2 q_j\right)^{0.5}$.

When using a mixed strategy, value $\overline{a}_i$ is a conditional mathematical expectation of payoff under realization of the pure strategy i. We denote by p_i the probability of choosing the pure strategy i. Then the mathematical expectation of payoff when using the strategy $p = (p_1, \ldots, p_n)$ is $\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i p_i$.

Let σ_{ik} be the covariance moments of random values of payoff for pure strategies i and k, which are determined by the formula $\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \overline{a}_i)(a_{kj} - \overline{a}_k) q_j$.

We denote the covariance matrix $D = \|\sigma_{ik}\|$. As known, the covariance matrix is always non-negative definite. In what follows, we will assume a little more, namely, that it is positive definite.

The standard deviation of the random value of payoff for the strategy $p = (p_1, \ldots, p_n)$ in the case of correlation is determined, obviously, by the formula $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} p_i p_k\right)^{0.5}$ or in the matrix-vector form $\sigma = \langle p, Dp \rangle^{0.5}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product of vectors.

It is convenient to present all the data in the form of Table 1.

The first m columns of the table are the initial data imported from external sources, and the last $n + 1$ columns are the calculated data.

We introduce n-dimensional vectors $\overline{a} = (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ and $e = (1, \ldots, 1)$.

Let us formulate a problem for the minimum variance under a lower bound on the mathematical expectation of the payoff:

$$\min_{p \in P} \langle p, Dp \rangle \ , \quad P = \{p | \, \langle \overline{a}, p \rangle \geqslant a_0, \quad \langle p, e \rangle = 1, \ p \geqslant 0\}. \tag{1}$$

The set P is non-empty, closed, bounded if the threshold value a_0 is not greater than the maximum of the values $\overline{a}_i$. Hence, for

$$a_0 \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \overline{a}_i, \tag{2}$$

problem (1) has a solution.

Let us find the left boundary a^* of the range of values a_0, at which the first constraint in problem (1) becomes significant. To do this, consider an auxiliary problem of quadratic programming:

Таблица 1: Model Data.

	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	$\overline{a}_i$	1	2	$\cdots$	n
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}	$\overline{a}_1$	σ_{11}	σ_{12}	$\cdots$	σ_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}	$\overline{a}_2$	σ_{21}	σ_{22}	$\cdots$	σ_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}	$\overline{a}_n$	σ_{n1}	σ_{n2}	$\cdots$	σ_{nn}

$$d_0 = \min_{p \in P_0} \langle p, Dp \rangle \ , \quad P_0 = \{p \mid \ \langle p, e \rangle = 1, \ p \geqslant 0\}. \tag{3}$$

Problem (3) has a unique solution p^*. Obviously, $a^* = \langle \overline{a}, p^* \rangle$. Denote by $\hat{D}$ an arbitrary square submatrix of the matrix D of dimension $k \times k$, obtained by deleting rows and columns with the same numbers, I_1 - the set of not deleted row and column numbers, I_2 - the set of deleted row and column numbers, $\hat{D}^+$ - additional submatrix obtained from D by deleting rows with numbers from I_1 and columns with numbers from I_2, $\hat{e}$ – part of the vector e of dimension k, $\hat{e}^+$ – part of the vector e of dimension $n-k$, $\hat{a}$ – part of the vector $\overline{a}$ with components from I_1. The following lemma gives a formula for finding a^*.

Lemma 1. *There is a unique matrix $\hat{D}$ such that $\hat{D}^+\hat{p} - \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{e}^+ \geqslant 0$, where*

$$\hat{p} = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{D}^{-1}\hat{e}. \tag{4}$$

Wherein

$$a^* = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \left\langle \hat{a}, \hat{D}^{-1}\hat{e} \right\rangle. \tag{5}$$

Proof. Compose the Lagrange function $L_0(p, \mu) = 0.5 \langle p, Dp \rangle + \mu(1 - \langle p, e \rangle)$.

The Karush-Kuhn-Tucker (KKT) extremum conditions for problem (3):
$\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} = 0$, $i \in I$, $\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} \geqslant 0$, $i \notin I$, where I – the set of indices corresponding to nonzero p_i. For problem (2) these conditions are necessary and sufficient, and since the solution of problem (3) p^* is unique, they are satisfied only for the given vector. For nonzero components of the vector p^*, the first part of the KKT conditions gives the system of equations: $\hat{D}\hat{p} - \mu\hat{e} = 0$. The square submatrices of the positive-definite matrix D are also positive-definite and hence non-degenerate. Therefore $\hat{p} = \mu\hat{D}^{-1}\hat{e}$ and from the restriction we have $\mu \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle = 1$. The matrix $\hat{D}^{-1}$ is also positive definite, so $\mu = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1}$ and $\hat{p} = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{D}^{-1}\hat{e}$, i.e. we get (4). The second part of the KKT conditions leads to the inequality $\hat{D}^+\hat{p} - \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{e}^+ \geqslant 0$.

Multiply the vector (4) by the vector $\hat{a}$:
$\langle \hat{a}, \hat{p} \rangle = \left\langle \hat{a}, \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{D}^{-1}\hat{e} \right\rangle = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \left\langle \hat{a}, \hat{D}^{-1}\hat{e} \right\rangle$.

Hence $a^* = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \left\langle \hat{a}, \hat{D}^{-1}\hat{e} \right\rangle$, i.e. we get (5). The lemma is proven. □

Note that for this case, the KKT conditions are necessary and sufficient. Therefore, if $\hat{p} \geqslant 0$ and the rest of the KKT conditions are satisfied, namely, the nonnegativity of the derivatives of the Lagrange function with respect to p_i with numbers corresponding to zero components, then the vector $\tilde{p}$, padded with zeros in the corresponding places, is a solution to problem (3).

Thus, the method for solving the problem (3) is reduced to enumerating the square submatrices of the matrix D, solving the systems of equations based on them using the obtained formulas, and checking the conditions for non-negativity of the components of the obtained vectors and the

corresponding derivatives of the Lagrange function. Moreover, since the conditions of the KKT are necessary and sufficient, the enumeration stops as soon as a vector satisfying them is found.

In what follows, we will assume that all $\overline{a}_i$ are distinct. We will need this purely technical assumption to formulate a theorem on the method for solving problem (1). It allows us to exclude trivial cases when the optimal solution is a pure strategy. But this assumption is quite natural and does not violate the generality of the consideration.

The following theorem substantiates a method for finding optimal truly mixed (containing at least two nonzero components) strategies.

Theorem 1. *If*

$$a^*<a_0<\max_{i=1,\dots,n}\overline{a}_i,$$

all $\overline{a}_i$ are distinct, matrix $D=\|\sigma_{ik}\|$ is positive definite, then problem (1) has a unique solution p^0 and true mixed optimal strategy can be represented as

$$\tilde{p}^0=\tilde{D}^{-1}\left(\lambda^0\tilde{a}+\mu^0\tilde{e}\right), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\lambda^0&=\frac{\max\left\{a_0\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle,0\right\}}{\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^2},\\ \mu^0&=\frac{\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle-a_0\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle}{\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^2},\end{aligned} \tag{7}$$

$\tilde{D}$ is some (unique) square submatrix of the matrix D obtained by deleting rows and columns with the same numbers, $\tilde{p}^0$ is a vector of nonzero components of the vector p^0, $\tilde{a}$ is a vector of the part of the components of the vector $\overline{a}$, $\tilde{e}$ is a vector from a part of the components of the vector e, obtained by deleting the components with numbers corresponding to the zero components of the vector p^0.

Proof. If condition (2) is satisfied, the set P is not empty, closed, and bounded; therefore, the convex programming problem (1) has a solution, and it is unique, because the objective function is strictly convex. The KKT conditions for it are necessary and sufficient (in a problem with linear constraints, the Slater regularity condition is not required). The Lagrange function has the form $L_1(p,\lambda,\mu)=0.5\langle p,Dp\rangle+\lambda(a_0-\langle\overline{a},p\rangle)+\mu(1-\langle p,e\rangle)$, $\lambda\geqslant 0$. Let I be the set of indices corresponding to non-zero p_i. The KKT extremum conditions for problem (1) have the form $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}=0$, $i\in I$, $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}\geqslant 0$, $i\notin I$.

For the non-zero components of the vector p, we have the system of equations: $\tilde{D}\tilde{p}-\lambda\tilde{a}-\mu\tilde{e}=0$, where $\tilde{D}$ is a square submatrix of the matrix D obtained by deleting rows and columns with numbers corresponding to the zero components of the vector p, $\tilde{p}$ is a vector of non-zero components of the vector p, $\tilde{a}$ is a vector from the part of the components of the vector $\overline{a}$, $\tilde{e}$ is a vector from the part of the components of the vector e, obtained by deleting the components with numbers corresponding to the zero components of the vector p.

Suppose first that $\lambda>0$, then the first constraint in (1) is active. As mentioned above, the square submatrices of the positive-definite matrix D are also positive-definite and, therefore, non-degenerate. Therefore, we have $\tilde{p}=\tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a}+\mu\tilde{e})$. We substitute this expression into the constraints of problem (1): $\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a}+\mu\tilde{e})\right\rangle=a_0$, $\left\langle\tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a}+\mu\tilde{e}),\tilde{e}\right\rangle=1$. We transform the first equality to the form $\lambda\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle+\mu\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle=a_0$. From the second equality, we express $\mu=(1-\lambda\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle)\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}$ and substitute into the first:
$\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle+(1-\lambda\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle)\left\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle=a_0$.

Thus, taking into account the fact that the matrix $\tilde{D}^{-1}$ is symmetric, we obtain an expression for λ:

$$\lambda=\frac{a_0-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle}{\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}}, \tag{8}$$

or, after transformation $\lambda=\frac{a_0\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{2}}$. Let us show that the denominator is positive, i.e. there is an inequality

$$\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}>0. \tag{9}$$

Indeed, since $\tilde{D}^{-1}$ is a positive definite matrix, there exists a nondegenerate matrix B such that $\tilde{D}^{-1}=B^TB$. Substituting this decomposition of the matrix into the left-hand side of the inequality (9), we have $\langle \tilde{a},B^TB\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e},B^TB\tilde{e}\rangle-\langle \tilde{e},B^TB\tilde{a}\rangle^2=\langle B\tilde{a},B\tilde{a}\rangle\langle B\tilde{e},B\tilde{e}\rangle-\langle B\tilde{e},B\tilde{a}\rangle^2$. We apply the Cauchy-Bunyakovsky inequality: $\langle x,y\rangle^2\leqslant\|x\|^2\cdot\|y\|^2$, setting $x=B\tilde{a}$, $y=B\tilde{e}$. In the Cauchy-Bunyakovsky inequality equality holds only if the vectors x and y are collinear. But the vectors $B\tilde{a}$ and $B\tilde{e}$ cannot be collinear, since otherwise, when they are multiplied by the matrix B^{-1}, the vectors $\tilde{a}$ and $\tilde{e}$ are also collinear. This contradicts the condition of the theorem, since by assumption, all $\overline{a}_i$ are distinct, and all components of the vector e are equal to ones. Therefore, if these vectors have at least two components, (9) holds.

The numerator in (8) is non-negative, because otherwise for the submatrix $\tilde{D}$ the threshold value a_0 is less than the mathematical expectation of the payoff corresponding to the minimum of the variance (it follows from the lemma, see formula (5)).

Substituting λ into the expression for μ we have

$$\mu=\left(1-\frac{a_0-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle}{\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}}\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\right)\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle}-\frac{a_0\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}}{\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}}=\frac{\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle-a_0\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle}{\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{2}}.$$

If $\tilde{p}\geqslant 0$ and the rest of the KKT conditions are satisfied, namely, the non-negativity of the derivatives of the Lagrange function with respect to p_i with numbers corresponding to zero components, then the vector $\tilde{p}$, padded with zeros at the appropriate places, is a solution to problem (1).

Let now $\lambda=0$, then we have $\tilde{D}\tilde{p}-\mu\tilde{e}=0$. Combining both cases, we obtain formulas (6), (7). The theorem has been proven. □

Note: If formula (8) gives $\lambda<0$, i.e. numerator $a_0-\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle<0$, then this means that for the given submatrix $\tilde{D}$ the first constraint of problem (1) for a given a_0 cannot be active and the case $\lambda=0$ takes place. The algorithm for finding a solution to problem (1) includes enumeration of sets of nonzero components I. Since for the convex programming problem (2) the KKT optimality conditions are also sufficient, if a solution satisfies them, then the enumeration process ends.

3. Determining the Optimal Mixed Strategy with a Restriction on the Payoff Variance

The problem for the maximum of mathematical expectation of payoff under an upper bound on the standard deviation has the form:

$$\max_{p\in P}\langle\overline{a},p\rangle\ ,\ P=\{p|\langle p,Dp\rangle^{0.5}\leqslant\sigma_0,\ \langle p,e\rangle=1,\ p\geqslant 0\}. \tag{10}$$

The set P is not empty if the threshold value σ_0 is not less than the minimum value of the standard deviation on the set $P_0=\{p\mid\langle p,e\rangle=1,\ \ p\geqslant 0\}$. To find this value, you need to solve

an auxiliary quadratic programming problem (2). Substituting this vector $\hat{p} = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1} \hat{D}^{-1}\hat{e}$ into the objective function (2), we obtain the value $d_0 = \left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e} \right\rangle^{-1}$.

In what follows, we will assume again that all $\overline{a}_i$ are different. This does not violate the generality of the consideration, since if two pure strategies have the same mathematical expectation of payoff and the standard deviations are also equal, then such strategies are equivalent within the framework of this approach and one of them can be excluded. If one of these strategies has a larger standard deviation than the other, then, within the framework of this approach, such a pure strategy cannot be included in the optimal mixed strategy with a nonzero weight.

The following theorem substantiates a method for finding the optimal truly mixed (containing at least two nonzero components) strategies.

THEOREM 2. *If $\sigma_0 > d_0^{0.5}$, all $\overline{a}_i$ are different, the matrix $D = \|\sigma_{ik}\|$ is positive definite, then the problem (10) has a solution p^0 and the truly mixed optimal strategy can be represented as*

$$\tilde{p}^0 = \lambda^{0^{-1}} \tilde{D}^{-1} \left(\tilde{a} - \mu^0 \tilde{e} \right), \tag{11}$$

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{\left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle^2}{\sigma_0^2 \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - 1}}, \qquad \mu^0 = \frac{\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle - \lambda^0}{\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle}, \tag{12}$$

$\tilde{D}$ is some square submatrix of matrix D obtained by deleting rows and columns with the same numbers, $\tilde{p}^0$ is a vector from nonzero components of the vector p^0, $\tilde{a}$ is a vector from a part of the components of the vector $\overline{a}$, $\tilde{e}$ is a vector from parts of the components of the vector e obtained by deleting the components with numbers corresponding to the zero components of the vector p^0.

PROOF. For $\sigma_0 > d_0^{0.5}$ the set P is not empty, closed and bounded; therefore, convex programming problem (10) has a solution and satisfies the Slater condition, and the KKT conditions for it are necessary and sufficient. In problem (10), to apply the extremum conditions, it is more convenient to square the first constraint. Then the Lagrange function has the form
$L_2(p, \lambda, \mu) = \langle \overline{a}, p \rangle + \frac{1}{2}\lambda \left(\sigma_0^2 - \langle p, Dp \rangle \right) + \langle \mu, 1 - \langle p, e \rangle \rangle$, $\lambda \geqslant 0$.

Let, as before, I be the set of indices corresponding to nonzero p_i. The conditions KKT of extremum for the problem (10) have the form $\frac{\partial L_2(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} = 0$, $i \in I$, $\frac{\partial L_2(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} \leqslant 0$, $i \notin I$.

For nonzero components of the vector p, we have a system of equations: $\tilde{a} - \lambda\tilde{D}\tilde{p} - \mu\tilde{e} = 0$, where $\tilde{D}$ is a square submatrix of the matrix D obtained by deleting rows and columns with numbers corresponding to the zero components of the vector p, $\tilde{p}$ is a vector of nonzero components of the vector p, $\tilde{a}$ is a vector from a part of the components of the vector $\overline{a}$, $\tilde{e}$ is a vector from a part of the components of the vector e obtained by deleting the components with numbers corresponding to the zero components of the vector p.

If $\lambda = 0$, then we have $\tilde{a} - \mu\tilde{e} = 0$. But by virtue of the assumption of the theorem that all $\overline{a}_i$ are different, this equality is possible only for one index, so in this case, the optimality conditions can be satisfied only for the set I containing one index. If the quadratic constraint in the problem (10) is not active, then $\lambda = 0$. Therefore, for a truly mixed optimal strategy with at least two components different from zero, the quadratic constraint in (10) must be active and $\lambda > 0$.

As mentioned above, the square submatrices of the positive definite matrix D are also positive definite and, therefore, nondegenerate. Therefore, we have $\tilde{p} = \lambda^{-1}\tilde{D}^{-1}(\tilde{a} - \mu\tilde{e})$. We substitute this expression into the constraints of problem (10):
$\left\langle \tilde{D}^{-1}(\tilde{a} - \mu\tilde{e}), (\tilde{a} - \mu\tilde{e}) \right\rangle = \lambda^2\sigma_0^2$, $\lambda^{-1} \left\langle \tilde{D}^{-1}(\tilde{a} - \mu\tilde{e}), \tilde{e} \right\rangle = 1$.

We transform the first equality to the form: $\left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle + \mu^2 \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - 2\mu \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle = \lambda^2\sigma_0^2$.
From the second equality, we express μ: $\mu = \left(\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle - \lambda \right) \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle^{-1}$, and substitute into

the first equality $\left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle + \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle^2 - 2\lambda \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle + \lambda^2 -$
$-2\left(\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle^2 - \lambda \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle \right) = \lambda^2 \sigma_0^2 \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle$.

In this expression, the coefficient at λ is zero. Thus, we obtain a quadratic equation for λ: $\lambda^2 \left(\sigma_0^2 \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - 1 \right) = \left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle^2$. As it was shown the free term in the last equation is positive (see the inequality (9)). Let us show that the coefficient at λ^2 is also positive. To do this, we will use the form of solution of the problem (3) obtained above. If we solve a similar problem of minimizing the variance with the covariance matrix $\tilde{D}$, corresponding to the solution of the problem (10), we obtain the minimum value of the variance $\left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle^{-1}$. By the assumption of the theorem, σ_0^2 is greater than this value, i.e. $\sigma_0^2 > \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle^{-1}$. Considering, that $\lambda > 0$, λ is a solution with a plus sign in front of the radical.

If $\tilde{p} \geqslant 0$ and the rest of the KKT conditions are satisfied, namely, the non-positiveness of the derivatives of the Lagrange function with respect to p_i with numbers corresponding to zero components, then the vector $\tilde{p}$, padded with zeros in the corresponding places, is a solution to the problem (10).

As a result, we obtain formulas (11) and (12). Q.E.D. □

4. Calculation Examples for Stock Investment Problems

Let us consider the application of the obtained results on the example of the process of investing in the stock market. Usually, a mixed strategy is interpreted as a vector of shares of financial instruments in a portfolio. Without excluding such an interpretation, we will offer a slightly different point of view. An investor, as a rule, does not form a portfolio all at once, but as a sequential process of purchasing one or another financial asset. In this case, the mixed strategy can be implemented in its immanent sense, i.e. purchases are made randomly with a distribution determined by the previously found optimal solution. If this process is long enough, then the portfolio structure will approximately correspond to the type of mixed strategy. Within the framework of this model, as a game with nature, when applied to the stock market, short sales are unacceptable, because the solution is mixed strategies, the components of which, in principle, cannot be negative.

We will conduct a technical analysis and find the optimal investment strategy using real data on stock quotes of Russian companies for the period from 02/01/2021 to 05/01/2021. This period was chosen because the later data period characterizes the fall of market indices and is associated not so much with economic as with political reasons.

Three relatively successful companies were selected, namely VTB Bank (VTBR), Gazprom (SAGP), Sberbank of Russia (SBER). Based on data on daily closing prices, the daily value of company returns, average returns, variance, and covariance for a given period were calculated (data taken from the site of FINAM Investment Company [27]).

Strategy 1 – investment in shares of VTB Bank, strategy 2 – investment in shares of Gazprom, strategy 3 – investment in shares of Sberbank of Russia. In this case, the average values of returns are equal to $\overline{a}_1 = 0.00548$ (0.548%), $\overline{a}_2 = 0.00127$ (0.127%), $\overline{a}_3 = 0.002$ (0.2%), the covariance matrix has the form $D = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.00010 & 0.000095 \\ 0.00010 & 0.00016 & 0.000094 \\ 0.000095 & 0.000094 & 0.00017 \end{pmatrix}$.

At first, we will solve the problem (1) for the minimum variance with a constraint on the mathematical expectation of the payoff. According to the condition of Theorem 1, we calculate the left and right ends of the interval

$$\left\langle \hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\right\rangle^{-1}\left\langle \hat{a},\hat{D}^{-1}\hat{e}\right\rangle < a_0 < \max_{i=1,\dots,n}\overline{a}_i.$$

The solution of problem (3) gives a full-size portfolio
$p = (0.11532,\ 0.44388,\ 0.44079)$, therefore, for the initial matrix D and the initial vector of expected payoffs $\overline{a} = (0.00548,\ 0.00127,\ 0.002)$ we have
$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix}$, $\left\langle e, D^{-1}e\right\rangle = 7988.538$,
$\left\langle \overline{a}, D^{-1}e\right\rangle = 16.60911$. Then we get $0.00208 < a_0 < 0.00548$.

Let us solve the problem (1) with the threshold value of the mathematical expectation of the payoff $a_0 = 0.003$. For clarity, we present a detailed procedure for solving this problem using formulas (6), (7).

Let us take $I = \{1,\ 2,\ 3\}$, i.e. we use the original vector of expected payoffs $\overline{a} = (0.00548, 0.00127,$ $0.002)$ and the original covariance matrix D, then we get $\left\langle \overline{a}, D^{-1}\overline{a}\right\rangle = 0.093993$. By formulas (7) we have $\lambda = 0.01549$, $\mu = 0.00009$. Using formula (6), we have $p = (0.33775,\ 0.24212,\ 0.42013)$.

Let us now solve the problem (1) with the threshold value of the mathematical expectation of the payoff $a_0 = 0.0045$. Let's take $I = \{1,\ 2,\ 3\}$, then similarly by formulas (7) we have $\lambda = 0.04071$, $\mu = 0.00004$. Using formula (6), we have $p = (0.70007,\ -0.08654,\ 0.38648)$. The non-negativity condition $p \geqslant 0$ is not satisfied in this case, which means that this vector p is not a solution. Since p_2 is negative in this case, we can assume that the optimal mixed strategy contains a second zero component.

So let us take $I = \{1,\ 3\}$, then $\tilde{a} = (0.00548,\ 0.002)$,
$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}$, $\tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3555.96955 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix}$,
$\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle = 0.090743$, $\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle = 6710.771$, $\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle = 18.64708$ and by formulas (7) we obtain $\lambda = 0.04422$, $\mu = 0.00003$. Using formula (6), we have a vector of nonzero components $\tilde{p} = (0.71830,\ 0.28170)$.

Let us check the fulfillment of the KKT condition for the crossed-out number $i = 2$. The derivative of the Lagrange function with respect to p_2 is $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{2k}p_k - \lambda\overline{a}_2 - \mu$. When substituting the vector $(0.71830,\ 0,\ 0.28170)$ and the Lagrange multipliers $\lambda = 0.04422$ and $\mu = 0.00003$, it is equal $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = 0.00002$. This means that all KKT conditions are satisfied and the optimal solution to problem (1) has the form $p^0 = (0.71830,\ 0,\ 0.28170)$.

Now let us solve problem (10) for the maximum mathematical expectation of the payoff with a restriction on the variance. For the original matrix D, the solution of the problem (3) is the strategy $p = (0.11532,\ 0.44388,\ 0.44079)$ and the corresponding minimum value of the objective function is $d_0 = 0.00013$.

Let us solve the problem (10) at the threshold value of the standard deviation $\sigma_0 = 0.014$ (or the variance $\sigma_0^2 = 0.0002$).

Take $I = \{1,\ 2,\ 3\}$, i.e. we will use the original vector of expected returns
$\overline{a} = (0.00548,\ 0.00127,\ 0.002)$ and the original covariance matrix D, then we get by formulas (11), (12) $\lambda = 28.1906, \mu = -0.00145$, $p = (0.62479,\ -0.01826,\ 0.39346)$. The non-negativity condition $p \geqslant 0$ is not satisfied in this case, which means that this vector p is not a solution. Since p_2 is negative in this case, it can be assumed that the optimal mixed strategy contains the second zero component.

Therefore, we take $I = \{1,\ 3\}$, then $\tilde{a} = (0.00548,\ 0.002)$,
$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}$, and we get by (12) $\lambda = 27.63183,\ \mu = -0.00134$. Using (11), we have the vector of nonzero components $\tilde{p}$= (0.62840, 0.37161).

Let us check the fulfillment of the KKT condition for the crossed-out number $i = 2$. The derivative of the Lagrange function with respect to p_2 is $\frac{\partial L_2(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = \overline{a}_2 - \lambda \sum_{k=1}^{3} \sigma_{2k} p_k - \mu$. When substituting the vector (0.62840, 0, 0.37161) and Lagrange multipliers $\lambda = 27.63183$ and $\mu = -0.00134$, we have $\frac{\partial L_2(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = -0.00009$.

This means that all the KKT conditions are satisfied and the optimal solution of the problem (10) has the form $p^0 = (0.62840,\ 0,\ 0.37161)$.

In [21], an example of investing in shares of Russian companies for the period from 10/01/2019 to 12/31/2019 was considered. Analysis of statistical data showed that the values of the covariance of the returns of the companies under consideration were an order of magnitude less than the values of their variances. So covariances practically did not affect the calculation results, and it was legitimate to assume that they could be neglected.

In the above example with data on stock quotes of Russian companies for the period from 02/01/2021 to 05/01/2021 the covariances and variances have approximately the same order, and the covariances are positive. It can be assumed that this is due to recovery growth after the peak of the pandemic.

If we neglect the covariances in this example, then we have the following results.

Having solved problem (10) with covariances equal to zero and the same threshold value of the standard deviation, we obtain a solution of the problem (10) $p = (0.75124,\ 0,\ 0.24876)$. As you can see, the structure of the strategy has not changed, but the values of the first and third components differ significantly from these values of the vector $p^0 = (0.62840,\ 0,\ 0.37161)$.

Thus, the idea of mixed strategy calculations without neglecting the covariance of random payoffs of different pure strategies in games with nature is founded. Of course, this idea is not new in portfolio analysis, but games with nature can be models for other management tasks.

5. Conclusion

The purpose of this work is to develop a new approach in game theory, specifically in games with nature, related to the consideration of the correlation of random payoffs for each pair of pure strategies. The obtained theoretical results, in our opinion, can find applications in various decision-making problems. The considered example of stock investment is an illustration of the practical application of the results obtained. At the same time, we note that in general theoretical terms, we are talking about finding an optimal mixed strategy for which the condition of non-negativity of the components is mandatory (which, by the way, significantly complicates the search for a solution). Therefore, when applying this approach to stock investing, short selling is excluded. However, for the stock markets, restrictions on short sales, up to their complete ban, are not so rare.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simon H. A. Administrative behavior. Simon and Schuster, United States, 2013.

2. Wald A. Sequential analysis. Courier Corporation, United States, 2004.

3. Samuelson L. Game theory in economics and beyond // Voprosy Ekonomiki. 2017. vol. 13, pp. 89-115. doi: 10.32609/0042-8736-2017-5-89-115

4. Allen F., Morris S. E. Game theory models in finance. In: International Series in Operations Research and Management Science, pp. 17-41, Springer, New York LLC, 2014.

5. Breton M. Dynamic Games in Finance., In: Başar T., Zaccour G. (eds) Handbook of Dynamic Game Theory, Springer, Cham, 2018.

6. Askari G., Gordji M. E., Park C. The behavioral model and game theory // Palgrave Communications. 2019. Vol. 5, № 15, pp. 1-8. doi: 10.1057/s41599-019-0265-2

7. Fox W. P., Burks R. Game Theory. In: Applications of Operations Research and Management Science for Military Decision Making. International Series in Operations Research and Management Science, Vol. 283, Springer, Cham, 2019.

8. Allayarov S. Game Theory And Its Optimum Application For Solving Economic Problems // Turkish Journal of Computer and Mathematics Education. 2021. Vol. 12, № 9, 3432-3441.

9. Jiang Y., Zhou K., Lu X., Yang S. Electricity trading pricing among prosumers with game theory-based model in energy blockchain environment //Applied Energy. 2020. Vol. 271, № 115239. doi: 10.1016/j.apenergy.2020.115239

10. Lee S., Kim S., Choi K., Shon T. Game theory-based security vulnerability quantification for social internet of things // Future Generation Computer Systems. 2018. Vol. 82, pp. 752-760. doi: 10.1016/j.future.2017.09.032

11. Hafezalkotob A., Mahmoudi R., Hajisami E., Wee H. M. Wholesale-retail pricing strategies under market risk and uncertain demand in supply chain using evolutionary game theory // Kybernetes. 2018. Vol. 47, № 8, pp. 1178-1201. doi: 10.1108/K-02-2017-0053

12. Piraveenan M. Applications of game theory in project management: a structured review and analysis // Mathematics. 2019. Vol. 7, № 13, p. 858. doi: 10.3390/math7090858

13. Shafer G., Vovk V. Game-Theoretic Foundations for Probability and Finance. Vol. 455, John Wiley and Sons, United States, 2019.

14. Wald A. Statistical Decision Functions. Wiley, Oxford UK, 1951. doi: 10.2307/2333373

15. Hurwicz L. Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance // Statistics. 1951. Vol. 370.

16. Savage L. J. The Theory of Statistical Decision // J. Am. Stat. Assoc. 1951. Vol. 46, pp. 55-67.

17. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics and Probability Letters. 2018. Vol. 137, pp. 135-141. doi: 10.1016/j.spl.2018.01.017

18. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104, pp. 666-673. doi: 10.1016/j.geb.2017.06.012

19. Radner R. Decision and choice: bounded rationality. International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences (Second Edition), pp. 879-885, Elsevier, Florida United States, 2015.

20. Gorelik V. A., Zolotova T. V. The optimality principle "mathematical expectation-var"and its application in the Russian stock market // Proceedings 12th International Conference Management of Large-Scale System Development (IEEE Conference Publications). Moscow, 2019, pp. 1-4. doi: 10.1109/MLSD.2019.8911018

21. Gorelik V. A., Zolotova T. V. Risk management in stochastic problems of stock investment and its application in the Russian Stock Market // Proceedings 13th International Conference Management of Large-Scale System Development (IEEE Conference Publications). Moscow, 2020, pp. 1-5. doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247801

22. Zhukovsky V.I., Kirichenko M.M. Risks and outcomes in a multicriteria problem with uncertainty // Risk Management. 2016. Vol. 2, pp. 17-25.

23. Labsker L.G. 2019, "The property of synthesizing the Wald-Savage criterion and its economic application // Economics and Mathematical Methods. 2019. Vol. 55, № 4, pp. 89-103. doi: 10.31857/S042473880006775-1

24. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015 Vol. 9, № 15, pp. 22-29. doi: 10.1016/j.intele.2015.09.003

25. Xu Y., Xiao J., Zhang L. Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market // Economic Modelling. 2020. Vol. 93, pp. 605-619. doi:10.1016/j.econmod.2020.09.006

26. Sharpe W.F., Alexander G.J., Bailey J.V. Investments. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999. doi: 10.4236/ajps.2019.103030

27. Investment company "FINAM", Available at: https://www.finam.ru/ (accessed 5 March 2021).

REFERENCES

1. Simon, H.A. 2013, "Administrative behavior", *Simon and Schuster*, United States.

2. Wald, A. 2004, "Sequential analysis", *Courier Corporation*, United States.

3. Samuelson, L. 2017, "Game theory in economics and beyond", *Voprosy Ekonomiki*, vol. 13, pp. 89-115. doi: 10.32609/0042-8736-2017-5-89-115

4. Allen, F., Morris, S.E. 2014, "Game theory models in Finance", *In: International Series in Operations Research and Management Science*, pp. 17-41, Springer, New York LLC.

5. Breton, M. 2018, "Dynamic Games in Finance", *In: Başar T., Zaccour G. (eds) Handbook of Dynamic Game Theory*, Springer, Cham.

6. Askari, G., Gordji, M.E., Park, C. 2019, "The behavioral model and game theory", *Palgrave Communications*, vol. 5, no. 15, pp. 1-8. doi: 10.1057/s41599-019-0265-2

7. Fox W.P., Burks R. 2019, "Game Theory", *Applications of Operations Research and Management Science for Military Decision Making. International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 283, Springer, Cham.

8. Allayarov, S. 2021, "Game Theory And Its Optimum Application For Solving Economic Problems", *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, vol. 12, no. 9, pp. 3432-3441.

9. Jiang, Y., Zhou, K., Lu, X., Yang, S. 2020, "Electricity trading pricing among prosumers with game theory-based model in energy blockchain environment", *Applied Energy*, vol. 271, no. 115239. doi: 10.1016/j.apenergy.2020.115239

10. Lee, S., Kim, S., Choi, K., Shon, T. 2018, "Game theory-based security vulnerability quantification for social internet of things", *Future Generation Computer Systems*, vol. 82, pp. 752-760. doi: 10.1016/j.future.2017.09.032

11. Hafezalkotob, A., Mahmoudi, R., Hajisami, E., Wee, H. M. 2018, "Wholesale-retail pricing strategies under market risk and uncertain demand in supply chain using evolutionary game theory", *Kybernetes*, vol. 47, no. 8, 1178-1201. doi: 10.1108/K-02-2017-0053

12. Piraveenan, M. 2019, "Applications of game theory in project management: a structured review and analysis", *Mathematics*, vol. 7, no. 13, p. 858. doi: 10.3390/math7090858

13. Shafer, G., Vovk, V. 2019, "Game-Theoretic Foundations for Probability and Finance", vol. 455, *John Wiley and Sons*, United States.

14. Wald, A. 1950, "Statistical Decision Functions", *Wiley, Oxford UK*. doi: 10.2307/2333373

15. Hurwicz, L. 1951, "Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance", *Statistics*, vol. 370.

16. Savage, L. J. 1951, "The Theory of Statistical Decision", *J. Am. Stat. Assoc*, vol. 46, pp. 55-67.

17. Harman, R., Prus, M. 2018, "Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion", textitStatistics and Probability Letters, vol. 137, 135-141. doi: 10.1016/j.spl.2018.01.017

18. Kuzmics, C. 2017, "Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty", *Games and Economic Behavior*, vol. 104, 666-673. doi: 10.1016/j.geb.2017.06.012

19. Radner, R. 2015, "Decision and choice: bounded rationality", *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences (Second Edition)*, pp. 879-885, Elsevier, Florida United States.

20. Gorelik, V. A., Zolotova, T. V., 2019, "The optimality principle "mathematical expectation-var"and its application in the Russian stock market", *Proceedings 12th International Conference Management of Large-Scale System Development* (IEEE Conference Publications). Moscow, pp. 1-4. doi: 10.1109/MLSD.2019.8911018

21. Gorelik, V. A., Zolotova, T. V., 2020, "Risk management in stochastic problems of stock investment and its application in the Russian Stock Market", *Proceedings 13th International Conference Management of Large-Scale System Development* (IEEE Conference Publications). Moscow, pp. 1-5. doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247801

22. Zhukovsky, V. I., Kirichenko, M. M. 2016, "Risks and outcomes in a multicriteria problem with uncertainty", *Risk Management*, vol. 2, pp. 17-25.

23. Labsker, L. G. 2019, "The property of synthesizing the Wald-Savage criterion and its economic application", *Economics and Mathematical Methods*, vol. 55, no. 4, pp. 89-103. doi:10.31857/S042473880006775-1

24. García, F., González-Bueno, J. A., Oliver, J. 2015, "Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: evidence from the Colombian stock market", *Intellectual Economics*, vol. 9, no. 15, pp. 22-29. doi: 10.1016/j.intele.2015.09.003

25. Xu, Y., Xiao, J., Zhang, L. 2020, "Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market", *Economic Modelling*, vol. 93, pp. 605-619. doi:10.1016/j.econmod.2020.09.006

26. Sharpe, W. F., Alexander, G. J., Bailey, J. V. 1999, *Investments*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. doi: 10.4236/ajps.2019.103030

27. Investment company “FINAM”, Available at: https://www.finam.ru/ (accessed 5 March 2021).

Получено: 23.08.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.98 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-48-62

Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В гармоническом анализе на прямой со степенным весом сначала появилось унитарное преобразование Данкля, зависящее от одного параметра $k \geqslant 0$, а затем двупараметрическое (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, частным случаем которого является преобразование Данкля ($a = 2$). Наличие параметра $a > 0$ при $a \neq 2$ приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. В случае последовательности $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье весьма слабые и после некоторой замены переменных они исчезают. Получаемое унитарное преобразование при $r = 0$ дает обычное преобразование Данкля и обладает многими его свойствами. Оно названо обобщенным преобразованием Данкля. В работе определен оператор сплетения, устанавливающий связь дифференциально-разностного оператора второго порядка, для которого ядро обобщенного преобразования Данкля является собственной функцией, с одномерным оператором Лапласа и позволяющий записать ядро в удобном для его оценок виде. В отличие от оператора сплетения для преобразования Данкля он имеет ненулевое ядро. В работе также на основе свойств обобщенного преобразования Данкля устанавливаются свойства (k, a)-обобщенного преобразования Фурье при $a = 2/(2r + 1)$.

Ключевые слова: (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, обобщенное преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, свертка, обобщенные средние.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 48–62.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517.98 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-48-62

The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In harmonic analysis on a line with power weight, the unitary Dunkl transform first appeared. It depends on only one parameter $k \geqslant 0$. Then the two-parameter (k, a)-generalized Fourier transform appeared, a special case of which is the Dunkl transform ($a = 2$). The presence of the parameter $a > 0$ at $a \neq 2$ leads to the appearance of deformation properties. For example, for functions in Schwarz space, the generalized Fourier transform may not be infinitely differentiable or decay rapidly at infinity. In the case of the sequence $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, the deformation properties of the generalized Fourier transform are very weak and after some change of variables they disappear. The resulting unitary transform for $r = 0$ gives the usual Dunkl transform and has many of its properties. It is called the generalized Dunkl transform. We define the intertwining operator that establishes a connection between the second-order differential-difference operator, for which the kernel of the generalized Dunkl transform is an eigenfunction, and the one-dimensional Laplace operator and allows us to write the kernel in a form convenient for its estimates. Unlike the intertwining operator for the Dunkl transform, it has a nonzero kernel. In the paper, also on the basis of the properties of the generalized Dunkl transform, the properties of the (k, a)-generalized Fourier transform for $a = 2/(2r + 1)$ are established.

Keywords: (k, a)-generalized Fourier transform, generalized Dunkl transform, generalized translation operator, convolution, generalized means.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
Ivanov V. I., 2023, “The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 48–62.

1. Введение

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \geqslant -1/2$, $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) x^{-\alpha} J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя, Π — множество алгебраических многочленов, $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^\infty$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1), \quad n \geqslant 1,$$

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University.

— символ Похгаммера.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > -1/2$, $d\nu_\lambda(x) = c_\lambda |x|^{2\lambda+1}\,dx$ — нормированная мера на прямой $\mathbb{R}$ со степенным весом, $c_\lambda^{-1} = 2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)$, $dm_\lambda(t) = \widetilde{c}_\lambda(1-t^2)^{\lambda-1/2}\,dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1,1]$, $(\widetilde{c}_\lambda)^{-1} = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(\lambda+1)$.

В статье [1] начато, а в статье [2] продолжено изучение двупараметрического (r,λ)-обобщенного унитарного преобразования Данкля на прямой

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(-xy)\,d\nu_\lambda(x), \tag{1}$$

у которого ядро

$$e_{r,\lambda}(xy) = j_\lambda(xy) + i(-1)^r \frac{(xy)^{2r+1}}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}} j_{\lambda+2r+1}(xy) \tag{2}$$

является целой функцией экспоненциального типа 1 по каждой переменной. Оно имеет интегральное представление (см. [1, 2])

$$e_{r,\lambda}(xy) = \int_{-1}^{1} (1 + P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t)) e^{ixyt}\,dm_\lambda(t). \tag{3}$$

Одномерное преобразование Данкля $\mathcal{F}_\lambda(f)$ получается из (1) при $r=0$ (см., например, [3]).

В одномерном гармоническом анализе Данкля аналогами первой производной $f'(x)$ и одномерного оператора Лапласа $\Delta f(x) = f''(x)$ являются дифференциально-разностный оператор первого порядка

$$T_\lambda f(x) = f'(x) + \Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)\frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

и лапласиан Данкля

$$\Delta_\lambda f(x) = T_\lambda^2 f(x) = f''(x) + \big(2\lambda+1\big)\frac{f'(x)}{x} - \Big(\lambda+\frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.$$

Ядро преобразования Данкля $e_\lambda(xy) = e_{0,\lambda}(xy)$ является собственной функцией этих операторов. В статье [4] определен важный оператор гармонического анализа Данкля — оператор сплетения V_λ. В одномерном случае он может быть записан в явном виде

$$V_\lambda f(x) = \int_{-1}^{1} f(xt)(1+t)\,dm_\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Оператор V_λ положительный, действует в пространстве $C[-R,R]$, $\forall R > 0$ и устанавливает связь между дифференциально-разностными операторами Данкля и обычными дифференциальными операторами

$$V_\lambda f'(x) = T_\lambda V_\lambda f(x), \quad V_\lambda \Delta f(x) = \Delta_\lambda V_\lambda f(x), \quad f'' \in C(\mathbb{R}).$$

Он также позволяет записать ядро преобразования Данкля

$$e_\lambda(xy) = V_\lambda\big(e^{i(\cdot)y}\big)(x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ (2) обобщенного преобразования Данкля $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ (1) является собственной функцией дифференциально-разностного оператора (см. [1, 2])

$$\begin{aligned}\Delta_{r,\lambda} f(x) &= \Delta_\lambda f(x) - 2r(r+\lambda+1)\,\frac{f(x)-f(-x)}{x^2} \\ &= f''(x) + \big(2\lambda+1\big)\frac{f'(x)}{x} - \Big(2r(r+\lambda+1) + \lambda + \frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Пусть

$$V_{r,\lambda}f(x)=\int_{-1}^{1}f(xt)(1+P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t))\,dm_\lambda(t),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Оператор $V_{r,\lambda}$ действует в пространстве $C[-R,R]$, $\forall R>0$ и согласно (3)

$$e_{r,\lambda}(xy)=V_{r,\lambda}\big(e^{i(\cdot)y}\big)(x).$$

Если $\lambda\geqslant 0$, то оператор $V_{r,\lambda}$ положительный. Так как $P_1^{\lambda-1/2}(t)=t$, то $V_{0,\lambda}=V_\lambda$.

Наша цель — доказать, что $V_{r,\lambda}$ является оператором сплетения для обобщенного преобразования Данкля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $r\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$, $f^{''}\in C(\mathbb{R})$, то*

$$V_{r,\lambda}\Delta f(x)=\Delta_{r,\lambda}V_{r,\lambda}f(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Замечание. *Оператор сплетения V_λ (4) является изоморфизмом на* Π. *Оператор сплетения $V_{r,\lambda}$ (5) при $r\geqslant 1$ имеет ненулевое ядро*

$$\mathrm{Ker}V_{r,\lambda}=\{p\in\Pi\colon p(x)=\sum_{s=0}^{r-1}a_sx^{2s+1}\}.$$

Пусть $a>0$, $k\geqslant 0$, $2k+a-1>0$, $\lambda=(2k-1)/a$, $v_{k,a}(x)=|x|^{2k+a-2}$ – степенной вес, $d\mu_{k,a}(x)=c_{k,a}v_{k,a}(x)dx$ – нормированная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1}=2a^\lambda\Gamma(\lambda+1)$.

В статье [5] определено двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)b_{k,a}(xy)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{7}$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy)=j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{xy}{(ai)^{2/a}}\,j_{\lambda+\frac{2}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big). \tag{8}$$

Оно является обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ($a=2,k=0$), а также обобщением преобразования Данкля ($a=2$) (см. [3]). Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при $a\neq 2$ обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным (см. [1]). В частности, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ быстро убывает на бесконечности для любой $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, если только $a=2/n$, $n\in\mathbb{N}$.

Понятно, что деформационные свойства во многом связаны с аргументом $|xy|^{a/2}$ в ядре (2). Преобразование (1) и ядро (2) получаются из (7) и (8) при $a=2/(2r+1)$, $r\in\mathbb{R}$, $k=(\lambda a+1)/2$, $\lambda>-1/2$, заменой переменных

$$(2r+1)^{1/2}x^{\frac{1}{2r+1}}\to x,\quad (2r+1)^{1/2}y^{\frac{1}{2r+1}}\to y.$$

Здесь $x^{\frac{1}{2r+1}}$ — обратная функция для x^{2r+1} на $\mathbb{R}$. При этом мера $d\mu_{k,a}(x)$ перейдет в меру $d\nu_\lambda(x)$. Преобразование $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ с ядром $e_{r,\lambda}(xy)$ становится проще и удобнее для изучения. Установив его свойства, с помощью обратных замен переменных мы получим аналогичные свойства для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$. Возможно и обратное. Следуя этой методологии в работе устанавливаются свойства (k,a)-обобщенного преобразования Фурье при $a=2/(2r+1)$ на основе свойств обобщенного преобразования Данкля, полученных в статьях [1, 2]. В дальнейшем всегда $a=2/(2r+1)$, $r\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ — лебегово пространство μ-измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{\mathbb{R}} |f(x)|, \ p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций,

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leqslant cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

В секции 2 доказывается теорема 1. В секции 3 для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ определяются операторы обобщенного сдвига и устанавливаются их свойства. В секции 4 для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ определяются свертки и обобщенные средние. Для обобщенных средних исследуется L_p-сходимость и сходимость почти всюду.

2. Доказательство теоремы 1

Равенство (6) достаточно доказать для системы степеней $\{x^n\}_{n=0}^\infty$.

Если функция $f(x)$ — четная, то

$$\Delta_{r,\lambda} f(x) = \Delta_\lambda f(x), \quad V_{r,\lambda} f(x) = V_\lambda f(x),$$

поэтому равенство (6) верно для мономов x^{2s}. Отметим, что (см. [3, Chap. 16, 16.3(2)])

$$V_{r,\lambda} x^{2s} = V_\lambda x^{2s} = \frac{(1/2)_s}{(\lambda+1)_s}.$$

Пусть $n = 2s+1$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Применяя [6, Гл.16, 16.3(2)], получим

$$V_{r,\lambda} x^{2s+1} = x^{2s+1} \widetilde{c}_\lambda \int_{-1}^{1} t^{2s+1} P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2} \, dt$$

$$= x^{2s+1} \begin{cases} 0, \ s = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \frac{(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r}{(\lambda+1)_{s+r+1}}, \ s \geqslant r. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $\Delta x = 0$ и в силу (9) $V_{r,\lambda} x = 0$, то для монома x равенство (6) выполнено.

Если $1 \leqslant s \leqslant r-1$, то согласно (9) $V_{r,\lambda} x^{2s+1} = 0$, $0 \leqslant s-1 < r-1$, и вновь применяя (9), получим

$$V_{r,\lambda} \Delta x^{2s+1} = 2s(2s+1) V_{r,\lambda} x^{2(s-1)+1} = 0.$$

Следовательно, равенство (6) для x^{2s+1} при $1 \leqslant s \leqslant r-1$ выполнено.

Для $s \geqslant r$

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\lambda} x^{2s+1} &= [2s(2s+1) + (2\lambda+1)(2s+1) - (4r(r+\lambda+1) + 2\lambda + 1)] x^{2s-1} \\ &= 4(s-r)(s+r+\lambda+1) x^{2s-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Если $s = r$, то в силу (10) $\Delta_{r,\lambda} x^{2r+1} = 0$ и применяя (9), получим

$$\Delta_{r,\lambda} V_{r,\lambda} x^{2r+1} = \frac{(1/2)_{r+1} r!}{(\lambda+1)_{2r+1}} \Delta_{r,\lambda} x^{2r+1} = 0.$$

Опять применяя (9), получим

$$V_{r,\lambda} \Delta x^{2r+1} = 2r(2r+1) V_{r,\lambda} x^{2(r-1)+1} = 0.$$

Следовательно, равенство (6) для x^{2r+1} выполнено.

Если $s \geqslant r+1$, то $s-1 \geqslant r$ и применяя (9), (10), получим

$$V_{r,\lambda}\Delta x^{2s+1} = 2s(2s+1)V_{r,\lambda}x^{2(s-1)+1} = \frac{2s(2s+1)(1/2)_s(s-r)_r}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1} = \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r)_{r+1}}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1}.$$

Аналогично, применяя (9), (10), получим

$$\Delta_{r,\lambda}V_{r,\lambda}x^{2s+1} = \frac{(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r}{(\lambda+1)_{s+r+1}}\delta_{r,\lambda}x^{2s+1}$$

$$= \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r(s-r)(s+r+\lambda+1)}{(\lambda+1)_{s+r+1}}x^{2s-1} = \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r)_{r+1}}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1}.$$

Равенство (6) для x^{2s+1} при $s \geqslant r+1$ также выполнено.

Все случаи разобраны. Теорема 1 доказана.

3. Операторы обобщенного сдвига

Пусть $\lambda = (2k-1)/a = (2r+1)(k-1/2) > -1/2$. Преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ (7) запишем в виде

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e_{k,a}(-xy)\,d\mu_{k,a}(x),$$

где ядро

$$e_{k,a}(xy) = j_\lambda\big((2r+1)(xy)^{\frac{1}{2r+1}}\big) + i(-1)^r\frac{(2r+1)^{2r+1}xy}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}}\,j_{\lambda+2r+1}\big((2r+1)(xy)^{\frac{1}{2r+1}}\big).$$

Делая замены

$$\begin{gathered} u = (2r+1)^{1/2}x^{\frac{1}{2r+1}}, \quad x = (2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}, \quad v = (2r+1)^{1/2}y^{\frac{1}{2r+1}}, \\ y = (2r+1)^{-(r+1/2)}v^{2r+1}, \quad f(x) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = h(u), \end{gathered} \tag{11}$$

получим

$$e_{k,a}(xy) = e_{r,\lambda}(uv), \quad \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(v), \quad \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,d\nu_\lambda}. \tag{12}$$

Пусть $w = (2r+1)^{1/2}z^{\frac{1}{2r+1}}$, $z = (2r+1)^{-(r+1/2)}w^{2r+1}$,

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{k,a}(yz)e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \tag{13}$$

$$T^y_{k,a}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda\big((2r+1)(yz)^{\frac{1}{2r+1}}\big)e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \tag{14}$$

$$\tau^v_{r,\lambda}h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(vw)e_{r,\lambda}(uw)\mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(w)\,d\nu_\lambda(w),$$

$$T^v_{r,\lambda}h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(vw)e_{r,\lambda}(uw)\mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(w)\,d\nu_\lambda(w)$$

— операторы обобщенного сдвига для преобразований $\mathcal{F}_{k,a}$ и $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ соответственно. Согласно формулам (11), (12)

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \tau^v_{r,\lambda}h(u), \quad T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}h(u). \tag{15}$$

Пусть

$$\lambda_0 = \lambda - 1/2, \quad A = (u^2 + v^2 - 2uvt)^{1/2}, \quad A_r = \big(x^{\frac{2}{2r+1}} + y^{\frac{2}{2r+1}} - 2(xy)^{\frac{1}{2r+1}}t\big)^{1/2}. \tag{16}$$

Для операторов обобщенного сдвига $\tau^v_{r,\lambda}$, $T^v_{r,\lambda}$ известны представления (см. [2])

$$\tau^v_{r,\lambda}h(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{h(A)\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{v-ut}{A}\Big)\Big)$$

$$+h(-A)\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{v-ut}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t), \tag{17}$$

$$T^v_{r,\lambda}h(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{h(A)\Big(1 + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big)\Big) + h(-A)\Big(1 - P^{(\lambda_0}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{18}$$

В силу формул (11)

$$h(A) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}A^{2r+1}) = f(A_r^{2r+1}),$$

поэтому, делая замены (11) в (17), (18) и применяя (15), придем к утверждению.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 > 0$, A_r определено в (16). Для операторов обобщенного сдвига $\tau^y_{k,a}$, $T^y_{k,a}$ справедливы представления*

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)$$

$$+P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{y^{\frac{1}{2r+1}} - x^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big) + f(-A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t)$$

$$-P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{y^{\frac{1}{2r+1}} - x^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t), \tag{19}$$

$$T^y_{k,a}f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A_r^{2r+1})\Big(1 + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big)$$

$$+f(-A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{20}$$

Следствие 1. *На подпространстве четных функций*

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \int_{-1}^{1} f(A_r^{2r+1})(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t))\,dm_\lambda(t).$$

Пусть $\|e_{r,\lambda}(uv)\|_\infty = \|e_{k,a}(xy)\|_\infty = M_{r,\lambda}$, $d_{n,\alpha} = \max\limits_{[-1,1]}|P_n^{(\alpha)}(t)|$. Справедливы оценки (см. [1, 2])

$$M_{r,\lambda} \leqslant 1 + d_{2r,\lambda_0},\ -1/2 < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1,\ \lambda \geqslant 0.$$

Из формулы (3) для ядра $e_{r,\lambda}(xy)$ вытекает оценка

$$|(e_{r,\lambda}(xy))^{(n)}_x| \leqslant M_{r,\lambda}|y|^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть

$$M^\tau_{r,\lambda} = \begin{cases} 1 + 3d_{2r+1,\lambda_0},\ -1/2 < \lambda < 0, \\ 4,\ \lambda \geqslant 0, \end{cases}$$

$$M_{r,\lambda}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r+1,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая оценки L^p-норм операторов $\tau_{r,\lambda}^v$, $T_{r,\lambda}^v$ (см. [2]), равенства (15), получим утверждение.

Теорема 3. *Для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y \in \mathbb{R}$, линейные операторы* (13) *и* (14) *ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau, \quad \|T_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^T. \tag{21}$$

На подпространстве четных функций $\|\tau_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^T$.
Для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и любого $x \in \mathbb{R}$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |T_{k,a}^y f(x)|^p \, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p} \leqslant \big(1 + d_{2r+1,\lambda_0}\big)\big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |T_{k,a}^y f(x)|^p \, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p} \leqslant \big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Неравенство (21) для оператора $\tau_{k,a}^y$ при $\lambda \geqslant 0$ доказано в статье [7]. Выражение A_r для записи оператора $\tau_{k,a}^y$ применялось в статьях [8, 9].

Свойства операторов обобщенного сдвига $\tau_{k,a}^y$, $T_{k,a}^y$, вытекающие из свойств операторов $\tau_{r,\lambda}^y$, $T_{r,\lambda}^y$ в статье [2], собраны в следующем предложении.

Предложение 1. *Для операторов обобщенного сдвига* (13), (14) *справедливы следующие свойства:*

1) *если* $\lambda \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, *то* $T_{k,a}^y f(x) \geqslant 0$;
2) $\tau_{k,a}^0 f(x) = T_{k,a}^0 f(x) = f(x)$;
3) $\tau_{k,a}^y 1 = T_{k,a}^y 1 = 1$;
4) $\tau_{k,a}^y e_{k,a}(xz) = e_{k,a}(yz) e_{k,a}(xz)$, $T_{k,a}^y e_{k,a}(xz) = j_\lambda((2r+1)(yz)^{\frac{1}{2r+1}}) e_{k,a}(xz)$;
5) *если* $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}} \tau_{k,a}^y f(x) g(x) \, d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tau_{k,a}^{-y} g(x) \, d\mu_{k,a}(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T_{k,a}^y f(x) g(x) \, d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T_{k,a}^y g(x) \, d\mu_{k,a}(x);$$
6) *если* $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}} \tau_{k,a}^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T_{k,a}^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x);$$
7) если $\delta > 0$, $\operatorname{supp} f \subset [-\delta, \delta]$, $|y| \leqslant \delta$ и $\delta_1 = \big(|y|^{\frac{1}{2r+1}} + \delta^{\frac{1}{2r+1}}\big)^{2r+1}$, то
$\operatorname{supp} \tau_{k,a}^y f$, $\operatorname{supp} T_{k,a}^y f \subset [-\delta_1, \delta_1]$; если $|y| > \delta$ и $\delta_2 = \big(|y|^{\frac{1}{2r+1}} - \delta^{\frac{1}{2r+1}}\big)^{2r+1}$, то
$\operatorname{supp} \tau_{k,a}^y f$, $\operatorname{supp} T_{k,a}^y f \subset [-\delta_1, -\delta_2] \cup [\delta_2, \delta_1]$.

Пусть

$$\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(x^{\frac{1}{2r+1}}) + xF_2(x^{\frac{1}{2r+1}}) \colon \ F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ F_1, F_2 - \text{четные}\},$$

$$\mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}) = \{h(u) = F_1(u) + u^{2r+1}F_2(u)\colon\ F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ F_1, F_2 - \text{четные}\}.$$

Известно, что (см. [1, 10])

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(\mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}). \tag{22}$$

Так как для $f \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$ произведение

$$e_{k,a}(xz)f(z)$$

$$= (j_\lambda((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}) + cxzj_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}))(F_1(z^{\frac{1}{2r+1}}) + zF_2(z^{\frac{1}{2r+1}}))$$

$$= \{(j_\lambda(2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_1(z^{\frac{1}{2r+1}}) + cx(z^{\frac{1}{2r+1}})^{4r+2}j_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}))F_2(z^{\frac{1}{2r+1}})\}$$

$$+z\{j_\lambda((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_2(z^{\frac{1}{2r+1}}) + cxj_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_1(z^{\frac{1}{2r+1}})\}$$

принадлежит $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ по переменной z, то в силу (22)

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \mathcal{F}_{k,a}(e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z))(-y) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$$

по переменной y. В силу симметрии $\tau^y_{k,a}f(x)$ по x и y, $\tau^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ по переменной x. Аналогично разбираются случаи операторов обобщенного сдвига $T^y_{k,a}f(x)$, $\tau^v_{r,\lambda}h(u)$, $T^v_{r,\lambda}h(u)$. Таким образом, справедливо утверждение.

Предложение 2. Если $f \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R})$, то по всем переменным

$$\tau^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}), \quad T^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}), \quad \tau^v_{r,\lambda}h(u) \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}), \quad T^v_{r,\lambda}h(u) \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}).$$

4. Свертки и обобщенные средние

Пусть x и u, y и v связаны соотношениями (11), функции $f(x)$ и $h(u)$, $g(x)$ и $l(u)$ связаны соотношениями

$$f(x) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = h(u), \quad g(x) = g((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = l(u).$$

Определим четыре свертки

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}g(y)\,d\mu_{k,a}(y), \quad (f *_{T_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a}f(x)g(y)\,d\mu_{k,a}(y),$$

$$(h *_{\tau_{r,\lambda}} l)(u) = \int_{\mathbb{R}} h(v)\tau^{-u}_{r,\lambda}l(v)\,d\nu_\lambda(v), \quad (h *_{T_{r,\lambda}} l)(u) = \int_{\mathbb{R}} T^v_{r,\lambda}h(u)l(v)\,d\nu_\lambda(v).$$

Функция $g(y)$ в свертке, определяемой оператором $T^y_{k,a}$, предполагается четной. Тогда функция $l(v)$ также будет четной.

Так как $\tau^{-x}_{k,a}g(y) = \tau^{-u}_{r,\lambda}l(v)$, $T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}h(u)$ (15), то

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (h *_{\tau_{r,\lambda}} l)(u), \quad (f *_{T_{k,a}} g)(x) = (h *_{T_{r,\lambda}} l)(u).$$

Следовательно, свойства сверток, определяемых с помощью преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$, установленные в статье [2], будут справедливы и для сверток, определяемых с помощью преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1/p+1/q \geqslant 1$ *и* $1/s = 1/p+1/q-1$. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*

$$\|(f *_{\tau_{k,a}} g)\|_{s,d\mu_{k,a}} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}\|g\|_{q,d\mu_{k,a}},$$

$$\|(f *_{T_{k,a}} g)\|_{s,d\mu_{k,a}} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}\|g\|_{q,d\mu_{k,a}}.$$

Пусть

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{f \in C_b(\mathbb{R}):\ f,\, \mathcal{F}_{k,a}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})\}.$$

Предложение 3. *Если $f \in \mathcal{A}_{k,a}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и g — четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (f *_{T_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y_{k,a} f(x) g(y)\, d\mu_{k,a}(y),$$

$$\mathcal{F}_{k,a}(f *_{\tau_{k,a}} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f *_{T_{k,a}} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f)(y)\mathcal{F}_{k,a}(g)(y).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (f *_{T_{k,a}} g)(x)$ почти всюду.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+a-1)}\widehat{\varphi}\big(\varepsilon^{-1}y\big), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1.$$

Под $L^\infty(\mathbb{R})$ далее будем понимать $C_0(\mathbb{R})$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определим (k,a)-обобщенные средние

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = (f *_{\tau_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y). \tag{23}$$

Функция φ — генератор обобщенных средних (23). Если функция $\varphi(x)$ — четная, то согласно теореме 4 почти всюду

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = \Phi^T_\varepsilon f(x) = (f *_{T_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a} f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y).$$

При рассмотрении средних $\Phi^T_\varepsilon f(x)$ будем всегда предполагать, что генератор четный.

В силу теоремы 4

$$\|\Phi^\tau_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \|\Phi^T_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}.$$

Пусть $\psi(u) = \varphi((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = \varphi(x)$, $\widehat{\psi}(v) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\psi)(v)$, $\widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\psi(\varepsilon(\cdot)))(v)$. Для четной φ функция ψ тоже четная. Согласно (11), (12), (15)

$$\widehat{\psi}(v) = \widehat{\varphi}(y), \quad \psi, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda), \quad \psi(0) = 1, \quad \widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\psi}\big(\varepsilon^{-1}v\big),$$

$$\widehat{\psi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_\varepsilon(v)\, d\nu_\lambda(v) = 1, \quad \tau^{-u}_{r,\lambda}\widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \tau^{-x}_{k,a}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y).$$

Если $h(u) = \varphi((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = f(x)$, то для (r,λ)-обобщенных средних

$$\Psi^\tau_\varepsilon h(u) = (f *_{\tau_{r,\lambda}} \widehat{\psi}_\varepsilon)(u) = (f *_{\tau_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \Phi^\tau_\varepsilon f(x). \tag{24}$$

Таким образом, для (k,a)-обобщенных средних справедливы те же свойства, что и для (r,λ)-обобщенных средних. Используя результаты статьи [2], получим следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R})$ при $p = \infty$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - \Phi^\tau_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} = 0.$$

Обобщенные средние, для которых выполняется теорема 4 называются регулярными.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 4 функция φ — четная, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\mu_{k,a}}=0.$$

При доказательстве теоремы 4 для обобщенного преобразования Данкля в статье [2] использовались модули непрерывности

$$\omega_\tau(\delta,h)_{p,d\nu_\lambda}=\sup_{|v|\leqslant\delta}\|\tau_{r,\lambda}^v h-h\|_{p,d\nu_\lambda},\quad \omega_T(\delta,h)_{p,d\nu_\lambda}=\sup_{|v|\leqslant\delta}\|T_{r,\lambda}^v h-h\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для деформированного обобщенного преобразования Данкля они будут иметь вид

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_{k,a}^y f-f\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad \omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\leqslant\delta}\|T_{k,a}^y f-f\|_{p,d\mu_{k,a}}.$$

Если h и f связаны соотношением (11), то между модулями непрерывности имеет место простая связь

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\omega_\tau((2r+1)^{1/2}\delta^{\frac{1}{2r+1}},h)_{p,d\nu_\lambda},$$

$$\omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\omega_T((2r+1)^{1/2}\delta^{\frac{1}{2r+1}},h)_{p,d\nu_\lambda},$$

то есть они стремятся к нулю при $\delta\to 0$ одновременно.

В статье [2] для обобщенного преобразования Данкля исследованы обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Все они порождены четными генераторами. Рассмотрим их аналоги для деформированного обобщенного преобразования Данкля или (k,a)-обобщенного преобразования Фурье при $a=2/(2r+1)$.

Напомним, что $\lambda=(2k-1)/a$. Генератором обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса будет функция $\varphi(x)=e^{-x^a/a}\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$. Известно [5, Theorem 5.1], что

$$\widehat{\varphi}=\varphi\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}).\tag{25}$$

Следовательно, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса регулярные.

Для обобщенных средних Пуассона $\varphi(x)=e^{-2|x|^{a/2}/a}\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$. Согласно [6, Гл.8, 8.6(4)]

$$\widehat{\varphi}(y)=c_{\lambda,r}\big(1+|y|^a\big)^{-(\lambda+3/2)}\lesssim(1+|y|)^{-(2k-1+3a/2)}\ \text{ и }\ \widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a}).\tag{26}$$

Обобщенные средние Пуассона также являются регулярными.

Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x)=\begin{cases}\big(1-|x|^a\big)^\delta, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}\qquad \widehat{\varphi}(y)=c_{\lambda,r,\delta}j_{\lambda+\delta+1}\big(2|y|^{\frac{a}{2}}/a\big),\quad \delta>0$$

(см. [6, Гл.8, 8.5(33)]). Генератор $\varphi\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$. Из асимптотики функции Бесселя [11, Гл.7, 7.1]

$$|\widehat{\varphi}(y)|\lesssim(1+|y|)^{-(2k+a-2+a(\delta-\lambda-1/2)/2)}\ \text{ и }\ \widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a}),\tag{27}$$

если только $\delta>\delta_0=\lambda+1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta>\delta_0$, то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

Если L^p-сходимость Φ_ε^τ-средних мы получали на основе известной информации о L^p-сходимости Ψ_ε^τ-средних, то при исследовании сходимости почти всюду удобнее вначале рассмотреть Φ_ε^τ-средние и изучить их мажоранту

$$\Phi^\tau f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|\Phi_\varepsilon^\tau f(x)|.$$

Для этого будем использовать функцию распределения

$$d_{f,\mu}(\alpha) = \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|>\alpha\}} d\mu_{k,a}(x) \tag{28}$$

и пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ измеримых функций, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} = \sup\{\alpha(d_{f,\mu}(\alpha))^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} \tag{29}$$

(см. [12, Sect. 1.4.1]).

Пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ называют слабым L^p-пространством. Имеет место строгое вложение $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и $\|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}$.

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних $\Phi^\tau_\varepsilon f(x)$ будем опираться на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [12, Theorem 2.1.14]).

Предложение 4. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, множество $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ плотно в $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$. Если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ выполнено неравенство*

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} \lesssim \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \tag{30}$$

и для любой $f \in D$ обобщенные средние $\Phi^\tau_\varepsilon f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, то они сходятся к $f(x)$ почти всюду для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$.

Неравенство (30) называют слабым L^p-неравенством. По теореме 5 в качестве множества D можно взять $C_0(\mathbb{R})$. В этом случае будет иметь место даже равномерная сходимость. Для доказательства неравенства (30) нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}$. Для функции $f \in$ $\in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и (k,a)-обобщенного деформированного преобразования Данкля максимальную функцию $\mathcal{M}_{k,a}f$ определим с помощью свертки

$$\mathcal{M}_{k,a}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}\chi_{[-s,s]}(y)\, d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)}.$$

Применяя предложение 4 и четность оператора T^y по y, получим

$$\mathcal{M}_{k,a}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a}f(x)\chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)} = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\chi_{[0,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_0^\infty \chi_{[0,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)}.$$

Лемма 1. *Если $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, справедлива оценка $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2k+a-1+\gamma)}$ и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$*

$$\Phi^\tau f(x) \lesssim \mathcal{M}_{k,a}|f|(x).$$

Доказательство. Согласно предложениям 1, 3, $T^y_{k,a}$ — положительный оператор и для почти всех x, $(f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$. Отсюда $|T^y_{k,a}f(x)| \leqslant T^y_{k,a}|f|(x)$ и

$$\Phi^\tau f(x) = \Phi^T f(x) \leqslant \sup_{\varepsilon>0}(|f| *_T |\widehat{\varphi}_\varepsilon|)(x), \quad \mathcal{M}_{k,a}f(x) \leqslant \mathcal{M}_{k,a}|f|(x).$$

Следовательно, мы можем далее считать, что $f(x), \widehat{\varphi}(y) \geqslant 0$.

Используя разложение

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1}]}(y),$$

равенство $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+a-1)}\widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y)$, эквивалентность условия $\lambda = (2k-1)/a \geqslant 0$ условию $k \geqslant 1/2$, получим

$$\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon 2^j,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)$$

$$\lesssim \sum_{j=-\infty}^{\infty}(1+2^j)^{-\gamma}\Big(\frac{2^j}{1+2^j}\Big)^{2k+a-1}\frac{\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\chi_{[0,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)}{\int_0^\infty \chi_{[0,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)}$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}\big(2^{-\gamma j}+2^{-(2k+a-1)j}\big)\mathcal{M}_{k,a}f(x) \lesssim \mathcal{M}_{k,a}f(x).$$

Предложение 5 доказано.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{k,a}f$ обобщенного преобразования Фурье при $a = 2/(2r+1)$ справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$ [13]. Следовательно, в условиях предложения 5 для мажоранты обобщенных средних $\Phi^\tau f$ справедливо неравенство (30) и мы приходим к утверждению.

Теорема 6. *Пусть $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, и $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2k+a-1+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то почти всюду*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = f(x).$$

Учитывая свойства (25)–(27) обобщенных деформированных преобразований Данкля генераторов обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса при $\delta > \delta_0$, мы получаем их сходимость почти всюду для функций из $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, если $\lambda \geqslant 0$.

Аналогично функции распределения (28), квазинормы (29), пространства $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ мы можем определить функцию распределения $d_{h,\nu}(\alpha)$, квазинорму $\|h\|_{p,\infty,d\nu_\lambda}$, пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Применяя замены (11), получим

$$T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}f(u), \quad d_{f,\mu}(\alpha) = d_{h,\nu}(\alpha),$$

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,\infty,d\nu_\lambda},$$

поэтому

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}h(u) = \sup_{t>0}\frac{\Big|\int_{\mathbb{R}} T^v_{r,\lambda}h(u)\chi_{[-t,t]}(y)d\nu_\lambda(v)\Big|}{\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-t,t]}(v)d\nu_\lambda(v)} = \mathcal{M}_{k,a}f(x)$$

и

$$\|\mathcal{M}_{r,\lambda}h\|_{1,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|h\|_{1,d\nu_\lambda}, \quad \|\mathcal{M}_{r,\lambda}h\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \|h\|_{p,d\nu_\lambda},\ 1 < p < \infty. \tag{31}$$

Аналогично лемме 1 для мажоранты $\Psi^\tau h(u) = \sup_{\varepsilon>0}|\Psi^\tau_\varepsilon h(u)|$ доказывается утверждение

Лемма 2. *Если $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\psi \in \mathcal{A}_{r,\lambda}$, $\psi(0) = 1$, справедлива оценка $|\widehat{\psi}(v)| \lesssim (1+|v|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ и $h \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то для почти всех $u \in \mathbb{R}$*

$$\Psi^\tau h(u) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda}|h|(u).$$

Применяя для средних $\Psi^\tau_\varepsilon h$ аналог предложения 4, лемму 2, (31), получим утверждение.

Теорема 7. *Пусть $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\psi \in \mathcal{A}_{r,\lambda}$, $\psi(0) = 1$, и $|\widehat{\psi}(v)| \lesssim (1+|v|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то почти всюду*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi^\tau_\varepsilon h(u) = h(u).$$

Как и в предыдущем случае для обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса (при $\delta > \delta_0$) обобщенного преобразования Данкля для функций из пространства $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ имеет место сходимость почти всюду.

5. Заключение

В работе для обобщенного преобразования Данкля определен оператор сплетения, который устанавливает связь дифференциально-разностных операторов с обычными производными и позволяет записать ядро обобщенного преобразования Данкля в виде, удобном для его оценок, включая оценки производных. По-видимому, этот путь, как и в случае преобразования Данкля (см. [3, Chap. 2, 2.4]), можно реализовать в многомерном случае. Дополнительные трудности будут связаны с тем, что ядро оператора сплетения будет ненулевым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

2. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.

3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

4. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.

5. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных представлений. Том 2. М.: Наука, 1970. 328 с.

7. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.

8. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 1–39.

9. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, no. 3. Article 186.

10. Иванов В. И. Одномерное (k, a)-обобщенное преобразование Фурье // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 24, № 4. С. 92–108.

11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

12. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.

13. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // Journal of Inequalities and Applications. 2022. Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

REFERENCES

1. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S., 2023, "On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform" , *Forum of Mathematics, Sigma*, vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

2. Ivanov V. I., 2023, "Undeformed generalized Dunkl transform on the line" , *Math. Notes.*, vol. 114, no. 4, pp. 509–524.

3. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

4. Dunkl C. F., 1991, "Integral kernels with reflection group invariance" , *Canad. J. Math.*, vol. 43, pp. 1213–1227.

5. Saïd S., Kobayashi T., Orsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

6. Bateman H., Erdŕelyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms, Vol. II" , *New York: McGraw Hill Book Company*, 451 p.

7. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M., 2022, "A new product formula involving Bessel functions" , *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 33, no. 3, pp. 247–263.

8. Mejjaoli H., 2022, "Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory" , *Int. J. Reprod. Kernels*, vol. 1, no. 1, pp. 1–39.

9. Mejjaoli H., Trimèche K., 2023, "Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform" , *Mediterr. J. Math.*, vol. 20, no. 3, Article 186.

10. Ivanov V. I., 2023, "One-dimensional (k, a)-generalized Fourier transform" , *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 24, no. 4, pp. 92–108. (In Russian)

11. Watson G. N., 1995, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions" , *Cambridge: Cambridge University Press*, 804 p.

12. Grafacos L., 2008, "Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249" , *New York: Springer Science+Business Media, LLC*, 489 p.

13. Ben Saïd S., Negzaoui S., 2022, "Norm inequalities for maximal operators" , *Journal of Inequalities and Applications*, Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

Получено 13.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-63-77

Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма

В. О. Кирова, И. В Годунов

Кирова Валерия Орлановна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kirova_vo@mail.ru
Годунов Игорь Валентинович — Российский государственный социальный университет (г. Москва).
e-mail: godunov.biz@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов, а именно комбинаторная сложность и ее модификации. Прежде всего, представлен обзор имеющихся результатов для класса слов с наименьшей комбинаторной сложностью - слов Штурма. Особое внимание уделено арифметической сложности бесконечных слов, начало изучение которой положила Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях. Арифметическая сложность является в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности. Представлен обзор текущих результатов и точных значений арифметической сложности для слов Штурма. В статье представлена полиномиальная Теорема Ван дер Вардена, дающая начало изучению более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов. В завершение, мы представляем ряд открытых проблем для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: Слова Штурма, комбинаторная сложность, арифметическая сложность, полиномиальная сложность.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:
В. О. Кирова, И. В. Годунов. Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 63–77.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-63-77

On the complexity functions of Sturmian words

V. O. Kirova, I. V Godunov

Kirova Valeria Orlanovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: Kirova_vo@mail.ru
Godunov Igor Valentinovich — Russian State Social University (Moscow).
e-mail: godunov.biz@gmail.com

Abstract

The key issue of the paper is combinatorial complexity functions of infinite words, especially factor complexity and its modifications. First of all, we present an overview of the available results for the class of words with the minimal factor complexity - Sturmian words. Special attention is paid to the arithmetical complexity of infinite words, the study of which was initiated by Van der Waarden Theorem on one-color arithmetic progressions. Arithmetical complexity is presented in a sense a modification of factor complexity. An overview of current results and exact values of arithmetic complexity for Sturmian words is presented. We present polynomial Van der Waerden Theorem, which gives rise to the study of a more generalized modification of the factor complexity function - the polynomial complexity of infinite words. In conclusion, we present open problems for further research.

Keywords: Sturmian word, factor complexity, arithmetical complexity, polynomial complexity.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
V. O. Kirova, I. V. Godunov, 2023, "On the complexity functions of Sturmian words" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 63–77.

Посвящается 60-летию профессора Канеля — Белова А. Я.

1. Введение

Изучение комбинаторики слов началось в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [38, 39], и продолжено Морсом и Хедлундом [21] в 1940 году. В своей работе [38] Туэ поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. Такие слова называются *квадратами*. Например, это было бы слово $ababab$, в котором есть три последовательных вхождения квадрата ab. Очевидно, что если алфавит состоит из двух символов, то не существует бесконечных слов без квадратов. Однако Туэ построил пример такого слова над 3-буквенным алфавитом. Полученные результаты легли в основу нового направления исследований - теории избегаемости.

Пусть Σ_q- алфавит мощности q. Слово вида $w = \cdots w_{-2}w_{-1}w_0w_1w_2\cdots$, где все $w_i \in \Sigma_q$, называется *бесконечным в обе стороны*. Слово называется *бесконечным вправо*, если имеет вид $w = w_0\ w_1w_2\cdots$. Количество символов n в конечном слове $w = w_0\cdots w_n$ называется *длиной слова* w и обозначается через $|w|$. Число вхождений символа a в слово w обозначается через $|w|_a$. Ключевую роль в изучении комбинаторных характеристик бесконечных слов имеют *подслова* (в англоязычной литературе принято употреблять понятие *фактор*) слова w – конечные слова $w_kw_{k+1}\cdots w_{k+n-1}$ длины n.

Пример 1. *Рассмотрим бесконечное вправо слово* $w = 0011100100111\cdots$ *над бинарным алфавитом* $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. *Конечное слово* $u = 001$ *является его подсловом длины* $|u| = 3$. *Существуют как минимум три его вхождения в слово* w: $u = w_{[0,2]}$, $u = w_{[5,7]}$ *и* $u = w_{[8,10]}$. *Нули входят в слово и два раза, а единица один, и обозначается* $|u|_0 = 2$ *и* $|u|_1 = 1$ *соответственно.*

Слово w называется *периодическим*, если существует $T \in \mathbb{N}$ такое что для всех i верно равенство : $w_i = w_i + T$. Слово называется *со временем периодическим* если существуют T, $i_0 \in N$ для которых верно $\forall i \geq i_0 : w_i = w_i + T$. Бесконечное вправо слово w называется *со временем t-периодическим*, если равенства $w_i = w_{i+t}$ выполняются, начиная с некоторого N_0, то есть при $i > N_0$.

Нетрудно видеть, что всего существует q^t бесконечных t-периодических слов над конечным алфавитом Σ_q - независимо от того, о каких слова идет речь: бесконечных вправо или в обе стороны.

В 1940 году в работе [21] Морс и Хедлунд ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят следующее понятие, являющееся ключевым в комбинаторике слов. *Комбинаторной сложностью* (или *факторной* сложностью) слова w называется количество подслов длины n и обозначается $p_w(n)$.

Следующие две леммы являются классическими результатами комбинаторики на словах и упоминаются практически в каждой монографии на эту тему.

Лемма 1. *Бесконечное в обе стороны (вправо) слово w является периодическим (со временем периодическим) тогда и только тогда, когда его комбинаторная сложность $p_w(n)$ ограничена сверху константой, и, начиная с некоторого момента, равна этой константе.*

Лемма 2. *Если слово w не является со временем периодическим, то для любого n для его комбинаторной сложности $p_w(n)$ верно неравенство $p_w(n) \geq n+1$.*

Для бесконечного слова w результат, полученный М. Ковеном и Г. Хедлундом, гласит, что если $p_w(n) \leq n$, то слово w является со временем периодическим. В частности, ими была доказана следующая Теорема.

Теорема 1 (Coven, Hedlund). *Пусть w - слово над алфавитом мощности q. Следующие условия эквивалентны:*

- $p_w(n) < n+q-1$ *для любого* n,
- $p_w(n) = p_w(n+1)$ *для любого* n,
- *функция* $p_w(n)$ *ограничена,*
- *слово w со временем периодично.*

Слова, для которых при всех n верно равенство $p_w(n) = n+1$, то есть непериодические слова с наименьшей комбинаторной сложностью, образуют класс так называемых *слов Штурма*. Подробнее о них рассказывается в следующем разделе. Раздел 3 посвящен арифметической сложности слов Штурма, начало изучение которой положила Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях. Арифметическая сложность являеся в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности. В разделе 4 представлена полиномиальная Теорема Ван дер Вардена, дающая начало изучению более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов.

2. Слова Штурма

Слова Штурма имеют долгую историю. Они относятся к классу бесконечных слов и хорошо изучены. Первые изложения были представлены Бернулли, Кристоэлем и Марковым в книге А. Венкова [40]. Термин *слово Штурма* впервые был введен в Хедлундом и Морсом работе [23] при развитии символической динамики [21], [22]. Большое количество работ посвящено свойствам этих последовательностей ([34], [18], [35]). В работах Раузи [29],[30], [31], Браун [8], Ито и Ясутоми [24] рассматривали комбинаторные свойства слов Штурма. Связь с итерационными морфизмами были рассмотрены в работаех Сиболда [33] и Мигноси [26]. Слова Штурма присутствуют в таких областях как эргодическая теория [28], компьютерная графика [9] и кристаллография.

Слова Штурма имеют несколько эквивалентных определений [5] , включая определение комбинаторной сложности. Прежде всего, бесконечное вправо слово $w = w_0w_1w_2\cdots$ над бинарным алфавитом $\{0,1\}$ называется словом Штурма, если его комбинаторная сложность $p_w(n)$ равна $n+1$ для всех значений n.

Помимо приведенного выше определения, существует несколько эквивалентных определений слов Штурма [5].

Бесконечное вправо слово называется словом Штурма, если оно является непериодически *уравновешенным* словом, т.е. для каждого значения n число единиц в подсловах слова w длины n принимает не более двух значений - в действительности, ровно два соседних значения. Это определение может быть записано следующим равенством: пусть u и v – два подслова слова w одинаковой длины. Пусть $|u|_1$ и $|v|_1$ – количество единиц в подсловах u и v соответственно. Тогда

$$||u|_1 - |v|_1| \leq 1.$$

Слова Штурма - это в точности *механические* слова с иррациональным наклоном, т.е. бесконечное вправо или в обе стороны слово, каждый символ которого задан одним из двух равенств:

$$w_i = \lfloor \alpha(i+1) + \beta \rfloor \ - \ \lfloor \alpha i + \beta \rfloor,$$

или

$$w_i = \lceil \alpha(i+1) + \beta \rceil - \lceil \alpha i + \beta \rceil$$

где $\alpha \in (0,1)$ - это *иррациональный наклон* слова Штурма, и $\beta \in [0,1)$. Мы можем говорить о *нижних* и *верхних* словах Штурма если в определении выбрана нижняя или верхняя целая часть. Оба варианта совпадают в случае, когда $\alpha i + \beta$ не является целым. Определения будут эквивалентны только в случае бесконечных вправо слов, так как не всякое бесконечное в обе стороны слово со сложностью $n+1$ будет словом Штурма.

Приведенное выше определение можно эквивалентным образом переписать с помощью вращения единичной окружности - двоичного кодирования траектории точки на окружности длины 1. Этот круг реализуется как интервал $[0,1]$, идентифицирующий 0 и 1, то есть принимающий дробные части $x \mapsto x mod 1$, и каждый символ записывается по правилу:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\alpha i + \beta\} \in [1-\alpha, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $i \geq 0$.

В терминах окружности это звучит так: начните с точки $x_0 = \beta$ на окружности и поворачивайте дугу длиной α в каждый дискретный момент времени $x_{k+1} = (\alpha + x_k) mod 1$, затем закодируйте результирующие точки на 1, когда они принадлежат к $I_1 = [1-\alpha, 1]$ и 0, когда они принадлежат к $I_0 = [0, 1-\alpha]$.

Мы видели, что символы в слове Штурма w соответствуют интервалам I_0 и I_1, этот процесс можно повторить, чтобы объяснить, что происходит с факторами из $\{0,1\}^n$. В результате коэффициенты соответствуют интервалам окружности, ограниченным $0, -\alpha, -2\alpha, \cdots, -n\alpha$, по модулю 1. Обратите внимание, что, поскольку α иррационально, то точки $0, -\alpha, -2\alpha, \cdots, -n\alpha$, по модулю 1 все различны. Таким образом, приведенные выше точки ограничивают интервалы окружности $n+1$: у нас есть $n+1$ возможных факторов из $\{0,1\}^n$ длины n, появляющихся в слове w.

Пример 2. *Если взять* $\alpha = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 - 1$ *и* $\beta = 0$, *то получится слово*

$$w = 0100101001001010010100100101001001\ldots$$

которое называется словом Фибоначчи, *и является классическим примером слова Штурма.*

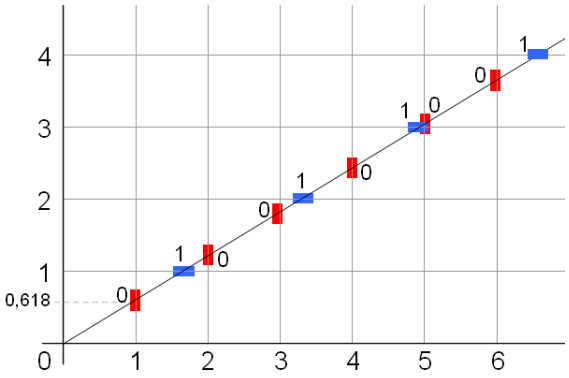


Рис. 1: Построение слова Фибоначчи

В качестве примера слова Штурма на рисунке 1 изображено построение слова Фибоначчи как механического слова: его очередной символ равен нулю тогда и только тогда, когда прямая $y = \alpha i + \beta$, где $0 \leq \alpha, \beta < 1$, не пересекает целочисленную горизонталь между двумя целочисленными вертикалями, и единице, если она ее пересекает.

Заметим, что количество единиц в подслове длины n слова Штурма с наклоном α может быть равно либо $\lfloor n\alpha \rfloor$, либо $\lceil n\alpha \rceil$, в полном соответствии с определением слова Штурма как уравновешенного слова.

Все эти эквивалентные определения относятся к словам над алфавитом $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Слово над любым другим бинарным алфавитом называется словом Штурма, если получается из слова Штурма над алфавитом $\{0, 1\}$ взаимно однозначным переименованием символов.

Мигноси [26], основываясь на предположении о неоднозначности языка [15], доказал в 1989 году следующую важную теорему.

Теорема 2. *Количество подслов длины n в слове Штурма определяется суммой*

$$1 + \sum_{1}^{n} (n - i + 1)\phi(i)$$

где $\phi(i)$– функция Эйлера.

Доказательство этой теоремы основано на тонком анализе структуры слова Штурма. Однако Берсель и Поккьоль [6] представили доказательство формулы с помощью геометрического двойственного метода. Метод основан на том, что каждому заданному двумя параметрами слову можно поставить в соответствие точку на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной связной области будут соответствовать одному и тому же слову. В данном случае области оказываются гранями плоского графа, а значит их количество можно посчитать по формуле Эйлера. Таким образом, количество всех подслов длины n слова Штурма может быть получено как количество всех связных областей плоскости.

Помимо комбинаторной сложности существует множество различных функций сложности: сложность Ли [7], Абелева сложность [12], k-абелева сложность [20], арифметическая сложность [4], [10], максимальная шаблонная сложность [19], циклическая сложность [11], биномиальная сложность [32], оконная сложность [13], сложность периода [27] , сложность палиндрома [3] . В большинстве случаев эти альтернативные понятия сложности могут быть использованы для обнаружения (а в некоторых случаях и для характеристики) со временем периодических слов. Среди этого списка, мы будем рассматривать лишь арифметическую сложность, являющуюся в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности.

3. Арифметическая сложность бесконечных слов

Понятие арифметической сложности бесконечного слова впервые было введено в 2000 г. С. Августиновичем, Д. Фон-Дер-Флассом и А. Фрид в работе [4], и на настоящий момент прекрасно изучены авторами определения. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена [41] и Семерди [36].

Теорема Ван дер Вардена — классический результат комбинаторной теории чисел об одноцветных арифметических прогрессиях в раскрасках натуральных чисел.

Theorem 1 (Ван дер Варден, 1927). *Пусть $l, k \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое натуральное число $n(k,l)$, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины $n(k,l)$ любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.*

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность теорема Ван дер Вардена сыграла значительную роль в развитии двух разделов математики – аддитивной комбинаторики и комбинаторной эргодической теории. Теорема Ван дер Вардена является типичным утверждением теории Рамсея, а также предтечей теоремы Семереди, которая положила начало большой ветви аддитивной комбинаторики. Прежде всего, дадим следующее важное определение.

Будем говорить, что множество $A \in \mathbb{N}$ имеет *положительную асимптотическую плотность*, если

$$lim_{n\to\infty}\sup \frac{|A\{1,2,3,\cdots,n\}|}{n} > 0.$$

Theorem 2 (Семереди, 1975). *В любом бесконечном множестве $A \in \mathbb{N}$ положительной асимптотической плотности для всякого положительного целого l существует арифметическая прогрессия длины l .*

В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Основу его доказательства составляет так называемая Лемма регулярности [37], которая является, на сегодняшний день, важнейшим инструментом исследования графов. Из этой замечательной теоремы выросла новая большая область комбинаторной теории чисел. Обсуждению этой тематики и посвящен обзор И.Д. Шкредова [42].

Прежде чем подойти к понятию арифметической сложности слова, введем обозначение для арифметической подпоследовательности и дадим определение арифметического замыкания.

Для всякого бесконечного вправо слова $w = w_1 \cdots w_n \cdots$ через w_d^k обозначим бесконечное слово $w_d^k = w_k w_{k+d} \cdots w_{k+nd} \cdots -$ *арифметическую подпоследовательность* слова w с разностью d и начальной позицией k.

Арифметическим замыканием бесконечного слова w называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \cdots w_{k+(n-1)d} | k \geq 0, d > 0\}.$$

Теоремы Ван дер Вадрена и Семереди в данных терминах могут быть сформулированы следующим образом.

Theorem 3 (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a, такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Theorem 4 (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Арифметическая сложность $a_w(n)$ определяется как как совокупное число всех подслов арифметических подпоследовательностей данного слова $a_w(n) = \#\left(A_w \cap \Sigma_q^n\right)$.

Эта функция является одной из наиболее изученных модификаций классической функции комбинаторной сложности $p_w(n)$.

Вопросы, возникающие в связи с арифметической сложностью, аналогичны вопросам, связанным с комбинаторной сложностью: как растет функция арифметической сложности ? В каких случаях функция ведет себя линейно? Эти вопросы непросты для комбинаторной сложности, но могут быть частично решены для арифметической сложности.

Арифметическая сложность отражает структуру множества арифметических подслов бесконечного слова, то есть слов, встречающихся в нем по арифметическим прогрессиям. Арифметическая сложность имеет тесную связь как с классической комбинаторикой, так и с дискретной динамикой. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена и Семерди [36], представленные далее. Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Теорема 3 (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a, такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Теорема Семерди о наличии длинных арифметических прогрессий в плотных множествах в данных терминах может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4 (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Ясно, что арифметическая сложность бесконечного слова не может быть меньше его комбинаторной сложности, поскольку арифметическое замыкание содержит множество подслов бесконечного слова - его арифметических подслов с разностью 1. Таким образом, верно следующее:

$$1 \le p_w(n) \le a_w(n) \le q^n.$$

Нетрудно также убедиться, что арифметическая сложность бесконечного слова ограничена константой тогда и только тогда, когда слово со временем периодично; сложность же бесконечного слова может расти линейно, как впервые было показано в [4]. При этом почти все бесконечные слова, разумеется, имеют максимально возможную арифметическую сложность q^n, причем это возможно, даже если комбинаторная сложность слова растет линейно.

3.1. Арифметическая сложность слов Штурма

Функция арифметической сложности прежде всего была изучена на словах Штурма. Естественным образом возник вопрос: является ли арифметическая сложность слов Штурма также минимальной? Ответ на этот вопрос отрицательный, и может быть получен уже из характеристики равномерно повторяющихся слов линейной арифметической сложности [16]: слова Штурма даже не попадают в класс слов, имеющих линейную сложность. Более того, кажется, что уникальной функции минимальной арифметической сложности непериодического слова не существует: по крайней мере, для равномерно повторяющихся слов вместо этого мы имеем семейство функций с убывающими верхней и нижней асимптотами [2].

Но какова арифметическая сложность слова Штурма? В работе [10] Ж. Кассень и А. Фрид, используя геометрический двойственный метод [6], установили верхнюю оценку арифметической сложности, единую для всех слов Штурма и равную $O\left(n^3\right)$. Если быть точнее, то

$$g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^{n}(n-p+1)\phi(p) + 2$$

где $\phi(p)$ – функция Эйлера.

Теорема 5. *Для всякого* $\alpha \in (0,1)$ *верно неравенство*

$$a_\alpha(n+1) \leq g(n).$$

Заметим, что $g(n) = (1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2)$, т.е. растет как $O\left(n^3\right)$.

Так же авторы показали, что сама функция арифметической сложности зависит от выбора наклона слова Штурма. Исследовав этот интересный факт для некоторых слов Штурма, включая слово Фибоначчи, так же было установлено, что в рассмотренных случаях разница между верхней границей и реальной арифметической сложностью ограничена.

В этой же работе были получены точные оценки арифметической сложности для наклонов слова Штурма из интервала $\alpha \in (1/3, 1/2)$, и вращательных слов с иррациональной длиной интервала $\alpha \in (1/3, 1/2)$.

Теорема 6. *Для наклона слова Штурма* $\alpha \in (0.4, 0.5)$ *верны равенства* $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 4, & \text{если } n \text{ - четное} \\ g(n) - 3, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \geq 6$.

Теорема 7. *Для наклона слова Штурма* $\alpha \in (0.375, 0.4)$ *верны равенства* $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$, $a_\alpha(6) = 52$, $a_\alpha(7) = 83$, $a_\alpha(8) = 128$ *и*

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 8, & \text{если } n \text{ - четное} \\ g(n) - 9, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \geq 9$.

Отметим, что эта формула верна и для слова Фибоначчи, заданного $\alpha = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 - 1 = 0.381966$.

Для остальных значений α ситуация намного сложнее, так как при геометрическом изображении слова в построенной схеме встречается сколь угодно большое число центральных расщепляющихся граней, и разность между числом граней схемы и значением $a_\alpha(n+1)$ растет.

В отличие от верхней оценки на арифметическую сложность слова Штурма, нижняя оценка, полученная в работе А. Фрид [17] , является достаточно точной (в том смысле, что в некоторых случаях разность между ней и точными значениями ограничена константой).

Теорема 8. *Для всех* $n > 0$ *арифметическая сложность слова Штурма с наклоном* $\alpha < 1/2$ *удовлетворяет неравенству*

$$a_\alpha(2n-2) \;\geq\; \sum_{p=1}^{n} p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha \rfloor} p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lceil 1/\alpha \rceil} p\phi(p)$$

где $\phi(i)$*– функция Эйлера.*

Однако в этой же работе результат дополняется менее точно нижней оценкой, имеющей кубический порядок: существует нижняя граница арифметической сложности слова Штурма , которая также равна $O(n^3)$ (точнее, значение равно $n^3/4\pi^2 + O(n^2) - O(1/\alpha^3)$, где α - наклон слова Штурма). Итак, нижняя и верхняя границы отличаются примерно в 10,58 раза, причем верхняя более реалистична. Стоит обратить внимание, что другие функции сложности слов Штурма различаются сильнее. Максимальная шаблонная сложность слова Штурма также минимальна среди непериодических слов и равна $2n$, хотя слова Штурма - не единственные слова, обладающие этим свойством. Шаблонная сложность слова Штурма, как и арифметическая сложность, зависит от выбора слова и может быть равна $\Omega(n^3)$, хотя принцип зависимости от конкретного слова совершенно иной.

Таким образом, взятые вместе результаты на оценку роста арифметическую сложность слов Штурма означают, что слова Штурма с любым наклоном имеют кубический порядок роста.

4. Полиномиальная сложность

Как упоминалось ранее, Теорема Ван дер Вардена положила начало изучению арифметической сложности бесконечных слов. Естественным образом возникает интерес к рассмотрению следующего вопроса: если не ограничиваться арифметическими подпоследовательностями, а взять подпоследовательности с более прогрессирующим шагом ? В этом разделе мы вводим новое понятие *полиномиальной сложности* слова, изучение которой задает модификация Теоремы Ван дер Вардена для полиномиального случая. Так, А. Либман и В. Бергельсон [25] представили частный случай полиномиальной Теоремы Ван дер Вардена.

Theorem 5 (Полиномальаня Теорема Ван дер Вардена). *Пусть $l, r \in \mathbb{N}$ и $p(d)$ — полином с целочиселнными коэффициентами, т.ч. $p(0) = 0$. Тогда для любой раскраски множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в r цветов существуют $a, d \in \mathbb{Z}$ т.ч. найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l:*

$$a, a + p(d), 2 + 2p(d), \cdots, a + (l-1)p(d)$$

Мы рассмотрим более общий случай. Рассмотрим полином $Q_d(k) = a_d k^d + a_{d-1}k^{d-1} + \cdots + a_1 k + a_0$, где $a_i, d \in \mathbb{N}$, и $i \in \{0, \ \ldots, \ d\}$.

Прежде чем подойти к понятию полиномиальной сложности, аналогично понятиям арифметической подпоследовательности и арифметического замыкания, введем следующий термин. Для заданного полинома $Q_d(k)$ определим *полиномиальную подпоследовательность* длины n бесконечного вправо слова w как конечную последовательность вида

$$w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)}.$$

где $k-$ начальная позиция.

Пример 3. *Рассмотрим функцию $Q_2(k) = k^2 + 1$ на слове Фибоначчи:*

$$w = 0100101001001010010100100101001001 \cdots$$

тогда полиномиальная подаоследовательность для $n = 5$ будет иметь вид

$$10010.$$

Аналогично арифметическому замыканию, введем полиномиальное. *Полиномиальное замыкание* бесконечного вправа слова w для полинома степени d называется следующее множество:

$$P_w^d = \{w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)} | n, d > 0, k \geq 0\}$$

Для данного бесконечного справа слова $w = w_1 w_2 \cdots$ и полинома $Q_d(k)$ степени d мы определяем *полиномиальную сложность* как функцию $\mathcal{P}_w^d(n)$, равную количеству всех различных полиномиальных подпоследовательностей длины n, встречающихся в слове w:

$$\mathcal{P}_w^d(n) = \#\left(P_w^d \cap \Sigma_q^n\right).$$

Прежде всего, мы рассмотрим случай для полинома степени $d = 1$. Если $Q_1(k) = ak + b$, то $w_{ak+b} w_{a(k+1)+b} \cdots w_{a(k+n)+b}$, т.е. полиномиальное слово является арифметической подпоследовательностью w_a^{ax+b} слова w с разностью a и начальной позицией $ak + b$. Таким образом, арифметическое замыкание A_w включено в P_w^d, и для $d = 1$ равенство $A_w = P_w^1$ истинно.

Но что можно сказать для случая более высоких степеней полинома? Очевидно, что полиномиальная сложность бесконечного слова является неубывающей функцией, которая растет не быстрее, чем число всех возможных слов над заданным алфавитом q^n. Более того, она растет не медленнее, чем факторная сложность слова w. Поскольку арифметическая сложность является частным случаем полиномиальной сложности, то функция полиномиальной сложности растет не медленнее, чем арифметическая сложность слова w. Таким образом, для любых $d, n > 0$ верны следующие неравенства :

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq \mathcal{P}_w^d(n) \leq q^n.$$

Очевидно предположить, что функция полиномиальной сложности в первую очередь ограничена степенью полинома d.

Так как арифметическая сложность является частным случаем полиномиальной сложности, для которой при рассмотрении на словах Штурма известны нижние и верхние оценки, а также точные формулы при определенных наколнах, естественным образом возникает желание рассмотреть введенную функцию полиномиальной сложности прежде всего на словах Штурма.

В заключение, сделаем предположение об оценке скорости роста функции полиномиальной сложности для слов Штурма.

Предложение 1. *Пусть w– слово Штурма. Для любого $d \in \mathbb{N}$ верно:*

$$p_w(n) \leq \mathcal{P}_w(n) \leq O(n^{d+3}).$$

В будущем, конечно, стоит более подробно рассмотреть поведение полиномиальной сложности для слова Штурма и рассмотреть слова из других классов бесконечных слов (слово Теплица, слово Туэ–Морса и так далее). В частности, для какого класса полиномов степени $d > 1$ функция $\mathcal{P}_w(n)$ растет линейно ? Существует ли вообще такой полином? Если же не ограничиваться натуральными коэффициентами, а взять $a_i \in \mathbb{R}$?

Мы оставляем все эти проблемы открытыми для дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g-ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, №3. P. 819-836.

2. Avgustinovich S., Cassaigne J., Frid A. Sequences of low arithmetical complexity // Theoret. Inform. Appl. 40 (2006) P. 569–582

3. Allouche J.-P. Baake M. Cassaigne J., Damanik D. Palindrome complexity Selected papers in honor of Jean Berstel // Theoret. Comput. Sci. 292 (2003), no. 1, p. 9–31.

4. Avgustinovich S. V. , Fon-Der-Flaass D. G. , Frid A. E. Arithmetical complexity of infnite words // Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientifc, 2003. P. 51-62.

5. Berstel J., P. Seebold. Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words // Cambridge University Press, 2002. P. 40-97.

6. Berstel J., M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words// Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.

7. Bell, J. P., Shallit, J. Lie complexity of words// Theoret. Comput. Sci. in press (2022).

8. Brown C. A characterization of the quadratic irrationals// Canad. Math. Bull. (1991), 364

9. Bresenham J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. IBM Systems J. (1965), 25-30.

10. Cassaigne J., E.A. Frid. On the arithmetical complexity of Sturmian words// Theoretical Computer Science, 2007, V. 380, P.304-316.

11. Cassaigne J., Fici, G., Sciortino, M., and Zamboni, L. Cyclic complexity of words// J. Combin. Theory Ser. A 145 (2017), 36–56.

12. Cassaigne J., Richomme, G., Saari, K., and Zamboni, L. Avoiding. Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity. Internat// J. Found. Comput. Sci. 22, 4 (2011), 905–920.

13. Cassaigne J., Kabor´e, I., Tapsoba, T. *On a new notion of complexity on infinite words.* Acta Univ. Sapientiae Math. 2, 2 (2010), 127–136.

14. Ethan M. Coven, Hedlund G. Sequences with minimal block growth Mathematical systems theory volume 7, 138–153, 1973

15. Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp. *Sur les facteurs des suites de Sturm*, Rapport No. I-8735, Comput. Sci., 1987.

16. A. Frid. Sequences of linear arithmetical complexity// Theoret. Comput. Sci. 339 (2005) 68–87.

17. A. Frid A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words// Siberian Electron. Math. Rep. 2, 14–22 (in Russian, English abstract).

18. Fraenkel A.S., M. Mushkin, U. Tassa. Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences// Canad. Math. Bull. (1978), 441-446.

19. Kamae, T., and Zamboni, L. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words// Ergodic Theory and Dynamical Systems 22, 4 (2002), 1191–1199.

20. Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words// J. Combin. Theory, Ser. A 120, 8 (2013), 2189–2206

21. Hedlund G.A. , M. Morse. Symbolic dynamics// Amer. J. Math, 1938, 815-866.

22. Hedlund G.A., M. Morse. Sturmian sequences// Amer. J. Math, 1940.

23. Hedlund G.A. Sturmian minimal sets// Amer. J. Math, 1944, 605-620.

24. Ito S., Yasutomi S. On continued fractions, substitutions and characteristic sequences // Japan. J. Math., 1990, 287-306.

25. Leibman A., Bergelson V. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems // Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725-753.

26. Mignosi F. On the number of factors of Sturmian words// Theoret. Comput. Sci. 1991, 71-84.

27. Mignosi, F., and Restivo, A. A new complexity function for words based on periodicity // Int. J. Algebra Comput. 23, 4 (2013), 963–988.

28. Queffelec M. Substitution Dynamical Systems// Spectral Analysis Lecture Notes Math.,vol. 1294, Springer-Verlag, 1987.

29. Rauzy G. Suites a termes dans un alphabet fini, Semin // Theorie des Nombres, 1982-1983, 25-01,25-16, Bordeaux.

30. Rauzy G. Mots infinis en arithmetique, in :Automata on infinite words (D. Perrin ed.)// Lect. Notes Comp. Sci. 1985, 165-171.

31. Rauzy G. Sequences defined by iterated morphisms, in :Workshop on Sequences (R. Capocelli ed.)// Lecture Notes Comput. Sci., to appear.

32. Rigo M. and Salimov, P. Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words// Theoret. Comput. Sci. 601 (2015), 47–57.

33. Seebold P. Fibonacci morphisms and Sturmian words// Theoret. Comput. Sci. 1991, 367-384.

34. Series C. The geometry of Marhoff numbers// The Mathematical Intelligencer (1985), 20-29.

35. Stolarsky K. Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators// Cand. Math. Bull. (1976), 473-482.

36. Szemeredi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression// Acta Arithm. 1975. V. 27. P. 199-245.

37. E. Szemeredi // Regular partitions of graphs Computer science department, School of Humanities and Sciences, Stanford University, 1975

38. Thue A. Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen// Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania, 1912.

39. Thue A. Uber unendliche Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania 1906. V. 7 P. 1 22. V. 10. P. 1-67.

40. Venkov A. Elementary Number Theory// Wolter-Noordho, Groningen, 1970.

41. Van der Waerden B.L, Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk., 15 (1927), 212–216.

42. Шкредов И. Д. Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях // *УМН*, **61**:6(372) (2006), 111–178; *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1101–1166

REFERENCES

1. Banks, W. D., Conflitti, A. & Shparlinski, I. E. 2002, "Character sums over integers with restricted g-ary digits", *Illinois J. Math.*, vol. 46, no. 3, pp. 819-836.

2. Avgustinovich S., Cassaigne J., Frid A. E. 2006, "Sequences of low arithmetical complexity" *Theoret. Inform. Appl.* vol.40, pp. 569–582.

3. Allouche J.-P. Baake M. Cassaigne J., Damanik D. E. 2003, "Palindrome complexity Selected papers in honor of Jean Berstel" *Theoret. Comput. Sci.* vol. 292, no. 1, pp. 9–31.

4. Avgustinovich S. V. , Fon-Der-Flaass D. G. , Frid A. E. E.2003 "Arithmetical complexity of infnite words" *Proc. Words, Languages and Combinatorics III*, Singapore: World Scientifc, pp. 51-62.

5. Berstel J., P. Seebold. E.2002 "Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words", *Cambridge University Press*, pp. 40-97.

6. Berstel J., M. Pocchiola. E.1993 "A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words", *Int. J. Algebra and Comput.*, vol 3, pp. 349 -355.

7. Bell, J. P., Shallit, J. E. 2022 "Lie complexity of words", *Theoret. Comput. Sci. in press.*

8. Brown C. E.1991 "A characterization of the quadratic irrationals", *Canad. Math. Bull.*, vol.36.

9. Bresenham J. E. E.1965 "Algorithm for computer control of a digital plotter.", *IBM Systems* pp. 25-30.

10. Cassaigne J., E.A. Frid. E. 2007 "On the arithmetical complexity of Sturmian words", *Theoretical Computer Science*, vol. 380, pp.304-316.

11. Cassaigne J., Fici, G., Sciortino, M., Zamboni, L. E.2017 "Cyclic complexity of words", *J. Combin. Theory Ser.* , vol. 145 , pp. 36–56.

12. Cassaigne J., Richomme, G., Saari, K., Zamboni, L. Avoiding. E.2011 "Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity", *Internat J. Found. Comput. Sci.* vol.22, no. 4, pp. 905–920.

13. Cassaigne J., Kabor´e, I., Tapsoba, T. E.2010 "On a new notion of complexity on infinite words.", *Acta Univ. Sapientiae Math.* vol. 2, no. 2 , pp. 127–136.

14. Ethan M. Coven, Hedlund G. E.1973 " Sequences with minimal block growth", *Mathematical systems theory* vol. 7, pp. 138–153.

15. Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp. E.1987 " Sur les facteurs des suites de Sturm", *Rapport No. I-8735, Comput. Sci.*.

16. A. Frid. E.2005 "Sequences of linear arithmetical complexity", *Theoret. Comput. Sci.* vol. 339, pp. 68–87.

17. A. Frid "A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words", *Siberian Electron. Math. Rep. 2*, pp. 14–22.

18. Fraenkel A.S., M. Mushkin, U. Tassa. E. 1978 "Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences", *Canad. Math. Bull.* , pp. 441-446.

19. Kamae, T., and Zamboni, L. E. 2002 "Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol.22, no.4, pp. 1191–1199.

20. Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. E. 2013, "On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words", *J. Combin. Theory, Ser. A 120,* no.8, pp. 2189–2206.

21. Hedlund G.A. , M. Morse. E.1978, "Symbolic dynamics", *Amer. J. Math,* pp. 815-866.

22. Hedlund G.A., M. Morse. E.1940 "Sturmian sequences", *Amer. J. Math.*

23. Hedlund G.A. E.1944 "Sturmian minimal sets", *Amer. J. Math*, pp. 605-620.

24. Ito S., Yasutomi S. E.1990, "On continued fractions, substitutions and characteristic sequences", *Japan. J. Math.*, pp. 287-306.

25. Leibman A., Bergelson V. " Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems ", *Journal of the American Math Society*, Vol. 9, 1996, pp. 725-753.

26. Mignosi F. E.1991, "On the number of factors of Sturmian words", *Theoret. Comput. Sci.* pp. 71-84.

27. Mignosi, F., and Restivo, A. E.2013, "A new complexity function for words based on periodicity", *Int. J. Algebra Comput.* vol.23, no.4, pp. 963–988.

28. Queffelec M. E.1987, "Substitution Dynamical Systems", *Spectral Analysis Lecture Notes Math.*, vol. 1294, Springer-Verlag.

29. Rauzy G. E.1982-1983, "Suites a termes dans un alphabet fini, Semin", *Theorie des Nombres,* 25-01,25-16, Bordeaux.

30. Rauzy G. E.1985, "Mots infinis en arithmetique, in :Automata on infinite words (D. Perrin ed.)", *Lect. Notes Comp. Sci.* pp. 165-171.

31. Rauzy G. "Sequences defined by iterated morphisms, in :Workshop on Sequences (R. Capocelli ed.)", *Lecture Notes Comput. Sci., to appear.*

32. Rigo M. and Salimov, P. E. 2015, "Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words", *Theoret. Comput. Sci.* no.601, pp. 47–57.

33. Seebold P. E.1991, "Fibonacci morphisms and Sturmian words", *Theoret. Comput. Sci.* , pp.367-384.

34. Series C. E.1985, "The geometry of Marhoff numbers", *The Mathematical Intelligencer* , pp. 20-29.

35. Stolarsky K. E.1976 "Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators", *Cand. Math. Bull.* , pp. 473-482.

36. Szemeredi E. E.1975 "On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression", *Acta Arithm.* . vol. 27, pp. 199-245.

37. E. Szemeredi "Regular partitions of graphs", Computer science department, School of Humanities and Sciences, Stanford University, 1975

38. Thue A. E.1912 "Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen", *Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania.*

39. Thue A. E.1906, “Uber unendliche Zeichenreihen ”, *Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania*. vol. 7 pp. 1-22., vol. 10., pp. 1-67.

40. Venkov A. E.1970, “Elementary Number Theory”, *Wolter-Noordho, Groningen.*

41. Van der Waerden B.L, “Beweis einer Baudetschen Vermutung”, *Nieuw Arch. Wisk.*, 15 (1927), pp. 212–216.

42. Shkredov I. D. 2006, “Semeredi’s theorem and problems of arithmetic progressions”, *Achievements of mathematical sciences*, **61**:6(372), 111–178; *Russian Math. Surveys*, **61**:6, pp. 1101–1166.

Получено: 18.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-78-84

Хроматическое число слоек с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями

В. О. Кирова

Кирова Валерия Орлановна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kirova_vo@mail.ru

Аннотация

Для $h, n \geq 1$ и $e > 0$ рассматривается хроматическое число пространств вида $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$. Представлен обзор имеющихся результатов, рассмотрена задача о хроматическом числе нормированных пространств с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями. Показано, что для любого n существует двуцветная раскраска пространства $\mathbb{R}^n$, при которой достаточно длинная арифметическая прогрессия содержит точки обоих цветов, и такая раскраска применима к пространствам вида $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$.

Ключевые слова: хроматическое число, задача Нельсона — Хадвигера

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
В. О. Кирова. Хроматическое число слоек с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 78–84.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-78-84

On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progressions

V. O. Kirova

Kirova Valeria Orlanovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: Kirova_vo@mail.ru

Abstract

For $h, n \geq 1$ and $e > 0$ we consider a chromatic number of the spaces $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ and general results in this problem. Also we consider the chromatic number of normed spaces with forbidden monochromatic arithmetic progressions. We show that for any n there exists a two-coloring of $\mathbb{R}^n$ such that all long unit arithmetic progressions contain points of both colors and this coloring covers spaces of the form $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$.

Keywords: chromatic number, Hadwiger -– Nelson problem

Bibliography: 21 titles.

For citation:
V.O.Kirova, 2023, “On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progressions” *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 78–84.

1. Introduction

The problem with which all the problems discussed in this article was first formulated in 1950 and is known as the Hadwiger–Nelson problem: what is the minimum number of colors required to color the plane such that no two points at a distance of 1 from each other have the same color? For an n-dimensional normed space $\mathbb{R}^n_N$, it is required to find its *chromatic number* $\chi(\mathbb{R}^n_N)$, defined as the smallest r for which there is a coloring of points $\mathbb{R}^n_N$ in r colors, i.e. an *r-coloring*, and with no two points of the same color unit distance apart. The chromatic number problem is one of the central problems of modern combinatorial geometry. This problem has been studied most actively for l_p-spaces $\mathbb{R}^n_p$. Recall that the l_p -norm of a point $x \in \mathbb{R}^n$ is defined by the equality $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$ for all real $p \geq 1$, but for $p = \infty$ by the equality $\|x\|_\infty = max_i|x_i|$. It is known that for all $1 \leq p \leq \infty$, the value of $\chi(\mathbb{R}^n_N)$ grows exponentially with the growth of n.

To generalize these problems, Erdős, together with his co-authors in [6, 7, 8] proposed prohibiting the monotony of more complex configurations. A subset $\mathfrak{M}' \subset \mathbb{R}^n$ is called an *N-isometric copy* of $\mathfrak{M}$ if there exists a bijection $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ such that $\|x - y\|_N = \|f(x) - f(y)\|_N$ for all $x, y \in \mathfrak{M}$. For an n-dimensional normed space $\mathbb{R}^n_N$, and a subset $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$, the *chromatic number* $\chi(\mathbb{R}^n_N, \mathfrak{M})$ is the smallest r such that there exists an r-coloring of $\mathbb{R}^n$ with no monochromatic *N-isometric copy* of $\mathfrak{M}$. In these terms, classical definition of chromatic number $\chi(\mathbb{R}^n_N) = \chi(\mathbb{R}^n_N, I)$, where I is a two-point set.

In our present note, we will mostly be interested in one-dimensional sets playing the role of $\mathfrak{M}$. Let us utilize the notation introduced in [15]: given a sequence of positive reals $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, we call a set $\{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \ldots, \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\} \subset \mathbb{R}$ a *baton* and denote it by $\mathscr{B}_k$. We consider the case $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$, i.e., the set $\mathscr{B}_k$ is just a unit arithmetic progression.

In 2016, in the work [12], A. Kanel-Belov, V. Voronov and D. Cherkashin progressed this topic by proposing the following interpretation of the problem. They suggested considering an intermediate case between a plane and a space, namely a layer between two planes of height e. It is obvious that with a sufficiently small value of e, a coloring of 7 colors without single-color dots at a unit distance is preserved. Thus, we will consider colorings of a set $\mathbb{R}^n_N \times [0, e]^h$, where natural $n, h \geq 1$ and real $e > 0$, in a finite number of colors with the forbidden distance 1 between monochromatic points. Further such sets are called *slices* and denoted by $Slice_N(n, h, e)$. We say that n is the *dimension* of a slice. These sets were introduced in the work [12] and were studied for 1-dimensional and 2-dimensional cases exclusively for Euclidean distance. In a recent paper [4], authors studied 3-dimensional slices, and in addition to real slices, they considered rational slices of the form $\mathbb{Q}^n_2 \times [0, e]^h$.

In the next section, all the latest results on slices studies will be described in more detail. Section 3 is devoted to the problem of the chromatic number of normed spaces with forbidden monochromatic set $\mathscr{B}_k$, and we will consider this problem on slices and discussing further issues.

2. The chromatic numbers of rational and real slices

Obviously for any positive e the next inequalities are true:

$$\chi(\mathbb{R}^n_N) \leq \chi(Slice_N(n, h, e)) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+h}_N).$$

Currently, the best known bounds on the plane are $5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2_2) \leqslant 7$. The lower bound is a relatively recent breakthrough by de Grey [5] (reproved quickly after by Exoo and Ismailescu [9]). The upper bound here is classical. See also Soifer's account of the history of this problem in [20]. As for the growing dimension case, currently the best asymptotic lower and upper bounds belong to Raigorodskii [18] and Larman and Rogers [16, 17] respectively: $(1.239+o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n_2) \leqslant (3+o(1))^n$ as $n \to \infty$. It is obvious that the chromatic number of $Slice_N(n, h, e)$ is finite. So by the de Bruijn–Erdos theorem it is achieved on a finite subgraph.

As stated earlier, the study of slices colorings started in the work [12] for 1-dimensional and 2-dimensional Euclidean slices. The following main result.

THEOREM 1. *For an arbitrary $e > 0$, the following inequality holds:*

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, e]^2).$$

The following lower and upper bounds obtained in the works[2, 13] are known. STATEMENT. Let $0 < e \leq \sqrt{\frac{3}{4h}}$. Then

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 3.$$

Let $\sqrt{\frac{3}{4h}} < e < \sqrt{\frac{8}{9h}}$. Then

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 4.$$

Consider the intermediate case between a plane and a 3-dimensional space $\mathbb{R}^2 \times [0, e]$ (slice with height e). This set allows correct coloring in 7 colors. However, the lower bound is less trivial than for the plane:

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, e]) \leq 7.$$

In [12] it is proved that the upper bound remains the same with increasing dimension due to the fact that the coloring of the plane in 7 colors does not contain distances belonging to a certain interval, and also that the lower bound can be improved with the value $h = 2$.

THEOREM 2. *Let $h \in \mathbb{Z}$, $e < e_o(h)$ is positive. Then*

$$\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, e]^h) \leq 7.$$

For the lower estimates given, it is sufficient to consider the coloring of a bounded area whose diameter does not depend on the choice of valuea e.

In the work [21] authors considered 3-dimensional real and 2-dimensional rational slices. They proved the next theorem.

THEOREM 3. *There is $e_0 > 0$, such that for an arbitrary positive $e > e_0$ holds*

$$10 \leq \chi(Slice(3, 6, e)) \leq 15.$$

The upper bound follows from the proof of the upper bound $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$, which was obtained independently by Coulson [3] and Radoicic, Toth [19].

In the case of rational slices, in [21] authors showed that the chromatic number of 2-dimensional rational slice is at most 4:

$$\chi(\mathbb{Q}^2 \times [0, e]^2_{\mathbb{Q}}) = 4$$

where $[0, e]^2_{\mathbb{Q}}$ is the set of rational numbers from $[0, e]$ and $e > 0$. In [12] authors considered 1-dimensional slices and showed that

$$\chi(\mathbb{Q} \times [0, e]^3_{\mathbb{Q}}) = 3.$$

3. The chromatic number of normed spaces with forbidden one-color arithmetic progressions

In a recent series of papers [10, 11, 15], the chromatic numbers $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathfrak{M})$ of the n-dimensional Chebyshev spaces $\mathbb{R}^n_\infty$ were studied. In particular, it was proven in [15] that

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathscr{B}_k) \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^n \tag{1}$$

for all $k, n \in \mathbb{N}$. This inequality shows that, unlike the Euclidean case, for any given k, every two-coloring of $\mathbb{R}^n$ contains a monochromatic ℓ_∞-isometric copy of $\mathscr{B}_k$ whenever the dimension n is large enough in terms of k.

However, in [14] authors showed that this is not the case in the "opposite"situation, when k is sufficiently large in terms of n. For arbitrary $n \in \mathbb{N}$, they construct a two-coloring of $\mathbb{R}^n$ with the maximum metric satisfying the following. For any finite set $\mathscr{B}_k$ with diameter greater than 5^n such that the distance between any two consecutive points of $\mathscr{B}_k$ does not exceed one, no isometric copy of $\mathscr{B}_k$ is monochromatic.

Theorem 4. *For any $1 \leq p \leq \infty$ and any natural n, there exist sufficiently large $k = k(p, n)$, such that $\chi(\mathbb{R}^n_p, \mathscr{B}_k) = 2$.*

Proof. The proof of this theorem is constructive.

For the case $p = \infty$, the proof is carried out using an explicit, but technically complex two-color coloring consisting of identical layers located on top of each other - "snakes"[14], the colors of which we alternate. It is shown that this coloring of the space $\mathbb{R}^n$ does not contain one-color l_∞-isometric copies of progressions $\mathscr{B}_k$ for $k \geq 5^n$.

Suppose now that $1 \leq p \leq \infty$. It is known that the unit ball of the l_p norm in this case is strictly convex. This means that every l_p - isometric copy of the set $\mathscr{B}_k$ lies on some straight line. As a consequence, it is an arithmetic progression in the space $\mathbb{R}^n_\infty$, the length of the link (and hence the diameter) which can be controlled in terms of n and p. Here we use the fact that l_p- and l_∞-norms on $\mathbb{R}^n$ are 'equivalent' to each other, i.e. for some positive $c = c(n, p)$ and $C = C(n, p)$ it is true that $c\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant C\|x\|_\infty$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. So, from the absence in some coloring of the space $\mathbb{R}^n$ with the norm l_∞ of sufficiently long one-color arithmetic progressions, it really follows from this that there are no one-color l_p-isometric copies of the sets $\mathscr{B}_k$ for all sufficiently large values of k.

Finally, we consider the case $p = 1$. In a sense, this situation is diametrically opposite to the previous one, since the unit ball of the l_1-norm is a convex centrally symmetric polyhedron (more precisely, a hyperoctahedron or a cross-polytope). It is known that every such polyhedron with f pairs of opposite faces is the central section of an f-dimensional hypercube by some hyperplane. This means that the $\mathbb{R}^m_1$ space can be isometrically embedded in $\mathbb{R}^m_\infty$ for $m = 2^{n-1}$. Therefore, to construct the desired two-coloring of $\mathbb{R}^n_1$, it is sufficient to consider such a coloring of $\mathbb{R}^m_\infty$, and then simply induce it to the corresponding subspace.

Corollary 1. *For any normed space $\mathbb{R}^n_N$ there exists a real $\delta = \delta(\mathbb{R}^n_N)$ such that the following holds. There exists a two-coloring of $\mathbb{R}^n$ with no monochromatic collinear N-isometric copies of all batons $\mathscr{B}_k$ such that $\max_t \lambda_t \leqslant 1$ and $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geqslant \delta$. In particular, all sufficiently long unit arithmetic progressions in $\mathbb{R}^n_N$ contain points of both colors under this coloring.*

The following theorem is a corollary of Theorem 4.

Theorem 5. *For any $1 \leq p \leq \infty$ and any natural $h, n \geq 1$ and $e > 0$, there is $k = k(n, h, e)$ such that $\chi(Slice_p(n, h, e), \mathscr{B}_k) = 2$.*

Доказательство. Since $Slice_p(n, h, e) \subset \mathbb{R}^{n+h}_p$. If we want to color the slice $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ so that there is no monochromatic $\mathscr{B}_k$ in it, then it is not difficult to see that this is an intermediate case between coloring of $\mathbb{R}^{n+h}$ and $\mathbb{R}^{n+h+1}$. Moreover, if e is smaller than the diameter of $\mathscr{B}_k$, then this task exactly coincides with the task of two-coloring $\mathbb{R}^{n+h}$ and the set $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ is also two-colorable. But if e is large, then the $Slice(n, h, e)$ roughly coincides with the space $\mathbb{R}^{n+h+1}$. This is obvious, but it can be strictly proved through the De Bruijn—Erdős compactness theorem for hypergraphs.

□ Note that the question of the asymptotic behavior of the optimal constant $k = k(p, n)$ from the Theorem 4 is open and also raises the following problem accordingly. Problem. Find the smallest $k = k(n, h, e)$ such that $\chi(Slice(n, h, e), \mathscr{B}_k) = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g-ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, № 3. P. 819-836.

2. Bruce L. Bauslaugh. E. Tearing a strip off the plan //. Journal of Graph Theory, 29(1):17–33, 1998.

3. D. Coulson. A 15-colouring of 3-space omitting distance one // Discrete Mathematics 256, No. 1 (2002), 83–90.

4. D. D. Cherkashin, A. J. Kanel-Belov, , G. A. Strukov, V. A. Voronov. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices // 2022.

5. A.D.N.J. de Grey, The chromatic number of the plane is at least 5// Geombinatorics, 28 (2018), 18–31.

6. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems I// J. Combin. Theory Ser. A, 14 (1973), N3, 341–363.

7. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems II// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 520–557.

8. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems III// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 559–583.

9. G. Exoo, D. Ismailescu, The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof// Disc. Comput. Geom., 64 (2020), N1, 216–226.

10. N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, Max-norm Ramsey Theory// arXiv preprint 2111.08949, 2021.

11. N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, Schmidt–Tuller conjecture on linear packings and coverings// Proceedings of the American Mathematical Society,, Vol. 151, No. 6, pp. 2353–2362, 2023.

12. A. Kanel-Belov, V. Voronov, and D. Cherkashin. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer// St. Petersburg Mathematical Journal, 29(5):761–775, 2018.

13. Kiran B. Chilakamarri. The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results// Bull. Inst. Combin. Appl, 8(39):C60, 1993.

14. V.Kirova, A.Sagdeev. Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions// SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 37, Iss. 2 (2023).

15. A. Kupavskii, A. Sagdeev, All finite sets are Ramsey in the maximum norm// Forum Math. Sigma, 9 (2021), e55, 12 pp.

16. D. G. Larman, A. C. Rogers. The realization of distances within sets in Euclidean space// Mathematika 19, No. 01 (1972), 1–24.

17. R. Prosanov, A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space// Discrete Appl. Math., 276 (2020), 115–120.

18. A.M Raigorodskii, On the Chromatic Number of a Space// Russian Math. Surveys, 55 (2000), 351–352.

19. R. Radoicic, G. Toth. Note on the chromatic number of the space// In: Discrete and Computational Geometry, Algorithms and Combinatorics book series, Vol. 25, Springer (2003), pp. 695–698.

20. A. Soifer, The mathematical coloring book// Springer-Verlag New York, 2009.

21. V. Voronov, A. Kanel-Belov, G.Strukov, D. Cherkashin. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices// Journal of Mathematical Sciences, 518 (2022), 94–113.

REFERENCES

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. 2002, "Character sums over integers with restricted g-ary digits", *Illinois J. Math.*. Vol. 46, № 3. P. 819-836.

2. Bruce L. Bauslaugh. E. 1998, "Tearing a strip off the plan", *Journal of Graph Theory*, 29(1), pp. 17-–33.

3. D. Coulson. 2002, "A 15-colouring of 3-space omitting distance one", *Discrete Mathematics*, 256, No. 1, pp. 83—90.

4. D. D. Cherkashin, A. J. Kanel-Belov, G. A. Strukov, V. A. Voronov. 2022, "On the chromatic numbers of 3-dimensional slices".

5. A.D.N.J. de Grey, 2018, "The chromatic number of the plane is at least 5", *Geombinatorics*, 28, pp. 18–31.

6. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus. 1973, "Euclidean Ramsey theorems I", *J. Combin. Theory Ser. A*, 14, № 3, pp. 341–363.

7. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus. 1973, "Euclidean Ramsey theorems II",*Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 10, *Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam*, pp. 520–557.

8. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus. 1973, "Euclidean Ramsey theorems III", *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 10, *Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam*, pp. 559–583.

9. G. Exoo, D. Ismailescu. 2020, "The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof",*Disc. Comput. Geom.*, 64, № 1, pp. 216–226.

10. N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev. 2021, "Max-norm Ramsey Theory". arXiv preprint 2111.08949, .

11. N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev. 2023, "Schmidt–Tuller conjecture on linear packings and coverings",*Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 151, № . 6, pp. 2353–2362.

12. A. Kanel-Belov, V. Voronov, and D. Cherkashin. 2018, "On the chromatic number of an infinitesimal plane layer", *St. Petersburg Mathematical Journal*, 29(5), pp. 761—775.

13. Kiran B. Chilakamarri. 1993, "The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results", *Bull. Inst. Combin. Appl*, 8(39): p. 60.

14. V.Kirova, A.Sagdeev. 2023, "Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 37, Iss. 2.

15. A. Kupavskii, A. Sagdeev. 2021, "All finite sets are Ramsey in the maximum norm", *Forum Math. Sigma*, 9, e55, 12 p.

16. D. G. Larman, A. C. Rogers. 1972, "The realization of distances within sets in Euclidean space", *Mathematika*, 19, № 01 (1972), pp 1–24.

17. R. Prosanov. 2020, "A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space", *Discrete Appl. Math.*, 276, pp. 115–120.

18. A.M Raigorodskii. 2000, "On the Chromatic Number of a Space", *Russian Math. Surveys*, 55, pp. 351–352.

19. R. Radoicic, G. Toth. 2003, "Note on the chromatic number of the space", *Discrete and Computational Geometry, Algorithms and Combinatorics book series*, Vol. 25, Springer, pp. 695—698.

20. A. Soifer, 2009, "The mathematical coloring book", *Springer-Verlag New York*.

21. V. Voronov, A. Kanel-Belov, G.Strukov, D. Cherkashin. 2022, "On the chromatic numbers of 3-dimensional slices", *Journal of Mathematical Sciences*, 518, pp. 94–113.

Получено: 18.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103

Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью[1]

С. Н. Асхабов

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный педагогический университет; Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Грозный).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация

В конусе пространства непрерывных функций методом весовых метрик (аналог метода Белецкого) доказывается глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения начальной задачи для однородного интегро-дифференциального уравнения n-го порядка с разностным ядром и степенной нелинейностью. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости к решению в терминах весовой метрики. Исследование основано на сведении начальной задачи к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Вольтерра. Получены точная нижняя и верхняя априорные оценки решения, на основе которых построено полное весовое метрическое пространство, инвариантное относительно нелинейного оператора, порожденного этим интегральным уравнением Вольтерра. В отличие от линейного случая, установлено, что нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Анализ полученных результатов показывает, что с ростом порядка интегро-дифференциального уравнения со степенной нелинейностью показатель степени уменьшается. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, степенная нелинейность, априорные оценки.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
С. Н. Асхабов. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 85–103.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00177).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103

Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity

S. N. Askhabov

Askhabov Sultan Najmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Chechen State Pedagogical University, Kadyrov Chechen State University, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Grozny).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract

In the cone of the space of continuous functions, the method of weight metrics (analogous to Bielecki's method) is used to prove a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a nontrivial solution to the initial problem for a homogeneous n-order integro-differential equation with a difference kernel and power nonlinearity. It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence to the solution in terms of the weight metric. The study is based on the reduction of the initial problem to the equivalent nonlinear Volterra integral equation. Exact lower and upper a priori estimates for the solution are obtained, on the basis of which a complete weighted metric space is constructed that is invariant with respect to the nonlinear operator generated by this Volterra integral equation. In contrast to the linear case, it has been established that, in addition to the trivial solution, the non-linear homogeneous Volterra integral equation can also have a non-trivial solution. An analysis of the results obtained shows that with an increase in the order of an integro-differential equation with a power nonlinearity, the exponent decreases. Examples are given to illustrate the results obtained..

Keywords: Volterra integro-differential equation, power nonlinearity, a priori estimates.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
S. N. Askhabov, 2023, "Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 85–103.

Посвящается профессору Белову Алексею Яковлевичу
в связи с его 60-летием

1. Введение

Метод весовых метрик хорошо известен применительно к интегральным уравнениям Вольтерра со степенной нелинейностью (см., например, [1]-[6]). Такие уравнения возникают при описании различных процессов, изучаемых в гидро-аэродинамике, а также в теории переноса тепла излучением, в моделях популяционной генетики и других [1]-[8], при этом особый интерес представляют непрерывные на $[0,\infty)$ положительные при $x>0$ решения. В данной работе метод весовых метрик применяется к интегро-дифференциальному уравнению

$$u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x K(x-t)\cdot u^{(n)}(t)\,dt, \qquad \alpha>1, \qquad x>0, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = \ldots = u^{(n-1)}(+0) = 0. \tag{2}$$

Всюду предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^{2n-1}[0,\infty),\ K^{(2n-1)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = \ldots = K^{(2n-2)}(0) = 0,\ K^{(2n-1)}(0) = p > 0. \tag{3}$$

Наряду с задачей (1)-(2) изучается тесно связанное с ней интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K^{(n)}(x-t)\cdot u(t)\,dt, \qquad \alpha > 1, \qquad x > 0. \tag{4}$$

В связи с отмеченными выше приложениями уравнения (4) в различных задачах гидроаэродинамики и других, его решения разыскиваются в конусе

$$Q_0 = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Следует отметить, что метод весовых метрик является аналогом метода польского математика Белецкого (Adam Bielecki, 1910–2003), который впервые применил [9] свой метод к обыкновенному дифференциальному уравнению $y' = f(x,y)$ в предположении, что функция $f(x,y)$ непрерывна в области $0 \le x < \alpha \le \infty$, $0 \le y < \beta \le \infty$ и удовлетворяет условиям: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L(x)\cdot|y_1 - y_2|$; $|f(x,0)| \le L(x)$, где функция $L(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[0,\alpha)$. Введя во множестве всех непрерывных на $[0,\alpha)$ функций весовую норму

$$\|u\| = \sup_{0\le x<\alpha}\left[|u(x)|\cdot\exp\left(-\kappa\int_0^x L(t)\,dt\right)\right],$$

где κ положительная константа, Белецкий доказал глобальную (без ограничений на область существования решения) теорему о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x,y)$. В работе [10] он применил свой метод к дифференциальному уравнению в частных производных. Позже к этому методу в своих работах приходили и другие авторы в связи с чем Кордунеану опубликовал статью [11] (см., также, [12], [13]), в которой обосновал приоритет Белецкого в разработке данного метода. Метод Белецкого изложен в монографии Эдвардса [14], в которой подчеркнуто, что он является более эффективным по сравнению с другими ранее применявшимися методами так как дает возможность доказывать непосредственно глобальную теорему существования и единственности.

Применяемый нами метод весовых метрик существенно отличается от метода Белецкого, так как он основан на получении точных двусторонних априорных оценок решения, используемых при построении полного весового метрического пространства, инвариантного относительно оператора, порожденного исследуемым нелинейным уравнением, и не предполагает выполнения условия Липшица для заданной нелинейности. Двусторонние априорные оценки представляют и самостоятельный интерес, так как определяют конусный отрезок, в котором заведомо будет находиться искомое решение, и позволяют априори судить о поведении, в том числе и асимптотическом, этого решения. Введение весовой метрики также дает возможность доказывать непосредственно глобальные теоремы существования и единственности для дискретных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью.

2. Свойства неотрицательных решений

Выясним сначала какими свойствами заведомо должно обладать нетривиальное решение нелинейного интегрального уравнения (4), если оно существует.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (4), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и n раз непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, т.е. $u \in C^n(0,\infty)$.*

Доказательство. Так как $K^{(2n-1)}(x) \geq K^{(2n-1)}(0) = p > 0$, то $K^{(2n-2)}(x)$ возрастает на $[0,\infty)$ и, значит, $K^{(2n-2)}(x) \geq K^{(2n-2)}(0) = 0$. Но тогда $K^{(2n-3)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. Продолжая это рассуждение получим, что $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. Поэтому для любых $x_1, x_2 \in [0.\infty)$ таких, что $x_1 < x_2$, с учетом, что функции $u(x)$ и $K^{(n)}(x)$ неотрицательны на $[0,\infty)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, имеем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int\limits_0^{x_1} \left[K^{(n)}(x_2 - t) - K^{(n)}(x_1 - t)\right] u(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} K^{(n)}(x_2 - t)\,u(t)\,dt \geq 0,$$

откуда получаем, что $u(x_1) \leq u(x_2)$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Осталось доказать, что $u \in C^n(0,\infty)$. Из тождества (4) с учетом условия (3), получаем

$$\alpha\,u^{\alpha-1}(x)\,u'(x) = \int\limits_0^x K^{(n+1)}(x - t)\,u(t)\,dt, \tag{5}$$

откуда

$$u'(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x) \int\limits_0^x K^{(n+1)}(x - t)\,u(t)\,dt. \tag{6}$$

Значит $u''(x)$ существует и непрерывна на $(0,\infty)$ как производная произведения двух непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому для любого $x > 0$ из (5) имеем

$$\alpha\,(\alpha - 1)\,u^{\alpha-2}(x)\,u'^2(x) + \alpha\,u^{\alpha-1}(x)\,u''(x) = \int\limits_0^x K^{(n+2)}(x - t)\,u(t)\,dt, \tag{7}$$

откуда

$$u''(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x) \int\limits_0^x K^{(n+2)}(x - t)\,u(t)\,dt - (\alpha - 1)\,u^{-1}(x)\,u'^2(x). \tag{8}$$

Следовательно, $u'''(x)$ существует и непрерывна на $(0,\infty)$, поскольку непрерывно дифференцируема правая часть тождества (8).

Продолжая этот процесс получим, что $u^{(n-1)}(x)$ с помощью элементарных действий выражается через непрерывно дифференцируемые на $(0,\infty)$ функции, не равные нулю при $x > 0$,

$$u(x), u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n-2)}(x) \text{ и } \int\limits_0^x K^{(2n-1)}(x - t)\,u(t)\,dt.$$

Поэтому $u^{(n)}(x)$ существует и непрерывна на $(0,\infty)$, т.е. $u \in C^n(0,\infty)$.

Лемма 1 доказана.

Заметим, что лемма 1 справедлива и при $0 < \alpha \leq 1$.

Далее нам понадобится следующая теорема подробно доказанная в монографии [4, с. 151].

Теорема 1. *Пусть ядро $k(x)$ определено на полуоси $[0,\infty)$ и удовлетворяет условию:*

$$k(x) \geq A \cdot x^{\gamma-1},$$

где $A>0$ и $\gamma>0$ - любые постоянные. Если $u \in Q_0$ и является решением уравнения

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)\,u(t)\,dt, \quad \alpha>1, \quad x>0,$$

то

$$u(x) \geq \left[A \cdot B\left(\gamma, \frac{\gamma-1+\alpha}{\alpha-1}\right)\right]^{1/(\alpha-1)} x^{\gamma/(\alpha-1)}, \tag{9}$$

где B есть бета-функция Эйлера.

С помощью леммы 1 и теоремы 1 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0$ является решение уравнения (4), то*

$$c(\alpha,n)\cdot x^{n/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,K^{(n-1)}(x)\right)^{1/(\alpha-1)}, \tag{10}$$

где

$$c(\alpha,n) = \left[\frac{p}{(n-1)!}\cdot B\left(n, \frac{n-1+\alpha}{\alpha-1}\right)\right]^{1/(\alpha-1)}. \tag{11}$$

Доказательство. Интегрируя $(n-1)$ раз функцию $K^{(2n-1)}(x)$ по формуле Коши, с учетом условия (3), имеем

$$K^{(n)}(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}K^{(2n-1)}(t)\,dt. \tag{12}$$

Следовательно, так как $K^{(2n-1)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$,

$$K^{(n)}(x) \geq \frac{K^{(2n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} = \frac{p}{(n-1)!}\,x^{n-1}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 при $k(x)=K^{(n)}(x)$, $A=p/[(n-1)!]$ и $\gamma=n$. Поэтому нижняя оценка в (10) является прямым следствием неравенства (9).

Осталось доказать верхнюю оценку из (10). Так как $u(x)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывают (см. доказательство леммы 1) на $[0,\infty)$, то в силу интегрального неравенства Чебышева (см., например, [4, с. 121]) из тождества (4) получаем

$$u^{\alpha}(x) \leq \int_0^x K^{(n)}(t)u(t)\,dt,$$

откуда

$$u(x) \leq \left(\int_0^x K^{(n)}(t)u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}, \quad \forall x\in[0,\infty), \tag{13}$$

или, что то же самое,

$$u(t) \leq \left(\int_0^t K^{(n)}(s)u(s)\,ds\right)^{1/\alpha}, \quad \forall t\in[0,\infty).$$

Следовательно, с учетом, что $K^{(n)}(x) > 0$ при всех $x > 0$, имеем

$$K^{(n)}(t) \cdot u(t) \cdot \left(\int_0^t K^{(n)}(s) u(s)\, ds \right)^{-1/\alpha} \leq K^{(n)}(t), \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x получаем

$$\left(\int_0^x K^{(n)}(s) u(s)\, ds \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K^{(n)}(t)\, dt = \frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x)$$

или

$$\left(\int_0^x K^{(n)}(t) u(t)\, dt \right)^{1/\alpha} \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x) \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Но тогда, в силу неравенства (13), справедлива верхняя оценка из (10).

Лемма 2 доказана.

Заметим, что используя известную формулу для вычисления значений бета-функции Эйлера (см., например, [15, с. 752]), равенство (11) можно записать в виде:

$$c(\alpha, n) = \left[\frac{p \cdot (\alpha-1)^n}{(\alpha+n-1) \cdot (2\alpha+n-2) \cdot (3\alpha+n-3) \cdot \ldots \cdot n \cdot \alpha} \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

В силу этого равенства, нижние априорные оценки решения уравнения (4), полученные в работах [16]-[18] при $n = 1, 2, 3$, соответственно, содержатся в лемме 2.

Пример 1. *Функция* $u^*(x) = c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)}$ *является решением уравнения (4) при* $K(x) = x^{2n-1}$, *т.е.* $u^*(x)$ *является решением интегрального уравнения*

$$u^{\alpha}(x) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)\, dt, \quad \alpha > 1.$$

В самом деле, в этом случае $K^{(n)}(x) = (x^{2n-1})^{(n)} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\, x^{n-1}$ и поэтому

$$\int_0^x K^{(n)}(x-t)\, u(t)\, dt = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} c(\alpha, n) \int_0^x (x-t)^{n-1} t^{n/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\, c(\alpha, n) B\left(n, \frac{n}{\alpha-1} + 1 \right) x^{n\alpha/(\alpha-1)} = \left[c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)} \right]^{\alpha} = [u^*(x)]^{\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = 2$ и $K(x) = x^{2n-1}$ функция $u(x) = c(2, n) \cdot x^n$ является как решением уравнения (4), так и решением задачи (1)-(2).

Кроме того, $u^*(x) = c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)} \equiv F(x)$ при $K(x) = x^{2n-1}$, что свидетельствует о точности нижней априорной оценки решения, полученной в лемме 2.

Пример 1 показывает, что кроме тривиального решения $u(x) \equiv 0$ однородное нелинейное интегральное уравнение (4) может иметь и нетривиальное решение – в этом состоит принципиальное отличие от теории линейных однородных интегральных уравнений Вольтерра, которые могут иметь лишь тривиальное решение.

Из леммы 2 вытекает, что решения уравнения (4) следует искать в конусном отрезке

$$P = \{ u(x) : \ u \in C[0, \infty) \quad \text{и} \quad F(x) \leq u(x) \leq G(x) \},$$

где

$$F(x) \equiv c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)}, \qquad G(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}, \tag{14}$$

а $c(\alpha, n)$ определено в (11).

3. Интегральное уравнение

Прежде чем приступить к исследованию нелинейного интегрального уравнения (4), рассмотрим оператор T, порожденный этим уравнением. А именно, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3. *Если $\alpha > 1$ и выполнено условию (3), то оператор*

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x K^{(n)}(x-t)\, u(t)\, dt \right)^{1/\alpha}$$

переводит класс P в себя.

Доказательство. Пусть $u \in P$. То, что $Tu \in C[0, \infty)$ очевидно. Докажем сначала, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x)$, то

$$\left[(Tu)(x)\right]^{\alpha} \geq c(\alpha, n) \cdot \int_0^x K^{(n)}(x-t)\, t^{n/(\alpha-1)} dt =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \int_0^x K^{(n)}(x-t)\, d\, t^{(\alpha+n-1)/(\alpha-1)} =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \int_0^x K^{(n+1)}(x-t)\, t^{(\alpha+n-1)/(\alpha-1)} dt =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{\alpha-1}{2\alpha+n-2} \int_0^x K^{(n+1)}(x-t)\, dt^{(2\alpha+n-2)/(\alpha-1)} =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)} \int_0^x K^{(n+2)}(x-t)\, t^{(2\alpha+n-2)/(\alpha-1)} dt =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)} \cdot \frac{\alpha-1}{3\alpha+n-3} \int_0^x K^{(n+2)}(x-t)\, dt^{(3\alpha+n-3)/(\alpha-1)} =$$

$$= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^3}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)(3\alpha+n-3)} \int_0^x K^{(n+3)}(x-t)\, t^{(3\alpha+n-3)/(\alpha-1)} dt = \ldots =$$

$$= \frac{c(\alpha, n) \cdot (\alpha-1)^{n-1}}{(\alpha+n-1)\,(2\alpha+n-2)\,\ldots\,[(n-1)\alpha+n+(n-1)]} \int_0^x K^{(2n-1)}(x-t)\, t^{[(n-1)\alpha+1]/(\alpha-1)} dt \geq$$

$$\geq K^{(2n-1)}(0)\cdot c(\alpha,n)\cdot\frac{(\alpha-1)^{n-1}}{(\alpha+n-1)\,(2\alpha+n-2)\,\ldots\,[(n-1)\alpha+1]}\int\limits_0^x t^{[(n-1)\alpha+1]/(\alpha-1)}dt=$$

$$=c(\alpha,n)\cdot\frac{(\alpha-1)^{n-1}p}{(\alpha+n-1)\,(2\alpha+n-2)\,\ldots\,[(n-1)\alpha+1]}\cdot\frac{\alpha-1}{n\,\alpha}\cdot x^{n\,\alpha/(\alpha-1)}=$$

$$=c(\alpha,n)\cdot[c(\alpha,n)]^{\alpha-1}\cdot x^{n\,\alpha/(\alpha-1)}\equiv[F(x)]^{\alpha}.$$

Следовательно, $(Tu)(x)\geq F(x)$.

Осталось доказать, что $(Tu)(x)\leq G(x)$. Так как $u(x)\leq G(x)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то применяя интегральное неравенство Чебышева, получаем

$$[(Tu)(x)]^{\alpha}=\int\limits_0^x K^{(n)}(x-t)u(t)\,dt\leq\int\limits_0^x K^{(n)}(x-t)G(t)\,dt=$$

$$=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x K^{(n)}(x-t)[K^{(n-1)}(t)]^{1/(\alpha-1)}dt\leq$$

$$\leq\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x K^{(n)}(t)[K^{(n-1)}(t)]^{1/(\alpha-1)}dt=$$

$$=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha}\,[K^{(n-1)}(x)]^{\alpha/(\alpha-1)}\equiv[G(x)]^{\alpha},$$

т.е. $(Tu)(x)\leq G(x)$.

Лемма 3 доказана.

Пусть $b>0$ - произвольное число. Выберем достаточно малое число $\eta\in(0,b)$ так, чтобы выполнялось условие:

$$K^{(2n-1)}(\eta)<\alpha\cdot K^{(2n-1)}(0)=\alpha\cdot p. \tag{15}$$

Очевидно, что такое η существует, так как $K^{(2n-1)}(0)=p>0$, $\alpha>1$ и функция $K^{(2n-1)}(x)$ непрерывна по условию (3).

Положим

$$\beta=\frac{1}{p}\cdot\sup_{\eta\leq x\leq b}\frac{K^{(2n-1)}(x)-p}{x}, \tag{16}$$

где $\eta>0$ определено в условии (15).

Лемма 4. *Если выполнено условие (3), то для любого $x\in[0,b]$ справедливо неравенство*

$$K^{(n)}(x)\cdot e^{-\beta\,x}\leq\frac{1}{(n-1)!}\,K^{(2n-1)}(\eta)\,x^{n-1}. \tag{17}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$K^{(2n-1)}(x)\cdot e^{-\beta\,x}\leq K^{(2n-1)}(\eta)\text{ для любого }x\in[0,b]. \tag{18}$$

Если $x\in[0,\eta]$, то неравенство (18) очевидно, так как $e^{-\beta\,x}\leq 1$. Если же $x\in[\eta,b]$, то аналогично [1], получаем

$$K^{(2n-1)}(x)=p+p\,x\,\frac{1}{p}\,\frac{K^{(2n-1)}(x)-p}{x}\leq p+p\,x\,\beta=p\,(1+\beta\,x)\leq K^{(2n-1)}(\eta)\,e^{\beta\,x},$$

т.е. неравенство (18) выполняется и при $x \in [0, \eta]$.

Так как, в силу равенства (12),

$$K^{(n)}(x) \le \frac{1}{(n-2)!}\, K^{(2n-1)}(x) \int\limits_0^x (x-t)^{n-2} dt = \frac{1}{(n-1)!}\, K^{(2n-1)}(x)\, x^{n-1},$$

то

$$K^{(n)}(x) \cdot e^{-\beta x} \le \frac{1}{(n-1)!}\, K^{(2n-1)}(x) \cdot e^{-\beta x}\, x^{n-1}. \tag{19}$$

Используя неравенство (18), из (19) сразу получаем неравенство (17).

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь класс

$$P_b = \big\{u(x) : u(x) \in C[0,b] \ \text{ и } \ F(x) \le u(x) \le G(x)\big\},$$

где $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 2, а $b > 0$ - любое число.

Введем в этом классе метрику ϱ, положив

$$\varrho(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{n/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}}, \tag{20}$$

где β определено в (16).

Покажем, что метрика (20) определена корректно. Из равенства (12) для любого $x \in [0,b]$ с учетом, что функция $K^{(2n-1)}(x)$ не убывает, имеем

$$K^{(n)}(x) \le \frac{1}{(n-2)!} K^{(2n-1)}(b) \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(b) \cdot x^{n-1}$$

или, что то же самое,

$$K^{(n)}(t) \le \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(b) \cdot t^{n-1} \quad \text{для любого} \quad t \in [0,b].$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x с учетом, что $K^{(n-1)}(0) = 0$, получаем

$$K^{(n-1)}(x) \le \frac{1}{n!} K^{(2n-1)}(b) \cdot x^n \quad \text{для любого} \quad x \in [0,b].$$

Поэтому, для любых $x \in [0,b]$ и $u, v \in P_b$, имеем

$$\frac{|u(x) - v(x)|}{x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \le \frac{G(x) - F(x)}{x^{n/(\alpha-1)}} \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n!}\, K^{(2n-1)}(b)\right)^{1/(\alpha-1)} - c(\alpha, n),$$

т.е. расстояние $\varrho(u,v)$ конечно для любых $u, v \in P_b$.

Точно так же как и в теореме 17.13 [4] проверяется полнота метрического пространства P_b.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие (3). Тогда оператор $T : P_b \to P_b$ и является сжимающим, причем для любых $u, v \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\varrho(Tu, Tv) \le \frac{K^{(2n-1)}(\eta)}{\alpha \cdot p} \cdot \varrho(u,v). \tag{21}$$

Доказательство. То что оператор $T : P_b \to P_b$, т.е. действует из P_b в P_b, вытекает из леммы 3. Как и при доказательстве теоремы 17.14 [4], применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\varrho(Tu, Tv) \le \frac{1}{\alpha} \sup_{0<x\le b} \frac{|(k * [u-v])(x)|}{\big\{F(x)\big\}^{\alpha-1} x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \le \frac{1}{\alpha} \cdot [c(\alpha,n)]^{1-\alpha} \sup_{0<x\le b} \frac{(K^{(n)} * |u-v|)(x)}{x^n x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}}. \tag{22}$$

Так как, в силу неравенства (17) и известного равенства

$$\int\limits_0^x (x-t)^\nu t^\mu dt = B(\nu+1,\mu+1)\cdot x^{\nu+\mu+1}, \quad \text{где} \ \ \nu>-1,\ \mu>-1,$$

имеем

$$(K^{(n)} * |u-v|)(x) = e^{\beta x}\int\limits_0^x K^{(n)}(x-t)\,\frac{|u(t)-v(t)|}{t^{n/(\alpha-1)}e^{\beta t}}e^{-\beta(x-t)}t^{n/(\alpha-1)}dt \le$$

$$\le \frac{1}{(n-1)!}\,\varrho(u,v)\,e^{\beta x}K^{(2n-1)}(\eta)\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}\,t^{n/(\alpha-1)}dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\,\varrho(u,v)\,e^{\beta x}K^{(2n-1)}(\eta)\cdot B\left(n,\frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}\right)\cdot x^{n+n/(\alpha-1)},$$

то, подставив в (22), получаем

$$\varrho(Tu,Tv) \le \frac{1}{\alpha}\cdot[c(\alpha,n)]^{1-\alpha}\frac{1}{(n-1)!}\,\varrho(u,v)\,K^{(2n-1)}(\eta)\cdot B\left(n,\frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}\right) =$$

$$= \frac{K^{(2n-1)}(\eta)}{\alpha\cdot p}\cdot\varrho\,(u,v),$$

т.е. выполнено неравенство (21). Поскольку число $\eta>0$ выбрано так, что выполнено условие (15), то оператор T является сжимающим. Замечая, что коэффициент сжатия в (21) не зависит от b, на основании метода весовых метрик получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\alpha>1$ и выполнено условие (3), то нелинейное интегральное уравнение типа свертки (4) имеет единственное решение в Q_0 (и в P_b при любом $b>0$). Это решение в P_b может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (20) при любом $b<\infty$.*

4. Начальная задача

Приступим, наконец, к исследованию начальной задачи (1)-(2). Ее решение будем разыскивать в классе

$$Q_0^n = \big\{u(x):\ u\in C[0,\infty)\cap C^n(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\big\}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между начальной задачей (1)-(2) и нелинейным интегральным уравнением (4).

Лемма 5. *Пусть $\alpha>1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u\in Q_0^n$ является решением начальной задачи (1)-(2), то $u\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4).*

Доказательство. Пусть $u\in Q_0^n$ есть решение начальной задачи (1)-(2). Тогда очевидно, что $u\in Q_0$ и, в силу формулы интегрирования по частям, из тождества (1) с учетом условий (2) и (3), имеем

$$u^\alpha(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x K(x-t)\,du^{(n-1)}(t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x u^{(n-1)}(t)K'(x-t)\,dt = \ldots =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{x} u'(t)\,K^{(n-1)}(x-t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{x} K^{(n)}(x-t)\,u(t)\,dt = \int_{0}^{x} K^{(n)}(x-t)\,u(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (4).

Приведем примеры, соответствующие интегро-дифференциальным уравнениям первого, второго и третьего порядков.

Пример 2. *Начальная задача*

$$u^{\alpha}(x) = \int_{0}^{x} (x-t)\,u'(t)\,dt, \quad 1<\alpha<\infty, \quad u(0)=0,$$

имеет в классе Q_0^1 *(см. [16]) единственное решение*

$$u(x) = C_1\cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \textit{где} \quad C_1 = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. *Начальная задача*

$$u^{\alpha}(x) = \int_{0}^{x} (x-t)^3 u''(t)\,dt, \quad 1<\alpha<3, \quad u(0)=u'(+0)=0,$$

имеет в классе Q_0^2 *(см. [17]) единственное решение*

$$u(x) = C_2\cdot x^{2/(\alpha-1)}, \quad \textit{где} \quad C_2 = \left[\frac{3\,(\alpha-1)^2}{\alpha\,(\alpha+1)}\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1<\alpha<3$ необходимо для выполнения начального условия $u'(+0)=0$, поскольку $u'(x) = 2\,(\alpha-1)^{-1}\,C_2\cdot x^{(3-\alpha)/(\alpha-1)}$. Это ограничение необходимо также для выполнения условия (14) из [17] при $K(x)=x^3$.

Пример 4. *Начальная задача*

$$u^{\alpha}(x) = \int_{0}^{x} (x-t)^5 u'''(t)\,dt, \quad 1<\alpha<2{,}5, \quad u(0)=u'(+0)=u''(+0)=0,$$

имеет в классе Q_0^3 *(см. [18]) единственное решение*

$$u(x) = C_3\cdot x^{3/(\alpha-1)}, \quad \textit{где} \quad C_3 = \left[\frac{40\,(\alpha-1)^3}{\alpha\,(\alpha+2)\,(2\alpha+1)}\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1<\alpha<2{,}5$ необходимо как для выполнения условия $u''(+0)=0$, поскольку $u''(x) = 3\,(4-\alpha)\,(\alpha-1)^{-2}\,C_3\cdot x^{(5-2\alpha)/(\alpha-1)}$, так и для выполнения условий (5) и (6) из [18] при $K(x)=x^5$.

Из работ [16]-[18] следует, что с ростом порядка n интегро-дифференциального уравнения (1) растет число ограничений на ядро $K(x)$ и показатель степени α (см. примеры 2-4), что связано с начальными условиями (2). Кроме того, при $n=2$ и $n=3$ доказательство априорной оценки снизу решения приводит [17], [18] к нелинейным дифференциальным неравенствам второго и третьего порядков, соответственно. В этой связи, ввиду громоздкости получаемых результатов, ограничимся далее при исследовании задачи (1)-(2) рассмотрением случая $n=4$.

Итак, рассмотрим начальную задачу

$$u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x K(x-t)\cdot u^{(4)}(t)\,dt,\qquad \alpha>1,\qquad x>0, \tag{23}$$

$$u(0)=u'(+0)=u''(+0)=u'''(+0)=0, \tag{24}$$

в конусе

$$Q_0^4=\big\{u(x):\ u\in C[0,\infty)\cap C^4(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\big\}.$$

Лемма 6. *Пусть $\alpha>1$ и выполнены условия*

$$K\in C^7[0,\infty),\ K^{(7)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$

$$K(0)=K'(0)=K''(0)=\ldots=K^{(6)}(0)=0,\ K^{(7)}(0)=q>0, \tag{25}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(4)}(x)=0, \tag{26}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(5)}(x)=0, \tag{27}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(6)}(x)=0. \tag{28}$$

Если $u\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения

$$u^{\alpha}(x)=\int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\cdot u(t)\,dt,\qquad \alpha>1,\qquad x>0, \tag{29}$$

то $u\in Q_0^4$ и является решением начальной задачи (23)-(24).

Доказательство. Пусть $u\in Q_0$ и является решение интегрального уравнения (29). Тогда, по лемме 1, $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и $u\in C^4(0,\infty)$. Следовательно, $u\in Q_0^4$.

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет начальным условиям (24). Воспользуемся тождеством (5) при $n=4$. Поскольку правая часть тождества (5) неотрицательна, то его левая часть также неотрицательна и, значит, $u'(x)\ge 0$ при любом $x>0$. Поэтому из (6), с учетом леммы 1, имеем

$$0\le u'(x)=\alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,u(t)\,dt\le \alpha^{-1}u^{2-\alpha}(x)K^{(4)}(x). \tag{30}$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to+0} u^{2-\alpha}(x)K^{(4)}(x)=0. \tag{31}$$

При $\alpha\le 2$ равенство (31) очевидно, так как $u(0)=0$ и $K^{(4)}(0)=0$. Если же $\alpha>2$, то используя оценку $u(x)\ge c(\alpha,4)\cdot x^{4/(\alpha-1)}$, доказанную в лемме 2, имеем

$$0\le u^{2-\alpha}(x)K^{(4)}(x)\le [c(\alpha,4)]^{2-\alpha}x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(4)}(x)=$$

$$=[c(\alpha,4)]^{2-\alpha}x^{(8/3)/(\alpha-1)}x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(4)}(x)\to 0$$

при $x\to+0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (31) выполняется и при $\alpha>2$.

Переходя к пределу при $x\to+0$ в (30), с учетом равенства (31), получаем

$$u'(+0)=0. \tag{32}$$

Из тождества (8) при $n = 4$ имеем

$$0 \le u''(x) + (\alpha - 1)u^{-1}(x)u'^2(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\,u(t)\,dt. \tag{33}$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to+0} u^{-1}(x)u'^2(x) = 0. \tag{34}$$

Из тождества (6) при $n = 4$, с учетом леммы 1, получаем

$$0 \le u^{-1}(x)u'^2(x) = u^{-1}(x)\,\alpha^{-2}u^{2-2\alpha}\left(\int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\,u(t)\,dt\right)^2 \le$$

$$\le \alpha^{-2}u^{3-2\alpha}(x)\left(K^{(4)}(x)\right)^2. \tag{35}$$

Из (35) непосредственно вытекает равенство (34) при $\alpha \le 3/2$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(4)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 3/2$, то используя оценку $u(x) \ge c(\alpha, 4)\cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (35) имеем

$$0 \le u^{-1}(x)u'^2(x) \le \alpha^{-2}[c(\alpha,4)]^{3-2\alpha}x^{4(3-2\alpha)/(\alpha-1)}\left(K^{(4)}(x)\right)^2 =$$

$$= \alpha^{-2}[c(\alpha,4)]^{3-2\alpha}x^{4/3)/(\alpha-1)}\left(x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(4)}(x)\right)^2 \to 0$$

при $x \to +0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (37) выполняется и при $\alpha > 3/2$.

Покажем, что

$$\lim_{x\to+0} u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\,u(t)\,dt = 0. \tag{36}$$

Так как функция $u(x)$ не убывает на $[0,\infty$, то

$$0 \le u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\,u(t)\,dt \le u^{2-\alpha}(x)K^{(5)}(x). \tag{37}$$

Из (37) вытекает непосредственно равенство (36) при $\alpha \le 2$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(5)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 2$, то используя оценку $u(x) \ge c(\alpha, 4)\cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (37) получаем

$$0 \le u^{1-\alpha}(x)\int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\,u(t)\,dt \le [c(\alpha,4]^{2-\alpha}x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(5)}(x) =$$

$$= [c(\alpha,4]^{2-\alpha}x^{(4/3)/(\alpha-1)}x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(5)}(x) \to 0$$

при $x \to +0$, в силу условия (27). Следовательно, равенство (36) выполняется и при $\alpha > 2$.

Переходя к пределу при $x \to +0$ в (33), с учетом равенств (34) и (36), получаем

$$u''(+0) = 0. \tag{38}$$

Умножив обе части тождества (8) при $n = 4$ на $u^{-1}(x)\,u'(x)$, получим

$$0 \le u^{-1}(x)\,u'(x)\,u''(x) + (\alpha-1)u^{-2}(x)\,u'^3(x) =$$

$$= \alpha^{-1} u^{-\alpha}(x)\, u'(x) \int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\, u(t)\, dt. \tag{39}$$

Покажем, что

$$\lim_{x \to +0} u^{-2/3}(x)\, u'(x) = 0. \tag{40}$$

Из тождества (6) при $n = 4$ имеем

$$0 \le u^{-2/3}(x)\, u'(x) = \alpha^{-1} u^{1/3-\alpha}(x) \int\limits_0^x K^{(5)}(x-t)\, u(t)\, dt \le \alpha^{-1} u^{4/3-\alpha}(x)\, K^{(4)}(x). \tag{41}$$

Из (41) вытекает непосредственно равенство (40) при $\alpha \le 4/3$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(4)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 4/3$, то используя оценку $u(x) \ge c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (41) получаем

$$0 \le u^{-2/3}(x)\, u'(x) \le \alpha^{-1} [c(\alpha,4)]^{4/3-\alpha} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) \to 0$$

при $x \to +0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (40) выполняется и при $\alpha > 4/3$.

Используя равенство (40), получаем

$$\lim_{x \to +0} u^{-2}(x)\, u'^3(x) = \left(\lim_{x \to +0} u^{-2/3}(x)\, u'(x) \right)^3 = 0. \tag{42}$$

Покажем, что

$$\lim_{x \to +0} u^{-\alpha}(x)\, u'(x) \int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\, u(t)\, dt = 0. \tag{43}$$

Так как $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и $K^{(5)}(0) = 0$, то

$$0 \le u^{-\alpha}(x)\, u'(x) \int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\, u(t)\, dt \le u^{1-\alpha}(x)\, u'(x)\, K^{(5)}(x) =$$

$$= u^{-2/3}(x)\, u'(x)\, u^{5/3-\alpha}(x)\, K^{(5)}(x). \tag{44}.$$

Из (44) вытекает непосредственно равенство (43) при $\alpha \le 5/3$, в силу равенств (40), $u(0) = 0$ и $K^{(5)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 5/3$, то используя оценку $u(x) \ge c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (44) получаем

$$0 \le u^{-\alpha}(x)\, u'(x) \int\limits_0^x K^{(6)}(x-t)\, u(t)\, dt \le u^{-2/3}(x)\, u'(x)\, [c(\alpha,4)]^{5/3-\alpha} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(5)}(x) \to 0$$

при $x \to +0$, в силу равенства (40) и условия (27). Следовательно, равенство (43) выполняется и при $\alpha > 5/3$.

Переходя к пределу при $x \to +0$ в (39), с учетом равенств (42) и (43), получаем

$$\lim_{x \to +0} u^{-1}(x)\, u'(x)\, u''(x) = 0. \tag{45}$$

Из тождества (7) при $n = 4$ с учетом, что $K^{(6)}(0) = 0$, имеем (после объединения двух слагаемых)

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) u^{\alpha-3}(x) u'^3(x) + 3\alpha(\alpha-1) u^{\alpha-2}(x) u'(x) u''(x) + \alpha\, u^{\alpha-1}(x) u'''(x) =$$

$$= \int_0^x K^{(7)}(x-t)\,u(t)\,dt.$$

Разделив обе части последнего тождества на $\alpha\,u^{\alpha-1}(x)$, имеем

$$0 \le (\alpha-1)(\alpha-2)u^{-2}(x)u'^3(x) + 3(\alpha-1)u^{-1}(x)u'(x)u''(x) + u'''(x) =$$

$$= \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\int_0^x K^{(7)}(x-t)\,u(t)\,dt. \tag{46}$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to+0} u^{1-\alpha}(x)\int_0^x K^{(7)}(x-t)\,u(t)\,dt = 0. \tag{47}$$

Так как $u(x)$ не убывает на $[0,\infty$ и $K^{(6)}(0)=0$, то

$$0 \le u^{1-\alpha}(x)\int_0^x K^{(7)}(x-t)\,u(t)\,dt \le u^{2-\alpha}(x)\,K^{(6)}(x). \tag{48}.$$

Из (48) вытекает непосредственно равенство (47) при $\alpha \le 2$ так как $u(0)=0$ и $K^{(6)}(0)=0$. Если же $\alpha > 2$, то используя оценку $u(x) \ge c(\alpha,4)\cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (48) получаем

$$0 \le u^{1-\alpha}(x)\int_0^x K^{(7)}(x-t)\,u(t)\,dt \le [c(\alpha,4)]^{2-\alpha}x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(6)}(x) \to 0$$

при $x \to +0$, в силу условия (28). Следовательно, равенство (47) выполняется и при $\alpha > 2$.

Переходя к пределу при $x \to +0$ в (46), с учетом равенств (42), (45) и (47), получаем

$$u'''(+0) = 0. \tag{49}$$

Из (32), (38) и (49) вытекает, что любое решение $u \in Q_0$ интегрального уравнения (29) удовлетворяет начальным условиям (24). Осталось доказать, что оно является решением интегро-дифференциального уравнения (23).

Используя формулу интегрирования по частям, из тождества (29) с учетом условия (25) и равенств (24), имеем

$$u^{\alpha}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x K^{(4)}(x-t)\,u(t)\,dt = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x u(t)\,dK'''(x-t) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x K'''(x-t)\,u'(t)\,dt = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x u'(t)\,dK''(x-t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x K''(x-t)\,u''(t)\,dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x u''(t)\,dK'(x-t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^x K'(x-t)\,u'''(t)\,dt = \int_0^x K(x-t)\,u^{(4)}(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференцциального уравнения (23).

Из леммы 5, леммы 6 и теоремы 4 непосредственно вытекает основной результат данной работы:

Теорема 4. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (25)-(28). Тогда начальная задача (23)-(24) в конусе Q_0^4 имеет единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам*

$$F_4(x) \equiv \left[\frac{K^{(7)}(0)\cdot(\alpha-1)^4}{8\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+3)\,(3\alpha+1)}\right]^{1/(\alpha-1)} \le u^*(x) \le \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\,K'''(x)\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G_4(x)$$

и его можно найти в конусном отрезке $P_b = \{u(x):\ u \in C[0,\infty)$ и $F_4(x) \le u(x) \le G_4(x)\}$ при любом $b > 0$ методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике

$$\varrho(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{x^{4/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta x}}, \quad \beta = \frac{1}{K^{(7)}(0)}\cdot \sup_{\eta\le x\le b} \frac{K^{(7)}(x)-K^{(7)}(0)}{x},$$

причем справедлива оценка скорости их сходимости

$$\rho(u_n,u^*) \le \frac{q^\alpha}{1-q}\,\rho(Tu_0,u_0),$$

где $q = K^{(7)}(\eta)/\big[\alpha\,K^{(7)}(0)\big]$, число $\eta \in (0,b)$ таково, что $K^{(7)}(\eta) < \alpha\cdot K^{(7)}(0)$, а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение.

5. Заключение

В данной работе методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения начальной задачи для однородного вольтерровского интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка со степенной нелинейностью и разностным ядром. Получены точные двусторонние оценки решения и показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Заметим, что условия (25)-(28) можно заменить на условие:

$$\lim_{x\to+0} x^{4(m/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(m)}(x) = 0 \text{ при } m = 4,5,6.$$

Это замечание, анализ результатов работ [16]-[18] и доказательства леммы 6 показывает, что начальная задача (1)-(2) аналогично может быть исследована при любых $n \ge 1$. При этом на ядро $K(x)$ кроме условия (3) будет накладываться еще $n-1$ условие вида (25)-(28). Из полученных результатов вытекает, что показатель степени α степенной нелинейности с ростом порядка n интегро-дифференциального уравнения (1) будет уменьшаться (см. примеры 2-4). Функция $u(x) = c(n,\alpha)\cdot x^{n/(\alpha-1)}$ является решением интегрального уравнения (4) с ядром $K(x) = x^{2n-1}$ при любом $\alpha > 1$ (см. пример 1), однако решением начальной задачи (1)-(2) в случае этого ядра она будет лишь при $1 < \alpha < (2n-1)/(n-1)$, так как

$$u^{(n-1)}(x) = c(\alpha,n)\cdot \frac{n\,(n+1-\alpha)\,(n+2(1-\alpha))\,\ldots\,(n+(n-1)(1-\alpha))}{(\alpha-1)^{n-1}}\cdot x^{(2n-1-(n-1)\alpha)/(\alpha-1)}$$

и поэтому начальное условие $u^{(n-1)}(+0) = 0$ не выполняется при $\alpha \ge (2n-1)/(n-1)$.

Доказательство всех основных результатов данной работы существенно использует условие, что $\alpha > 1$. Это связано с тем, что (см. доказательство леммы 24.6 из [4]) при $0 < \alpha \le 1$ интегральное уравнение (4), а значит и начальная задача (1)-(2), имеют лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе пространства непрерывных на $[0,\infty)$ функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okrasiński W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear convolution type equations // Seminar. Anal. Operator equat. and numer. anal. 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, Berlin. 1990. P. 1-30.
3. Асхабов С. Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Доклады АН СССР, 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.
4. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки (Физматлит, М., 2009).
5. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
6. Асхабов С. Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2022. Т. 23, №5. С. 6-19.
7. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.
8. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.
9. Bielecki A. Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentieless ordinaries // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr. 1956. Vol. 4. P. 261-264.
10. Bielecki A. Une remarque sur lapplication de la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie de lequation $s = f(x, y, z, p, q)$ // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr. 1956. Vol. 4. P. 265-268.
11. Corduneanu C. Bielecki's method in the theory of integral equations // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A. 1984. Vol. 38, №2. P. 23-40.
12. Rolewicz S.Functional analysis and control theory. Linear systems (Mathematics and its applications. East European series, 1987).
13. Kwapisz M. Bielecki's method. Existence and uniqueness Results for Volterra integral equations in L^p space // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 154 P. 403-416.
14. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II (Наука, М., 1970).
16. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, №6. С. 786-795.
17. Askhabov S. N. On an integro-differential sec-ond order equation with difference kernels and power nonlinearity // Bulletin of the Karaganda University. 2022. №2(106). P. 38-48.

18. Асхабов С. Н. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки третьего порядка // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXIV: матер. Междун. конф.: Воронежская весенняя математическая школа (3-9 мая 2023 г.). Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. С. 54-55.

REFERENCES

1. Okrasiński W. 1989, "Nonlinear Volterra equations and physical applications", *Extracta Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 51-74.

2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. 1990, "Nonlinear convolution type equations", *Seminar. Anal. Operator equat. and numer. anal. 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut* für *Mathematik, Berlin*, pp. 1-30.

3. Askhabov S. N., Karapetyants N. K., Yakubov A. Ya., 1990, "Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations", *Dokl. Math.*, vol. 41, no. 2, pp. 323-327.

4. Askhabov S. N. 2009, Nonlinear equations of convolution type. (russian) [Nelineinie uravneniya tipa svertki], Fizmatlit, Moscow, 304 p.

5. Brunner H. "Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications". *Cambridge University Press, Cambridge*, 2017.

6. Askhabov S. N. 2022, "Volterra integral equation with power nonlinearity", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 6–19.

7. Keller J. J. 1981, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 32, no. 2, pp. 170–181.

8. Schneider W. R. 1982, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 140-142.

9. Bielecki A. 1956, "Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentieless ordinaries", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.*, vol. 4, pp. 261-264.

10. Bielecki A. 1956, "Une remarque sur lapplication de la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie de lequation $s = f(x, y, z, p, q)$", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.*, vol. 4, pp. 265–268.

11. Corduneanu C. 1984, "Bielecki's method in the theory of integral equations", *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A.*, vol. 38, no. 2, pp. 23–40.

12. Rolewicz S. Functional analysis and control theory. Linear systems (Mathematics and its applications. East European series, 1987).

13. Kwapisz M. 1991, "Bielecki's method. Existence and uniqueness Results for Volterra integral equations in L^p space", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 154, pp. 403–416.

14. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).

15. Fikhtengolts G. M. 1970, Course of differential and integral calculus, volume II (russian) [Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, tom II], Nauka, Moscow, 800 p.

16. Askhabov S. N. 2020, "Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part", *Differ. Equat.*, vol. 56, no. 6, pp. 775–784.

17. Askhabov S. N. 2022 "On an integro-differential second order equation with difference kernels and power nonlinearity", *Bulletin of the Karaganda University*, no. 2(106), pp. 38–48.

18. Askhabov S. N. 2023 "Nonlinear integro-differential equation of the third order type of convolution" (russian) [Nelineynoye integro-differentsial'noye uravneniye tipa svertki tret'yego poryadka], *Modern methods of the theory of boundary value problems. Pontryagin readings XXXIV: mater. Intern. Conf.: Voronezh Spring Mathematical School (May 3-9, 2023).* Voronezh: Ed. House of VSU. pp. 54–55. (russian)

Получено: 16.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-104-136

Теоремы универсальности и антиуниверсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел[1]

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, А. В. Афонина, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Афонина Анастасия Вячеславовна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ibalaba@mail.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

Были выделены классы моноидов, для которых выполняется условие обобщенной леммы Сельберга, для которых выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина, для которых выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина. Для этих классов моноидов получены новые результаты об аналитическом продолжении в лево от абсциссы абсолютной сходимости. Получен аналог основной леммы С. М. Воронина из работы об универсальности дзета-функции Римана на случай дзета-функций моноида, для которого выполнено условие обобщенной леммы Сельберга либо более сильное условие Сельберга–Бредихина.

Для класса регулярных моноидов Сельберга — Бредихина натуральных чисел удалось доказать теорему универсальности дзета-функции соответствующего моноида.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, А. В. Афонина, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Теоремы универсальности и антиуниверсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 104–136.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ № 22-21-00544 «Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-104-136

Universality and antiuniversality theorems for zeta functions of monoids of natural numbers[2]

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Afonina, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: juska789@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Afonina Anastasia Vyacheslavovna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ibalaba@mail.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

Classes of monoids were identified for which the condition of the generalized Selberg lemma is satisfied, for which the strong Selberg–Bredikhin condition is satisfied, and for which the strengthened asymptotic law in Bredikhin form is satisfied. For these classes of monoids, new results on analytical continuation to the left of the abscissa of absolute convergence are obtained. An analogue of the main lemma of S. M. Voronin is obtained from the work on the universality of the Riemann zeta function in the case of zeta functions of a monoid for which the condition of the generalized Selberg lemma or the stronger Selberg–Bredikhin condition is satisfied.

For the class of regular Selberg–Bredikhin monoids of natural numbers, we succeeded in proving the universality theorem for the zeta function of the corresponding monoid.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Afonina, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2023, "Universality and antiuniversality theorems for zeta functions of monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 104–136.

[2]The reported study was funded by the RSF grant № 22-21-00544 "Zeta function of monoids of naturalnumbers and related issues".

1. Введение

В 1975 году вышла работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [4].

Теорема 1. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leqslant r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|f(s) - \zeta\left(s + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. См. [4] или [5], стр. 240–250. □

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha) = \sum_{n\in M} n^{-\alpha}$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p\in P(M)}\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geqslant \sigma_M,$$

где $0 \leqslant \sigma_M \leqslant \frac{1}{2}$. Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [10]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

В работе [14] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1\right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_-(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0. Дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \prod_{p\neq p_0}\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r}|f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_-(p_0)\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right)\right| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

Теорему 2 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

Лемма 2. *Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4}+iT)}-1\right|<3\varepsilon_1,\quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)}\right|<1+\varepsilon_1.$$

Теорема 3. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r,f) = \max_{|\alpha|\leqslant r}|f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha)-\zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right)\right|<\varepsilon\left(1+\varepsilon_1\right)+3A\varepsilon_1.$$

В работе [20] была дана новая интерпретация метода работы [14], которая объясняла возникновение эффекта слабой универсальности.

Цель данной работы — перенести элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно на достаточно широкий класс дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива теорема универсальности, и указать класс моноидов, для которых справедлива теорема антиуниверсальности.

2. Плотности моноида и последовательности, абсциссы абсолютной сходимости

Пусть, как обычно, через $P(M)$ будем обозначать множество его простых элементов. Мы предполагаем, что моноид M с однозначным разложением на простые элементы. Таким образом, для него справедливо представление дзета-функции моноида $\zeta(M|\alpha)$ через произведение Эйлера:

$$\zeta(M|\alpha)=\sum_{n\in M}n^{-\alpha}=\prod_{q\in P(M)}\left(1-\frac{1}{q^{\alpha}}\right)^{-1},\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma\geqslant\sigma_M$$

и σ_M — абсцисса абсолютной сходимости. Далее везде, мы будем предполагать, что множество простых элементов $P(M)$ является бесконечным множеством, так как в противном случае $\zeta(M|\alpha)$ является аналитической функцией с $\sigma_M = 0$ и с бесконечным множеством полюсов в точках $\alpha_{k,q} = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, $q \in P(M)$. В этом случае отсутствует критическая полоса и, вообще, не может быть речи о теоремах универсальности.

Моноиды с однозначным разложением на простые элементы обладают принципиальным свойством для теоремы универсальности.

Лемма 3. *Моноид M натуральных чисел имеет однозначное разложение на простые элементы тогда и только тогда, когда для любого набора простых элементов $q_{n_\nu} \in P(M)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ набор их логарифмов линейно независим над полем рациональных чисел.*

Доказательство. Действительно, пусть набор логарифмов $\ln q_{n_1}, \ldots, \ln q_{n_N}$ линейно зависим над полем рациональных чисел, тогда найдутся целые числа $a_1, \ldots, a_N$ не все равные 0 такие, что

$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant N,\,a_\nu>0}a_\nu\ln q_{n_\nu}=-\sum_{1\leqslant\nu\leqslant N,\,a_\nu<0}a_\nu\ln q_{n_\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{1\leqslant\nu\leqslant N,\,a_\nu>0}q_{n_\nu}^{a_\nu}=\prod_{1\leqslant\nu\leqslant N,\,a_\nu<0}q_{n_\nu}^{-a_\nu}.$$

Тем самым связь между линейной независимостью и однозначностью разложения на простые элементы установлена. □

Так же, как и в работе [18], будем обозначать через $\nu_M(x) = \sum_{m\in M, m\leqslant x} 1$ распределение элементов моноида M и функцию энтропии $\mathfrak{S}_M(x) = \ln \nu_M(x)$. Нетрудно видеть, что функция распределения простых элементов моноида M, обозначаемая через $\pi_{P(M)}(x) = \sum_{q\in P(M), q\leqslant x} 1$, удовлетворяет равенству $\pi_{P(M)}(x) = \nu_{P(M)}(x)$. Естественно, энтропией множества простых элементов моноида M назвать функцию $\mathfrak{S}_{P(M)}(x) = \ln \pi_{P(M)}(x)$.

Согласно Б. М. Бредихину [2] моноид M имеет C θ-степенную плотность, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\nu_M(x)}{x^\theta} = C, \quad \theta > 0, \quad C > 0.$$

Лемма 4. *Если моноид M имеет C θ-степенную плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида $\zeta(M|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_M = \theta$ и в точке $\alpha = \theta$ полюс с вычетом $C\theta$.*

Доказательство. Действительно, из определения C θ-степенной плотности имеем: $\nu_M(x) = Cx^\theta + R_M(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(x)| < \varepsilon x^\theta$ при $x > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [23], стр. 106) имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{Cx^\theta + R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{C\alpha}{\alpha-\theta} + \alpha \int_1^\infty \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left|\alpha \int_1^\infty \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx\right| < \left|\alpha \int_1^{N(\varepsilon)} \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx\right| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{|\alpha-\theta| N(\varepsilon)^{\Re(\alpha-\theta)}},$$

то утверждение леммы доказано. □

Будем говорить, что моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если $\nu_M(x) = Cx^\theta + O\left(x^{\theta_1}\right)$ и $\theta_1 < \theta$.

Лемма 5. *Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > \theta_1$ кроме точки $\alpha = \theta$, в которой у неё полюс первого порядка.*

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{Cx^\theta + O\left(x^{\theta_1}\right)}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{C\alpha}{\alpha-\theta} + \alpha \int_1^\infty \frac{O\left(x^{\theta_1}\right)}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma > \theta_1$, то утверждение леммы доказано. □

Лемма 6. *Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то для дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ при $\sigma > \theta_1$ справедливо равенство*

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n\in M,\, n\leqslant N} \frac{1}{n^\alpha} + C\frac{\theta}{\alpha-\theta}\frac{1}{N^{\alpha-\theta}} + O\left(\frac{|\alpha|}{(\sigma-\theta_1)N^{\sigma-\theta_1}}\right).$$

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\zeta(M|\alpha)=\sum_{n\in M,\,n\leqslant N}\frac{1}{n^\alpha}+\alpha\int_N^\infty\frac{\nu_M(x)-\nu_M(N)}{x^{\alpha+1}}dx=\sum_{n\in M,\,n\leqslant N}\frac{1}{n^\alpha}+$$
$$+\alpha\int_N^\infty\frac{C(x^\theta-N^\theta)+O\left(x^{\theta_1}\right)}{x^{\alpha+1}}dx=\sum_{n\in M,\,n\leqslant N}\frac{1}{n^\alpha}+C\left(\frac{\alpha}{(\alpha-\theta)N^{\alpha-\theta}}-\frac{1}{N^{\alpha-\theta}}\right)+$$
$$+\alpha\int_N^\infty\frac{O\left(x^{\theta_1}\right)}{x^{\alpha+1}}dx=\sum_{n\in M,\,n\leqslant N}\frac{1}{n^\alpha}+C\frac{\theta}{\alpha-\theta}\frac{1}{N^{\alpha-\theta}}+O\left(\frac{|\alpha|}{(\sigma-\theta_1)N^{\sigma-\theta_1}}\right),$$

так как, если обозначим через C_1 константу в знаке $O\left(x^{\theta_1}\right)$ в формуле $\nu_M(x)=Cx^\theta+O\left(x^{\theta_1}\right)$, то

$$\left|\alpha\int_N^\infty\frac{O\left(x^{\theta_1}\right)}{x^{\alpha+1}}dx\right|\leqslant|\alpha|C_1\int_N^\infty\frac{x^{\theta_1}}{x^{\sigma+1}}dx=\frac{|\alpha|C_1}{(\sigma-\theta_1)N^{\sigma-\theta_1}}.$$

□

Будем говорить, что моноид M с однозначным разложением на простые множители регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если при $\theta_1<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant 2$, $\pi N\geqslant|t|\geqslant 2\pi$ для $\alpha=\sigma+it$ справедлива формула

$$\zeta(M|\alpha)=\sum_{n\in M,\,n\leqslant N}\frac{1}{n^\alpha}+C\frac{\theta}{\alpha-\theta}\frac{1}{N^{\alpha-\theta}}+O\left(\frac{1}{N^{\sigma-\theta_1}}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0. Будем такие моноиды называть регулярными моноидами Сельберга — Бредихина.

Будем говорить, что моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет сильному условию Сельберга — Бредихина, если $\nu_M(x)=Cx^\theta+C_1x^{\theta_1}+\ldots+x^{\theta_n}+O(1)$ и $0<\theta_n<\ldots<\theta_1<\theta$.

Лемма 7. *Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет сильному условию Сельберга — Бредихина с $0<\theta_n<\ldots<\theta_1<\theta$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma>0$ кроме точек $\alpha=\theta$, $\alpha_k=\theta_k$ $(k=1,\ldots,n)$, в которых у неё полюса первого порядка.*

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int_1^\infty\frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}}dx=\alpha\int_1^\infty\frac{Cx^\theta+C_1x^{\theta_1}+\ldots+x^{\theta_n}+O(1)}{x^{\alpha+1}}dx=$$
$$=\frac{C\alpha}{\alpha-\theta}+\frac{C_1\alpha}{\alpha-\theta_1}+\ldots+\frac{C_n\alpha}{\alpha-\theta_n}+\alpha\int_1^\infty\frac{O(1)}{x^{\alpha+1}}dx.$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma>0$, то утверждение леммы доказано. □

Из результатов лемм 5 и 7 следует, что понятие критической полосы и критической прямой надо изменить для случая моноидов из этих лемм. А именно, критической полосой надо назвать полосу, заданную неравенствами $\theta_1<\sigma<\theta$, а критической прямой — прямую $\sigma=\frac{\theta_1+\theta}{2}$. Необходимо отметить, что это определение согласуется со случаем дзета-функции Римана, так как в этом случае $\theta_1=0$, $\theta=1$.

В работе [2] Б. М. Бредихин доказал, что для любого моноида M натуральных чисел, удовлетворяющему условию обобщенной леммы Сельберга, справедлив асимптотический закон:

$$\pi_M(x)\sim\frac{1}{\theta}\frac{x^\theta}{\ln x}.\tag{1}$$

Будем говорить, что для моноида M натуральных чисел выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина (См. [3]), если

$$\pi_M(x) = \int_2^{x^\theta} \frac{du}{\ln u} + O\left(\frac{x^\theta}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right) = \frac{1}{\theta}\frac{x^\theta}{\ln x} + O\left(\frac{x^\theta}{\theta^2 \ln^2 x} + \frac{x^\theta}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right), \tag{2}$$

с некоторой константой $c > 0$.

Лемма 8. *Если моноид M натуральных чисел удовлетворяет усиленному асимптотическому закону в форме Бредихина с $0 < \theta \leqslant 1$, то при достаточно большом x и натуральном $N = [x] + 2$, $a = x - \frac{1}{32N^5}$ и $b = \frac{1}{16N^5}$ справедливо неравенство*

$$\pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) > \frac{e^{\theta x}}{32a^6} > 4.$$

Доказательство. Действительно, пусть при $x > x_0$ выполнено неравенство

$$\left|\pi_M\left(e^x\right) - \int_2^{e^{x\theta}} \frac{du}{\ln u}\right| < C\frac{e^{\theta x}}{e^{c\sqrt{x}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_M\left(e^{a+b}\right) > \int_2^{e^{(a+b)\theta}} \frac{du}{\ln u} - C\frac{e^{\theta(a+b)}}{e^{c\sqrt{a+b}}}, \quad \pi_M\left(e^a\right) < \int_2^{e^{a\theta}} \frac{du}{\ln u} + C\frac{e^{\theta a}}{e^{c\sqrt{a}}}$$

и

$$\pi_M\left(e^{a+b}\right) - \pi_M\left(e^a\right) > \int_{e^{a\theta}}^{e^{(a+b)\theta}} \frac{du}{\ln u} - C\left(\frac{e^{\theta(a+b)}}{e^{c\sqrt{a+b}}} + \frac{e^{\theta a}}{e^{c\sqrt{a}}}\right) >$$
$$> e^{\theta a}\left(\frac{1}{\theta}\frac{e^{\theta b}-1}{a+b} - C\left(\frac{e^{\theta b}}{e^{c\sqrt{a+b}}} + \frac{1}{e^{c\sqrt{a}}}\right)\right).$$

Так как $0 < \theta b < 1$, то $1 + \theta b < e^{\theta b} \leqslant e$ и

$$\pi_M\left(e^{a+b}\right) - \pi_M\left(e^a\right) > e^{\theta a}\left(\frac{b}{a+b} - C\frac{1+e}{e^{c\sqrt{a}}}\right) > e^{\theta a}\left(\frac{1}{16N^6} - C\frac{(1+e)}{e^{c\sqrt{a}}}\right).$$

При достаточно большом a имеем:

$$\frac{1}{16a^6} - C\frac{(1+e)}{e^{c\sqrt{a}}} > \frac{1}{32a^6}, \quad \pi_M\left(e^{a+b}\right) - \pi_M\left(e^a\right) > \frac{e^{\theta a}}{32a^6}.$$

Так как при $\theta a > \ln 128 + 6\ln a$ выполняется $\pi_M\left(e^{a+b}\right) - \pi_M\left(e^a\right) > 4$, то утверждение леммы доказано. □

Приведём пример последовательности, полученной объединением двух моноидов со степенной плотностью.

Пусть $\mathbb{P}_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \ldots\}$ — множество k-ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k) = \mathbb{N}_k = \{1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \ldots\}$ — множество k-ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$-плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$.

Нетрудно видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = x^{\frac{1}{k}} + O(1)$, так как при $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $\pi N \geqslant |t| \geqslant 2\pi$ для $\alpha = \sigma + it$ справедлива формула

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_k),\, n \leqslant N} \frac{1}{n^\alpha} + C\frac{\theta}{\alpha - \theta}\frac{1}{N^{\alpha-\theta}} + O\left(\frac{1}{N^\sigma}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0. Действительно, $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$,

$$\sum_{n \in M(\mathbb{P}_k),\, n \leqslant N} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n^k \leqslant N} \frac{1}{n^{k\alpha}}, \quad \zeta(k\alpha) = \sum_{n \leqslant N^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{n^{k\alpha}} + \frac{N^{\frac{1-k\alpha}{k}}}{k\alpha - 1} + O\left(N^{-\sigma}\right).$$

Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел. Более того, из асимптотического закона распределения простых чисел (См. [5], стр. 59)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$$

следует, что для моноида $M(\mathbb{P}_k)$ выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{du}{\ln u} + O\left(x^{\frac{1}{k}}e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\ln x}}\right).$$

Рассмотрим последовательность, полученную объединением двух моноидов $M(\mathbb{P}_k)$ и $M(\mathbb{P}_{k+1})$, $M_{k,k+1} = M(\mathbb{P}_k) \bigcup M(\mathbb{P}_{k+1})$. Нетрудно видеть, что $M(\mathbb{P}_k) \bigcap M(\mathbb{P}_{k+1}) = M(\mathbb{P}_{k(k+1)})$. Отсюда следует, что $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = [x^{\frac{1}{k}}] + [x^{\frac{1}{k+1}}] - [x^{\frac{1}{k(k+1)}}]$. Таким образом, последовательность $M_{k,k+1}$ имеет степенную плотность с $\theta = \frac{1}{k}$ и удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 = \frac{1}{k+1}$, $\theta_2 = \frac{1}{k(k+1)}$, $\theta_3 = 0$, так как $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{1}{k+1}} - x^{\frac{1}{k(k+1)}} + O(1)$. Для дзета-функции справедливо равенство

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha),$$

из которого следует, что $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точек $\alpha_1 = \frac{1}{k}$, $\alpha_2 = \frac{1}{k+1}$ и $\alpha_3 = \frac{1}{k(k+1)}$, в которых полюса первого порядка, а абсцисса абсолютной сходимости удовлетворяет равенству $\sigma_{M_{k,k+1}} = \frac{1}{k}$.

Нетрудно видеть, что аналогичные примеры можно строить и для объединения нескольких моноидов со степенной плотностью, для которого будет выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина.

В работе [17] была определена C логарифмическая θ-степенная плотность.

Определение 1. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из определения видно, что, если моноид M имеет C θ-степенную плотность, то он имеет θ логарифмическую 1-степенную плотность.

Следующая лемма показывает, что моноиды M с C логарифмической θ-степенной плотностью при $\theta < 1$ имеют принципиальное отличие.

Лемма 9. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M = 0$ и дзета-функция моноида $\zeta(M|\alpha)$ голоморфна во всей правой α-полуплоскости с $\sigma > 0$.*

Доказательство. Действительно, из определения C логарифмической θ-степенной плотности имеем: $\nu_M(x) = e^{C(\ln x)^\theta + R_M(x)}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(x)| < \varepsilon(\ln x)^\theta$ при $x > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [23], стр. 106) имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{e^{C(\ln x)^\theta + R_M(x)}}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_0^\infty \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_0^\infty \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| < \left| \alpha \int_0^{N(\varepsilon)} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| + \left| \alpha \int_{N(\varepsilon)}^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t - (C+\varepsilon)t^\theta}} \right|,$$

последний несобственный интеграл при $\theta < 1$ абсолютно сходится при любом α с $\sigma > 0$, то утверждение леммы доказано. □

Дословно повторяя рассуждения из работы [12], можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Из этой теоремы сразу следует теорема антиуниверсальности.

Теорема 5. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ не является универсальной функцией в смысле Воронина.*

Остановимся на связи абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида M с однозначным разложением на простые элементы и абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции множества простых элементов этого моноида.

Лемма 10. *Для любого моноида M с однозначным разложением на простые элементы для абсцисс абсолютной сходимости справедливо равенство*

$$\sigma_M = \sigma_{P(M)}.$$

Доказательство. Действительно, в области абсолютной сходимости в силу однозначности разложения на простые элементы справедливы равенства:

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{q \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1}, \quad \ln \zeta(M|\alpha) = \sum_{q \in P(M)} \left(\frac{1}{q^\alpha} + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k q^{k\alpha}}\right) =$$

$$= \zeta(P(M)|\alpha) + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} \zeta(P(M)|k\alpha).$$

По теореме Абеля имеем:

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} \zeta(P(M)|k\alpha) = \sum_{k=2}^\infty \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{k\alpha+1}} dx = \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{2\alpha+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^\alpha}} dx = \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{\alpha+1}(x^\alpha - 1)} dx$$

последний несобственный интеграл абсолютно сходится при любом α с $\sigma > \sigma_{P(M)}$, что доказывает утверждение леммы. □

3. Вспомогательные обозначения, определения и леммы

Все дальнейшие рассуждения мы будем проводить для моноида M с однозначным разложением на простые элементы и со степенной θ-плотностью, для которого выполнено условие обобщенной леммы Сельберга либо более сильное условие Сельберга–Бредихина. В любом случае определена величина $\theta_1 < \theta$. Согласно лемме 4 имеем: $\sigma_M = \theta$ и ширина критической полосы равна $\theta - \theta_1$, а критическая прямая имеет вид $\sigma = \frac{\theta+\theta_1}{2}$.

Определение 2. *Множество Ω_M — множество всех наборов вещественных чисел, индексированных простыми элементами из $P(M)$, т. е. Ω_M состоит из векторов вида $\vec{\theta} = (\theta_{q_1}, \theta_{q_2}, \ldots, \theta_{q_n}, \ldots)$, где индекс q_n пробегает все простые элементы из $P(M) = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots\}$.*

Определение 3. *Пусть $A \subset P(M)$ — конечное множество простых элементов моноида M. Для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $\vec{\theta} \in \Omega_M$ полагаем*

$$\zeta_A(\alpha, \vec{\theta}) = \prod_{q \in A} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \theta_q}}{q^\alpha}\right)^{-1}.$$

Нашей ближайшей целью является доказательство аналога леммы 1 из монографии [5] (стр. 241). Мы разобьём её на несколько лемм, которые позволяют лучше прослеживать новые моменты в доказательстве теоремы универсальности. Местами нами восстановлены рассуждения, которые опущены в монографии [5] и в статье [4], и устранены отдельные опечатки из этих работ.

Определение 4. *(См. [5] (стр. 323)) Пространством Харди $\mathbf{H}_2^{(R)}$ называется множество функций $f(\alpha)$, определённых для $|\alpha| < R$ и аналитических в этой области, для которых*

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to R} \iint\limits_{|\alpha|<r} |f(\alpha)|^2 d\sigma dt < \infty.$$

Следуя за С. М. Ворониным (См. [5] (стр. 241)), зададим в $\mathbf{H}_2^{(R)}$ скалярное произведение функций $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ формулой

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \Re \iint\limits_{|\alpha| \leqslant R} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\alpha)} d\sigma dt.$$

Тем самым $\mathbf{H}_2^{(R)}$ превращается в вещественное гильбертово пространство.

Лемма 11. *Формула*

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \Re \iint\limits_{|\alpha| \leqslant R} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\alpha)} d\sigma dt.$$

задает скалярное произведение на $\mathbf{H}_2^{(R)}$, относительно которого $\mathbf{H}_2^{(R)}$ является вещественным гильбертовым пространством.

Доказательство. Пусть $a_\nu(\alpha) = \Re\, \varphi_\nu(\alpha)$, $b_\nu(\alpha) = \operatorname{Im} \varphi_\nu(\alpha)$, $(\nu = 1, 2)$, тогда

$$\varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\alpha)} = a_1(\alpha)a_2(\alpha) + b_1(\alpha)b_2(\alpha) + (-a_1(\alpha)b_2(\alpha) + a_2(\alpha)b_1(\alpha))i$$

и

$$(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha))=\Re\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}\varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\alpha)}d\sigma dt=\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}(a_1(\alpha)a_2(\alpha)+b_1(\alpha)b_2(\alpha))d\sigma dt.$$

Из последнего равенства следует, что для любого вещественного λ справедливы равенства: $(\lambda\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha))=\lambda(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha))$, $(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha)+\varphi_3(\alpha))=(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha))+(\varphi_1(\alpha),\varphi_3(\alpha))$,

$$(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha))=(\varphi_2(\alpha),\varphi_1(\alpha)),\quad \|\varphi_1(\alpha)\|^2=(\varphi_1(\alpha),\varphi_1(\alpha))\geqslant 0$$

и из $\|\varphi_1(\alpha)\|=0$ следует $\varphi_1(\alpha)=0$.

Теперь осталось доказать, что $\mathbf{H}_2^{(R)}$ полное пространство относительно нормы $\|\varphi_1(\alpha)\|=\sqrt{(\varphi_1(\alpha),\varphi_1(\alpha))}$ и сепарабельное.

Так как функция $f(\alpha)\in\mathbf{H}_2^{(R)}$ является аналитической в круге $|\alpha|\leqslant R$, то разложим её в степенной ряд

$$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Отсюда следует, что множество многочленов всюду плотно в $\mathbf{H}_2^{(R)}$, а так как множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно, то сепарабельность доказана.

Пусть последовательность $f_n(\alpha)\in\mathbf{H}_2^{(R)}$ является фундаментальной, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдётся $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n,m>N$ справедливо неравенство $\|f_n(\alpha)-f_m(\alpha)\|<\varepsilon$.

Рассмотрим ряд

$$F(\alpha)=f_1(\alpha)+\sum_{n=2}^{\infty}(f_n(\alpha)-f_{n-1}(\alpha)),$$

который является сходящимся для любого α из круга $|\alpha|\leqslant R$, так как согласно теореме 7 из [5], стр. 323 из неравенства

$$\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}|f_n(\alpha)-f_m(\alpha)|^2d\sigma dt<\varepsilon^2$$

следует

$$|f_n(\alpha)-f_m(\alpha)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}(R-R')}$$

при $|\alpha|\leqslant R'<R$. По теореме Вейерштрасса функция $F(\alpha)$ является аналитической функцией в круге $|\alpha|\leqslant R$ и полнота $\mathbf{H}_2^{(R)}$ доказана. □

Определение 5. *Основной областью параметров назовем*

$$0<r<\frac{\sigma_M-\theta_1}{4},\quad \sigma_M^*=\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4},\quad \vec{\theta}_0=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\dots\right),\quad \vec{\theta}_0^*=\sigma_M\vec{\theta}_0.$$

Лемма 12. *Пусть* $0<r<\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}$ *и* $g(\alpha)$ *аналитична при* $|\alpha|<r$ *и непрерывна при* $|\alpha|\leqslant r$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon>0$ *существует* $\gamma>1$ *такое, что* $\gamma^2r<\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}$ *и*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|g(\alpha)-g\left(\frac{\alpha}{\gamma^2}\right)\right|<\varepsilon.\tag{3}$$

Функция $g\left(\frac{\alpha}{\gamma^2}\right)$ *принадлежит пространству Харди* $\mathbf{H}_2^{(\gamma r)}$.

Доказательство. Действительно, функция $g(\alpha)$ непрерывна в ограниченной области $|\alpha| \leqslant r$. Значит она равномерно непрерывна в этой области. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек α_1 и α_2 из этой области с условием $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ выполняется неравенство $|g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| < \varepsilon$.

Для $|\alpha| \leqslant r$ имеем неравенство

$$\left|\alpha - \frac{\alpha}{\gamma^2}\right| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) r.$$

Поэтому, при $\gamma = \min\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}}, \sqrt{\frac{\sigma_M - \theta_1}{4r}}\right)$ получим первое утверждение леммы.

Так как при $|\alpha| \leqslant \gamma r$ имеем $\left|\frac{\alpha}{\gamma^2}\right| \leqslant \frac{r}{\gamma} < r$, то

$$\iint\limits_{|\alpha|<\gamma r} \left|g\left(\frac{\alpha}{\gamma^2}\right)\right|^2 d\sigma dt = \gamma^4 \iint\limits_{|\alpha|<\frac{r}{\gamma}} |g(\alpha)|^2 \, d\sigma dt \leqslant \gamma^4 \iint\limits_{|\alpha|<r} |g(\alpha)|^2 \, d\sigma dt < \infty$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Рассмотрим при $|\alpha| < r$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta}),$$

где

$$u_k(\alpha, \vec{\theta}) = \ln\left(1 - \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}}\right)^{-1},$$

q_k — k-ый простой элемент из $P(M)$ и $\ln(1-z)^{-1} = z + \frac{z^2}{2} + \ldots$ при $|z| < 1$. Заметим, что $\left|\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha\right| < \sigma_M$ при этом $\Re\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha\right) > \frac{\sigma_M + \theta_1}{2}$, поэтому

$$\left|\frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}}\right| < 1.$$

Также, рассмотрим при $|\alpha| < r$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}}.$$

Лемма 13. *Справедливо равенство для рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\alpha, \vec{\theta}),$$

где

$$\rho_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-2\pi i n \theta_{q_k}}}{q_k^{n\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha\right)}}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\alpha, \vec{\theta})$ *абсолютно сходится при* $|\alpha| \leqslant r$.

Доказательство. Действительно, при $|\alpha| \leqslant r$ имеем соотношения $\alpha = \sigma + it$, $|\sigma| < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\rho_k(\alpha, \vec{\theta})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n q_k^{n\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta\left(P(M) \left| n\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right)\right.\right).$$

Повторяя рассуждения леммы 7, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta\left(P(M) \left| n\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right)\right.\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{n\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1}} dx =$$

$$= \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{2\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)}}} dx =$$

$$= \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1} \left(x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)} - 1\right)} dx.$$

Так как при $x > 2^{\frac{1}{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|}}$ справедливо неравенство

$$\frac{\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1} \left(x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)} - 1\right)} < \frac{2\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1} x^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)}} = \frac{2\pi_M(x)}{x^{2\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right)+1}}$$

и $2\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - |\sigma|\right) > \sigma_M + \theta_1$, то последний несобственный интеграл абсолютно сходится, что и доказывает утверждение леммы. □

Из доказанной леммы вытекает, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta})$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta})$ сходятся и расходятся одновременно.

Далее везде считаем $R = \gamma r$. Из определения величины γ следует, что $R < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Положим $\delta_1 = \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} - R$, тогда $0 < \delta_1 < \frac{1}{4}$. Кроме этого, справедливо равенство $R - \frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} = 2R - \sigma_M + \delta_1$.

Лемма 14. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 \leqslant \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| q_k^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} + R} \right|^2 < \infty.$$

Доказательство. Действительно,

$$\|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 = \iint\limits_{|\alpha|<R} \left| \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} + \alpha}} \right|^2 d\sigma dt \leqslant \left(\frac{1}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - R}}\right)^2 \iint\limits_{|\alpha|<R} d\sigma dt = \frac{\pi R^2}{q_k^{2\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - R\right)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 \leqslant \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| q_k^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} + R} \right|^2 = \pi R^2 \cdot \zeta\left(P(M) \left| 2\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R\right)\right.\right).$$

Так как $2\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} - R\right) > \sigma_M + \theta_1$ — абсциссы абсолютной сходимости, то утверждение леммы доказано. □

Лемма 15. *Для любой функции* $\varphi(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ *с* $\|\varphi(\alpha)\| = 1$ *для общего члена ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha)) \tag{4}$$

справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty}(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha)) = 0.$$

Доказательство. По условию имеем:

$$\|\varphi(\alpha)\| = 1 \Longrightarrow \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} |\varphi(\alpha)|^2 d\sigma dt = 1.$$

Обозначим через D_0 ту часть круга $|\alpha| \leqslant R$, на которой $|\varphi(\alpha)| \leqslant 1$, а через D_1 оставшуюся часть. Очевидно, что

$$\iint\limits_{D_0} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leqslant \pi R^2, \quad \iint\limits_{D_1} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leqslant \iint\limits_{D_1} |\varphi(\alpha)|^2 d\sigma dt \leqslant 1, \quad \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leqslant \pi R^2 + 1.$$

По определению имеем:

$$(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha)) = \Re \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} \eta_k(\alpha,\vec{\theta})\overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt = \Re \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} \left(\frac{e^{-2\pi i\theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\alpha}} \right) \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt.$$

Отсюда следует, что

$$|(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha))| \leqslant \frac{1}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}-R}} \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leqslant \frac{\pi R^2+1}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}-R}} \to 0 \quad (k\to\infty)$$

и лемма доказана. □

Определим функцию $\Delta(x)$ равенством:

$$\Delta(x) = \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} e^{-\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\alpha\right)x} \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt.$$

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha)) = \Re\left[e^{-2\pi i\theta_{q_k}}\Delta(\ln q_k)\right].$$

Доказательство. Действительно,

$$(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}),\varphi(\alpha)) = \Re\left[\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} \left(\frac{e^{-2\pi i\theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\alpha}} \right) \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt\right] =$$

$$= \Re\left[e^{-2\pi i\theta_{q_k}} \iint\limits_{|\alpha|\leqslant R} e^{-\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\alpha\right)\ln q_k} \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt\right] = \Re\left[e^{-2\pi i\theta_{q_k}}\Delta(\ln q_k)\right].$$

□

Лемма 17. *Пусть*

$$\varphi(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\alpha^m,\quad \|\varphi(\alpha)\|=1.$$

Тогда

$$\Delta(x)=\pi R^2e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{m!}(xR)^m,\quad b_m=\frac{(-1)^mR^m\overline{a_m}}{m+1}$$

и

$$0<\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|^2(m+1)\leqslant\frac{1}{\pi R^2},\quad |b_m|\leqslant\frac{1}{\pi R\sqrt{m+1}}.$$

Доказательство. Выразим через a_m функцию $\Delta(x)$. Имеем:

$$\Delta(x)=e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}e^{-\alpha x}\overline{\varphi(\alpha)}d\sigma dt=e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\alpha x)^m}{m!}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m\alpha^m\right)}d\sigma dt=$$

$$=e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{(-x)^{m_1}}{m_1!}\overline{a_{m_2}}\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}\alpha^{m_1}\overline{\alpha}^{m_2}d\sigma dt.$$

Переходя к полярным координатам, получим:

$$\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}\alpha^{m_1}\overline{\alpha}^{m_2}d\sigma dt=0\quad\text{при } m_1\neq m_2$$

и

$$\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}\alpha^m\overline{\alpha}^m d\sigma dt=\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho^{2m}\rho d\rho d\theta=2\pi\frac{R^{2m+2}}{2m+2}.$$

Поэтому

$$\Delta(x)=e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x)^m\overline{a_m}}{m!}\pi\frac{R^{2m+2}}{m+1}=\pi R^2e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x)^m\overline{a_m}}{(m+1)!}R^{2m}=$$

$$=\pi R^2e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{m!}(xR)^m,$$

где $b_m=\frac{(-1)^mR^m\overline{a_m}}{m+1}$.

Из равенства $\|\varphi(\alpha)\|=1$ заключаем, что

$$1=\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}|\varphi(\alpha)|^2d\sigma dt=\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2\iint\limits_{|\alpha|\leqslant R}|\alpha|^{2m}d\sigma dt=\pi R^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|a_m|^2R^{2m}}{m+1}=\pi R^2\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|^2(m+1).$$

Поэтому

$$0<\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|^2(m+1)=\frac{1}{\pi R^2},\tag{5}$$

а, следовательно,

$$|b_m|\leqslant\frac{1}{R\sqrt{\pi(m+1)}}.\tag{6}$$

□

Рассмотрим целую функцию $F(u)$, заданную рядом

$$F(u)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{m!}u^m,\quad 0<\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|^2(m+1)\leqslant\frac{1}{\pi R^2},\quad |b_m|\leqslant\frac{1}{R\sqrt{\pi(m+1)}}. \tag{7}$$

Очевидно, что степенной ряд для $F(u)$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости, так как

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|b_m|}{m!}|u|^m\leqslant\frac{1}{\pi R}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|u|^m=\frac{1}{\pi R}e^{|u|}.$$

Лемма 18. *Для любой целой функцию $F(u)$, удовлетворяющей условиям (7) для любого $\delta>0$ найдется последовательность положительных чисел u_1, u_2, $\ldots\to+\infty$ такая, что*

$$|F(u_j)|>e^{-(1+2\delta)u_j}. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $\delta\in(0,1)$ и постоянная $A>0$ такие, что $|F(u)|<Ae^{-(1+2\delta)u}$ для любых $u\geqslant 0$. Следовательно,

$$|e^{(1+\delta)u}F(u)|<Ae^{-\delta u}\quad\text{при } u\geqslant 0 \tag{9}$$

и, в силу соотношений (7),

$$|e^{(1+\delta)u}F(u)|<A_1e^{-\delta|u|}\quad\text{при } u<0. \tag{10}$$

Действительно, при $u<0$ имеем: $|F(u)|\leqslant\frac{1}{\pi R}e^{|u|}=\frac{1}{\pi R}e^{-u}$,

$$|e^{(1+\delta)u}F(u)|\leqslant\frac{1}{\pi R}e^{(1+\delta)u}e^{-u}=\frac{1}{\pi R}e^{-\delta|u|}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right|^2du<A\int_0^{\infty}e^{-2\delta u}du+A_1\int_{-\infty}^{0}e^{-2\delta|u|}du=\frac{A+A_1}{2\delta}<\infty.$$

По теореме Пэли–Винера (См. [19], стр. 408) получаем

$$e^{(1+\delta)u}F(u)=\int_{-3}^{3}f_0(\xi)e^{i\xi u}d\xi$$

для некоторой функции $f_0(\xi)\in L_2(-3,3)$. Но из неравенств (9) и (10) следует, что $f_0(\xi)$ не может быть финитной функцией. Действительно,

$$f_0(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{(1+\delta)u}F(u)\right)e^{-i\xi u}du.$$

Следовательно, $f_0(\xi)$ является аналитической функцией в некоторой полосе около вещественной оси. Полученное противоречие доказывает, что для всякого $\delta>0$ найдется последовательность положительных чисел u_1, u_2, $\ldots\to+\infty$ такая, что выполняется неравенство (8). □

Лемма 19. *Для любой целой функцию $F(u)$, удовлетворяющей условиям (7), и положительном x и $N=[x]+2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN>1$, найдется полином $P_1(y)$ степени N^2 такой, что для любого y из отрезка $[x-1,x+1]$ выполняется неравенство*

$$|F(yR)-P_1(y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ln x}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим многочлен $P_1(y)$, заданный равенством

$$P_1(y) = \sum_{m=0}^{N^2} \frac{b_m}{m!}(yR)^m.$$

Ясно, что

$$F(yR) - P_1(y) = \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(yR)^m.$$

Так как $\sqrt{\pi}RN > 1$, то $|b_m| < 1$ для любого $m > N^2$.

Для положительных y справедливы неравенства

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(yR)^m\right| \leqslant \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{(yR)^m}{m!} \leqslant \frac{(yR)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(yR)^m}{m!} \leqslant \frac{(yR)^{N^2} e^{yR}}{(N^2)!},$$

так как $(N^2+m)! > (N^2)!m!$. Применим неравенство Стирлинга

$$\sqrt{2\pi}N^{2N^2+1}e^{\frac{1}{12N^2}-N^2} > (N^2)! > \sqrt{2\pi}N^{2N^2+1}e^{\frac{1}{12N^2+1}-N^2},$$

получим

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(yR)^m\right| \leqslant \frac{(yR)^{N^2}e^{yR}e^{N^2-\frac{1}{12N^2+1}}}{\sqrt{2\pi}N^{2N^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{yR+N^2(\ln(yR)+1-2\ln N)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}}$$

Отсюда следует, что для любого $y \in [x-1, x+1]$ выполняется неравенство

$$|F(yR) - P_1(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{yR+N^2(\ln(yR)+1-2\ln N)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(x+1)R+N^2(\ln((x+1)R)+1-2\ln N)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}},$$

так как при $y \in [x-1, x+1]$ функция

$$yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N)$$

монотонно возрастает:

$$\big(yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N)\big)' = R + \frac{N^2}{y} > 0.$$

Далее имеем:

$$(x+1)R + N^2\left(\ln((x+1)R) + 1 - 2\ln N\right) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} <$$
$$< \frac{x+1}{4} + N^2(\ln((x+1)) - \ln 4 + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} <$$
$$< \frac{x+1}{4} - N^2\ln N - \ln N < -x^2\ln x,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 20. *Для полинома $P_1(y)$ из леммы 19 для любого $y \in \left[x - \frac{1}{32}N^{-5}, x + \frac{1}{32}N^{-5}\right]$ справедливо неравенство*

$$|P_1(y) - P_1(x)| \leqslant \frac{|P_1(x)|}{32N-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$K_1 = \max_{y\in\left[x_j-\frac{1}{32}N^{-5},x_j+\frac{1}{32}N^{-5}\right]}|P_1(y)|, \quad K_1 = |P_1(y_0)|, \quad y_0 \in \left[x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5}\right],$$

определим многочлен $Q_1(y)$ с помощью равенства $Q_1(y) = K_1^{-1}P_1\left(x_j + \frac{1}{32}N^{-5}y\right)$, тогда

$$\max_{y\in[-1,1]}|Q_1(y)| = 1$$

и по теореме А. А. Маркова (См. [1], стр. 323)

$$\max_{y\in[-1,1]}|Q'(y)| \leqslant N^4.$$

Справедливы неравенства

$$|P_1(y_0) - P_1(x)| \leqslant |P_1(y_0)||y_0 - x|N^4 \leqslant \frac{|P_1(y_0)|}{32N}, \quad |P_1(x)| \geqslant |P_1(y_0)|\left(1 - \frac{1}{32N}\right).$$

Отсюда следует, что

$$K_1 \leqslant \frac{|P_1(x)|}{1-\frac{1}{32N}}, \quad |P_1(y) - P_1(x)| \leqslant \frac{|P_1(x)|}{32N-1}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 21. *Для положительного x и $N = [x] + 2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN > 1$, найдется полином $P_2(y)$ степени N^2 такой, что для любого y из отрезка $[x-1, x+1]$ выполняются неравенства*

$$\left|e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y} - P_2(y)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ln x}, \quad P_2(y) = e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y} - c_2(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ln x},$$

где $|c_2(y)| \leqslant 1$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим многочлен $P_2(y)$, заданный равенством

$$P_2(y) = \sum_{m=0}^{N^2}\frac{1}{m!}\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^m.$$

Ясно, что

$$e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y} - P_2(y) = \sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^m.$$

Для положительных y справедливы неравенства

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^m\right| \leqslant \frac{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^{N^2}}{(N^2)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^m}{m!} \leqslant \frac{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^{N^2}e^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y}}{(N^2)!},$$

так как $(N^2+m)! > (N^2)!m!$. Применим неравенство Стирлинга

$$(N^2)! > \sqrt{2\pi}N^{2N^2+1}e^{\frac{1}{12N^2+1}-N^2},$$

получим

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^m\right|\leqslant\frac{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)^{N^2}e^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y}e^{N^2-\frac{1}{12N^2+1}}}{\sqrt{2\pi}N^{2N^2+1}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+1-2\ln N\right)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}}$$

Отсюда следует, что для любого $y\in[x-1,x+1]$ выполняется неравенство

$$\left|e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y}-P_2(y)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+1-2\ln N\right)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x+1)\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x+1)\right)+1-2\ln N\right)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}},$$

так как при $y\in[x-1,x+1]$ функция

$$\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+1-2\ln N\right)$$

монотонно возрастает:

$$\left(\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y\right)+1-2\ln N\right)\right)'=\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\frac{N^2}{y}>0.$$

Далее имеем:

$$\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x+1)\right)+N^2\left(\ln\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x+1)\right)+1-2\ln N\right)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}<$$
$$<x+1+N^2(\ln(x+1)+1-2\ln N)-\ln N-\frac{1}{12N^2+1}<$$
$$<x+1-N^2\ln N-\ln N<-x^2\ln x,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 22. *Для положительного x и $N=[x]+2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN>1$, найдется полином $P(y)$ степени $2N^2$ такой, что для любого y из отрезка $[x-1,x+1]$ выполняется неравенство*

$$|\Delta(y)-P(y)|\leqslant\frac{2}{\pi R}e^{Rx-x^2\ln x}.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 17

$$\Delta(y)=\pi R^2e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{m!}(yR)^m,\quad b_m=\frac{(-1)^mR^m\overline{a_m}}{m+1}$$

и

$$0<\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|^2(m+1)\leqslant\frac{1}{\pi R^2},\quad |b_m|\leqslant\frac{1}{\pi R\sqrt{m+1}}.$$

Положим $P(y)=P_1(y)P_2(y)$, где многочлены $P_1(y)$ и $P_2(y)$ из лемм 19 и 21. Тогда степень многочлена $P(y)$ будет $2N^2$ и справедливы равенства

$$e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}y}=P_2(y)+c_2(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ln x},\quad\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{m!}(yR)^m=P_1(y)+c_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ln x},$$

где для любого y из отрезка $[x-1, x+1]$ выполнены неравенства

$$|c_1(y)| \leqslant 1, \quad |c_2(y)| \leqslant 1.$$

Так как справедливы неравенства

$$\max_{y\in[x-1,x+1]} |P_1(y)| \leqslant \frac{1}{\pi R} e^{R(x+1)} < \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi R} e^{Rx}, \quad \max_{y\in[x-1,x+1]} |P_2(y)| \leqslant e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x-1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\ln x},$$

то при достаточно большом x

$$|\Delta(y) - P(y)| = \left| \left(P_2(y) + c_2(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\ln x} \right) \left(P_1(y) + c_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\ln x} \right) - P_1(y)P_2(y) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\ln x} \left(\frac{\sqrt[4]{e}}{\pi R} e^{Rx} + e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x-1)} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2\ln x} \right) < \frac{2}{\pi R} e^{Rx - x^2\ln x},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Будем называть ведущей частью комплексного числа $a+bi$ его действительную часть, если $|a| \geqslant |b|$, и его мнимую часть, если $|b| > |a|$. Для комплексного числа $c+di$ соответствующей частью будем называть действительную часть, если действительная часть у $a+bi$ является ведущей, и мнимую часть, если мнимая часть у $a+bi$ является ведущей.

Лемма 23. *Существует $\delta_0 > 0$ и бесконечная последовательность положительных вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots \to +\infty$ такая, что при достаточно больших x_j для $N = [x_j]+2$, $a_j = x_j - \frac{1}{32}N^{-5}$, $b = \frac{1}{16}N^{-5}$ во всех точках y отрезка $r_j = [a_j, a_j + b_j]$ выполняется одно из неравенств*

$$\begin{aligned} |\Re\Delta(y)| &> \tfrac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j}, \\ |\mathrm{Im}\Delta(y)| &> \tfrac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j}, \end{aligned} \tag{11}$$

при этом соответствующая часть величины $\Delta(y)$ для ведущей части величины $\Delta(x_j)$ на всём отрезке знакопостоянная.

Доказательство. Действительно, согласно лемме 18 для любого $\delta > 0$ найдется последовательность положительных чисел $u_1, u_2, \ldots \to +\infty$ такая, что

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (u_j)^m \right| > e^{-(1+2\delta)u_j}.$$

Полагая $x_j = \frac{u_j}{R}$, получим:

$$|\Delta(x_j)| = \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x_j} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (x_j R)^m \right| > \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}x_j} e^{-(1+2\delta)Rx_j} =$$
$$= \pi R^2 e^{-\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} + (1+2\delta)R\right)x_j} = \pi R^2 e^{-(\sigma_M+2\delta R-\delta_1)x_j}.$$

Положим $N = [x_j]+2$, тогда $x_j + 1 < N$. Будем считать номер j достаточно большим, что бы выполнялось неравенство $\sqrt{\pi}RN > 1$ и, следовательно, $|b_m| < 1$ для любого $m > N^2$.

Рассмотрим многочлен $P(y)$ степени $2N^2$ на отрезке $[x_j - 1, x_j + 1]$ из леммы 22. Пусть

$$K = \max_{y\in\left[x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5}\right]} |P(y)|,$$

определим многочлен $Q(y)$ с помощью равенства $Q(y) = K^{-1}P\left(x_j + \frac{1}{32}N^{-5}y\right)$, тогда

$$\max_{y\in[-1,1]} |Q(y)| = 1$$

и по теореме А. А. Маркова (См. [1], стр. 323)

$$\max_{y\in[-1,1]}|Q'(y)|\leqslant 4N^4.$$

Справедливы неравенства

$$|P(y)|<\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}\left(e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\left(x_j-\frac{1}{32}N^{-5}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_j^2\ln x_j}\right),$$

следовательно $K<\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}\left(e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\left(x_j-\frac{1}{32}N^{-5}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_j^2\ln x_j}\right)<\frac{2|P_1(x_j)|}{32N-1}e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\left(x_j-\frac{1}{32}N^{-5}\right)}$ при достаточно большом x_j. Поэтому для отрезка

$$[a,a+b]=\left[x_j-\frac{1}{32}N^{-5},x_j+\frac{1}{32}N^{-5}\right]\subset[x_j-1,x_j+1]$$

с $x_j,y\in[a,a+b]$ справедливы неравенства

$$|P(y)-P(x_j)|<\frac{1}{4N}\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}e^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{128}N^{-5}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4N}\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}\left(1+(e-1)\frac{1}{32}N^{-5}\right)\leqslant\frac{17}{64N}\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}.$$

Отсюда следует, что для любого $y\in[a,a+b]$ выполняется неравенство

$$|\Delta(y)|\geqslant|\Delta(x_j)|-|\Delta(x_j)-\Delta(y)|>$$
$$>|\Delta(x_j)|-\frac{4}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x}-|P(y)-P(x_j)|>$$
$$>|\Delta(x_j)|-\frac{4}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x_j}-\frac{17}{64N}\frac{|P_1(x_j)|}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}.$$

Так как $P_1(x_j)=F(Rx_j)-c_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_j^2\ln x_j}$, где $|c_1(y)|\leqslant 1$, то

$$|P_1(x_j)|\leqslant|F(Rx_j)|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_j^2\ln x_j}.$$

Отсюда следует, что

$$|\Delta(y)|>|\Delta(x_j)|-\frac{4}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x_j}-\frac{17}{64N}\frac{1}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}\left(|F(Rx_j)|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_j^2\ln x_j}\right)=$$
$$=|\Delta(x_j)|\left(1-\frac{17}{64N}\frac{1}{32N-1}\right)-e^{-x_j^2\ln x_j}\left(\frac{4}{\pi R}e^{x_j}+\frac{17}{64N}\frac{1}{32N-1}e^{\left(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}\right)x_j}\right)>$$
$$>\frac{997}{1000}|\Delta(x_j)|-\frac{5}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x_j}>\frac{99}{100}|\Delta(x_j)|$$

при достаточно большом x_j.

Выберем величины δ_0 и δ из условий

$$\delta_0=\delta_1-2\delta R>0,$$

что эквивалентно неравенству

$$\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}-R-2\delta R>0,\quad\frac{\sigma_M-\theta_1}{8R}-\frac{1}{2}>\delta.$$

Положим $\delta = \frac{\sigma_M-\theta_1}{8R} - \frac{1}{2} - \frac{3\delta_1}{8R}$, получим

$$0<\delta_0=\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}-R-\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}+R+\frac{3\delta_1}{4}=\frac{3\delta_1}{4}<\sigma_M, \quad \delta=\frac{\sigma_M-\theta_1-4R-3\delta_1}{8R}=\frac{\delta_1}{8R}.$$

Заметим, что при $0 < R < \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 < \delta$, при $R = \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 = \delta$, а при $R > \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 > \delta$.

И так, для любого $y \in [a, a+b]$ имеем:

$$|\Delta(y)| \geqslant \frac{99}{100}|\Delta(x_j)| > \frac{99\pi R^2}{100}e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j}.$$

Так как $|\Delta(y)| \leqslant \sqrt{2}\max(|\Re\Delta(y)|, |\mathrm{Im}\Delta(y)|)$, то

$$\max(|\Re\Delta(y)|, |\mathrm{Im}\Delta(y)|) > \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200}e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j}$$

и первое утверждение леммы полностью доказано.

Пусть теперь, для определенности, $\Re\Delta(x_j)$ является ведущей частью величины $\Delta(x_j)$, тогда $|\Re\Delta(x_j)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|\Delta(x_j)| > \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2 e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j}$. Для $|\Re\Delta(y)|$ имеем неравенство

$$|\Re\Delta(y)| > |\Re\Delta(x_j)| - \frac{17}{64N}\frac{1}{32N-1}|\Delta(x_j)| - \frac{5}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x_j} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{17}{64N}\frac{1}{32N-1}\right)\pi R^2 e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j} - \frac{5}{\pi R}e^{x_j-x_j^2\ln x_j} > 0$$

для достаточно больших x_j. Но отсюда следует, что соответствующая часть величины $\Delta(y)$ для ведущей части величины $\Delta(x_j)$ на всём отрезке не меняет знак, что и завершает доказательство леммы. □

Лемма 24. *Для любой функции $\varphi(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ с $\|\varphi(\alpha)\| = 1$ существуют два подряда ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha)) \tag{12}$$

сходящиеся к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Согласно лемме 8 для любого отрезка $\left[e^{x_j-\frac{1}{32N^5}}, e^{x_j+\frac{1}{32N^5}}\right]$ имеется не менее $\frac{e^{\sigma_M\left(x_j-\frac{1}{32N^5}\right)}}{32\left(x_j-\frac{1}{32N^5}\right)^6} > 4$ простых элементов моноида M. Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть действительная часть $\Delta(x_j)$, которая больше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 0 \pmod 4$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j-\frac{1}{32N^5}}, e^{x_j+\frac{1}{32N^5}}\right]$. Ясно, что

$$S_j > \frac{1}{4}\frac{e^{\sigma_M\left(x_j-\frac{1}{32N^5}\right)}}{32\left(x_j-\frac{1}{32N^5}\right)^6}\frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200}e^{-(\sigma_M-\delta_0)x_j} = \frac{e^{-\frac{\sigma_M}{32N^5}}}{128\left(x_j-\frac{1}{32N^5}\right)^6}\frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200}e^{\delta_0 x_j}$$

и правая часть неограниченно возрастает с ростом x_j.

Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть действительная часть $\Delta(x_j)$, которая меньше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 2 \pmod 4$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j-\frac{1}{32N^5}}, e^{x_j+\frac{1}{32N^5}}\right]$. Для неё будет выполняться таже самая оценка.

Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть мнимая часть $\Delta(x_j)$, которая больше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}_0),\varphi(\alpha))$ с номерами $k\equiv 3 \pmod 4$ и простыми элементами $q_k\in\left[e^{x_j-\frac{1}{32N^5}},e^{x_j+\frac{1}{32N^5}}\right]$. Для неё будет выполняться таже самая оценка.

Наконец, если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть мнимая часть $\Delta(x_j)$, которая меньше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha,\vec{\theta}_0),\varphi(\alpha))$ с номерами $k\equiv 1 \pmod 4$ и простыми элементами $q_k\in\left[e^{x_j-\frac{1}{32N^5}},e^{x_j+\frac{1}{32N^5}}\right]$. Для неё будет выполняться таже самая оценка.

Аналогично строится подряд расходящийся к $-\infty$. Лемма полностью доказана. □

Нам потребуется теорема Д. В. Печерского (См. [22], [5], стр. 339).

Теорема 6. *(Теорема Д. В. Печерского) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ из векторов вещественного гильбертова пространства H удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|^2<\infty$ и для любого вектора $e\in H$, $\|e\|=1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n,e)$ сходится условно при некоторой перестановке членов, то для любого $s\in H$ существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда, при которой*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}=s$$

в смысле нормы H.

Будем через $T(M,y)$ обозначать конечное множество простых элементов моноида M, удовлетворяющее условию $P(M)\bigcap[1,y]\subset T(M,y)$. Ясно, что моноид $M(T(M,y))\subset M$.

Будем через $\zeta_{T(M,y)}(\alpha,\vec{\theta})$ обозначать произведение Эйлера:

$$\zeta_{T(M,y)}(\alpha,\vec{\theta})=\prod_{q_k\in T(M,y)}\left(1-\frac{e^{-2\pi i\theta_{q_k}}}{q_k^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Лемма 25. *(Основная) Пусть $0<r<\frac{\sigma_M-\theta_1}{4}$, $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha|<r$ и непрерывна при $|\alpha|\leqslant r$. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ и $y>1$ существует конечное множество $T(M,y)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|g(\alpha)-\ln\zeta_{T(M,y)}\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}+\alpha,\vec{\theta}_0\right)\right|<\varepsilon$$

и

$$\ln\zeta_{T(M,y)}(\alpha,\vec{\theta}_0)=-\sum_{q_k\in T(M,y)}\ln\left(1-\frac{e^{-2\pi i\frac{k}{4}}}{q_k^{\alpha}}\right)=\sum_{q_k\in T(M,y)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\frac{kn}{4}}}{nq_k^{n(\alpha)}}.$$

Доказательство. Из лемм 13, 14, 15, 24 следует, что выполнены условия теоремы Печерского, поэтому для любой $g(\alpha)$ аналитичной при $|\alpha|<r$ и непрерывной при $|\alpha|\leqslant r$ существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда, при которой

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}(\alpha,\vec{\theta}_0)=g(\alpha).$$

Отсюда следует, что найдётся $L=L(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{L}u_{n_k}(\alpha,\vec{\theta}_0)-g(\alpha)\right|<\varepsilon$$

и множество $P(M)\bigcap[1,y]\subset\{q_{n_k}|k\leqslant L\}$. Поэтому полагаем $T(M,y)=\{q_{n_k}|k\leqslant L\}$ и лемма полностью доказана. □

4. Доказательство теоремы универсальности

Нашей ближайшей целью является доказательство аналога теорем 1 и 2 из монографии [5] (стр. 240, 249). Мы разобьём эти доказательства на несколько лемм, которые позволяют лучше прослеживать новые моменты в доказательстве теорем универсальности. Местами нами восстановлены рассуждения, которые опущены в монографии [5] и в статье [4], и устранены отдельные опечатки из этих работ.

Далее везде рассматриваем только регулярные моноиды Сельберга–Бредихина.

На протяжении всего раздела $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leqslant r$.

Введём новые обозначения и соглашения. Пусть $\varepsilon_1 \in (0,1]$. Выберем $\gamma_1 > 1$ таким, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} \text{a)} \quad \gamma_1 r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}, \\ \text{b)} \quad \max\limits_{|\alpha| \leqslant r} \left| g(\alpha) - g\left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right) \right| < \varepsilon_1. \end{cases} \tag{13}$$

В силу леммы 12 это можно сделать.

Пусть множество E задано равенством

$$E = \{\alpha | -\gamma_1 r < \Re\,\alpha \leqslant 2, -1 \leqslant \operatorname{Im}\alpha \leqslant 1\} = \{\alpha | -\gamma_1 r < \sigma \leqslant 2, -1 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Положим для краткости $Q = T(M,z)$, где $y < z$. Определим величину

$$J = \int_T^{2T} \iint\limits_E \left| \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\sigma dt d\tau.$$

Лемма 26. *Для всякого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $z_0 = z_0(\varepsilon_2)$ такое, что при $z > z_0$ и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$ выполняется неравенство $J \ll \varepsilon_2^4 T$.*

Доказательство. Так как M — регулярный моноид Сельберга–Бредихина, то при $\alpha = \sigma + it$, $t \in [T-1, 2T+1]$ выполняется равенство

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant T} \frac{1}{n^\alpha} + C\frac{\theta}{\alpha - \theta}\frac{1}{T^{\alpha-\theta}} + O\left(\frac{1}{T^{\sigma-\theta_1}}\right) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant T} \frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{T^{\sigma-\theta_1}}\right),$$

так как $C\frac{\theta}{\alpha-\theta}\frac{1}{T^{\alpha-\theta}} = O\left(\frac{1}{T^{\sigma-\theta+1}}\right)$ и $\sigma - \theta + 1 > \sigma - \theta_1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \iint\limits_E \left(\int_T^{2T} \left| \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt = \\ &= \iint\limits_{E+\sigma_M^*} \left(\int_T^{2T} \left| \zeta(M|\alpha + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt \ll \\ &\ll \iint\limits_{E+\sigma_M^*} \left(\int_T^{2T} \left| \left(\sum_{n \in M,\, n \leqslant T} \frac{1}{n^{\alpha+i\tau}} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt + \\ &\quad + O\left(T^{-2(\sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1)} \max_{\alpha \in E + \sigma_M^*} \int_T^{2T} \left| \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\tau \right), \end{aligned} \tag{14}$$

так как при $\alpha \in E + \sigma_M^*$ имеем $\sigma - \theta_1 \geqslant \sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1 > \frac{\sigma_M - \theta_1}{2} > 0$,

$$2\sigma - \theta \geqslant \sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta > 2\left(\frac{3\theta + \theta_1}{4} - \frac{\theta - \theta_1}{4}\right) - \theta = \theta_1 \geqslant 0.$$

Имеем:

$$T^{-2(\sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1)} \max_{\alpha \in E + \sigma_M^*} \int_T^{2T} \left|\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0})\right|^2 d\tau \leqslant T^{2\gamma_1 r + 1 + 2\theta_1 - 2\sigma_M^*} \zeta_Q^2(\sigma_M^* - \gamma_1 r, \vec{0}), \tag{15}$$

так как

$$\int_T^{2T} \left|\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0})\right|^2 d\tau = \int_T^{2T} \left|\prod_{q_k \in T(M,z)} \left(1 - \frac{1}{q_k^{\alpha + i\tau}}\right)\right|^2 d\tau \leqslant \int_T^{2T} \left|\sum_{n \in M(T(M,z))} \frac{1}{n^{\sigma_M^* - \gamma_1 r}}\right|^2 d\tau =$$
$$= T \cdot \zeta_Q^2(\sigma_M^* - \gamma_1 r, \vec{0}).$$

Далее, при $T > z$ выполняется

$$\left(\sum_{n \in M,\, n \leqslant T} \frac{1}{n^\alpha}\right) \zeta_Q^{-1}(\alpha, \vec{0}) = 1 + \sum_{n \in M,\, z < n \leqslant z_1 T} \frac{b_n}{n^\alpha},$$

где $z_1 = z^z$ и $|b_n| \leqslant \tau(n)$, $\tau(n)$ — число делителей числа n.

Поэтому при $T > z$ выполняется цепочка соотношений

$$\int_T^{2T} \left|\left(\sum_{n \in M,\, n \leqslant T} \frac{1}{n^{\alpha + i\tau}}\right) \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1\right|^2 d\tau = \int_T^{2T} \left|\sum_{n \in M,\, z < n \leqslant z_1 T} \frac{b_n}{n^\alpha}\right|^2 d\tau =$$

$$= \int_T^{2T} \sum_{n,m \in M,\, z < n,m \leqslant z_1 T} \frac{b_n \overline{b_m}}{n^{\alpha + i\tau} m^{\overline{\alpha} - i\tau}} d\tau \ll$$

$$\ll T \sum_{n \in M,\, z < n \leqslant z_1 T} \frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\sum_{n,m \in M,\, z < n < m \leqslant z_1 T} \frac{|b_n||b_m|}{(nm)^\sigma} \left|\int_T^{2T} \left(\frac{m}{n}\right)^{i\tau} d\tau\right|\right) \ll$$

$$\ll T \sum_{n \in M,\, z < n \leqslant z_1 T} \frac{\tau^2(n)}{n^{2\sigma}} + \sum_{n,m \in M,\, z < n < m \leqslant z_1 T} \frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \ll$$

$$\ll T \int_z^\infty \frac{Cx^\theta}{x^{2\sigma + 1 - 2\varepsilon}} dx + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot \sum_{n,m \in M,\, z < n < m \leqslant z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \ll$$

$$\ll T z^{-2\sigma + 2\varepsilon + \theta} + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot \sum_{n,m \in M,\, z < n < m \leqslant z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} = T z^{-2\sigma + 2\varepsilon + \theta} + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot S, \tag{16}$$

так как $\tau(n) \ll n^\varepsilon$.

Далее,

$$S = \sum_{n,m \in M,\, z < n < m \leqslant z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} = \sum_{n,m \in M,\, z < n < m < 2z} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} +$$
$$+ \sum_{n,m \in M,\, z < n \leqslant \frac{m}{2} < m \leqslant z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} + \sum_{n,m \in M,\, z < \frac{m}{2} \leqslant n < m \leqslant z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Учитывая $\sigma_M^* - \gamma_1 r < \sigma < \sigma_M^* + 2$ и $2\sigma - \theta > \theta_1 \geqslant 0$, имеем:

$$S_1 = \sum_{n,m\in M,\, z<n<m<2z} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leqslant \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m\in M,\, z<m<4z^2} \sum_{z<n<m} \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m\in M,\, z<m<4z^2} \sum_{z<n<m} \frac{2n}{m-n} = \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m\in M,\, z<m<4z^2} \sum_{k=1}^{m-[z]-1} \frac{2(m-k)}{k} \ll$$

$$\ll \frac{z\ln z}{z^{2\sigma}} \sum_{m\in M,\, z<m<4z^2} 1 \ll \frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}};$$

$$S_2 = \sum_{n,m\in M,\, z<n\leqslant\frac{m}{2}<m\leqslant z_1T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leqslant \frac{1}{\ln 2} \sum_{m\in M,\, 2z^2<m\leqslant(z_1T)^2} \frac{\tau(m)}{m^\sigma} \ll z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon};$$

$$S_3 = \sum_{n,m\in M,\, z<\frac{m}{2}\leqslant n<m\leqslant z_1T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m\in M,\, 2z<m<z_1T} \frac{2^\sigma}{m^{2\sigma}} \sum_{n\in M,\, \frac{m}{2}\leqslant n<m} \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leqslant \sum_{m\in M,\, 2z<m<z_1T} \frac{2^\sigma}{m^{2\sigma}} \cdot \sum_{n\in M,\, \frac{m}{2}\leqslant n<m} \frac{2n}{m-n} \ll$$

$$\ll \sum_{m\in M,\, 2z<m<z_1T} \frac{1}{m^{2\sigma}} m\ln m \ll \ln(z_1T) \cdot \begin{cases} (z_1T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases}$$

$$S \ll \frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}} + z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon} + \ln(z_1T) \cdot \begin{cases} (z_1T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

Из оценок (16), (17) получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \iint\limits_{E+\sigma_M^*} \int_T^{2T} \left| \left(\sum_{n\in M,\, n\leqslant T} \frac{1}{n^{\alpha+i\tau}} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha+i\tau,\vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau d\sigma dt \ll z^{-2\sigma+2\varepsilon+\theta} +$$

$$+ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{(z_1T)^{2\varepsilon}}{T} \left(\frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}} + z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon} + \ln(z_1T) \cdot \begin{cases} (z_1T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases} \right) \ll$$

$$\ll z^{-2\sigma+2\varepsilon+\theta}. \tag{18}$$

Теперь из оценок (14), (15) и (18) заключаем, что для всякого $\varepsilon_2 > 0$ найдётся $z_0 = z_0(\varepsilon_2)$ такое, что

$$J \ll \varepsilon_2^4 T, \tag{19}$$

если только $z > z_0$ и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$. □

Положим

$$A_T = \left\{ \tau \,\middle|\, \tau \in [T,2T],\ \iint\limits_{E+\sigma_M^*} \left| \zeta(M|\alpha+i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha+i\tau,\vec{0}) - 1 \right|^2 d\sigma dt < \varepsilon_2^2 \right\}.$$

Лемма 27. *Для достаточно малого $\varepsilon_2 > 0$ для $\tau \in A_T$ выполняется неравенство*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r} \left| \ln\zeta(\alpha+\sigma_M^*+i\tau) - \ln\zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0}) \right| < 2c(\gamma_1)\varepsilon_2 \tag{20}$$

с некоторой константой $c(\gamma_1) > 0$.

Доказательство. Действительно, из определения множества A_T и величины J следует, что $J > (T - \operatorname{mes} A_T)\varepsilon_2^2$. Поэтому из соотношения (19) следует, что при достаточно больших z и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$ выполняется

$$\operatorname{mes} A_T > (1 - \varepsilon_2^2)T. \tag{21}$$

Как известно (см. теорема 7 [5], стр. 323), если $f(z)$ регулярна при $|z - z_0| \leqslant R$ и

$$\iint\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|^2 dxdy = H,$$

то

$$|f(z)| \leqslant \frac{\sqrt{H\pi^{-1}}}{R - R'}$$

при $|z - z_0| \leqslant R' < R$.

Положим $R = \gamma_1 r$, $R' = r$, $z_0 = \sigma_M^*$, $f(z) = \zeta(M|z + i\tau)\zeta_Q^{-1}(z + i\tau, \vec{0}) - 1$, $H = \varepsilon_2^2$, тогда из определения множества A_T и приведённой теоремы следует, что для $\tau \in A_T$ выполняется

$$\max_{|\alpha-\sigma_M^*|\leqslant r} \left|\zeta(M|\alpha + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1\right| < c(\gamma_1)\varepsilon_2, \tag{22}$$

где $c(\gamma_1) = \frac{\sqrt{\pi^{-1}}}{\gamma_1 r - r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\gamma_1 - 1)r}$. Отсюда следует, что

$$\zeta(M|\alpha + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) = 1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2,$$

где $|\delta(\alpha)| < 1$. Поэтому, прологарифмировав последнее равенство и беря главную ветвь логарифма, получим

$$\ln\zeta(\alpha + \sigma_M^* + i\tau) - \ln\zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) = \ln(1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2), \quad |\ln(1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2)| \leqslant 2c(\gamma_1)\varepsilon_2,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

В силу леммы 25 (Основной) найдется последовательность конечных множеств простых элементов моноида M: $T_1(M, y_1) \subset T_2(M, y_2) \subset \ldots$ такая, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k(M, y_k) = P(M)$$

содержит все простые элементы моноида M и

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \left|g(\alpha) - \ln\zeta_{T_k(M,y_k)}\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0\right)\right| = 0. \tag{23}$$

В силу непрерывности $\zeta_{T_k(M,y_k)}\left(\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0\right)$ для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из выполнения для всех $q \in T_k(M, y_k)$ неравенств

$$|\theta_q - \theta_q^{(0)}| < \delta \tag{24}$$

следует выполнение неравенства

$$\max_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \left|\ln\zeta_{T_k(M,y_k)}\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0\right) - \ln\zeta_{T_k(M,y_k)}\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}\right)\right| < \varepsilon_1. \tag{25}$$

Положим

$$V_T = \left\{\tau \,\middle|\, \tau \in [T, 2T],\ \left|\tau\frac{\ln q}{2\pi} - \theta_q^{(0)}\right| < \delta\ (q \in T_k(M, y_k))\right\}, \quad \vec{\theta}(\tau) = \left(\tau\frac{\ln q_1}{2\pi}, \tau\frac{\ln q_2}{2\pi}, \ldots\right).$$

Пусть $\mathcal{D}$ — подобласть единичного куба $[0, 1]^N$ и N — количество q_ν в $T_k(M, y_k)$, задаваемая неравенствами (24) для $q \in T_k(M, y_k)$.

Лемма 28. *Равномерно по α при $|\alpha| \leqslant \gamma_1 r$ выполняется неравенство*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{V_T} \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)\right|^2 d\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{D}} \dots \int \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta})\right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N}. \tag{26}$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{T}\int_{V_T} \iint\limits_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau, \vec{0}) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*+i\tau, \vec{0})\right|^2 d\sigma dt d\tau =$$
$$= \iint\limits_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \frac{1}{T}\int_{V_T} \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau, \vec{0}) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*+i\tau, \vec{0})\right|^2 d\tau d\sigma dt =$$
$$= \iint\limits_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \frac{1}{T}\int_{V_T} \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau))\right|^2 d\tau d\sigma dt. \tag{27}$$

В силу теоремы Кронекера об аппроксимациях (см. теорему П.8.1, стр. 345 [5]) кривая $\gamma(\tau) = \left(\tau\frac{\ln q_1}{2\pi}, \tau\frac{\ln q_2}{2\pi}, \dots, \tau\frac{\ln q_N}{2\pi}\right)$ равномерно распределена по mod1 в пространстве $\mathbb{R}^N$, так как в силу леммы 3 логарифмы простых элементов моноида M линейно независимы над полем рациональных чисел.

Применяя теорему П.8.3 (см. стр. 348 [5]), получим, что соотношение (26) выполняется равномерно по α, если $|\alpha| \leqslant \gamma_1 r$. □

Теорема 7. *Пусть $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$, $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leqslant r$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r} |g(\alpha) - \ln \zeta(M|\alpha+\sigma_M^*+iT)| < \varepsilon,$$

где под $\ln \zeta(M|\alpha+\sigma_M^*+iT)$ понимается ветвь $\ln \zeta(M|\alpha)$, вещественная при $\alpha \in \mathbb{R}$ и аналитически продолженная вдоль отрезков $[2, 2+it]$, $[2+it, \sigma+it]$.

Доказательство. Из определения $\zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha, \vec{\theta})$ следует, что при $T_k(M, y_k) \subset Q$

$$\zeta_Q(\alpha, \vec{\theta}) = \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha, \vec{\theta})\zeta_{Q\setminus T_k(M,y_k)}(\alpha, \vec{\theta}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \dots \int \left|\ln \zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta})\right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{D}} \dots \int \left|\ln \zeta_{Q\setminus T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta})\right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{mes}\mathcal{D} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left|\ln \zeta_{Q\setminus T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta})\right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N}.$$

Поскольку

$$\ln \zeta_{Q\setminus T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*, \vec{\theta}) = \sum_{q\in Q\setminus T_k(M,y_k)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{-2\pi i n\theta_q}}{q^{n(\alpha+\sigma_M^*)}}\right),$$

то

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left|\ln \zeta_{Q\setminus T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*,\vec{\theta})\right|^2 d\theta_{q_1}\dots d\theta_{q_N} =$$

$$= \sum_{q,u\in Q\setminus T_k(M,y_k)} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{nm}\cdot\frac{1}{q^{n(\alpha+\sigma_M^*)}u^{n(\overline{\alpha}+\sigma_M^*)}} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{-2\pi i n\theta_q} e^{2\pi i m\theta_u} d\theta_{q_1}\dots d\theta_{q_N} =$$

$$= \sum_{q\in Q\setminus T_k(M,y_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{q^{2n(\sigma+\sigma_M^*)}}.$$

Если $T_k(M,y_k)$ содержит все простые элементы моноида M, меньшие, чем y_k, то

$$\sum_{q\in Q\setminus T_k(M,y_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{q^{2n(\sigma+\sigma_M^*)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \sum_{q\in M,\, q>y_k} \frac{1}{q^{2(\sigma+\sigma_M^*)}} = \frac{\pi^2}{6} 2(\sigma+\sigma_M^*) \int_{y_k}^{\infty} \frac{\nu_M(x)}{x^{2(\sigma+\sigma_M^*)+1}} dx \ll$$

$$\ll \int_{y_k}^{\infty} \frac{x^{\theta}}{x^{2(\sigma+\sigma_M^*)+1}} dx \ll \frac{1}{y_k^{2(\sigma+\sigma_M^*)-\theta}} \leqslant \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^*+\theta_1}}.$$

Из соотношений (27) и (26) теперь следует, что при $T > T_1(T_k(M,y_k),Q)$

$$\frac{1}{T}\int_{V_T} \iint\limits_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r} \left|\ln\zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0}) - \ln\zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0})\right|^2 d\sigma dt d\tau \ll \operatorname{mes}\mathcal{D}\frac{1}{y_k^{2\sigma_M^*+\theta_1}}. \tag{28}$$

Применяя опять теорему Кронекера(см. теорему П.8.1, стр. 345 [5]), получим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{mes} V_T = \operatorname{mes}\mathcal{D}. \tag{29}$$

Из оценок (28) и (29) получаем, что при y_k, достаточно большом, и $T\to\infty$

$$\operatorname{mes}\left\{\tau\,\middle|\,\tau\in V_T,\ \iint\limits_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r}\left|\ln\zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0}) - \ln\zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0})\right|^2 d\sigma dt < \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^*+\theta_1}}\right\} >$$

$$> \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot T.$$

Применяя теорему П.8.3 (см. стр. 348 [5]), отсюда получим, что

$$\operatorname{mes}\left\{\tau\,\middle|\,\tau\in V_T,\ \max_{|\alpha|\leqslant\gamma_1 r}\left|\ln\zeta_Q(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0}) - \ln\zeta_{T_k(M,y_k)}(\alpha+\sigma_M^*+i\tau,\vec{0})\right|^2 < \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^*+\theta_1}}\right\} >$$

$$> \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot T. \tag{30}$$

Если теперь взять $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}$, то в силу неравенств (21) $\operatorname{mes}(A_T\bigcap V_T) > 0$ и для $\tau\in A_T\bigcap V_T$ из соотношений (23), (25), (30) и (20) следует утверждение теоремы. □

Доказательство следующей теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 2 из монографии [5] (см. стр. 249–250). Приведём его для полноты изложения.

Теорема 8. *(об универсальности дзета-функции моноида натуральных чисел). Пусть* $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$, $f(\alpha)$ *аналитична при* $|\alpha| < r$ *и непрерывна при* $|\alpha| \leqslant r$. *Если* $f(\alpha) \neq 0$ *при* $|\alpha| < r$, *то для произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдется* $T = T(\varepsilon)$ *такое, что*

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} |f(\alpha) - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Пусть $\gamma > 1$ таково, что $\gamma r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$ и

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \right| < \varepsilon_1.$$

В силу теоремы 7 для заданного $\varepsilon \in (0,1)$ найдётся $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| < \varepsilon,$$

где $f(\alpha) = e^{g(\alpha)}$. Тогда

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| = \max_{|\alpha| \leqslant r} \left| e^{g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| =$$
$$= \max_{|\alpha| \leqslant r} \left| e^{g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \right| \cdot \left| e^{\ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) - g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} - 1 \right| \ll \max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \right| \cdot \varepsilon.$$

В силу произвольности ε_1 и ε получаем утверждение теоремы. □

5. Заключение

Из сравнения доказательства теоремы универсальности С. М. Воронина и теоремы универсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел, представленной в данной работе, мы видим, что все основные элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на класс дзета-функций регулярных моноидов Сельберга — Бредихина натуральных чисел.

Можно высказать предположение, что указанная теорема будет справедлива для широкого класса рядов Дирихле с эйлеровым произведением, соответствующих регулярным моноидам Сельберга — Бредихина натуральных чисел.

Авторы выражают свою благодарность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.

2. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

3. Б. М. Бредихин, Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп, Матем. сб., 1960, том 50(92), номер 2, 221–232.

4. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.

5. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

6. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

7. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

9. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

10. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

11. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

12. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).

13. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

14. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

15. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

16. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

17. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

18. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 57–71.

19. Зигмунд А., Тригонометрические ряды. Том. II, М., «Мир», 1965.

20. А. В. Кирилина. О слабой теореме универсальности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 308–313.

21. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. "Универсальность L-функций, связанных с новыми формами". Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; Izv. Math., 67:1 (2003). — P. 77–90.

22. Печерский Д. В. О перестановках членов в функциональных рядах // Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 6, с. 1285—1287.

23. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

24. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, 118:5, pp. 855–857.

2. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function”, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, “Dzeta-funkcija Rimana”, *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 376 p.

4. Gurvic A., Kurant R., 1968, “Teorija funkcij”, *Izd-vo Nauka, Moskva*, 618 p.

5. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, “Number-theoretic method in approximate analysis” *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

6. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

7. N. N. Dobrovol’skii, 2018, “On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

8. N. N. Dobrovol’skii, 2018, “The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 142–150.

9. N. N. Dobrovolsky. Distribution of simple elements in some monoids of natural numbers // Math. notes (in print).

10. N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, “About “zagrobelna the series” for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

11. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, “On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

12. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, “On the monoid of quadratic residues” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

13. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices” , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

14. N. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.

15. N. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii, 2022, “Entropy for some monoids of natural numbers” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 57–71.

16. A. V. Kirilina, 2020, “On the weak universality theorem” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 308–313.

17. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, “The universality of L-functions associated with newforms”, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.

18. Chandrasekharan K., 1974, “Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel”, *Izd-vo Mir, Moskva*, 188 p.

19. Chudakov N. G., 1947, “Introduction to the theory of L-Dirichlet functions”, *M.-L.: OGIZ*, — 204 p.

Получено: 13.08.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-137-190

Об одном распределении, связанном с рядами Фарея[1]

М. А. Королёв

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, профессор РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: hardy_ ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

В настоящей работе методом, принадлежащим Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску (2001) исследуются некоторые арифметические свойства дробей Фарея. Пусть $D \geqslant 2$ - фиксированное целое число, Φ_Q - классический ряд Фарея порядка Q. Раскрасим в красный цвет те дроби ряда Φ_Q, знаменатели которых кратны D. Далее, выберем из промежутков с раскрашенными концами те, что содержат внутри себя лишь дроби, знаменатели которых не делятся на D. Каковы предельные (при $Q \to +\infty$) доли $\nu(r; D)$ таких промежутков, заключающих внутри ровно r дробей ряда Φ_Q, в общем числе рассматриваемых промежутков ($r = 1, 2, 3, \ldots$)?

Формула для этой доли была найдена, по сути, К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску (2014), поскольку могла быть выведена как следствие полученного ими общего результата. Однако формула трёх авторов выражает искомую долю через сумму площадей фигур, связанных с некоторым геометрическим преобразованием треугольника Фарея - подобласти единичного квадрата вида $x + y > 1$, $0 < x, y \leqslant 1$. В настоящей работе даётся вывод явной формулы, выражающей доли $\nu(r; D)$ в случаях $D = 2, 3$ через величину r, $r = 1, 2, 3, \ldots$.

Ключевые слова: ряд Фарея, дроби Фарея, треугольник Фарея, арифметические свойства, распределение, BCZ-преобразование

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
М. А. Королёв. Об одном распределении, связанном с рядами Фарея // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 137–190.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-137-190

A distribution related to Farey series

M. A. Korolev

Korolev Maxim Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: hardy_ ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

[1]Исследование выполнено в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00001, https://rscf.ru/project/19-11-00001/.

Abstract

We study some arithmetical properties of Farey fractions by the method introduced by F. Boca, C. Cobeli and A. Zaharescu (2001). Suppose that $D \geqslant 2$ is a fixed integer and denote by Φ_Q the classical Farey series of order Q. Now let us colour to the red the fractions in Φ_Q with denominators divisible by D. Consider the gaps in Φ_Q with coloured endpoints, that do not contain the fractions a/q with $D|q$ inside. The question is to find the limit proportions $\nu(r; D)$ (as $Q \to +\infty$) of such gaps with precisely r fractions inside in the whole set of the gaps under considering ($r = 1, 2, 3, \ldots$).

In fact, the expression for this proportion can be derived from the general result obtained by C. Cobeli, M. Vâjâitu and A. Zaharescu (2014). However, such formula expresses $\nu(r; D)$ in the terms of areas of some polygons related to some geometrical transform of «Farey triangle», that is, the subdomain of unit square defined by $x + y > 1$, $0 < x, y \leqslant 1$. In the present paper, we obtain the precise formulas for $\nu(r; D)$ (in terms of the parameter r, $r = 1, 2, 3, \ldots$) for the cases $D = 2, 3$.

Keywords: Farey series, Farey fractions, Farey triangle, arithmetical properties, distribution, BCZ-transform

Bibliography: 21 titles.

For citation:
M. A. Korolev, 2023, "A distribution related to Farey series" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 137–190.

Моим незабвенным учителям по СУНЦ МГУ (1993-1995)

1. Введение

Пусть $Q \geqslant 1$. Рядом Фарея Φ_Q порядка Q называется множество упорядоченных по возрастанию дробей вида a/q, где $0 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$, Н.О.Д.$(a, q) = 1$. Ряды Фарея возникают в самых разных задачах теории чисел и давно стали объектом всестороннего исследования. Литература, посвящённая рядам Фарея, весьма обширна. По этой причине мы ограничимся лишь указанием на обзор [1] (2003 г.). Работы, вышедшие после его публикации, частично отражены в библиографиях цитируемых ниже статей [2]-[12].

Большой интерес представляют статистические закономерности, связанные с этим рядом. Примером служат различные задачи о распределении в Φ_Q дробей, знаменатели которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям с разностью $D \geqslant 2$ (см. [2]-[13]). Одна из них состоит в следующем. Пусть $r \geqslant 1$ - фиксированное целое число, $\overline{\mathbf{c}} = (c_1, \ldots, c_r)$ - целочисленный набор с условиями $0 \leqslant c_1, \ldots, c_r \leqslant D - 1$. Обозначим через $N(Q; r, D, \overline{\mathbf{c}})$ количество кортежей из r последовательных дробей ряда Φ_Q вида

$$\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \ldots < \frac{a_r}{q_r}$$

с условиями $q_s \equiv c_s \pmod D$, $s = 1, 2, \ldots, r$, а через $N(Q)$ - число дробей в Φ_Q. В 2012 г. К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску [8] доказали, что при любых фиксированных r, D и $\overline{\mathbf{c}}$ существует предел

$$\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}}) = \lim_{Q \to +\infty} \frac{N(Q; r, D, \overline{\mathbf{c}})}{N(Q)}$$

и указали общую формулу для него[2].

[2]Фактически этот результат был опубликован ещё в 2005 г.; см. [4]. Обозначения авторов отличаются от используемых здесь: $\#\mathfrak{F}_Q$ вместо $N(Q)$, $\mathbf{N}_Q^r(\mathbf{c}, \mathfrak{d})$ вместо $N(Q; r, D, \overline{\mathbf{c}})$, $\rho^r(\mathbf{c}, \mathfrak{d})$ - вместо $\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}})$.

Основным инструментом при выводе такой формулы стало преобразование T треугольника

$$\mathcal{T} = \{(x, y) : 0 < x, y \leqslant 1,\ x + y > 1\}$$

в себя, заданное формулой

$$T(x, y) = \left(y, \left[\frac{1+x}{y}\right] y - x\right).$$

Треугольник $\mathcal{T}$ иногда называют *треугольником Фарея*, а преобразование T - *BCZ-преобразованием* (по начальным буквам фамилий авторов, впервые его рассмотревших, см. [13]).

Задавшись целым $k \geqslant 1$, определим (следуя [13]) $\mathcal{T}(k)$ как множество точек (x, y) треугольника Фарея с условием $[(1 + x)/y] = k$. Далее, имея целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_r \geqslant 1$, определим область

$$\mathcal{T}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \ldots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r),$$

которая либо пуста, либо является выпуклым многоугольником. Упомянутая выше формула для величины $\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}})$ содержит сумму (вообще говоря, бесконечную) площадей фигур $\mathcal{T}(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ по всем целочисленным наборам $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$, принадлежащим некоторому множеству. Использование такой формулы для вычисления доли $\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}})$ при конкретных значениях r, D $\mathbf{c}$, как правило, весьма затруднительно. Примеры таких вычислений для ряда частных случаев общей задачи содержатся в [8] (см. §8 настоящей работы).

Обозначим через $N(Q; r, D)$ число кортежей из $(r + 2)$ последовательных дробей ряда Φ_Q вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \ldots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}}, \tag{1}$$

таких, что $q_0, q_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$ и $q_i \not\equiv 0 \pmod{D}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Условимся всюду далее рассматривать ряд Φ_Q «по модулю 1», т.е. станем отождествлять дроби a/q и $n + a/q$, где n - произвольное целое число. Соответственно, в $N(Q; r, D)$ будем учитывать лишь те кортежи (1), для которых $a_0/q_0 > 0$, включая, однако, в их число и те, в которых одна из дробей a_i/q_i совпадает с единицей.

Положим, далее, $N(Q; D)$ равным числу всех дробей в Φ_Q, знаменатели которых кратны D, и рассмотрим отношение $\nu(Q; r, D) = N(Q; r, D)/N(Q; D)$. В силу результата Кобели, Выжийту и Захареску [8], величины $\nu(Q; r, D)$ стремятся с ростом Q к предельному значению $\nu(r, D)$, которое с точностью до зависящего от D множителя совпадает с суммой величин $\varrho(r + 2, D, \overline{\mathbf{c}})$ по всем наборам $\overline{\mathbf{c}} = (c_0, \ldots, c_{r+1})$ с условиями $c_0, c_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$, $c_s \not\equiv 0 \pmod{D}$, $s = 1, 2, \ldots, r$ (см. §6).

Подсчёты, проведённые для $Q = 3 \cdot 10^5$ (что отвечает значению $N(Q; 3) = 68\,395\,970$), дают следующие приближённые значения долей $\nu(Q; r, 3)$ при небольших r:

r	$N(Q; r, 3)$	$\nu(Q; r, 3)$	r	$N(Q; r, 3)$	$\nu(Q; r, 3)$
1	11 982 989	0.17520 02201	8	390 976	0.00571 63602
2	25 653 970	0.37506 84726	9	347 028	0.00507 38077
3	14 259 027	0.20847 75901	10	236 232	0.00345 38877
4	6 293 540	0.09201 62401	11	171 556	0.00250 82764
5	4 843 722	0.07081 88216	12	127 068	0.00185 78288
6	2 482 708	0.03629 90393	13	82 264	0.00120 27609
7	953 418	0.01393 96810	14	83 750	0.00122 44874

Цель настоящей статьи - дать вывод явных формул для величин $\nu(r) = \nu(r; 3)$, $r = 1, 2, 3, \ldots$. Именно, справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\nu(1;3) = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.17517\,66941\ldots,$$

$$\nu(2;3) = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35} = 0.37503\,40165\ldots,$$

$$\nu(3;3) = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4095} = 0.20850\,00891\ldots,$$

$$\nu(4;3) = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.09203\,39300\ldots,$$

$$\nu(5;3) = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060} = 0.07082\,42239\ldots,$$

$$\nu(6;3) = \frac{3\,089}{85\,085} = 0.0363048715989892\ldots, \quad \nu(7;3) = \frac{54\,097}{3\,879\,876} = 0.01394\,29713\ldots\ .$$

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 1$, $0 \leqslant i \leqslant 4$ - целые числа, $r = 5m + i \geqslant 8$. Тогда справедливы равенства*

$$\nu(r;3) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(m), \quad \textit{в которых} \quad n = n(i) = \begin{cases} 3, & \textit{если } i = 3, \\ 2, & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

а $P_{ij}(m)$ - рациональные функции из следующего списка:

$$P_{01}(m) = \frac{6(8m-1)}{(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)}, \quad P_{02}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)},$$

$$P_{11}(m) = \frac{6(8m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)}, \quad P_{12}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)},$$

$$P_{21}(m) = \frac{6(4m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)},$$

$$P_{22}(m) = \frac{2(9m+4)}{3(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)},$$

$$P_{31}(m) = \frac{6(2m+1)}{(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)}, \quad P_{32}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$

$$P_{33}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+5)(12m+7)},$$

$$P_{41}(m) = \frac{6(4m+3)}{(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)},$$

$$P_{42}(m) = \frac{2(9m+5)}{3(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}.$$

В частности, имеют место равенства:

$$\nu(8;3) = \frac{12\,797}{2\,238\,390} = 0.00571\,70555\ldots \qquad \nu(12;3) = \frac{11\,402}{6\,135\,675} = 0.00185\,83122\ldots$$

$$\nu(9;3) = \frac{18\,662}{3\,677\,355} = 0.00507\,48431\ldots \qquad \nu(13;3) = \frac{100\,349}{83\,445\,180} = 0.00120\,25739\ldots$$

$$\nu(10;3)=\frac{284}{82\,225}=0.00345\,39373\ldots \qquad \nu(14;3)=\frac{3\,931}{3\,209\,430}=0.00122\,48280\ldots$$
$$\nu(11;3)=\frac{1\,444}{575\,575}=0.00250\,87955\ldots \qquad \nu(15;3)=\frac{1\,607}{1\,673\,140}=0.00096\,04695\ldots$$

Следствиями этих теорем оказываются два неожиданных факта. Во-первых, все числа $\nu(r)$ при $r\geqslant 6$ оказываются рациональными, в то время как числа $\nu(r)$, $1\leqslant r\leqslant 5$ - трансцендентны. Именно, при $r=1,2,4,5$ они являются линейными комбинациями с алгебраическими коэффициентами чисел 1 и πi и $\ln 3$, и их трансцендентность следует из результатов А. Бейкера (см. [14, теоремы 2.1, 2.2]). Трансцендентность $\nu(3)$ является следствием теоремы Ф. Линдемана (см. [15]).

Во-вторых, величина $\nu(r)$ как функция r не является монотонно убывающей. Например, оказывается, что

$$\nu(2)>\nu(3)>\nu(1),\quad \nu(14)>\nu(13),\quad \nu(19)>\nu(18),\quad \nu(29)>\nu(30)>\nu(28)$$

и т.д. Вместе с тем, монотонность $\nu(r)$ сохраняется внутри каждой из прогрессий $r \pmod 5$.

2. Дроби Фарея и точки в многоугольных областях

Для удобства читателя приведём краткое изложение вывода формул для величин $\nu(r;D)$, следующее методу работы [8]. Необходимость такого изложения вызвана ещё и тем, что оно позволит сформулировать нужные нам результаты [8] и их следствия в виде, наиболее удобном для явного вычисления долей $\nu(r;D)$.

Пусть $Q\geqslant 2$ и $q/a<a'/q'<a''/q''$ - соседние дроби ряда Φ_Q. Вычитая равенство $a''q'-a'q''=1$ из равенства $a'q-aq'=1$, получим: $(a+a'')q'=a'(q+q'')$, откуда, ввиду взаимной простоты a' и q' заключаем: $q+q''=kq'$, где k - целое число. Поскольку $kq'-q=q''\leqslant Q$, то $k\leqslant (q+Q)/q'$. Вместе с тем, для знаменателей соседних дробей Фарея имеем: $q+q''>Q$ или, что то же, $(k+1)q'-q>Q$, откуда $k+1>(q+Q)/q'$. Следовательно,

$$k=\left[\frac{q+Q}{q'}\right]=\left[\frac{1+q/Q}{q'/Q}\right]. \tag{2}$$

Применяя к точке $(x,y)=(q/Q,q'/Q)$ треугольника Фарея BCZ-преобразование, получим:

$$T\left(\frac{q}{Q},\frac{q'}{Q}\right)=\left(\frac{q'}{Q},\left[\frac{1+q/Q}{q'/Q}\right]\frac{q'}{Q}-\frac{q}{Q}\right)=\left(\frac{q'}{Q},\frac{kq'-q}{Q}\right)=\left(\frac{q'}{Q},\frac{q''}{Q}\right).$$

Следовательно, если

$$\frac{a_0}{q_0}<\frac{a_1}{q_1}<\ldots<\frac{a_r}{q_r}<\frac{a_{r+1}}{q_{r+1}} \tag{3}$$

- произвольный набор соседних дробей ряда Фарея Φ_Q, то

$$T^2\left(\frac{q_0}{Q},\frac{q_1}{Q}\right)=\left(\frac{q_2}{Q},\frac{q_3}{Q}\right),\quad T^3\left(\frac{q_0}{Q},\frac{q_1}{Q}\right)=\left(\frac{q_3}{Q},\frac{q_4}{Q}\right),\ldots,T^r\left(\frac{q_0}{Q},\frac{q_1}{Q}\right)=\left(\frac{q_r}{Q},\frac{q_{r+1}}{Q}\right). \tag{4}$$

Полагая $k_i=[(q_{i-1}+Q)/q_i]$, получим цепочку равенств

$$\begin{cases} q_0+q_2=k_1q_1,\\ q_1+q_3=k_2q_2,\\ \ldots\\ q_{r-1}+q_{r+1}=k_rq_r \end{cases} \quad\text{или, что то же,}\quad \begin{cases} k_1q_1-q_2=q_0,\\ -q_1+k_2q_2-q_3=0,\\ \ldots\\ -q_{r-1}+k_rq_r=q_{r+1}, \end{cases} \tag{5}$$

которую можно рассматривать как систему уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} k_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & k_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & k_r \end{pmatrix}$$

и неизвестными $q_1, \ldots, q_r$. Определитель такой матрицы станем обозначать через $\mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r)$ или, короче, через $\mathbb{K}(k_1, \ldots, k_r)$. Несложно проверить следующие свойства этих определителей:

$$\mathbb{K}_1(k_1) = k_1, \quad \mathbb{K}_2(k_1, k_2) = k_1 k_2 - 1; \tag{6}$$

$$\mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r) = k_r \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \ldots, k_{r-1}) - \mathbb{K}_{r-2}(k_1, \ldots, k_{r-2}), \quad r \geqslant 3; \tag{7}$$

$$\mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r + 1) = \mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r) + \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \ldots, k_{r-1}), \quad r \geqslant 1. \tag{8}$$

Величины $\mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r)$ являются т.н. *модифицированными континуантами* (см. [16, с. 133]). Для них, в частности, справедливы тождества

$$\mathbb{K}_r(k_r, \ldots, k_1) = \mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r); \tag{9}$$

$$\mathbb{K}_{r+s}(k_1, \ldots, k_{r+s}) =$$

$$= \mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r)\mathbb{K}_s(k_{r+1}, \ldots, k_{r+s}) - \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \ldots, k_{r-1})\mathbb{K}_{s-1}(k_{r+2}, \ldots, k_{r+s}), \tag{10}$$

аналогичные тождествам (6.131), (6.133) из [17, Раздел 6.7], а также равенство

$$\mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r)\mathbb{K}_r(k_2, \ldots, k_{r+1}) - \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \ldots, k_r)\mathbb{K}_{r+1}(k_1, \ldots, k_{r+1}) = 1, \tag{11}$$

которое доказывается индукцией по r с использованием (6) и (7) (также см., напр., [18, §§2.2, 2.3]).

Пользуясь формулами (6), (7), из системы (5) последовательно находим:

$$q_{i+1} = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \ldots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \ldots, k_i). \tag{12}$$

Определим теперь $\mathcal{A}_r(D)$ как множество наборов $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\mathbb{K}_i(k_1, \ldots, k_i) \not\equiv 0 \pmod{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1, \quad \mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r) \equiv 0 \pmod{D}. \tag{13}$$

Если зафиксировать набор $\mathbf{k}$ из $\mathcal{A}_r(D)$ и числа q_0, q_1 с условиями

$$q_0 \equiv 0 \pmod{D}, \quad \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1,$$

то для чисел q_i, удовлетворяющих системе (5), в силу (12) будем иметь:

$$q_i \not\equiv 0 \pmod{D}, \quad i = 2, 3, \ldots, r, \quad q_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}. \tag{14}$$

Верно и обратное: если дроби (3) отвечают набору $\mathbf{k}$ и при этом выполняются условия (14), то справедливы соотношения (13) или, что то же, $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)$.

Равенства (4) фактически означают, что параметр Q и пара знаменателей соседних дробей порождают цепочки знаменателей $q_2, q_3, \ldots$ и целых чисел $k_1, k_2, \ldots$. Приведём теперь условие, которому должны удовлетворять величины q_0 и q_1, чтобы порождённый ими ряд знаменателей $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{r+1}$ отвечал условию (14).

Лемма 1. *Пусть $Q > r \geqslant 1$ и пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$. Для существования в ряде Фарея Φ_Q кортежа (3) из $(r+2)$ последовательных дробей, отвечающих набору $\mathbf{k}$, необходимо и достаточно существования пары натуральных чисел q_0 и q_1 с условиями*

$$1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant Q, \quad q_0 + q_1 > Q, \quad (q_0, q_1) = 1, \quad q_0 \equiv 0 \pmod{D}$$

таких, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, выполняются неравенства

$$\frac{Q + q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)} < q_1 \leqslant \frac{Q + q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_{i-1}, k_i)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i)}. \tag{15}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть дроби (3) отвечают набору $\mathbf{k}$. Тогда числа $q_0, q_1, \dots, q_r, q_{r+1}$ удовлетворяют системе (5) и для них справедливы равенства (12). Условие $q_{i+1} \leqslant Q$ приводит к искомой верхней оценке q_1. Аналогично, соотношение (8) наряду с (12) влечёт тождество

$$q_{i+1} + q_i = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i + 1) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i + 1),$$

из которого с помощью неравенства $q_{i+1} + q_i > Q$, получается нижняя оценка q_1.

Достаточность. Пусть q_0, q_1 - числа с требуемыми свойствами. Определим величины $q_2, \dots, q_{r+1}$ из системы (5) (или, что то же, по формулам (12)). Тогда из условия леммы и тождества (8) для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, получим:

$$q_i \leqslant Q, \quad q_i + q_{i+1} > Q.$$

Далее, подберём числа a_0 и a_1 так, чтобы дроби a_0/q_0 и a_1/q_1 были соседними в Φ_Q и при этом выполнялись неравенства $0 < a_0/q_0 < 1$. Ввиду условия $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$ имеем $q_0 \geqslant D > 1$. Тогда из равенства $a_1 q_0 - a_0 q_1 = 1$ заключаем: $a_0 \equiv -q_1^* \pmod{q_0}$. Последнее сравнение наряду с неравенствами $1 \leqslant a_0 \leqslant q_0 - 1$ определяет a_0 однозначно, так что остаётся лишь положить $a_1 = (a_0 q_1 + 1)/q_0$. Имея пару a_0, a_1 и набор $\mathbf{k}$, составим систему

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = k_1 a_1, \\ a_1 + a_3 = k_2 a_2, \\ \dots \\ a_{r-1} + a_{r+1} = k_r a_r \end{cases}$$

с неизвестными $a_2, a_3, \dots, a_{r+1}$. Подобно (12), находим:

$$a_{i+1} = a_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - a_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i). \tag{16}$$

Пользуясь (11), (12) и (16), убеждаемся, что

$$a_{i+1} q_i - a_i q_{i+1} = 1. \tag{17}$$

Составим теперь дроби a_i/q_i. В силу (17), они несократимы и $a_i/q_i < a_{i+1}/q_{i+1}$ для всех i. Ввиду неравенств $q_i \leqslant Q$ все эти дроби принадлежат ряду Φ_Q (по модулю 1). Наконец, ввиду неравенств $q_i + q_{i+1} > Q$ между a_i/q_i и a_{i+1}/q_{i+1} нет других дробей из Φ_Q. Поэтому построенные дроби действительно образуют кортеж из $(r+2)$ последовательных дробей ряда Φ_Q с требуемыми свойствами. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $r \geqslant 1$, $k_1, \dots, k_r \geqslant 1$ - произвольные целые числа. Тогда область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ задаётся системой неравенств*

$$0 < x, y \leqslant 1, \quad x + y > 1, \quad f_i(x; k_1, \dots, k_i) < y \leqslant g_i(x; k_1, \dots, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где

$$f_i(x;k_1,\dots,k_r)=\frac{1+\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_i+1)x}{\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i+1)},\quad g_i(x;k_1,\dots,k_r)=\frac{1+\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_i)x}{\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)}.$$

Доказательство. В случае $r=1$ область $\mathcal{T}(k_1)$ определяется условием

$$\left[\frac{1+x}{y}\right]=k_1,\quad \text{т.е. неравенствами}\quad k_1\leqslant\frac{1+x}{y}<k_1+1.$$

Последние же приводятся к виду

$$\frac{1+x}{k_1+1}<y\leqslant\frac{1+x}{k_1}.$$

Замечая, что

$$f_1(x;k_1)=\frac{1+x}{k_1+1},\quad g_1(x;k_1)=\frac{1+x}{k_1},$$

приходим к искомому утверждению.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех r, $1\leqslant r\leqslant m$, и докажем его для $r=m+1$. Пусть (x,y) - произвольная точка области

$$\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)=\mathcal{T}(k_1)\cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2)\cap\dots\cap T^{-(m-1)}\mathcal{T}(k_m)\cap T^{-m}\mathcal{T}(k_{m+1}).$$

Тогда $(x,y)\in T^{-i}\mathcal{T}(k_{\nu+1})$ и $T^i(x,y)\in\mathcal{T}(k_{i+1})$ для любого i, $0\leqslant i\leqslant m$. Полагая $(x_i,y_i)=T^i(x,y)$ (так что $x_0=x$, $y_0=y$), выразим x_i и y_i через x и y. Поскольку $(x_{i-1},y_{i-1})\in\mathcal{T}(k_i)$, то $[(1+x_{i-1})/y_{i-1}]=k_i$, так что

$$(x_i,y_i)=T^{\,i}(x,y)=T\circ T^{\,i-1}(x,y)=T(x_{i-1},y_{i-1})=(y_{i-1},k_iy_{i-1}-x_{i-1}),$$

откуда

$$\begin{cases}x_i=y_{i-1}\\ y_i=k_iy_{i-1}-x_{i-1},\quad i=1,2,\dots,m.\end{cases}\tag{18}$$

Соотношения (18) приводят к цепочке равенств

$$x_{i-1}+x_{i+1}=k_ix_i,\quad i=1,2,\dots,m,$$

из которых последовательно находим:

$$\begin{aligned}x_i=x_1\mathbb{K}_{i-1}(k_1,\dots,k_{i-1})-x_0\mathbb{K}_{i-2}(k_2,\dots,k_{i-1})=\\ =y\mathbb{K}_{i-1}(k_1,\dots,k_{i-1})-x\mathbb{K}_{i-2}(k_2,\dots,k_{i-1})\\ y_i=x_{i+1}=y\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)-x\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_i).\end{aligned}\tag{19}$$

Поскольку $(x_m,y_m)\in\mathcal{T}(k_{m+1})$, то $[(1+x_m)/y_m]=k_{m+1}$ и, следовательно,

$$k_{m+1}\leqslant\frac{1+x_m}{y_m}<k_{m+1}+1.$$

Заменяя x_m,y_m с помощью формул (18), получим:

$$k_{m+1}\leqslant\frac{1+y_{m-1}}{k_my_{m-1}-x_{m-1}}<k_{m+1}+1$$

или, что то же,

$$\begin{cases}k_{m+1}(k_my_{m-1}-x_{m-1})\leqslant 1+y_{m-1}\\ 1+y_{m-1}<(k_{m+1}+1)(k_my_{m-1}-x_{m-1}).\end{cases}\tag{20}$$

Выражая x_{m-1}, y_{m-1} через x, y по формулам (19) и пользуясь (10), после несложных преобразований приводим систему (20) к виду

$$\begin{cases} y\mathbb{K}_m(k_1,\dots,k_m) \leqslant 1 + x\mathbb{K}_m(k_2,\dots,k_{m+1}), \\ 1 + x\mathbb{K}_m(k_2,\dots,k_{m+1}+1) < y\mathbb{K}_{m+1}(k_1,\dots,k_m,k_{m+1}+1), \end{cases}$$

т.е.

$$f_{m+1}(x;k_1,\dots,k_{m+1}) < y \leqslant g_{m+1}(x;k_1,\dots,k_{m+1}).$$

Поскольку $(x,y) \in \mathcal{T}(k_1,\dots,k_m)$, в силу предположения индукции приходим к искомому утверждению. □

Очевидным следствием Леммы 2 является упомянутый выше факт: при любых целых $k_1,\dots,k_r \geqslant 1$ область $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$ либо пуста, либо является выпуклым многоугольником.

Леммы 1 и 2 позволяют свести вычисление $N(Q;r,D)$ к подсчёту числа целых точек в многоугольных областях.

Лемма 3. *Пусть $Q \geqslant r \geqslant 1$, и пусть $(k_1,\dots,k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$ - произвольный набор. Тогда число появлений в ряде Фарея Φ_Q кортежа* (1) *из* (r+2) *последовательных дробей с условиями $q_0, q_{r+1} \equiv 0 \pmod D$, $q_i \not\equiv 0 \pmod D$, $i = 1,2,\dots,r$, которые отвечают набору $(k_1,\dots,k_r)$, совпадает с числом целых точек (q_0,q_1) с условиями $q_0 \equiv 0 \pmod D$, Н.О.Д.$(q_0,q_1) = 1$, лежащих в области $Q\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$.*

Доказательство. Действительно, в силу Леммы 1 искомое число совпадает с количеством пар (q_0,q_1) с условиями

$$0 < q_0, q_1 \leqslant Q, \quad q_0 + q_1 > Q, \quad q_0 \equiv 0 \pmod D, \quad \text{Н.О.Д.}(q_0,q_1) = 1$$

и таких, что

$$\frac{Q + q_0\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_{i-1},k_i+1)}{\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1)} < q_1 \leqslant \frac{Q + q_0\mathbb{K}_i(k_2,\dots,k_i)}{\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)} \tag{21}$$

для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Заменой $x = q_0/Q$, $y = q_1/Q$ неравенства (21) приводятся (в обозначениях Леммы 2) к виду

$$f_i(x;k_1,\dots,k_i) < y \leqslant g_i(x;k_1,\dots,k_i), \quad i = 1,2,\dots,r$$

(при этом, очевидно, $0 < x,y \leqslant 1$, $x + y > 1$). В силу Леммы 2, точка (x,y) принадлежит области $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$. Лемма доказана. □

Следствие. *При любых $Q \geqslant r \geqslant 1$, $D \geqslant 2$ справедливо равенство:*

$$N(Q;r,D) = \sum_{(k_1,\dots,k_r)\in\mathcal{A}_r(D)} \sum_{\substack{(q_0,q_1)\in Q\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r) \\ q_0\equiv 0 \pmod D, \\ \text{Н.О.Д.}(q_0,q_1)=1}} 1. \tag{22}$$

Зафиксируем набор $(k_1,\dots,k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$ такой, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$ непуста. Внутреннюю сумму в (21) представим в виде

$$\sum_{\substack{e_1=1 \\ \text{Н.О.Д.}(e_1,D)=1}}^{D} N_{0,e_1}(Q\omega),$$

где $N_{\sigma_0,\sigma_1}(Q\omega)$ - число примитивных целых точек (q_0,q_1) области $Q\omega$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} q_0 \equiv \sigma_0 \pmod D, \\ q_1 \equiv \sigma_1 \pmod D. \end{cases} \tag{23}$$

Преобразование T, не являясь непрерывным, сохраняет площади (см. [13, лемма 3]). Очевидно также, что преобразование $QT(x,y)$ переводит целые точки треугольника $Q\mathcal{T}$ в целые точки. Поэтому для подсчёта величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$ область $Q\omega$ можно подвергнуть многократной итерации преобразования T с тем, чтобы перевести её в другую область, подсчёт целых точек в которой представляет наименьшие затруднения. Имеет место

Лемма 4. *При любом j, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, справедливо равенство $N_{\sigma_0,\sigma_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(QT^j(\omega))$, где*

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_0(j) \equiv \mathbb{K}_{j-1}(k_1,\dots,k_{j-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{j-2}(k_2,\dots,k_{j-1})\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(j) \equiv \mathbb{K}_j(k_1,\dots,k_j)\sigma_1 - \mathbb{K}_{j-1}(k_2,\dots,k_j)\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D) \end{cases}$$

(*в случае $j=1$ слагаемое $\mathbb{K}_{j-2}(k_2,\dots,k_{j-1})\sigma_0$ отсутствует*).

Доказательство (индукция по j). Подвергнем ω преобразованию T. Поскольку $\omega \subseteq \mathcal{T}(k_1)$, то $[(1+x)/y] = k_1$ и $T(x,y) = (y, k_1y - x)$ для всякой точки (x,y) области ω. Пусть (q_0,q_1) - примитивная целая точка области $Q\omega$, удовлетворяющая, сверх того, условиям (23). Тогда

$$QT\left(\frac{q_0}{Q},\frac{q_1}{Q}\right) = (q_1, k_1q_1 - q_0) = (\ell, n)$$

- целая точка области $QT(\omega)$. Очевидно, что Н.О.Д.(ℓ,n) = Н.О.Д.$(q_0,q_1) = 1$. Кроме того,

$$\begin{cases} \ell = q_1 \equiv \sigma_1 \equiv \mathbb{K}_0\,\sigma_1 \equiv \varepsilon_0(1) & (\mathrm{mod}\ D), \\ n = k_1q_1 - q_0 \equiv k_1\sigma_1 - \sigma_0 \equiv \mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\,\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(1) & (\mathrm{mod}\ D). \end{cases}$$

Следовательно, (ℓ,n) - примитивная точка области $QT(\omega)$, входящая в подсчёт величины $N_{\varepsilon_0(1),\,\varepsilon_1(1)}(QT(\omega))$. Обратно, пусть (ℓ,n) - примитивная точка области $QT(\omega)$, такая, что

$$\begin{cases} \ell \equiv \mathbb{K}_0\,\sigma_1 & (\mathrm{mod}\ D), \\ n \equiv \mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\,\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D). \end{cases} \tag{24}$$

Тогда для некоторой точки $(x,y) \in \omega$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q},\frac{n}{Q}\right) = T(x,y) = (y, k_1y - x).$$

Поэтому

$$x = \frac{k_1\ell - n}{Q}, \quad y = \frac{\ell}{Q}$$

и $(Qx,Qy) = (k_1\ell - n, \ell)$ - целая точка области $Q\omega$. Полагая $q_0 = k_1\ell - n$, $q_1 = \ell$, будем иметь: Н.О.Д.(q_0,q_1) = Н.О.Д.$(\ell,n) = 1$, и, кроме того,

$$\begin{cases} q_0 \equiv k_1\mathbb{K}_0\,\sigma_1 - \big(\mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\,\sigma_0\big) \equiv k_1\sigma_1 - k_1\sigma_1 + \sigma_0 \equiv \sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D), \\ q_1 \equiv \mathbb{K}_0\,\sigma_1 \equiv \sigma_1 & (\mathrm{mod}\ D). \end{cases}$$

Следовательно (q_0,q_1) - примитивная точка области $Q\omega$, входящая в подсчёт величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$.

Таким образом, между примитивными точками области $Q\omega$ с условиями (23) и примитивными очками области $QT(\omega)$ с условиями (24) имеется взаимнооднозначное соответствие. В частности,

$$N_{\sigma_0,\sigma_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0(1),\,\varepsilon_1(1)}(QT(\omega)),$$

что и доказывает утверждение в случае $j=1$.

Пусть утверждение леммы верно для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Так как $T^{m-1}(\omega) \subset \mathcal{T}(k_m)$, то $[(1+x)/y] = k_m$ и $T(x,y) = (y, k_m y - x)$ для всякой точки $(x,y) \in T^{m-1}(\omega)$. Если $(p_0, p_1) \in QT^{m-1}(\omega)$ - примитивная точка, для которой

$$\begin{cases} p_0 \equiv \mathbb{K}_{m-2}(k_1,\dots,k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2,\dots,k_{m-2})\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D), \\ p_1 \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D), \end{cases}$$

то

$$QT\left(\frac{p_0}{Q}, \frac{p_1}{Q}\right) = (p_1, k_m p_1 - p_0) = (\ell, n)$$

- целая точка области $QT^m(\omega)$. Очевидно, что Н.О.Д.(ℓ, n) = Н.О.Д.$(p_0, p_1) = 1$. Кроме того, пользуясь (7), находим:

$$\begin{aligned} \ell = p_1 \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0 \equiv \varepsilon_0(m-1) \quad (\mathrm{mod}\ D), \\ n = k_m p_1 - p_0 \equiv k_m\big(\mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0\big) - \\ - \big(\mathbb{K}_{m-2}(k_1,\dots,k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2,\dots,k_{m-2})\sigma_0\big) \equiv \\ \equiv \mathbb{K}_m(k_1,\dots,k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2,\dots,k_m)\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(m) \quad (\mathrm{mod}\ D). \end{aligned}$$

Следовательно, точка (ℓ, n) участвует в подсчёте величины $N_{\varepsilon_0(m),\,\varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega))$. Обратно, пусть (ℓ, n) - примитивная точка области $QT^m(\omega)$, такая,что

$$\begin{cases} \ell \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D), \\ n \equiv \mathbb{K}_m(k_1,\dots,k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2,\dots,k_m)\sigma_0 & (\mathrm{mod}\ D). \end{cases}$$

Тогда для некоторой точки $(x,y) \in T^{m-1}(\omega)$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = T(x,y) = (y, k_m y - x),$$

откуда

$$x = \frac{k_m \ell - n}{Q}, \quad y = \frac{\ell}{Q}.$$

Значит, $(Qx, Qy) = (k_m\ell - n, \ell) = (q_0, q_1)$ - примитивная точка области $QT^{m-1}(\omega)$, причём

$$\begin{aligned} q_0 \equiv k_m\big(\mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0\big) - \\ - \big(\mathbb{K}_m(k_1,\dots,k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2,\dots,k_m)\sigma_0\big) \quad (\mathrm{mod}\ D) \equiv \\ \equiv \mathbb{K}_{m-2}(k_1,\dots,k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2,\dots,k_{m-2})\sigma_0 \equiv \varepsilon_0(m-1) \quad (\mathrm{mod}\ D) \\ q_1 \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1,\dots,k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2,\dots,k_{m-1})\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(m-1) \quad (\mathrm{mod}\ D). \end{aligned}$$

Следовательно, точка (q_0, q_1) входит в подсчёт величины $N_{\varepsilon_0(m-1),\,\varepsilon_1(m-1)}(QT^{m-1}(\omega))$. Таким образом,

$$N_{\varepsilon_0(m),\,\varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega)) = N_{\varepsilon_0(m-1),\,\varepsilon_1(m-1)}(QT^{m-1}(\omega)).$$

Отсюда в силу предположения индукции заключаем:

$$N_{\varepsilon_0(m),\,\varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega)) = N_{\sigma_0,\sigma_1}(Q\omega). \quad \square$$

Замечание. Если исходный набор $(k_1,\dots,k_r)$ содержится в $\mathcal{A}_r(D)$, то при любом j, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, пара $\big(\varepsilon_0(j), \varepsilon_1(j)\big) \pmod D$ отлична от пары $(0,0)$.

Вычисление величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$ опирается на следующую версию неравенства Ярника (см. [16, лемма 1]): если Ω - плоская односвязная область со спрямляемой границей, $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ - её площадь и периметр, а $N(\Omega)$ - количество целых точек, лежащих внутри Ω, то

$$\big|N(\Omega) - |\Omega|\big| \leqslant 4(|\partial\Omega| + 1).$$

В частности, если Ω - выпуклый многоугольник, $Q > 1$, то

$$N(Q\,\Omega) = Q^2|\Omega| + O(Q|\partial\Omega| + 1), \tag{25}$$

где постоянная в знаке O - абсолютная.

Для дальнейшего нам потребуется ряд свойств преобразования T и областей $\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (см. рис. 1).

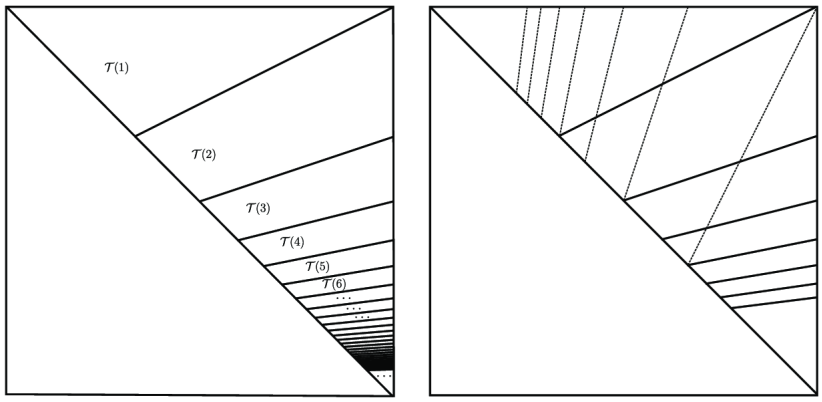


Рис. 1. Области $\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (слева);
взаимное расположение областей $\mathcal{T}(k)$ и $T(\mathcal{T}(k))$ (справа).

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) *область* $\mathcal{T}(k)$ *при* $k = 1$ *представляет собой треугольник с вершинами* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ *и площадью* $|\mathcal{T}(1)| = 1/6$, *а при* $k \geqslant 2$ - *четырёхугольник с вершинами*

$$\left(\frac{k}{k+2}, \frac{2}{k+2}\right), \quad \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{2}{k+1}\right), \quad \left(1, \frac{2}{k}\right), \quad \left(1, \frac{2}{k+1}\right) \tag{26}$$

и площадью

$$|\mathcal{T}(k)| = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}; \tag{27}$$

(b) *при любом* $k \geqslant 1$ *области* $\mathcal{T}(k)$ *и* $T(\mathcal{T}(k))$ *симметричны относительно прямой* $y = x$;

(c) $\mathcal{T}(1) \cap T(\mathcal{T}(1)) = \varnothing$; $\mathcal{T}(2) \cap T(\mathcal{T}(k)) = \varnothing$ *при любом* $k \geqslant 5$; $\mathcal{T}(k) \cap T(\mathcal{T}(m)) = \varnothing$ *при любых* $k, m \geqslant 3$;

(d) $T^{-1}(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(1)$, $T(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(1)$ *при любом* $k \geqslant 5$;

(e) *пусть* $r \geqslant 1$, $k \geqslant 4r+2$; *тогда* $T^{-j}(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(2)$, $T^{j}(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(2)$ *для любого* j, $2 \leqslant j \leqslant r$;

(f) *пусть* $r \geqslant 1$, $\max(k_1, \ldots, k_r) = k_j \geqslant 4r + 2$, *и пусть* $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r) \neq \varnothing$; *тогда набор* $k_1, \ldots, k_r$ *удовлетворяет условиям*

$$k_i = 1 \quad \textit{при} \quad |i - j| = 1, \quad k_i = 2 \quad \textit{при} \quad |i - j| \geqslant 2. \tag{28}$$

(h) *пусть* $r \geqslant 1$, $Q > 2(r + 1)$, *и пусть* $\max(k_1, \ldots, k_r) = k_j \geqslant 4r + 2$, *причём область* $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ *непуста; тогда* $k_j \leqslant 2Q$.

Доказательства этих утверждений содержатся в [3], [13]. П.п. (a), (b) получаются из определения $\mathcal{T}(k)$ непосредственым вычислением; п.п. (c), (d) являются следствиями п. (b). Утверждения п. (e) представляют собой следствия п.п. (i), (ii) леммы 3.4 работы [3]. Утверждение п. (f) также следует из указанной леммы (см. [3, p. 570]). По поводу п. (h) см. [19, p. 384; Remark 2.3].

Из п. (c) следует, что при $r \geqslant 2$ в наборе $(k_1, \ldots, k_r)$, отвечающем непустой области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$, не может быть двух подряд идущих единиц и, таким образом,

$$\max(k_1, \ldots, k_r) \geqslant 2. \tag{29}$$

Воспользуемся формулой (25) для вывода асимптотики величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$.

Лемма 6. *Пусть $r \geqslant 1$, $k_1, \ldots, k_r$ - целые числа, такие, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ непуста, $\max(k_1, \ldots, k_r) = k_j$. Пусть, далее, $Q > 2k_j$, $1 \leqslant e_1 \leqslant D$, Н.О.Д.$(e_1, D) = 1$. Тогда для числа $N_{0,e_1}(Q\omega)$ примитивных точек (q_0, q_1) области $Q\omega$ с условиями $q_0 \equiv 0 \pmod D$, $q_1 \equiv e_1 \pmod D$ справедлива формула:*

$$N_{0,e_1}(Q\omega) = \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p \mid D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\omega| + O\left(\frac{Q}{k_j} \ln Q\right),$$

где постоянная в знаке O - абсолютная.

Доказательство. Обозначим для краткости область $T^{j-1}(\omega)$ через ω_j. В силу Леммы 4, $N_{0,e_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j)$, где

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \equiv \mathbb{K}_{j-2}(k_1, \ldots, k_{j-2}) e_1 \pmod D, \\ \varepsilon_1 \equiv \mathbb{K}_{j-1}(k_1, \ldots, k_{j-1}) e_1 \pmod D \end{cases}$$

(в случае $j = 1$ считаем $(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = (0, e_1)$). Пусть, далее, Ω_j - область, состоящая из всех точек вида

$$\left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right), \quad \text{где} \quad (x, y) \in \omega_j.$$

Тогда величина $N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j)$ совпадает с числом целых точек (ℓ, n) области $Q\Omega_j$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\text{Н.О.Д.}(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = 1. \tag{30}$$

Действительно, пусть (q_0, q_1) - примитивная точка области $Q\omega_j$, входящая в подсчёт $N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j)$, т.е. такая, что

$$q_0 \equiv \varepsilon_0 \pmod D, \quad q_1 \equiv \varepsilon_1 \pmod D. \tag{31}$$

Тогда числа $\ell = (q_0 - \varepsilon_0)/D$, $n = (q_1 - \varepsilon_1)/D$, и Н.О.Д.$(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) =$ Н.О.Д.$(q_0, q_1) = 1$. Поскольку

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = \left(\frac{q_0 - \varepsilon_0}{DQ}, \frac{q_1 - \varepsilon_1}{DQ}\right) = \left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right),$$

где $(x, y) = (q_0/Q, q_1/Q) \in \omega_j$, то точка (ℓ, n) лежит в области $Q\Omega_j$.

Обратно, если $(\ell, n) \in Q\Omega_j$ - целая точка с условиями (30), то для некоторой точки $(x, y) \in \omega_j$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = \left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right),$$

откуда $(Qx, Qy) = (D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = (q_0, q_1)$ - примитивная точка области $Q\omega_j$, координаты которой удовлетворяют (31). Следовательно,

$$N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j) = \sum_{\substack{(\ell,n)\in Q\Omega_j \\ \text{Н.О.Д.}(D\ell+\varepsilon_0, Dn+\varepsilon_1)=1}} 1 = \sum_{(\ell,n)\in Q\Omega_j} \sum_{\delta \mid \text{Н.О.Д.}(D\ell+\varepsilon_0, Dn+\varepsilon_1)} \mu(\delta).$$

Чтобы оценить максимальное значение δ, заметим следующее. Так как

$$\omega = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \cdots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r) \subseteq T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j),$$

то область $\omega_j = T^{j-1}(\omega)$ целиком лежит в $\mathcal{T}(k_j)$. Как отмечалось выше, $k_j \geqslant 2$. Значит, $\mathcal{T}(k_j)$ есть четырёхугольник с вершинами (26). Поэтому $Q\omega_j$ заведомо содержится в прямоугольнике

$$Q\,\frac{k_j - 1}{k_j + 1} \leqslant x \leqslant Q, \quad 0 < y \leqslant \frac{2Q}{k_j}. \tag{32}$$

Значит, для всякой целой точки $(q_0, q_1) \in Q\omega_j$ имеем: $1 \leqslant q_1 \leqslant 2Q/k_j$ или, что то же, $D\ell + \varepsilon_1 \leqslant 2Q/k_j$. Следовательно, $\delta \leqslant 2Q/k_j$.

Таким образом,

$$N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j) = \sum_{1\leqslant\delta\leqslant 2Q/k_j} \mu(\delta) \sum_{\substack{(\ell,n)\in Q\Omega_j \\ D\ell+\varepsilon_0\equiv 0 \pmod\delta \\ Dn+\varepsilon_1\equiv 0 \pmod\delta}} 1 = \sum_{\substack{1\leqslant\delta\leqslant 2Q/k_j \\ \text{Н.О.Д.}(\delta,D)=1}} \mu(\delta) \sum_{\substack{(\ell,n)\in Q\Omega_j \\ \ell\equiv\sigma_0 \pmod\delta \\ n\equiv\sigma_1 \pmod\delta}} 1,$$

где $\sigma_0 \equiv -\varepsilon_0 D^* \pmod\delta$, $\sigma_1 \equiv -\varepsilon_1 D^* \pmod\delta$. Несложно видеть, что внутренняя сумма совпадает с числом целых точек в области $Q\Omega_j^*$, где Ω_j^* получается из Ω_j сдвигом на вектор $(-\sigma_1/Q, -\sigma_2/Q)$ и сжатием в δ раз по каждой из осей, и потому, в силу (25), равна

$$|Q\Omega_j^*| + O\big(|\partial(Q\Omega_j^*)| + 1\big) = \frac{Q^2}{\delta^2}\,|\Omega_j| + O\bigg(\frac{Q}{\delta}|\partial\Omega_j| + 1\bigg) = \frac{Q^2}{\delta^2}\,\frac{|\omega_j|}{D^2} + O\bigg(\frac{Q}{\delta D}|\partial\omega_j| + 1\bigg).$$

Так как преобразование T сохраняет площади, то $|\omega_j| = |\omega|$. Далее, если $k_j \geqslant 4r + 2$, то в силу Леммы 5 набор $(k_1, \ldots, k_r)$ удовлетворяет (29). Покажем теперь, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ совпадает с $T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j)$. Действительно, если $|i - j| = 1$, то $k_i = 1$. Рассмотрим область

$$\omega^{(1)} = T^{-(j-2)}\mathcal{T}(k_{j-1}) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-2)}\mathcal{T}(1) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Имеем тогда: $\omega^{(1)} = T^{-(j-2)}\big(\mathcal{T}(1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_j)\big)$. Согласно п. (d) Леммы 5, $T^{-1}\mathcal{T}(k_j)$ содержится в $\mathcal{T}(1)$, так что

$$\omega^{(1)} = T^{-(j-2)} \circ T^{-1}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Аналогично проверяется равенство

$$\omega^{(2)} = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) \cap T^{-j}\mathcal{T}(1) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Пусть, далее, $i \leqslant j - 2$. Полагая

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)}\mathcal{T}(k_i) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j),$$

получим:

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)}\mathcal{T}(2) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(i-1)}\big(\mathcal{T}(2) \cap T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j)\big).$$

Согласно п. (e) Леммы 5, $T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j) \subset \mathcal{T}(2)$, так что

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)} \circ T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j)\big).$$

Наконец, полагая

$$\omega^{(4)} = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) \cap T^{-(i-1)}\mathcal{T}(k_i),$$

при $i \geqslant j+2$ находим:

$$\omega^{(4)} = T^{-(i-1)}\big(T^{-(i-j)}\mathcal{T}(k_j) \cap \mathcal{T}(2)\big) = T^{-(i-1)} \circ T^{-(i-j)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Следовательно, $\omega = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j)$ и $\omega_j = T^{j-1}(\omega) = \mathcal{T}(k_j)$. Таким образом,

$$|\partial\omega_j| = |\partial\mathcal{T}(k_j)| \ll \frac{1}{k_j}.$$

Если же $k_j \leqslant 4r+2$, то

$$|\partial\omega_j| \ll 1 \ll_r \frac{1}{k_j}.$$

Итак, в каждом из случаев имеем равенство:

$$|Q\Omega_j^*| = \frac{Q^2}{(D\delta)^2}\,|\omega| + O\Big(\frac{Q}{D\delta k_j} + 1\Big).$$

Отсюда без труда находим:

$$N_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}(Q\omega_j) = \frac{Q^2}{D^2}|\omega|\Big(\sum_{\text{н.о.д.}(D,\delta)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - \sum_{\substack{\text{н.о.д.}(D,\delta)=1\\ \delta>2Q/k_j}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\Big) + O\Big(\frac{Q\ln Q}{Dk_j}\Big) + O\Big(\frac{Q}{k_j}\Big) =$$

$$= \frac{6Q^2}{(\pi D)^2}\prod_{p|D}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1}|\omega| + O\Big(\frac{Q}{D^2}\,|\omega|k_j\Big) + O\Big(\frac{Q\ln Q}{k_j}\Big).$$

Замечая, что $|\omega| = |\omega_j| = |\mathcal{T}(k_j)| \ll k_j^{-3}$, приходим к искомой формуле. Лемма доказана. □

Следующее утверждение устанавливает формулу для величины $N(Q;r,D)$, которая служит основой для вывода Теорем 1-2.

Лемма 7. *При фиксированных $r \geqslant 1$, $D \geqslant 2$ и $Q \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$N(Q;r,D) = \frac{6Q^2}{\pi^2}\,\frac{1}{D}\prod_{p|D}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}_r(D)}|\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_r)| + O_{r,D}(Q\ln^2 Q),$$

где $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$. Доказательство Леммы 7. Согласно следствию Леммы 3,

$$N(Q;r,D) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}_r(D)}\ \sum_{\substack{e_1=1\\ \text{н.о.д.}(e_1,D)=1}}^{D} N_{0,e_1}(Q\omega), \tag{33}$$

где $\omega = \mathcal{T}(\mathbf{k}) = \mathcal{T}(k_1,\ldots,k_r)$. Заменяя каждую из величин $N_{0,e_1}(Q\omega)$ выражением из Леммы 6, получим:

$$\sum_{\substack{e_1=1\\ \text{н.о.д.}(e_1,D)=1}}^{D} N_{0,e_1}(Q\omega) = \frac{6Q^2}{(\pi D)^2}\varphi(D)\prod_{p|D}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1}|\omega| + O\Big(\frac{\varphi(D)}{k_j}Q\ln Q\Big) =$$

$$= \frac{6Q^2}{\pi^2 D}\prod_{p|D}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}|\omega| + O_D\Big(\frac{Q}{k_j}\ln Q\Big), \tag{34}$$

где, как и выше, $k_j = \max(k_1, \ldots, k_r)$.

Оценим вклад в (33) от остаточных членов формул (34). Вклад от наборов $\mathbf{k}$ с условием $k_j \leqslant 4r+2$ не превосходит по порядку $O_r(Q\ln Q)$. Вклад от оставшихся наборов оценивается величиной $S_1 + \ldots + S_r$, где S_j - сумма по наборам $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)$ с условиями $k_j > 4r+2$, $\omega = \mathcal{T}(\mathbf{k}) \neq \varnothing$. В силу п. (h) Леммы 5, в этом случае $k_j \leqslant 2Q$. Кроме того, как отмечалось выше, непустота области ω влечёт равенства п. (f) той же леммы, которыми набор $\mathbf{k}$ определяется однозначно: $k_{j-1} = k_{j+1} = 1$, $k_1 = \ldots = k_{j-2} = k_{j+2} = \ldots = k_r = 2$.

Следовательно,

$$S_j \ll Q(\ln Q) \sum_{k_j \leqslant 2Q} \frac{1}{k_j} \ll Q\ln^2 Q.$$

Лемма доказана. □

Следствие. *Справедливо равенство:*

$$\nu(r; D) = 2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)} |\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)|.$$

Искомую формулу для $\nu(r; D)$ получим, воспользовавшись Леммой 6 и равенством

$$N(Q, D) = \frac{3Q^2}{\pi^2 D} \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} + O_D(Q\ln Q),$$

доказательство которого можно найти, например, в [20, с. 262-263]. □

Зафиксируем произвольное целое $D \geqslant 2$. Кортежу (1) из $(r+2)$ последовательных дробей Фарея поставим в соответствие кортеж

$$1 - \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}} < 1 - \frac{a_r}{q_r} < \ldots < 1 - \frac{a_1}{q_1} < 1 - \frac{a_0}{q_0}. \tag{35}$$

Несложно проверить, что дроби (35) также являются последовательными дробями ряда Φ_Q. Кроме того, если исходный кортеж (1) отвечал набору чисел $(k_1, \ldots, k_r)$, то кортеж (35) будет отвечать набору $(k_r, \ldots, k_1)$. Очевидно, между кортежами (1) и (35) имеется взаимно однозначное соответствие. В силу Леммы 3, совпадают и количества примитивных целых точек (q_0, q_1) с условием $q_0 \equiv 0 \pmod D$ в областях $Q\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и $Q\mathcal{T}(k_r, \ldots, k_1)$. Применяя Лемму 6, после суммирования по e_1, Н.О.Д.$(e_1, D) = 1$, получим равенство

$$\frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)| = \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\mathcal{T}(k_r, \ldots, k_1)| + O\left(\frac{Q}{k_j} \ln Q\right),$$

в котором $k_j = \max(k_1, \ldots, k_r)$. Устремляя Q к бесконечности, приходим к равенству

$$|\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)| = |\mathcal{T}(k_r, \ldots, k_1)|, \tag{36}$$

ранее, по-видимому, в общем виде не отмеченному.

3. Доказательство Теоремы 1: значения величин $\nu(r; D)$, $1 \leqslant r \leqslant 6$

Если не оговорено противное, в §§3-5 предполагаем $D = 3$. При построении множества $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r(3)$ будем пользоваться утверждением Леммы 5, а при подсчёте величин $|\mathcal{T}(k_r, \ldots, k_1)|$ - формулами Леммы 2.

Пусть $r = 1$. В этом случае множество $\mathcal{A}_r$ состоит из наборов (k_1) длины 1 с условием $\mathbb{K}_1(k_1) = k_1 \equiv 0 \pmod 3$. Пользуясь следствием Леммы 7 и п. (a) Леммы 5, находим:

$$\nu(1;3) = 2 \sum_{\substack{k_1 \equiv 0 \pmod 3 \\ k_1 \geqslant 1}} |\mathcal{T}(k_1)| = 8\Sigma, \quad \Sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Несложно видеть, что

$$\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k+2}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{3}} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\psi\left(\frac{5}{3}\right) - \psi(1)\right) - \frac{1}{3}\left(\psi\left(\frac{2}{3}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

где $\psi(x)$ - *дигамма-функция*. Пользуясь последовательно формулами

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \psi(1-x) - \psi(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x)$$

наряду с равенствами

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$$

(γ - постоянная Эйлера; см. формулы 8.365.1, 8.365.8, 8.366.1 и 8.366.7 из [21]), находим:

$$\Sigma = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right), \quad \nu(1;3) = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right).$$

В случае $r = 2$ условия включения в $\mathcal{A}_2$ набора (k_1, k_2) имеют вид:

$$\mathbb{K}_1(k_1) = k_1 \not\equiv 0 \pmod 3, \quad \mathbb{K}_2(k_1, k_2) = k_1 k_2 - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Поэтому в $\mathcal{A}_2$ войдут наборы, для которых $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod 3$, так что $\nu(2;3) = \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_j = \sum_{\substack{k_1 \equiv k_2 \equiv j \pmod 3 \\ k_1, k_2 \geqslant 1}} |\mathcal{T}(k_1, k_2)|, \quad j = 1, 2.$$

В силу п. (d) Леммы 5, вклад от $k_1 = 1$ в σ_1 имеет вид

$$\sigma_{11} = \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_2 \geqslant 4}} |\mathcal{T}(1, k_2)| = |\mathcal{T}(1,4)| + \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_2 \geqslant 7}} |\mathcal{T}(k_2)|.$$

Подсчёт по формулам Леммы 2 даёт:

$$|\mathcal{T}(1,4)| = \frac{1}{35}.$$

Пользуясь формулой п. (a) Леммы 5, находим:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{35} + 4\left(\sigma - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}\right) = 4\sigma - \frac{1}{210}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

Далее, в силу п. (c) Леммы 5, вклад в σ_1 от $k_1 = 4$ составит

$$\sigma_{12} = \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_2 \geqslant 1}} |\mathcal{T}(4, k_2)| = |\mathcal{T}(4,1)| = \frac{1}{35};$$

вклад же от $k_1 \geqslant 7$, $k_1 \equiv 1 \pmod 3$ даётся выражением

$$\sigma_{13} = \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_1 \geqslant 7}} \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_2 \geqslant 1}} |\mathcal{T}(k_1, k_2)| = \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_1 \geqslant 7}} |\mathcal{T}(k_1, 1)| =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod 3 \\ k_1 \geqslant 7}} |\mathcal{T}(k_1)| = 4\left(\sigma - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}\right) = 4\sigma - \frac{1}{30}.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} = \left(4\sigma - \frac{1}{210}\right) + \frac{1}{35} + \left(4\sigma - \frac{1}{30}\right) = 8\sigma - \frac{1}{105}.$$

Наконец, из п. (c) Леммы 5 следует, что в сумме σ_2 от нуля отлично единственное слагаемое (с $k_1 = k_2 = 2$), так что

$$\sigma_2 = |\mathcal{T}(2,2)| = \frac{1}{10}.$$

Таким образом,

$$\nu(2;3) = 2\left(8\sigma - \frac{1}{105} + \frac{1}{10}\right) = 16\sigma + \frac{19}{105}.$$

Замечая, что

$$\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{1}{6},$$

находим:

$$\nu(2;3) = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35}.$$

Вычисление величин $\nu(r;3)$, $3 \leqslant r \leqslant 6$, удобно провести по следующей схеме.

Для каждого из значений r, $1 \leqslant r \leqslant 5$, последовательно составляются перечни $\mathcal{A}_r^*$ тех наборов $\mathbf{k}_r = (k_1, \ldots, k_r)$, которые, во-первых, отвечают непустым областям $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ и, во-вторых, удовлетворяют дополнительным условиям $\mathbb{K}_i(k_1, \ldots, k_i) \not\equiv 0 \pmod 3$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Построение перечня $\mathcal{A}_1^*$ не представляет затруднений: он состоит из наборов (k_1) длины 1 с условием $k_1 \not\equiv 0 \pmod 3$.

Случай $r = 2$. Выше мы нашли, что $\mathcal{A}_2$ состоит из наборов

$$(k_1, 1),\ \ k_1 \equiv 1 \pmod 3,\ \ k_1 \geqslant 4; \quad (1, k_2),\ \ k_2 \equiv 1 \pmod 3,\ \ k_2 \geqslant 4; \quad (2,2).$$

Пользуясь п.п. (c), (d) Леммы 5, убеждаемся, что в $\mathcal{A}_2^*$ входят наборы

$$\begin{aligned} &(k_1, 1), \quad k_1 \equiv 2 \pmod 3, \quad k_1 \geqslant 2; \\ &(1, k_2), \quad k_2 \not\equiv 1 \pmod 3, \quad k_2 \geqslant 2; \\ &(2,3),\ (2,4),\ (4,2). \end{aligned}$$

Если перечень $\mathcal{A}_{r-1}^*$ уже построен, то для всякого набора $\mathbf{k}_{r-1} = (k_1, \ldots, k_{r-1}) \in \mathcal{A}_{r-1}^*$ проводится перебор всех наборов вида $\mathbf{k}_r = (\mathbf{k}_{r-1}, k) = (k_1, \ldots, k_{r-1}, k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, с проверкой соответствующих условий. Перебор можно сократить, пользуясь п. (c) Леммы 5.

Поскольку для каждого из наборов $\mathbf{k}_r$ условия $\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i) \not\equiv 0 \pmod 3$ выполнены для $1 \leqslant i \leqslant r-1$ автоматически, то остаётся лишь проверить делимость на 3 определителя $\mathbb{K}_r(k_1,\dots,k_{r-1},k) = \mathbb{K}_r$. Если при заданном k оказалось, что $\mathbb{K}_r \not\equiv 0 \pmod 3$ и при этом $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r) \neq \varnothing$, то набор $\mathbf{k}_r$ включается в $\mathcal{A}_r^*$. В противном случае для этого набора выполняются условия (13). Он включается во множество $\mathcal{A}_r$ и, следовательно, участвует в вычислении $\nu(r;3)$.

Поиск наборов и вычисление площадей (проверка непустоты) областей $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$, $\mathbf{k}_r = (k_1,\dots,k_r)$, производился с помощью программной системы Wolfram Mathematica. В частности, в ней в явном виде вычислялись функции

$$f_i(x) = f_i(x;\mathbf{k}_r), \quad g_i(x) = g_i(x;\mathbf{k}_r), \quad i = 1,2,\dots$$

из Леммы 2, а также функции

$$F_r(x) = F_r(x;\mathbf{k}_r) = \max\left(1-x, f_1(x),\dots,f_r(x)\right),$$
$$G_r(x) = G_r(x;\mathbf{k}_r) = \min\left(1, g_1(x),\dots,g_r(x)\right).$$

Площадь области $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ вычислялась как интеграл от функции

$$H(x) = H(x;\mathbf{k}_r) = \max\left(0, G_r(x) - F_r(x)\right).$$

Перебор можно сократить, пользуясь п. (c) Леммы 5. Ниже приводятся результаты вычислений.

Случай $r = 3$. Множество $\mathcal{A}_3^*$ состоит из наборов

$$\begin{aligned}
&(2,1,k_3), \quad k_3 \not\equiv 2 \pmod 3, \quad k_3 \geqslant 6;\\
&(1,k_2,1), \quad k_2 \equiv 0 \pmod 3, \quad k_2 \geqslant 3;\\
&(1,2,2),\ (1,2,3),\ (2,3,2),\ (2,4,1),\ (5,1,3),\ (5,1,4),\ (8,1,3),
\end{aligned}$$

а множество $\mathcal{A}_3$ – из наборов

$$\begin{aligned}
&(k_1,1,2), \quad k_1 \equiv 2 \pmod 3, \quad k_1 \geqslant 8;\\
&(1,k_2,1), \quad k_2 \equiv 2 \pmod 3, \quad k_2 \geqslant 5;\\
&(2,1,k_3), \quad k_3 \equiv 2 \pmod 3, \quad k_3 \geqslant 8;\\
&(1,2,4),\ (1,3,2),\ (2,3,1),\ (4,2,1).
\end{aligned}$$

Таким образом, в подсчёте $\nu(3;3)$ участвуют величины

$$|\mathcal{T}(1,2,4)| = |\mathcal{T}(4,2,1)| = \frac{1}{210}; \quad |\mathcal{T}(1,3,2)| = |\mathcal{T}(2,3,1)| = \frac{3}{140},$$
$$|\mathcal{T}(k,1,2)| = |\mathcal{T}(2,1,k)| = \begin{cases} 11/2\,340, & k = 8,\\ |\mathcal{T}(k)|, & k \equiv 2 \pmod 3,\ k \geqslant 11, \end{cases}$$
$$|\mathcal{T}(1,k,1)| = |\mathcal{T}(k)|, \quad k \equiv 2 \pmod 3, \quad k \geqslant 5.$$

Итак,

$$\nu(3;3) = 2\left(\frac{2}{210} + \frac{2\cdot 3}{140} + \frac{2\cdot 11}{2\,340} + 2\sum_{\substack{k\equiv 2 \pmod 3\\ k\geqslant 11}} |\mathcal{T}(k)| + \sum_{\substack{k\equiv 2 \pmod 3\\ k\geqslant 5}} |\mathcal{T}(k)|\right) =$$
$$= \frac{103}{4\,095} + 24\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4\,095}.$$

Случай $r = 4$. Множество $\mathcal{A}_4^*$ состоит из наборов

$$\begin{array}{lll} (1,2,2,2) & (1,3,1,7) & (2,4,1,4) \\ (1,2,2,3) & (1,6,1,3) & (5,1,3,2) \\ (1,2,3,1) & (2,3,2,2) & (5,1,4,1) \\ (1,3,1,6) & (2,4,1,3) & (2,1,k_3,1), \quad k_3 \equiv 1 \pmod 3,\ k_3 \geqslant 7, \end{array}$$

а множество $\mathcal{A}_4$ – из наборов

$$\begin{array}{lll} (1,k_2,1,2), & k_2 \equiv 0 \pmod 3,\ k_2 \geqslant 6, & \\ (2,1,k_3,1), & k_3 \equiv 0 \pmod 3,\ k_3 \geqslant 6, & \\ (1,2,3,2) & (1,3,1,5) & (1,3,1,8) \\ (2,3,2,1) & (5,1,3,1) & (8,1,3,1). \end{array}$$

Соответственно, в подсчёте $\nu(4;3)$ участвуют величины

$$|\mathcal{T}(1,k,1,2)| = |\mathcal{T}(2,1,k,1)| = \begin{cases} 1/462,\ k = 6, \\ |\mathcal{T}(k)|,\ k \equiv 0 \pmod 3,\ k \geqslant 9, \end{cases}$$

$$|\mathcal{T}(1,2,3,2)| = |\mathcal{T}(2,3,2,1)| = \frac{9}{1\,540},$$

$$|\mathcal{T}(1,3,1,8)| = |\mathcal{T}(8,1,3,1)| = \frac{1}{1\,170},$$

$$|\mathcal{T}(1,3,1,5)| = |\mathcal{T}(5,1,3,1)| = \frac{1}{195}.$$

Итак,

$$\nu(4;3) = 2\biggl(\frac{2}{195} + \frac{2}{1\,170} + \frac{2\cdot 9}{1\,540} + \frac{2}{462} + 2\sum_{\substack{k\equiv 0 \pmod 3 \\ k\geqslant 9}} |\mathcal{T}(k)|\biggr) = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\biggr).$$

Случай $r = 5$. Множество $\mathcal{A}_5^*$ состоит из наборов

$$\begin{array}{lll} (1,2,2,2,2) & (1,3,1,7,1) & (5,1,4,1,3) \\ (1,2,2,2,3) & (1,6,1,3,2) & (5,1,4,1,4) \\ (1,2,2,3,1) & (2,4,1,3,2) & (2,1,7,1,3) \\ (1,2,3,1,4) & (2,4,1,4,1) & \\ (1,2,3,1,6) & (5,1,3,2,2), & \end{array}$$

а множество $\mathcal{A}_5$ - из наборов

$$\begin{array}{ll} (2,1,k_3,1,2), & k_3 \equiv 1 \pmod 3,\ k_3 \geqslant 7, \\ (1,2,2,3,2) & (2,3,2,2,1) \\ (1,2,3,1,5) & (5,1,3,2,1) \\ (1,3,1,6,1) & (1,6,1,3,1). \end{array}$$

Поэтому в подсчёте $\nu(5;3)$ участвуют величины

$$|\mathcal{T}(1,2,2,3,2)| = |\mathcal{T}(2,3,2,2,1)| = \frac{1}{770}, \quad |\mathcal{T}(1,2,3,1,5)| = |\mathcal{T}(5,1,3,2,1)| = \frac{11}{2\,210}$$

$$|\mathcal{T}(1,3,1,6,1)| = |\mathcal{T}(1,6,1,3,1)| = \frac{1}{143}, \quad |\mathcal{T}(2,1,k,1,2)| = \begin{cases} 1/616,\ k = 7, \\ |\mathcal{T}(k)|,\ k \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3),\ k \geqslant 10. \end{cases}$$

Итак,

$$\nu(5;3)=2\biggl(\frac{2}{770}+\frac{2\cdot 11}{2\,210}+\frac{2}{143}+\frac{1}{616}+\sum_{\substack{k\equiv 1 \pmod 3\\ k\geqslant 10}}|\mathcal{T}(k)|\biggr)=2\biggl(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\biggr)-\frac{4\,164\,383}{3\,063\,060}.$$

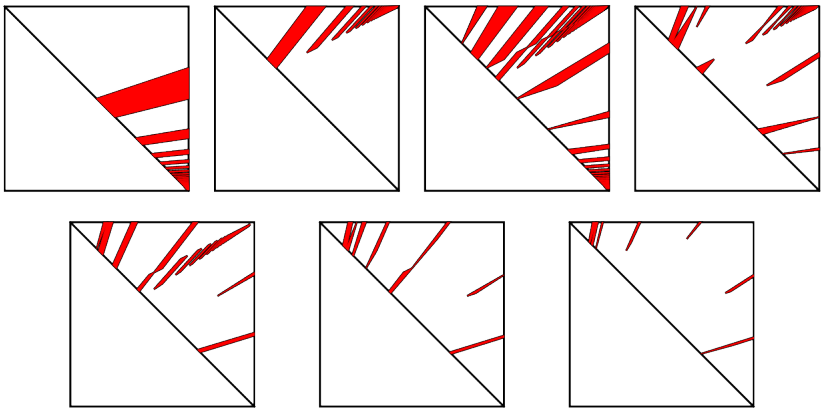


Рис. 2. Многоугольники, площади которых входят в подсчёт долей $\nu(r;3)$, $1\leqslant r\leqslant 7$.

Случай $r=6$. Множество $\mathcal{A}_6^*$ состоит из наборов

$(1,2,2,2,2,2)$	$(1,2,2,3,1,6)$	$(2,4,1,4,1,3)$	$(5,1,4,1,4,1)$
$(1,2,2,2,2,3)$	$(1,3,1,7,1,3)$	$(2,4,1,4,1,4)$	
$(1,2,2,2,3,1)$	$(1,6,1,3,2,2)$	$(5,1,3,2,2,2)$	
$(1,2,2,3,1,4)$	$(2,4,1,3,2,2)$	$(5,1,4,1,3,2)$	

а множество $\mathcal{A}_6$ - из наборов

$(1,2,2,3,1,5)$	$(5,1,3,2,2,1)$	$(1,2,3,1,6,1)$	$(1,6,1,3,2,1)$
$(1,2,3,1,4,2)$	$(2,4,1,3,2,1)$	$(1,3,1,7,1,2)$	$(2,1,7,1,3,1)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\nu(6;3)=2\bigl(&|\mathcal{T}(1,2,2,3,1,5)|+|\mathcal{T}(5,1,3,2,2,1)|+|\mathcal{T}(1,2,3,1,4,2)|+|\mathcal{T}(2,4,1,3,2,1)|+\\&+|\mathcal{T}(1,2,3,1,6,1)|+|\mathcal{T}(1,6,1,3,2,1)|+|\mathcal{T}(1,3,1,7,1,2)|+|\mathcal{T}(2,1,7,1,3,1)|\bigr)=\\&=4\biggl(\frac{37}{12\,376}+\frac{1}{910}+\frac{23}{9\,724}+\frac{3}{1\,144}\biggr)=\frac{3\,089}{85\,085}.\end{aligned}$$

Случай $r=7$. Множество $\mathcal{A}_7$ состоит из наборов

$(1,2,2,2,3,1,5)$	$(5,1,3,2,2,2,1)$	$(1,2,2,3,1,6,1)$	$(1,6,1,3,2,2,1)$
$(1,2,2,3,1,4,2)$	$(2,4,1,3,2,2,1)$	$(1,3,1,7,1,3,1)$,	

так что

$$\begin{aligned}\nu(7;3)=&\\=2\bigl(&|\mathcal{T}(1,2,2,2,3,1,5)|+|\mathcal{T}(5,1,3,2,2,2,1)|+|\mathcal{T}(1,2,2,3,1,4,2)|+|\mathcal{T}(2,4,1,3,2,2,1)|+\\&+|\mathcal{T}(1,2,2,3,1,6,1)|+|\mathcal{T}(1,6,1,3,2,2,1)|+|\mathcal{T}(1,3,1,7,1,3,1)|\bigr)=\\&=2\biggl(\frac{2\cdot 13}{9\,576}+\frac{2\cdot 15}{12\,376}+\frac{2}{2\,618}+\frac{1}{936}\biggr)=\frac{54\,097}{3\,879\,876}.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. □

4. Точные формулы для континуантов и явный вид некоторых областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$.

Выводу формул для величин $\nu(r;3)$, отвечающих $r \geqslant 8$, мы предпошлём ряд вспомогательных утверждений, необходимых для описания перечней наборов $\mathcal{A}_r^*$, $\mathcal{A}_r$. Всюду далее вместо $\mathbb{K}_r(k_1,\ldots,k_r)$ условимся писать $\mathbb{K}(k_1,\ldots,k_r)$. Кроме того, при работе с наборами, содержащими повторяющиеся компоненты, вместо последовательности символов вида $\underbrace{a,a,\ldots,a}_{n}$ будем писать a^n (при этом a может быть как числом, так и последовательностью чисел), например: $(1,2,2,2,2) = (1,2^4)$, $(2,1,4,1,4,3) = (2,(1,4)^2,3)$ и т.д.

Лемма 8. *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда, полагая*

$$A_n = \mathbb{K}\big((4,1)^n\big), \quad B_n = \mathbb{K}\big((4,1)^n,4\big), \quad C_n = \mathbb{K}\big(1,(4,1)^n\big), \quad D_n = \mathbb{K}\big(2^n\big),$$

будем иметь: $A_n = 2n+1$, $B_n = 4(n+1)$, $C_n = D_n = n+1$.

Доказательство. В силу формул (7), (10) имеем:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \mathbb{K}\big((4,1)^n,4,1\big) = \mathbb{K}\big((4,1)^n,4\big) - \mathbb{K}\big((4,1)^n\big) = B_n - A_n,\\ B_{n+1} &= \mathbb{K}\big((4,1)^{n+1},4\big) = \mathbb{K}\big((4,1)^n,4,1,4\big) = \mathbb{K}(4,1)\mathbb{K}\big((4,1)^n,4\big) - \mathbb{K}(4)\mathbb{K}\big((4,1)^n\big) = \\ &= 3B_n - 4A_n. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь (9), находим:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \mathbb{K}\big(1,(4,1)^n,4,1\big) = \mathbb{K}(1,4)\mathbb{K}\big(1,(4,1)^n\big) - \mathbb{K}(1)\mathbb{K}\big(1,(4,1)^{n-1},4\big) = 3C_n - A_n,\\ D_{n+1} &= 2\mathbb{K}(2^n) - \mathbb{K}(2^{n-1}) = 2D_n - D_{n-1}. \end{aligned}$$

Замечая, что $A_1 = 3$, $B_1 = 8$, $C_1 = D_1 = 2$, искомое утверждение без труда устанавливаем индукцией по n. □

Лемма 9. *Пусть a,b,c и d - произвольные числа, $m,n \geqslant 0$ - целые. Тогда справедливы следующие тождества:*

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a,2^n) = \mathbb{K}(2^n,a) = (a-1)n + a;\\ \mathbb{K}(a,2^n,b) = (a-1)(b-1)n + ab - 1;\\ \mathbb{K}(2^n,b,c) = (bc-c-1)n + bc - 1;\\ \mathbb{K}(a,2^n,b,c) = (a-1)(bc-c-1)n + abc - a - c; \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a,(4,1)^n) = (2a-1)n + a;\\ \mathbb{K}((4,1)^n,b) = 2(b-2)n + b;\\ \mathbb{K}(a,(4,1)^n,b) = (2a-1)(b-2)n + ab - 1;\\ \mathbb{K}((4,1)^n,b,c) = 2(bc-2c-1)n + bc - 1;\\ \mathbb{K}(a,(4,1)^n,b,c) = (2a-1)(bc-2c-1)n + abc - a - c; \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a,(1,4)^n) = 2(a-2)n + a;\\ \mathbb{K}((1,4)^n,b) = (2b-1)n + b;\\ \mathbb{K}(a,(1,4)^n,b) = (a-2)(2b-1)n + ab - 1; \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}((4,1)^n,3,2^m)=2(m+n+1)+1;\\ \mathbb{K}(a,(4,1)^n,3,2^m)=(2a-1)(m+n+1)+a;\\ \mathbb{K}((4,1)^n,3,2^m,c)=2(c-1)(m+n+1)+c+1;\\ \mathbb{K}(a,(4,1)^n,3,2^m,c)=(2a-1)(c-1)(m+n+1)+ac+a-1; \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}((1,4)^n,1,3,2^m)=m+n+2;\\ \mathbb{K}((1,4)^n,1,3,2^m,b)=(b-1)(m+n+1)+b;\\ \mathbb{K}(a,(1,4)^n,1,3)=(a-2)n+2a-3;\\ \mathbb{K}(a,(1,4)^n,1,3,2^m,b)=(a-2)(b-1)(m+n+1)+ab-b-1. \end{cases} \tag{41}$$

Доказательство. Все эти тождества доказываются с помощью равенств (6)-(11) и предыдущей леммы. Например, в силу формулы (9) и Леммы 8 имеем:

$$\mathbb{K}(a,2^n)=\mathbb{K}(2^n,a)=a\mathbb{K}(2^n)-\mathbb{K}(2^{n-1})=aD_n-D_{n-1}=(a-1)n+a,$$

откуда, пользуясь (7), находим:

$$\mathbb{K}(a,2^n,b)=b\mathbb{K}(a,2^n)-\mathbb{K}(a,2^{n-1})=b((a-1)n+a)-(a-1)(n-1)-a=(a-1)(b-1)n+ab-1.$$

Далее,

$$\mathbb{K}(2^n,b,c)=\mathbb{K}(b,c)\mathbb{K}(2^n)-\mathbb{K}(c)\mathbb{K}(2^{n-1})=(bc-1)(n+1)-cn=(bc-c-1)n+bc-1$$

и, наконец,

$$\mathbb{K}(a,2^n,b,c)=\mathbb{K}(b,c)\mathbb{K}(a,2^n)-\mathbb{K}(c)\mathbb{K}(a,2^{n-1})=(bc-1)((a-1)n+a)-c(a-1)(n-1)-ac=\\ =\ (a-1)(bc-c-1)n+abc-a-c,$$

чем и завершается доказательство формул группы (37). Оставшиеся формулы доказываются аналогично. □

При вычислении величин $\nu(r;3)$, $r\geqslant 8$, важную роль играют области $\mathcal{T}(\mathbf{k})$, отвечающие наборам $\mathbf{k}$ вида $(2,(4,1)^n)$, $(5,(1,4)^n)$ и $(1,2^n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Следующие три леммы дают явное описание этих областей.

Лемма 10. *Пусть $n\geqslant 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(2,(4,1)^n)$ задаётся неравенствами*

$$\frac{6n-2}{6n-1}<x\leqslant 1,\quad \frac{1}{3}(1+x)<y\leqslant\frac{1+4nx}{6n+1}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-2}{6n-1},\frac{4n-1}{6n-1}\right),\quad \left(1,\frac{4n+1}{6n+1}\right),\quad \left(1,\frac{2}{3}\right)\quad \textit{и площадью}\quad \frac{1}{6(6n-1)(6n+1)}.$$

Доказательство (индукция по n). Пусть $n=1$. Тогда искомая область $\mathcal{T}_3=\mathcal{T}(2,4,1)$ (нижний индекс здесь и далее равен числу компонент набора) задаётся неравенствами

$$\max\left(1-x,f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)<y\leqslant\min\left(1,g_1(x),g_2(x),g_3(x)\right), \tag{42}$$

где

$$f_1(x)=f_1(x;2)=\frac{1}{3}(1+x),\qquad g_1(x)=g_1(x;2)=\frac{1}{2}(1+x),$$
$$f_2(x)=f_2(x;2,4)=\frac{1}{9}(1+5x),\qquad g_2(x)=g_2(x;2,4)=\frac{1}{7}(1+4x),$$
$$f_3(x)=f_3(x;2,4,1)=\frac{1}{12}(1+7x),\qquad g_3(x)=g_3(x;2,4,1)=\frac{1}{5}(1+3x).$$

Поскольку $f_2(x), f_3(x) \leqslant f_1(x)$ и $g_2(x) \leqslant g_1(x), g_3(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, то неравенства (40) принимают вид:

$$\max\left\{1-x, \frac{1}{3}(1+x)\right\} < y \leqslant \frac{1}{7}(1+4x)$$

или, что то же,

$$\frac{4}{5} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \frac{1}{7}(1+4x).$$

Такая область, как несложно проверить, представляет собой треугольник с вершинами в точках $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\left(1, \frac{5}{7}\right)$, $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ и площадью $1/210 = 1/(6 \cdot 5 \cdot 7)$.

Пусть утверждение доказано для всех $n \leqslant m-1$. Тогда при переходе от области $\mathcal{T}_{2m-1} = \mathcal{T}(2, (4,1)^{m-1})$, задаваемой неравенствами

$$\frac{6m-8}{6m-7} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \frac{1+4(m-1)x}{6m-5}, \tag{43}$$

к области $\mathcal{T}_{2m+1} = \mathcal{T}(2, (4,1)^m)$ к (43) добавятся условия

$$\begin{cases} f_{2m}(x) = f_{2m}(x; 2, (4,1)^{m-1}, 4) < y \leqslant g_{2m}(x) = g_{2m}(x; 2, (4,1)^{m-1}, 4), \\ f_{2m+1}(x) = f_{2m+1}(x; 2, (4,1)^m) < y \leqslant g_{2m+1}(x) = g_{2m+1}(x; 2, (4,1)^m). \end{cases} \tag{44}$$

С помощью Лемм 8, 9 находим:

$$\begin{aligned} f_{2m}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4,1)^{m-1}, 5)}{\mathbb{K}(2, (4,1)^{m-1}, 5)} = \frac{1+(6m-1)x}{9m}, \\ g_{2m}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4,1)^{m-1}, 4)}{\mathbb{K}(2, (4,1)^{m-1}, 4)} = \frac{1+4mx}{6m+1}, \\ f_{2m+1}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4,1)^{m-1}, 4, 2)}{\mathbb{K}(2, (4,1)^{m-1}, 4, 2)} = \frac{1+(6m+1)x}{9m+3}, \\ g_{2m+1}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4,1)^m)}{\mathbb{K}(2, (4,1)^m)} = \frac{1+(2m+1)x}{3m+2}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $f_{2m+1}(x) \leqslant f_{2m}(x)$ и $g_{2m}(x) < g_{2m+1}(x)$ при всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому условия (44) принимают вид:

$$\frac{1+(6m-1)x}{9m} < y \leqslant \frac{1+4mx}{6m+1}, \tag{45}$$

так что область $\mathcal{T}_{2m+1}$ описывается системой неравенств (43), (45). Так как

$$\frac{1+(6m-1)x}{9m} \leqslant \frac{1}{3}(1+x), \quad \frac{1+4mx}{6m+1} \leqslant \frac{1+4(m-1)x}{6m-5}$$

при всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то неравенства (43), (45) заменяются системой

$$\frac{6m-2}{6m-1} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \frac{1+4mx}{6m+1}.$$

Следовательно, $\mathcal{T}_{2m+1}$ - треугольник, вершины которого - точки пересечения прямых

$$y = \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad y = \frac{1+4mx}{6m+1}, \quad y = \frac{1+4mx}{6m+1} \quad \text{и} \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad x = 1,$$

т.е. точки

$$\left(\frac{6m-2}{6m-1}, \frac{4m-1}{6m-1}\right), \quad \left(1, \frac{4m+1}{6m+1}\right), \quad \left(1, \frac{2}{3}\right).$$

Далее, если $\mathcal{M}$ - плоский k-угольник, вершины которого имеют координаты (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, то его площадь $|\mathcal{M}|$ вычисляется по формуле

$$|\mathcal{M}| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{k} \Delta_i\right|, \quad \text{где} \quad \Delta_i = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{pmatrix} \tag{46}$$

(при условии, что $x_{k+1} = x_1$, $y_{k+1} = y_1$).

Применяя (46) к треугольнику $\mathcal{T}_{2m+1}$, находим:

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{6m-2}{6m-1} & \dfrac{4m-1}{6m-1} \\ 1 & \dfrac{4m+1}{6m+1} \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{4m+1}{6m+1} \\ 1 & \dfrac{2}{3} \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{6m-2}{6m-1} & \dfrac{4m-1}{6m-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{6(6m-1)(6m+1)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть $n \geqslant 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(5, (1,4)^n)$ задаётся неравенствами*

$$\frac{6n-1}{6n+1} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{1}{3}\right) \quad \textit{и площадью} \quad \frac{1}{3(6n+1)(6n+5)}.$$

Лемма 12. *Пусть $n \geqslant 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(1, 2^n)$ задаётся неравенствами*

$$0 < x \leqslant \frac{1}{2n+3}, \quad 1-x < y \leqslant 1, \quad \frac{1}{2n+3} < x \leqslant \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{1}{2}(1+(2n+1)x) < y \leqslant 1$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$(0,1), \quad \left(\frac{1}{2n+1}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2n+3}, \frac{2n+2}{2n+3}\right) \quad \textit{и площадью} \quad \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Доказательства Лемм 11 и 12 проводятся аналогично доказательству Леммы 10 и опираются на формулы Лемм 8, 9. □

Будем говорить, что невырожденный набор $\mathbf{k}_r = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathcal{A}_r^*$ *порождает* набор $\mathbf{k}_{r+1} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}) = (k_1, \ldots, k_r, k_{r+1})$, если области $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{k}_{r+1})$ непусты. Набор $\mathbf{k}_{r+1}$ будем называть в этом случае *потомком* набора $\mathbf{k}_r$. Например, набор (2) порождает наборы $(2,1)$, $(2,3)$ и $(2,4)$, набор $(5,1)$ - наборы $(5,1,3)$ и $(5,1,4)$ и т. д. Вырожденный набор $\mathbf{k}_r \in \mathcal{A}_r^\circ$ ничего не порождает (не имеет потомков).

Будем говорить также, что набор $\mathbf{k}_{r+\ell} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+\ell})$ *порождается* набором $\mathbf{k}_r \in \mathcal{A}_r^*$ (является его потомком), если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, набор $\mathbf{k}_{r+i} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}, \ldots, k_{r+i})$ невырожден и порождает набор $\mathbf{k}_{r+i+1} = (\mathbf{k}_r, k_{r+i}, \ldots, k_{r+i+1})$. Так, в цепочке (1), $(1,3)$, $(1,3,1)$, $(1,3,1,6)$, $(1,3,1,6,1)$ каждый следующий набор является потомком предыдущего, а все они, начиная со второго, являются потомками набора (1).

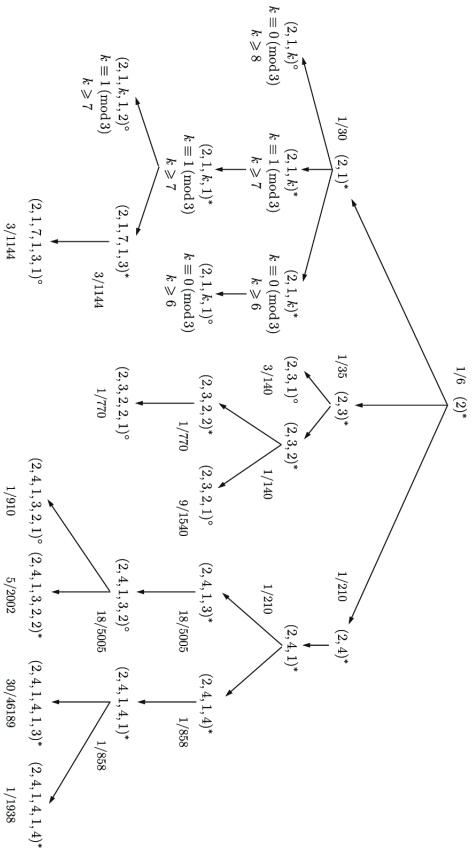


Рис. 3. Набор (2) и его «потомки» до пятого «поколения». Дроби выражают площади соответствующих многоугольников.

Потомков заданного набора естественно изображать в виде ориентированного дерева. Вырожденные наборы, как не имеющие потомков, являются *листьями* (*концевыми узлами*) такого дерева. На рис. 3 показаны все потомки набора (2) в первых пяти «поколениях». Для наглядности в дереве на рис. 3 (как и во всех деревьях, возникающих далее) вырожденные и невырожденные наборы помечены знаками «$\circ$» и «$*$» соответственно.

Оказывается, что любой набор $\mathbf{k}_r$, входящий в формулу следствия Леммы 7 для вычисления $\nu(r;3)$, $r \geqslant 8$, является потомком одного из трёх наборов: $(2,4)$, $(5,1)$ и $(1,2)$. Деревья, образованные их потомками, условимся обозначать далее через $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Наборы, участвующие в подсчёте $\nu(r;3)$, отвечают вершинам со знаком «$\circ$», находящимся на r-м «этаже» каждого из этих деревьев. Следующие три леммы посвящены описанию структуры деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$.

Лемма 13. *Дерево $\mathbb{A}$ имеет вид, изображённый на рис. 4 (слева). Там же (справа) приведена структура поддерева $\mathbb{A}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этом справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{A}_n$:*

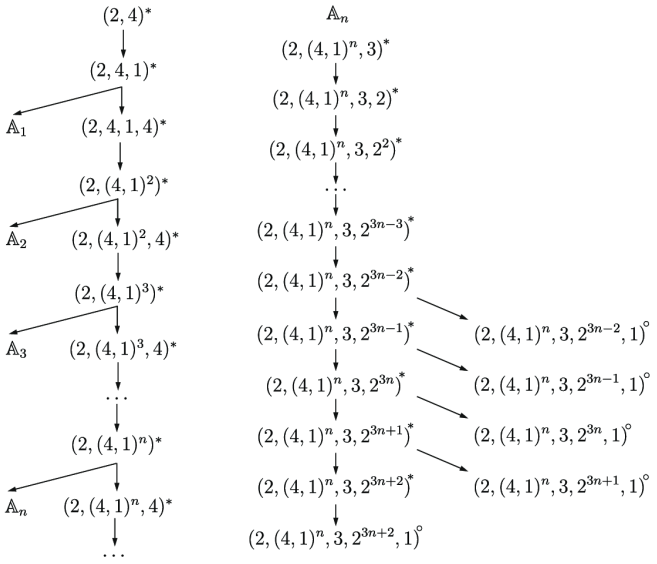


Рис. 4. Схематический вид дерева $\mathbb{A}$ (слева) и его поддерева $\mathbb{A}_n$ (справа).

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+1}| = |\mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n-2},1)| = \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+2}| = |\mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n-1},1)| = \frac{3(4n+1)}{2(3n+1)(6n+1)(12n+1)(12n+5)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| = |\mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n},1)| = \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| = |\mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n+1},1)| = \frac{3(4n+3)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+7)(12n+11)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+5}| = |\mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n+2},1)| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.$$

Доказательство. Для начала проверим вырожденность (невырожденность) наборов, фигурирующих в метках вершин поддерева $\mathbb{A}_n$. Воспользовавшись формулами (38), (40), получим:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{K}(2,(4,1)^{n-1},4) = 6n+1 \not\equiv 0 \pmod 3,\\
&\mathbb{K}(2,(4,1)^n) = 3n+2 \not\equiv 0 \pmod 3,\\
&\mathbb{K}(2,(4,1)^n,3,2^m) = 3(m+n+1)+2 \not\equiv 0 \pmod 3,\\
&\mathbb{K}(2,(4,1)^n,3,2^m,1) = 3 \equiv 0 \pmod 3.
\end{aligned}$$

В силу Леммы 10, при переходе от области $\mathcal{T}^*_{2n+1} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n)$ к области $\mathcal{T}^*_{2n+2} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3)$ к системе неравенств

$$\frac{6n-2}{6n-1} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leqslant g_{2n}(x) = g_{2n}(x;2,(4,1)^{n-1},4) = \frac{1+4nx}{6n+1}$$

добавятся дополнительные условия

$$f_{2n+2}(x) = f_{2n+2}(x; 2, (4,1)^n, 3) = \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant$$
$$\leqslant g_{2n+2}(x) = g_{2n+2}(x; 2, (4,1)^n, 3) = \frac{1+(2n+3)x}{3n+5}. \quad (47)$$

Несложно проверить, что

$$g_{2n}(x) \leqslant g_{2n+2}(x) \quad (48)$$

при всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в случае $n \geqslant 2$ и при $1/3 \leqslant x \leqslant 1$ в случае $n = 1$. Тем более неравенство (48) имеет место при всех x, $(6n-2)/(6n-1) \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, треугольник $\mathcal{T}^*_{2n+1}$ целиком лежит под отрезком прямой $y = g_{2n+2}(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и потому верхняя граница для y в (47) не меняет области $\mathcal{T}^*_{2n+1}$.

Далее, прямая $y = f_{2n+2}(x)$ пересекает вертикаль $x = 1$ в точке $\left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right)$, прямую $y = (1+x)/3$ в точке $\left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right)$. Из неравенств

$$\frac{6n-2}{6n-1} < \frac{6n+4}{6n+5} < 1, \qquad \frac{2}{3} < \frac{4n+5}{6n+7} < \frac{4n+1}{6n+1}$$

следует, что прямая $y = f_{2n+2}(x)$ делит треугольник $\mathcal{T}^*_{2n+1}$ на две части (рис. 5). Та из них, что лежит выше этой прямой, есть область $\mathcal{T}^*_{2n+2}$. Она задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n-2}{6n-1} < x \leqslant \dfrac{6n+4}{6n+5}, \quad \dfrac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+4nx}{6n+1}, \\ \dfrac{6n+4}{6n+5} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant \dfrac{1+4nx}{6n+1} \end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-2}{6n-1}, \frac{4n-1}{6n-1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{2n+2}| = \frac{6(2n+1)}{(6n-1)(6n+1)(6n+5)(6n+7)}.$$

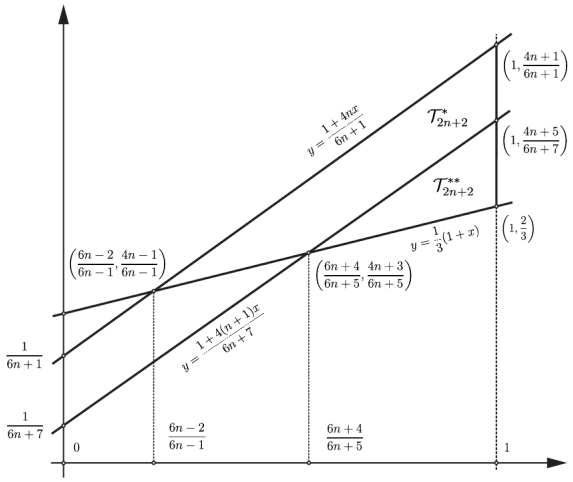


Рис. 5. Области $\mathcal{T}^*_{2n+2}$ и $\mathcal{T}^{**}_{2n+2}$.

Аналогично, при переходе $\mathcal{T}^{*}_{2n+1} \to \mathcal{T}^{**}_{2n+2} = \mathcal{T}_{2n+2}(2,(4,1)^n,4)$ (знак «**» употреблён здесь вместо знака «*» исключительно по той причине, что обозначение $\mathcal{T}^{*}_{2n+2}$ уже было использовано выше для соседней области $\mathcal{T}_{2n+2}(2,(4,1)^n,3)$) возникают дополнительные условия

$$f_{2n+2}(x;2,(4,1)^n,4) = \frac{1+(6n+5)x}{9n+9} < y \leqslant g_{2n+2}(x;2,(4,1)^n,4) = \frac{1+(4n+4)x}{6n+7}. \tag{49}$$

Как и выше, можно проверить, что нижняя граница для y в (49) не меняет области $\mathcal{T}^{*}_{2n+1}$, а верхняя граница совпадает с нижней границей y в (47). Следовательно, область $\mathcal{T}^{**}_{2n+2}$ совпадает с той частью $\mathcal{T}^{*}_{2n+1}$, что лежит под прямой $y = g_{2n+2}(x)$, и задаётся неравенствами

$$\frac{6n+4}{6n+5} < y \leqslant 1, \qquad \frac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \frac{1+(4n+4)x}{6n+7}.$$

Она является треугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{**}_{2n+2}| = \frac{1}{6(6n+5)(6n+7)}.$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что все области $\mathcal{T}(2,(4,1)^n,k)$ при $k \neq 3,4$ пусты. Это обстоятельство выражается и равенством площадей:

$$|\mathcal{T}^{*}_{2n+1}| = \frac{1}{6(6n-1)(6n+1)} =$$

$$= \frac{6(2n+1)}{(6n-1)(6n+1)(6n+5)(6n+7)} + \frac{1}{6(6n+5)(6n+7)} = |\mathcal{T}^{*}_{2n+2}| + |\mathcal{T}^{**}_{2n+2}|.$$

Возникающее при переходе $\mathcal{T}^{**}_{2n+2} \to \mathcal{T}^{*}_{2n+3} = \mathcal{T}(2,(4,1)^{n+1})$ дополнительное условие

$$f_{2n+3}(x;2,(4,1)^{n+1}) = \frac{1+(6n+7)x}{9n+12} < y \leqslant g_{2n+3}(x;2,(4,1)^{n+1}) = \frac{1+(2n+3)x}{3n+5}.$$

ввиду легко проверяемых неравенств

$$\frac{1+(6n+7)x}{9n+12} \leqslant \frac{1}{3}(1+x), \quad \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \leqslant \frac{1+(2n+3)x}{3n+5}$$

(справедливых на всём отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$) не меняет области $\mathcal{T}^{**}_{2n+2}$.

Покажем теперь, что и каждая из областей $\mathcal{T}^{*}_{2n+2+m} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^m)$ при $0 \leqslant m \leqslant 3n-2$ совпадает с четырёхугольником $\mathcal{T}^{*}_{2n+2}$. В случае $m = 0$ это очевидно. Пусть это утверждение проверено для всех m, $0 \leqslant m \leqslant \ell - 1$ (где $\ell \leqslant 3n-2$), и докажем его при $m = \ell$.

При переходе $\mathcal{T}^{*}_{2n+2+(\ell-1)} \to \mathcal{T}^{*}_{2n+2+\ell}$ (или, что то же в силу предположения индукции, при переходе $\mathcal{T}^{*}_{2n+2} \to \mathcal{T}^{*}_{2n+2+\ell}$) возникает дополнительное условие

$$f(x) = f(x;2,(4,1)^n,3,2^\ell) < y \leqslant g(x) = g(x;2,(4,1)^n,3,2^\ell). \tag{50}$$

С помощью Леммы 9 находим явный вид обеих частей неравенства (50):

$$f(x) = \frac{1+x\cdot\mathbb{K}((4,1)^n,3,2^{\ell-1},3)}{\mathbb{K}(2,(4,1)^n,3,2^{\ell-1},3)} = \frac{1+4(n+\ell+1)x}{6(n+\ell+1)+1},$$

$$g(x) = \frac{1+x\cdot\mathbb{K}((4,1)^n,3,2^{\ell})}{\mathbb{K}(2,(4,1)^n,3,2^{\ell})} = \frac{1+(2(n+\ell)+3)x}{3(n+\ell)+5}.$$

Заметим теперь, что неравенство $f(x) \leqslant (1+x)/3$ равносильно неравенству

$$x \leqslant \frac{6n+4+6\ell}{6n+5+6\ell},$$

которому при любом $\ell \geqslant 0$ удовлетворяют все $x \leqslant (6n+4)/(6n+5)$. Аналогично, неравенство $f(x) \leqslant (1+(4n+4)x)/(6n+7)$ равносильно неравенству $2\ell x \leqslant 6\ell$, которое справедливо при всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и любом $\ell \geqslant 0$. Следовательно, условие $y > f(x)$ в (50) не меняет области $\mathcal{T}^*_{2n+2}$ при любом $\ell \geqslant 0$.

Далее, неравенство $g(x) > (1+4nx)/(6n+1)$ приводится к виду $3(\ell-n)+4 \leqslant (2\ell+3)x$. Если $0 \leqslant \ell \leqslant n-2$, то $3(\ell-n)+4 \leqslant -2 < 0 \leqslant (2\ell+3)x$ при всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если же $\ell \geqslant n-1$, то оно равносильно неравенству

$$x \geqslant \frac{3(\ell-n)+4}{2\ell+3}.$$

Но при $\ell \leqslant 3n-2$ этому неравенству удовлетворяет всякое x с условием

$$\frac{6n-2}{6n-1} \leqslant x \leqslant 1,$$

что следует из соотношений

$$\frac{6n-2}{6n-1} - \frac{3(\ell-n)+4}{2\ell+3} = \frac{(6n+1)(3n-2-\ell)}{(6n-1)(2\ell+3)} \geqslant 0.$$

Итак, условие $y \leqslant g(x)$ в (50) при $0 \leqslant \ell \leqslant 3n-2$ действительно не меняет области $\mathcal{T}^*_{2n+2}$ и мы имеем следующую цепочку переходов:

$$\mathcal{T}^*_{2n+2} \to \mathcal{T}^*_{2n+3} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2) \to \mathcal{T}^*_{2n+4} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^2) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathcal{T}^*_{5n} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n-2}).$$

При переходе $\mathcal{T}^*_{5n} \to \mathcal{T}^\circ_{5n+1} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n-2},1)$ возникают дополнительные условия

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n-2},1) = \frac{1+(8n+1)x}{12n+2} < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n-2},1) = \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}^*_{5n} \to \mathcal{T}^*_{5n+1} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n-1})$ - условия

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n-1}) = \frac{1+16nx}{24n+1} < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n-1}) = \frac{1+(8n+1)x}{12n+2}.$$

Несложно проверить, что условия

$$y \leqslant \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad y > \frac{1+16nx}{24n+1}$$

не меняют области $\mathcal{T}^*_{5n}$. Далее, прямая $y = (1+(8n+1)x)/(12n+2)$ проходит через вершину $\left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right)$ четырёхугольника $\mathcal{T}^*_{5n}$ и пересекается с прямой $y = (1+x)/3$ в точке $\left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right)$. Из неравенств

$$\frac{6n-2}{6n-1} < \frac{12n-1}{12n+1} < \frac{6n+4}{6n+5}$$

заключаем, что прямая $y = (1+(8n+1)x)/(12n+2)$ делит $\mathcal{T}^*_{5n}$ на две части - $\mathcal{T}^\circ_{5n+1}$ (лежащую выше этой прямой) и $\mathcal{T}^*_{5n+1}$ (лежащую ниже этой прямой; см. рис. 6). Следовательно, $\mathcal{T}^\circ_{5n+1}$ - треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-2}{6n-1}, \frac{4n-1}{6n-1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5n+1}| = \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)}.$$

Соответственно, $\mathcal{T}^{*}_{5n+1}$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n-1}{12n+1} < x \leqslant \dfrac{6n+4}{6n+5}, \quad \dfrac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(8n+1)x}{12n+2}, \\ \dfrac{6n+4}{6n+5} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant \dfrac{1+(8n+1)x}{12n+2} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{*}_{5n+1}| = \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)}.$$

При этом имеет место равенство площадей:

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5n+1}| + |\mathcal{T}^{*}_{5n+1}| = \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)} + \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)} =$$

$$= \frac{6(2n+1)}{(6n-1)(6n+1)(6n+5)(6n+7)} = |\mathcal{T}^{*}_{5n}| = |\mathcal{T}^{*}_{2n+2}|.$$

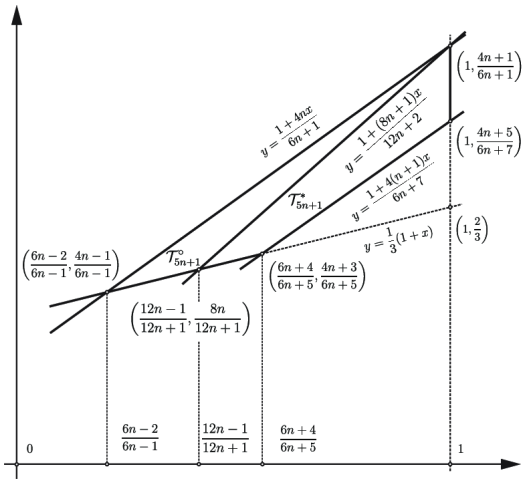


Рис. 6. Области $\mathcal{T}^{*}_{5n+1}$ и $\mathcal{T}^{\circ}_{5n+1}$.

При переходе $\mathcal{T}^{*}_{5n+1} \to \mathcal{T}^{\circ}_{5n+2} = \mathcal{T}(2, (4,1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1) < y \leqslant g(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1+(8n+3)x}{12n+5} < y \leqslant \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}^{*}_{5n+1} \to \mathcal{T}^{*}_{5n+2} = \mathcal{T}(2, (4,1)^n, 3, 2^{3n})$ - условие

$$f(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n}) < y \leqslant g(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n})$$

или, что то же,

$$\frac{1+(16n+4)x}{24n+7} < y \leqslant \frac{1+(8n+3)x}{12n+5}.$$

Несложно проверить, что

$$\frac{1+(8n+1)x}{12n+2} < \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

что

$$\frac{1+(16n+4)x}{24n+7} \leqslant \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{при} \quad x \leqslant \frac{24n+4}{24n+5}$$

(а значит, и при $(12n-1)/(12n+1) \leqslant x \leqslant (6n+4)/(6n+5)$) и что

$$\frac{1+(16n+4)x}{24n+7} \leqslant \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

(а значит, и при $(6n+4)/(6n+5) \leqslant x \leqslant 1$). Следовательно, условия

$$y \leqslant \frac{1}{3}(1+2x), \quad y > \frac{1+(16n+4)x}{24n+7}$$

не меняют вида области $\mathcal{T}^*_{5n+1}$. Далее, прямая $y = (1+(8n+3)x)/(12n+5)$ пересекает прямые $y = (1+x)/3$ и $x = 1$ в точках

$$\left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right) \quad \text{и} \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right)$$

соответственно, и потому делит $\mathcal{T}^*_{5n+1}$ на два четырёхугольника: $\mathcal{T}^\circ_{5n+2}$ и $\mathcal{T}^*_{5n+2}$ (рис. 7). Первый имеет вершинами точки

$$\left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right), \quad \left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right);$$

его площадь равна

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+2}| = \frac{3(4n+1)}{2(3n+1)(6n+1)(12n+1)(12n+5)}.$$

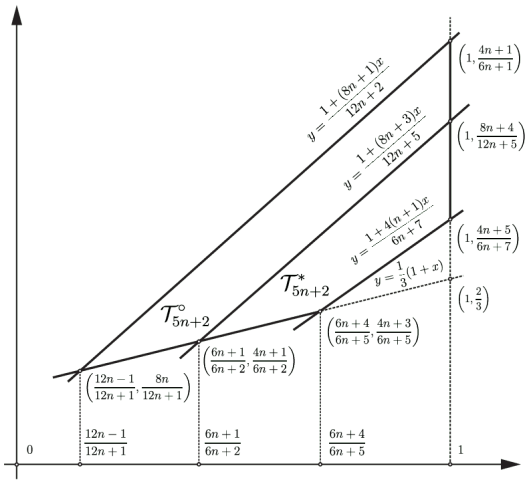


Рис. 7. Области $\mathcal{T}^*_{5n+2}$ и $\mathcal{T}^\circ_{5n+2}$.

Второй четырёхугольник – $\mathcal{T}^*_{5n+2}$ – задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n+1}{6n+2} < x \leqslant \dfrac{6n+4}{6n+5}, \quad \dfrac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(8n+3)x}{12n+5}, \\ \dfrac{6n+4}{6n+5} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant \dfrac{1+(8n+3)x}{12n+3}, \end{cases}$$

имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right), \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right),$$

а площадь его равна

$$|\mathcal{T}^*_{5n+2}| = \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)}.$$

При этом

$$|\mathcal{T}^*_{5n+2}| + |\mathcal{T}^\circ_{5n+2}| =$$

$$= \frac{3(4n+1)}{2(3n+1)(6n+1)(12n+1)(12n+5)} + \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)} =$$

$$= \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)} = |\mathcal{T}^*_{5n+1}|.$$

Далее, при переходе $\mathcal{T}^*_{5n+2} \to \mathcal{T}^\circ_{5n+3} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n},1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n},1) < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n},1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1+(8n+5)x}{12n+8} < y \leqslant \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}^*_{5n+2} \to \mathcal{T}^*_{5n+3} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n+1})$ - условие

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+1}) < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+1})$$

или, что то же, условие

$$\frac{1+(16n+8)x}{24n+13} < y \leqslant \frac{1+(8n+5)x}{12n+8}.$$

Несложно проверить, что

$$\frac{1+(8n+3)x}{12n+5} \leqslant \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

так что условие $y \leqslant (1+2x)/3$ не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+2}$. Легко убедиться, что

$$\frac{1+(16n+8)x}{24n+13} \leqslant \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

так что и условие $y > (1+(16n+8)x)/(24n+13)$ не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+2}$. Наконец, прямая $y = (1+(8n+5)x)/(12n+8)$ пересекает прямые $x = 1$ и $y = (1+x)/3$ в точках

$$\left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right).$$

Сравнивая их координаты с координатами вершин четырёхугольника $\mathcal{T}^*_{5n+2}$, находим:

$$\frac{6n+1}{6n+2} < \frac{12n+5}{12n+7} < \frac{6n+4}{6n+5}, \qquad \frac{4n+5}{6n+7} < \frac{4n+3}{6n+7} < \frac{8n+4}{12n+5}.$$

Следовательно, прямая $y = (1+(8n+5)x)/(12n+8)$ делит $\mathcal{T}^*_{5n+2}$ на два четырёхугольника: $|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}|$ и $|\mathcal{T}^*_{5n+3}|$ (рис. 8). Первый имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right), \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right)$$

и площадь, равную

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| = \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)}.$$

Второй имеет вершинами точки

$$\left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right), \quad \left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right),$$

площадь, равную

$$|\mathcal{T}^*_{5n+3}| = \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)},$$

и задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n+5}{12n+7} < x \leqslant \dfrac{6n+4}{6n+5}, \quad \dfrac{1}{3}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(8n+5)x}{12n+8}, \\ \dfrac{6n+4}{6n+5} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant \dfrac{1+(8n+5)x}{12n+8}. \end{cases}$$

При этом

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| + |\mathcal{T}^*_{5n+3}| =$$

$$= \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)} + \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)} =$$

$$= \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)} = |\mathcal{T}^*_{5n+2}|.$$

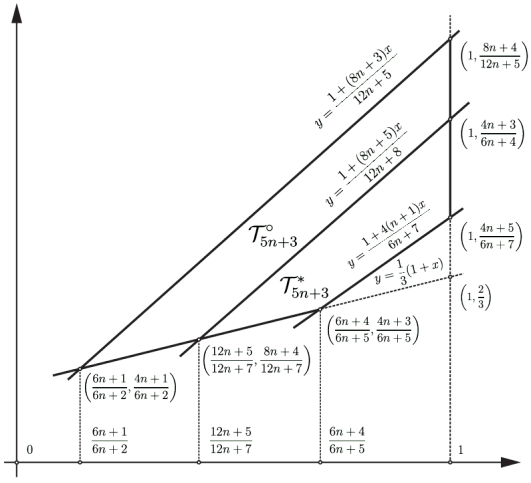


Рис. 8. Области $\mathcal{T}^*_{5n+3}$ и $\mathcal{T}^\circ_{5n+3}$.

При переходе $\mathcal{T}^*_{5n+3} \to \mathcal{T}^\circ_{5n+4} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n+1},1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+1},1) < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+1},1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1+(8n+7)x}{12n+11} < y \leqslant \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}^*_{5n+3} \to \mathcal{T}^*_{5n+4} = \mathcal{T}(2,(4,1)^n,3,2^{3n+2})$ - условие

$$f(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+2}) < y \leqslant g(x;2,(4,1)^n,3,2^{3n+2}),$$

т.е. условие

$$\frac{1+(16n+12)x}{24n+19} < y \leqslant \frac{1+(8n+7)x}{12n+11}.$$

Замечая, что

$$\frac{1+(16n+12)x}{24n+19} \leqslant \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

убеждаемся, что условие $y > (1+(16n+12)x)/(24n+19)$ не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+3}$. Далее,

$$\frac{1+(8n+5)x}{12n+8} \leqslant \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

так что условие $y \leqslant (1+2x)/3$ также не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+3}$. Наконец, прямая $y = (1+(8n+7)x)/(12n+11)$ пересекает прямые $x=1$ и $y=(1+x)/3$ в точках

$$\left(1, \frac{8n+8}{12n+11}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right),$$

из которых последняя является вершиной четырёхугольника $\mathcal{T}^*_{5n+3}$. В силу неравенств для ординат точек, лежащих на прямой $x=1$, а именно

$$\frac{4n+5}{6n+7} < \frac{8n+8}{12n+11} < \frac{4n+3}{6n+4},$$

заключаем, что прямая $y = (1+(8n+7)x)/(12n+11)$ делит $\mathcal{T}^*_{5n+3}$ на две части: $\mathcal{T}^\circ_{5n+4}$ и $\mathcal{T}^*_{5n+4}$ (рис. 9). Первая из них - четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right), \quad \left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{8n+8}{12n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| = \frac{3(4n+3)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+7)(12n+11)}.$$

Вторая - треугольник, заданный неравенствами

$$\frac{6n+4}{6n+5} < x \leqslant 1, \quad \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leqslant \frac{1+(8n+7)x}{12n+11}.$$

Он имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{8n+8}{12n+11}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right)$$

и площадь, равную

$$|\mathcal{T}^*_{5n+4}| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.$$

При этом имеет место равенство площадей:

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| + |\mathcal{T}^*_{5n+4}| =$$

$$= \frac{3(4n+3)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+7)(12n+11)} + \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)} =$$

$$= \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)} = |\mathcal{T}^*_{5n+3}|.$$

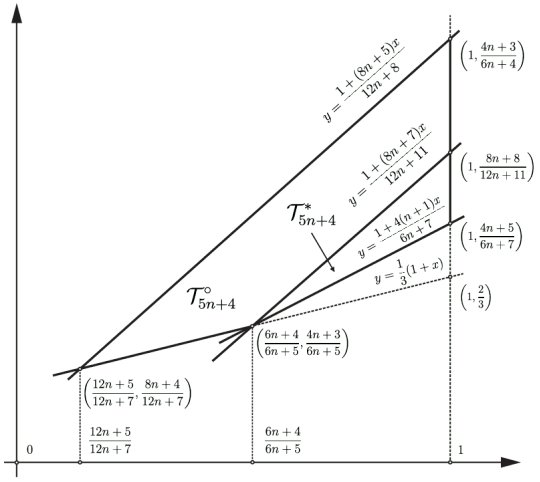


Рис. 9. Области $\mathcal{T}^*_{5n+4}$ и $\mathcal{T}^\circ_{5n+4}$.

Наконец, область $\mathcal{T}^\circ_{5n+5} = \mathcal{T}(2, (4,1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1)$ совпадает с областью $\mathcal{T}^*_{5n+4}$. Действительно, при переходе $\mathcal{T}^*_{5n+4} \to \mathcal{T}^\circ_{5n+5}$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1) < y \leqslant g(x; 2, (4,1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 принимает вид

$$\frac{1+(8n+9)x}{12n+14} < y \leqslant \frac{1}{3}(1+2x).$$

Проверка показывает, что

$$\frac{1+(8n+7)x}{12n+11} \leqslant \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

так что условие $y \leqslant (1+2x)/3$ не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+4}$. Аналогично,

$$\frac{1+(8n+9)x}{12n+14} \leqslant \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Значит, и условие $y > (1+(8n+9)x)/(12n+14)$ не меняет области $\mathcal{T}^*_{5n+4}$. Итак,

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+5}| = |\mathcal{T}^*_{5n+4}| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.$$

Лемма 13 доказана. □

Лемма 14. *Дерево $\mathbb{B}$ имеет вид, изображённый на рис. 10 (слева). Там же (справа) изображено поддерево $\mathbb{B}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этом справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{B}_n$:*

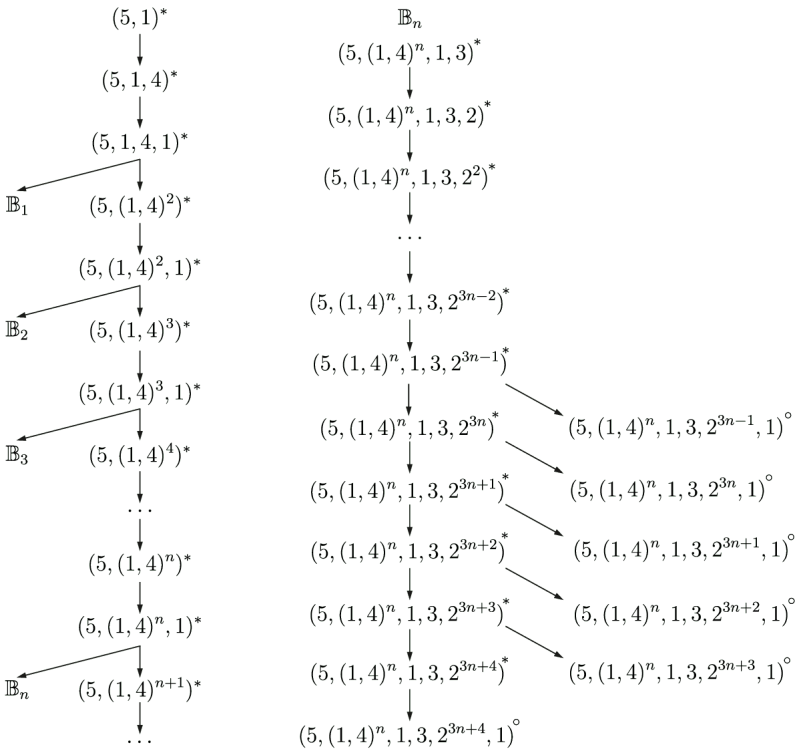


Рис. 10. Схематический вид дерева $\mathbb{B}$ (слева) и его поддерева $\mathbb{B}_n$ (справа).

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n-1},1)| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+1)(12n+5)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n},1)| = \frac{9n+5}{6(2n+1)(3n+2)(6n+5)(12n+5)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+5}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n+1},1)| = \frac{3(8n+7)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+11)(12n+13)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+6}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n+2},1)| = \frac{3(8n+9)}{2(3n+4)(6n+7)(12n+11)(12n+13)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+7}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n+3},1)| = \frac{9n+13}{6(2n+3)(3n+4)(6n+7)(12n+19)};$$

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+8}| = |\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n+4},1)| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Доказательство Леммы 14 подобно доказательству предыдущего утверждения и опирается на формулы (40) и (42) Леммы 9. По этой причине для каждой из вершин поддерева $\mathbb{B}_n$ мы приведём лишь системы неравенств, задающих соответствующие многоугольные области, координаты вершин последних и формулы для их площадей. Пусть $\mathcal{T}(5,(1,4)^n) = \mathcal{T}^*_{2n+1}$.

Переход $\mathcal{T}^*_{2n+1} \to \mathcal{T}^*_{2n+2} = \mathcal{T}(5,(1,4)^n,1)$ не меняет исходной области, так что $\mathcal{T}^*_{2n+2}$ есть треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{2n+2}| = \frac{1}{3(6n+1)(6n+5)},$$

заданный системой неравенств

$$\frac{6n-1}{6n+1} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}.$$

Область $\mathcal{T}^*_{2n+3} = \mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n-1}{6n+1} < x \leqslant \dfrac{6n+5}{6n+7}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5}, \\ \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{2n+3}| = \frac{24(n+1)}{(6n+1)(6n+5)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}^{**}_{2n+3} = \mathcal{T}(5,(1,4)^{n+1})$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \frac{1+(2n+3)x}{6n+11},$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{**}_{2n+3}| = \frac{1}{3(6n+7)(6n+11)}.$$

При этом $|\mathcal{T}^*_{2n+3}| + |\mathcal{T}^{**}_{2n+3}| = |\mathcal{T}^*_{2n+2}|$.

Каждая из областей $\mathcal{T}^*_{2n+3+m} = \mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^m)$, $0 \leqslant m \leqslant 3n-1$, совпадает с областью $\mathcal{T}^*_{2n+3}$.

Область $\mathcal{T}^*_{5n+3} = \mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n+1}{12n+5} < x \leqslant \dfrac{6n+5}{6n+7}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant \dfrac{6n+2}{6n+3}, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \dfrac{6n+2}{6n+3} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и представляет собой пятиугольник с вершинами[3]

$$\left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right),$$

$$\left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

[3]Отметим, что области $\mathcal{T}(5,(1,4)^n,1,3,2^{3n})$, наряду с областями $\mathcal{T}(2^{3n},3,1,(4,1)^n,5)$, $n = 1,2,3,\ldots$, отвечающие наборам, получающимся друг из друга симметричным отражением, – единственные из обнаруженных пятиугольников среди непустых областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$: все прочие являются треугольниками или четырёхугольниками. Есть ли среди областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ многоугольники с шестью и более вершинами - неизвестно.

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{5n+3}| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+5)(12n+5)} + \frac{42n+43}{(6n+5)(6n+7)(6n+11)(12n+5)}.$$

Область $\mathcal{T}^\circ_{5n+3} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n-1}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n-1}{6n+1} < x \leqslant \dfrac{12n+1}{12n+5}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5}, \\ \dfrac{12n+1}{12n+5} < x \leqslant \dfrac{6n+2}{6n+3}, \quad \dfrac{1+(4n+2)x}{12n+7} < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+1)(12n+5)}.$$

При этом $|\mathcal{T}^*_{5n+3}| + |\mathcal{T}^\circ_{5n+3}| = |\mathcal{T}^*_{5n+2}| = |\mathcal{T}^*_{2n+3}|$.

Область $\mathcal{T}^*_{5n+4} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+1})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{3n+1}{3n+2} < x \leqslant \dfrac{6n+5}{6n+7}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{5n+4}| = \frac{18n+19}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}^\circ_{5n+4} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n+1}{12n+5} < x \leqslant \dfrac{3n+1}{3n+2}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \dfrac{3n+1}{3n+2} < x \leqslant \dfrac{6n+2}{6n+3}, \quad \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \dfrac{6n+2}{6n+3} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10} < y \leqslant \dfrac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| = \frac{9n+5}{6(2n+1)(3n+2)(6n+5)(12n+5)}.$$

При этом $|\mathcal{T}^*_{5n+4}| + |\mathcal{T}^\circ_{5n+4}| = |\mathcal{T}^*_{5n+3}|$

Область $\mathcal{T}^*_{5n+5} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+2})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n+7}{12n+11} < x \leqslant \dfrac{6n+5}{6n+7}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+4)x}{12n+13}, \\ \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+4)x}{12n+13} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{5n+5}| = \frac{48n+55}{(6n+7)(6n+11)(12n+11)(12n+13)}.$$

Область $\mathcal{T}^\circ_{5n+5} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+1}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{3n+1}{3n+2} < x \leqslant \dfrac{12n+7}{12n+11}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \dfrac{12n+7}{12n+11} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+4)x}{12n+13} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^\circ_{5n+5}| = \frac{3(8n+7)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+11)(12n+13)}.$$

При этом $|\mathcal{T}^*_{5n+5}| + |\mathcal{T}^\circ_{5n+5}| = |\mathcal{T}^*_{5n+4}|$.

Область $\mathcal{T}^*_{5n+6} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+3})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+5)x}{12n+16} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^*_{5n+6}| = \frac{1}{2(3n+4)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}^\circ_{5n+6} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+2}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{12n+7}{12n+11} < x \leqslant \dfrac{6n+5}{6n+7}, \quad \dfrac{1}{6}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+5)x}{12n+6} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5n+6}| = \frac{3(8n+9)}{2(3n+4)(6n+7)(12n+11)(12n+13)}.$$

При этом $|\mathcal{T}^{*}_{5n+6}| + |\mathcal{T}^{\circ}_{5n+6}| = |\mathcal{T}^{*}_{5n+5}|$.

Область $\mathcal{T}^{\circ}_{5n+7} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+3}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{6n+5}{6n+7} < x \leqslant \dfrac{6n+8}{6n+9}, \quad \dfrac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+5)x}{12n+16}, \\ \dfrac{6n+8}{6n+9} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+(4n+6)x}{12n+19} < y \leqslant \dfrac{1+(4n+5)x}{12n+16} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(1, \frac{4n+7}{12n+19}\right), \quad \left(\frac{6n+8}{6n+9}, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5n+7}| = \frac{9n+13}{6(2n+3)(3n+4)(6n+7)(12n+19)}.$$

Область $\mathcal{T}^{*}_{5n+7} = \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+4})$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n+8}{6n+9} < x \leqslant 1, \quad \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leqslant \frac{1+(4n+6)x}{12n+19},$$

и является треугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n+8}{6n+9}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{4n+7}{12n+19}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}^{*}_{5n+7}| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Наконец, при переходе $\mathcal{T}^{*}_{5n+7} \to \mathcal{T}(5, (1,4)^n, 1, 3, 2^{3n+4}, 1) = \mathcal{T}^{\circ}_{5n+8}$ возникает дополнительное условие

$$\frac{1+(4n+7)x}{12n+22} < y \leqslant \frac{1}{3}(1+x),$$

которое не меняет вида области $\mathcal{T}^{*}_{5n+7}$. Следовательно, $\mathcal{T}^{\circ}_{5n+8}$ совпадает с $\mathcal{T}^{*}_{5n+7}$. В частности,

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5n+8}| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Лемма 14 доказана. □

Лемма 15. *Дерево $\mathbb{C}$ имеет вид, изображённый на рис. 11 (слева). Если $n = 3m$, то поддерево $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 11 (справа), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{C}_n$:*

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+2}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1,4)^{m-1}, 1, 5)| = \frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+3}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1,4)^{m}, 2)| = \frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+4}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1,4)^{m}, 1, 5)| = \frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}.$$

Если $n = 3m + 1$, то поддерево $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 12 (вверху), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{C}_n$:

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+3}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1,4)^{m-1}, 1, 5)| = \frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+4}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1,4)^{m}, 2)| = \frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+5}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1,4)^{m}, 1, 5)| = \frac{3(8m+7)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+11)(12m+13)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+6}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1,4)^{m+1}, 2)| = \frac{1}{2(6m+5)(6m+7)(12m+13)}.$$

Если, наконец, $n = 3m + 2$, то поддерево $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 12 (внизу), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{C}_n$:

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+5}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1,4)^{m}, 2)| = \frac{1}{2(6m+5)(6m+7)(12m+11)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+6}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1,4)^{m}, 1, 5)| = \frac{3(8m+9)}{2(3m+4)(6m+7)(12m+11)(12m+13)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+7}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1,4)^{m+1}, 2)| = \frac{3(4m+5)}{2(3m+4)(6m+7)(12m+13)(12m+17)};$$

$$|\mathcal{T}^{\circ}_{5m+8}| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1,4)^{m+1}, 1, 5)| = \frac{1}{6(2m+3)(6m+7)(12m+17)}.$$

Доказательство Леммы 15 проводится подобно доказательству Леммы 13, с использованием формул (9), (40) и (42).

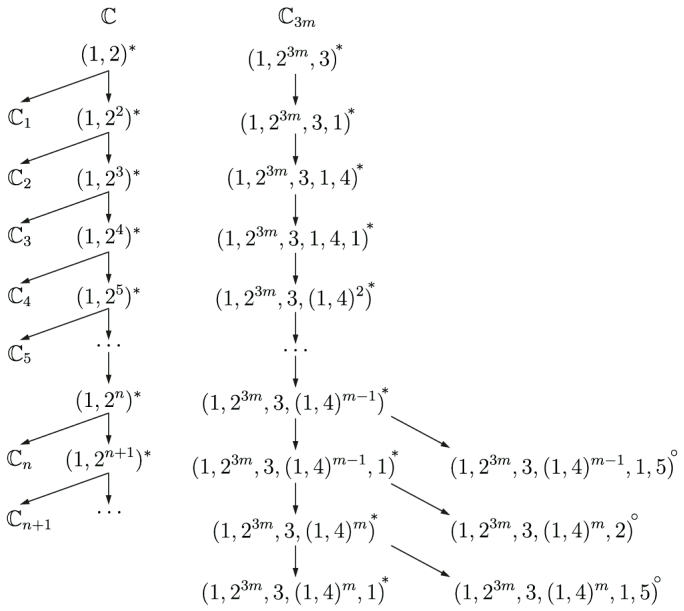


Рис. 11. Схематический вид дерева $\mathbb{C}$ (слева) и его поддерева $\mathbb{C}_n$ в случае $n = 3m$ (справа).

5. Доказательство Теоремы 2

Отправляясь от построенного при доказательстве Теоремы 1 перечня наборов $\mathcal{A}_6^*$, построим указанным там способом и перечень $\mathcal{A}_7^*$. В него войдут наборы

$$\text{(a)}\begin{cases}(2,(4,1)^3),\\(2,(4,1)^2,3,2),\\(2,4,1,3,2^3),\end{cases}\quad\text{(b)}\begin{cases}(5,(1,4)^3),\\(5,(1,4)^2,1,3),\\(5,1,4,1,3,2^2),\\(5,1,3,2^4),\end{cases}\quad\text{(c)}\begin{cases}(1,2^6),\\(1,2^5,3),\\(1,2^4,3,1),\\(1,2^3,3,1,4),\\(1,2^2,3,1,4,1).\end{cases}\tag{51}$$

Условимся называть наборы, отвечающие вершинам деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, и $\mathbb{C}$, наборами A- , B- и C-типов соотвественно. Тогда несложно видеть, что наборы (51 a) - это наборы A-типа, наборы (51 b) - наборы B-типа, а наборы (51 c) - наборы C-типа. Те же типы будут иметь и все наборы, порождённые множеством (51 a-c).

Таким образом, для нахождения величины $\nu(r;3)$, $r\geqslant 8$, достаточно сложить площади всех областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$, отвечающих всем листьям деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, и $\mathbb{C}$, которые находятся на r-м ярусе. Все вырожденные наборы помечены в деревьях знаком «$\circ$». Пооэтому вычисление $\nu(r;3)$ проводится по следующей схеме. Задавшись числом r, в каждом из перечней вырожденных наборов из Лемм 13-15 отыскиваем те, что имеют длину r, и суммируем их площади.

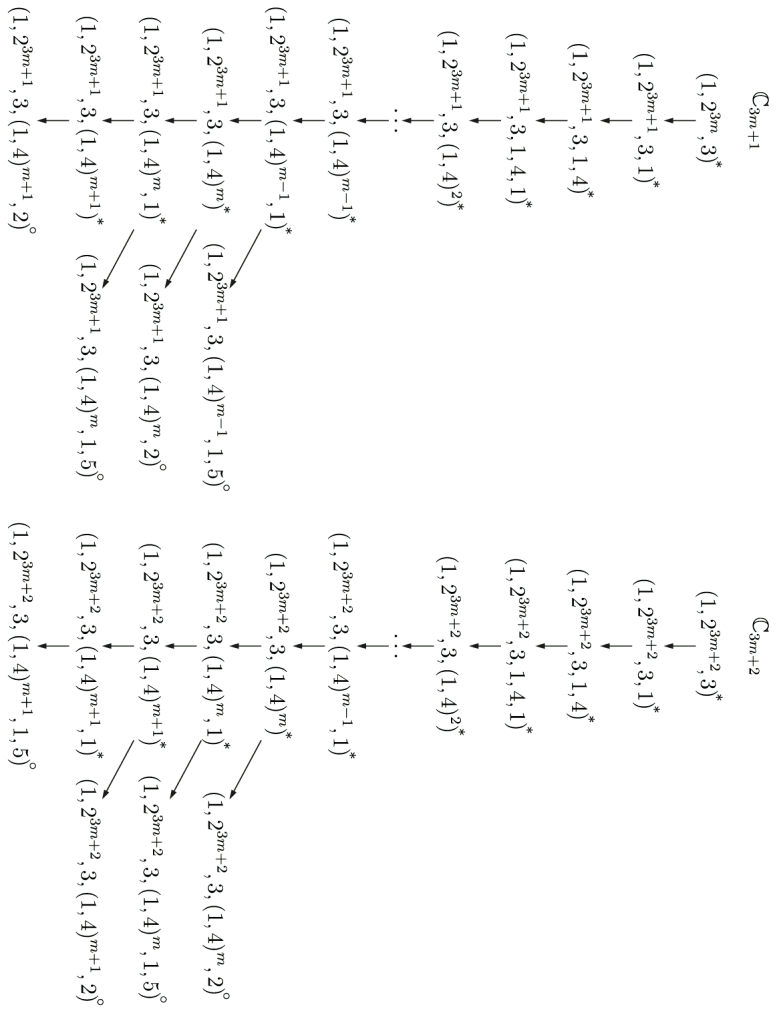


Рис. 12. Схематический вид поддеревьев $\mathbb{C}_n$ в случаях $n = 3m+1$ (вверху) и $n = 3m+2$ (внизу).

Пусть, например, $r = 5m$, где $m \geqslant 2$. Тогда имеется единственный вырожденный набор A-типа длины r, а именно набор $(2, (4,1)^{m-1}, 3, 2^{3(m-1)+2}, 1)$, причём площадь соответствующей области $\mathcal{T}^\circ_{5m} = \mathcal{T}^\circ_{5(m-1)+5}$ составляет по Лемме 13

$$\frac{1}{2(6(m-1)+5)(6(m-1)+7)(12(m-1)+11)} = \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m-1)}.$$

Аналогично, единственным вырожденным набором B-типа длины r является набор

$$\big(5, (1,4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+1}, 1\big),$$

причём

$$|\mathcal{T}^\circ_{5m}| = |\mathcal{T}^\circ_{5(m-1)+5}| = \frac{3(8(m-1)+7)}{2(3(m-1)+2)(6(m-1)+5)(12(m-1)+11)(12(m-1)+13)} =$$

$$= \frac{3(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)}.$$

Далее, вырожденными наборами C-типа длины r будут наборы

$$\big(1, 2^{3(m-1)+1}, 3, (1,4)^{m-1}, 1, 5\big), \quad \big(1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1,4)^{m-1}, 2\big),$$

которым отвечают области с площадями

$$\frac{3(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m-1)}.$$

Следовательно,

$$\nu(5m;3) = \frac{6(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)} + \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)} =$$

$$= P_{01}(m) + P_{02}(m).$$

Далее, если $r = 5m+1$, где $m \geqslant 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$\big(2, (4,1)^m, 3, 2^{3m-2}, 1\big) \quad (A\text{ - тип}), \quad \big(5, (1,4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+2}, 1\big) \quad (B\text{ - тип}),$$
$$\big(1, 2^{3(m-1)+1}, 3, (1,4)^m, 2\big) \quad (C\text{ - тип}), \quad \big(1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1,4)^{m-1}, 1, 5\big) \quad (C\text{ - тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m+1)}, \quad \frac{3(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)},$$

$$\frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m+1)}, \quad \frac{3(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)}.$$

Следовательно,

$$\nu(5m+1;3) = \frac{6(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)} + \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)} =$$

$$= P_{11}(m) + P_{12}(m).$$

Если $r = 5m + 2$, $m \geqslant 2$, то вырожденными наборами длины r будут

$$\big(2,(4,1)^m,3,2^{3m-1},1\big) \quad (A\text{ - тип}), \quad \big(5,(1,4)^{m-1},1,3,2^{3(m-1)+3},1\big) \quad (B\text{ - тип}),$$
$$\big(1,2^{3m},3,(1,4)^{m-1},1,5\big) \quad (C\text{ - тип}), \quad \big(1,2^{3(m-1)+2},3,(1,4)^m,2\big) \quad (C\text{ - тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)}, \quad \frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)},$$
$$\frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)}, \quad \frac{3(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)}.$$

Следовательно,

$$\nu(5m+2;3) = \frac{6(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)} +$$
$$+\frac{2(9m+4)}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)} = P_{21}(m) + P_{22}(m)$$

Если $r = 5m + 3$, $m \geqslant 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$\big(2,(4,1)^m,3,2^{3m},1\big) \quad (A\text{ - тип}), \quad \big(5,(1,4)^m,1,3,2^{3m-1},1\big) \quad (B\text{ - тип}),$$
$$\big(5,(1,4)^{m-1},1,3,2^{3(m-1)+4},1\big) \quad (B\text{ - тип}), \quad \big(1,2^{3m},3,(1,4)^m,2\big) \quad (\text{C - тип}),$$
$$\big(1,2^{3m+1},3,(1,4)^{m-1},1,5\big) \quad (C\text{ - тип}), \quad \big(1,2^{3(m-1)+2},3,(1,4)^m,1,5\big) \quad (\text{C - тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)}, \quad \frac{1}{6(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$
$$\frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)}, \quad \frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)},$$
$$\frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)}, \quad \frac{1}{6(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$

так что

$$\nu(5m+3;3) = \frac{6(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)} + \frac{2}{3(2m+1)(6m+1)(12m+5)} +$$
$$+\frac{2}{3(2m+1)(6m+5)(12m+7)} = P_{31}(m) + P_{32}(m) + P_{33}(m).$$

Наконец, если $r = 5m + 4$, $m \geqslant 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$\big(2,(4,1)^m,3,2^{3m+1},1\big) \quad (A\text{ - тип}), \quad \big(5,(1,4)^m,1,3,2^{3m},1\big) \quad (B\text{ - тип}),$$
$$\big(1,2^{3m},3,(1,4)^m,1,5\big) \quad (C\text{ - тип}), \quad \big(1,2^{3m+1},3,(1,4)^m,2\big) \quad (C\text{ - тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)}, \quad \frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)},$$
$$\frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}, \quad \frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)},$$

так что

$$\nu(5m+4;3) = \\ = \frac{6(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)} + \frac{2(9m+5)}{(6m+3)(6m+4)(6m+5)(12m+5)} = \\ = P_{41}(m) + P_{42}(m).$$

Теорема 2 доказана. □

6. Формула трёх авторов

Установим соотвествие между основным результатом работы [8] и полученной выше формулой для доли $\nu(r;D)$ (следствие Леммы 7). Для этого нам потребуется следующее определение.

Пусть заданы число $Q \geqslant 2$ и примитивная точка (q_0, q_1) из «раздутого» треугольника Фарея $Q\mathcal{T}$. Определим последовательно числа $k_1, \ldots, k_\ell$ и $q_2, \ldots, q_{\ell+1}$ по формулам

$$k_i = \left[\frac{q_{i-1}+Q}{q_i}\right], \quad q_{i+1} = k_i q_i - q_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Тогда величины k_i, q_i будут связаны друг с другом системой (5) (с $r = \ell$). Будем говорить в этом случае, что наборы $\mathbf{k}_\ell = (k_1, \ldots, k_\ell)$ и $\mathbf{q}_{\ell+2} = (q_0, \ldots, q_{\ell+1})$ *порождены* тройкой Q, q_0, q_1.

Если при этом примитивная точка лежит в области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k}_\ell)$, то в силу Леммы 1 в ряду Φ_Q найдётся кортеж из $(\ell+2)$ последовательных дробей Фарея со знаменателями $q_0, \ldots, q_{\ell+1}$.

Для определённой выше величины $\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}})$ в [8, следствие теоремы 2] получена формула вида

$$\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}}) = \frac{2}{D^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{k}_{r-2} \in \mathcal{K}^{r-2}(\overline{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k}_{r-2})|. \tag{52}$$

В ней $\overline{\mathbf{c}} = (c_0, \ldots, c_{r-1})$ - заданный вектор вычетов по модулю D, а $\mathcal{K}^{r-2}(\overline{\mathbf{c}}, D)$ - множество наборов $\mathbf{k}_{r-2} = (k_1, \ldots, k_{r-2})$, которые порождаются некоторой тройкой Q, q_0, q_1, причём набор $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_{r-1})$, порождённой той же тройкой, составлен из знаменателей некоторых r последовательных дробей ряда Φ_Q и удовлетворяет при этом условиям $q_i \equiv c_i \pmod D$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Замечая, что

$$\lim_{Q \to +\infty} \frac{N(Q)}{N(Q, D)} = D \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

и вспоминая определение $\varrho(\cdot)$, заключаем, что $\nu(r;D)$ допускает следующее выражение:

$$\nu(r;D) = D \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{\overline{\mathbf{c}}}{}' \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}^r(\overline{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|, \tag{53}$$

где $\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{c}}_{r+2} = (c_0, \ldots, c_{r+1})$, а штрих означает суммирование по всем таким наборам с условиями

$$c_0 \equiv c_{r+1} \equiv 0 \pmod D, \quad c_i \not\equiv 0 \pmod D, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Так из (52) и (53) находим:

$$\nu(r;D) = \frac{2}{\varphi(D)} \sum_{\overline{\mathbf{c}}}{}' \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}^r(\overline{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|. \tag{54}$$

Покажем, что формула из следствия Леммы 7 и формула (54) эквивалентны или, что то же,

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\overline{\mathbf{c}}}{}'\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{K}^r(\overline{\mathbf{c}},D)}|\mathcal{T}(\mathbf{k})|=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{A}_r^0(D)}|\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

Докажем сначала, что всякий набор $\mathbf{k}\in\mathcal{A}_r^0(D)$ встретится в двойной сумме в левой части (52) ровно $\varphi(D)$ раз. Заметим сперва, что если $\mathbf{k}\in\mathcal{A}_r^0(D)$ и область $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ непуста, то при достаточно большом Q в «раздутой» области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся примитивная точка (q_0,q_1) с условием $q_0\equiv 0\pmod D$, $q_1\equiv c_1\pmod D$, где c_1 - произвольное число из приведённой системы вычетов по модулю D.

Действительно, если $|\mathcal{T}(\mathbf{k})|>0$, то внутри $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся квадрат со стороной ε, где $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{k})>0$ - достаточно малая постоянная. Соответственно, в «раздутой» области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся квадрат со стороной $Q\varepsilon$. В нём при любом c_1 с условием Н.О.Д.$(c_1,D)=1$ можно указать по крайней мере одну примитивную точку (q_0,q_1) с требуемым свойством. Действительно, если $H=Q\varepsilon$ и $X<q_0\leqslant X+H$, $Y<q_1\leqslant Y+H$ - такой квадрат, то для числа n искомых примитивных точек справедлива формула:

$$n=\sum_{\substack{X<q_0\leqslant X+H\\ q_0\equiv 0\pmod D}}\sum_{\substack{Y<q_1\leqslant Y+H\\ q_1\equiv c_1\pmod D}}\sum_{\delta\mid\text{Н.О.Д.}(q_0,q_1)}\mu(\delta)=\sum_{\delta\leqslant\Delta}\mu(\delta)\sum_{\substack{X<q_0\leqslant X+H\\ q_0\equiv 0\pmod D\\ q_0\equiv 0\pmod\delta}}1\sum_{\substack{Y<q_1\leqslant Y+H\\ q_1\equiv c_1\pmod D\\ q_1\equiv 0\pmod\delta}}1,$$

где $\Delta=\min(X,Y)+H$. Ввиду условия Н.О.Д.$(c_1,D)=1$ имеем: Н.О.Д.$(\delta,D)=1$. Заменяя суммы по q_0 и q_1 на величины

$$\frac{H}{\delta D}+\theta_0,\quad \frac{H}{\delta D}+\theta_1,\quad |\theta_0|,|\theta_1|\leqslant 1,$$

после несложных преобразований получим:

$$n=\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{H}{D}\right)^2\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}+O\left(\frac{H^2}{D^2\Delta}\right)++O(\Delta)+O\left(\frac{H}{D}\ln\Delta\right).$$

Правая часть этого равенства положительна, если только H удовлетворяет неравенству $H>cD\sqrt{Q}$, где c - достаточно большая абсолютная постоянная. Это условие, очевидно, выполнено при всех $Q\geqslant Q_0(\mathbf{k},D)$.

Итак, пусть $(q_0,q_1)\in Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ - примитивная точка с требуемыми свойствами. В силу Леммы 1, пара q_0,q_1 порождает в Φ_Q кортеж из $(r+2)$ последовательных дробей со знаменателями $q_0,\dots,q_{r+1}$ такими, что справедливы равенства (5) и, следовательно, формулы (12), т.е.

$$q_{i+1}=q_1\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)-q_0\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_i),\quad i=1,\dots,r.$$

Определяя вычеты $c_2,\dots,c_{r+1}$ из сравнений

$$c_{i+1}\equiv q_1\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)-q_0\mathbb{K}_{i-1}(k_2,\dots,k_i)\equiv c_1\mathbb{K}_i(k_1,\dots,k_i)\pmod D,$$

будем иметь: $q_{i+1}\equiv c_{i+1}\pmod D$, $i=1,\dots,r$. В частности,

$$c_i\not\equiv 0\pmod D\quad\text{для каждого } i,\quad 1\leqslant i\leqslant r,\quad\text{и}\quad c_{r+1}\equiv 0\pmod D.$$

Таким образом, исходный набор $\mathbf{k}$ встретится во внутренней сумме в (54), отвечающей вектору $\mathbf{c}=\mathbf{c}_{r+2}=(c_0,\dots,c_{r+1})$. Однако этот вектор при фиксированном $\mathbf{k}$ полностью определяется заданием единственной компоненты c_1, которая может быть выбрана $\varphi(D)$ способами. Значит, набор $\mathbf{k}$ встретится в левой части (54) ровно $\varphi(D)$ раз.

Обратно, покажем, что всякий набор $\mathbf{k}$ в двойной сумме принадлежит множеству $\mathcal{A}_r^0(D)$. Действительно, для такого набора найдётся вектор $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{r+1})$ условиями $c_0 \equiv c_{r+1} \equiv 0 \pmod D$, $c_i \not\equiv 0 \pmod D$, $i = 1, \dots, r$, найдутся число Q и примитивная точка (q_0, q_1) области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ такие, что $q_0 \equiv c_0 \equiv 0 \pmod D$, $q_1 \equiv c_1 \pmod D$ и набор $q_0, \dots, q_{r+1}$, порождённый с помощью $\mathbf{k}$ тройкой Q, q_0, q_1, будет удовлетворять сравнениям $q_{i+1} \equiv c_{i+1} \pmod D$, $i = 1, \dots, r$ и вместе с тем будет набором из знаменателей некоторого кортежа из $(r+2)$ оседних дробей Φ_Q. Но тогда

$$q_{i+1} = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \equiv c_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \equiv c_{i+1} \pmod D,$$

откуда, ввиду взаимной простоты c_1 и D, будем иметь:

$$\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \equiv c_{i+1} c_1^* \pmod D.$$

Следовательно, $\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \not\equiv 0 \pmod D$ при $i = 1, \dots, r-1$, и $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \equiv 0 \pmod D$, так что $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^0(D)$.

7. Случай $D = 2$

Последний раздел работы [8] содержит примеры вычисления величин $\varrho(r, D, \overline{\mathbf{c}})$ для некоторых векторов $\mathbf{c}$ в случае $D = 2$. В частности, авторами [8] найдены явные значения величин $\varrho(r, 2, \overline{\mathbf{c}}_r)$ для $r = 3, 4, 5$ и $\overline{\mathbf{c}}_r = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{r-2}, 0)$, а именно:

$$\varrho(3, 2, \overline{\mathbf{c}}_3) = 2 - \frac{8}{3}\ln 2, \quad \varrho(4, 2, \overline{\mathbf{c}}_4) = \frac{16}{3}\ln 2 - \frac{1132}{315}, \quad \varrho(5, 2, \overline{\mathbf{c}}_5) = \frac{599}{315} - \frac{8}{3}\ln 2.$$

Домножением на коэффициент

$$D \prod_{p \mid D} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 3$$

из них получаются значения для долей $\nu(r; 2)$:

$$\nu(1; 2) = 6 - 8\ln 2 = 0.45482\,25555\dots,$$

$$\nu(2; 2) = 16\ln 2 - \frac{1132}{105} = 0.30940\,25080\dots,$$

$$\nu(3; 2) = \frac{599}{105} - 8\ln 2 = 0.15958\,44603\dots\ .$$

Эти вычисления могут быть продолжены и далее по способу, предложенному выше при нахождении долей $\nu(r; 3)$. Имеет место

Теорема 3. *Справедливы равенства:*

$$\nu(4; 2) = \frac{2}{45}, \quad \nu(r; 2) = \frac{8}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}, \quad \textit{если } r \geqslant 5.$$

В частности,

$$\nu(5;2)=\frac{8}{693}=0.01154\,40115\ldots \qquad \nu(11;2)=\frac{8}{9\,177}=0.00087\,17445\ldots$$

$$\nu(6;2)=\frac{8}{1\,287}=0.00621\,60062\ldots \qquad \nu(12;2)=\frac{8}{12\,075}=0.00066\,25258\ldots$$

$$\nu(7;2)=\frac{8}{2\,145}=0.00372\,96037\ldots \qquad \nu(13;2)=\frac{8}{15\,525}=0.00051\,52979\ldots$$

$$\nu(8;2)=\frac{8}{3\,315}=0.00241\,32730\ldots \qquad \nu(14;2)=\frac{8}{19\,575}=0.00040\,86845\ldots$$

$$\nu(9;2)=\frac{8}{4\,845}=0.00165\,11868\ldots \qquad \nu(15;2)=\frac{8}{24\,273}=0.00032\,95843\ldots$$

$$\nu(10;2)=\frac{8}{6\,783}=0.00117\,94191\ldots \qquad \nu(16;2)=\frac{8}{29\,667}=0.00026\,96598\ldots$$

Доказательство. Ограничимся лишь кратким изложением, поскольку вывод формул для $\nu(r;2)$ следует, с одной стороны, тому же порядку, что и вывод формул для $\nu(r;3)$ при $r\geqslant 8$ (Теорема 2). С другой стороны, объём вычислений при $D=2$ оказывается существенно меньше, чем в случае $D=3$.

Как и выше, будем последовательно строить множества $\mathcal{A}_r^0=\mathcal{A}_r^0(2)$ и $\mathcal{A}_r^*=\mathcal{A}_r^*(2)$, $r\geqslant 1$.

Случай $r=1$. $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов вида (k_1), $k_1\equiv 1 \pmod 2$, а множество $\mathcal{A}_r^0$ - из наборов вида (k_1), $k_1\equiv 0 \pmod 2$.

Случай $r=2$. Множество $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов вида (k_1,k_2), где $k_1\equiv 1 \pmod 2$, $k_2\equiv 0 \pmod 2$. Из них непустым областям $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ отвечают лишь набор $(3,2)$ и наборы $(1,k_2)$, $k_2\equiv 0 \pmod 2$, $k_2\geqslant 2$. Множество $\mathcal{A}_r^0$ состоит из наборов вида (k_1,k_2), где $k_1,k_2\equiv 1 \pmod 2$. Из них непустым областям отвечают лишь наборы $(k_1,1)$, $k_1\equiv 1 \pmod 2$, $k_1\geqslant 3$, и наборов $(1,k_2)$, $k_2\equiv 1 \pmod 2$, $k_2\geqslant 3$.

Случай $r=3$. Множество $\mathcal{A}_r^*$ оказывается конечным и состоит из четырёх наборов:

$$(1,2,2),\quad (1,2,4),\quad (1,4,2),\quad (3,2,2).$$

Множество $\mathcal{A}_r^0$ является бесконечным и состоит из наборов

$$(1,k_2,1),\quad k_2\equiv 0 \pmod 2,\quad k_2\geqslant 4,\quad (1,2,3),\quad (3,2,1).$$

Случай $r=4$. Множество $\mathcal{A}_r^0$ состоит из наборов

$$(1,2,2,3),\quad (1,2,4,1),\quad (1,4,2,1),\quad (3,2,2,1).$$

Пользуясь равенством (36), будем иметь:

$$\nu(2;4)=4\big(|\mathcal{T}(1,2,2,3)|+|\mathcal{T}(1,2,4,1)|\big)=4\left(\frac{2}{315}+\frac{1}{210}\right)=\frac{2}{45}.$$

Множество же $\mathcal{A}_r^*$ состоит лишь из двух наборов: $(1,2,2,2)$ и $(3,2,2,2)$.

В каждом из случаев $r\geqslant 5$ множество $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов $(1,2^{r-1})$ и $(3,2^{r-1})$, а множество $\mathcal{A}_r^0$ - из наборов $(1,2^{r-2},3)$ и $(3,2^{r-2},1)$. Соотвественно, область $\mathcal{T}(1,2^{r-2},3)$ определяется неравенствами

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2r+1}<x\leqslant\dfrac{1}{2r-1}, & 1-x<y\leqslant\dfrac{1}{2}(1+(2r-1)x),\\[2ex] \dfrac{1}{2r-1}<x\leqslant\dfrac{1}{2r-3}, & \dfrac{1}{2}(1+(2r-3)x)<y\leqslant 1,\end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{1}{2r+1}, \frac{2r}{2r+1}\right), \quad \left(\frac{1}{2r-1}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2r-3}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2r-1}, \frac{2r-2}{2r-1}\right)$$

и площадью

$$\frac{2}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}.$$

Аналогично, область $\mathcal{T}(3, 2^{r-2}, 1)$ определяется неравенствами

$$\begin{cases} \dfrac{2r-5}{2r-3} < x \leqslant \dfrac{2r-3}{2r-1}, \quad \dfrac{1}{4}(1+x) < y \leqslant \dfrac{1+(r-1)x}{2r-1}, \\ \dfrac{2r-3}{2r-1} < x \leqslant 1, \quad \dfrac{1+rx}{2r+1} < y \leqslant \dfrac{1+(r-1)x}{2r-1} \end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{2r-5}{2r-3}, \frac{r-2}{2r-3}\right), \quad \left(1, \frac{r}{2r-1}\right), \quad \left(1, \frac{r+1}{2r+1}\right), \quad \left(\frac{2r-3}{2r-1}, \frac{r-1}{2r-1}\right)$$

и площадью

$$\frac{2}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

8. Заключительные замечания

Задачу нахождения явных выражений величин $\nu(r; D)$ можно ставить и для $D > 3$. Однако уже в случае следующего за тройкой простого числа $D = 5$ вычисления многократно возрастают. Возникающие при этом деревья обладают гораздо более сложной структурой, чем рассмотренные в §4 деревья $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. В ряде случаев момент, когда та или иная вершина даёт единственного «вырожденного» потомка, наступает очень поздно, так что при вычислениях приходится иметь дело с континуантами длины более сотни. Было бы интересно придумать иное рассуждение, которое приводило бы к искомому результату с меньшими затратами.

Вместе с тем, несложно доказать, что в случае произвольного простого D все доли $\nu(r; D)$, начиная с некоторого r, являются рациональными числами. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $D = p \geqslant 2$ - простое. Тогда все числа $\nu(r; D)$ при $r \geqslant 2p$ - рациональные.*

Доказательство. Функции $f_i(x; \mathbf{k}_i)$, $g_i(x; \mathbf{k}_i)$ есть линейные функции x с рациональными коэффициентами. Поэтому и координаты вершин каждого непустого многоугольника $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ рациональны. Следовательно, рациональными будут и площади этих многоугольников. Ввиду следствия Леммы 7 достаточно проверить, что при $r \geqslant 2p$ множество $\mathcal{A}_r(D)$ содержит лишь конечное число наборов.

Допустим противное: существуют D и $r \geqslant 2p = 2P^-(D)$, для которых множество $\mathcal{A}_r^0(D)$ бесконечно. Тогда существует по крайней мере один индекс j, $1 \leqslant j \leqslant r$, такой, что в $\mathcal{A}_r^0(D)$ содержатся наборы со сколь угодно большими значениями компоненты $k_j = k$ и, в частности, с условием $k \geqslant 4r + 2$. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k, \ldots, k_r)$ - такой набор. В силу п. (f) Леммы 5, его компоненты удовлетворяют равенствам (28). Заметим также, что набор $\mathbf{k}$ не может иметь вид

$$\left(2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3}\right), \quad \text{где} \quad n \geqslant p - 1. \tag{55}$$

Действительно, для набора (55) с помощью Леммы 8 находим

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_1(2) = 2, \quad \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_2(2^2) = 3, \quad , \ldots , \quad \mathbb{K}_n = \mathbb{K}_n(2^n) = n+1.$$

В случае $n \geqslant p-1$ среди чисел $\mathbb{K}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеется континуант $\mathbb{K}_{p-1}$, кратный p, что невозможно в силу определения $\mathcal{A}_r^0(D)$. Следовательно, $\mathbf{k}$ может иметь одну из следующих форм:

$$\left(k, 1, 2^{r-2}\right), \quad \left(1, k, 1, 2^{r-3}\right), \quad \left(2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3}\right), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant n \leqslant p-2.$$

Вычисление континуантов порядков j, $1 \leqslant j \leqslant r$, для каждого из наборов приводит к следующим последовательностям:

$$\begin{array}{lllllll}
k & (k-1) & (k-2) & (k-3) & \cdots & \cdots & \cdots \quad (k-r+1); \\
1 & (k-1) & (k-2) & (k-3) & \cdots & \cdots & \cdots \quad (k-r+1); \\
1 & 2 & (k-2) & (k-3) & \cdots & (k-n) & \cdots \quad (k-r+1),
\end{array}$$

$n = 1, 2, \ldots, p-2$.

Первый ряд таблицы содержит r подряд идущих целых чисел, и потому среди первых $p < r$ чисел найдётся кратное p. Значит, $\mathbf{k}$ не может иметь вида $\left(k, 1, 2^{r-2}\right)$.

Далее, второй ряд содержит $(r-1)$ подряд идущих целых чисел на местах, начиная со второго. Значит, число, кратное p, встретится во второй строке таблицы на месте с номером $\leqslant p+1 < r$. Следовательно, набор $\mathbf{k}$ не может иметь и вида $\left(1, k, 1, 2^{r-3}\right)$.

Пусть, наконец, $1 \leqslant n \leqslant p-2$. Соотвествующий ряд содержит $r-(n+1) \geqslant 2p-(p-1) = p+1$ подряд идущих целых чисел на местах начиная с $(n+2)$-го. Поэтому число, кратное p, встретится в нём на месте с номером $\leqslant (n+1)+p \leqslant 2p-1 \leqslant r-1$. Таким образом, $\mathbf{k}$ не может совпадать ни с одним из наборов вида $\left(2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3}\right)$. Полученное противоречие приводит к искомому утверждению. $\square$

Выше (§2) было дано доказательство равенства (36) площадей областей $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и $\mathcal{T}(k_r, \ldots, k_1)$ для любого набора $k_1, \ldots, k_r$. Это доказательство опиралось на связь величин $|\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)|$ с количеством кортежей из $(r+2)$ последовательных дробей Фарея, обладающих определёнными арифметическими свойствами. Ниже приводится доказательство тождества (36), использующее лишь определение и простейшие свойства BCZ-преобразования T.

Согласно Лемме 2, область $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ есть множество всех точек (x_0, x_1) треугольника $\mathcal{T}$ Фарея, для которых величины $x_2, \ldots, x_{r+1}$, определённые равенствами

$$\begin{cases}
x_0 + x_2 = k_1 x_1, \\
x_1 + x_3 = k_2 x_2, \\
\ldots \\
x_{r-1} + x_{r+1} = k_r x_r,
\end{cases} \tag{56}$$

удовлетворяют условиям

$$0 < x_i \leqslant 1, \quad i = 2, 3, \ldots, r+1, \quad x_i + x_{i+1} > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{57}$$

Поэтому

$$|\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)| = \left| \iint\limits_{\substack{(x_0, x_1) \in \mathcal{T} \\ (57)}} dx_0\, dx_1 \right|, \tag{58}$$

где смысл обозначений очевиден.

Рассмотрим теперь линейную замену переменных

$$\begin{cases}
y_0 = x_{r+1} = x_1 \mathbb{K}_r(k_1, \ldots, k_r) - x_0 \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \ldots, k_r), \\
y_1 = x_r = x_1 \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \ldots, k_{r-1}) - x_0 \mathbb{K}_{r-2}(k_2, \ldots, k_{r-1}).
\end{cases} \tag{59}$$

Чтобы найти вид условий (57) в новых переменных, определим величины $y_2, \dots, y_{r+1}$ равенствами

$$\begin{cases} y_0 + y_2 = k_r y_1, \\ y_1 + y_3 = k_{r-1} y_2, \\ \dots \\ y_{r-1} + y_{r+1} = k_1 y_r. \end{cases} \tag{60}$$

Пользуясь (7), несложно проверить по индукции, что $y_i = x_{r-i+1}$ для $i = 2, 3, \dots, r+1$. Следовательно, условия (57) примут вид

$$0 < y_i \leqslant 1, \quad i = 2, 3, \dots, r+1, \quad y_i + y_{i+1} > 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{61}$$

В силу Леммы 2, множество точек $(y_0, y_1) \in \mathcal{T}$, подчинённых условиям (60), (61), образует область $\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)$, так что

$$|\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)| = \left| \iint\limits_{\substack{(y_0,y_1)\in\mathcal{T} \\ (61)}} dy_0\, dy_1 \right|. \tag{62}$$

Но модуль определителя линейной замены (59) равен, в силу тождества (11), единице. Поэтому равны и интегралы в правых частях (58) и (62). Отсюда следует искомое равенство площадей. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cobeli C., Zaharescu A., The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey. // Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 2003. Vol. 5. P. 1–38.
2. Haynes A., A note on Farey fractions with odd denominators, // J. Number Theory, 2003. Vol. 98. № 2. P. 89–104.
3. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., On the distribution of the Farey sequence with odd denominators // Michigan Math. J. 2003. Vol. 51. P. 557–573.
4. Cobeli C., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // `arXiv:math/0511356v1 [math.NT]` (14.11.2005).
5. Cobeli C., Zaharescu A., On the Farey Fractions with Denominators in Arithmetic Progression // J. Integer Sequences. 2006. Vol. 9. Article 06.3.4.
6. Alkan E., Ledoan A.H., Vâjâitu M., Zaharescu A. Discrepancy of Fractions with Divisibility Constraints // Monatsh. Math. 2006. Vol. 149. P. 179–192.
7. Haynes A., The distribution of special subsets of the Farey sequence // `arXiv:math/0907.2171v1 [math.NT]` (13.07.2009).
8. Cobeli C., Vâjâitu M., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // Math. Reports. 2012. Vol. 14(64). № 1. P. 1–19.
9. Badziahin D.A., Haynes A.K., A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions // Acta Arith., 2011. Vol. 146. № 3. P. 205–215.
10. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P. Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints // `arXiv:1301.0277v2 [math.NT] (11.04.2013)`

11. Bittua, Chaubeya S., Goela S. On the distribution of index of Farey Sequences // arXiv:2203.16215v1 [math.NT] (30.03.2022)

12. Boca F.P., Siskaki M., A note on the pair correlation of Farey fractions // arXiv:2109.12744v2 [math.NT] (19.09.2022)

13. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., A conjecture of R. R. Hall on Farey points // J. reine angew. Math. 2001. Vol. 535. P. 207–236.

14. Baker A., Transcendental number theory. Cambr. Univ. Press, 1975.

15. Lindeman F., Ueber die Zahl π // Math. Ann. 1882. Vol. 20. P. 213–225.

16. Устинов А.В., Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 4. С. 131–160.

17. Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О., Конкретная математика. Основание информатики, М., Мир, 1998.

18. Смирнов Е.Ю., Фризы и цепные дроби. М., МЦНМО, 2022.

19. Boca F.P., Gologan R., Zaharescu A., On the index of Farey sequences // Quart. J. Math. 2002. Vol. 53. № 4. P. 377–391.

20. Постников А.Г., Введение в аналитическую теорию чисел. М., Наука, 1971.

21. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М., ГИФМЛ, 1962.

REFERENCES

1. Cobeli C., Zaharescu A., 2003, “The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, vol. 5. P. 1–38.

2. Haynes A., 2003, “A note on Farey fractions with odd denominators”, *J. Number Theory*, vol. 98. № 2. P. 89–104.

3. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2003, “On the distribution of the Farey sequence with odd denominators”, *Michigan Math. J.*, vol. 51. P. 557–573.

4. Cobeli C., Zaharescu A., 2005, “The distribution of rationals in residue classes”, arXiv:math/0511356v1 [math.NT] (14.11.2005).

5. Cobeli C., Zaharescu A., 2006, “On the Farey Fractions with Denominators in Arithmetic Progression”, *J. Integer Sequences*, vol. 9. Article 06.3.4.

6. Alkan E., Ledoan A.H., Vâjâitu M., Zaharescu A., 2006, “Discrepancy of Fractions with Divisibility Constraints”, *Monatsh. Math.*, vol. 149. P. 179–192.

7. Haynes A., 2009, “The distribution of special subsets of the Farey sequence”, arXiv:math/0907.2171v1 [math.NT] (13.07.2009).

8. Cobeli C., Vâjâitu M., Zaharescu A.,2012, “The distribution of rationals in residue classes”, *Math. Reports.*, vol. 14(64). № 1. P. 1–19.

9. Badziahin D.A., Haynes A.K., 2011, "A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions", *Acta Arith.*, vol. 146. № 3. P. 205–215.

10. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P. 2013, "Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints", `arXiv:1301.0277v2 [math.NT] (11.04.2013)`

11. Bittua, Chaubeya S., Goela S. 2022, "On the distribution of index of Farey Sequences", `arXiv:2203.16215v1 [math.NT] (30.03.2022)`

12. Boca F.P., Siskaki M., 2022, "A note on the pair correlation of Farey fractions", `arXiv:2109.12744v2 [math.NT]` (19.09.2022)

13. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2001, "A conjecture of R. R. Hall on Farey points", *J. reine angew. Math.*, vol. 535. P. 207–236.

14. Baker A., 1975, Transcendental number theory. London, Cambr. Univ. Press.

15. Lindeman F., 1882, "Ueber die Zahl π", *Math. Ann.*, vol. 20. P. 213–225.

16. Ustinov A.V., 2009, "The solution of Arnold's problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments", *Sb. Math.*, vol. 200. № 4. P. 597–627.

17. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., 1994, Concrete Mathematics (2nd ed.), Massachusetts, Addison-Wesley.

18. Smirnov E.Yu., 2022, Frieze patterns and continued fractions (in Russian), M., MCCME.

19. Boca F.P., Gologan R., Zaharescu A., 2002, "On the index of Farey sequences", *Quart. J. Math.*, vol. 53. № 4. P. 377–391.

20. Postnikov A.G., 1988, Introduction to analytic number theory. Transl. Math. Monographs. Vol. 68. AMS, Providence, Rhode Island.

21. Gradstein I.S., Ryjik I.M., 1965, "Tables of Integrals, Sums and Products", *Academic Press, New York.*

Получено: 20.10.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-191-205

О биективных функциях от фиксированных переменных в поле Галуа из p^k элементов и на кольце целых p-адических чисел для нечетного простого числа p[1]

Лопес Перес А., Куэльяр Хустис О.

Лопес Перес Аниэль — магистр, Центральный университет провинции Лас-Вильяс «Марта Абреу» (Куба ,г. Санта-Клара); специалист по информационной безопасности; факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: alopezp1990@gmail.com

Куэльяр Хустис Ористела — выпускница математического факультета Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого (г. Тула); магистр наук в области прикладной математики, доктор математических наук, профессор, Университет компьютерных наук (Куба, г. Гавана).
e-mail: oristelacj@uci.cu

Аннотация

В настоящей работе даются необходимые и достаточные условия, при которых функция от фиксированных переменных $\psi\colon \mathbb{F}_q^{i+1} \to \mathbb{F}_q$ является биективной, где $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{F}_q^{i+1}$ — $(i+1)$-я декартова степень поля Галуа $\mathbb{F}_q$ из $q = p^k$ элементов, p — нечетное простое число, и $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, используются такие условия биективных функций ψ от фиксированных переменных, чтобы написать критерий, сохраняющих меру Хаара из важного класса 1-липшицевых функций в терминах их координатных функций на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$. В частности, предствление 1-липшицевых функций в терминах их координатных функций на кольце целых 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$ оказалось общим и полезным инструментом для получения математических результатов, прикладываемых в криптографии. В этой работе продолжается исследование такого представления 1-липшицевых функций на кольце целых p-адических $\mathbb{Z}_p$ при $p \neq 2$ с особым вниманием к представлению биективных 1-липшицевых функций в терминах их координатных функций на $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$.

Ключевые слова: поле Галуа; биективная функция; 1-липшицева функция; координатная функция; функция, сохраняющая меру Хаара.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
Лопес Перес А., Куэльяр Хустис О. О биективных функциях от фиксированных переменных в поле Галуа из p^k элементов и на кольце целых p-адических чисел для нечетного простого числа p //Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 191–205.

[1]Исследование выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова, в Центральном университете провинции Лас-Вильяс «Марта Абреу» и в Университете компьютерных наук (Куба).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-191-205

On Bijective Functions of Fixed Variables in the Galois Field of p^k Elements and on the Ring of p-Adic Integers for an Odd Prime Number p

Lopez Perez A., Cuellar Justiz O.

Lopez Perez Aniel' — Master's degree in Telematics (Central University "Marta Abreu" of Las Villas (Kyba, Santa Clara), Information Security specialist; Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: alopezp1990@gmail.com
Cuellar Justiz Oristela — graduate student of the Faculty of Mathematics of the Tula State Lev Tolstoy Pedagogical Institute (Tula); master's degree in Applied Mathematics, doctor of mathematical sciences, professor, University of Informatics Sciences (Kuba, Havana).
e-mail: oristelacj@uci.cu

Abstract

In this paper there are given necessary and sufficient conditions under which a function of fixed variables $\psi\colon \mathbb{F}_q^{i+1} \to \mathbb{F}_q$ is bijective, where $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{F}_q^{i+1}$ is the $(i+1)$-ary Cartesian power of the Galois field $\mathbb{F}_q$ of $q = p^k$ elements, p is an odd prime number and $k \in \mathbb{N}$. In addition, such conditions of the bijective functions ψ of fixed variables are used to write a criterion for the preserving Haar measure of functions from the important class of 1-Lipschitz functions in terms of its coordinate functions on the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$. In particular, the representation of 1-Lipschitz functions in terms of its coordinate functions on the ring of 2-adic integers $\mathbb{Z}_2$ turned out to be a general and useful tool for obtaining mathematical results applied in cryptography. In this work, the research of such representation of 1-Lipschitz functions on the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$ is being continued, with special attention to the representation of bijective 1-Lipschitz functions in terms of its coordinate functions on $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$.

Keywords: Galois field; bijective function; 1-Lipschitz function, Haar measure; Haar measure-preserving function; coordenate function; ergodic function.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
Lopez Perez A., Cuellar Justiz O., 2023, "On bijective functions of fixed variables in the Galois field of p^k elements and on the ring of p-adic integers for an add prime number p" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 191–205.

1. Введение

Функция $f(x)$ на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$, принимающая значения из этого кольца, есть p^γ-липшицева функция, когда $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом p^γ, $\gamma = 0, 1, 2, \ldots$ т. е., когда $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(a) - f(b)|_p \leq p^\gamma |a - b|_p$ для всех $a, b \in \mathbb{Z}_p$, где p — простое число, и $|\cdot|_p$ — p-адическая абсолютная величина любого p-адического числа. Это неравенство эквивалентно утверждению, что из $a \equiv b \pmod{p^k}$ следует, что $f(a) \equiv f(b) \pmod{p^{k-\gamma}}$ для любых $k \geq 1 + \gamma$. Класс 1-липшицевых функций

(т. е., при $\gamma = 0$) играет очень важную роль в криптографии (Например, см. обширную монографию [7]). Оказывается, что 1-липшицевые функции являются так называемыми треугольными функциями, и наоборот. Например, по определению 3.37 из [7], одномерная треугольная функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является преобразованием:

$$f\colon (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots) \mapsto (\psi_0(\chi_0), \psi_1(\chi_0, \chi_1), \psi_2(\chi_0, \chi_1, \chi_2), \ldots),$$

где $\chi_i \in \mathbb{F}_p$, и каждая $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) \in \mathbb{F}_p$ является функцией от переменных $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i$ p-значной логики т. е.,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \cdot p^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) \cdot p^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\chi_i = \delta_i(x) \in \mathbb{F}_p$, и $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) = \delta_i\left(f(x)\right) \in \mathbb{F}_p$ является функцией p-значной логики от $i+1$ переменных в $\mathbb{F}_p$. Функция $\delta_i\left(\mathbb{Z}_p\right)$ есть значение i-го разряда в каноническом p-адическом представлении p-адического числа. Приведенное выше равенство (1) известно как *представление функции f в терминах ее координатных функций*. Если контекст ясен, то просто используется обозначение $\psi_i = \psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$. Также существует другой способ представления p^γ-липшицевых функций ($\gamma = 1, 2, 3, \ldots$), а именно, так называемое подкоординатное представление (См. [11] и [14]).

Данная статья мотивирована результатами монографии [7] в области p-адической эргодической теории, поскольку они нашли применение в криптографии: например, они используются для построения псевдослучайных генераторов с помощью T-функций. T-функции — это функции треугольного вида для случая $p = 2$ (т. е., T-функции — это 1-липшицева функция на $\mathbb{Z}_2$) и, хотя T-функции имееют обширную характеризацию, по ним новые работы еще появляются, например [15], и [16]. Можно ознакомиться с работами [19], [17], [22], и [28] по p-адическим прикладным методам в криптогафии. Также можно посмотреть работы [12], [13], [23], [27], [20], [25], и о p-адической теории автоматов работу [26].

В теореме из [29] даются необходимые и достаточные условия, при которых функция в виде (1) сохраняет меру Хаара на $\mathbb{Z}_3$, и кроме того, $f(x)$ является эргодической на $\mathbb{Z}_3$ (чтобы вспомнить, что такое эргодическая функция, см. определение 1). Целью данной работы является обобщение аналогичного [29] критерия сохранения меры Хаара на $\mathbb{Z}_p$ для любого нечетного простого числа p. Также мотивацией для исследования послужил тот факт, что в [29] даётся форма, которую должна иметь каждая координатная функция на $\mathbb{Z}_3$, а в теореме 2 в этой работе показывается форма, которую должна иметь каждая координатная функция для случая на $\mathbb{Z}_p$ при $p \neq 2$, как только функция (1) сохраняет меру Хаара на $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$. Однако, обобщить на любом $\mathbb{Z}_p, p \neq 2$ критерий эргодичности функции, который представлен в [29] на $\mathbb{Z}_3$, сложнее, хотя есть общий результат в теореме 3.1 из [10] на основе циклической структуры функции f. В целом, поиск общего критерия эргодичности, аналогично тому, который был найден в [29], это не простой вопрос, и ответ на него зависит от конкретного кольца $\mathbb{Z}_p$, на котором осуществляются операции.

Авторы работы [10] в теореме 3.1 доказали, что $f(x)$ в форме (1) биективна тогда и только тогда, когда каждая функция $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ тоже биективна для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого i т. е., они использовали в качестве предпосылки тот факт, что каждая функция $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ биективна. Возникает вопрос: когда функции $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ биективны? На этот вопрос отвечает теорема 1 в частном случае $q = p$, и с помощью теоремы 1 можно было написать теорему 2.

Основными результатамы данной работы являются теорема 1 и теорема 2, хотя на самом деле теорема 1 важнее теоремы 2, по крайней мере с точкой зрения авторов. Эта идея станет более ясной после того, как будут представлены доказательства теорем 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле Галуа из $q = p^k$ элементов, $k \in \mathbb{N}, p$ — нечетное простое число, $\mathbb{F}_q^{i+1}$ — $(i+1)$-я декартова степень поля $\mathbb{F}_q, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и пусть функция $\psi\colon \mathbb{F}_q^{i+1} \to \mathbb{F}_q$. Функция ψ является биективной тогда и только тогда, когда*

$$\{d_1(\overline{\chi}_{i-1}), d_2(\overline{\chi}_{i-1}), \ldots, d_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1})\} = \mathbb{F}_q \setminus \{0\} \tag{2}$$

для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$, где

$$d_j(\overline{\chi}_{i-1}) = \psi(\overline{\chi}_{i-1}, \alpha^j) - \psi(\overline{\chi}_{i-1}, 0) = \sum_{n=1}^{q-1} (\alpha^j)^n \psi_n(\overline{\chi}_{i-1}),\ j = 1, 2, \ldots, q-1, \tag{3}$$

и α — первообразный корень из $\mathbb{F}_q$. Причем функция $\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ имеет следующую форму:

$$\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_0(\overline{\chi}_{i-1}) + \chi_i \cdot \psi_1(\overline{\chi}_{i-1}) + \cdots + \chi_i^{q-2} \cdot \psi_{q-2}(\overline{\chi}_{i-1}), \tag{4}$$

где по $+$ обозначается сложением в поле $\mathbb{F}_q$, по $\cdot$ обозначается умножением в поле $\mathbb{F}_q$, и $\psi_0, ..., \psi_{q-2}$ — функции из $\mathbb{F}_q^i$ в $\mathbb{F}_q$, которые не зависят от χ_i.

Замечание 4. *Поскольку любая функция ψ имеет полиномиальное представление над любом конечным полем, необходимо подчеркнуть, что несмотря на несколько попыток (Например, [8] при $p = 3$ и [21] при $p = 5$) задача о биективности таких полиномов в общем виде т. е., описания биективных полиномов над произвольным конечным полем в терминах их коэффициентов, до сих пор не решена, но авторы этой работы успешно написали критерий биективности для функций от нескольких фиксированных переменных (См. теорему 1) над любом канечным полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^k, k \in \mathbb{N}$ для любой нечетной простой характеристики p поля Галуа $\mathbb{F}_q$ из $q = p^k$ элементов.*

Используя теорему 1 получается следующая теорема 2.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, p — нечетное простое число, и пусть 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ представлена в терминах координатных функций в виде*

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \cdot p^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) \cdot p^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\chi_i = \delta_i(x) \in \mathbb{F}_p$, и $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) = \delta_i(f(x)) \in \mathbb{F}_p$ является функцией p-значной логики от $i+1$ переменных в $\mathbb{F}_p$. Функция (5) сохраняет меру Хаара μ_p тогда и только тогда, когда

$$\{d_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}), d_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1}), \ldots, d_{i,p-1}(\overline{\chi}_{i-1})\} = \mathbb{F}_p \setminus \{0\} \tag{6}$$

для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого i, где

$$d_{i,j}(\overline{\chi}_{i-1}) = \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \alpha^j) - \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 0) = \sum_{n=1}^{p-1} (\alpha^j)^n \psi_{i,n}(\overline{\chi}_{i-1}),\ j = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{7}$$

и α — первообразный корень из $\mathbb{F}_p$. Причем каждая i-я координатная функция $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ имеет следующую форму:

$$\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1}) \oplus_p \chi_i \odot_p \psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) \oplus_p \cdots \oplus_p \chi_i^{p-2} \odot_p \psi_{i,p-2}(\overline{\chi}_{i-1}), \tag{8}$$

где $\oplus_p$ — сложение по модулю p, $\odot_p$ — умножение по модулю p и $\psi_{i,0}, \psi_{i,1}, \ldots, \psi_{i,p-2}$ — функции из $\mathbb{F}_p^i$ в $\mathbb{F}_p$, которые не зависят от χ_i.

Промежуточным примером 1-липшицева функции из $\mathbb{Z}_p$ в себя является так называемый *обобщенный мультипликативный обратный* inv_p (Например, см. [7, стр. 279; 301]), определяемый следующим образом:

$$inv_p(x) = \begin{cases} p^{ord_p x} \cdot \left(\dfrac{x}{p^{ord_p x}}\right)^{-1}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $ord_p x$ — p-адический показатель рационального числа $x \in \mathbb{Q}$, который получается очень просто: если $x \in \mathbb{Z}$, то $ord_p x$ равен высшей степени p, которая является делителем x; если $x = a/b : b \neq 0$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, то $ord_p x = ord_p a - ord_p b$, и $ord_p 0 = +\infty$. Для получения более подробной информации о p-адическом анализе можно обратиться, например, к классическим книгам [2], [3], [4], а к книге [24], более современной и дидактической.

2-Адический обобщенный мультипликативный обратный inv_2 из $\mathbb{Z}_2$ в себя позволяет строить большое разнообразие псевдослучайных генераторов и, кроме того, нелинейных (См. [7, пред. 9.35]). В предложении 2 этой работе представляется $inv_3 : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ в терминах его координатных функций на $\mathbb{Z}_3$. Этот результат, эквивалентный [7, лем. 9.33] на кольце целых 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$.

2. Доказательства теорем и дополнительные факты

Доказательство. (Теоремы 1)

Поскольку $z^q = z$ для любого z из $\mathbb{F}_q$, то любая функция $\psi(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ из $\mathbb{F}_q^{i+1}$ в $\mathbb{F}_q$ может быть переписана единственным образом как

$$\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_0(\overline{\chi}_{i-1}) + \chi_i \psi_1(\overline{\chi}_{i-1}) + \cdots + \chi_i^{q-2} \psi_{q-2}(\overline{\chi}_{i-1}) + \chi_i^{q-1} \psi_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) \tag{10}$$

для фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$, где $\psi_0, \ldots, \psi_{q-1}$ — функции из $\mathbb{F}_q^i$ в $\mathbb{F}_q$, которые не зависят от χ_i (Например, см. [5, теор. 1.71, лем. 7.40]).

Известно, что в каждом поле $\mathbb{F}_q$ существует по крайней мере один первообразный корень (См. [5, теор. 2.8]), итак пусть α — первообразный корень из $\mathbb{F}_q$. Тогда все элементы из $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ записываются как α^j с $j = 1, \ldots, q-1$, $\psi(\overline{\chi}_{i-1}, 0) = \psi_0(\overline{\chi}_{i-1})$ и можно переписать (10) как

$$\begin{aligned} \psi(\overline{\chi}_{i-1}, \alpha^j) &= \psi_0(\overline{\chi}_{i-1}) + \alpha^j \psi_1(\overline{\chi}_{i-1}) + \cdots + (\alpha^j)^{q-1} \psi_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) \\ &= \psi_0(\overline{\chi}_{i-1}) + \sum_{n=1}^{q-1} (\alpha^j)^n \psi_n(\overline{\chi}_{i-1}), \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \ldots, q-1$. Пусть

$$\sum_{n=1}^{q-1} (\alpha^j)^n \psi_n(\overline{\chi}_{i-1}) = \psi(\overline{\chi}_{i-1}, \alpha^j) - \psi_0(\overline{\chi}_{i-1}) = d_j(\overline{\chi}_{i-1}),$$

итак получается (3) корректно определено.

Важно заметить, что $\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ является биективной (т. е. перестановкой) в $\mathbb{F}_q$ тогда и только тогда, когда имеет место (2), т. е. тогда и только тогда, когда

$$\{d_1(\overline{\chi}_{i-1}), d_2(\overline{\chi}_{i-1}), \ldots, d_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1})\} = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}.$$

Если бы это не было так, то по крайней мере два элемента из $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-1}$ были бы равными, а это противоречит тому факту, что они все являются различными ненулевыми элементами

из $\mathbb{F}_q$. Также, когда (2) выполняется, это эквивалентно тому, что (11) выполняется, потому что $\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ является биективной тогда и только тогда, когда из

$$\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \gamma_i)$$

следует, что $\chi_i = \gamma_i$ для всех $\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i$, или, что эквивалентно, когда для $j = 1, 2, \ldots, q-1$ имеет место

$$\{\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 0), \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \alpha^j)\} = \mathbb{F}_q. \tag{11}$$

Теперь доказывается, что если ψ биективна в условиях теоремы 1, то $\psi(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ имеет форму (4). Для этого предполагается, что $\psi(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ является биективной (т. е. перестановкой) в $\mathbb{F}_q$ для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$, т. е. если $\chi_i \neq \gamma_i$, то $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) \neq \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \gamma_i)$, и доказывается, что в (10) $\chi_i^{q-1}\psi_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) = 0$ тождественно для всех $\overline{\chi}_{i-1}$.

Из (3) получается следующая система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{q-1} \\ \alpha^2 & (\alpha^2)^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{q-2} & (\alpha^{q-2})^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^{q-2} \\ \alpha^{q-1} & (\alpha^{q-1})^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{q-2} \\ \psi_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{q-2} \\ d_{q-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Пусть $M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{q-1} \\ \alpha^2 & (\alpha^2)^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{q-2} & (\alpha^{q-2})^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^{q-2} \\ \alpha^{q-1} & (\alpha^{q-1})^2 & \ldots & (\alpha^{q-1})^{q-1} \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов системы (12), тогда определитель матрицы M, обозначенный как $det(M)$, редуцируется к известному определителю Вандермонда порядка $q-1$. По такому определению (Например, см. [9, стр. 55]), и так как для всех ненулевых элементов β из $\mathbb{F}_q$ выполняется, что $\prod_{\beta \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}} \beta = -1$, то

$$det(M) = -\prod_{1 \leq i < j \leq q-1} (\alpha^j - \alpha^i) \neq 0,$$

поскольку $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-1}$ — различные ненулевые элементы из $\mathbb{F}_q$. Тогда, из (12) следует, что

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{q-2} \\ \psi_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \ldots & -\alpha^{-(q-1)} \\ -\alpha^{-2} & -(\alpha^2)^{-2} & \ldots & -(\alpha^{q-1})^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha^{-(q-2)} & -(\alpha^{q-2})^{-2} & \ldots & -(\alpha^{q-1})^{-(q-2)} \\ -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{q-2} \\ d_{q-1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\begin{pmatrix} -\alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \ldots & -\alpha^{-(q-1)} \\ -\alpha^{-2} & -(\alpha^2)^{-2} & \ldots & -(\alpha^{q-1})^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha^{-(q-2)} & -(\alpha^{q-2})^{-2} & \ldots & -(\alpha^{q-1})^{-(q-2)} \\ -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$.

Для выполнения (11) необходимо и достаточно, чтобы в (2) было справедливо

$$d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_{q-1} \neq 0,$$

а исходя из (12-13) так и есть. Нужно заметить, что в (13) все элементы в последней строке матрицы M^{-1} тождественно равны -1, а также из (13) получается, что

$$\psi_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) = -d_1(\overline{\chi}_{i-1}) - d_2(\overline{\chi}_{i-1}) - \cdots - d_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) = -\sum_{\beta\in\mathbb{F}_q\setminus\{0\}} \beta = 0, \tag{14}$$

откуда следует, что $\chi_i^{q-1}\psi_{q-1}(\overline{\chi}_{i-1}) = 0$ для всех $\overline{\chi}_{i-1}$. Здесь завершается доказательство теоремы 1. □

Замечание 5. *Равенство* (14) *не выполняется в случае* $p = 2$, *таким образом, методика разработки доказательств этой работы не применима при* $p = 2$. *Опять же, как часто происходит, когда требуется проанализировать случаи, в которых участвуют простые числа* $p = 2$ *и* $p \neq 2$, *алгебраические и/или арифметические методы при* $p = 2$ *не оперируют при* $p \neq 2$, *или наоборот. Однако, при* $p = 2$ *результат, эквивалентный теореме 2 уже известен. Чтобы ознакомиться с результатом, подобным теореме 2 в случае* $p = 2$, *т. е. на кольце целых 2-адических чисел* $\mathbb{Z}_2$, *можно взглянуть на известную теорему 4.39 из [7].*

Пежде чем перейти к доказательству теоремы 2, нужно дать дополнительные определения и напомнить известные результаты.

Определение 1. *[6, определение. 1.1] (Функция, сохраняющая меру Хаара и эргодическая функция) Пусть* S *и* T *— пространства с мерами* μ *и* τ *соответственно,* $f\colon S \to T$ *— измеримая функция (т. е., каждое* $f^{-1}(U)$ μ*-измеримо при* τ*-измеримом* $U \subseteq T$*). Функцию* f *назовем пропорциональной, если для любых двух* μ*-измеримых множеств* $U, V \subseteq T$ *выполняется* $\mu\left(f^{-1}(U)\right) = \mu\left(f^{-1}(V)\right)$ *как только* $\tau(U) = \tau(V)$. *Если* μ, τ *— вероятностные меры (например, меры Хаара, нормированные так, что* $\mu(S) = 1$, $\tau(T) = 1$*), то пропорциональная функция называется равновероятной. В случае, когда* $S = T$ *и* $\mu = \tau$, f *сохраняет меру, если* $\mu\left(f^{-1}(U)\right) = \mu(U)$ *для каждого измеримого подмножества* U. *Наконец, если* f *сохраняет меру и* $f^{-1}(U) = U$ *влечет либо* $\mu(U) = 0$, *либо* $\mu(U) = 1$ *для каждого* μ*-измеримого* U, *то говорят, что* f *эргодична.*

Определение 2. *(Биективные по модулю* p^k *и транзитивные 1-липшицевы функции)*

(а) 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ *называется биективной по модулю* p^k, *когда индуцированное отображение* $x \mapsto f(x) \pmod{p^k}$ *есть перестановка элементов кольца* $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ *для всех* $k = 1, 2, 3, \ldots$.

(б) Биективная 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ *называется транзитивной по модулю* p^k, *когда множество* $\left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p^k-1}(x)\right\}$ *состоит ровно из* p^k *различных вычетов по модулю* p^k *для всех* $k = 1, 2, \ldots$, *где* $f^0(x) = x$, *и* $f^j(x) = f(f^{j-1}(x))$ *для* $j = 1, 2, \ldots, p^k - 1$. *Другими словами,* $f^{p^k}(x) \equiv x \pmod{p^k}$, *но* $f^r(x) \not\equiv x \pmod{p^k}$ *для всех* $r < p^k$.

По теореме 4.23 из [7] если в определении 1 $S = T = \mathbb{Z}_p$ и $\mu = \tau = \mu_p$ (нормированная мера Хаара на $\mathbb{Z}_p$), то 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ сохраняет меру Хаара μ_p тогда и только тогда, когда она является биективной на $\mathbb{Z}_p$ т. е., тогда и только тогда, когда ее индуцированное отображение по модулю p^k $f(x) \pmod{p^k} = f_k\colon \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ является биективной на каждом кольце вычетов $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Эквивалентно, 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ сохраняет меру Хаара μ_p на $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $f_k\colon \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ является перестановкой на каждом кольце вычетов $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Также, по теореме 4.23 из [7], 1-липшицева функция, которая сохраняет меру Хаара, является эргодической тогда и только тогда, когда она транзитивна по модулю p^k для каждого положительного целого числа k.

Доказательство. (Теоремы 2)

Принимая во внимание все вышесказанное, можно доказать сохранение меры Хаара функцией $f(x)$ в форме (5) тогда и только тогда, когда выполняется (6). Как уже наблюдалось выше, это эквивалентно доказательству ее биективности. И как только $f(x)$ в форме (5) является биективной, доказывается, что каждая $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ имеет форму (8) для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого i. Чтобы функция (5) сохраняла меру Хаара, то по теореме 3.1 из [10] необходимо и достаточно доказать, что каждая функция $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ биективна (т. е. является перестановкой) в $\mathbb{F}_p$ для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого $i \geq 0$, а по теореме 1 так и есть в случаем $q = p$, где p — нечетное простое число. □

Замечание 6. *Важно отметить связь между формой координатных функций в равенстве* (8) *и уже известным результатом теоремы 8.21 из [1], где обнаруживается тот особый факт, что биективный полином над конечным полем из p элементов имеет степень меньше либо равную* $p-2$. *Неудивительно, что такая связь существует, потому что каждая координатная функция* $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ *в* (8) *может быть рассмотрена в различных формах представления, а именно как p-значная функция, отображающая множество* $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ *в себя, и как преобразование поля* $\mathbb{F}_p$ *в себя, которое может быть задано с помощью многочлена над этим полем, так как поле* $\mathbb{F}_p$ *полиномиально полно. Это значит, что биективная i-я координатная функция* $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$, *может быть задана над полем* $\mathbb{F}_p$ *с помощью многочлена вида* $\psi_i(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{p-2}x^{p-2}, \alpha_r \in \mathbb{F}_p$. *На первый взгляд кажется, что теорема 2 совпадает с результатом, уже известным в теореме 8.21 из [1], но вышеизложенный анализ подтверждает, что это не так. Доказательство этого факта в теореме 2 другое, не то, что в монографии [1]. Кроме того, математические методы доказательства теоремы 2 из этой работы и теоремы 8.21 из [1] не совпадают.*

При $p \neq 2$, ниже приводятся два следствия теоремы 2 на $\mathbb{Z}_p$, свидетельствующие об обобщении результата, полученного в [29] о сохранении меры Хаара на $\mathbb{Z}_3$.

Следствие 1. *Пусть* $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = c \odot_p \chi_i \oplus_p \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1}), c \neq 0$ *такая, что* $d_{i,j}(\overline{\chi}_{i-1}) = c\alpha^j, j = 1, 2, \ldots, p-1$, *тогда функция* (5) *сохраняет меру Хаара* μ_p.

Доказательство. (Следствия 1) В условиях вышеприведенного следствия, (13) превращается в

$$\begin{pmatrix} \psi_{i,1} \\ \psi_{i,2} \\ \vdots \\ \psi_{i,p-2} \\ \psi_{i,p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \ldots & -\alpha^{-(p-1)} \\ -\alpha^{-2} & -(\alpha^2)^{-2} & \ldots & -(\alpha^{p-1})^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha^{-(p-2)} & -(\alpha^{p-2})^{-2} & \ldots & -(\alpha^{p-1})^{-(p-2)} \\ -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\alpha \\ c\alpha^2 \\ \vdots \\ c\alpha^{p-2} \\ c\alpha^{p-1} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\psi_{i,j} = \begin{cases} c, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1, \end{cases} \tag{15}$$

тогда, по (15) и по (10), следствие 1 доказано, поскольку из

$$d_{i,j}(\overline{\chi}_{i-1}) = c\alpha^j, j = 1, 2, \ldots, p-1$$

следует, что (11) выполняется, так как $\{c\alpha^j\} = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ для таких c, α и j. □

Ниже приводится следствие 2 теоремы 2 этой работы. Заинтересованный читатель может увидеть его полное доказательство как первая часть теоремы из [29].

Следствие 2. *Пусть $\mathbb{Z}_3$ — кольцо целых 3-адических чисел, и пусть 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ представлена в терминах координатных функций в виде*

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \cdot 3^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) \cdot 3^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где $\chi_i = \delta_i(x) \in \mathbb{F}_3$ и $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) = \delta_i\left(f(x)\right) \in \mathbb{F}_3$ является функцией 3-значной логики от $i+1$ переменных в $\mathbb{F}_3$. Функция (16) сохраняет меру Хаара μ_3 тогда и только тогда, когда каждая i-я координатная функция $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ имеет следующую форму:

$$\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1}) \oplus_3 \psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) \odot_3 \chi_i, \tag{17}$$

для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого i, где $\oplus_3$ — сложение по модулю 3, $\odot_3$ — умножение по модулю 3 и $\psi_{i,0}, \psi_{i,1}$ — функции 3-значной логики, заданные на $\mathbb{F}_3^i$ и принимающие значения в $\mathbb{F}_3$, причем $\psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) \neq 0$ для всех $\overline{\chi}_{i-1}$.

Доказательство. (Следствия 2) Для того, чтобы сделать обозначение проще, в этом случае будет написано знак $+$ вместо знак $\oplus_3$, и вместо $\odot_3$ просто его отсутствие.

Очевидно, что если (16) сохраняет меру Хаара μ_3, то каждая координатная функция $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ функции $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ имеет форму (17) и это все по применению теоремы 2 в конкретном случае $p = 3$.

Чтобы проверить вышеизложенное, по теореме 2 функция (16) сохраняет меру Хаара μ_3 тогда и только тогда, когда

$$\{d_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}), d_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1})\} = \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \tag{18}$$

или, что эквивалентно, когда для $j = 1, 2$ имеет место

$$\{\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 0), \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 2^j)\} = \mathbb{F}_3. \tag{19}$$

Дальше рассматривается, как вышеизложенное удовлетворяется на $\mathbb{Z}_3$.

Нужно обратить внимание на то, что все элементы из $\mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ можно записать как 2^j с $j = 1, 2$, тогда $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 0) = \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1})$ и пусть

$$d_{i,j}(\overline{\chi}_{i-1}) = \sum_{n=1}^{2} (2^j)^n \psi_{i,n}(\overline{\chi}_{i-1}) = \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, 2^j) - \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1}), \tag{20}$$

по (6), где вместо α было взято 2 в качестве первообразного корня в $\mathbb{F}_3$ (см. теорему 2), т. е. в теореме 2 нужно взять $a\alpha = 2$ для применения операций на $\mathbb{Z}_3$, чтобы доказать сохранение меры Хаара в следствии 2. Таким образом, по (20) (или по (6) при $p = 3$ и при $\alpha = 2$), получается следующая система:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{i,1} \\ \psi_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Из (21) следует, что

$$\begin{pmatrix} \psi_{i,1} \\ \psi_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Для выполнения (19) необходимо и достаточно, чтобы в (18) было справедливо

$$d_{i,1} \neq d_{i,2} \neq 0,$$

а исходя из (21-22) так и есть. Можно заметить, что в (22) все элементы в последней строке тождественно равны -1, а также из (22) получается, что $\psi_{i,2} = -d_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) - d_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1})$, откуда следует, что $\chi_i^2 \psi_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1}) = 0$ для всех $\overline{\chi}_{i-1}$, а это и значит, что каждая координатная функция $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ функции $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ имеет форму (17) как и предполагалось.

Теперь доказывается следствие 2 с другой стороны: если каждая координатная функция $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ функции $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ имеет форму (17), и также каждая из них удовлетворяет условиям следствия 1, то функция $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ сохраняет меру Хаара μ_3 именно по такому следствию 1. Другими словами, если в условиях теоремы 2, $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ имеет форму (17), значит:

$$\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1}) + \chi_i \psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}),$$

то из (22) следует, что для таких функций выполнено

$$d_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) = \psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}), d_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1}) = -\psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}).$$

Но, поскольку $\psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) \neq 0$, тогда имеет место неравенство

$$d_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) \neq d_{i,2}(\overline{\chi}_{i-1}) \neq 0,$$

и из него следует, что $\psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i)$ является перестановкой (т. е. биективной) в $\mathbb{F}_3$, и таким образом функция $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ сохраняет меру Хаара μ_3, еще раз по применению теоремы 2. □

Ниже формулируется теорема 3. Заинтересованный читатель может увидеть ее полное доказательство в [29].

Теорема 3. *[29] Пусть 1-липшицева функция $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ представлена в терминах координатных функций в виде*

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \cdot 3^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) \cdot 3^i,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\chi_i = \delta_i(x) \in \{0, 1, 2\}$ и $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) = \delta_i\left(f(x)\right) \in \{0, 1, 2\}$ является функцией 3-значной логики от $i+1$ переменных в $\{0, 1, 2\} = \mathbb{F}_3$. Функция f сохраняет меру Хаара μ_3 тогда и только тогда, когда каждая i-я координатная функция $\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i)$ имеет следующую форму:

$$\psi_i(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_i) = \psi_{i,0}(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1}) \oplus_3 \psi_{i,1}(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1}) \odot_3 \chi_i \tag{23}$$

для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$ и для каждого i, где $\oplus_3$ — сложение по модулю 3, $\odot_3$ — умножение по модулю 3 и $\psi_{i,0}, \psi_{i,1}$ — функции 3-значной логики, заданные на $\mathbb{F}_3^i$ и принимающие значения в $\mathbb{F}_3$, причем $\psi_{i,1}(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1}) \neq 0$ для всех $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$.

Сверх того, функция f эргодична тогда и только тогда, когда в (23) $\psi_{i,1}(\overline{\chi}_{i-1}) = 1$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $\psi_0 = \chi_0 \oplus_3 1, \psi_i = \chi_i \oplus_3 \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1})$ для всех $i \geq 1$ и $\psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1})$ имеет $\sigma = 1$;

2) $\psi_0 = \chi_0 \oplus_3 2, \psi_i = \chi_i \oplus_3 \psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1})$ для всех $i \geq 1$ и $\psi_{i,0}(\overline{\chi}_{i-1})$ имеет $\sigma = 2$,

где σ — сумма по модулю 3 всех ненулевых значений функций $\psi_{i,0}$ от i переменных во всех точках из $\mathbb{F}_3^i$.

По следствию 2, функция f сохраняет меру Хаара μ_3 в тех и только в тех случаях, удовлетворяющих условям теоремы 3. Так, что далее рассматривается вторая часть теоремы 3, касающаяся эргодичности (См. теорему в [29]).

Теперь, можно представить $inv_3\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ в терминах его координатных функций на $\mathbb{Z}_3$. Чтобы вспомнить, что такое inv_3 см. (9) для случая $p = 3$.

Предложение 2. *Пусть $p = 3$. Функция $inv_3 \colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ имеет следующие представление в терминах ее координатных функций:*

$$\delta_i(inv_3(x)) = \psi_i(\overline{\chi}_{i-1}, \chi_i) = \varphi_i(\overline{\chi}_{i-1}) \oplus_3 \vartheta_i(\overline{\chi}_{i-1}) \odot_3 \chi_i, \tag{24}$$

для любого фиксированного $\overline{\chi}_{i-1} = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{i-1})$, где $\delta_i(x) = \chi_i$, $\varphi_0 = 0, \vartheta_0 = 1$ и каждая функция $\varphi_i(\overline{\chi}_{i-1})$ и $\vartheta_i(\overline{\chi}_{i-1})$ имеет нулевую сумму по модулю 3 всех ее значений для всех $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. (Предложения 2)

Функция $inv_3(x)$ — это биективная 1-липшицева функция. По определению $inv_3(x)$, легко проверить, что $inv_3(x)$ является 1-липшицевой функцией и биективной функцией, тогда $inv_3(x)$ сохраняет меру Хаара μ_3 по теореме 4.23 из [7], и следовательно, представление функций $inv_3(x)$ в терминах ее координатных функций имеет форму (24) по следствию 2.

В (24) $\varphi_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$, поскольку $inv_3(x)$ тразитивна по модулю 3, но не тразитивна по модулю 9, откуда также следует, что $inv_3(x)$ не эргодична. Тогда по теореме 3 каждая функция $\varphi_i(\overline{\chi}_{i-1})$ и $\vartheta_i(\overline{\chi}_{i-1})$ имеет $\sigma = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. □

3. Заключение

В результате этой работы решены задачи по разработке конечных полей $\mathbb{F}_q$ (или поля Галуа) из p^k элементов и по p-адической теории, особенно на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ для нечетного простого числа p. В частности, результаты связаны с функциями от нескольких фиксированных переменных в поле Галуа $\mathbb{F}_q$, и с 1-липшицевыми функциями (в терминах их координатных функций, см. (1)) из $\mathbb{Z}_p$ в себя, которые сохраняют нормированную меру Хаара μ_p. Далее p — любое нечетное простое число, $\psi \colon \mathbb{F}_q^{i+1} \to \mathbb{F}_q$, и $f \colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, тогда результаты этой работы являются новыми и состоят в следующем: Доказаны необходимые и достаточные условия, при которых функция ψ от нескольких переменных фиксированных в поле Галуа $\mathbb{F}_q$ является биективной (См. теорему 1); доказаны необходимые и достаточные условия, при которых 1-липшицева функция $f(x)$ в терминах ее координатных функций сохраняет нормированную меру Хаара μ_p на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$, и, сверх того, дана форма, которую имеют такие координатные функции на $\mathbb{Z}_p$ (См. теорему 2); доказано, что если форма каждой координатной функции 1-липшицевой функции $f(x)$ линейна по отношению к самой старшей переменной, то функция $f(x)$ сохраняет нормированную меру Хаара μ_p, и, кроме того, в этом случае дана форма, которую имеет каждая из таких координатных функций на $\mathbb{Z}_p$ (См. следствие 1); найдено представление обобщенного мультипликативного обратного $inv_3 \colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ в терминах его координатных функций на кольце целых 3-адических чисел $\mathbb{Z}_3$ (См. предложение 2).

Данные результаты могут применяться при взятии 1-липшицевых функций (или их композиций) из $\mathbb{Z}_p$ в себя, сохраняющих меру Хаара μ_p на $\mathbb{Z}_p$ в качестве функций выхода и перехода псевдослучайных генераторов. Читатель, заинтересованный в том, чтобы убедиться в связи между 1-липшицевыми функциями из $\mathbb{Z}_p$ в себя и выходными и переходными функциями псевдослучайных генераторов, может обратиться, например, к монографии [7].

Первый автор этой работы благодарит к.ф.-м.н. И. А. Юрова (Главный эксперт по защите информации АО "НИИАС"), д.ф.-м.н., проф. С. Б. Гашкова (Кафедра дискретной математики Мехмат-МГУ), и д.ф.-м.н., проф. В. С. Анашина (Кафедра информационной безопасности ВМК-МГУ) за конструктивные замечания о теореме 2 в научно-квалификационной работе (Неархимедовы методы синтеза и анализа криптопримитивов) по его специальности «Информационная безопасность, методы и системы защиты информации» (Кафедра информационной безопасности ВМК-МГУ) 14 сентября 2022 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lausch H., Nöbauer W. Algebra of Polynomials//North-Holl. Publ. Co, American Elsevier Publ. Co. 1973.

2. Mahler, K. p-Adic Numbers and Their Functions//Cambridge University Press, Cambridge. 1981. 2nd.

3. Koblitz, N. p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions//Springer, Berlin. 1984. Vol. 58. 2nd.

4. Schiknof, W. H. Ultrametric Calculus//Cambridge University Press, Cambridge. 1984.

5. Лидл Р., Нидеррайтер Г., Конечные поля//Мир. Москва. 1988.

6. Анашин В. С., Равномерно распределенные последовательности целых p-адических чисел//Матем. заметки. **55**. № 2. С. 3–46. 1994.

7. Anashin V., Khrennikov A. Applied Algebraic Dynamics//De Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 49, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2009.

8. Durand, F., Paccaut, F. Minimal polynomial dynamics on the set of 3-adic integers//Bull. London Math. Soc. 2009. Vol. 42, № 2, P. 302-314.

9. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О., Линейная алгебра и геометрия//Физматлит. 2009.

10. Khrennikov A., Yurova E. Criteria of ergodicity for p-adic dynamical systems in terms of coordinate functions//Chaos, Solitons and Fractals. Vol. 60. P. 11–30. 2014.

11. Yurova E. A., Khrennikov A. Y., Generalization of Hensel lemma: finding the roots of p-adic Lipschitz functions//J. Number Theory. Vol. 158, P. 217–233. 2016.

12. Memic, N. Ergodicity conditions on the group of 3-adic integers// Colloquium Mathematicum. 2016.

13. Memic, N. Ergodic Polynomials on Subsets of p-Adic Integers//p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2016. Vol. 8. № 2. P. 149-159.

14. Юрова Аксельссон Е. И., Хренников А. Ю. Подкоординатное представление p-адических функций и обобщение леммы Гензеля//Изв. РАН. Сер. матем. 2018. **82**, № 3. С. 192-206.

15. Wang, S., Hu, B., Liu, Y. The autocorrelation properties of single cycle polynomial T-function//Des. Codes Cryptogr. 2018. Vol. 86. P. 1527-1540.

16. Sangtae, J. Measure-preservation and the existence of a root of p-adic 1-Lipschitz functions in Mahlers expansion//p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2018. Vol. 10, № 3. P. 192-208.

17. da Silva, D. W., de Araujo, C. P., Chow, E., Barillas, B. S. A new approach towards fully homomorphic encryption over geometric algebra//IEEE/10th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON). 2019. P. 0241-0249.

18. Khrennikov, A. Y., Yurova, E. A. Description of (fully) homomorphic cryptographic primitives within the p-adic model of encryption//Springer. 2019. P. 241-148.

19. Khrennikov A. Y., Yurova E. A. Description of (fully) homomorphic cryptographic primitives within the p-adic model of encryption. In Analysis, Probability, Applications, and Computation, pages//Springer. 2019. P. 241–248.

20. Furno, J. Natural extensions for p-adic β-shifts and other scaling maps//Indagationes Mathematicae. 2019. Vol. 30. P. 1099-1108.

21. Kim D., Kwon Y., K. Song K. Minimality of 5-adic polynomial dynamical systems//Dynamical Systems: An International Journal. 2020. Vol. 35. №. 4, P. 584-596.

22. da Silva, D. W. A Mathematical Framework Towards Efficient Clifford-Based Homomorphic Cryptosystems Using p-Adic Numbers//University of Colorado Colorado Springs. 2020.

23. Memić , N. Mahler coefficients of uniformly differentiable functions modulo p// International Journal of Number Theory. 2020.

24. Gouvêa, F. Q. p-adic Numbers An Introduction//Springer. 2020. 3rd.

25. da Silva, D. W., Harmon, L. and Delavignette, G., Araujo, C. Leveled Fully Homomorphic Encryption Schemes with Hensel Codes//Cryptology ePrint Archive. 2021.

26. Anashin, V. S. The p-adic Theory of Automata Functions//Springer. 2021. 9-113.

27. Memic, N. Mahler Coefficients of Some 3-adic Ergodic Functions//Acta Mathematica Vietnamica. 2021.

28. Zúñiga-Galindo, W., Bourama, T. Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications: The p-adic Methodology in STEAM-H//Springer Nature. 2021.

29. Лопес А., О сохранении меры и эргодичности 1-липшицевых функций на кольце целых 3-адических чисел в терминах координатных функций//Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. № 2. С. 30-33. 2022.

REFERENCES

1. Lausch H. & Nöbauer W., 1973, "Algebra of Polynomials", *North-Holl. Publ. Co, American Elsevier Publ. Co.*

2. Mahler, K., 1981, "p-Adic Numbers and Their Functions", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2nd.

3. Koblitz, N., 1984, "p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions", *Springer*, Berlin, vol. 58, 2nd.

4. Schiknof, W. H., 1984, "Ultrametric Calculus", *Cambridge University Press*, Cambridge.

5. Lidl R., & Niederreiter H., 1988, "Finite Fields", *Mir*, Moscow.

6. Anashin, V. S., 1994, "Uniformly Distribueted Sequences of p-Adic Integers", *Matematicheskie Zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 3-46.

7. Anashin V. & Khrennikov A., 2009, "Applied Algebraic Dynamics", *De Gruyter Expositions in Mathematics*, vol. 49, Berlin, New York: Walter de Gruyter.

8. Durand, F. & Paccaut, F., 2009, "Minimal polynomial dynamics on the set of 3-adic integers", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 42, no. 2, pp. 302-314.

9. Shafarevich I. R. & Remizov A. O. "Linear Algebra and Geometry"//Fizmatlit. 2009.

10. Khrennikov A. & Yurova E., 2014, "Criteria of ergodicity for p-adic dynamical systems in terms of coordinate functions", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 60, pp. 11–30.

11. Yurova, E. A. & Khrennikov, A. Y., 2016, "Generalization of Hensel lemma: finding the roots of p-adic Lipschitz functions", *J. Number Theory*, vol. 158, pp. 217–233.

12. Memic, N., 2016, "Ergodicity conditions on the group of 3-adic integers", *Colloquium Mathematicum.*

13. Memic, N., 2016, "Ergodic Polynomials on Subsets of p-Adic Integers", *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, vol. 8, no. 2, pp. 149-159.

14. Yurova, E. A. & Khrennikov, A. Y., 2018, "Subcoordinate representation of p-adic functions and generalization of Hensel lemma", *Izvestiya RAN : Ser. Mat.*, vol. 82, no. 3, pp. 192-206.

15. Wang, S., Hu, B. & Liu, Y., 2018, "The autocorrelation properties of single cycle polynomial T-function", *Des. Codes Cryptogr*, vol. 86, pp. 1527-1540.

16. Sangtae, J., 2018, "Measure-preservation and the existence of a root of p-adic 1-Lipschitz functions in Mahlers expansion", *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 192-208.

17. da Silva, D. W., de Araujo, C. P., Chow, E. & Barillas, B. S., 2019, "A new approach towards fully homomorphic encryption over geometric algebra", *IEEE/10th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*, pp. 0241-0249.

18. Khrennikov, A. Y. & Yurova, E. A., 2019, "Description of (fully) homomorphic cryptographic primitives within the p-adic model of encryption", *Springer*, pp. 241-148.

19. Khrennikov A. Y. & Yurova E. A., 2019, "Description of (fully) homomorphic cryptographic primitives within the p-adic model of encryption. In Analysis, Probability, Applications, and Computation, pages", *Springer*, pp. 241–248.

20. Furno, J., 2019, "Natural extensions for p-adic β-shifts and other scaling maps", *Indagationes Mathematicae*, vol. 30, pp. 1099-1108.

21. Kim D., Kwon Y., K. Song K., 2020, "Minimality of 5-adic polynomial dynamical systems", *Dynamical Systems: An International Journal.* vol. 35, no. 4, pp. 584-596.

22. da Silva, D. W., 2020, "A Mathematical Framework Towards Efficient Clifford-Based Homomorphic Cryptosystems Using p-Adic Numbers", *University of Colorado Colorado Springs.*

23. Memić, N., 2020, "Mahler coefficients of uniformly differentiable functions modulo p", *International Journal of Number Theory.*

24. Gouvêa, F. Q., 2020, "p-adic Numbers An Introduction", *Springer*, 3rd.

25. da Silva D. W., Harmon L., Delavignette G. & Araujo C., 2021, "Leveled Fully Homomorphic Encryption Schemes with Hensel Codes", *Cryptology ePrint Archive.*

26. Anashin, V. S., 2021, "The p-adic Theory of Automata Functions", *Springer*, pp. 9-113.

27. Memic, N., 2021, "Mahler Coefficients of Some 3-adic Ergodic Functions", *Acta Mathematica Vietnamica.*

28. Zúñiga-Galindo, W. & Bourama, T., 2021, "Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications: The p-adic Methodology in STEAM-H", *Springer Nature*.

29. López, A. P. 2022, "Measuring Preservation and Ergodicity of 1-Lipschitz Functions on the Ring of 3-Adic Integers in Terms of Coordinate Functions", *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya 15*, vol. 46, no. 2, pp. 30-33.

Получено: 31.05.23
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023–24-4-206-211

Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток[1]

Н. В. Максименко, И. Ю. Реброва

Максименко Наталья Викторовна — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрено множество всевозможных рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой, и изучены свойства этого функционального пространства над полем комплексных чисел.

Введено новое понятие *C θ-степенная плотность* ряда Дирихле. Установлена связь между C θ-степенной плотностью ряда Дирихле и абсциссой его абсолютной сходимости.

Установлено, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > \theta_1$, кроме точки $\alpha = \theta$, в которой у неё полюс первого порядка с вычетом $C\theta$.

Введено новое понятие *C логарифмическая θ-степенная плотность* ряда Дирихле. Установлено, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_f = 0$ и ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ — голоморфная функция во всей правой α-полуплоскости с $\sigma > 0$.

Показано, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
Н. В. Максименко, И. Ю. Реброва. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 206–211.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023–24-4-206-211

The space of Dirichlet series to multivariate lattices[2]

N. V. Maksimenko, I. Yu. Rebrova

Maksimenko Natalia Viktorowna — postgraduate student, Orenburg state University (Orenburg).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The work considers the set of all possible Dirichlet series generated by a given lattice, and studies the properties of this function space over the field of complex numbers.

A new concept of C *θ-power density* of a Dirichlet series is introduced. A connection is established between the C θ-power density of the Dirichlet series and the abscissa of its absolute convergence.

It is established that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ satisfies the conditions of the generalized Selberg lemma with $\theta_1 < \theta$, then the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ extends analytically into the half-plane with $sigma > \theta_1$, except for the point $\alpha = \theta$, at which it has a first-order pole with a subtraction of $C\theta$.

A new concept C *logarithmic θ-power density* of the Dirichlet series is introduced. It has been established that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ has C logarithmic θ-power density and $\theta < 1$, then the abscissa of absolute convergence holds the equality $\sigma_f = 0$ and The Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ is a holomorphic function in the entire right α-half-plane with $\sigma > 0$.

It is shown that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ has C logarithmic θ-power density and $\theta < 1$, then The holomorphic domain of the zeta function $\zeta(M|\alpha)$ is α-the half-plane $\sigma > 0$.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
N. V. Maksimenko, I. Yu. Rebrova, 2023, “The space of Dirichlet series to multivariate lattices” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 206–211.

1. Введение

В работе [2] определено множество всех рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой Λ, которое обозначается через $\mathbb{D}(\Lambda)$.

Пусть Λ — произвольная s-мерная решётка в $\mathbb{R}^s$. Рядом Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ для решётки Λ называется произвольная функция, заданная равенством

$$f(\alpha|\Lambda) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda} \frac{a(\vec{x})}{(\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by the RSF grant № 23-21-00317 “Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis”.

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки усечённого норменного спектра $Q_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda\backslash\{\vec{0}\}\}, \quad q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s = \lambda_k} a(\vec{x}).$$

Как хорошо известно [3, 4], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma_f^* + 1$.

По теореме Абеля (см. [3], стр. 106)

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad A^*(t) = \sum_{q(\vec{x}) \leqslant t} a(\vec{x}).$$

В работе [2] показано, что ряды Дирихле, порождённые решетками, естественно возникают в теоретико-числовом методе в приближенном анализе и играют в его развитии существенную роль.

Целью данной работы является изучение вопросов сходимости рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой.

2. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток

Выделим подпространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ условием $\sup_{\vec{x} \in \Lambda} |a(\vec{x})| < \infty$. На $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ зададим норму

$$\|f(\alpha|\Lambda)\| = \sup_{\vec{x} \in \Lambda} |a(\vec{x})|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ является несепарабельным банаховым пространством.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле.

Более того, для произвольной решётки Λ произведение двух рядов Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ и $g(\alpha|\Lambda)$, вообще говоря, не является рядом Дирихле $h(\alpha|\Lambda)$, так как для произвольной решётки Λ покоординатное произведение двух точек $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из Λ не является точкой решётки Λ.

Порядком точки λ усечённого норменного спектра называется количество точек $\vec{x}$ решётки Λ, для которых $q(\vec{x}) = \lambda$. Порядок точки λ обозначается через $q(\lambda)$. Нетрудно понять, что величина

$$D(T|\Lambda) = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda),\, \lambda \leqslant T} q(\lambda)$$

— количество точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant T\}$.

Так как

$$D(T|\Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + O\left(\frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda}\right),$$

то для любой решётки Λ абсцисса абсолютной сходимости σ_Λ гиперболической дзета-функции $\zeta(\Lambda|\alpha)$ равна 1.

Отсюда следует, что для любого ряда Дирихле $f(\alpha|\Lambda) \in \mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ для абсциссы абсолютной сходимости σ_f справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant 1$.

3. Степенная плотность и абсцисса абсолютной сходимости

Определение 1. *Будем говорить, что ряд Дирихле удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если* $A^*(t) = Ct^\theta + O\left(t^{\theta_1}\right)$ *и* $\theta_1 < \theta$.

Про такой ряд Дирихле будем говорить, что он имеет C θ*-степенную плотность.*

Заметим, что мы допускаем произвольное значение величины C. В том числе и $C = 0$.

При таком определении C θ-степенной плотности получаем, что множество всех рядов Дирихле с θ-степенной плотностью образуют линейное подпространство, которое будем обозначать через $\mathbb{D}^{(\theta)}(\Lambda)$.

Лемма 1. *Если ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *имеет* C θ*-степенную плотность, то для его абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство* $\sigma_f = \theta$ *и в точке* $\alpha = \theta$ *полюс с вычетом* $C\theta$.

Доказательство. Действительно, из определения C θ-степенной плотности имеем: $A^*(t) = Ct^\theta + R_M(t)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(t)| < \varepsilon t^\theta$ при $t > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [3], стр. 106) имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{Ct^\theta + R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right| < \left| \alpha \int_{\lambda_1}^{N(\varepsilon)} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{|\alpha - \theta| N(\varepsilon)^{\Re(\alpha-\theta)}},$$

то утверждение леммы доказано. □

Лемма 2. *Если ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с* $\theta_1 < \theta$, *то ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *аналитически продолжается в полуплоскость с* $\sigma > \theta_1$, *кроме точки* $\alpha = \theta$, *в которой у неё полюс первого порядка с вычетом* $C\theta$.

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{Ct^\theta + O\left(t^{\theta_1}\right)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_{1}^{\infty} \frac{O\left(t^{\theta_1}\right)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma > \theta_1$, то утверждение леммы доказано. □

Определение 2. *Будем говорить, что ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *имеет* C *логарифмическую* θ*-степенную плотность, если для функции* $A^*(t)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln|A^*(t|)}{\ln^\theta t} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из определения видно, что, если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C θ-степенную плотность, то он имеет θ логарифмическую 1-степенную плотность.

Следующая лемма показывает, что ряды Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ с C логарифмической θ-степенной плотностью при $\theta < 1$ имеют принципиальное отличие.

Лемма 1. *Если ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *имеет* C *логарифмическую* θ*-степенную плотность и* $\theta < 1$, *то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство* $\sigma_f = 0$ *и ряд Дирихле* $f(\alpha|\Lambda)$ *— голоморфная функция во всей правой* α*-полуплоскости с* $\sigma > 0$.

Доказательство. Действительно, из определения C логарифмической θ-степенной плотности имеем: $A^*(t) = e^{C(\ln t)^\theta + R_M(t)}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(t)| < \varepsilon(\ln t)^\theta$ при $t > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [3], стр. 106) имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{e^{C(\ln t)^\theta + R_M(t)}}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{\infty} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{\infty} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| < \left| \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{N(\varepsilon)} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| + \left| \alpha \int_{N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dt}{e^{\alpha t - (C+\varepsilon)t^\theta}} \right|,$$

последний несобственный интеграл при $\theta < 1$ абсолютно сходится при любом α с $\sigma > 0$, то утверждение леммы доказано. □

Дословно повторяя рассуждения из работы [1], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Из этой теоремы сразу следует теорема антиуниверсальности.

Теорема 2. *Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ-степенную плотность и $\theta < 1$, то ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ не является универсальной функцией в смысле Воронина.*

4. Заключение

В данной статье удалось применить подходы, развитые при анализе дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Выражаем свою благодарность профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи и доценту Н. Н. Добровольскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

2. Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, С. 233–246.

3. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

4. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.

2. N. V. Maksimenko, 2020, "The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 233–246.

3. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

4. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено: 07.10.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-212-238

Инвариантные дифференциальные полиномы

Ф. М. Малышев

Малышев Фёдор Михайлович — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Аннотация

На основе предлагаемого в статье способа решения так называемых (r, s)-систем линейных уравнений доказано, что порядки однородных инвариантных дифференциальных операторов n гладких вещественных функций одной переменной принимают значения от n до $\frac{n(n+1)}{2}$, а размерность пространства всех таких операторов не превосходит $n!$. Получена классификация инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s = 1, 2, 3, 4$, а при $n = 4$ для всех порядков от 4 до 10. Единственные с точностью до множителей однородные инвариантные дифференциальные операторы самого маленького порядка n и самого большого порядка $\frac{n(n+1)}{2}$ предоставлены, соответственно, произведением n первых дифференциалов ($s = 0$) и вронскианом ($s = (n - 1)n/2$). Доказано существование ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов порядка $n + s$ для $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n - 1)$.

Ключевые слова: Производная, дифференциал, система линейных уравнений, симплекс, инвариантный дифференциальный оператор.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:
Ф. М. Малышев. Инвариантные дифференциальные полиномы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 212–238.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-212-238

Invariant differential polynomials

F. M. Malyshev

Malyshev Fyodor Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Abstract

Based on the method proposed in the article for solving the so-called (r,s)-systems of linear equations proven that the orders of homogeneous invariant differential operators n of smooth real functions of one variable take values from n to $\frac{n(n+1)}{2}$, and the dimension of the space of all such operators does not exceed $n!$. A classification of invariant differential operators of order $n+s$ is obtained for $s=1,2,3,4$, and for $n=4$ for all orders from 4 to 10. The only, up to factors, homogeneous invariant differential operators of the smallest order n and the largest order $\frac{n(n+1)}{2}$ are given, respectively, by the product of the n first differentials ($s=0$) and the Wronskian ($s=(n-1)n/2$). The existence of nonzero homogeneous invariant differential operators of order $n+s$ for $s<\frac{1+\sqrt{5}}{2}(n-1)$ is proved.

Keywords: Derivative, differential, system of linear equations, simplex, invariant differential operator.

Bibliography: 31 titles.

For citation:
F. M. Malyshev, 2023, "Invariant differential polynomials" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 212–238.

1. Введение

Из курса математического анализа хорошо известна теорема об инвариантности первого дифференциала. В настоящей работе исследуются инвариантные дифференциальные выражения в виде линейных комбинаций произведений дифференциалов первого и высших порядков n функций одной переменной по типу вронскиана (с $n!$ слагаемыми) и произведения n первых дифференциалов n различных функций (одно слагаемое).

Пусть $\mathcal{F}$ – множество вещественных гладких функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а $\mathcal{F}_\lambda=\{f(dx)^\lambda|\, f\in\mathcal{F}\}$ – пространство дифференциалов $f(dx)^\lambda=h^{(\lambda)}(dx)^\lambda$ порядка λ, где $\lambda\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,...\}$, а $h\in\mathcal{F}$. Символом $\mathcal{F}_*$ обозначим прямую сумму $\bigoplus_{\lambda\geqslant 0}\mathcal{F}_\lambda=\mathcal{F}_0\oplus\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2\oplus...$, в которой $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$.

Для $n\geqslant 1$ будем рассматривать *полидифференциальные операторы* $\mathcal{D}_n\colon \mathcal{F}^n\to\mathcal{F}_*$, задаваемые конечными суммами вида

$$\mathcal{D}_n(f_1,\dots,f_n)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}\cdot\dots\cdot f_n^{(z_n)}(dx)^{z_1+\dots+z_n}, \tag{1}$$

в которых $c_{z_1,\dots,z_n}$ – вещественные коэффициенты (равные нулю, за исключением конечного их числа).

Особо выделяем обозначаемые символом $\mathcal{D}_n^{(k)}$ *однородные полидифференциальные операторы* порядка $k\geqslant 0$: $\mathcal{D}_n^{(k)}\colon \mathcal{F}^n\to\mathcal{F}_k$,

$$\mathcal{D}_n^{(k)}(f_1,\dots,f_n)=\sum_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n:\\ z_1+\dots+z_n=k}} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}\cdot\dots\cdot f_n^{(z_n)}(dx)^k.$$

Обозначим символами $\mathcal{V}_n$ и $\mathcal{V}_n^{(k)}$ векторные пространства, состоящие из всех возможных операторов $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_n^{(k)}$ соответственно. Коэффициенты $c_{z_1,\dots,z_n}$ выступают естественными координатами этих операторов. Ясно, что

$$\mathcal{D}_n=\sum_{k\geqslant 0}\mathcal{D}_n^{(k)} \text{ и } \mathcal{V}_n=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{V}_n^{(k)}=\mathcal{V}_n^{(0)}\oplus\mathcal{V}_n^{(1)}\oplus\mathcal{V}_n^{(2)}\oplus\dots\ . \tag{2}$$

При переходе от переменной x к другой переменной t (при другой параметризации прямой), осуществляемом диффеоморфизмом $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, при котором $x=\varphi(t)$, дифференциал $f(dx)^k$ записывается в виде

$$f(\varphi)(d\varphi)^k = f(\varphi)(\dot\varphi dt)^k = f(\varphi)\dot\varphi^k (dt)^k = g(dt)^k,$$

где $g=f(\varphi)\dot\varphi^k$, а символом $f(\varphi)$ обозначаем суперпозицию функций f и φ: $[f(\varphi)](t)=f(\varphi(t))$.

Полидифференциальный оператор (1), задаваемый коэффициентами $c_{z_1,\dots,z_n}$ по всем $(z_1,\dots z_n)\in\mathbb{N}_0^n$, является *инвариантным*, если он не зависит от используемой параметризации прямой, перестановочен с любым диффеоморфизмом $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Можно вначале произвести замену переменной $x=\varphi(t)$, а затем вычислять сумму (1) для функций $g_i(t)=f_i(\varphi(t))$, $i=1,\dots,n$, в условиях переменной t. Можно поступать иначе, вначале вычислять (1) для исходных функций от x, а затем в полученной сумме все x-ы заменить на $\varphi(t)$. Должен получиться тот же результат. Формально это выражается равенством

$$\begin{aligned}\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} g_1^{(z_1)}\cdot\dots\cdot g_n^{(z_n)}(dt)^{z_1+\dots+z_n} = \\ = \sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}(\varphi)\cdot\dots\cdot f_n^{(z_n)}(\varphi)\dot\varphi^{z_1+\dots+z_n}(dt)^{z_1+\dots+z_n},\end{aligned} \tag{3}$$

где $g_i=f_i(\varphi)$ для всех $i=1,\dots,n$. Равенство (3) должно выполняться для любых функций $f_i\in\mathcal{F}$, где $i=1,\dots,n$.

Из теоремы об инвариантности первого дифференциала следует инвариантность однородных дифференциальных операторов порядка $k=n$, получаемых перемножением первых дифференциалов:

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=cf_1'\cdot\dots\cdot f_n'(dx)^n,\quad c\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Непосредственно проверяется инвариантность однородного дифференциального оператора порядка $k=\frac{n(n+1)}{2}$, предоставляемого *вронскианом*:

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=\det\begin{vmatrix} f_1' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)}\end{vmatrix}(dx)^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{5}$$

Обозначим символами $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{W}_n^{(k)}$ векторные пространства всех инвариантных дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n\in\mathcal{V}_n$ и $\mathcal{D}_n^{(k)}\in\mathcal{V}_n^{(k)}$ соответственно. Непосредственно проверяется справедливость разложения в прямую сумму

$$\mathcal{W}_n=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{W}_n^{(k)}=\mathcal{W}_n^{(0)}\oplus\mathcal{W}_n^{(1)}\oplus\mathcal{W}_n^{(2)}\oplus\dots\ . \tag{6}$$

Если оператор $\mathcal{D}_n$ инвариантен, то инвариантны все его однородные слагаемые $\mathcal{D}_n^{(k)}$ для $k\geqslant 0$.

Отдельные слагаемые в правой части (1) при $z_i\geqslant 1$ для всех $i=1,\dots,n$ являются (с точностью до коэффициентов $c_{z_1,\dots,z_n}$) произведениями дифференциалов первого и высших порядков. В учебнике [1] на стр. 108 такие произведения названы дифференциальными мономами.

Пусть V_n – подпространство в $\mathcal{V}_n$, состоящее из операторов $D_n\colon\mathcal{F}^n\to\mathcal{F}_*$ вида

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}\cdot\dots\cdot f_n^{(z_n)}(dx)^{z_1+\dots+z_n}. \tag{7}$$

В аннотации к статье речь идёт именно о таких операторах. Формулируемая ниже теорема 1 показывает, что особое их выделение является вполне резонным.

Символами W_n, $V_n^{(k)}$, $W_n^{(k)}$ для $k = n+s$, где $s \geqslant 0$, обозначим соответственно подпространства $V_n \cap \mathcal{W}_n$, $V_n \cap \mathcal{V}_n^{(k)}$, $V_n \cap \mathcal{W}_n^{(k)} = V_n^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$. Последнее равенство следует из равенства $\mathcal{W}_n^{(k)} = \mathcal{V}_n^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$, обеспечиваемого разложением в прямую сумму (6). Ясно, что $V_n = \bigoplus_{k \geqslant n} V_n^{(k)}$, а при $k < n$ имеем $V_n^{(k)} = \{0\}$ и $W_n^{(k)} = \{0\}$.

Формулируемая ниже теорема 1 указывает на возможность дальнейшего разложения в прямую сумму подпространств каждого слагаемого $\mathcal{W}_n^{(k)}$ в (6). Для этого при каждом $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ для каждого подмножества $\mathfrak{m} := \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ мощности m, будем рассматривать принадлежащие $\mathcal{V}_n$ операторы вида

$$D_{n,\mathfrak{m}}(f_1, \dots, f_n) = f_{j_1} \cdot \dots \cdot f_{j_{n-m}} \cdot D_m(f_{i_1}, \dots, f_{i_m}), \tag{8}$$

где $\{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathfrak{m}$, а $D_m \in V_m$. Символом $V_{n,\mathfrak{m}}$ обозначим множество всех таких операторов $D_{n,\mathfrak{m}}$; ясно, что $V_{n,\mathfrak{m}} \cong V_m$. Символами $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$, $W_{n,\mathfrak{m}}$, $W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ обозначим соответственно $V_{n,\mathfrak{m}} \cap \mathcal{V}_n^{(k)}$, $V_{n,\mathfrak{m}} \cap \mathcal{W}_n$, $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$. Ясно, что $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \cong V_m^{(k)}$, а $V_{n,\{1,\dots,n\}} = V_n$, как и $W_{n,\{1,\dots,n\}} = W_n$, и

$$\mathcal{V}_n = \bigoplus_{m=0}^{n} \bigoplus_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}|=m}} V_{n,\mathfrak{m}}, \quad V_{n,\mathfrak{m}} = \bigoplus_{k \geqslant m} V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} = V_{n,\mathfrak{m}}^{(m)} \oplus V_{n,\mathfrak{m}}^{(m+1)} \oplus \dots \ . \tag{9}$$

Символом $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ будем обозначать элементы пространства $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$. Для $\mathcal{D}_n \in \mathcal{V}_n$ имеем

$$\mathcal{D}_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}|=m}} \sum_{k \geqslant m} D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}. \tag{10}$$

Из условий (3), которые должны выполняться для всех $f_i \in \mathcal{F}$ при всех $i = 1, \dots, n$, непосредственно следует уточнение леммы 2 со стр. 7 работы [2]: если $\mathcal{D}_n$ инвариантный оператор, то будут инвариантными все его слагаемые $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ в (10). Оператор $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ принадлежит пространству $V_{n,\mathfrak{m}}$, поэтому он представляется в виде (8). Множитель $D_m \in V_m$ там обозначим символом $D_m^{(k)}$. Ясно, что $D_m^{(k)} \in V_m^{(k)}$ и инвариантность оператора $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ равносильна инвариантности оператора $D_m^{(k)}$. Далее это будет доказано с помощью критерия для инвариантности из работы [2]. Будет доказан аналог равенств (9) для $\mathcal{W}_n$ (см. (12) ниже).

Основная цель настоящей работы заключается в доказательстве формулируемых ниже четырёх теорем. При их формулировках потребуются целые числа $a_{r,s}$, определяемые равенством

$$\sum_{s \geqslant 0} a_{r,s} \tau^s = (1+\tau)(1+\tau+\tau^2)\dots(1+\tau+\dots+\tau^r). \tag{11}$$

Обозначим $\psi_r(\tau) = \sum_{s \geqslant 0} a_{r,s} \tau^s$.

Теорема 1. *Векторное пространство $\mathcal{W}_n$ всех инвариантных дифференциальных операторов (1) представляется прямой суммой своих векторных подпространств $W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$:*

$$\mathcal{W}_n = \bigoplus_{m=0}^{n} \bigoplus_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}|=m}} W_{n,\mathfrak{m}}, \quad W_{n,\mathfrak{m}} = \bigoplus_{k \geqslant m} W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}, \tag{12}$$

и для $m > 0$ имеем $\dim W_m^{(k)} = \dim W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \leqslant a_{m-1,k-m}$.

В формулировке теоремы 1 при $m = 0$ имеют место инвариантные дифференциальные операторы нулевого порядка из $W_{n,\varnothing}$:

$$D_n(f_1(x), \dots, f_n(x)) = c \cdot f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) \text{ для всех } c \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 1 следуют неравенства

$$\dim W_m = \dim \bigoplus_{k=m}^{\frac{m(m+1)}{2}} W_m^{(k)} \leqslant \sum_{s \geqslant 0} a_{m-1,s} = \psi_{m-1}(1) = m!,$$

справедливые при всех $m = 0, 1, \dots, n$, и неравенство

$$\dim \mathcal{W}_n \leqslant \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}|=m}} m! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m! = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} = [en!].$$

Из теоремы 1 следует также, что порядки k ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов (7) из W_n, именуемых далее сокращённо (n,k)-*операторы*, могут изменяться только в диапазоне от n до $\frac{n(n+1)}{2}$. Вронскиан (5) предоставляет (n,k)-опреатор самого высокого порядка $k = \frac{n(n+1)}{2}$, когда в формулировке теоремы 1 имеем $m = n$ и $\mathfrak{m} = \{1, \dots, n\}$, а $k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Теорема 2. *Для $m \geqslant 1$ и $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(m-1)$ справедливы неравенства $\dim W_m^{(m+s)} > 0$, а для $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, \frac{m(m-1)}{2}\}$ справедливы равенства*

$$\dim W_m^{(m+s)} = a_{m-1,s}. \tag{13}$$

Область значений $s < \frac{m(m-1)}{2}$ с $\dim W_m^{(m+s)} > 0$ может быть существенно расширена благодаря ненулевым $(m, m+s)$-операторам, являющимся произведениями пар ненулевых (m_1, m_1+s_1)-операторов и (m_2, m_2+s_2)-операторов с $m = m_1 + m_2$ и $s = s_1 + s_2$ (зависящих от непересекающихся наборов функций) за счёт $s_2 = \frac{m_2(m_2-1)}{2}$.

Гипотеза. Для всех $m \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$ справедливы равенства (13).

Для $m \leqslant 3$ справедливость гипотезы следует из теоремы 2. Для $m = 4$ гипотеза тоже справедлива. Необходимое для этого дополнительно равенство (13) для $s = 5$ при $m = 4$ будет доказано в п. 9.2 работы.

В работе [2] оператору (1) ставится в соответствие многочлен

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} X_1^{z_1} \dots X_n^{z_n}. \tag{14}$$

Инвариантность оператора (1) равносильна (как утверждается на стр. 10 в [2]) равенствам

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (\partial_{X_i})^{p+1} P(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 1, сводящееся к решению системы линейных уравнений (15) относительно неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n}$, где $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, является конструктивным. Для всех порядков $n+s$ с $s \geqslant 0$ строятся подмножества $A_{n-1,s} \subset \mathbb{N}^n$ (см. (20)) мощности $a_{n-1,s}$ "номеров" $(z_1, \dots, z_n)$ переменных $c_{z_1,\dots,z_n}$, через которые явным образом линейно выражаются остальные координаты операторов из $W_n^{(n+s)}$. В результате, в случаях справедливости сформулированной выше гипотезы, автоматически получается исчерпывающая классификация инвариантных полидифференциальных операторов (7) порядка $n+s$ от n функций. Они будут находиться в естественной биекции с элементами векторного пространства, натянутого на точки множества $A_{n-1,s}$.

Теорема 3. *Равенства (15) для $p \geqslant 3$ следуют только из двух равенств (15), отвечающих $p = 1$ и $p = 2$.*

Не исключено, что теорема 3 имеет совсем простое объяснение. В [2] отмечается, что свойство инвариантности лучше описывать в инфинитезимальной форме. На стр. 292 монографии [3] говорится, что во всякой локальной группе Ли с функциями произведения только трижды непрерывно дифференцируемыми в некоторых координатах функции произведения будут аналитическими.

Используемая нами в доказательствах теорем 1,2,3 система уравнений (15) в [2] представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i(\partial_{X_i})^{p+1} + \lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p)P(X_1,\dots,X_m) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1, \tag{16}$$

где числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ для $i = 1,\dots,n$ могут быть произвольными. В нашем случае $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1,\dots,n$.

Равенства (16) равносильны, в частности, инвариантности дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n\colon \mathcal{F}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{\lambda_n} \to \mathcal{F}_*$, задаваемых суммами

$$\mathcal{D}_n(f_1(dx)^{\lambda_1},\dots,f_n(dx)^{\lambda_n}) = \sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)} \cdot \dots \cdot f_n^{(z_n)}(dx)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n+z_1+\dots+z_n}. \tag{17}$$

В [2] на стр. 11 и независимо в [4] на стр. 56 сформулирована следующая теорема, важная для рассматриваемых в [2] задач.

Теорема 4. *При любых значениях параметров $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ размерность пространства решений системы уравнений (16) не превосходит $(n+1)!$.*

Обратим внимание, что при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ теоремой 1 предоставляется верхняя оценка $[en!]$, которая меньше $(n+1)!$ для $n > 1$.

В [2] приведена только общая схема доказательства теоремы 4, относящейся к системе линейных уравнений (16), зависящей (в отличии от системы уравнений (15)) от n-мерного параметра $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. В п. 8 будет приведено подробное доказательство теоремы 4. Как и доказательство теоремы 1, оно будет конструктивным. При каждом фиксированном значение параметра $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ все коэффициенты многочлена (14), являющегося решением системы уравнений (16), явным образом линейно выражаются через $(n+1)!$ из этих коэффициентов с номерами $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, для которых $z_i \leqslant i$ по всем $i = 1,\dots,n$. Возможные степени решений при этом, вообще говоря, неограничены.

На системах линейных уравнений (15), (16) удачно демонстрируется важное замечание со стр. 15 учебника [5], утверждающего, что совершенно не обязательно базисы линейных пространств нумеровать отрезком натурального ряда. "*Нумерация, или, скорее, порядок элементов базиса, существенны при использовании матричного формализма. В других вопросах может оказаться важней другая структура на множестве индексов базиса.*"

В нашем случае равенства (15) и (16) можно рассматривать как линейные уравнения относительно неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n} \in \mathbb{R}$ с "номерами" $(z_1,\dots,z_n)$, являющимися (в однородном случае, при $z_1+\dots+z_n = k$) точками с целочисленными координатами в симплексах, в которых каждый "номер" занимает своё, отведённое именно ему место.

Основным средством для доказательства сформулированных теорем служит способ решения так называемых (r,s)-систем линейных уравнений, определяемых в следующем п. 2, с неизвестными параметризуемыми точками с целочисленными координатами в r-мерном симплексе с длиной ребра s. В пп. 3 и 4 доказываются теоремы 5 и 6 о размерностях пространства решений соответственно (r,s)-системы уравнений и одной её подсистемы, возникающей при

доказательстве теоремы 4. В следующих четырёх пунктах приводятся доказательства четырёх основных сформулированных выше теорем. Доказательство теоремы 2 основывается на теореме 3, которая будет доказана первой. В последнем п. 9 приводятся выписанные в [6] операторы (1) для $n \leqslant 3$ и доказывается равенство (13) для $m = 4$ и $s = 5$, чем завершается классификация инвариантных дифференциальных операторов четырёх гладких функций одной переменной.

Отметим, что оценки в теоремах 1 и 4 справедливы также и для не обязательно конечных сумм (1) и (14). Это следует из приводимых соответственно в пп. 5 и 8 конструктивных доказательств этих теорем.

1.1. К исследованию инвариантных операторов над полями геометрических объектов (в существенно более общей постановке по сравнению с (1) и (17)) в течении ряда лет, начиная с середины 70-х годов прошлого века, привлекал внимание математиков А.А. Кириллов (см. его обзор [2] 1980 года и статью [7] 1977 года). Аргументами и значениями операторов $\mathcal{D}_n$ (как примеры, далеко не всё охватывающие) могут быть не обязательно однотипные по ковариантности и контравариантности тензорные поля многообразий больших размерностей. Ранее, до работы [7], в работе А.Н. Рудакова [8] 1974 года была, в частности, получена классификация унарных инвариантных дифференциальных операторов, действующих на пространствах тензорных полей.

Задача классификации инвариантных дифференциальных операторов имеет давнюю историю, была сформулирована Вебленом в 1928 году на Международном конгрессе математиков в Болонье [9]. В обзоре [2] возникающие при этом задачи доведены до точных формулировок, стимулировавших появление большого числа работ с дальнейшими обобщениями (см., например, [10] – [21]). В отличие от этих работ предлагаемая статья относится к традиционным классическим понятиям дифференциалов. Специально выделеннный в [2] вопрос устройства инвариантных дифференциальных операторов (1) стоит особняком, потому как наиболее легко формулируется, относится к самым основам математического анализа и поддаётся исследованию относительно элементарными методами линейной алгебры по решению систем линейных уравнений.

2. (r, s)-системы линейных уравнений.

Символом Δ^r_s для целых $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$ обозначим множество точек с целочисленными координатами в симплексе

$$\left\{ z = (z_1, \dots, z_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1} \,|\, z_i \geqslant \tau_i, i = 1, \dots, r+1, \sum_{i=1}^{r+1} (z_i - \tau_i) = s \right\}$$

с вершинами $B_1, \dots, B_{r+1}$, занумерованными так, что для всех $i = 1, \dots, r+1$ координата с номером i самая большая у вершины B_i. На ребре этого симплекса (когда $\tau_i \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, \dots, r+1$) располагается $s+1$ целочисленная точка, поэтому целочисленный параметр $s \geqslant 0$ естественно считать *длиной* ребра симплекса, а $r \geqslant 1$ – его *размерностью*. Целочисленные значения $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$, формально участвующие в задании множества Δ^r_s, не конкретизируются, каждый раз выбираются по ситуации. Множество Δ^r_s называем *целочисленным симплексом*, чаще просто *симплексом*. Будем также использовать по отношению к Δ^r_s терминологию, относящуюся к обычному континуальному симплексу, т.е. к выпуклой оболочке подмножества Δ^r_s в $\mathbb{R}^r$.

Вещественные неизвестные (r, s)-системы линейных уравнений параметризуются ("нумеруются") точками $z \in \Delta^r_s$. Символами u_z для $z \in \Delta^r_s$ обозначаем сами неизвестные. Число неизвестных равно числу точек в симплексе Δ^r_s, равному $|\Delta^r_s| = |\Delta^r_{s-1}| + |\Delta^{r-1}_s| = \binom{r+s}{s}$.

Уравнения в (r,s)-системе параметризуются содержащимися в симплексе Δ^r_s симплексами Δ^r_p для всех $p=1,\dots,s$. Вершины $b_1,\dots,b_{r+1}$ симплексов Δ^r_p нумеруем так, что при гомотетии с коэффициентом гомотетии большим 1, переводящей один в другой континуальные симплексы, соответствующие Δ^r_p и Δ^r_s, вершина b_i переходит в вершину B_i для всех $i=1,\dots,r+1$. Будем использовать обозначения $\Delta^r_s=[B_1,\dots,B_{r+1}]$ и $\Delta^r_p=[b_1,\dots,b_{r+1}]$. Конкретная точка $a\in\Delta^r_s\setminus\{B_1,\dots,B_{r+1}\}$, будучи вершиной у различных симплексов Δ^r_p, содержащихся в Δ^r_s, может принимать различные номера от 1 до $r+1$. Для каждого такого симплекса Δ^r_p, содержащего точку a в качестве вершины, у a будет свой номер. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (r,s)-системы задаются функциями $\varphi_i\colon\Delta^r_s\to\mathbb{R}_+:=\{x\in\mathbb{R}|\,x>0\}$, где $i=1,\dots,r+1$. Отвечающее симплексу $\Delta^r_p=[b_1,\dots,b_{r+1}]$ уравнение (r,s)-системы записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{r+1}\varphi_i(b_i)u_{b_i}=0. \tag{18}$$

Число уравнений в системе (18), отвечающих конкретному значению $p\in\{1,\dots,s\}$, равно числу подсимплексов Δ^r_p в симплексе Δ^r_s, находящихся (благодаря параллельным переносам) в естественном взаимно однозначном соответствии с точками симплекса Δ^r_{s-p} и равно его мощности $|\Delta^r_{s-p}|$, равной $\binom{r+s-p}{s-p}=\binom{r+s-p}{r}$. Всего в системе уравнений (18) имеется

$$\sum_{p=1}^{s}\binom{r+s-p}{r}=\binom{r+s}{r+1}=|\Delta^{r+1}_{s-1}|$$

уравнений. Они параметризуются наборами $(p,y_1,\dots,y_{r+1})$, где $p=1,\dots,s$, а $(y_1,\dots,y_{r+1})\in\in\Delta^r_{s-p}$. Эти наборы образуют симплекс

$$\Delta^{r+1}_{s-1}=\bigsqcup_{p=1}^{s}\Delta^r_{s-p}=\Delta^r_{s-1}\sqcup\Delta^r_{s-2}\sqcup\dots\sqcup\Delta^r_1\sqcup\Delta^r_0.$$

Теорема 5. *Размерность пространства решений (r,s)-системы для $r\geqslant 1$ и $s\geqslant 0$ не превосходит $a_{r,s}$.*

Теорема 6. *Если из (r,s)-системы исключить все уравнения с параметром $p=1$, но оставить все уравнения с $p=2,\dots,s$, то размерность пространства решений не превзойдёт $a_{r+1,s}$.*

3. Доказательство теоремы 5.

Для пространства решений (r,s)-системы линейных уравнений (18), обозначаемого символом $U_{r,s}$, индукцией по $r\geqslant 1$ докажем неравенство

$$\dim U_{r,s}\leqslant a_{r,s}\ \text{ для всех }\ s\geqslant 0, \tag{19}$$

в котором $a_{r,s}$ определяются равенством (11). Неравенство (19) при значение $s=0$ превращается в равенство $\dim U_{r,0}=a_{r,0}=1$. Для $(r,0)$-системы имеем $|\Delta^r_0|=\binom{r}{0}=1$. Пусть $\Delta^r_0=\{a\}$. Все возможные значения $u_a\in\mathbb{R}$ единственной неизвестной u_a являются решениями $(r,0)$-системы, потому как в $(r,0)$-системе нет уравнений (в Δ^r_0 не помещаются подсимплексы с положительной длиной ребра). Далее считаем $s\geqslant 1$, а левую часть уравнения (18), отвечающую подсимплексу $\Delta=\Delta^r_p$, обозначаем символом $\mathcal{L}_\Delta$.

3.1. $r=1$. Для $r=1$, согласно (11), $a_{1,0}=a_{1,1}=1$ и $a_{1,s}=0$ для $s\geqslant 2$. Случаи $s=1$ и $s\geqslant 2$ рассмотрим отдельно.

3.1.1. $r=1$, $s=1$. Для $r=1$ и $s=1$ симплекс $\Delta^r_s=\Delta^1_1=[B_1,B_2]$ представлен на рис. 1.

Рис. 1

Имеем две неизвестных u_{B_1}, u_{B_2} и одно уравнение

$$\mathcal{L}_{[B_1,B_2]} = \varphi_1(B_1)u_{B_1} + \varphi_2(B_2)u_{B_2} = 0,$$

поэтому $\dim U_{1,1} = 1$. Неизвестное u_{B_1} однозначно выражается через u_{B_2}, которое можно задавать произвольно.

3.1.2. $r = 1$, $s \geqslant 2$. При $r = 1$ и $s \geqslant 2$ симплекс $\Delta_s^r = \Delta_s^1 = [B_1, B_2]$ представлен на рис. 2, где $c \in \Delta_s^1$ – произвольная его внутренняя точка. Тогда

$$0 = \mathcal{L}_{[B_1,c]} + \mathcal{L}_{[c,B_2]} - \mathcal{L}_{[B_1,B_2]} = (\varphi_2(c) + \varphi_1(c))u_c,$$

потому как коэффициенты при неизвестных u_{B_1} и u_{B_2} будут нулевые (сократятся). В результате $u_c = 0$, так как $\varphi_2(c) + \varphi_1(c) \neq 0$. Затем из уравнений

$$\mathcal{L}_{[B_1,c]} = \varphi_1(B_1)u_{B_1} + \varphi_2(c)u_c = 0$$

и $\mathcal{L}_{[c,B_2]} = 0$ получаем $u_{B_1} = 0$ и $u_{B_2} = 0$.

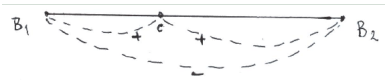


Рис. 2

При $r = 1$ и $s \geqslant 2$ у $(1, s)$-системы уравнений (18), имеется только нулевое решение.

Правые части рассматриваемой системы уравнений могли быть любыми, не обязательно нулевыми, но и тогда при $r = 1$ этим способом вначале определили бы u_c для всех внутренних целочисленных точек $c \in [B_1, B_2]$, а затем определили бы неизвестные u_{B_1}, u_{B_2} и для граничных точек B_1, B_2 симплекса $\Delta_s^1 = [B_1, B_2]$.

Изложенный приём решения (r, s)-системы уравнений для $r = 1$, решаемой путём "включения–исключения" , распространяется далее на все значения $r \geqslant 2$. Он состоит в том, что вначале определяются неизвестные u_c для внутренних точек $c \in \Delta_s^r$, а затем определяются u_c для c на границе симплекса Δ_s^r в условиях на единицу меньшей размерности симплексов. Единственная дополнительная деталь, связанная с формированием в отдельные группы неизвестных u_c на границе симплекса Δ_s^r, демонстрируется уже в размерности $r = 2$.

3.2. $r = 2$. Для $r = 2$ согласно (11) имеем $a_{2,1} = a_{2,2} = 2$, $a_{2,3} = 1$ и $a_{2,s} = 0$ для $s \geqslant 4$. Соответствующие случаи $s = 1$, $s = 2$, $s = 3$, $s \geqslant 4$ рассмотрим в обратном порядке.

3.2.1. $r = 2$, $s \geqslant 4$. Для $r = 2$ и $s \geqslant 4$ симплекс $\Delta_s^r = \Delta_s^2 = [B_1, B_2, B_3]$ представлен на рис. 3, где $c \in \Delta_s^2$ – произвольная его внутренняя точка (с координатами не меньшими $\tau_i + 1$, $i = 1, 2, 3$), через которую проведены отрезки, параллельные сторонам симплекса Δ_s^2.

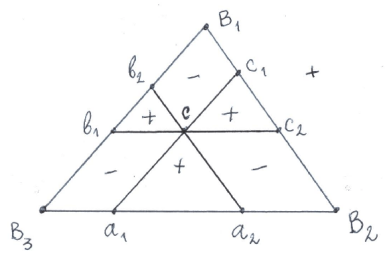


Рис. 3

В соответствии с уравнениями (18) имеем:

$$0 = \mathcal{L}_{[B_1,B_2,B_3]} - \mathcal{L}_{[B_1,c_2,b_1]} - \mathcal{L}_{[c_1,B_2,a_1]} - \mathcal{L}_{[b_2,a_2,B_3]}$$
$$+\mathcal{L}_{[c_1,c_2,c]} + \mathcal{L}_{[c,a_2,a_1]} + \mathcal{L}_{[b_2,c,b_1]} = (\varphi_3(c) + \varphi_1(c) + \varphi_2(c))u_c.$$

Все остальные переменные в выписанном уравнение встречаются по два раза с одинаковыми по модулю коэффициентами, отличающимися знаком, поэтому взаимно сокращающимися. В результате $u_c = 0$, так как $\varphi_3(c) + \varphi_1(c) + \varphi_2(c) \neq 0$.

Неизвестные u_c для граничных точек c симплекса Δ^2_s будем определять в три этапа. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ подмножества точек симплекса Δ^2_s, расположенные на сторонах, противоположных соответственно вершинам B_1, B_2, B_3, и $T_1 = \Gamma_1 \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3) = \Delta^1_{s-2}$, $T_2 = \Gamma_2 \setminus \Gamma_3 = \Delta^1_{s-1}$, $T_3 = \Gamma_3 = \Delta^1_s$ (см. рис. 4 для $s = 4$). На первом этапе определяются u_c с $c \in T_1$, на втором – с $c \in T_2$, на третьем – с $c \in T_3$.

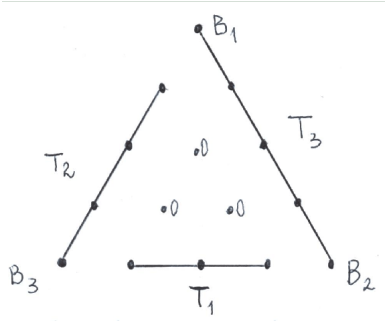


Рис. 4

Далее будет удобно через $\overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$ обозначать множество внутренних точек $z = (z_1, \dots, z_{r+1})$ симплекса Δ^r_s, у которых $z_i > \tau_i$, $i = 1, \dots, r+1$, $\overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \Delta^r_{s-r-1}$ (при $s < 0$ считаем $\Delta^r_s = \varnothing$). В принятых обозначениях $T_1 \sqcup T_2 \sqcup T_3 = \Delta^2_s \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s$.

На первом этапе в исходной $(2, s)$-системе (18) с $s \geqslant 4$ рассматриваются только уравнения $\mathcal{L}_\Delta = 0$, где $\Delta \subseteq T_1 \sqcup \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s = \Delta^2_{s-2}$ такие, что $\Delta \cap T_1 \neq \varnothing$ (см. рис. 4 для $s = 4$). Возникающая $(2, s-2)$-система, благодаря равенствам $u_c = 0$ для $c \in \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s$, сводится к $(1, s-2)$-системе (у нас $T_1 = \Delta^1_{s-2}$), которая имеет только нулевое решение (см. п. 3.1.2), $u_c = 0$ для $c \in T_1$.

На втором этапе в исходной $(2, s)$-системе (18) с $s \geqslant 4$ рассматриваются только уравнения $\mathcal{L}_\Delta = 0$, где $\Delta \subseteq T_2 \sqcup T_1 \sqcup \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s = \Delta^2_{s-1}$ такие, что $\Delta \cap T_2 \neq \varnothing$ (см. рис. 4 для $s = 4$). Возникающая $(2, s-1)$-система, благодаря равенствам $u_c = 0$ для $c \in T_1 \sqcup \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s$, сводится к $(1, s-1)$-системе (у нас $T_2 = \Delta^1_{s-1}$), которая имеет только нулевое решение (см. п. 3.1.2), $u_c = 0$ для $c \in T_2$.

Аналогично, на третьем этапе, рассматривая систему $\mathcal{L}_\Delta = 0$, где $\Delta \subseteq \Delta^2_s = T_3 \sqcup T_2 \sqcup T_1 \sqcup \overset{\circ}{\Delta}{}^2_s$ такие, что $\Delta \cap T_3 \neq \varnothing$, получаем $u_c = 0$ для $c \in T_3$. Таким образом, $(2, s)$-система (18) при $s \geqslant 4$ имеет только нулевое решение, поэтому неравенство (19) справедливо.

3.2.2. $r = 2$, $s = 3$. Случай $r = 2$, $s = 3$ представлен на рис. 5 а). Следуя рассуждениям предыдущего пункта и трёх его этапов, проверим, что любое ненулевое решение $(2, 3)$-системы (если оно существует) однозначно восстанавливается по значению u_c для $c \in T_1$, откуда и будет следовать, что $\dim U_{2,3} \leqslant a_{2,3} = 1$. В этом убедимся, если покажем, что $(2, 3)$-система вместе с одним дополнительным уравнением $u_c = 0$ (как у разности $(u_z = u'_z - u''_z,\ z \in \Delta^2_3)$ двух решений рассматриваемой $(2, 3)$-системы $(u'_z,\ z \in \Delta^2_3)$ и $(u''_z,\ z \in \Delta^2_3)$ с $u'_c = u''_c$) имеет только нулевое решение.

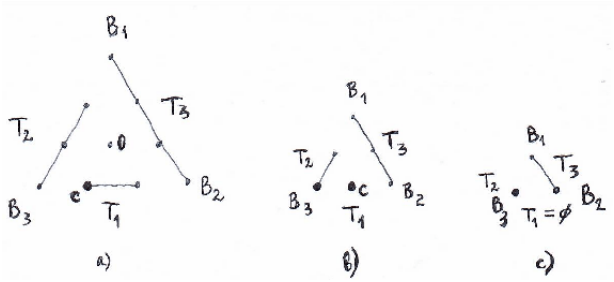


Рис. 5

Пусть $u_c = 0$. У нас $|\overset{\circ}{\Delta}{}_3^2| = |\Delta_0^2| = 1$ и $u_a = 0$ для $a \in \overset{\circ}{\Delta}{}_3^2$. Далее, согласно п. 3.1.1 на первом этапе имеем $u_d = 0$ для $d \in T_1 \setminus \{c\}$. Наконец, согласно п. 3.1.2 на втором этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_2$, после чего, в свою очередь, на третьем этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_3$.

3.2.3. $r = 2$, $s = 2$. Случай $r = 2$, $s = 2$ представлен на рис. 5 b). Здесь $\overset{\circ}{\Delta}{}_2^2 = \varnothing$. В неравенстве (19) имеем $a_{2,2} = 2$. Чтобы убедиться в его справеливости, к $(2,2)$-системе добавляем два уравнения: $u_c = 0$ и $u_{B_3} = 0$. Следуя рассуждениям предыдущего пункта 3.2.2, замечаем, что первый этап не нужен. На втором этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_2 \setminus \{B_3\}$, после чего на третьем этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_3$.

3.2.4. $r = 2$, $s = 1$. Случай $r = 2$, $s = 1$ представлен на рис. 5 c). Здесь $\overset{\circ}{\Delta}{}_1^2 = \varnothing$. В неравенстве (19) имеем $a_{2,1} = 2$. Чтобы убедиться в его справеливости, к $(2,1)$-системе снова добавляем два уравнения: $u_{B_3} = 0$ и $u_{B_2} = 0$. Здесь не нужны первый и второй этапы. На третьем этапе получаем $u_{B_1} = 0$.

3.3. $r \geqslant 3$. Доказательство теоремы 5 продолжим индукцией по r. Разобранные размерности $r = 1$ и $r = 2$ являются началом индукции. Общая схема рассуждений при $r \geqslant 3$ будет та же, что и при $r = 2$.

3.3.1. Докажем, что $u_c = 0$ для $c \in \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r$ при любых $r \geqslant 3$. Пусть

$$\Delta_s^r = \{z = (z_1, \dots, z_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \mid z_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, r+1,\ z_1 + \dots + z_{r+1} = s\}.$$

Тогда для внутренней точки $c = (c_1, \dots, c_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ имеем $c_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Рассмотрим симплексы

$$C_i = \{z \in \Delta_s^r \mid z_j \geqslant 0, j \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\}, z_i \geqslant c_i\},$$

для всех $i = 1, \dots, r+1$. (Для $r = 3$ эти симплексы представлены на рис. 6.) Через $\mathcal{H}_p$ для $p = 1, \dots, r$ обозначим множество всех $\binom{r+1}{p}$ симплексов Δ, получающихся пересечением p различных симплексов из семейства $C_1, \dots, C_{r+1}$. Каждый симплекс $\Delta \in \mathcal{H}_p$ задаётся соответствующим подмножеством номеров $\mathfrak{n} \subset \{1, \dots, r+1\}$ мощности p. Обозначим его символом $\Delta_{\mathfrak{n}}$, $\Delta_{\mathfrak{n}} = \cap_{i \in \mathfrak{n}} C_i$. Имеем равенства

$$\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} = \{z \in \Delta_s^r \mid z_i \geqslant 0, i \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \mathfrak{n}, z_i \geqslant c_i, i \in \mathfrak{n}\}.$$

Тогда $\Delta_{\{i\}} = C_i$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Положим дополнительно $\Delta_\varnothing = \Delta_s^r$ и $\mathcal{H}_0 = \{\Delta_s^r\}$.

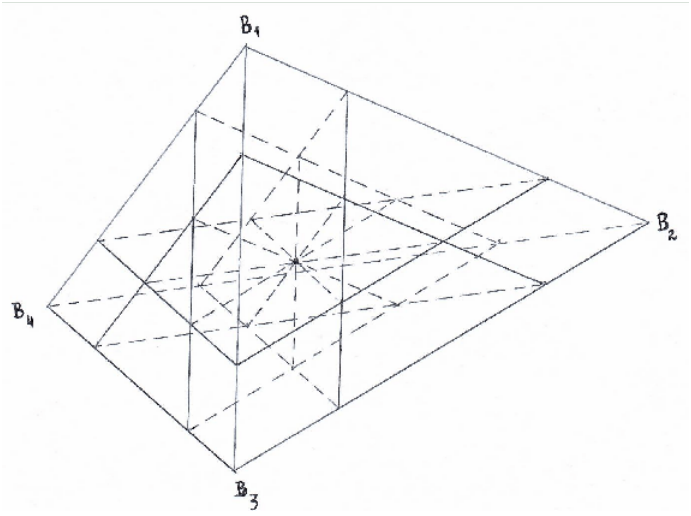


Рис. 6

Рассмотрим у симплекса $\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} = [b_1, \dots, b_{r+1}] \in \mathcal{H}_p$ при всех $p = 0, 1, \dots, r$ одну из его вершин $b_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,r+1})$. Согласно определению симплекса $\Delta_{\mathfrak{n}}$ имеем $b_{i,j} \in \{0, c_j\}$ для $j \neq i$. Напомним, что вершины симплексов $\Delta \subseteq \Delta_s^r$ занумерованы в п. 2 (при определении (r,s)-системы) так, что $b_{i,i} > b_{j,i}$ для всех $j \neq i$. Такая нумерация удобна тем, что $b_{i,j} = 0$ для $j \neq i$ и $j \notin \mathfrak{n}$, $b_{i,j} = c_j$ для $j \neq i$ и $j \in \mathfrak{n}$, а $b_{i,i} = s - \sum_{j \in \{1,\dots,r+1\} \setminus \{i\}} b_{i,j}$. В нашем случае, когда $\tau_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, r+1$, вершина b_i – ближайшая вершина симплекса Δ к i-й координатной оси, при $p = s$ вершина $B_i = b_i$ симплекса $\Delta_{\varnothing} = \Delta_s^r$ находится на i-й координатной оси.

Рассмотрим теперь произвольную вершину b некоторого симплекса $\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} \in \bigsqcup_{p=0}^{r} \mathcal{H}_p$. Она имеет в Δ некоторый номер $i \in \{1, \dots, r+1\}$. Тогда $b = b_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,r+1})$. Обозначим

$$\mathfrak{n}' = \{j \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\} \,|\, b_{i,j} = c_j\},$$

$$\mathfrak{w} = \{j \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\} \,|\, b_{i,j} = 0\},$$

$$\{1, \dots, r+1\} = \mathfrak{w} \sqcup \{i\} \sqcup \mathfrak{n}'.$$

При $\mathfrak{w} \neq \varnothing$ точка b может быть вершиной только у двух симплексов из $\bigsqcup_{p=0}^{r} \mathcal{H}_p$. Вторым симплексом является либо $\Delta' = \Delta_{\mathfrak{n}'}$, где $|\mathfrak{n}'| = |\mathfrak{n}| - 1$, при $i \in \mathfrak{n}$, либо $\Delta' = \Delta_{\mathfrak{n} \cup \{i\}}$, где $|\mathfrak{n} \cup \{i\}| = |\mathfrak{n}| + 1$, при $i \notin \mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. В другом симплексе Δ' вершина b имеет тот же номер i. В случае $i \in \mathfrak{n}$ это очевидно. Если же $i \notin \mathfrak{n}$, то

$$b_{i,i} = s - \sum_{j \in \mathfrak{n}'} c_j = c_i + \sum_{j \in \mathfrak{w}} c_j > c_i,$$

так как $\mathfrak{w} \neq \varnothing$.

Если $\mathfrak{w} = \varnothing$, то $\mathfrak{n} = \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\}$, а $b = c$. Тогда в качестве i-й вершины вершина $b = c$ может выступать только у одного симплекса $\Delta = \Delta_{\{1,\dots,r+1\} \setminus \{i\}}$, при каждом i в своём симплексе.

По сделанным замечаниям из уравнений (r,s)-системы (18) получаем

$$0 = \sum_{p=0}^{r} \sum_{\Delta \in \mathcal{H}_p} (-1)^p \mathcal{L}_{\Delta} = (-1)^r \left(\sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(c) \right) \cdot u_c.$$

Все остальные неизвестные u_b в этой сумме сократятся, так как встречаются по два раза, причём с одинаковыми по модулю коэффициентами, но с противоположными знаками.

У нас функции $\varphi_i\colon \Delta^r_s \to \mathbb{R}$ для всех $i = 1, ..., r+1$ положительно определённые, поэтому $\sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(c) \neq 0$ и $u_c = 0$, что и требовалось.

3.3.2. Докажем теперь неравенство (19). Зададим симплекс Δ^r_s (см. начало п. 2) с помощью значений $\tau_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, r+1$:

$$\Delta^r_s = \{z = (z_1, \dots, z_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1} |\, z_1 + \dots + z_{r+1} = r + 1 + s\}.$$

Как и в п. 3.2.1 положим $\Gamma_i = \{z \in \Delta^r_s |\, z_i = 1\} = \Delta^{r-1}_s$ для всех $i = 1, \dots, r+1$ и $T_i(r,s) = \Gamma_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^{r+1} \Gamma_j$ для $i = 1, \dots, r$, а $T_{r+1}(r,s) = \Gamma_{r+1} = \Delta^{r-1}_s$. Имеем разбиение $\Delta^r_s \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \coprod_{i=1}^{r+1} T_i(r,s)$. Для $r = 3$ и $s = 5$ оно представлено на рис. 7:

$$T_1(3,s) = [H, G, F] = \Delta^2_{s-3}, \quad T_2(3,s) = [C, E, D] = \Delta^2_{s-2},$$
$$T_3(3,s) = [A, K, B_4] = \Delta^2_{s-1}, \quad T_4(3,s) = [B_1, B_2, B_3] = \Delta^2_s.$$

В общем случае

$$T_{r+1}(r,s) = \Delta^{r-1}_s, T_r(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-1}, \dots, T_i(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+i}, \dots, T_1(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r}.$$

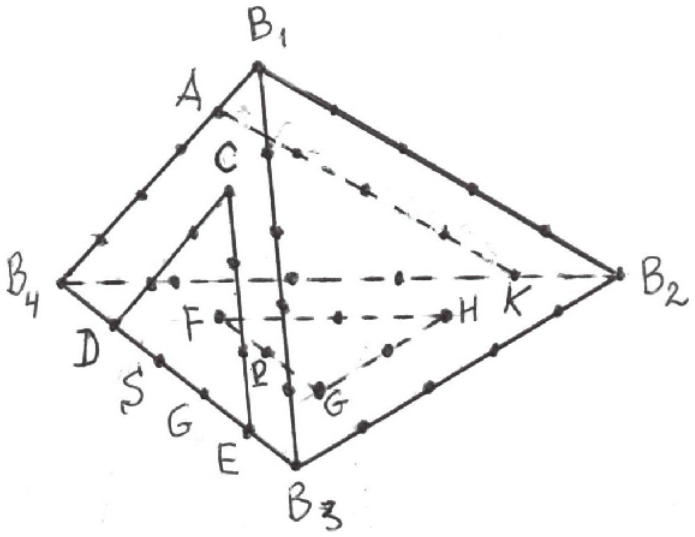


Рис. 7

По аналогии с п. 3.2.2 неравенство (19) будем доказывать (исходя из индуктивных предположений) путём добавления к (r,s)-системе уравнений $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s}$, где

$$A_{r,s} = \{(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s |\, v_i \leqslant i,\ i = 1, \dots, r+1\}, \tag{20}$$

причём

$$|A_{r,s}| = a_{r,s} \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 1 \quad \text{и} \quad s \geqslant 0. \tag{21}$$

Равенство (21) докажем индукцией по $r \geqslant 1$. При $s = 0$ оно очевидно, $|A_{r,0}| = a_{r,0} = 1$. Для $r = 1$ равенство (21) фактически уже использовалось в п. 3.1. Действительно, $A_{1,1} = \{B_2\}$ на рис. 1 и $A_{1,s} = \varnothing$ для $s \geqslant 2$ на рис. 2, а $a_{1,1} = 1$ и $a_{1,s} = 0$ для $s \geqslant 2$ согласно (11).

Пусть $r \geqslant 2$. Имеем вложения

$$A_{r,s} \subset \Gamma_1 \subset \Delta^r_s \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \bigsqcup_{j=1}^{r+1} T_j(r,s),$$

поэтому

$$A_{r,s} = \bigsqcup_{j=1}^{r+1} (A_{r,s} \cap T_j(r,s)).$$

Подмножество $A_{r,s} \cap T_j(r,s)$ для каждого $j = 1, \dots, r+1$ состоит из точек $v = (v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$v_i \leqslant i \text{ для } i \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{j\},\ v_j = 1,\ v_i > 1 \text{ для } i \in \{j+1, \dots, r+1\}.$$

Для выяснения расположения подмножества $A_{r,s} \cap T_j(r,s)$ в симплексе $T_j(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+j}$, зададим его величинами

$$\tau'_1 = \tau_1 = 1, \dots, \tau'_{j-1} = \tau_{j-1} = 1; \tau'_j = \tau_{j+1} - 1, \dots, \tau'_r = \tau_{r+1} - 1.$$

При таком задании симплекса $T_j(r,s)$ имеем

$$A_{r,s} \cap T_j(r,s) = \{(v_1, \dots, v_r) \in \Delta^{r-1}_{s-r-1+j} \,|\, v_i \leqslant i,\ i = 1, \dots, r\} = A_{r-1,s-r-1+j}.$$

В результате, по предположению индукции имеем

$$|A_{r,s}| = \sum_{j=1}^{r+1} |A_{r,s} \cap T_j(r,s)| = \sum_{j=1}^{r+1} |A_{r-1,s-r-1+j}| = \sum_{j=1}^{r+1} a_{r-1,s-r-1+j} = a_{r,s}.$$

Последнее равенство в выписанной цепочке равенств непосредственно следует из (11). (При $r \geqslant 1$ и $s < 0$ считаем $a_{r,s} = 0$ и $A_{r,s} = \varnothing$.)

Равенство (21) доказано.

Для доказательства неравенства (19) остаётся убедиться, что (r,s)-система вместе с уравнениями $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s}$ имеет только нулевое решение. В п. 3.3.1 показали, что $u_z = 0$ для $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$. После чего, как и в п. 3.2 убеждаемся (благодаря предположению индукции) в равенствах $u_z = 0$ для $z \in T_j(r,s)$ последовательно для $j = 1, 2, \dots, r+1$. При очередном j имеем $(r-1, s-r-1+j)$-систему с дополнительными уравнениями $u_z = 0$ для $z \in A_{r-1,s-r-1+j}$. В результате имеем $u_z = 0$ для $z \in \Delta^r_s \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \bigsqcup_{j=1}^{r+1} T_j(r,s)$, а значит и $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta^r_s$. Этим доказано неравенство (19), утверждаемое Теоремой 5.

4. Доказательство теоремы 6.

Систему линейных уравнений из формулировки теоремы 6 обозначим символом $(r,s)_2$. Она получается из (r,s)-системы удалением уравнений $\mathcal{L}_\Delta = 0$ для всех подсимплексов $\Delta = \Delta^r_1 \subset \Delta^r_s$ с длиной ребра 1. Символом $R_{r,s}$ обозначим пространство решений $(r,s)_2$-системы. Необходимо доказать следующее неравенство

$$\dim R_{r,s} \leqslant a_{r+1,s} \quad \text{для всех} \quad s \geqslant 0. \tag{22}$$

4.1. Неравенство (22) докажем аналогично доказательству неравенства (19) в п. 3 (при доказательстве теоремы 5) индукцией по $r \geqslant 1$. Начало индукции с $r = 1$ для $s = 0, 1, 2, 3$ очевидно, а для $s \geqslant 4$ проверяется с помощью рассуждений п. 3.1.2. Индуктивный переход повторяет рассуждения п. 3.3, используя разбиение

$$\Delta^r_s = \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s \sqcup \coprod_{j=1}^{r+1} T_j(r,s) \tag{23}$$

из п. 3.3.2. Вместо подмножеств $A_{r,s}$ будем рассматривать другие подмножества $B_{r,s} \subset \Delta^r_s$. Символом $B_{r,s}$ обозначено подмножество

$$B_{r,s} = \{(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s |\, v_i \leqslant i+1, i = 1, \dots, r+1\}. \tag{24}$$

(Как и в п. 3.3.2 симплекс Δ^r_s здесь задаём значениями $\tau_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, r+1$.) Неравенства (22) следуют из равенств

$$|B_{r,s}| = a_{r+1,s} \quad \text{для всех} \quad s \geqslant 0, \tag{25}$$

и из того, что $(r,s)_2$-система с дополнительными уравнениями $u_z = 0$ для всех $z \in B_{r,s}$, имеет только нулевое решение для всех $s \geqslant 0$. Оба эти утверждения докажем индукцией по $r \geqslant 1$, опуская начала индукции за очевидностью.

4.2. Из разбиения (23) получаем

$$B_{r,s} = (B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s) \sqcup \coprod_{i=1}^{r+1} (B_{r,s} \cap T_i(r,s)). \tag{26}$$

Выясним расположение в симплексе $T_j(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+j}$ подмножества $B_{r,s} \cap T_j(r,s)$, состоящего из точек $(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$v_i \leqslant i+1 \quad \text{для} \quad i \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{j\}, \quad v_j = 1,$$
$$v_i > 1 \quad \text{для} \quad i \in \{j+1, \dots, r+1\}.$$

Зададим симплекс $\Delta^{r-1}_{s-r-1+j}$ величинами

$$\tau'_i = \tau_i = 1 \text{ для } i = 1, \dots, j-1 \text{ и } \tau'_i = \tau_{i+1} - 1 \text{ для } i = j, \dots, r.$$

При таком задании симплекса $T_j(r,s)$ имеем $B_{r,s} \cap T_j(r,s) = B_{r-1,s-r-1+j}$. Аналогично, из равенства $\overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \Delta^r_{s-r-1}$ получаем $B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = A_{r,s-r-1}$. После этого разбиение (26) принимает вид

$$B_{r,s} = A_{r,s-r-1} \sqcup \coprod_{i=1}^{r+1} B_{r-1,s-r-1+j},$$

откуда по предположению индукции, учитывая равенства (21), имеем равенства (25):

$$|B_{r,s}| = |A_{r,s-r-1}| + \sum_{j=1}^{r+1} |B_{r-1,s-r-1+j}| = a_{r,s-r-1} + \sum_{j=1}^{r+1} a_{r,s-r-1+j} = a_{r+1,s}.$$

Последнее равенство в этой цепочке равенств следует из (11).

4.3. Пусть, теперь, величины u_z с "номерами" $z \in \Delta^r_s$ являются решением $(r,s)_2$-системы, удовлетворяющим условиям $u_z = 0$ по всем $z \in B_{r,s}$. Покажем, что тогда $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta^r_s$.

Вначале докажем, что совокупность величин u_z с "номерами" $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \Delta^r_{s-r-1}$ является решением $(r, s-r-1)$-системы. Пусть $\tilde{\Delta}$ – произвольный симплекс, содержащийся в $\overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$. Покажем, что $\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}} = 0$. (Для получения всех уравнений $(r, s-r-1)$-системы, достаточно ограничиваться симплексами $\tilde{\Delta}$ с длиной ребра 1.) Как и в п. 3.3.1, симплекс Δ^r_s зададим величинами $\tau_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Тогда

$$\tilde{\Delta} = \{(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s |\, v_i \geqslant c_i > 0,\ i = 1, \dots, r+1\},$$

для некоторых целых положительных $c_1, \dots, c_{r+1}$. Как и в п. 3.3.1 рассмотрим симплексы

$$C_i = \{z \in \Delta^r_s \,|\, z_j \geqslant 0, j \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\}, z_i \geqslant c_i\}$$

для всех $i = 1, \dots, r+1$. Символом $\mathcal{H}_p$ для $p = 1, \dots, r+1$ обозначаем множество всех симплексов, получающихся пересечением p различных симплексов из семейства $C_1, \dots, C_{r+1}$. Тогда $\mathcal{H}_{r+1} = \{\tilde{\Delta}\}$, а для $p \leqslant r$ симплексы из $\mathcal{H}_p$, как содержащие $\tilde{\Delta}$ и отличные от $\tilde{\Delta}$, имеют длину ребра не меньшую двух.

Практически повторяя рассуждения п. 3.3.1, имеем равенство

$$\sum_{p=0}^{r+1} (-1)^p \sum_{\Delta \in \mathcal{H}_p} \mathcal{L}_\Delta = 0,$$

откуда, благодаря уравнениям $\mathcal{L}_\Delta = 0$ из $(r,s)_2$-системы, получаем $\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}} = 0$. Таким образом, набор значений u_z с "номерами" $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \Delta^r_{s-r-1}$ является решением $(r, s-r-1)$-системы, а с учётом того, что $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s-r-1} = B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$, из п. 3.3.2 имеем $u_z = 0$ для всех $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$.

Далее определяем u_z последовательно для $z \in T_j(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+j}$ в порядке $j = 1, 2, \dots, r+1$. При каждом очередном j, благодаря равенствам $u_z = 0$ для $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s \sqcup \coprod_{i=1}^{j-1} T_i(r,s)$, будем иметь $(r-1, s-r-1+j)_2$-систему относительно неизвестных u_z с "номерами" $z \in T_j(r,s)$ с дополнительными условиями $u_z = 0$ для $z \in B_{r,s} \cap T_j(r,s) = B_{r-1,s-r-1+j}$. По предположению индукции так расширенные системы уравнений имеют только нулевые решения. В результате имеем $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta^r_s$.

Теорема 6 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.

Поскольку дифференциальные операторы (1) и соответствующие им многочлены $P(X_1, \dots, X_n)$ в (14) задаются одним и тем же набором коэффициентов $c_{z_1,\dots,z_n} \in \mathbb{R}$, параметризованных векторами $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}^n_0$, а условия (3) и (15) равносильны, для соответствующих линейных подпространств в пространстве многочленов $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ будем использовать обозначения из теоремы 1.

При таком соглашении линейное пространство $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ с базисом $X_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{z_n}$ по всем $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}^n_0$, обозначаемое далее символом $\mathcal{V}_n$, представляется прямой суммой 2^n своих подпространств $V_{n,\mathfrak{m}}$, параметризованных подмножествами $\mathfrak{m} \subseteq \{1, \dots, n\}$ и задаваемых в виде линейной оболочки:

$$V_{n,\mathfrak{m}} = \langle X_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{z_n} \,|\, z_i = 0,\ i \notin \mathfrak{m},\ z_i \geqslant 1,\ i \in \mathfrak{m} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Для $\mathfrak{m} = \{1, \dots, n\}$ имеем пространство многочленов, делящихся на $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$, т.е. $V_n = V_{n,\{1,\dots,n\}}$, а для произвольных $\mathfrak{m} \subseteq \{1, \dots, n\}$ имеем $V_{n,\mathfrak{m}} \cong V_m$, где $m = |\mathfrak{m}|$. Линейные подпространства $V_{n,\mathfrak{m}}$ инвариантны относительно используемых в (15) линейных преобразований

$$L_p := \sum_{i=1}^{n} X_i (\partial_{X_i})^{p+1}$$

для всех $p \geqslant 1$. Инвариантность следует из того, что $X_i(\partial_{X_i})^{p+1} X_i^{z_i}$ с $z_i \geqslant 1$ либо равно нулю при $p+1 > z_i$, либо (при $p+1 \leqslant z_i$) равно $z_i(z_i-1)\ldots(z_i-p)X_i^{z_i-p}$, где $z_i - p \geqslant 1$. Благодаря этому замечанию, множество решений $\mathcal{W}_n$ системы уравнений (15) представляется прямой суммой линейных подпространств $W_{n,\mathfrak{m}}$. Пространство $W_{n,\mathfrak{m}}$ состоит из решений системы уравнений (15), принадлежащих $V_{n,\mathfrak{m}}$.

Пространство $V_{n,\mathfrak{m}}$ представляется прямой суммой своих подпространств $V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}$, равных линейным оболочкам

$$\langle X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n}\in\mathcal{V}_n|\, z_i=0, i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\mathfrak{m}, z_i\geqslant 1, i\in\mathfrak{m}, z_1+\ldots+z_n=k\rangle_{\mathbb{R}}$$

по всем $k\geqslant m$, где $m=|\mathfrak{m}|$. Пространство $V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}$ состоит из однородных многочленов степени k. Для всех $p\geqslant 1$ и $k\geqslant m$ имеем $L_p(V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}})\subseteq V^{(k-p)}_{n,\mathfrak{m}}$. Последне справедливо, так как для отдельных слагаемых $X_i(\partial_{X_i})^{p+1}$ преобразования L_p и базисных векторов $X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n}\in V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}$ имеем либо $X_i(\partial_{X_i})^{p+1}(X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n})=0$ (при $z_i<p+1$), либо (при $z_i\geqslant p+1$)

$$X_i(\partial_{X_i})^{p+1}(X_1^{z_1}\ldots X_n^{z_n})=z_i(z_i-1)\ldots(z_i-p)X_1^{z_1}\ldots X_{i-1}^{z_{i-1}}X_i^{z_i-p}X_{i+1}^{z_{i+1}}\ldots X_n^{z_n}\in V^{(k-p)}_{n,\mathfrak{m}}.$$

Тогда, если $w=\sum_{k\geqslant m}v_k$, где $v_k\in V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}$, и $w\in W_{n,\mathfrak{m}}$, то для всех $p\geqslant 1$ имеем равенства $L_p(w)=\sum_{k\geqslant m}L_p(v_k)=0$, в которых $L_p(v_k)\in V^{(k-p)}_{n,\mathfrak{m}}$, поэтому $L_p(v_k)=0$ для всех $k\geqslant m$ и $p\geqslant 1$. Таким образом, подпространство решений $W_{n,\mathfrak{m}}$ системы уравнений (15) представляется прямой суммой своих подпространств $W^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}=W_{n,\mathfrak{m}}\cap V^{(k)}_{n,\mathfrak{m}}$ по всем $k\geqslant m$.

Приведённые выше замечания сводят доказательство теоремы 1 к установлению неравенств

$$\dim W_m^{(k)}\leqslant a_{m-1,k-m}, \tag{27}$$

для $m\geqslant 1$ и $k\geqslant m$. Здесь, напомним, пространство $W_m^{(k)}=W^{(k)}_{m,\{1,\ldots,m\}}$, будучи подпространством пространства $V_m^{(k)}=V^{(k)}_{m,\{1,\ldots,m\}}$, равного

$$V_m^{(k)}=\left\{\sum_{(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{N}^m}c_{z_1,\ldots,z_m}X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_m^{z_m}|\, c_{z_1,\ldots,z_m}\in\mathbb{R},\ z_1+\ldots+z_m=k\right\}$$

состоит из однородных многочленов степени k, делящихся на $X_1\cdot\ldots\cdot X_m$.

5.1. В линейном пространстве $V_m^{(k)}$ рассмотрим базис

$$e_{z_1,\ldots,z_m}=\frac{X_1^{z_1}}{(z_1-1)!}\cdot\ldots\cdot\frac{X_m^{z_m}}{(z_m-1)!}, \tag{28}$$

где векторы $(z_1,\ldots,z_m)$ пробегают точки целочисленного симплекса

$$\Delta_{k-m}^{m-1}=\{(Z_1,\ldots,Z_m)\in\mathbb{N}^m|\, Z_1+\ldots+Z_m=k\}.$$

Обозначение $e_{z_1,\ldots,z_m}$ будем использовать и в ситуациях, когда $(z_1,\ldots,z_m)\notin\mathbb{N}^m$, считая тогда $e_{z_1,\ldots,z_m}=0$. В этом новом базисе элементы пространства $V_m^{(k)}$ имеют координаты

$$u_{z_1,\ldots,z_m}=(z_1-1)!\cdot\ldots\cdot(z_m-1)!\cdot c_{z_1,\ldots,z_m}.$$

Действие линейного преобразования $L_p\colon V_m^{(k)}\to V_m^{(k-p)}$ на базисных элементах (28) представляется в виде:

$$L_pe_{z_1,\ldots,z_m}=\sum_{i=1}^m z_ie_{z_1,\ldots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\ldots,z_m}.$$

Коэффициент при базисном векторе $e_{y_1,\ldots,y_m}$ с "номером" $(y_1,\ldots,y_m)\in\Delta_{k-p-m}^{m-1}$ у образа

$$L_p\left(\sum_{(z_1,\dots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}} u_{z_1,\dots,z_m}e_{z_1,\dots,z_m}\right)=$$

$$=\sum_{(z_1,\dots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}} u_{z_1,\dots,z_m}\sum_{i=1}^{m} z_i e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\dots,z_m}$$

равен

$$v_{y_1,\dots,y_m}=\sum_{i=1}^{m}(y_i+p)u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_m},$$

и он, согласно (15), должен быть нулевым, причём для всех $(y_1,\dots,y_m)\in\Delta^{m-1}_{k-p-m}$. В результате система уравнений (15) относительно неизвестных $u_{z_1,\dots,z_m}$, параметризованных точками $(z_1,\dots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}$, запишется в виде уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i+p)u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_m}=0 \tag{29}$$

для всех p из диапазона $1\leqslant p\leqslant k-m$ и $(y_1,\dots,y_m)\in\Delta^{m-1}_{k-p-m}$. Для $p>k-m$ дополнительных уравнений не возникает, поскольку тогда $L_p(V^{(k)}_m)=\{0\}$.

Интересующая нас система линейных уравнений (29), как не трудно понять, является $(m-1,k-m)$-системой с функциями $\varphi_i\colon\Delta^{m-1}_{k-m}\to\mathbb{R}$, $\varphi_i(z_1,\dots,z_m)=z_i$, при условии, что симплекс Δ^{m-1}_{l-m} задаётся значениями $\tau_i=1$ для всех $i=1,\dots,m$, поэтому требуемая для доказательства теоремы 1 верхняя оценка (27) для размерности пространства решений системы линейных уравнений (29) будет следует из уже доказанной теоремы 5.

Теорема 1 доказана.

Равносильность условий инвариантности (3) системе уравнений (29) может быть доказана также с помощью формулы Фаа ди Бруно о производных высших порядков суперпозиции функций $g=f(\varphi)$ [22]:

$$g^{(z)}=\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_z)\in\mathbb{N}^z_0:\\ i_1+2i_2+3i_3+\dots+zi_z=z}}\frac{z!}{i_1!i_2!\dots i_z!}f^{(i_1+i_2+\dots+i_z)}(\varphi)\prod_{j=1}^{z}\left(\frac{\varphi^{(j)}}{j!}\right)^{i_j}.$$

Впервые она получена Антони Арбогастом [23], но известность получила благодаря работам [24], [25].

6. Доказательство теоремы 3.

Согласно рассуждениям пп. 2 и 3, теорема 3 будет доказана, если показать, что в (r,s)-системе с параметрами $r\geqslant 1$ и $s\geqslant 0$, для которой $\varphi_i(z_1,\dots,z_{r+1})=z_i$ для всех $i=1,\dots,r+1$ (при задании симплекса Δ^r_s значениями $\tau_i=1$ при всех $i=1,\dots,r+1$) уравнения $\mathcal{L}_{\Delta^r_p}=0$ для всех $\Delta^r_p\subseteq\Delta^r_s$ и всех $p=3,\dots,s$ следуют из уравнений $\mathcal{L}_{\Delta^r_1}=0$ по всем $\Delta^r_1\subseteq\Delta^r_s$ и уравнений $\mathcal{L}_{\Delta^r_2}=0$ по всем $\Delta^r_2\subseteq\Delta^r_s$.

Пусть $p\geqslant 3$ и конкретно

$$\Delta^r_p=\{(z_1,\dots,z_{r+1})\in\Delta^r_s|\, z_i\geqslant k_i\geqslant 1,\ i=1,\dots,r+1\}.$$

Тогда $k_1 + ... + k_{r+1} = r + 1 + s - p$. Вершины симплекса Δ_p^r обозначим $B_1, ..., B_{r+1}$. Для всех $i = 1, ..., r+1$ имеем

$$B_i = (k_1, ..., k_{i-1}, k_i + p, k_{i+1}, ..., k_{r+1}).$$

Рассмотрим возможное при $p \geqslant 3$ разбиение $p = p' + p''$, где p', $p'' \in \mathbb{N}$ и $p' \neq p''$. К вершине B_i для всех $i = 1, ..., r+1$ пристроим два симплекса

$$\Delta_{p'}^r(i) = \{(z_1, ..., z_{r+1}) \in \Delta_p^r | \, z_i \geqslant k_i + p''\} \subset \Delta_p^r$$

и

$$\Delta_{p''}^r(i) = \{(z_1, ..., z_{r+1}) \in \Delta_p^r | \, z_i \geqslant k_i + p'\} \subset \Delta_p^r$$

с вершинами соответственно

$$B'_{i,1}, ..., B'_{i,i-1}, B_i, B'_{i,i+1}, ..., B'_{i,r+1} \quad \text{и} \quad B''_{i,1}, ..., B''_{i,i-1}, B_i, B''_{i,i+1}, ..., B''_{i,r+1},$$

расположенными на рёбрах симплекса Δ_p^r (см. рис. 8, где $p' < p''$). Возникает по две вершины $B'_{i,j} = B''_{j,i}$, $B''_{i,j} = B'_{j,i}$ внутри каждого ребра $[B_i, B_j]$ симплекса Δ_p^r.

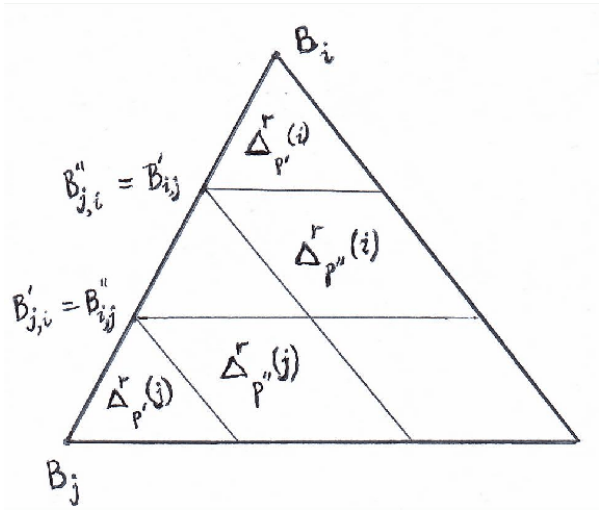


Рис. 8

Справедливость теоремы 3 будет следовать из равенств

$$\sum_{i=1}^{r+1}(k_i + p'')\mathcal{L}_{\Delta_{p'}^r(i)} - \sum_{i=1}^{r+1}(k_i + p')\mathcal{L}_{\Delta_{p''}^r(i)} = (p'' - p')\mathcal{L}_{\Delta_p^r}, \tag{30}$$

позволяющих последовательно исключать из (r, s)-системы уравнения $\mathcal{L}_\Delta = 0$ с симплексами Δ максимального (на текущий момент) размера. Коэффициент при неизвестном u_{B_i} в левой и правой части равенства (30) равен

$$(k_i + p'')(k_i + p) - (k_i + p')(k_i + p) = (p'' - p')(k_i + p).$$

Далее, коэффициенты при $u_{B'_{i,j}}$ и $u_{B''_{i,j}}$ в правой части равенства (30) равны 0, а в левой части они равны соответственно

$$(k_i + p'')(k_j + p') - (k_j + p')(k_i + p'') = 0$$

и

$$(k_j + p'')(k_i + p') - (k_i + p')(k_j + p'') = 0.$$

Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теоремы 2.

Согласно пп. 2 и 3 для доказательства равенства (13) достаточно проверить, что размерность пространства решений $U_{r,s}$ соответствующей (r,s)-системы для $s=0,1,2,3,4$ равна $a_{r,s}$. Непосредственно из равенства (11) получаем

$$a_{r,0}=1,\quad a_{r,1}=r,\quad a_{r,2}=\frac{r(r+1)}{2}-1,$$
$$a_{r,3}=\frac{r(r-1)(r+4)}{6}-1,\quad a_{r,4}=\frac{r(r-2)(r+3)(r+5)}{24}-1.$$

По теореме 3 можно считать, что (r,s)-система с неизвестными u_z, где $z\in\Delta_s^r$, состоит только из уравнений $\mathcal{L}_{\Delta_1^r}=0$ по всем $\Delta_1^r\subset\Delta_s^r$ и $\mathcal{L}_{\Delta_2^r}=0$ по всем $\Delta_2^r\subset\Delta_s^r$ общим числом $|\Delta_{s-1}^r|+|\Delta_{s-2}^r|$. В результате нижней оценкой для размерностей $\dim U_{r,s}=\dim W_{m,m+s}$, где $m=r+1$, выступают величины

$$|\Delta_s^r|-(|\Delta_{s-1}^r|+|\Delta_{s-2}^r|)=$$
$$=\binom{r+s}{s}-\binom{r+s-1}{s-1}-\binom{r+s-2}{s-2}=\binom{r+s-1}{s}-\binom{r+s-2}{s-2},$$

равные $a_{r,s}$ для $s=0,1,2,3,4$. (Считаем $\binom{a}{b}=0$ при $b<0$.) По теореме 5 эти же величины выступают верхними оценками для размерности пространства решений произвольной (r,s)-системы.

Равенство (13) для $s=0,1,2,3,4$ доказано. Для $s=\frac{m(m-1)}{2}$ равенство (13) обеспечивается вронскианом (5).

Далее,

$$\dim U_{r,s}\geqslant\binom{r+s-1}{s}-\binom{r+s-2}{s-2}=\frac{(r+s-2)!}{r!s!}(r^2+sr-r-s^2+s)>0$$

для $s<\frac{r+1}{2}+\frac{\sqrt{5r^2-2r+1}}{2}$. Последняя сумма больше $\frac{1+\sqrt{5}}{2}r$, а $r=m-1$.

Теорема 2 доказана.

8. Доказательство теоремы 4.

Элементы кольца многочленов $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ будем представлять в виде

$$P(X_1,\dots,X_n)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n}u_{z_1,\dots,z_n}e_{z_1,\dots,z_n},\tag{31}$$

где вместо базиса (28) используется другой базис

$$e_{z_1,\dots,z_n}=\frac{(X_1-1)^{z_1}}{z_1!}\cdot\dots\cdot\frac{(X_n-1)^{z_n}}{z_n!}.\tag{32}$$

Далее используем разложение линейного пространства $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ в прямую сумму своих линейных подпространств:

$$\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]=\sum_{j\geqslant0}M_j,\ M_j=\langle e_{z_1,\dots,z_n}|\,z_1+\dots+z_n=j\rangle_{\mathbb{R}},\ j\geqslant0.\tag{33}$$

Используемый в уравнение (16) линейный оператор представляем в виде

$$\sum_{i=1}^n((\partial_{X_i})^{p+1}+(X_i-1)(\partial_{X_i})^{p+1}+\lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p)=L'_p+L''_p,$$

$$L'_p=\sum_{i=1}^n(\partial_{X_i})^{p+1},\quad L''_p=\sum_{i=1}^n((X_i-1)(\partial_{X_i})^{p+1}+\lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p).$$

Как и в п. 5.1 имеем

$$L'_pe_{z_1,\dots,z_n}=\sum_{i=1}^n e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p-1,z_{i+1},\dots,z_n},$$

поэтому $L'_p(M_j)\subseteq M_{j-p-1}$ для всех $j\geqslant 0$. Здесь полагаем $e_{z_1,\dots,z_n}=0$, если $(z_1,\dots,z_n)\notin\mathbb{N}_0^n$, когда $z_i<0$ при некотором $i\in\{1,\dots,n\}$. Считаем также $M_j=\{0\}$ при $j<0$. Аналогичным образом имеем вложения[1] $L''_p(M_j)\subseteq M_{j-p}$ для всех $j\geqslant 0$, так как

$$L''_pe_{z_1,\dots,z_n}=\sum_{i=1}^n(z_i-p+\lambda_i(p+1))e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\dots,z_n}.$$

Коэффициент при базисном векторе $e_{y_1,\dots,y_n}$ для всех $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{N}_0^n$ у образа

$$(L'_p+L''_p)\left(\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n}u_{z_1,\dots,z_n}e_{z_1,\dots,z_n}\right)=$$

$$=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n}u_{z_1,\dots,z_n}\sum_{i=1}^n e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p-1,z_{i+1},\dots,z_n}+$$

$$+\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n}u_{z_1,\dots,z_n}\sum_{i=1}^n(z_i-p+\lambda_i(p+1))e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\dots,z_n}$$

равен

$$v_{y_1,\dots,y_n}=\sum_{i=1}^n u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n}+\sum_{i=1}^n(y_i+\lambda_i(p+1))u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_n},$$

и он, согласно (16), должен быть нулевым, причём для всех $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{N}_0^n$.

Благодаря этим замечаниям, при каждом $p\geqslant 1$ уравнения системы линейных уравнений (16) имеют вид

$$\sum_{i=1}^n(y_i+\lambda_i(p+1))u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_n}+\sum_{i=1}^n u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n}=0,\tag{34}$$

по всем $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{N}_0^n$. Первое слагаемое в сумме (34) отвечает оператору L''_p, а второе слагаемое – оператору L'_p

8.1. Коль скоро система линейных уравнений (34) имеет блочно треугольный вид, отвечающий разложению (33), верхней оценкой для размерности пространства её решений при любых $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ может служить $\sum_{j\geqslant 0}\dim K_j$, где $K_j\subseteq M_j$ – пространство решений однородной системы линейных уравнений

$$L'_pP(X_1,\dots,X_n)=0\ \text{ для всех }\ p\geqslant 1,\tag{35}$$

относительно неизвестных $P(X_1,\dots,X_n)\in M_j$. Здесь учитывается, что неизвестные $u_{z_1,\dots,z_n}$ системы уравнений (34) могут определяться по мере увеличения параметра $j=z_1+\dots+z_n\geqslant 0$.

[1] В формуле (6) работы [4] имеется опечатка, нет множителя $(p+1)$ перед $(\partial_{X_i})^p$ в определение оператора L''_p. Автор её обнаружил при чтении [2]. На эту опечатку обратил ещё внимание В.В. Доценко. Она вызвала сомнения в корректности обоснования оценки $(n+1)!$ в [4], но на справедливость приводимых там рассуждений эта опечатка не влияет, требуемое нам включение $L''_p(M_j)\subseteq M_{j-p}$ для всех $j\geqslant 0$, от неё не зависит.

Утверждаемая теоремой 4 верхняя оценка $(n+1)!$ при любых $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ будет следовать из неравенств

$$\dim K_j \leqslant a_{n,j} \quad \text{по всем} \quad j\geqslant 0, \tag{36}$$

так как $\sum_{j\geqslant 0} a_{n,j}=(n+1)!$, где числа $a_{n,j}$ определяются в (11).

Система уравнений (35) для $P(X_1,\dots,X_n)\in M_j$ при каждом $j\geqslant 0$ может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n}=0\\ \text{по всем}\quad (y_1,\dots,y_n)\in\Delta^{n-1}_{j-p-1}\quad\text{и}\quad 1\leqslant p\leqslant j-1.\end{gathered} \tag{37}$$

Неизвестными в уравнениях (37) являются $u_{z_1,\dots,z_n}$, параметризованные точками $(z_1,\dots,z_n)$ симплекса Δ^{n-1}_j:

$$(z_1,\dots,z_n)\in\Delta^{n-1}_j=\{(Z_1,\dots,Z_n)\in\mathbb{N}_0^n\,|\,Z_1+\dots+Z_n=j\}.$$

Для $j=0$ и $j=1$ в системе (37) уравнений нет, поэтому $K_0=M_0$, $K_1=M_1$.

Система линейных уравнений (37) является подсистемой определённой в п. 2 (r,s)-системы с параметрами $r=n-1$ и $s=j$ относительно того же набора переменных u_z, параметризованных точками $z\in\Delta^{n-1}_j$, но с другим набором уравнений и положительнозначных функций $\varphi_i\colon\Delta^{n-1}_j\to\mathbb{R}$. Здесь $\varphi_i(z)=1$ для всех $z\in\Delta^{n-1}_j$ и $i=1,\dots,n$. Она состоит из уравнений $\mathcal{L}_\Delta=0$, для всех $\Delta=\Delta^{n-1}_q\subseteq\Delta^{n-1}_j$ с $q=2,\dots,j$. В п. 4 она названа $(r,s)_2$-системой с $r=n-1$ и $s=j$. Из доказанного там неравенства (22) следует (36).

Теорема 4 доказана.

9. Заключительные замечания.

Представляется, что предлагаемый в статье подход решения (r,s)-систем линейных уравнений может оказаться полезным при решении других задач, связанных с инвариантными дифференциальными операторами. В подтверждение приведём несколько замечаний.

9.1. В работе [6], относящейся не только к прямой, но и к многообразиям произвольной размерности, приводится, в частности, классификация тернарных ($n=3$) инвариантных дифференциальных операторов над пространствами так называемых взвешенных плотностей на прямой, задаваемых числами λ_1, λ_2, λ_3. Вычленение из представленного там на стр. 168 – 176 общего списка инвариантных дифференциальных операторов тех, что относятся к нашему случаю (когда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$), представляет не простую задачу, потому как разложения (10) и (12) там не используются, ограничиваются разложениями (2) и (6), справедливыми для произвольных $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Видимо автор [6] не счёл нужным специально их выделять ввиду явной простоты.

Действительно, согласно теореме 1 настоящей статьи такие операторы при $n\leqslant 3$ описываются совсем коротко. Они линейно выражаются через (домноженные на функции) произведения первых дифференциалов (4) с $n=1,2,3$ и вронскианы (5) с $n=2,3$ и ещё двух видов операторов из $W_3^{(4)}$ и $W_3^{(5)}$, представленных соответственно в доказательстве теоремы 5 в начале индукции в п. 3.2.4 (рис. 5c)) и в п. 3.2.3 (рис. 5b). В терминах многочленов (14) это соответственно для $s=1$ многочлены

$$X_1X_2X_3(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3)\quad\text{с}\quad\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

и для $s=2$ многочлены

$$X_1X_2X_3(\alpha_1X_1^2+\alpha_2X_2^2+\alpha_3X_3^2+3\alpha_1X_2X_3+3\alpha_2X_1X_3+3\alpha_3X_1X_2) \tag{38}$$

тоже с $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

9.2. Гораздо богаче примерами значение $n=4$. Подробно рассмотрим случай $s=5$. Проверим равенство $\dim W_4^{(9)}=3$, необходимое для подтверждения сформулированной во введение гипотезы в случае $n=4$.

В терминах п. 3 имеем $\dim W_4^{(9)}=\dim U_{3,5}$. Предполагаем, что в соответствующей $(3,5)$-системе симплекс Δ_5^3 задаётся величинами $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_4=1$, а функции $\varphi_i\colon \Delta_5^3\to\mathbb{N}$ для задания коэффициентов в уравнениях (18) определются как в п. 5: $\varphi_i(z_1,z_2,z_3,z_4)=z_i$ для всех $i=1,2,3,4$. Симплекс Δ_5^3 будем представлять с помощью рис. 7, предполагая там длину ребра равной 5, с шестью точками на ребре.

Теорема 5 утверждает, что $\dim U_{3,5}\leqslant 3$, поэтому для подтверждения равенства $\dim U_{3,5}=3$ достаточно предъявить 3 линейно независимых решения $(3,5)$-системы уравнений. В п. 3 по существу изложен алгоритм явного выписывания любого возможного решения (r,s)-системы $(u_z, z\in\Delta_s^r)$ через произвольно заданные значения u_z для $z\in A_{r,s}\subset\Delta_s^r$. Правда потом для так полученного "решения" необходима проверка уравнений $\mathcal{L}_\Delta=0$ для всех подсимплексов $\Delta\subset\Delta_s^r$ с длинами рёбер 1 и 2. По теореме 3 этого достаточно для проверки.

В нашем случае $|A_{3,5}|=3$. На рис. 7 имеем $A_{3,5}=\{S,P,F\}$. Будем искать возможное решение с $u_S=1$ и $u_P=u_F=0$. Согласно п. 3 имеем $u_z=0$ для $z\in\overset{\circ}{\Delta}{}_5^3$, а для $z\in\Delta_5^3\setminus\overset{\circ}{\Delta}{}_5^3$ значения u_z можно определять в четыре этапа. Вначале для $z\in[H,G,F]=\Delta_2^2$, затем для $z\in[C,E,D]=\Delta_3^2$, на третьем этапе для $z\in[A,K,B_4]=\Delta_4^2$ и, наконец, для $z\in[B_1,B_2,B_3]=\Delta_5^2$.

На первом этапе получаем $u_z=0$ для $z\in\Delta_2^2$, так как $u_z=0$ для $z\in A_{2,2}=\{F,P\}$. Уже на этом этапе можно заключить, что для всех $z\in\Delta_5^3$ справедливы равенства $u_{\sigma_1(z)}=u_z$ и $u_{\sigma_{1,i}(z)}=-u_z$ для $i=2,3,4$. Здесь символом σ_i обозначаем поворот симплекса Δ_5^3 на 120° вокруг его высоты, выходящей из вершины B_i, а символом $\sigma_{i,j}$ обозначаем зеркальную симметрию симплекса Δ_5^3, оставляющую вершины B_i и B_j неподвижными. Это легко доказать исходя из определения (r,s)-системы, инвариантного (в случае нашего выбора коэффициентов $\varphi_i(b_i)$ при неизвестных в уравнениях (18)) при любой перестановке вершин $B_1,\dots,B_{r+1}$. Не приводя формального доказательства, будем всё же использовать заявленную симметрию и кососимметрию, поскольку в конце всё равно предусматривается необходимая проверка. В результате сразу же получаем $u_z=0$ для $z\in[B_1,B_i]$ для всех $i=2,3,4$.

На втором этапе, следуя действиям п. 3.2, находим u_z для $z\in[C,E,D]=\Delta_3^2$. Ответ представлен трапецией (39), $u_D=-\frac{2}{15}$, $u_S=1$, $u_Q=-1$, $u_E=\frac{2}{15}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & \frac{14}{9} & & -\frac{14}{9} & & 0 & \\ 0 & & -\frac{7}{6} & & 0 & & \frac{7}{6} & & 0 \\ 0 & -\frac{2}{15} & & 1 & & -1 & & \frac{2}{15} & & 0 \end{array}\quad . \tag{39}$$

Проводить третий и четвёртый этапы нет необходимости, благодаря заявленной симметрии и кососимметрии уже получены значения u_z для всех $z\in\Delta_5^3$. Выписанное "решение" проверку выдерживает, поэтому оно является решением. За счёт симметрий поверка равенств $\mathcal{L}_\Delta=0$ для подсимплексов $\Delta\subset\Delta_5^3$ с длинами рёбер 1 и 2 существенно упрощается.

Благодаря изоморфной S_4 группе симметрий симплекса Δ_5^3, из полученного решения получаем $24=4!$ решений $(3,5)$-системы линейных уравнений, из которых попарно различными будут $8=24/3$, потому как у найденного решения, в свою очередь, имеет место группа симметрий $\langle\sigma_1\rangle$ порядка 3. Среди этих 8 решений можно выделить 3 линейно независимых, например, ещё два, получающиеся из найденного решения путём поворотов σ_2 и σ_2^{-1}.

9.2.1. Общее решение для $(3,5)$-системы (в виде линейных комбинаций трёх указанных решений) тоже можно представить в виде, аналогичном (38). Приведём ответ для соответствующего упражнения. Он представляется любопытным.

Прежде всего, для любого решения (u_z, $z \in \Delta^3_5$) имеем

$$u_{B_1} = u_{B_2} = u_{B_3} = u_{B_4} = 0,$$

и для всех $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^3_5$ имеем $u_z = 0$. Граничные точки разобъём на четыре группы, каждая из которых является множеством вершин однородного многогранника, являющегося либо архимедовым телом (см. [26]) либо комбинаторно эквивалентным архимедову телу. В последнем случае название используем то же, что и для архимедова тела.

Многогранники с вершинами $(1,3,2,3)$, $(1,4,1,3)$, $(1,5,1,2)$ называем соответственно малым, средним и большим усечённым тетраэдром. Остальные вершины каждого многогранника получаются перестановкой выписанных координат. Определяющим для нас (заменяющим классифицирующее множество $A_{3,5}$) является кубооктаэдр с вершиной $(1,4,2,2)$ (см. стр. 35 в [26]).

К вершинам кубооктаэдра z произвольно приписываем вещественные числа x_z, но так, что сумма при вершинах каждой грани равна нулю. Векторное пространство возможностей трёхмерно, так как числами при любых трёх вершинах любой прямоугольной грани числа при остальных вершинах кубооктаэдра определяются однозначно без нарушения общего правила.

К каждой вершине z малого усечённого тетраэдра, являющейся серединой длинного ребра $[z_1, z_2]$ кубооктаэдра, приписываем $x_z = -x_{z_1} - x_{z_2}$.

К каждой вершине z соответственно среднего усечённого тетраэдра и большого усечённого тетраэдра, являющейся ближайшей к короткому ребру $[z_1, z_2]$ кубооктаэдра, приписываем соответственно $x_z = -x_{z_1} - x_{z_2}$ и $x_z = x_{z_1} + x_{z_2}$.

После этого получаем решение $(3,5)$-системы

$$u_z = \theta x_z, \quad \text{где} \quad z \in (\Delta^3_5 \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^3_5) \setminus \{B_1, B_2, B_3, B_4\},$$

а коэффициент θ равен соответственно $\frac{14}{9}$, $\frac{7}{6}$, 1 или $\frac{2}{15}$ в зависимости от многогранника, вершиной которого является точка z, соответственно, малого усечённого тетраэдра, кубооктаэдра, среднего или большого усечённых тетраэдров.

Приведённые выше четыре правила выписывания переменных x_z при вершинах многогранников z в частном случае для $u_S = 1$ и $u_P = u_F = 0$ непосредственно проверяются по боковым граням, задаваемым трапецией (39) и образами этой трапеции при поворотах σ_1 и σ_1^{-1}, и по нулевой внутренности основания.

По случаю заметим, что вронскиану при $n = 4$ отвечает усечённый октаэдр в симплексе Δ^3_6 с вершиной $(1,2,3,4)$ (см. стр. 31 в [26]). Для соответствующих решений $(3,6)$-системы имеем $u_{z_1} = -u_{z_2}$, если $[z_1, z_2]$ ребро усечённого октаэдра.

9.3. Судя по доказательству теоремы 4 в п. 8, обращение к базису (32) (вместо (28)) может оказаться полезным для классификации инвариантных дифференциальных операторов (17). В этом случае определение коэффициентов многочленов (31) $u_{z_1,\dots,z_n}$ с $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}^n_0$ для очередного порядка $k = z_1 + \dots + z_n$ связано с решение $(n-1,k)$-системы линейных уравнений с ненулевой зависящей от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ правой частью, определённой на предыдущих этапах, но зато с коэффициентами при неизвестных $u_{z_1,\dots,z_n}$ тождественно равными 1. В отличие от рассматриваемой в теореме 1 ситуации $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, здесь о гипотезе типа (13) говорить не приходится. После вычисления неизвестных $u_{z_1,\dots,z_n}$ для $z_1 + \dots + z_n = k$ по алгоритму из п. 3, последующие проверки равенств $\mathcal{L}_\Delta = 0$ для всех подсимплексов $\Delta \subseteq \Delta^{(n-1)}_k$ с ненулевой длиной ребра будут предоставлять, в частности, условия на параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, обеспечивающие ненулевые решения.

В этой связи, особенно в свете работы [19], интересным является вопрос о существовании решений системы линейных уравнений (16) с бесконечными суммами в (31) для каких либо $n \geqslant 2$ и $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$.

Автор благодарит рецензента за предоставленную литературу и высказанные замечания, способствовавшие более адекватному представлению результатов статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 5-е издание, М.: "Дрофа" , 2004, 640 с.

2. Кириллов А.А. Инвариантные операторы над геометрическими величинами. Итоги науки и техники. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1980, с. 3–29.

3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. 4-е издание, М.: "Наука" , 1984, 520 с.

4. Малышев Ф.М. Симплициальные системы линейных уравнений.
В кн.: Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1980, стр. 53-56.

5. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986, 304 с.

6. Буаррудж С. Тернарные инвариантные дифференциальные операторы, действующие на пространстве взвешенных плотностей, ТМФ, **158**:2 (2009), с. 165–180.

7. Кириллов А.А. Об инвариантных дифференциальных операциях над геометрическими величинами. Функц. анализ и его прилож., 1977, 11, № 2, с. 39–44.

8. Рудаков А.Н. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли картановского типа. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 835–866.

9. Veblen O. Differential invariants and geometry. Atti del Congr., Int. Mat., Bologna, 1929.

10. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Об инвариантных дифференциальных операторах на прямой. Функц. анализ и его прилож., 1979, 13, № 4, с. 91–92.

11. Грозман П.Я. Классификация билинейных инвариантных операторов над тензорными полями. Функц. анализ и его прилож., 1980, 14, № 2, с. 58–59.

12. Бернштейн И.Н., Лейтес Д.А. Инвариантные дифференциальные операторы в формальных тензорных полях. – Сердика, 1981, т. 11, № 4, с. 30–45.

13. Лейтес Д.А. Неприводимые представления супералгебр Ли векторных полей и инвариантные дифференциальные операторы. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 1, с. 76–77.

14. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 2, с. 47–63.

15. Табачников С.Л. Об инвариантных дифференциальных операторах общего положения. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 3, с. 86–87.

16. Шмелёв Г.С. Неприводимые представления бесконечномерных гамильтоновых и пуассоновых супералгебр Ли и инвариантные дифференциальные операторы. – Сердика, 1982, т.12, № 1, с. 11–23.

17. Шмелёв Г.С. Дифференциальные $H(2n, m)$-инвариантные операторы и неразложимые $osp(2, 2n)$-представления. Функц. анализ и его прилож., 1983, 17, № 4, с. 94–95.

18. Шмелёв Г.С. Инвариантные операторы на симплектическом супермногообразии. Мат. сб. Т. 120(162), № 4, 1983, с. 528–539.

19. Iohara K., Mathieu O. A Global version of Grozman's theorem. Math. Zeitschrift, **274**:3 (2013), с. 955–992.

20. Bouarroudj S., Leites D.A. Invariant differential operators in positive characteristic. J. Algebra. **499** (2018), с. 281–297.

21. Grozman P. Invariant bilinear differential operators. Communications in Mathematics, **30**:3, (2022), с. 129–188.

22. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005, 767 с.

23. Arbogast L. F. A. Du calcul des dérivations aux sŕies rćurrentes, tant simples que doubles or triples, d'un ordre quelconque. — Strasbourg: Levrault, 1800.

24. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni. Annali di Scienze Matematiche et Fisiche di Tortoloni. **6** (1855), с. 479–480.

25. Faà di Bruno F. Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel. Quart. J. Math. **1** (1857), с. 359–360.

26. Веннинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974, 236 с.

REFERENCES

1. Arkhipov G.I., Sadovnichy V.A., Chubarikov V.N. 2004, "Lectures on mathematical analysis. 5th edition", *M.: "Bustard"*, 640 p.

2. Kirillov A.A. 1980, "Invariant operators over geometric quantities. Results of science and technology". Vol. 16. *M.: VINITI*, pp. 3–29.

3. Pontryagin L.S. 1984, "Continuous groups". 4-th edition, *Moscow: Nauka*, 520 p.

4. Malyshev F. M. 1980, "Simplicial systems of linear equations. In the book: Algebra", *M.: Publishing House of Moscow State University*, pp. 53–56.

5. Kostrikin A.I., Manin Yu.I. 1986, "Linear algebra and geometry", *Moscow: Nauka*, 304 p.

6. Buarrudj S. 2009, "Ternary invariant differential operators acting on the space of weighted densities, *TMF*, **158**:2, pp. 165–180.

7. Kirillov A.A. 1977, "On invariant differential operations on geometric quantities", *Function. analysis and its application*, Vol. 11, № 2, pp. 39–44.

8. Rudakov A.N. 1974, "Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of Cartan type. *Izv. AN USSR. Ser. mat.*, Vol. 38, № 4, pp. 835–866.

9. Veblen O. 1929, "Differential invariants and geometry", *Atti del Congr., Int. Mat., Bologna.*

10. Feigin B.L., Fuchs D.B. 1979, "On invariant differential operators on a straight line", *Function. analysis and its application.*, Vol. 13, № 4, pp. 91–92.

11. Grozman P.Ya. 1980, "Classification of bilinear invariant operators over tensor fields", *Function. analysis and its application.*, Vol. 14, № 2, pp. 58–59.

12. Bernstein I.N., Leites D.A. 1981, "Invariant differential operators in formal tensor fields", *Serdika*, Vol. 11, № . 4, pp. 30–45.

13. Leites D.A. 1982, "Irreducible representations of Lie superalgebras of vector fields and invariant differential operators", *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 1, pp. 76–77.

14. Feigin B.L., Fuchs D.B. 1982, "Skew-symmetric invariant differential operators on a straight line and Verma modules over the Virasoro algebra", *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 2, pp. 47–63.

15. Tabachnikov S.L. 1982, "On invariant differential operators of general position", *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 3, pp. 86–87.

16. Shmelev G.S. 1982, "Irreducible representations of infinite-dimensional Hamiltonian and Poisson Lie superalgebras and invariant differential operators", *Serdika*, Vol. 12, № . 1, pp. 11–23.

17. Shmelev G.S. 1983, "Differential $H(2n, m)$-invariant operators and indecomposable $osp(2, 2n)$-representations", *Function. analysis and its application.*, Vol. 17, № 4, pp. 94–95.

18. Shmelev G.S. 1983, "Invariant operators on a symplectic supermanifold", *Mat. Sat.* Vol. 120(162), № 4, pp. 528–539.

19. Iohara K., Mathieu O. 2013, "A Global version of Grozman's theorem", *Math. Zeitschrift*, **274**:3, pp. 955–992.

20. Bouarroudj S., Leites D.A. 2018, "Invariant differential operators in positive characteristic", *J. Algebra.* **499**, pp. 281–297.

21. Grozman P. 2022, "Invariant bilinear differential operators", *Communications in Mathematics*, **30**:3, pp. 129–188.

22. Stanley R. 2005, "Enumerative combinatorics. Trees producing functions and symmetric functions", *Moscow: Mir*, 767 p.

23. Arbogast L. F. A. 1800, "Du calcul des dérivations aux sfies rćurrentes, tant simples que doubles or triples, d'un ordre quelconque", *Strasbourg: Levrault.*

24. Faà di Bruno F. 1855, "Sullo sviluppo delle funzioni", *Annali di Scienze Matematiche et Fisiche di Tortoloni.* **6**, pp. 479–480.

25. Faà di Bruno F. 1857, "Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel", *Quart. J. Math.*, **1**, pp. 359–360.

26. Wenninger M. 1974, "Models of polyhedra", *M.: Mir*, 236 p.

Получено: 13.04.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-239-251

Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

В статье развивается теория матричных интегральных преобразований Фурье на основе дифференциального оператора с кусочно-постоянными матричными коэффициентами. Дается определение матричного преобразования Фурье, изучаются его свойства и приложения к моделированию взаимосвязанных волновых процессов в кусочно однородных средах. Доказана формула обращения для матричного интегрального преобразования Фурье. Выявлены существенные отличия от скалярного случая. Развита техника применения матричного преобразования Фурье для решения взаимосвязанных смешанных краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа с матричными кусочно-постоянными коэффициентами. Найдено решение векторного аналога задачи о распространении волн в бесконечной струне с двумя участками различной плотности. Найден векторный аналог формулы Даламбера. Получено решение смешанной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений параболического типа, описывающей $n-$ компонентную модель взаимосвязанного процесса тепломассопереноса в двухслойной среде.

Ключевые слова: Матричное интегральное преобразование Фурье, формула Даламбера, матричная экспонента, кусочно-однородная среда.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 239–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-239-251

Generalized Laplace Transform Based on the Differentiation Operator With Piecewise Constant Coefficients

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Yaremko Oleg Emmanuilovich — Moscow State Technical University "Stankin" (Moscow).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Yaremko Natalya Nikolaevna — National Research Technological University "MISiS" (Moscow).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Abstract

The paper develops the theory of matrix integral Fourier transforms based on a differential operator with piecewise constant matrix coefficients. The definition of the matrix Fourier transform is given, its properties and applications to the modeling of interrelated wave processes in piecewise homogeneous media are studied. An inversion formula for the matrix integral Fourier transform is proved. Significant differences from the scalar case are revealed. A technique for applying the matrix Fourier transform to solving interrelated mixed boundary value problems for systems of hyperbolic differential equations with matrix piecewise constant coefficients is developed. A solution is found for the vector analog of the problem of wave propagation in an infinite string with two regions of different density. A vector analogue of the d'Alembert formula is found. A solution is obtained for a mixed initial-boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type, which describes an n component model of an interconnected process of heat and mass transfer in a two-layer media.

Keywords: Matrix integral Fourier transform, d'Alembert formula, matrix exponential, piecewise homogeneous media

Bibliography: 19 titles.

For citation:
A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, 2023, "Matrix integral transforms for modeling wave processes" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 239–251.

1. Введение

Если рассматривать колебания неограниченной струны, то нет необходимости учитывать влияния отраженных волн. Тем самым процесс моделирования колебаний струны существенно упрощается. Формула Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны послужила основой моделирования волновых явлений в неограниченных средах. Естественной представляется задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны с двумя участками различной плотности. В этом случае возникают так называемые внутренние граничные условия. Формальное решение такой задачи в терминах преобразования Фурье было найдено еще в 80-годы 20 века в работе [9]. Однако такое решение нельзя признать удовлетворительным, т.к. ответ приводится в терминах преобразования Фурье, тогда как в формуле Даламбера решение выражается непосредственно через начальные условия. Только

в начале 21 века в работах В.А. Ильина [4, 5] было найдено обобщение формулы Даламбера для неограниченной струны с двумя участками различной плотности, в виде несодержащем неопределенных интегралов. В векторном случае результаты до сих пор не были известны, хотя многие проблемы математического моделирования приводят к взаимосвязанным системам дифференциальных уравнений гиперболического или параболического типа [10, 14]. В.А. Ильин в своих работах развил метод бегущих волн Даламбера [16]. Метод бегущих волн оказался успешным для исследования линейных и нелинейных волновых процессов. Однако метод трудно реализуем при изучении n компонентных взаимосвязанных моделей. Причина состоит в том, что необходимо рассматривать $2n$ бегущих волн и также учитывать отражение от внутренней границы. Поэтому авторы выбрали метод матричных интегральных преобразований [18]. Таким образом, цель статьи развить технику применения матричных интегральных преобразований для моделирования волновых процессов в двухслойных средах. Решающее значение оказало понятие вектор-функции матричного аргумента.

2. Методы

2.1. Вектор-функция матричного аргумента

Согласно спектральной теореме [2], эрмитова матрица обладает только вещественными собственными значениями и всегда может быть приведена к диагональному виду с помощью унитарной матрицы P. Пусть матрица A может быть приведена к диагональному виду, то есть мы можем найти матрицу P и диагональную матрицу Λ такие, что $A = P^{-1}\Lambda P$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть на действительной оси задана функция $y = \varphi(x)$. В книге Гантмахера [2] функция матричного аргумента определена формулой $\varphi(Ax) = P^{-1}\Lambda(x)P$, где матрица $\Lambda(x)$ имеет вид

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1 x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \varphi(\lambda_n x) \end{pmatrix}.$$

В исследовании свойств матричных интегральных преобразований Фурье существенную роль будет отведено понятию вектор-функции матричного аргумента.

Определение 1. *Пусть на действительной оси задана вектор функция*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функцией матричного аргумента Ax назовем выражение

$$f(Ax) = f_1(Ax)\,e_1 + \cdots + f_n(Ax)\,e_n,$$

здесь e_k– единичный вектор с единицей в k– ой координате.

Пример 1. Пусть вектор-функция $f(x)$ и матрица A формулами

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

найти $f(Ax)$.

Из определения 1 имеем

$$f(Ax) = A^2x^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + A^3x^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x^3 =$$

$$= \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}x^3 = \begin{pmatrix}5x^2+8x^3\\3x^2+5x^3\end{pmatrix}.$$

2.2. Матричные интегральные преобразования фурье

2.2.1. Матричные интегральные преобразования фурье на действительной оси

Definition 1. *Пусть все собственные значения матрицы A положительны, различны и вектор-функция*

$$f(x) = \begin{pmatrix}f_1(x)\\\cdots\\f_n(x)\end{pmatrix}$$

такова, что для вектор-функции $f(Ax)$ существует интегральное преобразование Фурье [18]. Матричным преобразованием Фурье на действительной оси назовём выражение

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(A\xi)d\xi. \tag{1}$$

Теорема 1. *Справедлива формула обращения*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} F(\lambda)d\lambda. \tag{2}$$

Доказательство. Из формулы (1) и формулы обращения для классического преобразования Фурье, имеем

$$f(Ax) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda)d\lambda$$

Воспользуемся определением 1: найдем в левой и правой частях последней формулы вектор-функцию переменного $A^{-1}x$. Учитывая, что $f(x) = f(A(A^{-1}x))$ получим формулу обращения

$$f(x) = f(A(A^{-1}x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} F(\lambda)d\lambda.$$

Замечание. Справедлива формула для изображения Фурье с матричным ядром

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda\xi} A^{-1} f(\xi)d\xi. \tag{3}$$

Доказательство. Формулу (3) достаточно установить для функции скалярного аргумента $\varphi(x)$. Тогда получим равенство

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\varphi(A\xi)\,d\xi = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} P^{-1}\varphi(\lambda_j\xi)\,E_jPd\xi,$$

где E_j- квадратная матрица у которой все элементы равны нулю кроме $e_{jj} = 1$. В j-ом слагаемом выполним замену переменного $\lambda_j\xi = \xi_j$, тогда получим

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi_j\lambda_j^{-1}} P^{-1}\varphi(\xi_j)\,E_jP\lambda_j^{-1}d\xi_j.$$

Обозначим переменную интегрирования одной и той же буквой ξ получим

$$\Phi(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda\xi\lambda_j^{-1}}P^{-1}\varphi\left(\xi\right)E_jP\lambda_j^{-1}d\xi.$$

На основании определения скалярной функции матричного аргумента имеем формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iA^{-1}\lambda\xi}A^{-1}\varphi(\xi)d\xi=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda\xi\lambda_j^{-1}}P^{-1}E_jPP^{-1}E_jP\lambda_j^{-1}\varphi\left(\xi\right)d\xi.$$

Учитывая, что $PP^{-1}=E, E_j\cdot E_j=E_j$ доказательство закончим.

2.2.2. Матричные интегральные преобразования фурье на составной действительной оси

Моделирование взаимосвязанных волновых процессов требует развития спектральной теории Штурма-Лиувилля [12]. Рассмотрим матричнозначную задачу Штурма Лиувилля на составной оси $I_1=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$$\begin{array}{l}A_1^2\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}=\lambda^2\varphi_1\left(x,\lambda\right),x\in(-\infty,0);\\ A_2^2\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}=\lambda^2\varphi_2\left(x,\lambda\right),x\in(0,\infty)\end{array}\tag{4}$$

с внутреним граничным условием в точке $x=0$

$$\varphi_1=\varphi_2,\alpha_1\partial_x\varphi_1=\alpha_2\partial_x\varphi_2,x=0\tag{5}$$

с краевым условием на бесконечности

$$\|\varphi_i(x,\lambda)\|<\infty,\tag{6}$$

здесь $A_1,A_2,\alpha_2\alpha_2$- квадратные матрицы размера $n\times n$ все собственные значения которых положительны. Для конструкции матричных интегральных преобразований Фурье на составной действительной оси будем использовать следующую нормировку

$$\begin{array}{l}\varphi_1(0,\lambda)=2(E+\chi)^{-1},\varphi_2(0,\lambda)=2(E+\chi)^{-1},\\ \partial_x\varphi_1(0,\lambda)=2iA_1^{-1}\lambda(E+\chi)^{-1},\partial_x\varphi_2(0,\lambda)=2iA_2^{-1}\lambda\chi(E+\chi)^{-1},\end{array}$$

где E единичная матрица, $\chi=A_2\lambda_2^{-1}\lambda_1A_1^{-1}$. Мы установим ниже, что матричнозначная функция

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)H(-x)+\varphi_2(x,\lambda)H(x)$$

будет ядром обратного матричного интегрального преобразования Фурье, $H(x)-$ функция Хевисайда [17].

Пусть для вектор-функции $f(x)=f_1(x)H(-x)+f_2(x)H(x)$ существует скалярное преобразование Фурье [19].

Definition 2. *Матричным интегральным преобразованием Фупье на составной действительной оси* $(-\infty,0)\bigcup(0,\infty)$ *вектор-функции* $f(x)$ *назовем*

$$\begin{array}{l}F(\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left((E+\chi)e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}-(E-\chi)e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}\right)A_1^{-1}f_1(\xi)d\xi+\\ +\int_0^{\infty}e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2\left(\xi\right)d\xi.\end{array}\tag{7}$$

Справедливы формулы обращения

Теорема 2. *Если $F(\lambda)$ образ матричного интегрального преобразования Фурье, то оригинал вычисляется по формулам*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)d\lambda.$$

В развернутом виде формулы обращения записываются для каждого из промежутков $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ отдельно:

$$\begin{array}{l}f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}F(\lambda)\,d\lambda, x\in(-\infty,0),\\ f_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iA_2^{-1}\lambda x}+e^{-iA_2^{-1}\lambda x}(E-\chi)(E+\chi)^{-1}\right)F(\lambda)\,d\lambda, x\in(0,\infty).\end{array}$$

Доказательство. В основе лежит формула для матричной экспоненты для случая в котором все собственные значения матриц A_k положительны и среди них нет кратных:

$$e^{iA_k^{-1}\lambda x}=\sum_{j=1}^{n}P_k^{-1}E_jP_ke^{i\lambda_{kj}^{-1}\lambda x}.$$

Кроме того доказательство опирается на формулу обращения (2) матричного интегрального преобразования на действительной оси:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA^{-1}\lambda x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda A^{-1}\xi}A^{-1}f(\xi)d\xi d\lambda$$

Покажем справедливость формулы вычисления оригинала для промежутка $(-\infty,0)$. Имеем,

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}F(\lambda)\,d\lambda=\\ =\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(E+\chi)e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)\,d\xi d\lambda\\ -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(E-\chi)e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)\,d\xi d\lambda\\ +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iA_2^{-1}\lambda\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda.\end{array}\qquad(8)$$

Первое слагаемое в формуле (8) по теореме разложения равно $f_1(x)H(-x)$. Докажем, что остальные слагаемые равны нулю. Для второго слагаемого в формуле (8)получим

$$\begin{array}{l}-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}T^{-1}E_jT2(E+\chi)^{-1}(E-\chi)\cdot\\ \cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_1^{-1}A_1x}e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda=\\ =\sum_{j=1}^{n}T^{-1}E_jT2(E+\chi)^{-1}f_1(-\lambda_{1j}^{-1}A_1x)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_1x\right)=0.\end{array}$$

Аналогично для третьего слагаемого в формуле (8) получим

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}T^{-1}E_jT2(E+\chi)^{-1}\cdot\\ \cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_2^{-1}A_2x}e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi=\\ =\sum_{j=1}^{n}T^{-1}E_jT2(E+\chi)^{-1}f_2(\lambda_{1j}^{-1}A_2x)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_2x\right)=0.\end{array}$$

Справедливость теоремы разложения для второго промежутка $(0,\infty)$ доказывается без привлечения новых идей.

3. Векторная формула Даламбера для векторного уравнения колебаний на неограниченной оси

3.1. Неограниченная однородная среда

Рассмотрим сепаратную систему уравнений, описывающую n компонентную модель взаимосвязанного волнового процесса в неограниченной среде

$$u_{tt} = A^2 u_{xx}, t > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = f(x), u'_t(0,x) = g(x).$$

Векторный аналог формулы Даламбера имеет вид

$$u(t,x) = \frac{f(Ex+At) + f(Ex-At)}{2} + \int_0^t \frac{g(Ex+A\tau) + g(Ex-A\tau)}{2} d\tau. \tag{9}$$

Доказательство. В образах Фурье получим задачу Коши для системы обыкновенных несвязанных дифференциальных уравнений

$$U_{tt} = -\lambda^2 U, t > 0$$

с начальными условиями

$$U(0,\lambda) = F(\lambda), U'_t(0,\lambda) = G(\lambda).$$

В изображениях Фурье решение имеет вид

$$U(t,\lambda) = cos\lambda t\ F(\lambda) + \int_0^t cos\lambda\tau d\tau G(\lambda).$$

Формула обращения (2) приводит к векторному обобщению формулы Даламбера

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iA^{-1}\lambda At} + e^{-iA^{-1}\lambda At}}{2} e^{iA^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda\xi} A^{-1} f(\xi) d\xi d\lambda =$$

$$= \frac{f(Ex+At) + f(Ex-At)}{2} + \int_0^t \frac{g(Ex+A\tau) + g(Ex-A\tau)}{2} d\tau.$$

Замечание. В скалярном случае выполняется равенство

$$\int_0^t \frac{g(Ex+A\tau) + g(Ex-A\tau)}{2} d\tau = \frac{1}{2A} \int_{x-At}^{x+At} g(\xi) d\xi.$$

Таким образом, при $n = 1$ из (9) получаем формулу Даламбера [13].

3.2. Неограниченная двухслойная среда

Рассмотрим сепаратную систему уравнений гиперболического типа, описывающую N компонентную модель волнового процесса в двухслойной среде [8]

$$u_{itt} = A_i^2 u_{ixx}, t > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x) = f_i(x), u'_{it}(0,x) = 0, \tag{11}$$

с внутренними граничными условиями

$$u_1 = u_2, \lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \partial_x u_2, x = 0. \tag{12}$$

Пусть $F(\lambda)-$ изображение Фурье начального условия (6), т.е.

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left((E+\chi)e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} - (E-\chi)e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}\right)A_1^{-1}f_1(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)\,d\xi.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение векторной смешанной краевой задачи (5)-(7) имеет вид

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} cos\lambda t e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}F(\lambda)d\lambda,$$
$$u_2(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} cos\lambda t\left(e^{iA_2^{-1}\lambda x}(E+\chi) + e^{-iA_2^{-1}\lambda x}(E-\chi)\right)(E+\chi)^{-1}F(\lambda)d\lambda.$$

Преобразуем приведенные выражения. Воспользуемся формулой Эйлера для косинуса $cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ и выражением для изображения Фурье $F(\lambda)$. В итоге получим:

$$\begin{array}{l} u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda\ x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)d\xi d\lambda + \\ +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)d\xi d\lambda + \\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(E-\chi)\,e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)\,H(-\xi)\,d\xi d\lambda + \\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(E-\chi)\,e^{iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)\,H(-\xi)\,d\xi d\lambda + \\ +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda + \\ +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda \end{array}.$$

Изучим слагаемые в формуле для $u_1(t,x)$. Первое слагаемое вычисляется на основе формулы обращения (2) матричного интегрального преобразования Фурье на действительной оси

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)d\xi d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda(Ex+A_1t)x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)d\xi d\lambda = \ l \\ = f_1(Ex+A_1t)\,H(-(Ex+A_1t)). \end{array}$$

Аналогично вычисляется второе слагаемое

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}e^{iA_1^{-1}\lambda x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)d\xi d\lambda = \\ = f_1(Ex-A_1t)\,H(-(Ex-A_1t)). \end{array}$$

По той же схеме для третьего слагаемого получим выражение

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} P_1^{-1}E_jP_1 2(E+\chi)^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(E-\chi)\cdot \\ \cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda A_1^{-1}A_1t}e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_1^{-1}A_1x}e^{-i\lambda A_1^{-1}\xi}A_1^{-1}f_1(\xi)H(-\xi)\,d\xi d\lambda = \\ = \sum_{j=1}^{n} P_1^{-1}E_jP_1 2(E+\chi)^{-1}(E-\chi)\,f_1(\lambda_{1j}^{-1}A_1x + A_1t)H\left(-\lambda_{1j}^{-1}A_1x - A_1t\right). \end{array}$$

Четвертое слагаемое можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{n} P_1^{-1}E_jP_1 2(E+\chi)^{-1}(E-\chi)\,f_1(\lambda_{1j}^{-1}A_1x - A_1t)H\left(-\lambda_{1j}^{-1}A_1x + A_1t\right).$$

Похожим образом, для пятого слагаемого получим представление

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}\cdot\\ \cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda A_2^{-1}A_2t}e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_2^{-1}A_2x}e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda=\\ =\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}f_2(\lambda_{1j}^{-1}A_2x+A_2t)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_2x+A_2t\right).\end{array}$$

Наконец, для шестого слагаемого имеем выражение

$$\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda A_2^{-1}A_2t}e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_2^{-1}A_2x}2(E+\chi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi}A_2^{-1}f_2(\xi)H(\xi)\,d\xi d\lambda=\\ =\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}f_2(\lambda_{1j}^{-1}A_2x-A_2t)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_2x-A_2t\right).\end{array}$$

Суммируя, получаем итоговую формулу для решения задачи (5)-(7)

$$\begin{array}{l}u_1(t,x)=\frac{f_1(Ex+A_1t)H(-(Ex+A_1t))+f_1(Ex-A_1t)H(-(Ex-A_1t))}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}f_2(\lambda_{1j}^{-1}A_2x+A_2t)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_2x+A_2t\right)}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}f_2(\lambda_{1j}^{-1}A_2x-A_2t)H\left(\lambda_{1j}^{-1}A_2x-A_2t\right)}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}(E-\chi)f_1(\lambda_{1j}^{-1}A_1x+A_1t)H\left(-\lambda_{1j}^{-1}A_1x-A_1t\right)}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_1^{-1}E_jP_12(E+\chi)^{-1}(E-\chi)f_1(\lambda_{1j}^{-1}A_1x-A_1t)H\left(-\lambda_{1j}^{-1}A_1x+A_1t\right)}{2}.\end{array}\tag{13}$$

Аналогично получим формулу для второй компоненты решения смешанной краевой задачи Коши $u_2(t,x)$:

$$\begin{array}{l}u_2(t,x)=\frac{f_2(Ex+A_2t)H((Ex+A_2t))+f_2(Ex-A_2t)H((Ex-A_2t))}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_2^{-1}E_jP_22\chi(E+\chi)^{-1}f_1(-\lambda_{2j}^{-1}A_1x-A_1t)H\left(-\lambda_{2j}^{-1}A_1x-A_1t\right)}{2}+\\ +\frac{\sum_{j=1}^{n}P_2^{-1}E_jP_22\chi(E+\chi)^{-1}f_1(-\lambda_{2j}^{-1}A_1x+A_1t)H\left(-\lambda_{2j}^{-1}A_1x+A_1t\right)}{2}-\\ -\frac{\sum_{j=1}^{n}P_2^{-1}E_jP_22(E+\chi)^{-1}(E-\chi)f_2(\lambda_{2j}^{-1}A_2x+A_2t)H\left(-\lambda_{2j}^{-1}A_2x-A_2t\right)}{2}-\\ -\frac{\sum_{j=1}^{n}P_2^{-1}E_jP_22(E+\chi)^{-1}(E-\chi)f_2(\lambda_{2j}^{-1}A_2x-A_2t)H\left(-\lambda_{2j}^{-1}A_2x+A_2t\right)}{2}.\end{array}\tag{14}$$

Замечание 7. *Решение начально-краевых задач*

$$\begin{cases}v_{itt}-a_i^2v_{ixx}=0,0<t<T,x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),\\ v_i(0,x)=0,x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),i=1,2;\\ v'_i(0,x)=f_i(x),x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),i=1,2;\\ vu_1(t,0)=v_2(t,0),0<t<T,\\ \lambda_1v'_{1x}(t,0)=\lambda_2vu'_{2x}(t,0),0<t<T.\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{itt}-a_i^2u_{ixx}=0,0<t<T,x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),\\ u_i(0,x)=f_i(x),x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),i=1,2;\\ u'_i(0,x)=0,x\in(-\infty,\infty)\cup(0,\infty),i=1,2;\\ u_1(t,0)=u_2(t,0),0<t<T,\\ \lambda_1u'_{1x}(t,0)=\lambda_2u'_{2x}(t,0),0<t<T.\end{cases}$$

связаны формулами

$$v_i(t,x)=\int_0^t u_i(z,x)\,dz,i=1,2.$$

значит, принцип суперпозиции позволяет получить решение задачи Коши с начальными условиями общего вида.

Следствие 1. *Разобьём множество* $t > 0, -\infty < x < \infty$ *на непересекающиеся части*

$$D_1 = \{t > 0, x < 0, x - a_1 t < 0, x + a_1 t < 0\ \},$$
$$D_2 = \{t > 0, x < 0, x - a_1 t < 0, x + a_1 t > 0\ \},$$
$$D_3 = \{t > 0, x > 0, x - a_2 t < 0, x + a_2 t > 0\ \},$$
$$D_4 = \{t > 0, x - a_2 t > 0\ , x + a_2 t > 0\ \}.$$

В скалярном случае $n = 1$ *формулы (13)-(14) можно записать в виде*

$$u_1(t,x) = \tfrac{f_1(x+A_1t)+f_1(x-A_1t)}{2}, (t,x) \in D_1,$$
$$u_1(t,x) = \tfrac{f_1(x-A_1t)}{2} + (1+\chi)^{-1} f_2(A_1^{-1}A_2x + A_2t) -$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+\chi)^{-1}(1-\chi) f_1(-x - A_1t), (t,x) \in D_2,$$
$$u_2(t,x) = \tfrac{f_2(x-A_2t)}{2} + \chi(1+\chi)^{-1} f_2(A_2^{-1}A_1x + A_1t) +$$
$$+\tfrac{1}{2}(1+\chi)^{-1}(1-\chi) f_1(-x - A_2t), (t,x) \in D_3,$$
$$u_2(t,x) = \tfrac{f_2(x+A_2t)+f_2(x-A_2t)}{2}, (t,x) \in D_4.$$

Полученные формулы совпадают с установленными ранее методом бегущей волны формулами В.А. Ильина из [4, 5].

4. Обсуждение

Представленные в работе матричные интегральные преобразования Фурье с кусочно тригонометрическим ядром в работах [1, 15, 19] были распространены на случай неограниченных и полуограниченных сред с двумя и более участками однородности, однако полученные в них решения формулировались в терминах прямого и обратного преобразований Фурье. Следовательно, в статье была решена актуальная проблема поиска матричных аналогов формулы Даламбера. Эти интегральные преобразования можно применять не только для моделирования волновых взаимосвязанных процессов. Метод будет успешен при моделировании явлений взаимосвязанного тепломассопереноса в многослойных средах [8, 11]. Получающие при применении метода результаты представляют обобщение известных для скалярного случая [7, 9, 10]. Среди возможных приложений метода матричных интегральных преобразований отметим задачи моделирования стационарных кусочно-однородных физических полей [7]. Заметим, что матричное интегральное преобразование действует действует по пространственной переменной, поэтому метод интегральных преобразований применим к гиперболическим, параболическим и эллиптическим системам уравнений в частных производных моделирующим процессы в неограниченных двухслойных средах. Для примера рассмотрим систему уравнений параболического типа, описывающую n компонентную модель взаимосвязанного процесса тепломассопереноса в двухслойной среде

$$u_{it} = A_i^2 u_{ixx}, t > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (\infty) \tag{15}$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x) = f_i(x), \tag{16}$$

с внутренними граничными условиями

$$u_1 = u_2, \lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \partial_x u_2, x = 0. \tag{17}$$

Применим матричное интегральное преобразование Фурье (2). В образах Фурье получим задачу Коши для системы обыкновенных несвязанных дифференциальных уравнений

$$U_t = -\lambda^2 U, t > 0$$

с начальными условиями

$$U(0,\lambda) = F(\lambda).$$

В изображениях Фурье решение имеет вид

$$U(t,\lambda) = e^{\lambda^2 t}\ F(\lambda).$$

Возвращаясь к оригиналам, с помощью техники развитой выше, получим решение задачи (15)-(17)

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \left(e^{-\frac{(A_1^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(A_1^{-1}x + E\xi)^2}{4t}} (E-\chi)(E+\chi)^{-1} \right) f_1(A_1\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(A_1^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} 2(E+\chi)^{-1} f_2(A_2\xi)d\xi, x < 0;$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(A_2^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} 2\chi(E+\chi)^{-1} f_1(A_1\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(A_2^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} + e^{-\frac{(A_2^{-1}x + E\xi)^2}{4t}} (E-\chi)(E+\chi)^{-1} \right) f_2(A_2\xi)d\xi, x > 0.$$

Авторы предполагают продолжить распространение метода матричных интегральных преобразований и метода матричных операторов преобразования на случай более сложных краевых задач, например, для кусочно-однородных неограниченных,полуограниченных и ограниченных сред с числом слоев более двух.

5. Заключение

В работе разработан метод матричных интегральных преобразований Фурье с кусочно тригонометрическим матричным ядром. Получен векторный аналог Формулы Даламбера для решения задачи Коши для взаимосвязанной системы уравнения волнового типа с кусочно-постоянными коэффициентами. Таким образом, были распространены результаты В.А. Ильина [4, 5]. Дано определение вектор-функции матричного аргумента, которое оказалось инструментом анализа взаимосвязанных математических моделей. На его основе создан появилась возможность аналитического описания взаимосвязанных математических моделей таких как n компонентная модель взаимосвязанного процесса тепломассопереноса в двухслойной среде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин И.И., Яремко О.Э. Операторный метод в теории интегральных преобразований для кусочно–однородных сред. Докл. РАН.–2001.– Т.379, № 3.–с.295–298.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Физматлит, 2010 г. 560 С.

3. Ефимова И. Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям, Дифференц. уравнения, 1972, Т. 8, №5.- с. 817–822.

4. Ильин В. А. Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности. Докл. РАН, 2009, Т.427, №5.- с. 609–611.

5. Ильин В. А. Формула типа Даламбера для продельных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости", Докл. РАН, Т.427, №4.- с. 466–468.

6. Карташов Э. М. Аналитические подходы к исследованиям нестационарной теплопроводности для частично ограниченных областей. ТВТ, 2020. Т.58, №3.- с. 402–411.

7. Коляно Ю. М., Процюк Б. В., Драпкин Б. А., Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела. Дифференц. уравнения, 1992,Т.28, №3.- с. 524–527.

8. Лексина, С. В. Начальные задачи для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун–та. Сер. Физ.–мат. науки. –2009. – Т.1,№ 18. –с.280–282.

9. Ленюк М. П. Интегральное преобразование Фурье на кусочно-однородной полупрямой. Изв. вузов. Матем., 1989, 5, с.14–18.

10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва. Высшая школа, 1967. - 599 с.

11. Лыков А.В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. – 472 с.

12. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. – 1977.–331 с.

13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учебное пособие.. — 6-е изд., испр. и доп.. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.

14. Уфлянд Я. С. Точное решение задачи нестационарной конвективной диффузии в цилиндре. ЖТФ, 1987, Т.57, №2.- с. 398–400.

15. Яремко О. Э. Матричные интегральные преобразования Фурье для задач с n точками деления и операторы преобразования. Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 417, № 3. – с. 323–325.

16. Griffiths G.; Schiesser W.E. Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations. Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple. Academic Press.2010, P.461.

17. Legua, M.P., Morales, I., Sánchez Ruiz, L.M. The Heaviside Step Function and MATLAB. Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008. vol 5072. Springer.

18. Polyanin A. D., Manzhirov, A. V. Handbook of Integral Equations, Boca Raton. 1998. CRC Press.

19. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, pp.447-466, 2020.

REFERENCES

1. I. I. Bavrin, O. E. Yaremko, Transformation Operators and Boundary Value Problems, Differ. Uravn., 40:8 (2004), 1085–1095.

2. Gantmakher F. R. Theory of matrices. New York: Chelsea Pub. Co. 1959.

3. I. T. Efimova, “A certain class of singular problems that can be solved by means of special integral transformations with respect to cylindrical functions”, Differ. Uravn., 8:5 (1972), 817–822.

4. V. A. I’lin, d’Alembert-type formula for transverse oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities, Dokl. Math., 80:1 (2009), 624–626.

5. V. A. I'lin, A d'Alembert-type formula for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities and elasticities, Dokl. Math., 80:1 (2009), 613–615.

6. E. M. Kartashov, Analytical approaches to the analysis of unsteady heat conduction for partially bounded regions, TVT, 58:3 (2020), 402–411.

7. Yu. M. Kolyano, B. V. Protsyuk, B. A. Drapkin, "The Green function for spatial stationary problems of heat conduction of a multilayer body", Differ. Uravn., 28:3 (1992), 524–527.

8. S. V. Leksina. Initial Value Problems for System of Wave Equations, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 1(18) (2009), 280–282.

9. M. P. Lenyuk. An integral Fourier transform on a piecewise-inhomogeneous half-line. Soviet Math. (Iz. VUZ), 33:5, 1989, 19–24 pp.

10. A.V, Lykov. Teoriia teploprovodnosti [Theory of heat conduction]."Moscow, Vysshaia shkola publ. (1967).

11. Lykov A.V. Teoriya sushki [Drying theory], Moscow: Energy, 1968, 472 p. (In Russ.)

12. Marchenko, V.A. Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Naukova Dumka, Kiev English Trans Birkhauser, Basel. 1977.

13. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. Equations of Mathematical Physics.Dover Publications. 2011. P.800.

14. Ya. S. Uflyand, Correct solution of the nonstationary convective diffusion-problems in cylinders Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, 57:2 (1987), 398–400 pp.

15. Yaremko, O.E. Matrix integral Fourier transforms for problems with discontinuous coefficients and transformation operators. Dokl. Math. 76, 876–878 (2007).

16. Griffiths G.; Schiesser W.E. Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations. Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple. Academic Press.2010, P.461.

17. Legua, M.P., Morales, I., Sánchez Ruiz, L.M. The Heaviside Step Function and MATLAB. Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008. vol 5072. Springer.

18. Polyanin A. D., Manzhirov, A. V. Handbook of Integral Equations, Boca Raton. 1998. CRC Press.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, P.447-466, 2020.

Получено: 06.07.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.512 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-252-263

О некоторых арифметических применениях к теории симметрических групп

У. М. Пачев, Р. А. Дохов, А. Х. Кодзоков, М. С. Нирова

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик); Северо-Кавказский центр математических исследований (г. Ставрополь).
e-mail: urusbi@rambler.ru

Дохов Резуан Ауесович — кандидат физико-математических наук, Северо-Кавказский центр математических исследований (г. Ставрополь).
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Кодзоков Азамат Хасанович — Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).
e-mail: Kodzoko@mail.ru

Нирова Марина Сефовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).
e-mail: nirova_m@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена некоторым арифметическим применениям к теории симметрических групп. С помощью свойств сравнений и классов вычетов из теории чисел установлено существование в симметрической группе S_n степени n циклических, абелевых и неабелевых подгрупп соответственно порядков k, $\varphi(k)$ и $k\varphi(k)$, где $k \leq n$, φ – функция Эйлера, т.е. получены представления групп $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ и их произведения через подстановки степени k. При этом изоморфные вложения этих групп строятся, следуя доказательству теоремы Кэли, но наряду с этим используется понятие линейного перестановочного двучлена $\overline{a}x + \overline{b}$ кольца вычетов $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, где НОД $(a, k) = 1$.

Кроме того, результат, относящийся к изоморфному вложению группы $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ в группу S_k распространяется на знакопеременную группу A_k при нечётных k.

Во второй части работы рассматриваются некоторые применения теории простых чисел к циклическим подгруппам симметрической группы S_n. В частности, применяя формулу суммирования Эйлера-Маклорена и оценки для k-го простого числа, получена нижняя оценка для максимального числа простых делителей порядков циклических подгрупп в симметрической группе S_n.

Ключевые слова: симметрическая группа, порядок подгруппы, сравнение по модулю, функция Эйлера, знак подстановки, квадратичные вычеты, перестановочный многочлен, простой делитель порядка циклической подгруппы.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
У. М. Пачев, Р. А. Дохов, А. Х. Кодзоков, М. С. Нирова. О некоторых арифметических применениях к теории симметрических групп // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 252–263.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.512 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-252-263

On Some arithmetic applications to the theory of symmetric groups

U. M. Pachev, R. A. Dokhov, A. Kh. Kodzokov, M. S. Nirova

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Berbekov Kabardino–Balkarian State University (Nalchik); North–Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Rezuan Auesovich Dokhov — candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, North–Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Azamat Khasanovich Kodzokov — Berbekov Kabardino–Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: Kodzoko@mail.ru

Marina Sefovna Nirova — candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, Berbekov Kabardino–Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: nirova_m@mail.ru

Abstract

The work is devoted to some arithmetic applications to the theory of symmetric groups. Using the properties of congruences and classes of residues from number theory, the existence in the symmetric group S_n of degree n of cyclic, Abelian and non-Abelian subgroups respectively, of orders is establisned k, $\varphi(k)$, and $k\varphi(k)$, where $k \leq n$, φ – Euler function, those representations jf grups $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ and theorem product in the form of degree substitutions k. In this case isomorphic embeddings of these groups are constructed following the proof of Cayley's theorem, but along with this, a linear binomial is used $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ residue class rings, where $\gcd(a, k) = 1$.

In addition, the result concerning the isomorphic embedding of a group $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ in to a group $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ in to a group S_k extends to an alternating group A_k for odd k.

The second part of the work examines some applications of prime number theory to cyclic subgroups of the symmetric group S_n. In particular, applying the Euler-Maclaurin summation formula and bounds for the k in prime, a lower bound for maximum number of prime divisors of cyclic orders in the summetric group S_n.

Keywords: symmetric group, subgroup order, modulo congruence, Euler function, substitution sign, quadratic residnes, permutation polynomial, prime divisor of cyclic subgroup order.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

U. M. Pachev, R. A. Dokhov, A. Kh. Kodzokov, M. S. Nirova, 2023, "On Some arithmetic applications to the theory of symmetric groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 252–263.

1. Введение

Хорошо известны применения теоретико-групповых методов в теории чисел (см. [1]). В свою очередь и теория чисел, также имеет полезные применения к группам подстановок. Одним из первых применений теоретико-числовых результатов к теории симметрических групп является постулат Бертрана [2] о простых числах (между натуральными числами n и $2n$ при $n > 1$ содержится хотя бы одно простое число), из которого следует, что симметрическая группа S_n не имеет подгрупп, индекс i которых удовлетворяет неравенствам $2 < i < n$ при $n > 4$. Постулат Бертрана был доказан Чебышевым в 1852 г.

Дальнейшие применения теории чисел к вопросу нахождения максимального порядка подстановки заданной степени даны Э. Ландау [3], доказавшему асимптотику

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n},$$

где $g(n)$ — максимальный порядок элемента симметрической группы S_n. Спустя 36 лет С. Шах [4] уточнил асимптотику Ландау, представив оценку сверху для $\left|\log G(n) - \sqrt{n \log n}\right|$ (в дальнейших публикациях функцию Ландау $g(n)$ стали обозначать $G(n)$).

Продолжая эти исследования по оценке функции Ландау $G(n)$ Дж. Массиас [5], получил явную верхнюю границу для $G(n)$ и определил значение n, при котором $\log G(n) - \sqrt{n \log n}$ достигает своего максимума. М. Салаи [6] несколько усилил результат С. Шаха, а также дал оценку максимального порядка элемента симметрической полугруппы с единицей.

Дальнейшие проведённые исследования связаны со свойствами функции $G(n)$.
Так Дж. Николя [7] установлено одно свойство делимости $G(n)$ на простые числа. Сравнивая $G(n)$ с n, М. Натансон [8] доказал, что $G(n)$ растёт быстрее, чем любая степень числа n с ограниченным показателем. Особенно интересный результат получен Дж. Николя [7], согласно которому существуют длинные цепочки последовательных целых чисел, для которых $G(n)$ является стационарной.

Все результаты исследований, приведённых до 1987 г. относительно функции $G(n)$ описаны В. Миллер [9] с полным обзором используемых методов.

С несколько другой точки зрения проводились также исследования по арифметическим применениям к теории симметрических групп У. М. Пачевым и В. Н. Шокуевым [10], основанные на свойствах сравнений и классов вычетов по модулю и арифметических функций.

В последнее время проводилось также исследование и по применениям теоретико-числовых функций к вопросу о максимальном значении числа простых делителей порядков циклических подгрупп симметрической группы S_n (см. предварительное сообщение [11]).

2. О подгруппах симметрических групп, получаемых с помощью классов вычетов по данному модулю

В этой части рассматривается один арифметический способ построения подгрупп в симметрической группе S_m степени m, основанный на свойствах сравнений или классов вычетов по заданному модулю (см. [10]). Однако, изложение результатов в указанной работе далеко не полно и обычно не содержит доказательств (или они лишь намечены). В связи с этим, даём более совершенное изложение, делая его более разработанным в деталях.

Наше изложение основано на следующем свойстве полных систем вычетов по модулю m.

Лемма 1. *Если $(a, m) = 1$ и x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то $ax + b$, где b – целое число, тоже пробегает полную систему вычетов по модулю m.*

Доказательство даётся в [12].

Иногда при обсуждении арифметических и алгебраических проблем бывает удобнее работать с кольцом классов вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ по модулю m. В виду этого, лемму 1 можно переформулировать в следующем виде.

Лемма 2. *Если* $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, *т.е.* $(a, m) = 1$, *то* $\left\{\overline{a}\,\overline{x} + \overline{b} \mid \overline{x} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 1 и определений классов вычетов вместе с операциями над ними.

Поставим теперь во взаимно однозначное соответствие каждому линейному двучлену $\overline{a}\,\overline{x} + \overline{b}$, где НОД$(a, m) = 1$ подстановку из симметрической группы S_m степени m по следующему правилу

$$\overline{a}\,\overline{x} + \overline{b} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{m} \\ \overline{a}\cdot\overline{1} + \overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{2} + \overline{b} & \cdots & \overline{a}\cdot\overline{m} + \overline{b} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ввиду леммы 2, нижняя строка в подстановке (1) представляет собой некоторую перестановку элементов верхней строки.

Соответствие вида (1) имеет место и в симметрической группе S_k ввиду её изоморфной вложенности в S_m, где $2 \le k \le m$, при этом используется кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Обозначим подстановку вида (1) через $\tau_{\overline{a},\overline{b}}(m)$, т.е.

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(m) = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{m} \\ \overline{a}\cdot\overline{1} + \overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{2} + \overline{b} & \cdots & \overline{a}\cdot\overline{m} + \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также подстановки вида

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{k} \\ \overline{a}\cdot\overline{1} + \overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{2} + \overline{b} & \cdots & \overline{a}\cdot\overline{k} + \overline{b} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $2 \le k \le m$; $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$, $\overline{b} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Обозначим множество всех подстановок вида (2) через $H_{k\varphi(k)}$, т. е.

$$H_{k\varphi(k)} = \left\{\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) \mid \overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*, \quad \overline{b} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right\},$$

где φ — функция Эйлера.

Теорема 1. *Множество подстановок* $H_{\varphi(k)} = \left\{\tau_{\overline{a},\overline{0}}(k) \mid \overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*\right\}$ *степени* $2 \le k \le m$ *образует абелеву подгруппу порядка* $\varphi(k)$ *группы* S_k, *изоморфную группе* $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$, *где* φ – *функция Эйлера.*

Доказательство. Покажем замкнутость $H_{\varphi(k)}$ относительно умножения подстановок. Пусть $\tau_{\overline{a},\overline{0}}(k),\ \tau_{\overline{c},\overline{0}}(k) \in H_{\varphi(k)}$, где $\overline{a},\ \overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$. Тогда

$$\tau_{\overline{a},\overline{0}}(k) \cdot \tau_{\overline{c},\overline{0}}(k) = \tau_{\overline{a}\,\overline{c},\overline{0}}(k) \in H_{\varphi(k)},$$

так как $\overline{a}, \overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$. Кроме того, $\tau^{-1}_{\overline{a},\overline{0}}(k) = \tau_{\overline{a}^{-1},\,\overline{0}}(k) \in H_{\varphi(k)}$.

Значит, $H_{\varphi(k)} < S_k$. Пользуясь теперь взаимно однозначным соответствием $\tau_{\overline{a},\,\overline{0}}(k) \leftrightarrow \overline{a}$, получаем, что $H_{\varphi(k)} \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$. Из этого изоморфизма следует, что $H_{\varphi(k)}$ — абелева подгруппа в S_k, так как $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ — абелева группа, и значит,

$$\left|H_{\varphi(k)}\right| = |(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*| = \varphi(k), \quad \text{ч.т.д.}$$

□

Теорема 2. *Множество подстановок вида* $H_k = \left\{\tau_{\overline{1},\,\overline{b}}(k) | \overline{b} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right\}$ *образует циклическую подгруппу в группе* S_k*, изоморфную аддитивной группе классов вычетов* $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае теоремы 1, но учитывая при этом следующее соответствие $\tau_{\overline{1},\,\overline{b}}(k) \leftrightarrow \overline{b} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Результат теоремы 1 можно перенести на соответствующие абелевы подгруппы знакопеременной группы A_k нечётной степени k. Для этого рассмотрим нужное нам обобщение одной леммы Золотарёва [14] о знаке подстановки из симметрической группы S_p, где p — простое число. Сформулируем её в наших обозначениях.

Лемма 3 (Золотарёв).

Знак подстановки $\tau_{\overline{a},\,\overline{0}}(p)$, где $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$, p — нечётное простое число, равен символу Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$, т.е. $\operatorname{sgn}\tau_{\overline{a},\,\overline{0}}(p) = \left(\frac{a}{p}\right)$.

Обобщение леммы Золотарёва даём в следующем виде.

Лемма 4.

Если k — нечётное число и число a взаимно просто с k, то знак подстановки $\tau_{\overline{a},\,\overline{0}}(k) \in S_k$ при $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ определяется соотношением $\operatorname{sgn}\tau_{\overline{a},\,\overline{0}}(k) = \left(\frac{a}{k}\right)$, где $\left(\frac{a}{k}\right)$ — символ Якоби.

Доказательство представлено в [15] в виде решения ряда взаимосвязанных задач, снабжённых указаниями.

Нам понадобится ещё один результат о квадратичных вычетах.

Лемма 5.

Число квадратичных вычетов в приведённой системе по нечётному модулю n равно $\frac{\varphi(n)}{2^{\upsilon(n)}}$, где φ — функция Эйлера, $\upsilon(n)$ — число простых делителей числа n.

Доказательство. (См. [16]). □

Теорема 3. *Множество подстановок* $H_{k\varphi(k)}$ *образует неабелеву подгруппу порядка* $k\varphi(k)$ *симметрической группы* S_m *при* $3 \le k \le m$*, где* φ *— функция Эйлера.*

Доказательство. Проверяем замкнутость множества $H_{k\varphi(k)}$ относительно операции умножения подстановок.

Имеем

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) \cdot \tau_{\overline{c},\overline{d}}(k) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{k} \\ \overline{a}\cdot\overline{1}+\overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{2}+\overline{b} & \cdots & \overline{a}\cdot\overline{k}+\overline{b} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a}\cdot\overline{1}+\overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{2}+\overline{b} & \cdots & \overline{a}\cdot\overline{k}+\overline{b} \\ \overline{c}\left(\overline{a}\cdot\overline{1}+\overline{b}\right)+\overline{d} & \overline{c}\left(\overline{a}\cdot\overline{2}+\overline{b}\right)+\overline{d} & \cdots & \overline{c}\left(\overline{a}\cdot\overline{k}+\overline{b}\right)+\overline{d} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{k} \\ \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{1}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d} & \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{2}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d} & \cdots & \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{k}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d} \end{pmatrix} =$$

$$\tau_{\overline{a}\cdot\overline{c},\;\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d}}(k), \tag{3}$$

где

$$\overline{a}\cdot\overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*, \quad \overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

Из (3) также следует, что

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) = \tau_{\overline{a},\overline{0}}(k) \cdot \tau_{\overline{1},\overline{b}}(k) \tag{4}$$

Следовательно,

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) \cdot \tau_{\overline{c},\overline{d}}(k) = \tau_{\overline{a}\cdot\overline{c},\;\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{d}}(k) \in H_{k\varphi(k)},$$

при этом $\overline{a}\,\overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$, $\overline{b}\,\overline{c}+\overline{d} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Значит, множество $H_{k\varphi(k)}$ замкнуто относительно операции умножения подстановок.

Покажем теперь существование обратного элемента в $H_{k\varphi(k)}$. Ясно, что $\tau_{\overline{1},\overline{0}}(k) = E$ есть единичная подстановка в симметрической группе S_k. Обозначая через $\tau_{\overline{x},\overline{y}}(k)$ подстановку, обратную к $\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k)$ (она существует во всей группе S_k), будем иметь

$$\tau_{\overline{a},\overline{b}}(k) \cdot \tau_{\overline{x},\overline{y}}(k) = \tau_{\overline{1},\overline{0}}(k).$$

Но тогда в силу соотношения (3) имеем

$$\tau_{\overline{a}\cdot\overline{x},\ \overline{b}\cdot\overline{x}+\overline{y}}(k) = \tau_{\overline{1},\overline{0}}(k).$$

Отсюда получаем $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$, откуда $\overline{x} = \overline{a}^{-1}$ и тогда $\overline{y} = -\overline{b}\overline{a}^{-1}$.

Значит,

$$\tau^{-1}_{\overline{a},\overline{b}}(k) = \tau_{\overline{a}^{-1},\ \overline{b}\overline{a}^{-1}}(k),$$

т.е. $\tau^{-1}_{\overline{a},\overline{b}}(k) \in H_{k\varphi(k)}$.

Следовательно, $H_{k\varphi(k)}$ подгруппа симметрической группы S_m ввиду изоморфной вложенности S_k в S_m при $2 \le k \le m$.

Наконец, докажем, что $\left|H_{k\varphi(k)}\right| = k\varphi(k)$.

Во-первых, ясно, что $H_{k\varphi(k)} = H_k \cdot H_{\varphi(k)} = H_{\varphi(k)} \cdot H_k$, но поэлементной перестановочности нет, и во-вторых, $H_k \cap H_{\varphi(k)} = E$, где E — единичная подстановка. Но тогда (см. [13]) имеем

$$\left|H_{k\varphi(k)}\right| = \frac{|H_k| \cdot \left|H_{\varphi(k)}\right|}{\left|H_k \cap H_{\varphi(k)}\right|} = |H_k| \cdot \left|H_{\varphi(k)}\right| = k\varphi(k), \quad \text{ч.т.д.}$$

Опираясь соответственно на абелевость и цикличность групп $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ и $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, получаем ещё следующий результат. □

Теорема 4. *В знакопеременной группе A_k нечётной степени k множество подстановок вида $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k)$, где $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$, образует абелеву подгруппу порядка $\frac{\varphi(k)}{2^{\upsilon(k)}}$, при этом $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$ — группа классов квадратичных вычетов по модулю k; φ — функция Эйлера, $\upsilon(k)$ — число простых делителей k.*

Доказательство. 1^0. Сначала покажем, что множество подстановок вида $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k)$, при $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$ есть подмножество знакопеременной группы A_k. Для удобства рассуждений обозначим множество таких подстановок через $H_k^{(2)}$. Тогда покажем, что $H_k^{(2)} \subset A_k$. Пусть $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k) \in H_k^{(2)}$. Тогда по лемме 4 имеем $\operatorname{sgn}\left(\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k)\right) = \left(\frac{a}{k}\right) = 1$ ввиду условия $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$. Из этого следует, что $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k) \in A_k$ и значит, $H_k^{(2)} \subset A_k$.

2^0. Теперь покажем, что множество $H_k^{(2)}$ образует абелеву подгруппу группы A_k. Пусть $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k),\ \tau_{\overline{c},\ \overline{0}}(k) \in H_k^{(2)}$, т.е. $\overline{a},\ \overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$. Тогда имеем $\tau_{\overline{a},\ \overline{0}}(k) \cdot\ \tau_{\overline{c},\ \overline{0}}(k) = \tau_{\overline{a}\cdot\overline{c},\ \overline{0}}(k) \in H_k^{(2)}$ ввиду того, что $\overline{a}\cdot\overline{c} \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*2}$. Учитывая, что рассматриваемые группы являются конечными, можно считать выполненной аксиома об обратном элементе в множестве $H_k^{(2)}$.

Значит, $H_k^{(2)}$ — подгруппа группы A_k, т.е. $H_k^{(2)} < A_k$. Учитывая ещё теорему 1, получаем, что $H_k^{(2)}$ является абелевой подгруппой группы A_k.

3^0. Наконец, в силу леммы 5 получаем, что

$$\left|H_k^{(2)}\right| = \frac{\varphi(k)}{2^{\upsilon(k)}}, \quad \text{ч.т.д.}$$

□

3. Соотношения, связанные с некоторыми циклическими подгруппами симметрической группы

Эта часть нашей работы имеет некоторое отношение к исследованиям относительно функции Ландау, описанным во введении (см. [3]–[9]).

Но в отличие от этих работ, связанных с вопросом о максимальном порядке элементов симметрической группы S_n, мы рассматриваем оценку снизу максимального числа простых делителей порядков циклических подгрупп в S_n. Следующий вспомогательный результат даёт формулу для наименьшего общего кратного первых m натуральных чисел.

Лемма 6.

$$\text{НОК}(1,2,\ldots,m)=\prod_{p\le m} p^{\left[\frac{\log m}{\log p}\right]},$$

где произведение берётся по всем простым числам, не превосходящим m, $[\,]$ — знак целой части действительного числа.

Доказательство. (См. [17]).

□

Теорема 5. *В симметрической группе S_n существует циклическая подгруппа $<\tau>$, порядок которой определяется формулой*

$$|<\tau>|=\prod_{p\le m} p^{\left[\frac{\log m}{\log p}\right]},$$

где $m=\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$, произведение берётся по всем простым числам, не превосходящим числа m.

Доказательство. Рассмотрим подстановку $\tau\in S_n$, представленную в виде произведения циклов

$$\tau=(a_1)\,(a_2a_3)\cdot\ldots\cdot(a_ma_{m+1}\cdot\ldots\cdot a_{2m-1}),$$

длины которых соответственно равны 1, 2, ..., m. Но, как известно, порядок подстановки, разложенной в циклы, равен наименьшему общему кратному длин циклов, т.е.

$$|<\tau>|=\text{НОК}(1,2,\ldots,m).$$

Но тогда в силу леммы 6, имеем

$$|<\tau>|=\prod_{p\le m} p^{\left[\frac{\log m}{\log p}\right]}.$$

Наконец, так как общее количество элементов в рассматриваемых циклах для подстановки τ не должно превосходить числа n, то

$$1+2+\ldots+m\le n,$$

откуда

$$m=\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right],\quad \text{ч.т.д.}$$

□

Результат теоремы 5 позволяет получить нижнюю оценку для максимального числа простых делителей порядков циклических подгрупп группы S_n.

Следствие 1. *Для максимального числа* $\max_{\tau\in S_n}\upsilon\left(|<\tau>|\right)$ *простых делителей порядков циклических подгрупп симметрической группы* S_n *справедливо неравенство*

$$\max_{\tau\in S_n}\upsilon\left(|<\tau>|\right)>0{,}84\frac{\sqrt{n}}{\log(8n+1)}\ .$$

Доказательство. В силу теоремы 5 имеем $\upsilon\left(|<\tau>|\right)=\pi(m)$, где $\pi(m)$ – функция распределения простых чисел, при этом $m=\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

Применяя теорему Чебышева (см. [18]), будем иметь

$$\pi(m)>\frac{\log 2}{2}\cdot\frac{m}{\log m}=\frac{\log 2}{2}\cdot\frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]}{\log\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]}>$$

$$>\frac{\log 2}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{8m+1}-3}{2}\right)/\log\left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)>$$

$$>\frac{\log 2}{4}\cdot\left(\sqrt{8m+1}-3\right)/\log\left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)>$$

$$>\frac{\log 2}{4}\cdot\frac{\sqrt{8n+1}-3}{\log\sqrt{8n+1}}=\frac{\log 2}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}\left(\sqrt{n+\frac{1}{8}}-\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}{\log(8n+1)}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\log 2\right)\cdot\frac{\sqrt{n}}{\log(8n+1)}>0{,}84\frac{\sqrt{n}}{\log(8n+1)},\quad \text{ч.т.д.}$$

□

Рассмотрим ещё вопрос об уточнении полученной оценки снизу максимального числа простых делителей порядков циклических подгрупп симметрической группы S_n. Но сначала приведём два вспомогательных факта.

Лемма 7.

Для любого натурального числа n справедливы неравенства

$$n\log n<p_n<n\left(\log n+[1+o(1)]\log\log n\right),$$

где p_n — есть n-ое простое число; $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $n\to\infty$.

Доказательство. (См. [19]). □

Лемма 8 (формула суммирования Эйлера—Маклорена).

Если $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и однократно непрерывно дифференцируема на (a,b) и $\psi(t)=t-[t]-\frac{1}{2}$, то

$$\sum_{a<n\le b}f(n)=\int_a^b f(t)\,dt-\psi(b)f(b)+$$

$$+\psi(a)f(a)+\int_a^b f'(t)\psi(t)\,dt.$$

Доказательство. |(См. [20]). □

Пусть теперь подстановка $\tau\in S_n$ представлена в виде произведения циклов, длины которых соответственно равны подряд идущим простым числам $p_1,p_2,\ldots,p_s$, при этом

$$p_1+p_2+\ldots+p_s\le n \tag{5}$$

и

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_s + p_{s+1} > n. \tag{6}$$

По свойству порядков циклов имеем

$$| < \tau > | = \text{НОК}\,(p_1, p_2, \ldots, p_s) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s, \tag{7}$$

и значит, количество простых делителей числа $| < \tau > |$ равно s, т. е.

$$\upsilon(< \tau >) = s, \tag{8}$$

где υ — функция числа простых делителей. Оценим теперь число s снизу в зависимости от n. В силу леммы 7 при $k > 2$ получаем

$$p_k < 2k \log k. \tag{9}$$

Тогда из (6) и (9) следует, что

$$n + 1 < p_1 + p_2 + \ldots + p_s + p_{s+1} < 2 \sum_{1 \le k \le s+1} k \log k. \tag{10}$$

Теперь оценим сверху сумму в правой части неравенства (10). Для этого воспользуемся леммой 8, в которой положим $f(k) = k \ln k$, $a = 1$, $b = s + 1$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le k \le s+1} k \log k &= \int_1^{s+1} t \log t \, dt - \psi(s+1) \cdot (s+1) \log(s+1) + \\
&+ \psi(1) \ln 1 + \int_1^{s+1} (t \ln t)' \psi(t) \, dt = \\
&= \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} \right) \Big|_1^{s+1} + \frac{1}{2}(s+1) \ln(s+1) + \\
&+ \int_1^{s+1} (\ln t + 1) \psi(t) \, dt = \frac{(s+1)^2 \ln(s+1)}{2} - \frac{(s+1)^2}{4} + \frac{1}{4} + \\
&+ \frac{1}{2}(s+1) \ln(s+1) + \int_1^{s+1} (\ln t + 1) \cdot \left(t - [t] - \frac{1}{2} \right) dt < \\
&< \frac{(s+1)^2 \ln(s+1)}{2} - \frac{(s+1)^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(s+1) \ln(s+1) + \\
&+ \int_1^{s+1} (\ln t + 1) \, dt - \frac{1}{2} \int_1^{s+1} (\ln t + 1) \, dt = \\
&= \frac{(s+1)^2 \ln(s+1)}{2} - \frac{(s+1)^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(s+1) \ln(s+1) + \frac{1}{2} \int_1^{s+1} (\ln t + 1) \, dt = \\
&= \frac{(s+1)^2 \ln(s+1)}{2} + (s+1) \ln(s+1) = \\
&= \{(s+1) \ln(s+1)\} \cdot \frac{s+3}{2} < \frac{(s+1)(s+3)}{2} \log(s+1) < \\
&< \frac{(s+1)^2}{2} \log(s+1) < \frac{(s+2)^2}{2} \log(s+1).
\end{aligned}$$

Итак

$$\sum_{1 \le k \le s+1} k \log k < \frac{(s+2)^2 \ln(s+1)}{2}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$(s+2)^2 \ln(s+1) > n,$$

откуда

$$s+2 > \sqrt{\frac{2n}{\ln(s+1)}}. \tag{12}$$

Но из неравенства (5) следует, что $s < n-1$, т. е. $s+1 < n$. В таком случае из (12) получаем

$$\upsilon\left(|<\tau>|\right) > \sqrt{\frac{2n}{\log n}} - 2,$$

откуда

$$\max_{\tau \in S_n} \upsilon\left(|<\tau>|\right) > \sqrt{\frac{2n}{\log n}} - 2.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Для максимального числа* $\max_{\tau \in S_n} \upsilon\left(|<\tau>|\right)$ *простых делителей порядков циклических подгрупп симметрической группы* S_n *справедливо неравенство*

$$\max_{\tau \in S_n} \upsilon\left(|<\tau>|\right) > \sqrt{\frac{2n}{\log n}} - 2,$$

где υ *— функция числа простых делителей.*

Замечание 1. *Теорема 6 представляет собой уточнение результата из [11].*

4. Заключение

Использованное нами соответствие (5) между линейным двучленами вида $\overline{a}\,\overline{x}+\overline{b}$ над кольцом классов вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и соответствующими подстановками из симметрической группы S_m имеет некоторое отношение к понятию перестановочного многочлена над конечным полем F_q, осуществляющего перестановку элементов конечного поля F_q (см. [21] том 2). Представляет интерес вопрос о том, какие ещё многочлены являются перестановочными для кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Условие перестановочности линейного двучлена конечного поля в неявной форме даётся и в [22]. Интересно также получить верхнюю оценку для максимального числа простых делителей циклических подгрупп в S_n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука. 1985. 504 с.

2. Bertran, Journ. de l'Ecole Polyt, (1845).

3. Landau E. Über die Maximalordnung der Permutation gegeben Grads // Archiv der Math. Und Phus., Ser. 3,5 (1903). S. 92–103.

4. Shah S. An Ineguality for the Arithmetical Function $g(x)$. I. Indian Math. Soc., 3 (1939), pp. 316–318.

5. Massian I. Majoration explite de l'ordre maximum d'un element du group symetrique, Ann, Fac. Shi. Toulouse Math. 5(6) (1984) no. 3–4 (1985), 269–281.

6. Szalay M. On the Maximal Order in S_n and S_n^*. Acta Arith. 37 (1980), pp. 321–331.

7. Nicolas I. L. Ordre maximal d'un element du group des permutations et highly composite numbers, Bull. Soc. Math. Franke, 97 (1969), pp. 129–191.

8. Nathanson M. B. On the Greatest Order of an Element of the Symmetric Group, this Monthly, 79 (1972), pp. 500–501.

9. Miller W. The Maximum Order of an Element of a Finite Symmetric Group. The American Mathematical Montly, vol. 94, №6, 1987, pp. 497–506.

10. Пачев У. М., Шокуев В. Н. О применении теории сравнений к изучению подгрупп в симметрических группах // Изв. КБНЦ РАН, 2001, №1(6). С. 68–69.

11. Дохов Р. А., Пачев У. М. О максимальном числе простых делителей порядков циклических подгрупп в симметрической группе // Материалы XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабная моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Тула 26–29 сентября 2023 г. С. 173–174.

12. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Изд. «Наука». 1981. 168 с.

13. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1982, 288 с.

14. Zolotareff G. Nouvelle demonstration de la loi de reciprocite de Legendre // Nouv. Ann. Math. (2), 1872. Vol. 11. P. 354–362.

15. Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М. Из-во МЦНМО, 2006, 328 с.

16. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М-Л. 1940, 260 с.

17. Трост Э. Простые числа. М.: ГИФМЛ. 1959, 136 с.

18. Бухштаб А. А. Теория чисел. М., 1966.

19. Rosser B. The n-th Prime is greater than $n \log n$. Proc. London. Math. Soc. 45 (1938), pp. 21–44.

20. Krätzel E. Zahlentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1981.

21. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том. 2. М.: «Мир». 1988, с. 438–820.

22. Пачев У. М. Избранные главы теории чисел. Нальчик. 2016, 186 с.

REFERENCES

1. Borevich Z. I., Zhafarevich I. R. 1985, "Number theory", *Nauka, Moscow*, 510 p. (Russia).

2. Bertrand. 1845, Journ. de l'Ecole Polyt.

3. Landau E. 1903, "On the maximum substitution order of a given degree"", *Archives of Mathematics and Physics*. Ser. 3,5. pp. 92–103.

4. Shah S. 1939, "An Inequality for the Arithmetical Function $g(x)$", *J. Indian Math. Soc.*, 3, pp. 316–318.

5. Massias I. 1984, (1985), "Majoration explete de l'ordre maximum d'un element du group symetrique", *Ann, Fac. Shi. Toulouse Math.*, 5(6), no. 3–4, pp. 269–281.

6. Szalay M. 1980, "On the Maximal Order in S_n and S_n^*", *Acta Arith.*, 37, pp. 321–331.

7. Nicolas I. L. 1969, "Ordre maximal d'un element du group des permutation et highly composite numbers", *Bull. Soc. Math. Franke*, 97, pp. 129–191.

8. Nathanson M. B. 1972, "On the Greatest Order of an Element of the Symmetric Group", *this Monthly*, 79, pp. 500–501.

9. Miller W. 1987, "The Maximum Order of *a* Finite Symmetric Group", *The American Mathematical Monthly*, vol. 94, № 6, pp. 497–506.

10. Pachev U. M., Shokuev V. N. 2001, "On thr application of the theory of congruence to the study of subgroups in symmetric groups", *Jzw. KBNTs RAS*, № 1 (6), pp. 68–69.

11. Dokhov R. A., Pachev U. M., 2023, "On the maximum number of primedivisors of orders of cyclic subgroups in *a* symmetris group", *Procceedings of the XXII International Conference "Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and prolems of history". Tula*, pp. 173–174.

12. Vinogradov I. M. 1981, "Fundavental of Number Theoury", *M.: Nauka*, 186 p.

13. Kargapolov M. I., Merzlyakov Yu. I. 1982, "Fundamentals of group theory", *M.: Nauka*. 288 p.

14. Zolotareff G. 1972, "Nouvelle de'monstration de la loi de reciprocite de Legendre", Nouv. Ann. Math. (2). Vol. 11, pp. 354–362.

15. Gashkov S. B. 2006, "Modern Elementary Algebra in Problems and Exercises", *M.: MCNMO*, 328 p.

16. Gecke E. 1940, "Lectures on the theory of algebraic numbers",*M.-L.* 260 p.

17. Trost E. 1959, "Prime numbers", *M.: GIFML*, 136 p.

18. Buhshtab A. A. 1966, "Number theory".

19. Rosser B. 1938, "The n-th Prime is greater than $n \log n$". Proc. London. Math. Soc. 45, pp. 21–44.

20. Krätzel E. 1981, "Zahlentheorie. VEB Dentscher Verlag der Wissenschaften". Berlin.

21. Lidl R., Niederreiter G. 1988, "Finite Fields", *M.: Mir*, vol. 2, pp. 437–820.

22. Pachev U. M. 2016, "Selected chapter of number theory", *Nalchik*, 186 p.

Получено: 21.08.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-264-298

Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

З. Х. Рахмонов, И. Аллаков, Б. Х. Абраев

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru
Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).
e-mail: iallakov@mail.ru
Абраев Бахром Холтораевич — Термезский государственный университет (Узбекистан, г.Термез).
e-mail: babrayev@mail.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ с условиями

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \qquad b_i \leqslant (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2 b_3, N – попарно взаимно простые натуральные числа, B_i — произвольные фиксированные положительные числа.

Ключевые слова: тернарная проблема Гольдбаха, почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, И. Аллаков, Б. Х. Абраев. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 264–298.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-264-298

Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms

Z. Kh. Rakhmonov, I. Allakov, B. Kh. Abraev

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: iallakov@mail.ru
Abraev Bahrom Kholtoraevich — Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: babrayev@mail.ru

Abstract

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural N in the form $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ with the conditions

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \qquad b_i \leqslant (\ln N)^{B_i},$$

where b_1, b_2 b_3, N are pairwise coprime natural numbers, B_i — arbitrary fixed positive numbers

Keywords: ternary Goldbach problem, almost equal terms, short exponential sum with primes, small neighborhood of centers of major arcs.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, I. Allakov, B. Kh. Abraev, 2023, "Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 264–298.

1. Введение

И.М. Виноградов [1, 2] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. В частности, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} \Lambda(m) e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$, $\mathscr{L}_x = \ln x$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

Короткую линейную тригонометрическую сумму с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М. Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

К.В. Хазелгров [3] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \geqslant x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Пользуясь этими результатами, ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\theta}, \tag{1}$$

нашёл асимптотическую формулу.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4] на базе метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы разработали новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при условии

$$y \geqslant x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [5], используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценку М. Ютилы [6] о четвёртом моменте L-функций Дирихле, заменил показатель θ на

$$\frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа [7]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

A. Baker [8] доказал: *если λ_1, λ_2, λ_3 — ненулевые действительные числа, не одного знака, причём хотя бы одно из отношений λ_i/λ_j иррационально, тогда для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leqslant (\ln p)^{-n}, \qquad p = \max(p_1, p_2, p_3).$$

В процессе доказательства этого результата он воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$\S_1(b_i\alpha, N) = \sum_{p \leqslant N} e(b_i \alpha p),$$

как в больших так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3, где b_1, b_2, b_3 и N — целые числа (см. также [9]).

Основным результатом этой работы является теорема 1 об асимптотической формуле для количества решений диофантова уравнения (2) при условии, что слагаемые $b_i p_i$ почти равны, а коэффициенты b_1, b_2, b_3 не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа N.

Теорема 1. *Пусть b_1, b_2 b_3, N — попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1, B_2, B_3 — произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leqslant (\ln N)^{B_i}$, $I(N,H)$ — число решений диофантова уравнения*

$$b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N, \qquad \left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H,$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3. Тогда при $H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^{60}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)\ H^2}{b_1b_2b_3\ (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2\ln\ln N}{b_1b_2b_3(\ln N)^4}\right),$$
$$\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|b_1b_2b_3N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

С помощью кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова для аддитивных задач с почти равными слагаемыми и почти пропорциональными слагаемыми [10, 11, 12, 13, 14] доказательство теорема 1 сведено к трём следующим задачам:

- вывод асимптотической формулы для коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_1(b\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(b\alpha n),$$

  в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{c_1})$;

- нахождение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha;x,y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, кроме малых окрестностей их центров;

- получение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{c_1})$.

Эти задачи решены в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть $x \geqslant x_0$, A, B, c_1 и c_2 — абсолютные постоянные числа, $c_2 \leqslant c_1$, b — натуральное число, $b \leqslant \mathscr{L}_x^B$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a,q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant h, \qquad h = \mathscr{L}_x^{c_1}, \qquad \tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}.$$

Тогда при $y \geqslant x^{\frac{5}{8}}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha;x,y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b,q)}\right)}\frac{\mathfrak{G}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Теорема 2 доказывается методом работы [16], где, воспользовавшись вторым моментом L-функций Дирихле на критической прямой для суммы

$$S_k(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k)$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$, за исключением малой окрестности их центров $|\alpha - \frac{a}{q}| > \left(2\pi k^2 x^{k-2}y^2\right)^{-1}$, при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}_x^{c_k}$,

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \qquad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

получена нетривиальная оценка вида

$$S_k(\alpha;x,y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A},$$

где A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула (см. также [10, 13]).

Теорема 3. *Пусть $x \geqslant x_0$, A — абсолютная постоянная, $y \geqslant bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}$, b — натуральное число,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad b\mathscr{L}_x^{4A+82} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-82}, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$S_1(b\alpha;x,y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}.$$

Теорема 3 доказывается методом работы [17], где нетривиальная оценка суммы $S_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{32(A+20)})$ при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_x^{8A+151}$ и $\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}_x^{-32(A+20)}$ получена методом оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [18, 19, 20, 21]. Основными утверждениями, позволившими получить оценку $S_1(b\alpha;x,y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм на малых дугах, соответственно имеющих "длинную" сплошную сумму и, имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму.

Обозначения. $N > N_0$ – натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $ord_p(n)$ — наибольшая степень простого числа p, делящего целое число n, то есть $p^{ord_p(n)}\|n$; $\mathscr{L}_x = \ln x$,

$$S(a,q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right), \qquad \gamma_n(\lambda;x,y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right)du.$$

2. Вспомагательные леммы

Лемма 1. [22]. *Пусть χ_q — примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$\tau(\bar{\chi}_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}_q(m)e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q} \chi_q(m)e\left(\frac{m}{q}\right), \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

Лемма 2. [23]. *Пусть $2 \leqslant T_0 \leqslant x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) = E_0x - \sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho} + R(x,T_0,\chi), \quad R(x,T_0,\chi) \ll \frac{x\mathscr{L}_x^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

Лемма 3. [22]. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s, \chi_1)$, то*

$$\beta_1 \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

Лемма 4. [24]. *Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geqslant m_1 > u$ $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Лемма 5. [25]. *При подходящем $c > 0$ функция $L(s, \chi)$, $s = \mathfrak{G}gma + it$ не имеет нулей в области*

$$\mathfrak{G}gma \geqslant 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров χ по mod$q$, *за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L–функции, определенной исключительным характером χ_1.*

Лемма 6. *Пусть ε сколь угодна малая положительная постоянная, A — произвольное фиксированное положительные число, $T^{\frac{7}{22}+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$ и $q \leqslant \ln^A T$, тогда справедливы оценки*

$$\sum_{\chi \bmod q}(N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll (qH)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33},$$

где $c = 2,4$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$; и $c = \frac{8}{3}$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Эта лемма доказывается методом работы [26]

Лемма 7. [27]. *При $x \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_r^k(n) \ll x\,(\ln x)^{r^k - 1}, \qquad k = 1, 2.$$

Лемма 8. [28] *При вещественном α, подчинённом условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

а) для суммы

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q' < q, \qquad U > 0$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U + q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V = \sum_{0 < z \leqslant 0{,}5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V \ll q\ln q.$$

Лемма 9. [18]. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1 \leqslant x$, $r \geqslant 1$,*

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d\setminus n,\, d\leqslant u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k \sum_{m_1\leqslant u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\leqslant u_1\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1 f(m_1n_1\cdots m_kn_k)+$$
$$+(-1)^r\sum_{n_1\geqslant u_1}\lambda(n_1)\cdots\sum_{\substack{n_r\geqslant u_1\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}}\lambda(n_r)\sum_{m}\Lambda(m)f(n_1\cdots n_rm).$$

Лемма 10. [29]. *Пусть $y \geqslant x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x)-\pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

3. Поведение специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах

В этом пункте докажем теорему 2 о поведении тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(b\alpha n),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-c_2}$, где c_1, c_2 — произвольные фиксированные положительные числа.

3.1. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y = x^{\frac{5}{8}}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}. \tag{3}$$

Для удобства с помощью обозначений $q_1 = \dfrac{q}{(b,q)}$ и $b_1 = \dfrac{b}{(b,q)}$ чисел q и b представим в виде

$$b = b_1(b,q), \qquad q = q_1(b,q), \qquad 1\leqslant q_1\leqslant q, \qquad (b_1,q_1)=1.$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, затем леммой 1, находим

$$S_1(b\alpha;x,y) = \sum_{k=1}^{q_1}e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right)\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e\left(b\lambda n\right)\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\overline{\chi}(k)\chi(n)+O(\mathscr{L}_x^2) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{k=1}^{q_1}\overline{\chi}(k)e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right)\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)+O(\mathscr{L}_x^2) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\chi(ab_1)\tau(\overline{\chi})\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)+O(\mathscr{L}_x^2) \tag{4}$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=-\int_{x-y}^{x}\psi(u,\chi)de(b\lambda u)+e(b\lambda x)\psi(x,\chi)-e(b\lambda(x-y))\psi(x-y,\chi).$$

Пользуясь леммой 2 при $T_0=\left(xy^{-1}+|b\lambda|x\right)q_1^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}$, найдём

$$\begin{aligned}\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=&-\int_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(b\lambda u)+\\&+e(b\lambda x)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(b\lambda(x-y))\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)\\&-\int_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi ib\lambda e(b\lambda u)du+e(b\lambda x)R(x,T_0)-e(b\lambda(x-y))R(x-y,T_0).\end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, пользуясь оценкой для $R(u,T_0)$ из леммы 2, находим

$$\begin{aligned}\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=&E_0\int_{x-y}^{x}e(b\lambda u)du-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(b\lambda u)du+O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+1}}\right)=\\=&E_0\frac{\mathfrak{G}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}I(\rho,b\lambda)+O\left(\frac{y}{q_1^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+1}}\right),\\I(\rho,b\lambda)=&\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(b\lambda u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4) для $S_1(b\alpha;x,y)$, найдём следующее выражение:

$$S_1(b\alpha;x,y)=\frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\frac{\mathfrak{G}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-W(b\alpha;x,y)-E_1W_1(b\alpha;x,y)+O(y\mathscr{L}_x^{-A}),\quad(5)$$

$$W(b\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi\bmod q_1}\chi(ab_1)\tau(\overline{\chi})\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}I(\rho,b\lambda),$$

$$W_1(b\alpha;x,y)=\frac{\chi_1(ab)\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}I(\beta_1,b\lambda),$$

где $E_1=1$, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1,

$$\beta_1\geqslant 1-\frac{c}{\ln q},$$

и $E_1=0$ в противном случае.

3.2. Оценка $|W_1(b\alpha;x,y)|$

Воспользовавшись тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1)$ и интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, найдём

$$|W_1(b\alpha;x,y)|=\left|\frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(b\lambda u)du\right|\ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 3, имея в виду, что $q_1 < q \leqslant \mathscr{L}_x^{c_1}$, при $\varepsilon = (2c_1)^{-1}$, имеем

$$x^{\beta_1-1} = \exp\left((\beta_1-1)\mathscr{L}_x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{q^{\varepsilon}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{\mathscr{L}_x^{b\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x}).$$

Следовательно

$$|W_1(b\alpha; x, y)| \ll y\exp\left(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}. \tag{6}$$

3.3. Преобразование $|W(b\alpha; x, y)|$

Переходя к оценкам, имеем

$$|W(b\alpha; x, y)| \leqslant \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} |\tau(\bar{\chi})||\mathrm{W}(b\lambda, \chi)|, \qquad \mathrm{W}(b\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0 \\ \rho\neq\beta_1}} |I(\rho, b\lambda)|\,, \tag{7}$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geqslant 1 - \frac{c}{\ln q}$. Сумму $|W(\alpha; x, y)|$ оценим в случае $\lambda \geqslant 0$. Случай $\lambda \leqslant 0$, сводится к случаю $\lambda \geqslant 0$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(b\lambda, \chi) &= \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0 \\ \rho\neq\beta_1}} \left|\overline{I(\rho, b\lambda)}\right| = \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0 \\ \rho\neq\beta_1}} \left|\int_{x-y}^{x} u^{\beta-1} e\left(-b\lambda u - \frac{1}{2\pi}\gamma\ln u\right) du\right| = \\ &= \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0 \\ \rho\neq\beta_1}} |I(\bar{\rho}, -b\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0 \\ \rho\neq\beta_1}} |I(\rho, -b\lambda)| = \mathrm{W}(-b\lambda, \chi),\end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 4, при $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = b\lambda u + \frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$, оценим тригонометрический интеграл $I(\rho, b\lambda)$. Найдём

$$|I(\rho, \lambda)| \leqslant \frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|} = \frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|}, \qquad f'(u) = b\lambda + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 2\pi k b\lambda u}{2\pi u}.$$

Отсюда и из тривиальной оценки

$$|I(\rho, b\lambda)| \leqslant \int_{x-y}^{x} u^{\beta-1}du \leqslant yx^{\beta-1},$$

получим

$$|I(\rho, b\lambda)| \leqslant x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|xf'(u)|}\right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношением

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi k b\lambda u|\frac{x}{2\pi u} \geqslant \frac{1}{2\pi}|\gamma + 2\pi k b\lambda u|,$$

представим в виде

$$|I(\rho, b\lambda)| \ll x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 2\pi k b\lambda u|}\right). \tag{8}$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы $\tau(\chi)$ в (7), а затем пользуясь соотношением $q_1/\varphi(q_1) \ll \ln\ln q_1$, получим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathrm{W}(b\lambda, \chi) \ll \frac{\ln\mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathrm{W}(b\lambda, \chi). \tag{9}$$

Все нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma|\leqslant T_0$ разобьём на множества

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\leqslant\gamma<-2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\right\},$$
$$D_2=\left\{\rho:\ -2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\leqslant\gamma\leqslant-2\pi b\lambda(x-y)+\frac{x}{y}\right\},$$
$$D_3=\left\{\rho:\ -2\pi b\lambda(x-y)+\frac{x}{y}<\gamma\leqslant T_0\right\}.$$

Обозначая сумму модулей сумма модулей интеграла $I(\rho,b\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j, через $\mathrm{W}_j(b\lambda,\chi)$, $j=1,\ 2,\ 3$, представим сумму $\mathrm{W}(b\lambda,\chi)$ в (7) в виде:

$$\mathrm{W}(b\lambda,\chi)=\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)+\mathrm{W}_2(b\lambda,\chi)+\mathrm{W}_3(\chi,b\lambda).\tag{10}$$

3.3.1. Преобразование $\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x-y\leq u\leqslant x$, получим

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0+2\pi b\lambda u\leqslant\gamma+2\pi b\lambda u<-2\pi b\lambda x+2\pi b\lambda u-\frac{x}{y}\right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в интервале $x-y\leq u\leqslant x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1, имеем

$$-2\pi b\lambda x+2\pi b\lambda u-\frac{x}{y}\leqslant-\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если $\rho\in D_1$, то выполняется неравенство $\gamma+2\pi b\lambda u<-\frac{x}{y}$, поэтому в интервале $x-y\leqslant u\leqslant x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma+2\pi b\lambda u$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma+2\pi b\lambda u|=-\max(\gamma+2\pi b\lambda u)=-\gamma-2\pi b\lambda x\geqslant\frac{x}{y},\quad\text{если}\quad\rho\in D_1.$$

Отсюда и из второй оценки (8), найдём

$$\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi b\lambda x}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\leqslant\gamma<-2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\right\}=\left\{\rho:\ \frac{x}{y}\leqslant-\gamma-2\pi b\lambda x<T_0-2\pi b\lambda x\right\},$$

разобьём на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r\ll T_0x^{-1}y$, в класс D_{1n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH<-\gamma-2\pi b\lambda x\leqslant(n+1)H,\qquad H=\frac{bhx}{q_1y},\qquad 1\leqslant n\leqslant r.$$

Следовательно

$$\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)\ll\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi b\lambda x}\leqslant\frac{1}{H}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{1\leqslant n\leqslant r}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\leqslant\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}x^\beta.$$

3.3.2. Преобразование $\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x-y \le u \leqslant x$, получим

$$D_3 = \left\{\rho:\ 2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi b\lambda u \leqslant T_0 + 2\pi b\lambda u\right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в отрезке $x-y \le u \leqslant x$ монотонно возрастает, поэтому на левой границе множества D_3, имеет место неравенство

$$2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \geqslant \frac{x}{y}.$$

Отсюда следует, что если $\rho \in D_3$, то имеет место неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u > \frac{x}{y}$. Следовательно в отрезке $x-y \leqslant u \leqslant x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо неравенство

$$\min|\gamma + 2\pi b\lambda u| = \min(\gamma + 2\pi b\lambda u) = \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \geqslant \frac{x}{y}, \qquad \text{при} \qquad \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (8), находим

$$\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{\rho\in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \leqslant \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) < T_0 + 2\pi b\lambda(x-y)\right\},$$

разобьём на классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3r}$, $r \ll T_0H^{-1}$, в класс D_{3n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH < \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \leqslant (n+1)H, \qquad H = \frac{bhx}{q_1 y}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant r.$$

Следовательно

$$\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)} \leqslant \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \leqslant \frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

3.3.3. Преобразование $\mathrm{W}_2(b\lambda, \chi)$

Представляя множество D_2 в виде

$$D_2 = \left\{\rho:\ -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \leqslant \gamma \leqslant -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y}\right\} =$$
$$= \left\{\rho:\ T_1 - 2\pi b\lambda y - \frac{2x}{y} \leqslant -\gamma \leqslant T_1\right\}, \qquad T_1 = 2\pi b\lambda x + \frac{x}{y} \leqslant T_0,$$

и имея в виду, что для длины множества D_2 при $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}$ и $c_2 \leqslant c_1$, выполняется неравенство

$$2\pi b\lambda y + \frac{2x}{y} \leqslant \frac{2\pi by}{q_1\tau} + \frac{2x}{y} = \frac{2\pi bhx}{q_1 y}\cdot\frac{\mathscr{L}_x^{c_2}}{h} + \frac{2x}{y} \ll \frac{bxh}{q_1 y} = H,$$

и пользуясь тривиальной оценкой тригонометрического интеграла $I(\rho, b\lambda)$, то есть первой оценкой (8), получим

$$\mathrm{W}_2(b\lambda, \chi) \leqslant \sum_{\rho\in D_2}|I(\rho, b\lambda)| \ll \frac{y}{x}\sum_{\rho\in D_2} x^\beta \leqslant \frac{y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H\leqslant-\gamma\leqslant T} x^\beta \ll \frac{y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H\leqslant\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

3.4. Сведение оценки $W(b\alpha;x,y)$ к минимизации $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$

Подставляя полученные оценки для $\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)$, $\mathrm{W}_3(\chi,b\lambda)$ и $\mathrm{W}_3(\chi,b\lambda)$ в (10), а потом в (9), а затем, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\ln\mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\mathscr{L}_x}{H}+\frac{y}{x}\right)=\frac{\ln\mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{q_1\mathscr{L}_x}{bh}+1\right)\frac{y}{x}\ll\frac{y\mathscr{L}_x^2}{x},$$

находим

$$|W(b\alpha;x,y)|\ll\frac{\ln\mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\mathscr{L}_x}{H}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{W}(b\lambda,\chi)\ll\frac{y\mathscr{L}_x^2}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}V_{q_1}(T,H),\tag{11}$$

$$V_{q_1}(T,H)=\sum_{\chi\bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}x^{\beta}.$$

Сумму $V_{q_1}=V_{q_1}(T,H)$ оценим, воспользовавшись теоремой о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$V_{q_1}=\sum_{\chi\bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}\left(\mathscr{L}_x\int_0^{\beta}x^u du+1\right)=\mathscr{L}_x\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\sum_{\substack{T-H<\gamma\leqslant T\\ \beta\geqslant u}}du+\sum_{\chi\bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}1$$

$$=\mathscr{L}_x\int_0^1 x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)du+\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right).$$

Нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\mathfrak{G}gma=0.5$. Воспользовавшись этим свойством нулей, правую часть последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned}V_{q_1}(T,H)&\leqslant\mathscr{L}_x\int_{0,5}^1 x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)du+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right)\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right)\leqslant\\&\leqslant\mathscr{L}_x\max_{u\geqslant 0,5}x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right)\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right)\leqslant\\&\leqslant 2\mathscr{L}_x\max_{u\geqslant 0,5}x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right).\end{aligned}$$

Согласно лемме 5 функция $L(u+it,\chi)$ не имеет нулей в области

$$u\geqslant 1-\delta(q_1,t),\qquad\delta(q_1,t)=\frac{c_3}{\max\left(\ln q_1,\ (\ln(t+3)\ln\ln(t+3))^{\frac{3}{4}}\right)},$$

для всех характеров $\chi\mathrm{mod}q_1$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L-функции, определенной исключительным характером χ_1. Поэтому, имея в виду, что $\delta(q_1,T)\geqslant\delta(q_1,T_0)$, найдём

$$V_{q_1}(T,H)\leqslant 2\mathscr{L}_x\max_{0,5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right).$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (11), имеем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{y\mathscr{L}_x^3}{x} \max_{|T|\leqslant T_0} \max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q_1} \left(N(u,T,\chi) - N\left(u,T-H,\chi\right)\right).$$

Из определения параметра T_0, условия $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}$ и (3), находим

$$\frac{T}{H^3} \leqslant \frac{T_0(q_1y)^3}{(bxh)^3} = \frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12} + bq_1^{\frac12}|\lambda|x\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12} + \frac{bx}{q_1^{\frac12}\tau}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} =$$
$$= \left(\frac{q_1^{3,5}y^2}{b^3x^2h^3} + \frac{q_1^{2,5}y\mathscr{L}_x^{c_2}}{b^2xh^3}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{h^{0,5}y^2}{b^3x^2} + \frac{y\mathscr{L}_x^{c_2}}{b^2xh^{0,5}}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant 1.$$

Таким образом, в последней сумме по $\chi \bmod q_1$ выполняется условие $\frac{x}{y} \geqslant T^{\frac13}$, и к этой сумме можно применить теорему о плотности нулей в узких прямоугольных критической полосы (лемму 6). Согласно этой лемме, имеем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{y\mathscr{L}_x^3}{x} \max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta} x^u(q_1H)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33} \ll \frac{y\mathscr{L}_x^{36}}{x} \max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta} x^u\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c(1-u)} =$$
$$= bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c-1} \max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta} x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{cu} \ll \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3, \tag{12}$$
$$\mathscr{A}_1 = bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4} \max_{0{,}5\leqslant u\leqslant \frac23} f_1(u), \qquad f_1(u) = x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{2,4u} > 0,$$
$$\mathscr{A}_2 = bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac53} \max_{\frac23\leqslant u\leqslant \frac56} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{\frac83 u} > 0,$$
$$\mathscr{A}_3 = bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4} \max_{\frac56\leqslant u\leqslant 1-\delta} f_1(u).$$

3.5. Оценка $\mathscr{A}_1$

Воспользовавшись условиями $q_1 \leqslant h$, $h = \mathscr{L}_c^{c_2}$, $1 \leqslant b \leqslant \mathscr{L}_x^B$ и (3), имеем

$$f_1'(u) = f_1(u)\left(\ln x + 2{,}4\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right) = 2{,}4f_1(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac{7}{12}}}\right) > 0,$$

то есть $f_1(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь опять условием (3), имеем

$$\mathscr{A}_1 = bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4} f_1\left(\frac23\right) = y\left(\frac{x^{\frac58}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac45} x^{-\frac{1}{30}}\mathscr{L}_x^{-1,8A-28,8} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

3.6. Оценка $\mathscr{A}_3$

Пользуясь, как в случае оценки $\mathscr{A}_1$, монотонностью функции $f_1(u)$, а затем условиями $b \leqslant \mathscr{L}_x^B$, $h = \mathscr{L}_x^{c_2}$ и (3), находим

$$\mathscr{A}_3 = bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4} f_1(1-\delta) = y\left(\frac{x^{\frac58}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac{12}{5}\delta} x^{-0,1\delta}\mathscr{L}_x^{36-54A\delta-194,4\delta} \ll yx^{-0,1\delta}\mathscr{L}_x^{36}.$$

Воспользовавшись условиями $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{xh}$, $b \leqslant \mathscr{L}_x^B$, $h = \mathscr{L}_x^{c_1}$ и (3), имеем

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + b\lambda x\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{q^{\frac{1}{2}}x}{y} + \frac{hx^2}{q^{\frac{1}{2}}y^2}\right) \mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{x\mathscr{L}_x^{c_1}}{y} + \frac{hx^2}{y^2}\right) \mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant x,$$

Пользуясь этим неравенством оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$. Имеем

$$\delta(q, T_0) = \frac{c_3}{\max\left(\ln q,\ (\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3))^{\frac{3}{4}}\right)} \geqslant \frac{c_3}{\max\left(b\ln\mathscr{L}_x,\ (\mathscr{L}_x\ln\mathscr{L}_x)^{\frac{3}{4}}\right)} \geqslant c_4\mathscr{L}_x^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}_3 \ll y\exp(-0,1\delta\mathscr{L}_x)\cdot\mathscr{L}_x^{36} \ll y\exp(-0,1c_4\mathscr{L}_x^{0,24})\cdot\mathscr{L}_x^{36} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

3.7. Оценка $\mathscr{A}_2$

Воспользовавшись условиями $q_1 \leqslant h$, $h = \mathscr{L}_c^{c_1}$, $1 \leqslant b \leqslant \mathscr{L}_x^B$ и (3), имеем

$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac{8}{3}\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right) = \frac{8}{3}f_2(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac{5}{8}}}\right) \geqslant \frac{8}{3}f_2(u)\ln\left(\frac{y}{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{B+c_1}}\right) > 0,$$

то есть $f_2(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь условием (3), имеем

$$\mathscr{A}_2 = bh\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac{5}{3}}\mathscr{L}_x^{36}f_2\left(\frac{5}{6}\right) = y\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac{4}{9}}\mathscr{L}_x^{-A} \leqslant y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Подставляя найденные оценки для сумм $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$ в (12), находим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Из полученной оценки и оценки (6), имея в виду (5), получим утверждение теоремы.

4. Оценка специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах

Оценим сначала специальные короткие линейные двойные тригонометрические суммы с "близкими" по порядку суммами, которые возникают при оценке специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах.

4.1. Оценка специальных коротких линейных двойных тригонометрических сумм с "близкими" по порядку суммами

Лемма 11. *Пусть $f(m)$ и $g(n)$ - произвольные комплекснозначные функции, b — натуральное число, c — абсолютная постоянная, $|f(m)| \leqslant \tau_r(m)$, $|g(n)| \leqslant \tau_k(n)$, $y < x\mathscr{L}_x^{-1}$,*

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда при

$$\begin{aligned} b\mathscr{L}_x^{4c+2r^2+2k^2+4k-2} \leqslant q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \\ \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2c+r^2+k^2+2k-1} \leqslant N \leqslant \frac{y}{b}\mathscr{L}_x^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \end{aligned} \tag{13}$$

справедлива оценка

$$|W| \ll y\mathscr{L}_x^{-c}.$$

Доказательство. Далее, для удобства, не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$. Возводя сумму W в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 7, получим

$$\begin{aligned} |W|^2 &\ll \sum_{M<m\leq 2M} |f(m)|^2 \sum_{M<m\leq 2M} \left| \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn) \right|^2 \ll \\ &\ll \sum_{M<m\leqslant 2M} \tau_r^2(m) \sum_{M<m\leqslant 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} \overline{g(n_1)}g(n_2)e(b\alpha m(n_2-n_1)) \ll \\ &\ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1} \sum_{N<n_1,n_2\leqslant 2N} \overline{g(n_1)}g(n_2) \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} (b\alpha m(n_2-n_1)). \end{aligned}$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$,$n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} |g(n)|^2 \ll \sum_{x-y<t\leq x} \sum_{\substack{mn=t \\ M<m\leq 2M \\ N<n\leqslant 2N}} \tau_k^2(n) \leqslant \sum_{x-y<t\leq x} \tau_{k+1}^2(t) \ll y\mathscr{L}_x^{k(k+2)},$$

а также, имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|W|^2 \ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1} \left| \sum_{N<n_1\leqslant 2N} \overline{g(n_1)} \sum_{0<n_2-n_1\leqslant 2N-n_1} g(n_2) \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} e(b\alpha m(n_2-n_1)) \right| + yM\mathscr{L}_x^{r^2+k^2+2k-1}.$$

Положим $t = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда правая часть последнего неравенства принимает вид

$$|W|^2 \ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1}W_1 + yM\mathscr{L}_x^{r^2+k^2+2k-1}, \tag{14}$$

$$W_1 = \sum_{N<n\leqslant 2N} \tau_k(n) \sum_{0<t\leq 2N-n} \tau_k(n+t) \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+t}}} e(b\alpha tm) \right|.$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m \leq \frac{x}{n+t}$ находим

$$t \leq \frac{x}{m} - n < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} < \frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по n, найдём

$$W_1 \ll \sum_{N<n\leqslant 2N} \tau_k(n) \sum_{0<t\leqslant \frac{y}{M}} \tau_k(n+t) \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha bt\|}\right).$$

Применяя дважды неравенство Коши и лемму 7, найдём

$$W_1^2 \ll N\mathscr{L}_x^{k^2-1}\sum_{N<n\leqslant 2N}\left(\sum_{0<t\leqslant\frac{y}{M}}\tau_k(n+t)\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)\right)^2 \ll$$
$$\ll \frac{yN}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2}\sum_{N<n\leqslant 2N}\sum_{0<t\leqslant\frac{y}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)^2 \ll$$
$$\ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2}\sum_{0<t\leqslant\frac{y}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right) \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2}\sum_{0<t\leqslant\frac{by}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

4.1.1. Оценка W_1^2 при $\dfrac{by}{M} > 0.5q$

Разбивая интервал изменения t на $\ll \dfrac{by}{qM}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 8, найдём

$$W_1^2 \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2}\cdot\frac{by}{qM}\left(\frac{y}{N}+q\ln q\right) \ll \left(\frac{by^4}{qM^2}+\frac{by^3N}{M^2}\right)\mathscr{L}_x^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (14) и воспользовавшись соотношением $MN \asymp x$, а также неравенством $4k^2-24k+69 > 2k^2+2k$, а затем условиями (13), получим

$$|W|^4 \ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}W_1^2 + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}\left(\frac{by^4}{qM^2}+\frac{by^3N}{M^2}\right)\mathscr{L}_x^{2k^2-1} + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll \left(\frac{by^4}{q}+by^3N\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2-3} + \frac{y^2x^2}{N^2}M\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{b}{q}+\frac{bN}{y}+\frac{x^2}{y^2N^2}\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll y^4\mathscr{L}_x^{-4c}.$$

4.1.2. Оценка W_1^2 при $\dfrac{by}{M} \leqslant 0.5q$

Применяя утверждение б) 8, найдём

$$W_1^2 \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2}\cdot q\ln q \ll \frac{y^2Nq}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (14) и, воспользовавшись соотношением $MN \asymp x$, а затем условиями (13), получим

$$|W|^4 \ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}W_1^2 + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}\cdot\frac{y^2Nq}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-1} + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^2xq\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2-3} + \frac{y^2x^2}{N^2}\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{xq}{y^2}+\frac{x^2}{y^2N^2}\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll y^4\mathscr{L}_x^{-4c}.$$

Лемма доказана.

Теперь, пользуясь этой леммой, найдём нетривиальную оценку тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(b\alpha n),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}\left(b\mathscr{L}_x^{4A+82}\right)$, $\tau=y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}$, где A — произвольное фиксированное положительное число.

4.2. Доказательство теоремы 3

Имеем

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(b\alpha n),\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\qquad (a,q)=1,\qquad |\theta|\leqslant 1.$$

В лемме 9 возьмём $r=3$, $u_1=x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n)=e(b\alpha n)$. Имеем

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{k=1}^{3}(-1)^kC_3^kS_1(b\alpha;x,y,k),\tag{15}$$

$$S_1(b\alpha;x,y,k)=\sum_{m_1\leqslant u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\leqslant u_1\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leqslant x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k).$$

Разобьём в $S_1(b\alpha;x,y,k)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $\mathscr{L}_x$ интервалов вида $M_j<m_j\leqslant 2M_j$, $N_j<n_j\leqslant 2N_j$, $j=1,\cdots,k$. Получим

$$S_1(b\alpha;x,y,k)=\sum^{\mathscr{L}_x^{2k}}\hat{\S}_k(M,N),\tag{16}$$

$$\hat{\S}_k(M,N)=\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leqslant x}}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leqslant 2N_k}\ln n_1\,e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k)=$$

$$=\int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leqslant x}}\mu(m_k)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leqslant 2N_k}e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k)d\ln u.$$

Через $U_1=\max(u,N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\hat{\S}_k(M,N)|\ll\mathscr{L}_x|\S_k(M,N)|,\tag{17}$$

где

$$\S_k(M,N)=\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leqslant x}}\mu(m_k)\sum_{U_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{U_k<n_k\leqslant 2N_k}e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k),\quad N_j\leqslant U_j<2N_j.$$

Подставляя (17) в (16), а затем и (15), получим

$$S_1(b\alpha;x,y)\ll\mathscr{L}_x^7\sum_{k=1}^{3}\max|\S_k(M,N)|,\tag{18}$$

Суммы $\S_k(M,N)$, $k=1,2,3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $\S_3(M,N)$ и, не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$x^{\frac{1}{3}} > M_1 \geqslant M_2 \geqslant M_3, \qquad N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3, \qquad M_1M_2M_3N_1N_2N_3 \asymp x. \tag{19}$$

Оценка $\S_1(M,N)$. Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > 4bxq^{-1}$;
2. $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39} < N_1 \leqslant 4bxq^{-1}$;
3. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2B+37}$, $M_1M_2 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
4. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
5. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N_1N_2N_3 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
6. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$.

Для рассмотрения случаев 1 и 2 сумму $\S_3(M,N)$ несколько преобразуем. Для этого, вводя обозначения

$$f(m) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2}\mu(m_2)\sum_{\substack{M_3<m_3\leqslant 2M_3\\ m_1m_2m_3n_2n_3=m}}\mu(m_3)\sum_{U_2<n_2\leqslant 2N_2}\sum_{U_3<n_3\leqslant 2N_3}1, \quad |f(m)|\leqslant\tau_5(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1M_2M_2U_2U_3 < m \leqslant 2^5M_1M_2M_2N_2N_3$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} f(m)\sum_{\substack{U_1<n\leqslant 2N_1\\ x-y<mn\leqslant x}} e(\alpha mn),$$

и представим эти суммы в виде

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} f(m)\sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(b\alpha mn),$$
$$x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m}-\frac{y}{m}, U_1\right) \leqslant \frac{y}{m}. \tag{20}$$

Из условия $MN_1 < x$ и $4MN_1 < x-y$ следует, что

$$\frac{x}{5N_1} < \frac{x-y}{4N_1} \leqslant M \leqslant \frac{x}{N_1}. \tag{21}$$

В W, суммируя внутреннюю сумму по n, воспользовавшись условиями (20) и (21), найдём

$$W \ll \sum_{M<m\leqslant 2M}\tau_5(m)\min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\tau_5(m)\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 7, найдём

$$|W|^2 \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\tau_5^2(n)\sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right)^2 \ll$$
$$\ll y\mathscr{L}_x^{24}\sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{24}\sum_{\frac{bx}{N_1}<m\leqslant\frac{2bx}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha m\|}\right).$$

Случай 1. $N_1 > 4bxq^{-1}$. Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} < 0,5q.$$

Применим утверждение б) леммы 8, затем воспользовавшись условием $q \leqslant y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}$, найдём

$$|W|^2 \ll y\mathscr{L}_x^{24}\sum_{m\leqslant 0,5q}\frac{1}{\|\alpha m\|} \ll y\mathscr{L}_x^{24}q\ln q \ll yq\mathscr{L}_x^{25} \ll y\mathscr{L}_x^{25}\cdot\frac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{4A+82}} =$$
$$= \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}}\cdot\frac{y}{x\mathscr{L}_x^{2A+43}} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}}.$$

Случай 2. $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39} < N_1 \leqslant 4bxq^{-1}$. Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} \geqslant 0,5q.$$

Разбивая интервал изменения m на $\ll bx(qN_1)^{-1}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 8, воспользовавшись условиями рассматриваемого случая, а именно условием

$$N_1 \geqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}, \qquad q \geqslant b\mathscr{L}_x^{4A+82},$$

найдём

$$|W|^2 \ll y\mathscr{L}_x^{24}\cdot\frac{bx}{qN_1}\sum_{t=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yN_1}{x},\frac{1}{\|\alpha m\|}\right) \ll \frac{bxy\mathscr{L}_x^{24}}{qN_1}\left(\frac{yN_1}{x}+q\ln q\right) \ll$$
$$\ll y^2\left(\frac{b}{q}+\frac{bxy^{-1}}{N_1}\right)\mathscr{L}_x^{25} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}}.$$

Случай 3. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$, $M_1M_2 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1M_2 \geqslant (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} \gg \left(\frac{x}{N_1N_2N_3}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant \left(\frac{y}{b\mathscr{L}_x^{2A+37}}\right)^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37}\cdot\left(\frac{y}{bx^{\frac{3}{5}}\mathscr{L}_x^{2A+37}}\right)^{\frac{5}{3}} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37}.$$

В сумме $\S_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1m_2 = n$ и $m_3n_1n_2n_3 = m$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m)\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_4(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняются неравенства

$$bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}, \qquad b\mathscr{L}_x^{4B+74} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-74}, \tag{22}$$

являющиеся условиями (13) леммы 11 при $r = 4$, $k = 2$, $c = A+7$, и согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{B+7}}.$$

Случай 4. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1 \geqslant \sqrt{M_1M_2} \geqslant y^{\frac12}b^{-\frac12}\mathscr{L}_x^{-2A-37} = \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+41}\cdot\left(\frac{y}{bx^{\frac23}\mathscr{L}_x^{\frac83 A+52}}\right)^{\frac32} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+41},$$

$$M_1 \leqslant x^{\frac13} = \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+82}}\cdot\frac{x^{\frac13}b\mathscr{L}_x^{4A+82}}{y} \leqslant \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+82}}.$$

В сумме $\S_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1 = n$ и $m_2m_3n_1n_2n_3 = m$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} \mu(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_5(m).$$

Для этой суммы выполняется следующие два неравенства

$$bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+41} < N \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}, \qquad b\mathscr{L}_x^{4A+82} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-82},$$

которые являются условиями (13) леммы 11 при $r = 5$, $k = 1$, $c = A + 7$. Согласно этой лемме имеем

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Случай 5. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N_1N_2N_3 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Сумму $\S_3(M,N)$ преобразуем. Для этого, вводя обозначения $m_1m_2m_3 = m$ и $n_1n_2n_3 = n$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_3(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_3(m).$$

Для этой суммы выполняются соотношения (22), являющиеся при $r = 3$, $k = 3$, $c = A + 7$ условиями (13) леммы 11, согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Случай 6. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$N_1N_2 \geqslant (N_1N_2N_3)^{\frac23} \geqslant \left(\frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}\right)^{\frac23} = \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37}\left(\frac{y}{bx^{\frac35}\mathscr{L}_x^{2,8A+51,8}}\right)^{\frac53} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37},$$

$$N_1N_2 \leqslant N_1^2 \leqslant b^2x^2y^{-2}\mathscr{L}_x^{4A+78} = \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}\left(\frac{bx^{\frac23}\mathscr{L}_x^{\frac{8A+152}{3}}}{y}\right)^3 \leqslant \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}.$$

Сумму $\S_3(M,N)$ преобразуем, для этого вводя обозначения $n_1n_2 = n$ и $m_2m_2m_3n_3 = m$, и разбивая интервалы суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_4(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняются соотношения (22) являющиеся при $r = 4$, $k = 2$, $c = A + 7$ условиями (13) леммы 11, согласно которой имеем

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Отсюда и из всех оценок, полученных в предыдущих случаях найдём

$$|\S_3(M, N)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A-7}.$$

Из полученных оценок $\S_k(M, N)$, $k = 1, 2, 3$, ввиду неравенства (18), получим утверждение теоремы 3.

5. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

Докажем сначала две вспомогательные леммы, которыми воспользуемся при доказательстве теоремы 1.

Лемма 12. *Пусть b — натуральное число, N — достаточно большое натуральное число,*

$$\S_1(b\alpha; N, H) = \sum_{|bp_1 - \frac{N}{3}| \leqslant H} e(b\alpha p), \qquad S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(b\alpha n).$$

Тогда при $\sqrt{bN}\left(\ln\frac{N}{3b}\right)^2 \leqslant H \leqslant N^{1-\frac{1}{30}}$, имеет место соотношение

$$\S_1(b\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln\frac{N}{3b}} S_1\left(b\alpha; \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}, \frac{2H}{b}\right) + O\left(\frac{H^2}{bN\ln\frac{N}{3b}}\right).$$

Доказательство. Отрезок суммирования $\left|bp - \frac{N}{3}\right| \leqslant H$ в сумме $\S_1(b\alpha; N, H)$ заменим на интервал вида $x - y < p \leqslant x$. Имеем

$$\S_1(b\alpha; N, H) = \sum_{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \leqslant \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}} e(b\alpha p) + O(1).$$

Логарифмируя неравенство $\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \leqslant \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}$, и воспользовавшись формулой

$$\ln\left(\frac{N}{3b} \pm \frac{H}{b}\right) = \ln\frac{N}{3b} + \ln\left(1 \pm \frac{3H}{N}\right) = \ln\frac{N}{3b} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

получим, что при $\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \leqslant \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}$, выполняется соотношение

$$\ln p = \ln\frac{N}{3b} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

Пользуясь этой формулой сумму $\S_1(b\alpha; N, H)$, выражаем через сумму вида $S_1(b\alpha; x, y)$. Имеем

$$\S_1(b\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln\frac{N}{3b}} S_1\left(b\alpha; \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}, \frac{2H}{b}\right) - \sum_{\substack{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p^k \leqslant \frac{N}{3b} + \frac{H}{b} \\ k \geqslant 2}} \frac{\ln p}{\ln\frac{N}{3b}}\, e(b\alpha p^k) + O\left(\frac{H^2}{bN\ln\frac{N}{3b}}\right).$$

Обозначая последнюю сумму через R_1 и, оценивая тривиально числом слагаемых, и воспользовавшись формулой

$$(1 \pm u)^{\mu} = 1 \pm \mu u + O(u^2), \qquad |u| < 0,5,$$

имеем

$$R_1 \ll \sum_{\substack{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p^k \leqslant \frac{N}{3b} + \frac{H}{b} \\ k \geqslant 2}} 1 \ll \ln \frac{N}{3b} \left(\left(\frac{N}{3b} + \frac{H}{b} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \ll \frac{H}{\sqrt{bN}} \ln \frac{N}{3b} \ll \frac{H^2}{bN \ln \frac{N}{3b}}.$$

Лемма 13. *Пусть p — нечётное простое число, $p^{ord_p(N)} \| N$, тогда для суммы Рамануджана*

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^k} e\left(\frac{Na}{p^k} \right),$$

справедлива формула

$$c_{p^k}(N) = \begin{cases} \varphi(p^k), & \text{если } k \leqslant ord_p(N); \\ p^{ord_p(N)} \mu(p^{k - ord_p(N)}), & \text{если } k \geqslant ord_p(N) + 1. \end{cases}$$

Доказательство. При $k \leqslant ord_p(N)$ утверждение леммы тривиально следует из определения суммы Рамануджана

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^k} 1 = \varphi(p^k).$$

При $k \geqslant ord_p(N) + 1$, пользуясь представлением $N_1 = Np^{-ord_p(N)}$, а затем подстановкой

$$a = a_1 + a_2 p^{k - ord_p(N)},$$

где a_1 и a_2 независимо пробегают значения $a_1 = 1, 2, \ldots, p^{k - ord_p(N)}$, $a_2 = 0, 1, \ldots, p^{ord_p(N)} - 1$, получим

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^k} e\left(\frac{N_1 a}{p^{k - ord_p(N)}} \right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^{k - ord_p(N)}} \sum_{a_2 = 0}^{p^{ord_p(N)} - 1} e\left(\frac{N_1 (a_1 + a_2 p^{k - ord_p(N)})}{p^{k - ord_p(N)}} \right) =$$

$$= p^{ord_p(N)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^{k - ord_p(N)}} e\left(\frac{N_1 a_1}{p^{k - ord_p(N)}} \right) = p^{ord_p(N)} \mu(p^{k - ord_p(N)}).$$

5.1. Доказательство теоремы 1

Для удобства вводим следующие обозначения:

$$\mathscr{L} = \ln \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3} \right), \qquad \mathscr{L}_i = \ln \frac{N}{3b_i} \qquad \mathscr{L} \ll \mathscr{L}_i \ll \mathscr{L}. \tag{23}$$

Не ограничивая общности будем считать, что выполняются следующие условия

$$H = (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{60}, \qquad b_1 < b_2 < b_3, \tag{24}$$

а также пусть $æ = \tau^{-1}$, где

$$\tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2b_2^2\mathscr{L}^{94}, \qquad c_2 = 94 + \frac{2\ln b_1 + 2\ln b_2}{\ln \mathscr{L}}. \tag{25}$$

Имеем

$$I(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} \mathfrak{F}(\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha,$$

где

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}(\alpha; N, H) = \prod_{i=1}^{3} \S_1(b_i\alpha; N, H), \qquad \S_1(b_k\alpha; N, H) = \sum_{\left|b_ip - \frac{N}{3}\right| \leqslant H} e(b_i\alpha p).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{26}$$

В этом представлении $0 \leqslant a \leqslant q-1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых

$$q \leqslant h, \qquad h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}, \qquad c_1 = 94 + \frac{2\ln b_1 + 2\ln b_2 + \ln b_3}{\ln \mathscr{L}}, \tag{27}$$

в представлении (26), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \left\{\alpha: \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \qquad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}}\right\}, \\ \mathfrak{M}_2 &= \left\{\alpha: \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \qquad \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}). \tag{29}$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

5.2. Преобразование интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int\limits_{\mathfrak{M}_1} \mathfrak{F}(\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha = \sum_{q\leqslant h} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a,q), \tag{30}$$

$$I(a,q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int\limits_{|\lambda| \leqslant \sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}} \mathfrak{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N)d\lambda. \tag{31}$$

Применяя лемму 12 к суммам $\S_1(b_i\alpha;N,H)$, $i=1;2;3$, и пользуясь формулой (23), получим

$$\S_1(b_i\alpha;N,H)=\frac{1}{\mathscr{L}_i}S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)+O\left(\frac{H^2}{b_iN\mathscr{L}}\right). \tag{32}$$

А теперь к суммам $S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)$, $i=1,2,3$ применим теорему 2, полагая

$$x=\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\qquad y=\frac{2H}{b_i},\qquad \mathscr{L}^A=b_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3\mathscr{L}^{192}. \tag{33}$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров h и A, затем соотношением (24), имеем

$$\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac58}b_3h\mathscr{L}^{2,25A+81}=\frac{1}{3^{\frac58}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac58}b_3^{\frac38}\cdot b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\cdot\left(b_1^{\frac92}b_2^{\frac92}b_3^3\mathscr{L}^{192}\right)^{\frac94}N^{\frac58}=$$
$$=\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac43}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac58}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac58}b_1^{\frac{259}{24}}b_2^{\frac{259}{24}}b_3^{\frac{163}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathscr{L}^{466}\leqslant\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac43}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}=\frac{H}{2b_3}.$$

Таким образом условие теоремы 2 выполняется, следовательно согласно этой теореме, и формуле (23), находим

$$S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)=\mathscr{B}_i(q)\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H\mathscr{L}^{-192}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}\right),\quad \mathscr{B}_i(q)=\frac{\mu\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}.$$

Из этой формулы и (32), имея в виду, что $H\leqslant Nb_1^{-4,5}b_2^{-4,5}b_3^{-3}\mathscr{L}^{-192}$, найдём

$$\S_1(b_i\alpha;N,H)=\frac{\mathscr{B}_i(q)}{b_i\mathscr{L}_i}\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{1i},\qquad \mathbb{R}_{1i}\ll\frac{H\mathscr{L}^{-193}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}. \tag{34}$$

Воспользовавшись формулой (34), а также соотношением (23), и имея виду, что

$$\left|\mathscr{B}_i(q)\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right|\leqslant\frac{H}{b_i},\qquad |\S_1(\alpha;\mu_iN,H)|\ll\frac{H}{b_i\mathscr{L}}, \tag{35}$$

найдём

$$\S_1(b_1\alpha;N,H)\S_1(b_2\alpha;N,H)=\left(\frac{\mathscr{B}_1(q)}{b_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{11}\right)\S_1(b_2\alpha;N,H)=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)}{b_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\left(\frac{\mathscr{B}_2(q)}{b_2\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{G}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{12}\right)+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right)=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)}{b_1b_2\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{G}n^22\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right).$$

Умножая полученное неравенство на $\S_1(b_3\alpha;N,H)$, и имея в виду, что $\mathfrak{F}(\alpha)=\prod\limits_{i=1}^{3}\S_1(b_i\alpha;N,H)$, а затем воспользовавшись формулами (34) и (35), находим

$$\mathfrak{F}(\alpha)=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)}{b_1b_2\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{G}n^22\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\cdot\S_1(b_3\alpha;N,H)+\mathbb{R}_2=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\frac{\mathfrak{G}n^32\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2,\qquad \mathbb{R}_2\ll\frac{H^3\mathscr{L}^{-195}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^4}.$$

Подставляя значение функции $\mathfrak{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (31), найдём

$$I(a,q)=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\leqslant\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\left(\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\frac{\mathfrak{G}n^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2\right)e(-\lambda N)d\lambda=$$

$$=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3,$$

$$J(H)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\frac{\mathfrak{G}n^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}d\lambda,\qquad \mathbb{R}_3\ll\mathbb{R}_2\cdot\frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}}\ll\frac{H^2\mathscr{L}^{-192}}{b_1^5b_2^5b_3^3}.$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a,q)$ в (30), а затем воспользовавшись явным значением параметров h и A соответственно из формул (27) и (33), получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\sum_{q\leqslant h}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\left(e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3\right)=$$

$$=\frac{J(H)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\sum_{q\leqslant h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)+\mathbb{R}_4,\tag{36}$$

$$\mathbb{R}_4\ll h^2\mathbb{R}_3\ll b_1^4b_2^4b_3^2\mathscr{L}^{188}\cdot\frac{H^2}{b_1^5b_2^5b_3^3\mathscr{L}^{192}}=\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4},$$

где $c_q(-N)$ — сумма Рамануджана. Заменяя сумму по q в (36) близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от h, то есть

$$\sum_{q\leqslant h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)=\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N),$$

$$\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N),\tag{37}$$

$$R(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q>h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N),$$

получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\left(\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N)\right)J(H)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right),\tag{38}$$

5.3. Вычисление интеграла $J(H)$

Воспользовавшись чётностью подинтегральной функции и сделав замену переменных найдём

$$J(H)=2\int\limits_0^{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\frac{\mathfrak{G}n^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}d\lambda=\frac{8H^2}{\pi}\int\limits_{|u|\leqslant 2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}\frac{\mathfrak{G}n^3u}{u^3}du.$$

Заменим последний интеграл по u близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathscr{L}$, и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}^{\infty}\frac{\mathfrak{G}n^3u}{u^3}du\ll\frac{1}{(b_1b_2)^{1,5}\,b_3^3\mathscr{L}^9},$$

получим

$$J(H)=\frac{8H^2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathfrak{G}n^3u}{u^3}du-\int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}^{\infty}\frac{\mathfrak{G}n^3u}{u^3}du\right)=\frac{8H^2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathfrak{G}n^3u}{u^3}du+O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}b_3^3\mathscr{L}^9}\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [30] стр. 174)

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathfrak{G}n^nmu}{u^n}du=\frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1}-\frac{n}{1!}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1}+\ldots\right],$$

при $m=1$ и $n=3$, найдём

$$J(H)=\frac{8H^2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{8}+O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}b_3^3\mathscr{L}^9}\right)=3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}}\right).\tag{39}$$

5.4. Исследование особого ряда $\mathfrak{G}(b_1,b_2,b_3,N)$

Функции $\mathscr{B}_i(q)$, $i=1,2,3$ в формуле (37), являвшиеся произведениями мультипликативных функций

$$\mu\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right),\qquad\left(\varphi\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)\right)^{-1},$$

сами являются мультипликативными, мультипликативной является и сумма Рамануджана $c_q(-N)$. Найдём значение этих функций при $q=p^{\nu}$. Согласно лемме 13, имеем

$$c_{p^{\nu}}(-N)=\begin{cases}\varphi(p^{\nu}), & \text{если } \nu\leqslant ord_p(N);\\ p^{ord_p(N)}\mu(p^{\nu-ord_p(N)}), & \text{если } \nu\geqslant ord_p(N)+1.\end{cases}\tag{40}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$c_{p^{\nu}}(-N)=0,\qquad\text{если}\qquad\nu\geqslant ord_p(N)+2.\tag{41}$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\mathscr{B}_i(p^{\nu})=\frac{\mu\left(\frac{p^{\nu}}{(b_i,p^{\nu})}\right)}{\varphi\left(\frac{p^{\nu}}{(b_i,p^{\nu})}\right)},\qquad(b_i,p^{\nu})=\begin{cases}p^{\nu}, & \text{если } \nu\leqslant ord_p(b_i);\\ p^{ord_p(b_i)}, & \text{если } \nu\geqslant ord_p(b_i),\end{cases}$$

найдём точное значение функции $\mathscr{B}_i(p^{\nu})$. Имеем

$$\mathscr{B}_i(p^{\nu})=\frac{\mu(1)}{\varphi(1)}=1,\qquad\text{если}\qquad\nu\leqslant ord_p(b_i);\tag{42}$$

$$\mathscr{B}_i(p^{\nu})=\frac{\mu\left(p^{\nu-ord(b_i)}\right)}{\varphi\left(p^{\nu-ord(b_i)}\right)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } \nu=ord_p(b_i)+1;\\ 0, & \text{если } \nu\geqslant ord_p(b_i)+2.\end{cases}\tag{43}$$

Для вычисления значения $\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)$ при $q=p^{\nu}$ с помощью формул (40), (41), (42) и (43), множество всех простых чисел $\mathcal{P}$ в зависимости от простых чисел, являющихся делителями числа b_i $i=1,2,3$, с учётом условия

$$(b_i,b_j)=1,\qquad(b_i,N)=1,\qquad1\leqslant i\leqslant j\leqslant3,\tag{44}$$

разобьём на взаимно непересекающиеся подмножества следующим образом

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(b_1) \cup \mathcal{P}(b_2) \cup \mathcal{P}(b_3) \cup \mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3), \tag{45}$$

где $\mathcal{P}(b_i)$ — множество простых чисел, являющиеся делителями числа b_i, $\mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ — множество простых чисел, не являющиеся делителями чисел b_1, b_2 и b_3. Из условия $(b_i, N) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ следует, что

$$\mathcal{P}(b_i) \cap \mathcal{P}(N) = \varnothing, \tag{46}$$

здесь $\mathcal{P}(N)$ — множество простых чисел, являющиеся делителями числа N. Такое равенство для множество $\mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ не выполняется, то есть оно может иметь с $\mathcal{P}(N)$ непустое пересечение.

5.4.1. Вычисление $\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p \in \mathcal{P}(b_i)$

Если $p \in \mathcal{P}(b_i)$, то из определения этого множества и из формулы (46), имеем

$$ord_p(b_i) \geqslant 1, \qquad ord_p(b_j) = 0, \qquad ord_p(b_k) = 0, \qquad ord_p(N) = 0,$$

а из формул (42), (43) и (40), находим, что

$$\mathscr{B}_i(p) = 1, \qquad \mathscr{B}_j(p^\nu) = \mathscr{B}_k(p^\nu) = \frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_{p^\nu}(-N) = \mu(p^\nu).$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu = 1; \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant 2. \end{cases} \tag{47}$$

5.4.2. Вычисление $\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p \in \mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$

Если $p \in \mathcal{P}((\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$, то согласно определению, имеем

$$ord_p(b_1) = ord_p(b_2) = ord_p(b_3) = 0,$$

и из формул (42), (43) и (40), находим, что

$$\mathscr{B}_1(p^\nu) = \mathscr{B}_2(p^\nu) = \mathscr{B}_3(p^\nu) = \frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_p(-N) = \begin{cases} \mu(p), & \text{если } (N,p) = 1; \\ \varphi(p), & \text{если } (N,p) = p. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } \nu = 1 \text{ и } (N,p) = 1; \\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu = 1 \text{ и } (N,p) = p; \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant 2. \end{cases} \tag{48}$$

5.4.3. Точная формула для особого ряда $\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)$

Таким образом из найденных формул (47) и (48) следует, что

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=0, \qquad \text{при} \qquad \nu\geqslant 2, \tag{49}$$

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=\begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } (b_1b_2b_3N,p)=1;\\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } (N,p)=p \text{ и } (b_1b_2b_3,p)=1,\\ & \text{или } (b_i,p)=p \text{ и } (b_jb_k,p)=1. \end{cases} \tag{50}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}G(N,b_1,b_2,b_3)&=\sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)=\prod_p\left(1+\mathscr{B}_1(p)\mathscr{B}_2(p)\mathscr{B}_3(p)c_p(-N)\right)=\\ &=\prod_{(p,b_1b_2b_3N)=1}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid b_1b_2b_3N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=\\ &=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid b_1b_2b_3N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).\end{aligned} \tag{51}$$

5.5. Оценка остаточного члена $R(N)$

Из формул (37), (49) и (50) следует, что $R(N,b_1,b_2,b_3)$ состоит из суммы слагаемых $\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)$, имеющих вид

$$\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)=\prod_{\substack{p\mid q\\(p,b_1b_2b_3N)=1}}\frac{1}{(p-1)^3}\prod_{\substack{p\mid q\\(p,b_1b_2b_3N)=p}}\frac{-1}{(p-1)^2},$$

причём q – число свободное от квадратов, поэтому

$$R(N,b_1,b_2,b_3)=\sum_{q>h}\mu^2(q)\prod_{\substack{p\mid q\\(p,b_1b_2b_3N)=1}}\frac{1}{(p-1)^3}\prod_{\substack{p\mid q\\(p,b_1b_2b_3N)=p}}\frac{-1}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оценкам, найдём

$$\begin{aligned}R(N,b_1,b_2,b_3)&\leqslant\sum_{q>h}\mu^2(q)\prod_{p\mid q}\frac{1}{(p-1)^2}=\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}\prod_{p\mid q}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\leqslant\\ &\leqslant\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}4^{\omega(q)}=\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}q^{\frac{\omega(q)\ln 4}{\ln q}},\end{aligned}$$

где $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q, и воспользовавшись известным неравенством

$$\omega(q)\leqslant\frac{c_\omega\ln q}{\ln\ln q}$$

получим

$$R(N,b_1,b_2,b_3)\leqslant\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}q^{\frac{c_\omega\ln 4}{\ln\ln q}}\leqslant\sum_{q>h}q^{-2+\frac{c_\omega\ln 4}{\ln\ln q}}\ll\frac{1}{h^{1-\varepsilon}}=\frac{1}{\left(b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\right)^{1-\varepsilon}}\ll\frac{1}{\mathscr{L}}, \tag{52}$$

где ε — сколь угодно малое положительное постоянное.

5.6. Вывод асимптотической формулы для $I(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя значение $J(H)$ и $\mathfrak{G}G(N)$ соответственно из формул (39) и (51), а также оценку (52) в (38), найдём

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{1}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3}\left(\mathfrak{G}G(N)+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)\left(3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}}\right)\right)+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right)=$$
$$=\frac{3\mathfrak{G}G(N)\ H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right). \tag{53}$$

5.7. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2)=\int\limits_{\mathfrak{M}_2}\prod_{i=1}^{3}\S_1(b_i\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{2}|\S_1(b_i\alpha;N,H)|d\alpha=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\int\limits_0^1|\S_1(b_i\alpha;N,H)|^2d\alpha\right)^{\frac12}=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{\left|p_1-\frac{N}{3b_i}\right|\leqslant\frac{H}{b_i}}1\right)^{\frac12}=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\pi\left(\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i}\right)-\pi\left(\frac{N}{3b_i}-\frac{H}{b_i}\right)\right)^{\frac12}.$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы, с учётом соотношения

$$\frac{2H}{b_3}\geqslant2(b_1b_2)^{\frac43}b_3^{\frac13}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}=b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac23}\mathscr{L}^{\frac83A+52}\cdot\frac{2\cdot3^{\frac23}}{\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac23}}\geqslant$$
$$\geqslant b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac23}\mathscr{L}^{\frac83A+52}\geqslant\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{7}{12}+\varepsilon},$$

лемму 10, найдём

$$\pi\left(\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i}\right)-\pi\left(\frac{N}{3b_i}-\frac{H}{b_i}\right)\ll\frac{H}{b_i\mathscr{L}},\qquad i=1;\ 2.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|. \tag{54}$$

Применяя к сумме $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ лемму 12, выражаем её через сумму вида $S_1(b_3\alpha; x, y)$, и имея в виду, что $H \leqslant N(b_1b_2)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{-4}$, получим

$$\S_1(b_3\alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathscr{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H^2}{b_3N\mathscr{L}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\mathscr{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^4}. \tag{55}$$

Оценим $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то согласно (28), (27) и (25), имеем

$$\alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$
$$q \leqslant h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}, \qquad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2b_2^2\mathscr{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 2, полагая

$$b = b_3, \qquad x = \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \qquad y = \frac{2H}{b_3}, \qquad \mathscr{L}^A = b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров h и A, затем соотношением $H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}$, имеем

$$\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8}} b_3h\mathscr{L}^{2,25A+81} = \frac{1}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_3^{\frac{3}{8}}\cdot b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\cdot\left(b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3\right)^{\frac{9}{4}}N^{\frac{5}{8}} =$$
$$= \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_1^{\frac{41}{24}}b_2^{\frac{41}{24}}b_3^{\frac{1}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathscr{L}^{\frac{111}{4}} \leqslant \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}}{2b_3} \leqslant \frac{H}{2b_3}.$$

Таким образом условие теоремы 2 выполняется, следовательно согласно этой теореме, находим

$$S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}\frac{\mathfrak{G}n\left(\frac{2\pi\lambda H}{b_3}\right)}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3b_3}\right)+O\left(\frac{H}{b_3\mathscr{L}^{3+\frac{\ln b_1+\ln b_2}{2\ln\mathscr{L}}}}\right) \ll$$
$$\ll \lambda^{-1}+\frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3} \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}.$$

Подставляя эту оценку в (55), найдём

$$|\S_3(\alpha; \mu_3N, H)| \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathscr{L}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\S_3(\alpha; \mu_3N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, в (54), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}}\cdot\frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathscr{L}^4} \ll \frac{H^2}{b_1b_2b_3\,\mathscr{L}^5}. \tag{56}$$

5.8. Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$

Имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int\limits_{\mathfrak{m}} \S_1(b_1\alpha; N, H)\S_1(b_2\alpha; N, H)\S_1(b_3\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, и поступая аналогично как при оценке $I(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\S_1(b_3\alpha; N, H)|. \tag{57}$$

Пользуясь соотношением (55) сумму $\S_1(b_3\alpha; N, H)$, выражая через сумму вида $S_3(\alpha; x, y)$, имеем

$$\S_1(b_3\alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathscr{L}} \left| S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^4}. \tag{58}$$

Оценим $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a, q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad h < q \leqslant \tau,$$

$$h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}, \qquad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2b_2^2\mathscr{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 3, полагая

$$b = b_3, \qquad x = \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \qquad y = \frac{2H}{b_3}, \quad A = 3 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2}{2\ln\mathscr{L}}.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Пользовавшись соотношением $H = (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}$ и значением параметра A, имеем

$$b_3\left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{\frac{8}{3}A+52} = (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60} \cdot \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}b_3}\left(1 + \frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{H}{3^{\frac{2}{3}}b_3}\left(1 + \frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{H}{2b_3},$$

$$b_3\mathscr{L}^{4A+82} = b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94} = \mathscr{L}^{c_1} = h,$$

$$\frac{\left(\frac{2H}{b_3}\right)^2}{\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}}\mathscr{L}^{-4A-82} = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3}\left(b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\right)^{-1} = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}} = \tau.$$

Таким образом условие теоремы 3 выполняется и согласно этой теореме, находим

$$S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) \ll \frac{H}{b_3\mathscr{L}^A} = \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}.$$

Подставляя полученную оценку в (58), а затем в (57), получим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}} \cdot \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^4} = \frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^5}. \tag{59}$$

5.9. Асимптотическая формула для $I(N, H)$

Подставляя найденные оценки для $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно из формул (53), (56) и (59) в (29), а затем воспользовавшись формулой (23) и соотношением

$$\frac{1}{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3} = \frac{1}{(\ln N)^3}\prod_{i=1}^{3}\left(1 + \frac{\ln 3b_i}{\ln N - \ln 3b_i}\right) = \frac{1}{\ln^3 N} + O\left(\frac{\ln\ln N}{(\ln N)^4}\right),$$

получим

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{G}G(b_1, b_2, b_3, N)\ H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3} + O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right) = \frac{3\mathfrak{G}G(b_1, b_2, b_3, N)\ H^2}{b_1b_2b_3(\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2\ln\ln N}{b_1b_2b_3(\ln N)^4}\right).$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.

2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.

3. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.

4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.

5. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.

6. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93 – 114.

7. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New ser. 1994. V. 10, No 4. P. 369 – 387.

8. Baker A. On some diophantine inequalities involving primes // J. Reine Angew. Math. 1967. V. 228. P. 166 – 181.

9. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел — Термез. Изд. «Сурхан нашр». 2021. 160 с.

10. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 4. С. 564 – 572.

11. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

12. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

13. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 3. С. 445 – 456.

14. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 232 – 247.

15. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. .... С. ... – ....

16. Рахмонов З. Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4(81). С. 199 – 223.

17. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242. https://doi.org/10.1134/S0371968517010174,

18. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

19. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

20. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

21. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып 4. С. 281 – 305.

22. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.:, Наука, 1983.

23. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел — М.: Наука. 1971 г.

24. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука. 1987 г. 368 с.

25. Прахар К. Распределение простых чисел — М.: Мир. 1967 г.

26. Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49, Вып. 1. С. 161 – 162.

27. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 7. 391 – 393.

28. Виноградов И. М. Особые варианты методов тригонометрических сумм — М.: Наука. 1976 г.

29. Huxley M. N. On the differences between consecutive primes // Inventiones mathematicae. 1972. V. 15. P. 164—170.

30. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа — М.: Физматгиз. Изд. 2–е. Перев. с англ. 1963. 342 с.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, "The method of trigonometric sums in number theory", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Haselgrove C. B., 1951, "Some theorems in the analitic theory of number", *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.

4. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, "On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)", *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2, pp. 138-147.

5. Zhan, T., 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3, pp. 135 – 170.

6. Jutila, M., 1991, "Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions", *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2, pp. 93 – 114.

7. Jia Chao-hua, 1994, "Three primes theorem in a short interval (VII)//, *Acta Mathematica Sinica. New ser.*, vol. 10, No 4, pp. 369 – 387.

8. Baker A., 1967, "On some diophantine inequalities involving primes", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 228, pp. 166 – 181.

9. Allakov I., 2021, *Otsenka trigonometricheskikh summ i ikh prilozheniya k resheniyu nekotorykh additivnykh zadach teorii chisel. (Russian) [Estimation of exponential sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory]*, Termez. Ed. "Surkhan nashr".

10. Rakhmonov Z. Kh., 2003, "Estermann's ternary problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542.

11. Rakhmonov Z. Kh., & Mirzoabdugafurov K. I., 2008, "Waring's problem for cubes with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

12. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A. Z., 2011, "An asymptotic formula in Waring's problem for fourth powers with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

13. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, "The Estermann cubic problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

14. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., Rakhimov A.O., 2015, "Short Weyl sums and their applications", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247, (in Russian).

15. Rakhmonov, Z. Kh., 2023, "Generalization of Waring's problem for nine almost proportional cubes", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. ..., pp. ... – ..., (in Russian).

16. Rakhmonov, Z. Kh., 2021, "Estimates of short exponential sums with primes in major arcs", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, Is. 4(81), pp. 199 – 223, (in Russian).

17. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211 – 233. doi.org/10.1134/S0081543817010175

18. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49 – 64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558

19. Rahmonov, F. Z., 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56 – 60.

20. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

21. Rakhmonov Z. Kh., Rahmonov F. Z., 2019, "Short cubic exponential sums with Möbius function", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20. № 4(72). pp. 281 – 305, doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-281-305.

22. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

23. Davenport H., 1967, *Multiplicative Number Theory*, Markham Publishing Company, Chigago.

24. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

25. Prachar K., 1957, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag.

26. Rakhmonov Z. Kh., 1994, "Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function", *Russian Math. Surveys*, vol. 49, is. 2, pp. 168–169.

27. Vinogradov, I. M., 1976, *Osobye varianty metoda trigonometricheskikh summ (Russian) [Special variants of the method of trigonometric sums]*, Izdat. "Nauka", Moscow. 119 p.

28. Mardjhanashvili, K. K., 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

29. Huxley M. N., 1972, "On the differences between consecutive primes", *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 164 – 170.

30. Whittaker G. E.,& Watson T. N., 1915, *A Course of Modern Analysis. Part 1. The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 620.

Получено: 20.06.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2023–24-4-299-310

Гладкое многообразие решёток[1]

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: helenash@mail.ru
Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет «МИРЭА» (г. Москва).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

В данной статье рассмотрен общий случай многомерных решёток.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток гораздо сложнее чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток, а так же в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получения теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшем направлением исследованием может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 23 название.

Для цитирования:
Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник, 2023. т. 24, вып. 4, С. 299–310.

[1]Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2023–24-4-299-310

Smooth variety of lattices[2]

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: helenash@mail.ru
Pikhtilkova Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University "MIREA" (Moscow).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the previous work of the authors, the foundations of the theory of smooth manifolds of number-theoretic lattices were laid. The simplest case of one-dimensional lattices was considered.

This article considers the general case of multidimensional lattices.

Note that the geometry of the metric spaces of multidimensional lattices is much more complex than the geometry of ordinary Euclidean space. This is evident from the paradox of the non-additivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox it follows that there is an open problem of describing geodesic lines in spaces of multidimensional lattices, as well as in finding a formula for the length of arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research could be the study of the analytical continuation of the hyperbolic zeta function on spaces of multidimensional lattices. As is known, the analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices was constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytic continuations in the left half-plane in lattice space has not been studied. All of these, in our opinion, are relevant areas for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth variety of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.

[2]The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

1. Введение

В предыдущей работе авторов [20] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

Приведём основные факты из этой работы.

Рассмотрим пространство PR_1 всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}, a_{11} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом (λ), $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{11}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{11}|\lambda)$. Для любой одномерной решётки M её группа автоморфизмов конечна $\mathrm{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток Λ является *открытой μ-окрестностью* решётки M, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица A удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \tag{2}$$

Заметим, что в одномерном случае $I = (1)$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = |a_{11}|$.[3]

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы $A = (a_{11})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{11} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом (λ) имеем

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} | (1 - \mu)\lambda < \lambda_1 < (1 + \mu)\lambda\}.$$

Лемма 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu)-\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1 + \mu) > \lambda_1(1 - \nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

Лемма 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \,|\, \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой μ-окрестностью решётки M при $M = M\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.*

Имеется следующее гомеоморфное отображение $\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$, а числу $\theta \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M)$.

[3] Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\| - A\| = \|A\|$, $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$.

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \tag{3}$$

Таким образом, на PR_1 задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где τ_1 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ-окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_1 всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

Лемма 3. *Топология τ_1 инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования A пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

Как известно (см. [14], стр. 165), множество всех s-мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \tag{4}$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma = A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda = B \cdot \Gamma} \|B - I\|.$$

Применительно к PR_1 имеем, если $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma = A \cdot \Lambda$, $A = \left(\gamma\lambda^{-1}\right)$, $\Lambda = B \cdot \Gamma$, $B = \left(\gamma^{-1}\lambda\right)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \gamma$, тогда $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$, $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$ и $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta = \gamma\lambda^{-1}$, тогда $0 < \theta < 1$ и $2 - \theta < \theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda)$.

Теперь можно записать, как выглядит "симметричный отрезок" решёток длинной 2ρ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда h пробегает числовой отрезок $[-\rho; \rho]$, то $\Lambda(e^h\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Как известно, для любой решётки Λ её взаимная решётка Λ^* определяется из условия

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$.

Лемма 4. *Для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Топологическое пространство PR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух решеток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ-окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток PR_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in PR_1$. Отсюда следует, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [21], стр. 13) пара (U, φ), где $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, решётка $M = M(\lambda)$, а φ — гомеоморфное отображение U на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$

называется системой координат, φ — координатным отображением. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ является картой открытой μ-окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$.

Лемма 5. *Для любых двух открытых пересекающихся μ-окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на интервалы $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$ для любого θ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \bigcap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2))$.*

Лемма 6. *Гомеоморфное отображение $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1$ переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x\in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x\in X} (\ln((1-\mu_x)\lambda_x); \ln((1+\mu_x)\lambda_x)). \tag{6}$$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{M} = PR_1$ следующим образом.

Пусть $M = M(\lambda) \in PR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, координатная функция φ для произвольной решетки $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \in U$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1})$. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат. Для любого $\theta \in (\ln(1-\mu); \ln(1+\mu))$ имеем: $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$. Касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке M будем обозначать через $\mathcal{M}_M$, оно имеет размерность один.

Касательный вектор $\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M \in \mathcal{M}_M$ зададим равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi(M)} \tag{7}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности решётки $M \in \mathcal{M}$. Также будет использоваться обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big|_M = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f). \tag{8}$$

Целью данной работы является рассмотрение общего случая гладкого многообразия решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geqslant 1$. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Топология на пространстве решёток

Пусть $s \geqslant 2$. Рассмотрим пространство PR_s всевозможных полных вещественных решёток Λ в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$. Таким образом, произвольная решётка $\Lambda \in PR_s$ имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s})$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$, где вектора $\vec{\lambda}_1$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s$ образуют линейно независимую систему векторов. Обозначим через $A(\Lambda)$ базисную матрицу решётки Λ:

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix},$$

тогда любая решётка Λ с базисной матрицей $A(\Lambda)$ получается из фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ с помощью линейного преобразования с матрицей $A(\Lambda)$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda), \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) = (m_1, \ldots, m_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} \in \Lambda, \quad \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s.$$

Хорошо известно, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ имеет при $s \geqslant 2$ бесконечно много различных базисов, задаваемых базисными матрицами M из расширенной специальной линейной группы целочисленных матриц порядка s: $SL_s^*(\mathbb{Z})$. Расширенная специальная линейная группа целочисленных матриц порядка s состоит из всех целочисленных матриц M порядка s с $\det M = \pm 1$. Отсюда следует, что все базисные матрицы решётки Λ выражаются через любую базисную матрицу $A(\Lambda)$ и матрицу перехода $M \in SL_s^*(\mathbb{Z})$ по формулам $A_1(\Lambda) = M \cdot A(\Lambda)$.

Будем говорить, что для произвольного $\mu > 0$, $\mu < 1$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток $\Lambda \in PR_s$ является *открытой μ-окрестностью* решётки $M \in PR_s$, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = M \cdot B, \tag{9}$$

для которых невырожденная матрица B удовлетворяет соотношению[4]

$$\|B - I_s\| < \mu. \tag{10}$$

Условие $\mu < 1$ гарантирует, что все матрицы B с условием (10) будут невырожденные (см. [14], стр. 158).

Нам потребуется величина $M(\Lambda)$, которая задается равенством

$$M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

и по аналогии с мерой обусловленности систем линейных уравнений называется мерой обусловленности решётки. В силу дискретности расширенной специальной линейной группы $SL_s^*(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка s существует матрица $A(\Lambda)$ такая, что $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$ (см. [7]). Из равенства $I_s = A \cdot A^{-1}$ и неравенства $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ следует, что всегда $M(\Lambda) \geqslant s$.

Пусть $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц B порядка s с нормой $\|B\| < \varepsilon$ и при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц $B, B^* \in M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$, где $B^* = (I_s + B)^{-1} - I_s$. Согласно лемме 1 из монографии [14] (см. стр. 158) имеем $\|B^*\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Отсюда следует, что $M_{s,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}(\mathbb{R}) \subseteq M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$ и отображение ψ_Λ задано на $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу*

$$\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B), \quad B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_s \,|\, \rho(\Lambda, \Gamma) \leqslant \delta\},$$

где метрика $\rho(\cdot, \cdot)$ задана равенством (4), и для любого $B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)).$$

[4]Матричная норма для s-мерной матрицы $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant s}$ задается равенством $\|B\| = s \cdot \max_{1 \leqslant i,j \leqslant s} |b_{i\,j}|$.

Доказательство. См. [7], теорема 19, стр.68. □

Очевидно, что $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ и $M^*_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ являются открытыми множествами в s^2-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{s^2}$, которое имеет естественную структуру евклидова пространства.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}_s$ всевозможных открытых μ-окрестностей всевозможных полных решёток $M \in PR_s$ с условием $\mu \leqslant \frac{1}{3\cdot M(\Lambda)}$. Так как, очевидно, что $\mathfrak{P}_s$ покрывает всё пространство s-мерных полных решёток PR_s, то множество $\mathfrak{P}_s$ можно рассматривать как предбазу топологии $\mathfrak{T}_s$ на всём пространстве PR_s. А именно, если множество $\mathfrak{B}_s$ получено из $\mathfrak{P}_s$ добавлением произвольных конечных пересечений его элементом, то $\mathfrak{B}_s$ будет базой топологии $\mathfrak{T}_s$, в которой всякое открытое множество $U \in \mathfrak{T}_s$ представимо как объединение открытых μ-окрестностей: существует некоторое множество A элементов из $\mathfrak{B}_s$ такое, что

$$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathfrak{B}_s : U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$

Таким образом, на PR_s задана структура топологического пространства $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$, где $\mathfrak{T}_s$ — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ-окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_s всех рациональных решёток, т.е. решёток M с рациональной базисной матрицей $A(M)$.

Из предыдущего следует, что хаусдорфово топологическое пространство $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$ является локально евклидовым пространством размерности s^2.

3. Дифференцируемая структура на локально евклидовом пространстве PR_s

Рассмотрим произвольную полную решётку $\Lambda \in PR_s$ и открытое множество решёток $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda))$, где $\varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3\cdot M(\Lambda)}$. Взаимнооднозначное отображение $\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B)$ переводит $M^*_{s,\varepsilon_\Lambda}(\mathbb{R})$ в $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda))$, а обратное отображение $\psi^{-1}_\Lambda(\Gamma) = A^{-1}(\Lambda)A(\Gamma) - I_s$ переводит $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda))$ в $M^*_{s,\varepsilon_\Lambda}(\mathbb{R})$. Согласно терминологии из монографии [21] (см. стр. 13) $\psi^{-1}_\Lambda(\Gamma)$ — координатное отображение, функции $x_i = r_i \circ \psi^{-1}_\Lambda$ — координатные функции, пара $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)), \psi^{-1}_\Lambda$ (обозначаемую через $(U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)), x_1, \ldots, x_{s^2})$) — система координат. Нетрудно видеть, что началом данной системы координат является решётка Λ.

Мы имеем очевидное равенство

$$\bigcup_{\Lambda\in PR_s} U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) = PR_s.$$

Рассмотрим $\psi^{-1}_\Lambda \circ \psi_\Gamma$.

Так как $\psi^{-1}_\Lambda : U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \mapsto M^*_{s,\varepsilon_\Lambda}(\mathbb{R})$, а $\psi_\Gamma : M^*_{s,\varepsilon_\Gamma}(\mathbb{R}) \mapsto U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma))$, то

$$\psi^{-1}_\Lambda \circ \psi_\Gamma : \psi^{-1}_\Gamma \left(U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma)) \right) \mapsto M^*_{s,\varepsilon_\Lambda}(\mathbb{R}).$$

Из определения множеств $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda))$ и $U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma))$ следует, что

$$U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma)) = \{\Delta \in PR_s \,|\, \rho(\Lambda, \Delta) \leqslant \ln(1+\varepsilon_\Lambda),\ \rho(\Gamma, \Delta) \leqslant \ln(1+\varepsilon_\Gamma)\}.$$

Таким образом, если

$$\Delta \in U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma)),$$

то $\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D$, $\Gamma = \Delta \cdot B_1$, $\Lambda = \Delta \cdot D_1$ и $\max(\|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\|) \leqslant \varepsilon_\Gamma$, $\max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|) \leqslant \varepsilon_\Delta$. Отсюда следует, что $B = I_s + C$, $B_1 = I_s + C_1$, $B \cdot B_1 \in SL_s^*(\mathbb{Z})$, $\|B \cdot B_1\| = \|I_s + C + C_1 + C \cdot C_1\|$, $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \leqslant 2\varepsilon_\Gamma + \varepsilon_\Gamma^2 \leqslant \frac{5}{4}$. Матрица $C + C_1 + C \cdot C_1$ — целочисленная, поэтому, если она ненулевая, то $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \geqslant s \geqslant 2$, что приводит к противоречию. Следовательно $B_1 = B^{-1}$. Аналогично получим, что $D_1 = D^{-1}$. Отсюда вытекает, что $\Gamma = \Lambda \cdot D \cdot B_1$, $\Lambda = \Gamma \cdot B \cdot D_1$ и

$$U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma)) =$$
$$= \{\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D \,|\, \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leqslant \varepsilon_\Lambda,\ \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leqslant \varepsilon_\Gamma\}.$$

Применяя ψ_Γ^{-1} к $U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma))$ получим

$$\psi_\Gamma^{-1}\left(U(\Lambda, \ln(1+\varepsilon_\Lambda)) \bigcap U(\Gamma, \ln(1+\varepsilon_\Gamma))\right) =$$
$$= \{A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s \,|\, \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D, \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leqslant \varepsilon_\Lambda,\ \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leqslant \varepsilon_\Gamma\}.$$

Далее находим

$$\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s) = \psi_\Lambda^{-1}(\Gamma \cdot A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B)) = \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Gamma \cdot B)) =$$
$$= \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)) = \psi_\Lambda^{-1}(\Lambda \cdot D) = A^{-1}(\Lambda)A(\Lambda \cdot D) - I_s.$$

Для матриц D из малой окрестности единичной матрицей I_s введём обозначение $\varepsilon(D)$, где $\varepsilon(D) = \max(\|D - I_s\|, \|D^{-1} - I_s\| = \max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|)$.

Лемма 7. *Пусть $\varepsilon(D) \leqslant \varepsilon_\Lambda$, тогда справедливо неравенство*

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leqslant (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2)\min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)) \leqslant \frac{13}{18}.$$

Доказательство. По определению матрицы $A(\Lambda)$ она удовлетворяет соотношениям $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$. Аналогично, имеем $\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)$, $M(\Lambda \cdot D) = \min_{\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A \cdot D} \|A \cdot D\| \cdot \|(A \cdot D)^{-1}\| = \|A(\Lambda \cdot D)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda \cdot D)\|$.

Для любой невырожденной матрице A имеем:

$$\|A \cdot D\| = \|A + A \cdot (D - I_s)\| \leqslant \|A\| \cdot (1 + \varepsilon(D)),$$
$$\|(A \cdot D)^{-1}\| = \|D_1 \cdot A^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)),$$
$$\|A\| = \|A \cdot D - A \cdot D \cdot (I_s - D_1)\| \leqslant \|A \cdot D\| \cdot (1 + \varepsilon(D)),$$
$$\|A^{-1}\| = \|D_1 \cdot A^{-1} + (D - I_s) \cdot (A \cdot D)^{-1}\| \leqslant \|(A \cdot D)^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)).$$

Отсюда следует

$$M(\Lambda \cdot D) \leqslant \|A(\Lambda) \cdot D\| \cdot \|D_1 \cdot A^{-1}(\Lambda)\| \leqslant M(\Lambda) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Аналогично, имеем

$$M(\Lambda) \leqslant \|A(\Lambda \cdot D) \cdot D_1\| \cdot \|D \cdot A^{-1}(\Lambda \cdot D)\| \leqslant M(\Lambda \cdot D) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Отсюда следует, что

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leqslant (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2)\min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)).$$

Так как $\varepsilon(D) \leqslant \varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$, то

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \cdot M(\Lambda)} \leqslant \frac{13}{18}.$$

Таким образом, неравенство для $|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)|$ доказано. □

Из доказанной леммы мы получаем равенство $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(B - I_s) = D - I_s$ и матрицы B и D связаны равенством $B = A^{-1}(\Gamma)A(\Lambda)D$. Так как матрицы B и D связаны линейным соотношением, то отображение $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$ — бесконечно дифференцируемое и тем самым задано гладкое многообразие s-мерных решёток (см. [21], стр. 14).

4. Об основных функциях на решётках

К числу основных функций на решётках мы относим детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, меру обусловленности решётки, гиперболическую дзета-функцию решётки.

Непрерывность детерминанта решётки очевидна и следует из равенства $\det \Lambda = |\det A(\Lambda)|$. Непрерывность гиперболического параметра решётки на метрическом пространстве решёток доказана в работе [22].

Непрерывность меры обусловленности решётки следует из леммы 7.

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки в правой полуплоскости $\sigma > 1$ доказана в работе [10].

Вопрос об их дифференцируемости мы рассмотрим в последующих статьях.

5. Заключение

В данной работе построено гладкое многообразие решёток. Для построения гладкого многообразия сдвинутых решёток потребуются дополнительные технические приемы. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80.

7. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72—105.

9. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

10. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.

13. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

14. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

15. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

18. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета–функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.

20. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.

21. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.

22. Т. С. Шмелева. Непрерывность гиперболического параметра решеток // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–99.

23. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, "Ordinary differential equations", *M .: Science*, 240 p.

2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4-–107.

3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.

4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.

5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.

6. Dobrovolsky N. M. 2001, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis", *Sb. IV International conference „Modern problems of number theory and its applications "dedicated to the 180-th anniversary of P. L. Chebyshev and 110-th anniversary of I. M. Vinogradov.* Tula, 10 — 15 September, *Actual problems Ch. I. M. MGU.* pp. 54–80.

7. Dobrovol'skii, N. M. 2005, "Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications]", *Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L. N. Tolstogo*, Tula, Russia.

8. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, pp. 72–105.

9. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, "On the continuity of the zeta function of a grid with weights", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.

10. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, "Number of lattice points in the hyperbolic cross", *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.

12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, "On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross", *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.

13. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices", *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.* Vol. 2. Iss. 1. *Tula: Publishing house of Tula State University*, p. 77–87.

14. Kassels, D. 1965, "Vvedenie v geometriyu chisel [Introduction to the geometry of numbers]", *Mir, Moscow*, Russia.

15. A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices – II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

16. Korobov, N.M. 1963, “Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]”, *Fizmat-giz, Moscow*, Russia.

17. Korobov, N.M. 2004, “Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]”, 2nd ed, *MTSNMO, Moscow*, Russia.

18. Rebrova, I. YU. 1998, “The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99—108.

19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, “Algebraic lattices in the metric space of lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.

20. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil’kova, N. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii, 2020, “Smooth manifold of one-dimensional lattices” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

21. Warner F. 1987, “Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups”, *M .: Mir*, 304 p.

22. Shmeleva, T. S., 2009, “Continuity of the hyperbolic parameter of lattices” , *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, Iss. 3. pp. 92–99.

23. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol’skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices” . *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications.* Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено: 20.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-24-4-311-324

О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II[1]

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тер-Гукасова Надежда Константиновна — специалист по кадровому делопроизводству отдела по кадровому администрированию управления персонала НИУ ВШЭ (г. Москва).
e-mail: nadj_nadj@mail.ru

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В 2002 году В. А. Быковский получил принципиально новые оценки снизу и сверху, которые совпадали по порядку.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценки гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру даётся модифицированная оценка Быковского через минимальные решения линейного сравнения.

Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях дополняется обобщённой леммой Коробова об оценки остаточного ряда и рядом других модификаций в доказательстве теоремы Бахвалова—-Коробова, что и позволило доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценки гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов, количественная мера качества сетки.

Библиография: 30 названий.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:
Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II// Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 4, С. 311–324.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-24-4-311-324

On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas[2]

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Ter-Gukasova Nadezhda Konstantinovna — HR Clerk of the HR Administration Department of the HSE Personnel Department (Moscow).
e-mail: nadj_ nadj@mail.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior Researcher, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the theory of the hyperbolic zeta function of lattices, a significant role is played by the Bakhvalov theorem, in which the magnitude of the zeta function of the lattice of linear comparison solutions is estimated through the hyperbolic lattice parameter.

In N. M. Korobov's 1963 monograph, this theorem is proved by a method different from the original work of N. S. Bakhvalov. In this method, the central role is played by the lemma about the number of linear comparison solutions in a rectangular area.

In 2002, V. A. Bykovsky obtained fundamentally new estimates from below and from above, which coincided in order.

The paper gives new estimates of the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions. This allows us to prove the strengthened Bakhvalov—Korobov—Bykovsky theorem on the estimate of the hyperbolic zeta function of the lattice of linear comparison solutions.

The difference between the theorem on the number of lattice points of solutions to linear comparison in rectangular areas and the corresponding Korobov lemma is that instead of an estimate through the ratio of the volume of a rectangular area to the hyperbolic parameter, a modified Bykovsky estimate is given through minimal solutions to linear comparison.

The use of the theorem on the number of lattice points of solutions to linear comparison in rectangular domains is supplemented by the generalized Korobov lemma on estimates of the residual series and a number of other modifications in the proof of the Bakhvalov—Korobov

[2]The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

theorem, which made it possible to prove the strengthened Bakhvalov—Korobov—Bykovsky theorem on estimates hyperbolic zeta function of the lattice of linear comparison solutions.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients, quantitative measure of grid quality

Bibliography: 30 titles.

For citation:
N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 311–324.

1. Введение

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $(a_j, N) = 1$ $(j = 1, \ldots, s)$, и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| << \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad \text{(Н. С. Бахвалов [2], Н. М. Коробов [17]).}$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ $(\alpha > 1)$ решётки и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda(\vec{a}, N)}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}}{}' \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{1}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключен набор $\vec{m} = \vec{0}$, а символ Коробова $\delta_N(a)$ задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Усеченным норменным спектром решётки Λ называется множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением усечённой нормы. Порядок точки λ усеченного норменного спектра обозначим через $q(\lambda)$.

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)^{-\alpha} = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda)\lambda^{-\alpha}. \tag{2}$$

В работе [30] было получено усиление леммы Н. М. Коробова о числе решений линейного сравнения в прямоугольных областях, что позволило усилить классическую теорему Н. С. Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функции целочисленной решётки решений линейного сравнения.

Дальнейший анализ проблемы оценки числа решений линейного сравнения в прямоугольных областях и сопоставления с результатами В. А. Быковского из работы [4] показали, что можно объединить подходы Н. М. Коробова доказательства теоремы Н. С. Бахвалова с подходами В. А. Быковского.

Цель работы — получить новую оценку сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях и усиленную теорему Бахвалова — Быковского.

2. Квазипорядок на $\mathbb{R}^s$ и множества Быковского

Рассмотрим на $\mathbb{R}^s$ квазипорядок $\vec{x} \leqslant \vec{y}$, заданный выполнением s соотношений $|x_\nu| \leqslant |y_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Ясно, что отношение

$$\theta = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^s, \vec{x} \leqslant \vec{y} \& \vec{y} \leqslant \vec{x}\}$$

является отношением эквивалентности и фактормножество $\mathbb{R}^s/\theta$ будет частично упорядоченным множеством изоморфным $\mathbb{R}^s_+$, где $\mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел (См. [22], стр. 37).

Будем через $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s$, где для вещественных x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$, обозначать усеченную норму $\vec{x}$. Ясно, что из $\vec{x} \leqslant \vec{y}$ следует $q(\vec{x}) \leqslant q(\vec{y})$.

Так как решётка $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \tag{3}$$

является подмножеством $\mathbb{R}^s$, то на ней задается индуцированный квазипорядок. Можно рассмотреть отношение эквивалентности $\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$, которое задается равенством

$$\theta_{\Lambda(\vec{a},N)} = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), \vec{x} \leqslant \vec{y} \& \vec{y} \leqslant \vec{x}\},$$

но фактормножество $\Lambda(\vec{a}, N)/\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$ в случае произвольной решётке решений линейного сравнения непросто описать. Для удобства два решения $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$, принадлежащих $\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$, будем называть ассоциированными и писать $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$. Если из $\vec{0} < \vec{m}_1 \leqslant \vec{m}_2$ следует $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$, то $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ называются минимальными относительно квазипорядка.

Для простоты изложения мы будем предполагать, что все коэффициенты a_ν взаимно просты с модулем N: $(a_\nu, N) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Именно этот случай наиболее важен для метода оптимальных коэффициентов, так как это соглашение входит в определение параллелепипедальных сеток Коробова.

В работе [4] В. А. Быковский ввёл понятие минимального решения сравнения (3). Ненулевое решение называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения $(m'_1, \ldots, m'_s)$, для которого

$$|m'_1| \leqslant |m_1|, \ldots, |m'_s| \leqslant |m_s|; \quad |m'_1| + \ldots + |m'_s| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Другими словами, ненулевое решение $\vec{m}$ называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения $\vec{m}'$ такого, что $\vec{m}' < \vec{m}$. Таким образом, относительно квазипорядка на решётке $\Lambda(\vec{a}, N)$ минимальное решение $\vec{m}$ является просто минимальным элементом решётки.

Отметим, что в работе [5] было ведено другое понятие — локальный минимум второго рода, так как это требовалось для обобщения результатов В. А. Быковского на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Будем множество всех минимальных решений $\vec{m}$ решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ обозначать через $B(\Lambda(\vec{a}, N))$ и называть минимальным множеством Быковского. Если $\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$, то и $-\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\overline{x_j} < \det \Lambda$ $(j = 1, \ldots, s)$. Более того, можно утверждать, что $\overline{x_1} \ldots \overline{x_s} < N$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant r,\ r = r(\Lambda))$ есть все минимальные решения сравнения (3) из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого минимального решения $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является минимальным решением, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество минимальных решений, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взято ровно одно. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \bigcup -B^*(\Lambda). \tag{4}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предполагать, что нумерация минимальных решений согласована с разбиением (4): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Введем для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s.

Будем предполагать,что для выбранной нумерации выполнено дополнительное соглашение $r(\vec{x}_1) \leqslant r(\vec{x}_2) \leqslant \ldots \leqslant r(\vec{x}_{r^*})$. Ясно, что $r^* = r_1^* + \ldots + r_s^*$, где r_ν^* — количество минимальных решений из $B^*(\Lambda)$ с индексом ν. Нетрудно видеть, что с единичным индексом имеется ровно s минимальных решений: $\vec{x}_1 = (N, 0, \ldots, 0)$,. . . ,$\vec{x}_s = (0, \ldots, 0, N)$.

Минимальные решения индекса 2 можно перечислить с помощью цепных дробей согласно результатам работы [12].

Обозначим через $B_\nu^*(\Lambda)$ множество минимальных решений с индексом ν. Ясно, что $B^*(\Lambda) = \bigcup_{\nu=1}^s B_\nu^*(\Lambda)$.

Аналогично, решётку решений $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ представим как объединение множеств точек индекса ν: $\Lambda = \{\vec{0}\} \bigcup (\bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu)$, где $\Lambda_\nu = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, r(\vec{x}) = \nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Ясно, что справедливо представление для гиперболической дзета-функции решётки:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\vec{x} \in \Lambda_\nu} \frac{1}{(\overline{x_1} \ldots \overline{x_s})^\alpha}.$$

Ещё Н. М. Коробов в 1959 году в работах [13, 14] установил, что остаточный ряд в гиперболической дзета-функции решётки решений $\Lambda(\vec{a}, N)$, в котором хотя бы одна компонента по модулю не меньше N, оценивается как $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$.

В соответствии с этим результатом Н. М. Коробова положим $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^* \bigcup \Lambda_\nu^{**}$, где $\Lambda_\nu^* = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1\leqslant j\leqslant s} |x_j| < N\}$, $\Lambda_\nu^{**} = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1\leqslant j\leqslant s} |x_j| \geqslant N\}$. Кроме этого, положим $\Lambda^* = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^*$, $\Lambda^{**} = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^{**}$.

Сделаем ещё несколько важных замечаний и обозначений.

Во-первых, для любого $j > s$ и минимального решения $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ имеем $\max_{1\leqslant\nu\leqslant s} |x_{\nu\, j}| \leqslant \frac{N}{2}$.

Во-вторых, будем говорить что вектора $\vec{P}$ и $\vec{x}$ подобны: $\vec{P} \simeq \vec{x}$, если $r(\vec{P}) = r(\vec{x})$ и нулевые координаты у обоих векторов совпадают.

В-третьих, для любого $\vec{P}$ с $\max_{1\leqslant j\leqslant s} |P_j| < N$ и индекса ν через $b(\vec{P})$ обозначим минимальное решение $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$ такое, что $\vec{P} \simeq \vec{x}_j$, $\vec{x}_j \leqslant \vec{P}$ и величина $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)}$ имеет минимальное значение. Отсюда следует, что $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)} \leqslant \frac{q(\vec{P})}{q(\Lambda)}$, так как для гиперболического параметра справедливо равенство $q(\Lambda) = \min_{\vec{x}_j \in B^*} q(\vec{x}_j)$.

3. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^{s} [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$.

Лемма 1. *Для любых целых b и λ справедливо равенство*

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

Доказательство. См. [30]. □

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha} \leqslant \sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, пользуясь леммой 1, получим

$$\sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} = \sum_{b=1}^{\infty} \left(\sum_{m_j=bN}^{bN+N-1} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} + \sum_{m_j=-(bN+N-1)}^{-bN} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \right),$$

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha} = 2\sum_{b=2}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} \leqslant \sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leqslant 2\sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

□

Обозначим для целого вектора $\vec{n}$ с индексом $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu$ и целого вектора $\vec{\lambda} + \vec{1} \simeq \vec{n} - \vec{1}$ через $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$ число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod N, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) \bigcap \Lambda_\nu^*, \vec{m} \simeq \vec{n} - \vec{1}. \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T_\nu(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $r(\vec{n}-\vec{1})=\nu>1$, $b(\vec{n}-\vec{1})=\vec{x}_j$ *и* $n_\mu=1$, $\lambda_\mu=-1$ *при* $x_{\mu j}=0$. *Тогда справедлива оценка*

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil, \tag{7}$$

где $\lceil x\rceil$ *— наименьшее целое число не меньшее вещественного числа* x.

Доказательство. Для любого вектора $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_s)$ положим $|\vec{x}|=(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_s})$. Определим величины $k_\mu=\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil$ для $|x_{\mu j}|>0$, $k_\mu=1$ для $x_{\mu j}=0$. Положим для $\vec{l}=(l_1,\ldots,l_s)$, что $\vec{l}\cdot\vec{x}=(l_1x_1,\ldots,l_sx_s)$.

Покроем прямоугольный параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})$ объединением прямоугольных параллелепипедов вида $\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|)$, где целые $0\leqslant l_1\leqslant k_1-1,\ldots,0\leqslant l_s\leqslant k_s-1$:

$$\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})\subseteq\bigcup_{\vec{0}\leqslant\vec{l}\leqslant\vec{k}-\vec{1}}\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|).$$

Отсюда следует, что

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\sum_{\vec{0}\leqslant\vec{l}\leqslant\vec{k}-\vec{1}}T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N). \tag{8}$$

Покажем, что $T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N)\leqslant 1$. Допустим, что число решений системы

$$\begin{cases} a_1m_1+\ldots+a_sm_s+\lambda\equiv 0 \pmod N,\\ \vec{m}\in\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|)\bigcap\Lambda^*_\nu,\vec{m}\simeq|\vec{x}_j|-\vec{1}\end{cases} \tag{9}$$

больше 1. Тогда, согласно определению величины $\delta_N(m)$, числа $a_1m_1+\ldots+a_sm_s+\lambda$ и $a_1m'_1+\ldots+a_sm'_s+\lambda$ будут кратны N. Но тогда и их разность также будет кратна N:

$$a_1(m_1-m'_1)+\ldots+a_s(m_s-m'_s)\equiv 0 \pmod N.$$

Так как системы $m_1,\ldots,m_s$ и $m'_1,\ldots,m'_s$ различны, то система $m_1-m'_1,\ldots,m_s-m'_s$ будет нетривиальным решением сравнения (3) и, следовательно,

$$|m_1-m'_1|<\overline{x_{1j}},\ldots,|m_s-m'_s|<\overline{x_{sj}},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает что $T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N)\leqslant 1$.

Пользуясь доказанным неравенством, получим

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant k_1\ldots k_s=\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil.$$

□

Следствие 1. *Пусть* $r(\vec{n}-\vec{1})=\nu>1$, *минимальное решение* $\vec{x}_j\simeq\vec{n}-\vec{1}$, $\vec{x}_j\leqslant\vec{n}$ *и* $n_\mu=1$, $\lambda_\mu=-1$ *при* $x_{\mu j}=0$. *Тогда справедлива оценка*

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil. \tag{10}$$

Доказательство. Доказательство следствия дословно повторяет доказательство теоремы. □

4. Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова — Коробова — Быковского для произвольного модуля N. В соответствии с разбиением $\Lambda \setminus \{\vec{0}\} = \Lambda^* \bigcup \Lambda^{**}$ получим:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)=\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)+\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha), \quad \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda^*} \frac{1}{(\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^\alpha}, \quad \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda^{**}} \frac{1}{(\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^\alpha}.$$

Лемма 3. **Обобщённая лемма Коробова.** *Справедливы неравенства*

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geqslant \frac{2(\zeta(\alpha)-1)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu, \tag{11}$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu. \tag{12}$$

Доказательство. Из определения величины $\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha)$ следует, что

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{|m_1|\geqslant N} \sum_{m_2,\dots,m_s\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1a_1+\dots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{s-2} \sum_{|m_1|,\dots,|m_\nu|<N} \sum_{|m_{\nu+1}|\geqslant N} \sum_{m_{\nu+2},\dots,m_s\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1a_1+\dots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha} +$$
$$+ \sum_{|m_1|,\dots,|m_{s-1}|<N} \sum_{|m_s|\geqslant N} \frac{\delta_N(m_1a_1+\dots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Воспользуемся леммой 2, получим

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha}\left((1+2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2}\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^\nu (1+2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^{s-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\left((1+2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2}\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^\nu (1+2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^{s-1}\right).$$

Далее заметим, что

$$\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha} = \zeta(\alpha) - \alpha\int_N^\infty \frac{[x]-N+1}{x^{\alpha+1}}dx,$$
$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} = \alpha\int_N^\infty \frac{x-N}{x^{\alpha+1}}dx \leqslant \alpha\int_N^\infty \frac{[x]-N+1}{x^{\alpha+1}}dx \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\int_N^\infty \frac{x-N+1}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha},$$
$$\zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^\alpha} \leqslant \sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha} \leqslant \zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geqslant \frac{2(\zeta(\alpha)-1)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu,$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu.$$

□

Перейдём к изучению величины $\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)$, для которой справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\nu=2}^{s} \zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha),$$

так как $\Lambda_1^* = \emptyset$.

Пусть $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$ — произвольное минимальное решение индекса ν. Обозначим через $\vec{P}(\vec{x}_j)$, заданный равенствами $P_\mu = 0$, если $x_{\mu\, j} = 0$, и $P_\mu = N-1$, если $|x_{\mu\, j}| > 0$. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) = \sum_{\vec{m}\in\Lambda_\nu^*} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant \sum_{\vec{x}_j\in B_\nu^*(\Lambda)} \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}. \quad (13)$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) \leqslant \left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu \sum_{\vec{x}_j\in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}.$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi(m_1,\ldots,m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1,\ldots,m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{x}_j > \vec{m} \text{ или } \vec{m} > \vec{P}(\vec{x}_j), \\ \delta_N(a_1m_1+\ldots+a_sm_s), & \text{если } \vec{x}_j \leqslant \vec{m} \leqslant \vec{P}(\vec{x}_j). \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \prod_{|x_{\mu\, j}|>0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{k}\leqslant\vec{m}} \delta_N(a_1k_1+\ldots+a_sk_s).$$

Воспользуемся следствием для оценки внутренней суммы, получим:

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j), m_1,\ldots,m_s\geqslant 0} \prod_{|x_{\mu\, j}|>0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) 2\left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu\, j}|}\right\rceil =$$

$$= 2^\nu \prod_{|x_{\mu\, j}|>0} \sum_{m_\mu=|x_{\mu\, j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu\, j}|}\right\rceil.$$

Для внутренней суммы имеем:

$$\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil\leqslant\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left(\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\frac{m_\mu}{m_\mu^\alpha}-\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|+1}^{N}\frac{m_\mu-1}{m_\mu^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\frac{|x_{\mu j}|}{|x_{\mu j}|^\alpha}+\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|+1}^{N-1}\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{N-1}{N^\alpha}\right).$$

Далее заметим, что:

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)=\int_{x+1}^{N}\frac{1}{u^\alpha}du\leqslant\sum_{m=x+1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\int_{x}^{N-1}\frac{1}{u^\alpha}du=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x_{\mu j}|^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}}\right)-\frac{N-1}{N^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}.$$

Окончательно для $\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha)$ имеем:

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)}\frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\right)\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}=\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha)\leqslant\sum_{\vec{x}_j\in B_\nu^*(\Lambda)}\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu.$$

□

Теорема 2. *Гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)<\sum_{\nu=2}^{s}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu\sum_{\vec{x}_j\in B_\nu^*(\Lambda)}\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}+$$

$$+\frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left(1-\frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu. \tag{14}$$

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 3 и 4. □

5. Заключение

Оценка, полученная в теореме 2, точнее чем общая оценка работы [5], обобщающей результаты В. А. Быковского [4].

В работе [30] дается достаточно подробный обзор работ [1] — [29], связанных с данной тематикой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.

4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

5. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.

7. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.

8. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.

9. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.

10. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

11. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41—48.

12. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

13. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

14. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

15. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

17. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

18. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

19. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.

20. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.

21. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

22. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с. — (Справ. мат. б-ка).

23. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

25. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

26. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

27. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

28. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.

29. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 22–29.

30. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova, L.P. 2007, "Algorithms for finding the optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

4. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

5. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" *Chebyshevsky sbornik*, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

7. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", *Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

8. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

9. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

11. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

12. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

13. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.

14. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

15. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012..

16. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow, Russia.

17. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, *Matematicheskie zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

18. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

19. Korobov, N.M. 2002, “About one estimation in the method of optimal coefficients”, Tezisy IV Vserossijskoj konferentsii “Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki”, pp. 39–40.

20. N. M. Korobov, N. M. Dobrovolsky 2007, “Optimality criteria and algorithms for searching for optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, issue. 4(24) pp. 105 – 128.

21. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO “Yanus”, Moscow, Russia.

22. Melnikov O.V., Remeslenikov V.N., Romankov V.A. et al. General algebra. T. 1. — M.: Science. Ch. ed. Phys.-Math. lit., 1990. — 592 p. — (Reference mat. b-ka).

23. Rebrov, E.D. 2009, “Dobrovolskaya’s algorithm and numerical integration with the stopping rule”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, issue. 1(29). pp. 65–77.

24. Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D. 2010, “On the numerical integration algorithm with the stopping rule”, Proceedings of the 7th international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications". Tula, Iz-vo TSPU im. L. N. Tolstoy. P. 153 — 158.

25. Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D. 2011, “POIVS TMK: Integration algorithms with a stopping rule”, International scientific and practical conference "Multiscale modeling of structures and nanotechnology, dedicated to the 190th anniversary of the birth of academician Pafnutiy Lvovich Chebyshev, the centenary of the birth of academician Sergei Vasilyevich Vonsovsky and 80 - anniversary of the birth of corresponding member Viktor Anatolyevich Buravikhin" Tula, Iz-vo TSPU im. L. N. Tolstoy. P. 153 — 158.

26. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov 2012. “Algorithms fot computing optimal coefficients”, Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, p. 22 — 24.

27. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D., Rebrova I. Yu. 2012, “Some issues of the number-theoretic method in approximate analysis”, Proceedings X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications" *Scientific notes of Oryol State University*. No. 6. Part 2. P. 90 — 98.

28. Seregina N. K. 2013. “Algorithms for numerical integration with the stopping rule”, *News of TulGU. Natural Sciences*. Issue. 3. P. 1293 — 201.

29. Seregina N.K. 2015. “On a quantitative measure of the quality of optimal coefficients”, *News of TulSU. Natural Sciences*. Issue. 1. pp. 22–29.

30. N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol’skii, N. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

Получено: 20.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-325-334

О диофантовых неравенствах с простыми числами

Д. В. Горяшин, С. А. Гриценко

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет (г. Москва).
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru
Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет (г. Москва).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются две задачи о приближении заданного положительного числа N суммой двух простых чисел, а также суммой простого числа и двух квадратов простых чисел.

В 2001 г. Р. Бейкер, Г. Харман и Дж. Пинтц доказали для числа решений неравенства $|p - N| \leqslant H$ в простых числах p правильную по порядку оценку снизу при $H \geqslant N^{21/40+\varepsilon}$, где ε — произвольно малое положительное число. С использованием этого результата и плотностной техники в настоящей работе доказана оценка снизу для числа решений неравенства $|p_1 + p_2 - N| \leqslant H$ в простых числах p_1, p_2 при $H \geqslant N^{7/80+\varepsilon}$.

Кроме того, на основе плотностной техники доказана также оценка снизу для числа решений неравенства $\left|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N\right| \leqslant H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при $H \geqslant N^{7/72+\varepsilon}$.

Ключевые слова: диофантовы неравенства, простые числа, плотностные теоремы.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горяшин, С. А. Гриценко. О диофантовых неравенствах с простыми числами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 325–334.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-325-334

On the diophantine inequalities with prime numbers

D. V. Goryashin, S. A. Gritsenko

Goryashin Dmitry Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru
Gritsenko Sergei Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Abstract

The article deals with two problems of approximating a given positive number N by the sum of two primes, and by the sum of a prime and two squares of primes.

In 2001, R. Baker, G. Harman, and J. Pintz proved for the number of solutions of the inequality $|p - N| \leqslant H$ in primes p a lower bound for $H \geqslant N^{21/40+\varepsilon}$, where ε is an arbitrarily small positive number. Using this result and the density technique, in this paper we prove a lower bound for the number of solutions of the inequality $|p_1 + p_2 - N| \leqslant H$ in prime numbers p_1, p_2 for $H \geqslant N^{7/80+\varepsilon}$.

Also based on the density technique, we prove a lower bound for the number of solutions of the inequality $\left|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N\right| \leqslant H$ in prime numbers p_1, p_2 and p_3 for $H \geqslant N^{7/72+\varepsilon}$.

Keywords: diophantine inequalities, prime numbers, density theorems.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
D. V. Goryashin, S. A. Gritsenko, 2023, "On the diophantine inequalities with prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 325–334.

1. Введение

Хорошо известно, что в предположении справедливости гипотезы Римана к заданному положительному числу N можно подойти простым числом p на расстояние $O(N^{1/2+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$. В книге [1] доказано без использования гипотезы Римана, что к числу N можно подойти на расстояние $O(N^{7/12+\varepsilon})$. Этот результат получен на основе применения явных формул для функции Чебышёва и плотностных теорем. В 2001 г. Р. Бейкер, Г. Харман и Дж. Пинтц получили для числа решений неравенства $|p - N| \leqslant H$ в простых числах p правильную по порядку оценку снизу при условии $H \geqslant N^{21/40+\varepsilon}$ [2].

Интерес представляет и задача о приближении заданного положительного числа N суммой двух простых чисел. Доказано, что неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \leqslant H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 при $H \geqslant N^{1/6+\varepsilon}$ (см. задачу 4а к главе VII монографии А.А.Карацубы [3]).

Отметим, что если в предположении справедливости гипотезы Римана сначала подходить к числу N одним простым числом p_1, а затем к числу $N - p_1$ — другим простым числом p_2, то получится разрешимость неравенства (1) лишь при $H \geqslant N^{1/4+\varepsilon}$.

В 1975 г. Х. Монтгомери и Р. Вон в статье [4] доказали разрешимость неравенства (1) при $H \geqslant N^{7/72+\varepsilon}$.

В настоящей работе доказана правильная по порядку оценка снизу для числа решений неравенства (1) при $H \geqslant N^{7/80+\varepsilon}$ с использованием плотностной техники и результата Р. Бейкера, Г. Хармана и Дж. Пинтца [2]. Кроме того, на основе плотностной техники доказана также оценка снизу для числа решений неравенства $\left|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N\right| \leqslant H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при $H \geqslant N^{7/72+\varepsilon}$.

Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_1 \geqslant N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$. Тогда при $H \geqslant N_1^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geqslant N^{\frac{7}{80}+\varepsilon}$ для числа $J_1(N, H)$ решений неравенства (1) в простых числах p_1 и p_2 справедлива оценка*

$$J_1(N, H) \gg \frac{N_1 H}{\ln^2 N}.$$

Теорема 2. *Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_2 \geqslant N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$. Тогда при $H \geqslant N_2^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geqslant N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$ для числа $J_2(N,H)$ решений неравенства*

$$\left|p_1^2+p_2^2+p_3-N\right| \leqslant H$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 справедлива оценка

$$J_2(N,H) \gg \frac{N_2 H}{\ln^3 N}.$$

2. Обозначения

В статье используются следующие стандартные обозначения: $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\psi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)$ — функция Чебышёва, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\rho=\beta+i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, лежащие в критической полосе $0<\operatorname{Re} s<1$, $N(\sigma,T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $|\operatorname{Im} s|\leqslant T$, $\sigma\leqslant\operatorname{Re} s<1$, $\pi(x)$ — число простых чисел $p\leqslant x$, $\tau(n)$ — число делителей числа n.

3. Леммы

Доказательству теорем 1 и 2 предпошлём несколько лемм.

Лемма 1 (явная формула для функции Чебышёва). *Пусть $2\leqslant T\leqslant x$. Тогда*

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right).$$

Доказательство см., например, в книге [3], стр. 80.

Лемма 2 (Р. Бейкер, Г. Харман, Дж. Пинтц [2]). *Пусть ε — произвольно малое положительное число. Тогда при $N_1\geqslant N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$ для числа простых чисел на промежутке $(N;N+N_1]$ справедлива оценка*

$$\pi(N+N_1)-\pi(N)=\sum_{N<p\leqslant N+N_1}1\gg\frac{N_1}{\ln N}.$$

Оценки величины $N(\sigma,T)$ вида

$$N(\sigma,T)=O\left(T^{2\lambda(1-\sigma)}\ln^c T\right), \tag{2}$$

где λ и c — некоторые положительные постоянные, называются плотностными теоремами. Плотностная гипотеза состоит в том, что оценка (2) верна при $\lambda=1$. Следующая плотностная теорема доказана М. Хаксли в 1972 году (см. [5]).

Лемма 3. *Оценка (2) справедлива при $\lambda=\frac{6}{5}$ и $c=44$.*

Отметим, что постоянную c можно взять равной 9 (см. монографию [6]), однако для приложений это несущественно.

Следующая лемма представляет собой современную границу нулей дзета-функции (см., например, [3], с. 100).

Лемма 4. *Пусть $T\geqslant 2$. Тогда существует такая абсолютная постоянная $c_0>0$, что $\zeta(s)\neq 0$ в области*

$$\sigma>1-\delta(T),\qquad |t|\leqslant T,\quad \text{где}\quad \delta(T)=\frac{c_0}{(\ln T)^{2/3}\ln\ln T}.$$

Лемма 5. *Пусть $M \geqslant 2$, $T \geqslant 2$. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_M^{3M} \left| \sum_{|\gamma| \leqslant T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll \max_{\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1} M^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln^2 M \ln^2 T.$$

Доказательство. Разобьём сумму

$$S(x,T) = \sum_{|\gamma| \leqslant T} x^{\rho-1}$$

на $O(\ln M)$ сумм вида

$$S(x,T,\alpha) = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} x^{\rho-1},$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда по неравенству Коши

$$|S(x,T)|^2 \leqslant \left(\sum_\alpha |S(x,T,\alpha)| \right)^2 \leqslant \left(\sum_\alpha 1 \right) \left(\sum_\alpha |S(x,T,\alpha)|^2 \right) \ll \ln M \sum_\alpha |S(x,T,\alpha)|^2,$$

где $\sum\limits_\alpha$ означает сумму по числам $\alpha_k = \frac{1}{2} + \frac{k}{\ln M}$, $k \leqslant \frac{1}{2} \ln M$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[M; 3M]$, получаем

$$\int\limits_M^{3M} |S(x,T)|^2 \, dx \ll \ln M \sum_\alpha \int\limits_M^{3M} |S(x,T,\alpha)|^2 \, dx \ll \ln^2 M \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \int\limits_M^{3M} |S(x,T,\alpha)|^2 \, dx.$$

Ввиду симметричности распределения нетривиальных нулей $\zeta(s)$ относительно критической прямой, без ограничения общности можно считать, что $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, поэтому

$$\int\limits_M^{3M} |S(x,T)|^2 \, dx \ll \ln^2 M \max_{\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1} \int\limits_M^{3M} |S(x,T,\alpha)|^2 \, dx.$$

Оценим интеграл

$$J(M,T,\alpha) = \int\limits_M^{3M} |S(x,T,\alpha)|^2 \, dx = \int\limits_M^{3M} \sum_{\substack{|\gamma_1| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} \, dx =$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma_1| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \int\limits_M^{3M} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} \, dx.$$

Разобьём сумму по γ_1, γ_2 на две: в одну из них отнесём все слагаемые, для которых выполнено неравенство $|\gamma_1 - \gamma_2| \leqslant 1$, а в другую — все остальные. Тогда

$$J(M,T,\alpha) \leqslant J_1(M,T,\alpha) + J_2(M,T,\alpha),$$

где

$$J_1(M,T,\alpha) = \sum_{\substack{|\gamma_1| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln N} \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \leqslant 1}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leqslant T \\ \alpha \leqslant \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln N}}} \left| \int\limits_M^{3M} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} \, dx \right|,$$

$$J_2(M,T,\alpha)=\sum_{\substack{|\gamma_1|\leqslant T\\ \alpha\leqslant\beta_1<\alpha+\frac{1}{\ln N}\\ |\gamma_1-\gamma_2|>1}}\sum_{\substack{|\gamma_2|\leqslant T\\ \alpha\leqslant\beta_2<\alpha+\frac{1}{\ln N}}}\left|\int_M^{3M}x^{\beta_1+\beta_2-2+i(\gamma_1-\gamma_2)}\,dx\right|.$$

Для $J_1(M,T,\alpha)$ и $J_2(M,T,\alpha)$ имеют место оценки

$$J_1(M,T,\alpha)\ll M^{2\alpha-1}\sum_{\substack{|\gamma_1|\leqslant T\\ \alpha\leqslant\beta_1}}\sum_{\substack{|\gamma_2|\leqslant T\\ |\gamma_1-\gamma_2|\leqslant 1}}1,\qquad J_2(M,T,\alpha)\ll M^{2\alpha-1}\sum_{\substack{|\gamma_1|\leqslant T\\ \alpha\leqslant\beta_1}}\sum_{\substack{|\gamma_2|\leqslant T\\ |\gamma_1-\gamma_2|>1}}\frac{1}{|\gamma_1-\gamma_2|}.$$

Так как в силу простейших теорем о распределении нулей дзета-функции (см. [3], с. 69) справедливы оценки

$$\sum_{\substack{|\gamma_2|\leqslant T\\ |\gamma_1-\gamma_2|\leqslant 1}}1\ll\ln T,\qquad\sum_{\substack{|\gamma_2|\leqslant T\\ |\gamma_1-\gamma_2|>1}}\frac{1}{|\gamma_1-\gamma_2|}\ll\ln^2 T,$$

то

$$J_1(M,T,\alpha)\ll M^{2\alpha-1}N(\alpha,T)\ln T,\qquad J_2(M,T,\alpha)\ll M^{2\alpha-1}N(\alpha,T)\ln^2 T.$$

Из полученных неравенств следует утверждение леммы.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются также следующие две леммы.

Лемма 6. Пусть $\varepsilon>0$, $N_2\geqslant N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$. Тогда для числа решений неравенства $N<p_1^2+p_2^2\leqslant N+N_2$ в простых числах p_1, p_2 имеет место оценка

$$J_3(N,N_2)=\sum_{N<p_1^2+p_2^2\leqslant N+N_2}1\gg\frac{N_2}{\ln^2 N}.$$

Утверждение леммы следует из результатов работы [6].

Лемма 7. Пусть $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\ll N_2\leqslant N/2$, $\varepsilon>0$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\tau^2(n)\ll N_2\ln^3 N.$$

Доказательство. В работе Б. Вильсона [8] доказана асимптотическая формула

$$\sum_{n\leqslant N}\tau^2(n)=NP_3(\ln N)+O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где $P_3(x)$ — многочлен третьей степени. Положим $\Phi(N)=NP_3(\ln N)$. Тогда ввиду равенства $\ln(N-N_2)=\ln N+O(\frac{N_2}{N})$ имеем

$$\Phi(N-N_2)=(N-N_2)P_3(\ln(N-N_2))=NP_3(\ln N)+O(N_2\ln^3 N),$$

и аналогично $\Phi(N-2N_2)=NP_3(\ln N)+O(N_2\ln^3 N)$. Следовательно,

$$\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\tau^2(n)=\Phi(N-N_2)-\Phi(N-2N_2)+O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})\ll N_2\ln^3 N+N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Поскольку по условию $N_2\gg N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, из полученной оценки следует утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы 1

Будем решать наше неравенство с дополнительными ограничениями $N - 2N_1 < p_1 \leqslant \leqslant N - N_1$, $N < p_1 + p_2 \leqslant N + H$, отчего число его решений может лишь уменьшиться. Рассмотрим сумму

$$S_1 = \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \sum_{N-p<k\leqslant N-p+H} \Lambda(k) =$$

$$= \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \big(\psi(N-p+H) - \psi(N-p)\big).$$

Если $k = p_1^m$, $m \geqslant 2$, то

$$\sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \sum_{\substack{N-p<p_1^m\leqslant N-p+H \\ 2\leqslant m\leqslant \ln N_1}} \ln p_1 \ll H\sqrt{N_1}\ln N,$$

поэтому для суммы

$$S_1 = \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \sum_{N-p<p_1\leqslant N-p+H} \ln p_1 + O(H\sqrt{N_1}\ln N)$$

достаточно доказать оценку $S_1 \gg \frac{HN_1}{\ln N}$, тогда из неё следует искомая оценка $J_1(N,H) \gg \frac{HN_1}{\ln^2 N}$.

Применим к внутренней сумме явную формулу (лемма 1), получим

$$\sum_{N-p<k\leqslant N-p+H} \Lambda(k) = H - \sum_{|\gamma|\leqslant T} \int\limits_{N-p}^{N-p+H} x^{\rho-1}\,dx + O\left(\frac{N_1\ln^2 N}{T}\right).$$

Положим $T = \frac{N_1}{H}\ln^3 N$. Тогда

$$S_1 = \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \big(\psi(N-p+H) - \psi(N-p)\big) = \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \Big(H + O(H\ln^{-1} N) - V\Big),$$

где

$$V = \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{(N-p+H)^\rho - (N-p)^\rho}{\rho} = \sum_{|\gamma|\leqslant T} \int\limits_{N-p}^{N-p+H} x^{\rho-1}\,dx.$$

По лемме 2 при $N \geqslant N_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} 1 \gg \frac{N_1}{\ln N},$$

поэтому

$$S \gg \frac{HN_1}{\ln N} - W,$$

где

$$W = \sum_{N-2N_1<p\leqslant N-N_1} \int\limits_{N-p}^{N-p+H} \Big|\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\rho-1}\Big|\,dx.$$

Оценим сумму W сверху. Заменим сумму по простым числам p на сумму по всем подряд идущим натуральным n (отчего она может лишь увеличиться) и воспользуемся неравенством Коши:

$$W^2 \ll N_1 H \sum_{N-2N_1<n\leqslant N-N_1} \int\limits_{N-n}^{N-n+H} \Big|\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\rho-1}\Big|^2\,dx =$$

$$= N_1 H \sum_{l=0}^{H-1} \sum_{N-2N_1<l+mH\leqslant N-N_1} \int\limits_{N-l-mH}^{N-l-(m-1)H} \left|\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\rho-1}\right|^2 dx \ll$$

$$\ll N_1 H^2 \int\limits_{N_1}^{2N_1+H} \left|\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\rho-1}\right|^2 dx \ll N_1 H^2 \int\limits_{N_1}^{3N_1} \left|\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\rho-1}\right|^2 dx.$$

Применяя лемму 5, получаем оценку

$$W^2 \ll N_1 H^2 \cdot \max_{\frac12\leqslant\alpha<1} N_1^{2\alpha-1} N(\alpha,T) \ln^4 N = N_1^2 H^2 \ln^4 N \max_{\frac12\leqslant\alpha<1} N_1^{2\alpha-2} N(\alpha,T).$$

Воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (лемма 3). Получим

$$W^2 \ll N_1^2 H^2 \ln^{13} N \max_{\frac12\leqslant\alpha<1} N_1^{2\alpha-2} T^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll$$

$$\ll (N_1 H)^2 \ln^{13} N \max_{\frac12\leqslant\alpha<1} N_1^{2(\alpha-1)} \left(\frac{N_1}{H}\ln^3 N\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll (N_1 H)^2 \ln^{17} N \max_{\frac12\leqslant\alpha<1} \left(\frac{N_1^{\frac16}}{H}\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}.$$

Поскольку по условию $H \geqslant N_1^{\frac16+2\varepsilon} \geqslant N^{\frac{7}{80}+\varepsilon}$, имеем $\frac{N_1^{\frac16}}{H} \leqslant N_1^{-2\varepsilon}$, тогда с учётом границы нулей $\zeta(s)$ (лемма 4) получаем

$$\max_{\frac12\leqslant\alpha<1-\delta(T)} \left(\frac{N_1^{\frac16}}{H}\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \leqslant (N_1^{-2\varepsilon})^{\frac{12c_0/5}{(\ln T)^{2/3}\ln\ln T}} \ll e^{-\frac{3c_0\varepsilon\ln N}{(\ln N)^{0,6}}} = e^{-c_0'(\ln N)^{0,4}},$$

$$W \ll N_1 H e^{-c_1(\ln N)^{0,3}}, \qquad S_1 \gg \frac{HN_1}{\ln N}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Как и при доказательстве теоремы 1, будем решать данное неравенство с дополнительными ограничениями $N - 2N_2 < p_1^2 + p_2^2 \leqslant N - N_2$, $N < p_1^2 + p_2^2 + p_3 \leqslant N + H$, отчего число его решений может лишь уменьшиться. Рассмотрим сумму

$$S_2 = \sum_{N-2N_2<p_1^2+p_2^2\leqslant N-N_2} \sum_{N-p_1^2-p_2^2<k\leqslant N-p_1^2-p_2^2+H} \Lambda(k) =$$

$$= \sum_{N-2N_1<p_1^2+p_2^2\leqslant N-N_1} \bigl(\psi(N-p_1^2-p_2^2+H) - \psi(N-p_1^2-p_2^2)\bigr).$$

Достаточно доказать оценку $S_2 \gg \frac{HN_2}{\ln^2 N}$. Применяя явную формулу (лемма 1), получаем

$$\sum_{N-p_1^2-p_2^2<k\leqslant N-p_1^2-p_2^2+H} \Lambda(k) = H - \sum_{|\gamma|\leqslant T} \int\limits_{N-p_1^2-p_2^2}^{N-p_1^2-p_2^2+H} x^{\rho-1}\,dx + O\left(\frac{N_2\ln^2 N}{T}\right).$$

Положим $T = \frac{N_2}{H}\ln^3 N$. Тогда

$$S_2 = \sum_{N-2N_2<p_1^2+p_2^2\leqslant N-N_2} \Bigl(H + O(H\ln^{-1} N) - V\Bigr),$$

где

$$V=\sum_{|\gamma|\leqslant T}\int\limits_{N-p_1^2-p_2^2}^{N-p_1^2-p_2^2+H}x^{\rho-1}\,dx.$$

По лемме 6 при $N_2\geqslant N^{\frac{7}{12}+2\varepsilon}$ справедлива оценка

$$\sum_{N-2N_2<p_1^2+p_2^2\leqslant N-N_2}1\gg\frac{N_2}{\ln^2 N},$$

поэтому

$$S_2\gg\frac{HN_2}{\ln^2 N}-W,$$

где

$$W=\sum_{N-2N_2<p_1^2+p_2^2\leqslant N-N_2}\int\limits_{N-p_1^2-p_2^2}^{N-p_1^2-p_2^2+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|dx.$$

Оценим сумму W сверху. Пусть $r(n)$ — количество представлений числа n суммой двух квадратов целых чисел, $r(n)\leqslant 4\tau(n)$. Тогда

$$W\ll\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}r(n)\int\limits_{N-n}^{N-n+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|dx\ll\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\tau(n)\int\limits_{N-n}^{N-n+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|dx.$$

Возведём сумму W в квадрат и воспользуемся неравенством Коши и леммой 7:

$$W^2\ll\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\tau^2(n)\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\left(\int\limits_{N-n}^{N-n+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|dx\right)^2\ll$$

$$\ll N_2H\ln^3 N\sum_{N-2N_2<n\leqslant N-N_2}\int\limits_{N-n}^{N-n+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|^2dx=$$

$$=N_2H\ln^3 N\sum_{l=0}^{H-1}\sum_{N-2N_2<l+mH\leqslant N-N_2}\int\limits_{N-l-mH}^{N-l-(m-1)H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|^2dx\ll$$

$$\ll N_2H^2\ln^3 N\int\limits_{N_2}^{2N_2+H}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|^2dx\ll N_2H^2\ln^3 N\int\limits_{N_2}^{3N_2}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho-1}\right|^2dx.$$

Применяя лемму 5, получаем оценку

$$W^2\ll N_2H^2\cdot\max_{\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1}N_2^{2\alpha-1}N(\alpha,T)\ln^7 N=N_2^2H^2\ln^7 N\max_{\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1}N_2^{2\alpha-2}N(\alpha,T).$$

Воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (лемма 3). Получим

$$W^2\ll N_2^2H^2\ln^{16}N\max_{\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1}N_2^{2\alpha-2}T^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}\ll$$

$$\ll (N_2H)^2\ln^{16}N\max_{\frac12\leqslant\alpha<1}N_2^{2(\alpha-1)}\left(\frac{N_2}{H}\ln^3N\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}\ll(N_2H)^2\ln^{20}N\max_{\frac12\leqslant\alpha<1}\left(\frac{N_2^{\frac16}}{H}\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}.$$

По условию $H\geqslant N_2^{\frac16+2\varepsilon}\geqslant N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$, поэтому $\frac{N_2^{\frac16}}{H}\leqslant N_2^{-2\varepsilon}$, и с учётом границы нулей $\zeta(s)$ (лемма 4) получаем

$$\max_{\frac12\leqslant\alpha<1-\delta(T)}\left(\frac{N_2^{\frac16}}{H}\right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}\leqslant(N_2^{-2\varepsilon})^{\frac{12c_0/5}{(\ln T)^{2/3}\ln\ln T}}\ll e^{-\frac{3c_0\varepsilon\ln N}{(\ln N)^{0,6}}}=e^{-c_0'(\ln N)^{0,4}},$$

$$W\ll N_2He^{-c_1(\ln N)^{0,3}},\qquad S_2\gg\frac{HN_2}{\ln^2N}.$$

Теорема 2 доказана.

6. Заключение

Теорему 1 можно рассматривать как уточнение результата Х. Монтгомери и Р. Вона [4] о разрешимости в простых числах p_1, p_2 неравенства $|p_1+p_2-N|\leqslant H$ при $H\geqslant N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$. Насколько нам известно, задача, решённая в теореме 2, рассматривается в данной статье впервые. Интересно отметить, что параметр H в теореме 2 и в теореме Х. Монтгомери и Р. Вона один и тот же.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
2. Baker R. C., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 83, №3. P. 532-562.
3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.
4. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 353–370.
5. Huxley M. N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. 1972. Vol. 15, № 1. P. 164–170.
6. Ivić A. The Riemann zeta-function: The theory of the Riemann zeta-function with applications. New York etc.: John Wiley & Sons, 1985.
7. Гирько В. В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. 2006. Том 7, № 4. С. 26-30.
8. Wilson B. M. Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan // Proc. Lond. Math. Soc. 1922. Vol. 2(21). P. 235-255.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, "The Riemann zeta function" (Russian), FML, Moscow.
2. Baker, R. C., Harman, G. & Pintz J. 2001, "The difference between consecutive primes, II", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 83, no. 3, pp. 532-562.

3. Karatsuba, A. A. 1983, *Osnovy analiticheskoi teorii chisel* (Russian), [Fundamentals of the analytic number theory]. Second edition. Nauka, Moscow, 240 p.

4. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975, "The exceptional set in Goldbach's problem", *Acta Arith.*, vol. 27, pp. 353–370.

5. Huxley M. N. 1972, "On the difference between consequtive primes", *Invent. Math.*, vol. 15, no. 1, pp. 164–170.

6. Ivić A. 1985, *The Riemann zeta-function: The theory of the Riemann zeta-function with applications*, New York etc., John Wiley & Sons.

7. Gir'ko, V. V. & Gritsenko, S. A. 2006, "On a diophantine inequality with primes" (In Russian), *Chebyshevskii sbornik*, vol. 7, no. 4, pp. 26-30.

8. Wilson, B. M. 1922, "Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan", *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 21, no. 2. pp. 235-255.

Получено: 18.08.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-335-340

О точности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками[1]

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе получена новая оценка для погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками по простому модулю N.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О точности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 335–340.

[1]Исследование выполнено по гранту РНФ № 22-21-00544 «Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» .

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-335-340

On the accuracy of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids[2]

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper obtained a new estimate for the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal meshes modulo N.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the accuracy of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 335–340.

1. Введение

В работе [3] для произвольного моноида M натуральных чисел был определён новый класс функций M_s^α. Был обнаружен парадоксальный факт, что для моноида $M_{q,1}$ чисел сравнимых с 1 по модулю q квадратурная формула с параллелепипедальной сеткой для допустимого набора коэффициентов по модулю q точна на классе $M_{q,1,s}^\alpha$.

Цель данной работы — обобщить этот результат на случай нового класса периодических функций и нового понятия допустимого набора коэффициентов для этого класса.

2. Классы функций с заданным спектром

Рассмотрим произвольное множество B натуральных чисел. Определим класс функций B_s^α следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида[3]

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

[2]The study was carried out under the grant from the RSF No. 22-21-00544 "Zeta function of monoids of natural numbers and related issues" .

[3]Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha = \sup_{\overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Про функции $f(\vec{x}) \in B_s^\alpha$ мы будем говорить, что они имеют спектр B, хотя, если быть более точными, их спектр вложен в множество B_1^s, где множество $B_1 = B\bigcup(-B)$, если $1 \notin B$, и $B_1 = B\bigcup(-B)\bigcup\{0\}$, если $1 \in B$.

Если σ_B — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(B|\alpha) = \sum_{b\in B}\frac{1}{b^\alpha}$ множества натуральных чисел B, то для любого $\alpha > \sigma_B$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in B_s^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Таким образом, справедливо вложение $B_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_s$ — пространство периодических функций от s переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{B}_s$ периодических функций от s переменных, заданное равенством $\mathfrak{B}_s = \bigcup_{\alpha>\sigma_B} B_s^\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{B}_s \subset \mathfrak{A}_s$.

Нетрудно видеть, что для нормы $\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s}|f(\vec{x})|$ справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_C \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\left(1 + 2\zeta(B|\alpha)\right)^s.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ пространства $B_s^{\alpha_1}$ в пространство $B_s^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Естественно, что нормой оператора вложения $\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ называется величина, определяемая равенством

$$\|\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = \sup_{f(\vec{x})\in B_s^{\alpha_1}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}}}{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}.$$

Лемма 1. *Для любых $\alpha_1 > \alpha_2 > \sigma_B$ для нормы оператора вложения пространства $B_s^{\alpha_1}$ в пространство $B_s^{\alpha_2}$ справедливо равенство*

$$\|\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1.$$

Доказательство. Действительно, если $f(\vec{x}) = C$, то $\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} = C$ и, значит, $\|\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \geqslant 1$.

С другой стороны, если $f(\vec{x}) \in B_s^{\alpha_1}$ и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

то

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{\alpha_1}},$$

поэтому

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \sup_{\overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{\alpha_2} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\overline{m_\nu}\in B,\,(\nu=1,\dots,s)} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{\alpha_2}}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{\alpha_1}} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}$$

и $\|\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \leqslant 1$. Следовательно, $\|\mathbb{B}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1$. □

Очевидно, что для любого $\alpha > 1$ пространство периодических функций B_s^α является подпространством периодических функций E_s^α. Соответствующий оператор вложения будем обозначать через $\mathbb{B}_\alpha$. Ясно, что этот оператор имеет единичную норму: $\|\mathbb{B}_\alpha\| = 1$.

3. Парадоксальные квадратурные формулы

Пусть $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ и $0 \leqslant c_1 < \ldots < c_n < q$. Мы рассмотрим частный случай спектров, а именно, множества $B(q, \vec{c})$, которые состоят из натуральных чисел b, таких, что $b \equiv c_\nu \pmod q$ и $\nu = 1, \ldots, n$.

Пусть $q > 2(2n+1)^s$ и $B = B(q, \vec{c})$.

Рассмотрим квадратурную формулу с параллелепипедальной сеткой

$$\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

на классе B_s^α:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) - R_q[f(\vec{x})], \quad f(\vec{x}) \in B_s^\alpha. \tag{1}$$

Если

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in B, \, (\nu = 1, \ldots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in B, \, (\nu = 1, \ldots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

то для погрешности приближенного интегрирования $R_q[f(\vec{x})]$ справедливо равенство

$$R_q[f(\vec{x})] = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \vec{m} \neq \vec{0}, \\ \overline{m_\nu} \in B, \, (\nu = 1, \ldots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} \delta_q(m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s), \tag{2}$$

где символ Коробова $\delta_q(m)$ задан равенствами

$$\delta_q(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Назовём набор коэффициентов $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ $\vec{c}$-допустимым по модулю q, если множество нетривиальных решений сравнения

$$m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod q \tag{3}$$

с дополнительным условием $m_\nu \equiv \pm c_\mu \pmod q$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, $\mu = 1, \ldots, n$ пусто.

Теорема 1. *Для любого $\vec{c}$-допустимого набора $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ по модулю q квадратурная формула (1) точна на классе B_s^α.*

Доказательство. Действительно, так как $\overline{m_\nu} \in B$, то $m_\nu \equiv \pm c_\mu \pmod q$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, $\mu = 1, \ldots, n$. Так как по определению $\vec{c}$-допустимого набора множество решений сравнения (3) не содержит наборов, входящих в спектр функции из класса B_s^α, то все слагаемые в правой части равенства (2) нулевые, что и доказывает утверждение теоремы. □

Естественно, что возникает вопрос о существовании набор коэффициентов $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ $\vec{c}$-допустимых по модулю q. Методами работы [2] легко доказать для простых модулей соответствующую лемму о существовании набор коэффициентов $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ $\vec{c}$-допустимых по модулю q.

Лемма 2. *Пусть $p > 2 \cdot (2n)^s + 1$ – простое, тогда среди $P = (p-1)^{s-1}$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_{s-1} \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/2 + 1$ $\vec{c}$-допустимых по модулю p.*

Доказательство. Введем обозначения

$$T_{p,\vec{c}}(a_1,\ldots,a_{s-1}) = \sum_{\substack{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s<p \\ m_\nu\equiv\pm c_\mu \pmod p,\ \nu=1,\ldots,s,\ \mu=1,\ldots,n}}{}' \delta_p(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s). \tag{4}$$

Перенумеруем все наборы $(a_1,\ldots,a_{s-1})$ в порядке возрастания величины $T_{p,\vec{c}}(\vec{a})$:

$$T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_1) \leqslant T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_P).$$

Тогда, очевидно,

$$T_{p,\vec{c}}\left(\vec{a}_{\frac{P}{2}+1}\right) \leqslant \frac{2}{P}\sum_{\nu=\frac{P}{2}+1}^{P} T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_\nu) \leqslant \frac{2}{P}\sum_{\nu=1}^{P} T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_\nu) =$$

$$= \frac{2}{P}\sum_{\substack{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s<p \\ m_\nu\equiv\pm c_\mu \pmod p,\ \nu=1,\ldots,s,\ \mu=1,\ldots,n}}{}' \sum_{\nu=1}^{P}\delta_p(m_1+a_{\nu1}m_2+\ldots+a_{\nu s-1}m_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{P}\sum_{\substack{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s<p \\ m_\nu\equiv\pm c_\mu \pmod p,\ \nu=1,\ldots,s,\ \mu=1,\ldots,n}}{}' (p-1)^{s-2} = \frac{2}{p-1}\sum_{\substack{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s<p \\ m_\nu\equiv\pm c_\mu \pmod p,\ \nu=1,\ldots,s,\ \mu=1,\ldots,n}}{}' 1 < \frac{2(2n)^s}{p-1} < 1.$$

Следовательно,

$$T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_1) = T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_2) = \ldots = T_{p,\vec{c}}(\vec{a}_{P/2+1}) = 0.$$

Таким образом, все $P/2+1$ наборов являются $\vec{c}$-допустимыми по модулю p. □

4. Заключение

Первоначально Н. М. Коробов доказательство существования оптимальных коэффициентов проводил только для простых модулей (см. [4]). Аналогичное утверждение для составных модулей требует преодоление значительных сложностей (см. [1]). По-видимому, перенос на составной модуль q понятия набора коэффициентов $(a_1,\ldots,a_{s-1})$ $\vec{c}$-допустимых по модулю q потребует преодоления аналогичных сложностей для доказательства существования таких наборов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения, суммы и произведения по приведенной системе вычетов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 8. Вып. 1. Тула, 2002. С. 10–28.

2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

3. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

5. Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II// Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 345–353.

REFERENCES

1. Vronskaya, G.T., Dobrovol'skii, N.M. & Rodionova, O.V. 2002, "Comparisons, sums and products on the reduced system of deductions" // Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 8, no. 1, pp. 10–28.

2. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids" // Chebyshevskii sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

3. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis",*Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

4. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

5. N. M. Korobov, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 345–353.

Получено: 05.08.2023
Принято в печать: 02.11.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-341-344

Коэффициент и арифметическая сложность объединения $n!$

А. Дуаа, М. Мейсами

Дуаа Абдулла — Московский физико-технический институт (Москва).
e-mail: duaa1992abdullah@gmail.com
Махди Мейсами — Университет Исфахана (г. Исфахан, Иран).
e-mail: meisam67@gmail.com

Аннотация

В этой статье мы покажем, что факторная сложность бесконечного слова $\mathfrak{F}_b$ определяемая путем объединения базовых b представлений $n!$ полна. Затем мы покажем, что арифметическая сложность этого слова также является полной. С другой стороны, $\mathfrak{F}_b$ это дизъюнктивное слово. В теории чисел такой вид слов называется *богатыми цифрами*.

Ключевые слова: факторная сложность, равнораспределенная по модулю 1, критерий Вейля, цифровые задачи, факториалы.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
А. Дуаа, М. Мейсами. Коэффициент и арифметическая сложность объединения $n!$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 341–344.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-341-344

Factor and arithmetic complexity of concatenating the $n!$

A. Duaa, M. Meisami

Duaa Abdullah — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow, Russia).
e-mail: duaa1992abdullah@gmail.com
Mahdi Meisami — University of Isfahan (Isfahan, Iran).
e-mail: meisam67@gmail.com

Abstract

In this paper, we show that factor complexity of the infinite word $\mathfrak{F}_b$ is defined by concatenating base-b representations of the $n!$ is full. Then we show that the arithmetic complexity of this word is full as well. On the other hand, $\mathfrak{F}_b$ is a disjunctive word. In number theory, this kind of words is called *rich numbers*.

Keywords: factor complexity, equidistributed modulo 1, Weyl's criterion, digital problems, factorials.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
A. Duaa, M. Meisami, 2023, "Factor and arithmetic complexity of concatenating the $n!$" // *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 341–344.

1. Introduction and preliminaries

Applying combinatorial analysis to finite or infinite words is the domain of word combinatorics, a field at the intersection of theoretical computer science and discrete mathematics. This area of mathematics evolved from number theory, group theory, probability, and of course combinatorics. The basics of word combinatorics are given for instance in [5].

1.1. Combinatorics on words

A nonempty finite set Σ is called an *alphabet*. The elements of the set Σ are called *letters*. The alphabet consisting of b symbols from 0 to $b-1$ will then be denoted by $\Sigma_b = \{0, \dots, b-1\}$. A *word* $\mathbf{w}$ is a sequence of letters. The *finite word* $\mathbf{w}$ can be considered as a function of $\mathbf{w} : \{1, \cdots, |\mathbf{w}|\} \to \Sigma$, where $\mathbf{w}[i]$ is the letter in the i^{th} position. The *length* of the word $|\mathbf{w}|$ is the number of letters contained in it. The *empty word* is denoted by ε. Then we introduce *infinite word*s as functions $\mathbf{w} : \mathbb{N} \to \Sigma$. The set of all finite words over Σ is denoted by Σ^*, and $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$; the set of all infinite words is denoted by $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

The *concatenation* of the finite words $\mathbf{u} = \mathbf{u}[1]\cdots\mathbf{u}[n]$, $|\mathbf{u}| = n$ and $\mathbf{w} = \mathbf{w}[1]\cdots\mathbf{w}[m]$, $|\mathbf{w}| = m$ is the word

$$\mathbf{s} = \mathbf{u}\mathbf{w} = \mathbf{u} = \mathbf{u}[1]\cdots\mathbf{u}[n]\mathbf{w}[1]\cdots\mathbf{w}[m], \quad |\mathbf{s}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{w}| = n + m.$$

Let $\mathbf{u}$ and $\mathbf{w}$ be two words. If there are words $\mathbf{s}$ and $\mathbf{v}$ such that $\mathbf{w} = \mathbf{s}\mathbf{u}\mathbf{v}$, then the word $\mathbf{u}$ is called a *factor* of the word $\mathbf{w}$. The set of all factors of $\mathbf{w}$ is denoted by $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ and it is called *language generated* by $\mathbf{w}$. If $\mathbf{s} = \varepsilon$, then $\mathbf{u}$ is called a *prefix* of the word $\mathbf{w}$, if $\mathbf{v} = \varepsilon$, it is named a *suffix*. The factor $\mathbf{w}[i]\mathbf{w}[i+1]\cdots\mathbf{w}[j]$ where $i \leqslant j$ is denoted by $\mathbf{w}[i\cdots j]$.

This work investigates concatenating words from a complexity perspective. There are numerous approaches to quantify the complexity of a word over a finite alphabet. The complexity function will be used as our primary measure of complexity. This function was first studied by Hedlund and Morse in 1938 [4].

Definition 1.1. The *factor complexity* of a finite or infinite word $\mathbf{w}$ is the function $k \mapsto \mathrm{p}_{\mathbf{w}}(k)$, which, for each integer k, give the number $\mathrm{p}_{\mathbf{w}}(k)$ of distinct factors of length n in that word.

It is clear that the factor complexity is between zero and $(\#\Sigma)^k$. If $\mathrm{p}_{\mathbf{w}}(k) = (\#\Sigma)^k$, then the word $\mathbf{w}$ is said to have *full factor complexity*. This kind of words are called *disjunctive word* [4].

It is also easy to see that the factor complexity of any infinite word is a non-decreasing function, and the complexity of a finite word first increases, then decreases to zero.

The arithmetic complexity of an infinite word is the function that counts the number of words of a specific length composed of letters in arithmetic progression (and not only consecutive). In fact, it's a generalization of the complexity function. This concept was introduced by Avgustinovich and Frid in [1].

Definition 1.2. Let $\mathbf{w} = (a_n)_{n\geqslant 0} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. The *arithmetic closure* of $\mathbf{w}$ is the set

$$A(\mathbf{w}) = \{a_i a_{i+d} a_{i+2d} \cdots a_{i+kd} \mid d \geqslant 1, k \geqslant 0\}.$$

The *arithmetic complexity* of $\mathbf{w}$ is the function $a_{\mathbf{w}}$ mapping n to the number $\mathrm{a}_{\mathbf{w}}(n)$ of words with length n in $A(\mathbf{w})$.

If $\mathrm{a}_{\mathbf{w}}(k) = (\#\Sigma)^k$, then the word $\mathbf{w}$ is said to have *full arithmetic complexity*. The following statement immediately follows from the definition:

Proposition 1.3. Let $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ and $\#\Sigma = k$. Then for all $n \in \mathbb{N}$ we have

$$1 \leqslant \mathrm{p}_{\mathbf{w}}(n) \leqslant \mathrm{a}_{\mathbf{w}}(n) \leqslant k^n.$$

1.2. Ergodic theory

In mathematics, a sequence $(s_n)_{n\geqslant 0}$ of real numbers is said to be *equidistributed* or *uniformly distributed* on a non-degenerate interval $[a,b]$, if the proportion of terms that fall into a sub-interval is proportional to the length of this interval, i.e., if for any sub-interval $[c,d]$ of $[a,b]$ we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\left(\{s_1,...,s_n\}\cap[c,d]\right)}{n}=\frac{d-c}{b-a}.$$

The theory of uniform distribution modulo 1 deals with the distribution behavior of sequences of real numbers.

Definition 1.4. A sequence $(a_n)_{n\geqslant 0}$ of real numbers is said to be *equidistributed modulo* 1 or *uniformly distributed modulo* 1 if the sequence of fractional parts of $(a_n)_{n\geqslant 0}$ is equidistributed in the interval $[0,1]$.

Theorem 1.5. (Weyl's criterion[2]) A sequence $(a_n)_{n\geqslant 0}$ is equidistributed modulo 1 if and only if for all non-zero integers N,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Na_j}=0.$$

Lemma 1.6. [3] The fractional part of the sequence $(\log(n!))_{n\geqslant 0}$ is dense in $[0,1]$.

Theorem 1.7. [3] If k is any positive integer having m digits, there exists a positive integer n such that the first m digits of $n!$ constitute the integer k.

Also we can state this result for any arbitrary base. Let $d_m\dots d_n$ be a word over Σ_b with $d_m\neq 0$. There exists n such that the base$_b$ expansion of $n!$ starts with $d_m\dots d_n$.

2. Main result

2.1. Statement of problem

The infinite word $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_b:=({}_bf_n)_{n\geqslant 0}$ is defined by concatenating non-negative base-$b\geqslant 2$ representation of the recursive $n!$.

by concatenating base-10 representation of the recursive $n!$:

$$\mathfrak{F}:=(f_n)_{n\geqslant 0}=1\ 1\ 2\ 6\ 24\ 120\ 720\ 5040\ 40320\cdots.$$

What is the factor complexity of the $\mathfrak{F}$*, i.e.* $\mathrm{p}_{\mathfrak{F}}(k)$ *? What about arithmetic complexity, i.e.,* $\mathrm{a}_{\mathfrak{F}}(k)$*?*

In fact, this problem can be easily generalized for any natural bases.

Theorem 2.1. **(i)** The factor complexity of the infinite word $\mathfrak{F}_b$ is full.

(ii) The arithmetic complexity of the infinite word $\mathfrak{F}_b$ is full.

Proof. (i) Let the alphabet for base-b is $\Sigma_b=\{0,\cdots,b-1\}$. Then $\mathfrak{F}_b\in\Sigma_b^{\mathbb{N}}$. Now we want to find

$$k\mapsto\#\{f_i\cdots f_{i+k-1}|i\geqslant 0\}.$$

By Lemma 1.2 and Theorem 1.2, we claim that $({}_bf_n)_{n\geqslant 0}$ is equidistributed modulo 1. Then we have a same result such Theorem 1.2, but for an arbitrary bases, i.e., there exists an n such that the b-expansion of $n!$ begins with these digits. On the other hand, each word $\mathtt{T}\in\Sigma_b^+$ will appearance at least one position in $\mathfrak{F}_b$, i.e., $\mathfrak{F}_b[i\cdots j]=\mathtt{T}$, because there exist $\mathtt{S}\in\Sigma_b^+$ such that it begins by $\mathtt{T}$.

Hence, $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}_b}=\Sigma_b^+$, and $\mathfrak{F}_b$ is full factor complexity, i.e.,

$$\mathrm{p}_{\mathfrak{F}_b}(k)=(\#(\Sigma_b))^k=b^k.$$

(ii) In the previous part we show that $\mathrm{p}_{\mathfrak{F}_b}(k) = b^k$. Now by Proposition 1.1, we can say that for all $k \in \mathbb{N}$

$$b^k \leqslant \mathrm{a}_{\mathfrak{F}_b}(k) \leqslant b^k.$$

This inequality is true for all natural numbers k, this implies that $\mathrm{a}_{\mathfrak{F}_b}(k) = b^k$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S.V. Avgustinovich, D.G. Fon-Der-Flaass, and A.E. Frid, *Arithmetical complexity of infinite words*, Languages and Combinatorics III (Proc. 3rd ICWLC, Kyoto, March 2000), World Scientific, Singapore (2003), 51-62.

2. L.Kuipers, H. Niderreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure and applied mathematics,A Wiley-Interscience publication, New York (1974).

3. J. E. Maxfield, *A Note on n!*, Mathematics Magazine, 43 (1997), 64–67.

4. M. Morse, G. A. Hedlund. *Symbolic dynamics. Amer. J. Math.*, **60**, (1938): 815–866.

5. M. Rigo, *Formal languages, automata and numeration systems 1: Introduction to combinatorics on words*, John Wiley & Sons, (2014).

REFERENCES

1. S.V. Avgustinovich, D.G. Fon-Der-Flaass, and A.E. Frid. 2003, “Arithmetical complexity of infinite words”, *Languages and Combinatorics III (Proc. 3rd ICWLC, Kyoto, March 2000), World Scientific, Singapore*, pp. 51–62.

2. L. Kuipers and H. Niderreiter. 1974, “Uniform Distribution of Sequences”, *Pure and applied mathematics, A Wiley-Interscience publication, New York.*

3. J. E. Maxfield. 1997, “A Note on $n!$, *Mathematics Magazine*, 43 (1997), pp. 64–67.

4. M. Morse and G. A. Hedlund. 1938, “Symbolic dynamics”, *Amer. J. Math.*, **60**, pp. 815-–866.

5. M. Rigo. 2014, “Formal languages, automata and numeration systems 1: Introduction to combinatorics on words”, *John Wiley & Sons.*

Получено: 27.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-345-353

Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II[1]

Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Коробов Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук (г. Москва).
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе получена новая оценка для погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками по простому модулю N.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:
Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II// Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 345–353.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-345-353

On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II[2]

N. M. Korobov, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Korobov Nikolay Mikhailovich — Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Moscow).
Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tolstoy Tula State Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper obtained a new estimate for the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal meshes modulo N.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
N. M. Korobov, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 345–353.

1. Введение

Обозначим через $q = q(a_1, \ldots, a_s)$ минимальное значение произведения $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Рассмотрим гиперболическую дзета–функцию решетки решений этого линейного сравнения

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \quad (\alpha > 1). \tag{2}$$

[2]The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics" .

Введем обозначения

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)=\sum_{r\leqslant\overline{m}_1\dots\overline{m}_s<t}{}'\frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha},\tag{3}$$

тогда справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(a_1,\dots,a_s;p)|\alpha)=T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)+T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s).\tag{4}$$

Лемма 1. *Если для всякого нетривиального решения сравнения (1) выполняется неравенство* $\overline{m}_1\dots\overline{m}_s\geqslant q$, *то при любых целых* λ, λ_ν, *и* $n_\nu\geqslant 1$ $(\nu=1,2,\dots,s)$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1}\dots\sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s}\delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s+\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}1 & \text{при}\quad n_1\dots n_s\leqslant q,\\ \dfrac{4n_1\dots n_s}{q} & \text{при}\quad n_1\dots n_s>q.\end{cases}\tag{5}$$

Доказательство. См. [2] стр. 123.

Лемма 2. *При любых действительных* $\alpha>1$ *и* $t\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1\dots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^\alpha}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},\tag{6}$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1,\dots,m_s$, *для которых произведение* $m_1\dots m_s$ *больше или равно* t.

Доказательство. См. [2] стр. 125.

Лемма 3. *Пусть для любого фиксированного* $\varepsilon>0$ *неотрицательная функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{|k_1|\leqslant n_1,\dots,|k_s|\leqslant n_s}\varphi(k_1,\dots,k_s)=O((n_1\dots n_s)^{1+\varepsilon}).$$

Тогда при всяком $\alpha>1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(m_1,\dots,m_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1,\dots,m_s=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^{\alpha+1}}\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\dots,|k_s|\leqslant m_s}\varphi(k_1,\dots,k_s).$$

Доказательство. См. [2] стр. 87.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\frac{s}{p^\alpha}<T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)\leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. См. [1].

При $p > 2 \cdot 3^s + 1$ определим величину p^* из условий

$$N_s(p^*) < \frac{p-1}{2} \leqslant N_s(p^*+1),$$

где $N_s(t)$ — количество ненулевых наборов $(m_1, \dots, m_s)$, удовлетворяющих неравенству $\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \leqslant t$. Так как $N_s(1) = 3^s$ и $N_s(t) \leqslant t(3 + 2\ln t)^{s-1}$, то $p^* = O\left(\frac{p}{(\ln p)^{s-1}}\right)$ и $p^* > \frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}}$.

Лемма 5. *Пусть $p > 2 \cdot 3^s + 1$ - простое, тогда среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \dots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/2 + 1$ таких, что справедливо неравенство*

$$q = q(a_1, \dots, a_s) \geqslant p^*. \tag{7}$$

Доказательство. См. [1].

Лемма 6. *Пусть $\vec{p}_s = (p, \dots, p) \in \mathbb{Z}^s$ и $r \leqslant t$, тогда справедливо неравенство*

$$T_{r,t}^{(1)}(\vec{p}_s) \leqslant 2s(5 + 2\ln t)^{s-1}\left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right). \tag{8}$$

Доказательство. См. [1].

Лемма 7. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \dots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4 + 1$ таких, что при $\alpha > 1$ справедлива оценка*

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \dots, a_s; p)|\alpha) \leqslant \frac{16s\left(2 + \ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5 + 2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}. \tag{9}$$

Доказательство. См. [1].

Теорема 1. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \dots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что $q = q(a_1, \dots, a_s) \geqslant p^*$ и при $\alpha > 1$, $N = p$ для $f \in E_s^\alpha(C)$ погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\frac{C(\alpha, s)(2 + 2s\ln\ln p)(5 + 2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}},$$

где константа $C(\alpha, s) > 0$ зависит только от α, s.

Доказательство. См. [1].

В работе [1] было указано: "Заметим, что для всех наборов $(a_1, \dots, a_s)$, удовлетворяющих условию теоремы, для которых $q \ll p/\ln\ln p$, оценка теоремы 1 лучше известной оценки (см. [2] стр. 126)

$$|R_N[f]| \leqslant 4C\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Но вопрос о существовании наборов даже с $q \gg p\ln^{1-s+\varepsilon} p$ для любого $\varepsilon > 0$ остается открытым."

2. Об последней оценке Коробова

В книге [3] Н. М. Коробов на странице 141 написал: "Наконец, с помощью соображений, использованных при доказательстве теоремы 19 (с. 96), можно получить наиболее сильную оценку:

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}}.$$

"

Нашей ближайшей целью будет доказательство этой оценки.

Анализируя доказательство леммы 7, мы приходим к выводу, что необходимо усилить оценку $T^{(\alpha)}_{q,p}(a_1,\dots,a_s)$, что мы и сделаем с помощью соображений указанных в книге Н. М. Коробова.

Лемма 8. *Пусть* $\vec{p}_s = (p,\dots,p) \in \mathbb{Z}^s$ *и* $1 \leqslant r \leqslant t$, *тогда при* $\alpha > 1$ *справедливо неравенство*

$$T^{(\alpha)}_{r,t}(\vec{p}_s) \leqslant \frac{s}{r^{\alpha-1}} \left(\left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right)^s + 2(3+2\ln r)^{s-1} \right). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения следует, что $T^{(\alpha)}_{r,t}(\vec{p}_s)$ можно записать в виде

$$T^{(\alpha)}_{r,t}(\vec{p}_s) = {\sum_{r \leqslant \overline{m_1}\dots\overline{m_s} < t}}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k \sum_{r \leqslant m_1 \dots m_k < t} \frac{1}{(m_1 \dots m_k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k \sigma^{(\alpha)}_k(r,t), \tag{11}$$

где

$$\sigma^{(\alpha)}_k(r,t) = \sum_{r \leqslant m_1 \dots m_k < t} \frac{1}{(m_1 \dots m_k)^\alpha}$$

и суммирование проводится только по натуральным $m_1,\dots,m_k$.

При $k = 1$ получим

$$\sigma^{(\alpha)}_1(r,t) = \sum_{r \leqslant m < t} \frac{1}{m^\alpha} = \frac{1}{r^\alpha} + \sum_{r+1 \leqslant m < t} \frac{1}{m^\alpha}.$$

Далее заметим, что:

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) = \int_{r+1}^{t} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \sum_{m=r+1}^{[t]} \frac{1}{m^\alpha} \leqslant \int_{r}^{[t]} \frac{1}{x^\alpha} dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{[t]^{\alpha-1}} \right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma^{(\alpha)}_1(r,t) \leqslant \frac{1}{r^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{r^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{r^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \right).$$

Для $k=2$ имеем:

$$\sigma_2^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\sum_{\frac{r}{m_1}\leqslant m_2<\frac{t}{m_1}}\frac{1}{m_2^\alpha}+\sum_{r\leqslant m_1<t}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\sum_{1\leqslant m_2<\frac{t}{m_1}}\frac{1}{m_2^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(m_1)^{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}\right)+\sum_{r\leqslant m_1<t}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{m_1}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)(\ln r+1)+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^2\right)$$

При $k>2$ имеем:

$$\sigma_k^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{1\leqslant m_1\dots m_{k-1}<r}\frac{1}{(m_1\dots m_{k-1})^\alpha}\sum_{\frac{r}{m_1\dots m_{k-1}}\leqslant m_k<\frac{t}{m_1\dots m_{k-1}}}\frac{1}{m_k^\alpha}+$$

$$+\sum_{r\leqslant m_1\dots m_{k-1}<t}\frac{1}{(m_1\dots m_{k-1})^\alpha}\sum_{1\leqslant m_k<\frac{t}{m_1\dots m_{k-1}}}\frac{1}{m_k^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant m_1\dots m_{k-1}<r}\frac{1}{(m_1\dots m_{k-1})^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(m_1\dots m_{k-1})^{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}\right)+$$

$$+\sum_{r\leqslant m_1\dots m_{k-1}<t}\frac{1}{(m_1\dots m_{k-1})^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{1\leqslant m_1\dots m_{k-1}<r}\frac{1}{m_1\dots m_{k-1}}+\sigma_{k-1}^{(\alpha)}(r,t)\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-1}}{r^{\alpha-1}}+\sigma_{k-1}^{(\alpha)}(r,t)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-1}}{r^{\alpha-1}}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-2}}{r^{\alpha-1}}+\sigma_{k-2}^{(\alpha)}(r,t)\right)\right)\leqslant\dots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{k-1}\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}.$$

Подставляя эти оценки в выражение для $T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)$, получим:

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)\leqslant\sum_{k=1}^{s}C_s^k2^k\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{k=1}^{s}kC_s^k2^k\left(\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^k+(1+\ln r)^{k-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s}{r^{\alpha-1}}\left(\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s+2(3+2\ln r)^{s-1}\right).$$

□

Лемма 9. *Для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \alpha - 1$ и любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что при $\alpha > 1$ справедлива оценка*

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} \left(\frac{q}{p^*}\right)^{\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть существует $P_1 \geqslant P/2 + 1$ наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ таких, что $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$. Перенумеруем их в порядке возрастания величины $T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a})$:

$$T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_1) \leqslant T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_{P_1}),$$

нумерацию оставшихся $P - P_1$ наборов продолжим произвольным способом.

Тогда, очевидно,

$$T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{4}{4P_1 - P} \sum_{\nu=(P+4)/4}^{P_1} T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_\nu) \leqslant \frac{4}{P} \sum_{\nu=1}^{P} T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_\nu) =$$

$$= \frac{4}{P} {\sum_{p^* \leqslant \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}}' \sum_{\nu=1}^{P} \frac{\delta_p(m_1 a_{\nu\,1} + \ldots + m_s a_{\nu\,s})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{1+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{P} \sum_{p^* \leqslant \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p} \frac{(p-1)^{s-1}}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{1+\varepsilon}} = \frac{4}{p-1} T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{p}_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8s}{p(p^*)^{\varepsilon}} \left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right).$$

Следовательно,

$$T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_1) \leqslant \ldots \leqslant T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{8s}{p(p^*)^{\varepsilon}} \left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right).$$

Отсюда для $\nu = 1, \ldots, P/4+1$ получаем:

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{1}{q^{\alpha-1-\varepsilon}} T_{p^*,p}^{(1+\varepsilon)}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1-\varepsilon}(p^*)^{\varepsilon}} = \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} \left(\frac{q}{p^*}\right)^{\varepsilon} \tag{12}$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 10. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 2$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что при $\alpha > 1 + \frac{1}{\ln\ln p}$ справедлива оценка*

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) \leqslant \frac{8s \cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}. \tag{13}$$

Доказательство. Выберем в лемме 9 $\varepsilon = \frac{1}{\ln\ln p}$. Получим

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s) \leqslant \frac{8s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} \left(\frac{q}{p^*}\right)^{\frac{1}{\ln\ln p}}.$$

Так как $\frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}} < p^* < p$, $p^* < q < p$, то $1 < \frac{q}{p^*} < 2(3+2\ln p)^{s-1}$,

$$\left(\frac{q}{p^*}\right)^{\frac{1}{\ln\ln p}} < e^{\frac{\ln 2+(s-1)\ln(3+2\ln p)}{\ln\ln p}} < e^{\frac{\ln 2+(s-1)(\ln 3+\ln\ln p)}{\ln\ln p}} < e^s.$$

Отсюда следует, что

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s) \leqslant \frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}}.$$

Применяя равенство (4) и лемму 4, получим утверждение леммы:

$$\zeta_H(\Lambda(a_1,\dots,a_s;p)|\alpha) \leqslant \frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

□

Теорема 2. *Для любого простого $p > 2\cdot 3^s + 2$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1,\dots,a_s)$ с $(1 \leqslant a_1,\dots,a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что $q = q(a_1,\dots,a_s) \geqslant p^*$ и при $\alpha > 1 + \frac{1}{\ln\ln p}$, $N = p$ для $f \in E_s^\alpha(C)$ погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1,\dots,x_s)dx_1\dots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\left(\frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}\right).$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1 из работы [1] с заменой леммы 7 на лемму 10. □

3. Заключение

Доказанная оценка по порядку точнее оценки Бахвалова—Коробова. Сравнение её с оценками типа оценки В. А. Быковского будет темой наших дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

2. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

4. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решётки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2023, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

2. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

3. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

4. N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

Получено: 20.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-354-360

Об экстремальном множестве частных целых чисел

Ю. Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В статье изучается следующая задача. Пусть заданы два конечных подмножества из множества натуральных чисел, которые всюду в тексте будут обозначаться как A и B. Будем считать, что они принадлежат конечному отрезку чисел $[1, Q]$. По определению задаем множество дробей A/B, элементы которого являются представимыми в виде частного этих множеств A, B, то есть такие элементы a/b, где $a \in A, b \in B$. В статье исследуются свойства этого подмножества частных. В статье [13], была получена нетривиальная нижняя оценка на размер множества A/B для таких множеств A, B без всяких дополнительных условий на эти множества. В данной статье мы рассматриваем экстремальный случай , который состоит в следующем. Пусть известно, что размер множества произведений AB является асимптотически наименьшим возможным. Мы выводим отсюда, что размер множества частных A/B является асимптотически наибольшей возможной величиной.

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, гладкие числа, произведение.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
Ю. Н. Штейников. Об экстремальном множестве частных целых чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 354–360.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-354-360

On the extremal set of quotient of natural numbers

Yu. N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolaevich — Federal Research Center “Research Institute of System Research of the Russian Academy of Sciences” (Moscow).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

The article studies the following problem. Let two finite subsets from the set of natural numbers be given, which will be denoted throughout the text as A and B. We will assume that they belong to a finite interval of numbers $[1, Q]$. By definition, we define a set of fractions A/B whose elements are representable as a quotient of these sets A, B, in other words such elements a/b, where $a \in A, b \in B$. The article investigates the properties of this subset of quotients. In the article [13], a non-trivial lower bound on the size of the set A/B for such sets A, B was obtained without any additional conditions on these sets. In this article, we in details consider an extreme case, which is as follows. Let it be known that the size of the set of products AB is asymptotically the smallest possible. We deduce from this that the size of the set of quotients A/B is the asymptotically largest possible value.

Keywords: integer numbers, density, smooth numbers, product.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
Yu. N. Shteinikov. 2023, "On the extremal set of quotient of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 354–360.

1. Введение

Пусть множества A, B являются какими-то подмножествами натуральных чисел. Множество A/B называется частным множеств A и B, и определяется как

$$A/B = \{a/b : a \in A, b \in B\}.$$

Дадим определение мультипликативной энергии двух множеств A, B обозначаемой как $E(A, B)$

$$E(A, B) = |\{a_1 b_1 = a_2 b_2 : a_1, a_2 \in A; b_1, b_2 \in B\}|.$$

В случае когда $A = B$ мы вместо $E(A, B)$ пишем просто $E(A)$.

Стоит отметить, как мы ниже выведем, величина $E(A, B)$ и размер множеств $A/B, AB$ связаны простым неравенством, которое можно отнести еще к исследованию Шнирельмана Shnirel'man [12] и также может быть найдено в [11].

$$|AB|, |A/B| \geq \frac{|A|^2|B|^2}{E(A, B)}. \tag{1}$$

.

Выведем аккуратно это неравенство.

Пусть $r_{AB}(z), r_{A/B}(z)$ обозначает число представлений элемента z в виде произведения, соответственно частного в виде $z = ab$, соответственно $z = a/b$. Далее легко видеть, что величина энергии $E(A, B) = \sum_z r^2_{AB}(z), E(A, B) = \sum_z r^2_{A/B}(z)$. С другой стороны, по неравенству Коши

$$|AB| = \sum_z r_{A/B}(z) \leq |A/B|^{1/2} E(A, B)^{1/2},$$

из которого и следует нужное нам неравенство.

Используя известную оценку для $r_{AB}(z)$ через тау функцию в нашем случае легко вывести из последнего неравенства следующие соотношения :

Для любого $A \subset \mathbb{N}$ такого что $a \in A \Rightarrow a \leq Q$, имеет место

$$|AA| \geq |A|^2 \exp\Big\{(-2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty; \tag{2}$$

$$E(A) \le |A|^2 \exp\Big\{(2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty. \tag{3}$$

Эти неравенства содержат неулучшаемые оценки . Далее имея оценку на энергию $E(A)$ мы легко выводим следующее неравенство:

$$|A/A| \ge |A|^2 \exp\Big\{(-2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty. \tag{4}$$

Однако последнее неравенство не является наилучшим возможным. В статье [13] было произведено улучшение.

Теорема 1. *Имеется абсолютная константа $\gamma > 0$ такая что если $A, B \subseteq [1, Q]$, то тогда*

$$|A/B| \ge |A||B| \exp\Big\{(-2\log 2 + \gamma + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty.$$

Можно взять $\gamma = 0.098$.

Эта оценка тоже скорее всего не является окончательной. В настоящей статье мы рассмотрим экстремальную ситуацию, когда размер $|AB|$ является ассимптотически наименьшей величиной, то есть $|AB| = |A||B| \exp\Big\{(-2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}$. В этом случае покажем, что размер множества частных будет наоборот ассимптотически наибольшей величиной. Выведем соответствующее утверждение следуя аргументам, предложенным в статье [13].

Теорема 2. *Если $|AB| = |A||B| \exp\Big\{(-2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, Q \to \infty$, то*

$$|A/B| = |A||B| \exp\Big\{(o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty.$$

2. Доказательство основного результата.

Перейдем непосредственно к доказательству Теоремы 2.

Доказательство.

Пусть вещественно c определяется из равенства :

$$E(A, B) = |A||B| \exp\Big\{(2\log 2 - c)\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}.$$

Из неравенства 1 и условий теоремы легко заключить, что $c = o(1), Q \to \infty$.

Для удобства в дальнейшем определим L из формулы $E(A, B) = |A||B|L$, и пусть как и раньше было введено

$$r_{A,B}(z) = |\{(a_1, b_1) \in A \times B : a_1 b_1 = z\}|.$$

Определим множество M_1, (которое мы вынесем из дальнейшего рассмотрения)

$$M_1 = \{z \in AB : r_{A,B}(z) \le L/2\}$$

и множество M_2 (с которым будем в дальнейшем работать)

$$M_2 = AB \setminus M_1.$$

Из предыдущих обозначений и формул легко видеть, что

$$\sum_{z\in M_1} r^2_{A,B}(z) \le |A||B|L/2;$$

и соответственно

$$\sum_{z\in M_2} r^2_{A,B}(z) \ge |A||B|L/2.$$

Для целого натурального $i \ge 0$ обозначим

$$M_{2,i} = \{z \in AB : r_{A,B}(z) \in (2^{i-1}L, 2^iL]\}.$$

Мы видим, что множество M_2 состоит из объединения $M_{2,i}$.

$$M_2 = \bigcup_{0\le i\ll \frac{\log Q}{\log\log Q}} M_{2,i}.$$

Поэтому из принципа среднего заключаем существование такого $0 \le i \ll \frac{\log Q}{\log\log Q}$ что

$$\sum_{z\in M_{2,i}} r^2_{A,B}(z) \ge |A||B| \exp\Big\{(2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}.$$

Возьмем и фиксируем такое i пусть вещественное число c' определяется из следующего соотношения:

$$2^iL = \exp\Big\{(2\log 2 - c')\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}.$$

Легко видеть, что $c' = o(1)$. Выведем, что

$$\sum_{z\in M_{2,i}} r_{A,B}(z) \ge |A||B| \exp\Big\{(o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q\to\infty.$$

Имеет место :

$$|A||B| \exp\Big\{(2\log 2 + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\} \le \sum_{z\in M_{2,i}} r^2_{A,B}(z) \le \max_{z\in M_{2,i}} r_{A,B}(z) \sum_{z\in M_{2,i}} r_{A,B}(z).$$

Величина $\max_{z\in M_{2,i}} r_{A,B}(z)$ не превосходит

$$\exp\Big\{(2\log 2 - c')\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}.$$

Их этого и вышенаписанного следует нужное нам неравенство. Обозначим в дальнейшем черз G множество G:

$$G = \{(a_1, b_1) \in A\times B : a_1b_1 \in M_{2,i}\}.$$

Предыдущее неравенство можно переписать так :

$$|G| > |A||B| \exp\Big\{(o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q\to\infty.$$

Рассмотрим множество , (которое даст утверждение теоремы)

$$W = \Big\{\frac{a_1}{b_1} : (a_1, b_1) \in G\Big\},$$

и докажем, что $|W|$ имеет ассимптотически максимальный размер. Для каждого элемента $z \in M_{2,i}$ мы используем соответствующую лемму из [13], видим, что максимальный квадрат делящий z есть

$$l(z) = Q^{o(1)}, \quad Q \longrightarrow \infty.$$

Это означает, что для каждой пары $(a_1, b_1) \in G$ справедливо $\gcd(a_1, b_1) \leq Q^{o(1)}$. По определению пусть

$$r_{A/B,G}(z) = \Big\{(a_1, b_1) \in G : \frac{a_1}{b_1} = z\Big\}.$$

Таким образом мы можем написать :

$$|A||B| \exp\Big\{(o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\} \leq |G| = \sum_z r_{A/B,G}(z) \leq$$

$$\leq |W|^{1/2}\Big\{\sum_z r^2_{A/B,G}(z)\Big\}^{1/2}.$$

Теперь наша ближайшая цель получить хорошую верхнюю оценку для

$$\sigma = \sum_z r^2_{A/B,G}(z).$$

Выражение σ не превосходит числа решений равенства

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad a_i \in A; b_i \in B, \gcd(a_1, b_1), \gcd(a_2, b_2) \leq Q^{o(1)}.$$

Можно написать параметрически

$$a_1 = tu, b_1 = tv, a_2 = su, b_2 = sv;$$

где

$$\gcd(u, v) = 1 \quad and \quad t, s \leq Q^{o(1)}.$$

Зафиксируем a_1 и b_2. Для этого случая a_1 b_2 мы выбираем значение t и s и тем самым мы однозначно определяем a_2 и b_1. Эти значения t, s являются делителями a_1, b_2 соответственно и кроме того мы знаем, что

$$t, s \leq Q^{o(1)}.$$

Используя лемму о числе делителей из работы [13] мы видим, что число пар (t, s) не превосходит

$$\exp\Big\{\Big(o(1)\Big)\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty.$$

Мы заключаем, что

$$\sigma < |A||B| \exp\Big\{\Big(o(1)\Big)\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, Q \to \infty.$$

И тем самым получается нижняя оценка для $|W|$

$$|W| \geq |A||B| \exp\Big\{o(1)\Big)\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, \quad Q \to \infty.$$

Множество значений W лежит в A/B , а мы получили нижнюю оценку для $|W|$ и тем самым доказали теорему.

□

3. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [10], [8], [9], [7], [1], [6] и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shteinikov Yu., On the product sets of rational numbers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P 243-250.

2. Cilleruelo J., Ramana D.S., Ramare O. Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P. 52-64.

3. Prachar K. Primzahlverteilung // Springer–Verlag Berlin–Gőttingen–Heidelberg, 1957.

4. Shteinikov Yu. N. Addendum to the paper "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers"by J. Cilleruelo, D.S. Ramana and O. Ramare. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P. 251-255.

5. Hildebrand A., Tenenbaum G. Integers without large prime factors // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 5, 1993, P. 411-484.

6. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm // Int. Math Research Notices. 2008. rnn 090, P. 1-29.

7. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory 2016, Vol. 12, No. 05, P. 1415-1420.

8. Cilleruelo J., Garaev M. Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2016. Vol. 160, Issue 03, P. 477-494,

9. Konyagin S., Shkredov I. New results on sums and products in R, Proc. // Steklov Inst. Math., 2016. № 294 , P. 78-88.

10. Konyagin S., Shkredov I. On Sum Sets of Sets Having Small Product Set // Proc. Steklov Inst. Math. 2015, Vol. 290, P. 288–299.

11. Tao T., Vu V. Additive combinatorics // Cambridge University Press 2006, P. 1-530.

12. Shnirel'man L.G. Uber additive Eigenschaften von Zahlen // Mathematische Annalen, V. 107 1933, P. 649-690.

13. Ю. Н. Штейников, О размере частного двух подмножеств натуральных чисел // Гармонический анализ, теория приближений и теория чисел, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Сергея Владимировича Конягина, Тр. МИАН, 2018. Т. 303, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., С. 279–287.

REFERENCES

1. Shteinikov Yu., "On the product sets of rational numbers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* vol. 296, Issue 1, pp. 243-250.

2. Cilleruelo J., Ramana D.S., Ramare O. "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, Iss. 1, pp. 52-64.

3. Prachar K. 1957, "Primzahlverteilung", *Springer–Verlag Berlin–Gőttingen–Heidelberg.*

4. Shteinikov Yu. N. "Addendum to the paper "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers" by J. Cilleruelo, D.S. Ramana and O. Ramare", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* vol. 296, Iss. 1, pp. 251-255.

5. Hildebrand A., Tenenbaum G. 1993, "Integers without large prime factors", *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* vol. 5, pp. 411–484.

6. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. 2008, "Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm", *Int. Math Research Notices.*. rnn 090, pp. 1–29.

7. Cilleruelo J. 2016, "A note on product sets of rationals", *International Journal of Number Theory*, vol. 12, no. 05, pp. 1415–1420.

8. Cilleruelo J., Garaev M. 2016, "Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 160, Iss. 03, pp. 477–494.

9. Konyagin S., Shkredov I. 2016, "New results on sums and products in R"„ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 294 , pp. 78–88.

10. Konyagin S., Shkredov I. "On Sum Sets of Sets Having Small Product Set", *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 290, pp. 288–299.

11. Tao T., Vu V. 2006, "Additive combinatorics", *Cambridge University Press*, pp. 1-530.

12. Shnirel'man L.G. 1933, "Uber additive Eigenschaften von Zahlen", *Mathematische Annalen*, vol. 107, , pp. 649-690.

13. Shteinikov Yu.N. "On the Size of the Quotient of Two Subsets of Positive Integers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics volume* vol. 303, pp. 259–267.

Получено: 19.08.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-24-4-361-371

Историко-математическое наследие Фёдора Андреевича Медведева (к 100-летию со дня рождения)

Р. А. Мельников О. А. Саввина

Мельников Роман Анатольевич — кандидат педагогических наук, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина (г. Елец).
e-mail: roman_elets_08@mail.ru
Саввина Ольга Алексеевна — доктор педагогических наук, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина (г. Елец).
e-mail: oas5@mail.ru

Аннотация

В 2023 году исполнилось 100 лет со дня рождения известного отечественного ученого Фёдора Андреевича Медведева (1923–1993), внёсшего неоценимый вклад в развитие мировой истории математики. На протяжении многих десятилетий он был одним из ведущих научных сотрудников Института истории, естествознания и техники (ИИЕТ) Российской Академии наук. Его перу принадлежат пять монографий, каждая из которых явилась новаторской для историко-математической литературы, как по объёму и глубине, так и по значимости охватываемого материала. Его научные работы получили высокую оценку за рубежом, в течение нескольких лет он входил в редколлегию международного журнала «Historia Mathematica». Написанные им труды по истории математики не потеряли актуальности и в настоящее время. Предлагается реконструкция научного пути Ф.А. Медведева, дается характеристика его фундаментальных работ и раскрывается их роль в развитии истории математики в России.

Ключевые слова: Ф.А. Медведев, история теории множеств, история теории функций действительного переменного, международные связи русских математиков.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Р. А. Мельников, О. А. Саввина. Историко-математическое наследие Фёдора Андреевича Медведева (к 100-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 361–371.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-24-4-361-371

Historical and mathematical heritage of Fyodor Andreevich Medvedev (to the 100th anniversary of his birth)

R. A. Melnikov O. A. Savvina

Roman Anatolievich Melnikov — candidate of pedagogical sciences, Yelets State Bunin University (Yelets).
e-mail: roman_elets_08@mail.ru
Olga Alekseevna Savvina — doctor of pedagogical sciences, Yelets State Bunin University (Yelets).
e-mail: oas5@mail.ru

Abstract

In 2023, the 100th anniversary of the birth of the famous Russian scientist Fyodor Andreevich Medvedev (1923-1993), who made an invaluable contribution to the development of the world history of mathematics, was celebrated. For many decades, he was one of the leading researchers at the Institute of History, Natural Science and Technology (IIET) of the Russian Academy of Sciences. He wrote five monographs, each of which was innovative for historical and mathematical literature, both in terms of volume and depth, and in terms of the significance of the material covered. His scientific works were highly appreciated abroad, for several years he was a member of the editorial board of the international journal "Historia Mathematica". The works he wrote on the history of mathematics have not lost their relevance at the present time. The reconstruction of the scientific path of F.A. Medvedev is proposed, the characteristics of his fundamental works are given and their role in the development of the history of mathematics in Russia is revealed.

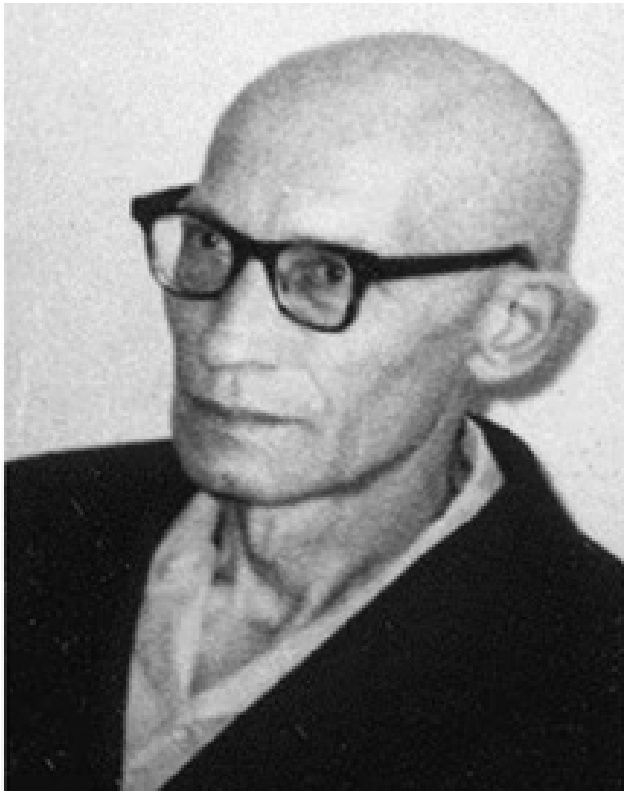
Keywords: F.A. Medvedev, history of set theory, history of the theory of functions of a real variable, international relations of Russian mathematicians.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
R. A. Melnikov, O. A. Savvina, 2023, “Historical and mathematical heritage of Fyodor Andreevich Medvedev (to the 100-th anniversary of his birth)” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 361–371.

Фёдор Андреевич Медведев родился 18 февраля 1923 года в крестьянской семье в деревне Богдановка, располагавшейся неподалеку от старинного русского города Козельск (Калужской области). Сначала мальчик учился в начальной школе соседнего села Бурнашево. Затем семья перебралась в Козельск, где в 1940 году Ф.А. Медведев успешно окончил среднюю школу и в том же году поступил на физико-математический факультет Воронежского государственного университета. Однако уже через год обучение пришлось прервать из-за обострения туберкулёза коленного сустава – болезни, от которой он страдал с детства.

В сентябре 1943 года он снова попытался получить высшее образование, поступив на второй курс мехмата Московского государственного университета, но снова давняя болезнь не дала этого сделать. Ф.А. Медведев вернулся в Козельск, где в течение последующих четырёх лет работал инструктором-бухгалтером в райотделе сельского хозяйства. В сентябре 1948 года стал студентом физико-математического факультета Калужского пединститута.



В 1951 году в Ленинграде ему была сделана операция, после чего с туберкулезом, по его словам, «было покончено», но с тех пор хромота стала его постоянной спутницей.

После операции вернулся в Калугу, окончил в 1952 г. Калужский пединститут и стал трудиться учителем математики в школе села Недельное Малоярославецкого района Калужской области.

В 1955–1958 гг. обучался в аспирантуре в Институте истории, естествознания и техники (ИИЕТ АН СССР) под научным руководством Адольфа Павловича Юшкевича (1906–1993) [1].

В качестве темы диссертационного исследования А.П. Юшкевич предложил Фёдору Андреевичу перспективную, но довольно сложную тему «Первые работы в России по теории множеств и теории функций действительного переменного».

Начинающему ученому предстояло проделать грандиозную работу. Дело в том, что это направление науки (истории теории множеств и теории функции), во-первых, было совершенно новым, так как по историческим меркам события, которые требовалось изучить, происходили сравнительно недавно (укладывались в столетие). Во-вторых, от автора требовалось владение несколькими иностранными языками, так как предстояло анализировать первоисточники, написанные на французском и немецком языках. В-третьих, требовались довольно глубокие знания в области философии и методологии, в частности философское осмысление категории «бесконечность».

Зачатки понятий теории множеств и теории функции появились в математике с тех пор, как в неё были введены идеи непрерывности и бесконечности. Парадоксы Зенона, средневековые споры о свойствах континуума и дискретного, развитие бесконечно малых в XVII – XVIII вв. неоднократно выдвигали перед математиками ряд проблем теоретико-множественного и теоретико-функционального характера.

В самостоятельную дисциплину теория множеств начала складываться лишь в 1880-е годы, но при этом она не сразу получила признание математиков. Ф.А. Медведев выявил одну из причин, препятствующих развитию теории множеств: «Это обусловливалось, в частности,

тем, что овладение теорией множеств требовало перехода на более высокую ступень абстракции, чем та, на которой была математика в целом к последней четверти прошлого века, и тем, что основным понятием теории множеств было понятие актуальной бесконечности, а в математике к этому времени уже имелся печальный опыт неудачного использования этого понятия; помимо того, многие вопросы теории множеств были связаны с философией и это отталкивало тех математиков, которые желали отгородиться от философии» [2].

В теории множеств принято выделять два направления – абстрактную теорию множеств и теорию точечных множеств. Последняя возникла внутри давно сложившейся дисциплины – анализа бесконечно малых величин, где её понятия и методы широко применялись в последней четверти XIX века (например, известный французский математик Мари Энмон Камиль Жордан (1838–1922) при написании своего «Курса анализа» (1893) положил теорию множеств в основу всего исчисления бесконечно малых). В абстрактной же теории рассматриваются множества, природа элементов которых не берётся в расчёт. По словам А.В. Архангельского, «важнейшей особенностью почти всех абстрактных множеств, встречающихся в математике, является их бесконечность. Это связано с характерной чертой математики – идеализацией рассматриваемых ситуаций» [3, с. 6]. Естественно, что изучение точечной теории множеств, элементами которых являются точки, влечёт появление особенных свойств, не характерных для абстрактных множеств. По этому поводу мы находим комментарий израильского математика, одного из основоположников аксиоматической теории множеств Абрахама Галеви Френкеля (1891–1965): «Однако теория точечных множеств развилась столь значительно и получила такое огромное значение как в анализе, так и в геометрии, что её нельзя больше рассматривать в качестве специального случая абстрактной теории множеств. Она стала сама по себе отраслью математики, со своими собственными понятиями и методами, сохраняя лишь наиболее общие понятия абстрактной теории. Фактически пути и цели этих двух теорий разошлись довольно быстро в самом начале» [4, p. 17].

Трудами Юлиуса Вильгельма Рихарда Дедекинда (1831–1916), Георга Кантора (1845–1918), предвосхищённых гениальными работами в 1830–1840-е годы чешского математика, философа и теолога Бернарда Больцано (1781–1848) был завершен первый этап развития теории множеств, который иногда называют «наивной теорией множеств». Это название закрепилось в силу того, что идеи и методы, предложенные её создателями, не были формализованы и аксиоматизированы.

Уточнению различных сторон новой ветви математики способствовали работы как сторонников теории множеств (Поля Дюбуа-Реймона (1831–1889), Ивара Отто Бендиксона (1861–1931), Феликса Бернштейна (1878–1956)), так и критиков этой теории (в первую очередь, Леопольда Кронекера (1830–1914), которому принадлежит высказывание: «Я не знаю, что преобладает в теории Кантора – философия или теология, но я уверен, что математики там нет»).

Ф.А. Медведев обратил внимание на то, что «почти сразу же теоретико-множественные представления проникли в теорию функций, что привело на рубеже XIX и XX вв. к формированию современной теории функций действительного переменного» [5, с. 3]. Эти две новые математические дисциплины сложились на протяжении всего трёх десятков лет, притом не без сопротивления со стороны некоторых видных учёных (Л. Кронекер и др.). Такой быстрый рост объясняется тем, что внутри математики назрела острая потребность в их разработке.

Уже к концу XIX века ощущалась необходимость в создании такой работы, которая вобрала бы в себя разнообразные результаты, зафиксированные на страницах различных математических журналов, дала бы систематическое, стройное, но всё же доступное их изложение. Эту потребность частично удовлетворила книга «Лекции по теории функций» (1898), написанная одним из крупнейших французских математиков Эмилем Борелем (1871–1956). По словам Е.М. Полищука (1914–1987), Э. Борель «сознавал роль теоретико-множественного подхода к комплексному анализу» [6, с. 26-27]. Ф.А. Медведев особо подчеркивал вклад этого

труда Э. Бореля в теорию множеств: «Подбор материала и изложение таковы, что сразу видно стремление автора ограничиться насколько можно, точечными множествами, привлекая абстрактные множества лишь по мере необходимости» [5, с. 239].

При этом Ф.А. Медведев заметил, что основные результаты теории множеств, полученные до 1898 года, были собраны в статье немецкого математика Артура Морица Шёнфлиса (1853–1928), написанной для «Энциклопедии математических знаний с их приложениями» и опубликованной в Лейпциге в 1899 г.

Распространение новых математических идей в России (через лекции, учебные руководства, статьи, семинары и т.д.) началось с первых лет XX столетия. В 1904 г. появляется первая публикация с изложением канторовских идей в России [7]. Её автором стал тогда начинающий ученый и богослов П.А. Флоренский, который попытался исследовать философский аспект идеи непрерывности [8]. В дальнейшем новой теорией увлекся его студенческий друг и будущий знаменитый математик Н.Н. Лузин (1883–1950).

В 1906 году П.Ж.Л. Фату (1878–1929) поставил вопрос о том является ли стремление к нулю коэффициентов тригонометрического ряда к нулю достаточным условием сходимости почти всюду такого ряда, а в 1909 г. немецкий математик Г.В.Э Юнг (1876–1953) в работе «Заметка о тригонометрических рядах» обнаружил, что теорема о единственности разложения сохраняется, если пренебрегать счетным множеством точек. В 1911 Н.Н. Лузин привел пример тригонометрического ряда, у которого коэффициенты стремились к нулю, но он расходился почти всюду. Далее, учитывая результаты Г. Кантора и В. Юнга, Николай Николаевич стал склоняться к тому, что не существует тригонометрического ряда с коэффициентами, отличными от нуля, сходящегося к нулю почти всюду. В 1916 году ученик Н.Н. Лузина – Д.Е. Меньшов (1892–1988) смог построить такой ряд.

В творчестве Н.Н. Лузина выделяют два периода – первый, посвящённый проблемам метрической теории функций, завершившийся его знаменитой диссертацией «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), и второй, посвящённый преимущественно разработке проблем теории аналитических множеств [9].

Московская школа теории функций и дескриптивной теории множеств, выступив с первыми работами Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина, выдала ряд блестящих результатов, полученных, в первую очередь Н.Н. Лузиным и его учениками: А.Я. Хинчиным, Д.Е. Меньшовым, М.Я. Суслиным и др. Стремление связать и сблизить наиболее общие понятия теории функций с понятиями классического анализа, необычайное искусство в построении изящных примеров, решавших весьма важные вопросы теории функций – главные черты Лузитании [9, с. 403–412.]

Ученики и последователи Н.Н. Лузина продолжали свои исследования в стенах Московского университета, поэтому Ф.А. Медведев, несомненно, имел уникальный опыт общения с живыми свидетелями изучаемых им событий.

Особенностью научного творчества Ф.А. Медведева стало то, что он искал зачатки теории множеств и теории функций в разных разделах математики. Уже в кандидатском исследовании он выделил следующие важнейшие разделы математики, послужившие отправными точками для создания теории множеств и теории функций: «1) исследования по представлению функций тригонометрическими рядами, 2) тесно связанная с тригонометрическими рядами Фурье теория интегрирования, 3) исследования по основаниям анализа и учение об иррациональных числах, 4) общие исследования по обоснованию математики, 5) теория роста функций, 6) теория аналитических функций» [5, с.4].

Ученый отмечал: «при рассмотрении вопроса об изображении функций степенными рядами не возникает нужды в выделении на прямой множеств точек, отличных от отрезков. Иначе обстоит дело в случае тригонометрических рядов. Возможность изображения функции тригонометрическим рядом зависит только от поведения функции в непосредственной близости рассматриваемой точки (так называемый принцип локализации Римана). Тригонометрический ряд, изображающий функцию, может сходиться в одних точках отрезка и расходиться

в других. Область сходимости, вообще говоря, является здесь множеством точек сложной природы. Это обстоятельство вызвало необходимость в исследовании различных точечных множеств» [5, с.4-5].

Учёная степень кандидата физико-математических наук была присвоена Ф.А. Медведеву в 1963 году. Материалы, представленные в кандидатской диссертации, были положены в основу его первой монографии «Развитие теории множеств в XIX веке», увидешей в свет в 1965 году. В том же году он стал старшим научным сотрудником ИИЕТ АН СССР.

В первой главе «Зарождение идей теории множеств в различных математических дисциплинах» монографии автор сосредоточил свои усилия на поиске «следов» появления первичных фактов и положений, касающихся теории множеств. Рассмотрев сначала детально труд К. Гаусса «Арифметические исследования» (1801), Фёдор Андреевич пришёл к выводу: «здесь мы всё время имеем дело с различными бесконечными множествами. Это множества классов вычетов по тому или иному модулю; множество корней сравнения $<\ldots>$; это множества форм с различными определителями и множества классов и родов форм одного и того же определителя и т.д. Все эти бесконечные множества рассматриваются как завершенные актуальные совокупности, описываемые достаточно простыми условиями $<\ldots>$ “Арифметическим исследованиям присущ теоретико-множественный метод решения задач теории чисел» [10, с. 18-19].

Затем в результате анализа работ по теории функциональных сравнений Ф.А. Медведев сделал заключение, что первую попытку переноса алгоритма Евклида на этот класс задач в 1830 году предпринял юный французский математик Э. Галуа (1811–1832), который весьма в сжатой форме изложил основы теории функциональных сравнений и применил их к решению вопроса о разрешимости в радикалах алгебраического уравнения.

Дальнейшее развитие это направление математики получило в трудах французского математика Ж.А. Серре (1819–1885) и немецких математиков Т. Шёнемана (1812–1868) и Р. Дедекинда. Соглашаясь со мнением норвежского математика О. Оре (1899–1968), Ф.А. Медведев заметил: «Дедекинд свел теорию функциональных сравнений к её простейшей, чисто теоретико-множественной форме, тем самым становится ненужной вся теория мнимых Галуа» [10, с. 28].

Анализируя труды известных геометров Я. Штейнера (1796–1863) и К. Штаудта (1798 – 1867) Ф.А. Медведев приходит в выводу: «Штейнер выступает в качестве представителя теоретико-множественного метода: свойства, установленные для элементов одного множества (например, точек прямой), при посредстве проективного соответствия переносятся на элементы другого множества (например, плоского пучка лучей), т.е. изучение свойств образов одного рода сводится к изучению свойств образов другого рода и это сведение осуществляется через установление взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств» [10, с. 30]. Что касается К. Штаудта, то ему в 1856 году первым удалось реализовать идею замены идеальных элементов бесконечными множествами действительных элементов. Таким образом, Ф.А. Медведев обнаруживал зачатки теории множеств и в проективной геометрии.

В становлении математического анализа важную роль, как известно, сыграли геометрические и механические представления, но с течением времени их стало недостаточно. Это привело к идее о построении анализа, как самостоятельного раздела математики, завершающим этапом которого стало построение теории действительных чисел. На протяжении XVIII века главным инструментом математического анализа (аналитического изображения функций) был аппарат степенных рядов. Ключевой вопрос, связанный с установлением критерия их сходимости, был решён в 1826 г., благодаря усилиям талантливого норвежского математика Н.Х. Абеля (1802–1829), сформулировавшего соответствующую теорему. С появлением в математике тригонометрических рядов, а точнее с момента установления отличия решения вопроса об их сходимости относительно проблемы сходимости степенных радов, произошло изменение, в первую очередь, в представлениях о функции вообще. Наибольший интерес с точки зрения предыстории теории множеств, по мнению Ф.А. Медведева, представлял мемуар

Б. Римана «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» (1867). Ранее применялись ряды Фурье, завязанные на использование интеграла в смысле Коши (для непрерывных функций и функций, имеющих конечное множество точек разрыва), но начиная с работы Б. Римана подынтегральные функции могли иметь различные бесконечные множества точек разрыва, что делало непригодным к ним интегралов Коши. Ещё один шаг, касающийся вопроса об интегрируемости функции в зависимости от множества её точек разрыва, был сделан в 1870 году немецким математиком Г Ганкелем (1839–1973) в его работе «Исследования о функциях, совершающих бесконечно много колебаний и разрывных», в ней он ввёл понятие нигде не плотного множества.

Кроме того, континуум с появлением тригонометрических рядов стал пониматься иначе, он распался на отдельные точки, т.е. стал представлять собой «множество точек». Отсюда же и пошло новое представление о функции как о совершенно произвольном соответствии двух точечных множеств. Такой подход обнаруживается в трудах Н.И. Лобачевского (1792–1856) и П.Л. Дирихле (1805–1859).

В 1878 году вышла в свет первая монография по теории функций действительного переменного – книга «Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali» итальянского математика У. Дини (1845–1918). Ф.А. Медведев отметил связь между двумя новыми разделами математики: «Достаточно пролистать эту книгу, чтобы увидеть, насколько назрело в теории функций действительного переменного к этому времени использование именно теоретико-множественного подхода. Те, ещё скромные результаты, которые были получены тогда в теории множеств, находят многообразные применения в самых различных вопросах теории функций» [10, с. 102].

Ф.А. Медведев детально описал исследования Дедекинда по теории множеств алгебраических чисел и функций. Ещё в 1877 году Г. Кантору удалось получить первое доказательство эквивалентности континуумов разного числа измерений, вызвавшее резонанс в математическом мире, но при этом содержавшее неточности, на которые ему указал Дедекинд.

Таким образом, к концу 1870-х гг. накопилась совокупность разрозненных теоретико-множественных фактов, которые требовали обобщения. Работы Г. Кантора, касающиеся мощности континуума и эквивалентности континуумов разного числа измерений, представляли собой значимый вклад в теорию множеств, но все же выпадали из общей схемы.

Г. Кантор же, осознав возможность и нужность разработки нового учения о точечных множествах, с неистовым рвением взялся за это дело, что в немалой степени повлияло на его состоянии здоровья. В 1879–1882 гг. он написал три статьи, которые содержали обобщения и систематизацию всего того, что к этому времени было известно о точечных множествах. В 1880 году Кантор сформулировал две ведущие идеи теории множеств – понятие пустого множества и метод трансфинитной индукции, а также ввёл в математический аппарат основные операции над множествами и символ эквивалентности.

Далее Ф.А. Медведев рассмотрел теоретико-множественные содержание труда Д. Пеано (1858–1932) «Геометрические приложения анализа бесконечно малых» (1887). Описал некоторые работы по теории множеств конца 1880-х – начала 1890-х годов, парадоксы теории множеств, а также отношение математиков к теории множеств в период её создания.

Завершает первую монографию Ф.А. Медведева глава «Методы теории множеств в других математических дисциплинах», чем автор подчеркивает универсальный характер и широкие приложения новой теории.

Наш современник Е.А. Зайцев отметил особенность исследовательского подхода, предложенного Ф.А. Медведевым: «В анализе предпосылок становления теории множеств Медведеву удалось избежать (часто встречающегося) соблазна представить формирование математической теории в виде непрерывного (линейного) движения, идущего от зарождения новых идей до их окончательного оформления. Наставая на многофакторности развития Федор Андреевич критически отнесся к традиционному взгляду на теорию множеств, согласно которому

новая дисциплина была обязана своим становлением исключительно работам Г. Кантора по теории тригонометрических рядов. Для воссоздания полной, более адекватной картины ее развития он впервые привлек к рассмотрению другой важный источник – работы Р. Дедекинда по алгебре и основаниям математики» [11, с. 82-83].

Следующим знаковым событием в научном творчестве Ф.А. Медведева стал выход в свет его второй монографии «Развитие понятия интеграла» (1974).

Эта книга не является первой в области истории интеграла. Еще в 1966 году под таким же названием была опубликована монография Ивана Николаевича Песина (*1930), но её содержание было существенно уже, нежели в фолианте Ф.А. Медведева, объем которого составлял 424 страницы.

Ф.А. Медведев, со свойственной ему вдумчивой скрупулёзностью собрал, осмыслил и расположил в хронологическом порядке интересные исторические факты и важные математические сведения, касающиеся формирования теории интегрирования. Монография включает в себя шесть глав. В первой из них рассмотрены интеграционные методы в древности и средние века (метод исчерпывания Евдокса, интеграционные методы Архимеда, элементы интеграционных приемов у Паппа, а также описание способов получения квадратуры и кубатуры в средние века). Вторая глава посвящена описанию интеграционных методов в XVI–XVII веках (рассмотрен генезис представлений: от первых исследований о центрах тяжести, через идеи И. Кеплера и Б. Кавальери, а также через рассмотрение приемов вычисления некоторых видов определенных интегралов, к описанию и анализу некоторых результатов британских математиков Дж. Грегори (1638–1675) и И. Барроу (1630–1647)). В третьей главе зафиксирована эпоха создания интегрального исчисления, связанная с научной деятельностью И. Ньютона, Г.В. Лейбница и Л. Эйлера.

Современное понятие«определенный интеграл»,благодаря работам О. Л. Коши(1789–1857), опирается на понятие предел, поэтому четвертая глава была посвящена анализу трудов этого французского математика. Последующие три главы затрагивают вопросы развития понятия интеграла в смысле Римана, Лебега и Стилтьеса соответственно.

В заключении автор отметил: «Тема “Развитие понятия интеграла “необъятна. <...> Кроме того, имеются многочисленные более или менее изолированные пока определения интегралов, построенные для решения тех или иных вопросов, не решающихся при помощи упомянутых интегралов» [12, с. 383]. Тем самым, Федор Андреевич оставил своим современникам и последователям своеобразное послание, смысл которого довольно прост – продолжайте исследования в этом направлении и пишите новые научные статьи и книги.

Е.А. Зайцев обратил внимание на особенность этой книги Ф.А. Медведева, заключающуюся в том, «что в ней выдержан единый подход к понятию интегрирования: его история выстраивается в виде истории развития идей меры и измерения, а не как история операции, обратной к дифференцированию. Такой подход находит свое оправдание в реальной истории анализа бесконечно малых, в которой – в отличие от изложения современных учебников – разработка техники интегрирования (в геометрической форме) предшествовала становлению методов дифференцирования» [11, с. 82-83].

В 1975 году появился новый значимый научный труд Фёдора Андреевича – монография «Очерки истории теории функций действительного переменного». В этой книге по его словам, написанным в аннотации: «рассматривается предмет теории функций в историческом аспекте, излагается эволюция понятия функции с древности до настоящего времени, исследуется развитие различных видов сходимости бесконечных последовательностей, историческая взаимосвязь понятий производной и интеграла, изменение представлений о существовании производной у непрерывной функции» [13, с. 2]. Важно подчеркнуть, что в 1991 году в Базеле (Швейцария) вышел перевод этой книги под заголовком «Scenes from the History of Real Functions». Перевод на английский язык выполнил известный американский математик Р. Кук (1925–2007).

В 1976 году была опубликована очередная научная монография Ф.А. Медведева «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.».

В двух последних трудах автор настаивал на том, что в развитии теории функций отчетливо наблюдается преемственность, если рассматривать период с XVIII века и до 30-х годов XX века, чем опроверг укоренившуюся точку зрения о том, что это направление появилось в трудах немецкого математика П.Г.Л. Дирихле только в XIX веке.

Таким образом, буквально за три года появились три бестселлера, которые способствовали выдвижению Ф.А. Медведева в число мировых лидеров историко-математических исследований.

В начале 1980-х годов вектор научных изысканий Ф.А. Медведева направился в сторону методологии и обоснования науки. Его увлекает анализ скрытых предпосылок, составляющих реперные точки теоретической математики. Итогом этого периода стала публикация ещё одной, пятой по хронологии книги «Ранняя история аксиомы выбора» (1982). Её содержание включает пять глав: «Формулировки аксиомы выбора и некоторые ее эквиваленты. Рабочие гипотезы», «Аксиома выбора и классический анализ», «Аксиома выбора и ее эквиваленты в теории множеств», «Цермеловость теории функций действительного переменного», «Теорема Цермело о вполне упорядочении и начало полемики».

Одновременно он был также вовлечен в коллективную работу по подготовке издания трудов Георга Кантора по теории множеств (1985). Ф.А. Медведев провёл большую работу над переводом трудов Кантора по теории функций и теории множеств на русский язык, снабдив их подробными комментариями. Отметим здесь его участие в обсуждении вопроса о влиянии теологических идей на теоретико-множественные идеи Кантора. В книге содержится подробная биография немецкого ученого, написанная Фёдором Андреевичем.

А.П. Юшкевич, С.С. Демидов и С.С. Дугак подчеркивают значимость трудов Ф.А. Медведева, посвящённых исследованию категории бесконечности. Исследователи пишут, что труды Ф.А. Медведева «служат примером его оригинального подхода, особенно в части античной математики. Согласно Медведеву, невозможно логически разделить понятия конечного и бесконечного. Отсюда следует, что понятие бесконечного неявно использовалось в математических рассуждениях античной Греции, хотя греки прямо его не упоминали» [1].

Ф.А. Медведев принимал довольно активное участие в международных форумах. Выступал с докладами на 12-м Международном конгрессе по истории науки (Париж, 1968); 15-Международном конгрессе по истории науки (Эдинбург, 1977) и др. Bazhanov V.A., Anellis I.H. утверждают, что труды Ф.А. Медведева были хорошо известны на западе не только историкам математики, но и специалистам в области математической логики и философии математики [14]. Поэтому неудивительно, что они получили высокую оценку, как в России, так и за рубежом. В 1989 году Ф.А. Медведев стал членом редколлегии международного журнала «Historia Mathematica» [15].

Жизненный путь Фёдора Андреевича оборвался 5 февраля 1993 года в Москве, умер он во сне, не дожив до своего 70-летия около двух недель. Некрологи и заметки о нем поместили сразу несколько зарубежных журналов. Профессор университета в Инидианаполисе (IUPUI) Irving H. Anellis (1946-2013) в некрологе высоко оценил вклад Ф.А. Медведева в историю логики [16], а профессор Калифорнийского университета Angus E. Taylor – в историю теории функций [17].

Фёдора Андреевича Медведева можно считать эталоном служения науке, в его случае – её истории. Выбрав направление исследований в начале своего творческого пути, он ни разу не свернул с него. Написанное им содержит глубокую разработку философских аспектов ключевых проблем науки, открывая широкие перспективы для исследований по истории и философии математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Youschkevitch, A.P., Demidov, S.S., Dugac, P. 1983, Medvedev et son apport à l'histoire de la théorie des fonctions, Historia Mathematica, 10, pp. 396-398.
2. Медведев, Ф.А. 1959, Первые руководства и монографии по теории множеств, Труды ИИЕТ АН СССР, № 28, С. 237-249.
3. Архангельский, А.В. 1988, Канторовская теория множеств, Москва: Изд-во МГУ, 112 с.
4. Fraenkel, A.A. 1953, Abstract set theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
5. Медведев, Ф.А. 1963, Первые работы в России по теории множеств и теории функций действительного переменного, Москва: Изд-во Акад. наук СССР, 16 с.
6. Полищук, Е.М. 2018, Эмиль Борель 1871–1956. Москва: Либроком, 168 с.
7. Флоренский, П.А. 1904, О символах бесконечности (Очерк идей Г. Кантора), Новый путь, № 9. С. 173–235 (перепечатано в: Флоренский П.А. Сочинения в 4-х томах. Т. 1. Москва: Мысль. 1994. С. 79–129).
8. Флоренский, П.А. 1986, Введение к диссертации "Идея прерывности как элемент мировоззрения Историко-математические исследования. Вып. 30, под ред. А.П. Юшкевича, Москва: Наука, С. 159-176.
9. Демидов, С.С. 2021, На крутых поворотах европейской истории XX столетия, Чебышевский сборник, Т. 22, Вып. 1, С. 403–412.
10. Медведев, Ф.А. 1965, Развитие теории множеств в XIX веке, Москва: Наука.
11. Зайцев, Е.А. 2019, Фёдор Андреевич Медведев (1923–1993), Математика в высшем образовании, 17, С. 81–90.
12. Медведев, Ф.А. 1974, Развитие понятия интеграла, Москва: Наука.
13. Медведев, Ф.А. 1975, Очерки истории теории функций действительного переменного, Москва: Наука.
14. Bazhanov, V.A., Anellis I.H. 2021, Image of soviet and Russian logic in the west. Latter half of the XXth century, Logical Ivestigations, T. 27, № 2, С. 133-152.
15. Zaitsev E.A. 1995, In memoriam. Fedor Andreevich Medvedev (1923–1993), Historia Mathematica, 22, pp. 88-92.
16. Anellis, I.H. 1994, Memories of Medvedev, Modern Logic, 4, pp. 196-206.
17. Angus, E.T. [Review] 1993, Scenes from the History of Real Functions by Fyodor A. Medvedev, Basel: Birkhauser, 265 p. // AMS Bulletin (n.s.), 28 (1993), pp. 360-367.

REFERENCES

1. Youschkevitch, A.P., Demidov, S.S., Dugac, P. 1983, "Medvedev et son apport à l'histoire de la théorie des fonctions", *Historia Mathematica*, 10, pp. 396-398.
2. Medvedev, F.A. 1959, "The first manuals and monographs on the theory of sets", *Proceedings of the IIET of the USSR Academy of Sciences*, No. 28, pp. 237-249.

3. Arkhangelsky, A.V. 1988, "Kantorovskaya theory of sets", *Publishing House of Moscow State University*, Moscow.

4. Fraenkel, A.A. 1953, "Abstract set theory", *North-Holland Publishing Company*, Amsterdam.

5. Medvedev, F.A. 1963, "The first works in Russia on the theory of sets and the theory of functions of a real variable", *Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR*, Moscow.

6. Polishchuk, E.M. 2018, Emil Borel 1871-1956, Librocom, Moscow.

7. Florensky, P.A. 1904, "On the symbols of infinity (An essay on the ideas of G. Kantor)", *New Way*, No. 9, pp. 173-235 (reprinted in: Florensky P.A. Works in 4 volumes. Vol. 1. Moscow: Mysl. 1994. pp. 79-129).

8. Florensky, P.A. 1986, Introduction to the dissertation "The idea of discontinuity as an element of worldview", Historical and Mathematical research, Issue 30, edited by A.P. Yushkevich, Publishing house "Science", Moscow.

9. Demidov, S.S. 2021, "At the sharp turns of the European history of the twentieth century", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 22, Issue 1, pp. 403-412.

10. Medvedev, F.A. 1965, "The development of set theory in the XIX century", *Publishing house "Science"*, Moscow.

11. Zaitsev, E.A. 2019, "Fedor Andreevich Medvedev (1923-1993)", *Mathematics in higher education*, 17, pp. 81-90.

12. Medvedev, F.A. 1974, "Development of the concept of integral", *Publishing house "Science"*, Moscow.

13. Medvedev, F.A. 1975, "Essays on the history of the theory of functions of a real variable", *Publishing house "Science"*, Moscow.

14. Bazhanov, V.A., Anellis, I.H. 2021, "Image of soviet and Russian logic in the west. Latter half of the XXth century", *Logical Ivestigations*, Vol. 27, № 2, pp.133-152.

15. Zaitsev, E.A. 1995, "In memoriam. Fedor Andreevich Medvedev (1923–1993)", *Historia Mathematica*, 22, pp. 88-92.

16. Anellis, I.H. 1994, "Memories of Medvedev", *Modern Logic*, 4, pp. 196-206.

17. Angus E.T. [Review] 1993, "Scenes from the History of Real Functions by Fyodor A. Medvedev", *Basel: Birkhauser*, 1991, 265 p. // AMS Bulletin (n.s.), 28 (1993), pp. 360-367.

Получено: 09.10.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 519.21 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-372-379

Об истории научной школы по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания кафедры ТВиМС Томского государственного университета

И. А. Туренова, Е. Л. Туренова, С. П. Моисеева

Туренова Ирина Алексеевна — кандидат физико-математических наук, Томский государственный университет (г. Москва).
e-mail: irenaturena@yandex.ru
Туренова Елена Львовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).
e-mail: turenova@yandex.ru
Моисеева Светлана Петровна — доктор физико-математических наук, профессор, Томский государственный университет (г. Томск).
e-mail: smoiseeva@mail.ru

Аннотация

В данной статье дан краткий обзор наиболее крупных направлений исследований научной школы по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания, сформировавшейся в течение последних 50 лет на кафедре теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. Кратко изложена предыстория формирования кафедры и научных интересов ее сотрудников. Среди основных направлений проводимых исследований такие, как: управление и адаптация в системах массового обслуживания; исследование систем массового обслуживания с переменными параметрами; исследование трендов временных рядов; исследование дважды стохастических потоков однородных событий; идентификация моделей и сглаживание сплайнами экспериментальных данных; поиск движущегося сигнала в многоканальной системе; исследование математических моделей сетей связи с протоколами случайного множественного доступа; разработка методов асимптотического анализа, предельной декомпозиции, динамического просеивания; развитие методов исследования немарковских систем и сетей массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками; разработка методов исследования систем массового обслуживания со случайным объемом требований к ресурсам; разработка новых математических моделей процессов передачи данных в транспортном соединении телекоммуникационных сетей и их анализ с целью оптимизации их надежности и быстродействия. Для каждого направления исследований в статье приведены имена научных сотрудников, внесших существенный вклад в развитие соответствующего направления и получивших наиболее значимые результаты. На публикации некоторых из них и наиболее фундаментальные работы приведены ссылки в списке литературы. В статье приводятся основные темы исследований, ведущихся в настоящий момент, упоминается о ежегодной международной конференции, проводимой и основанной представителями научной школы по прикладной теории массового обслуживания, и носящей имя ее основателя Александра Федоровича Терпугова.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, прикладной вероятностный анализ, кафедра ТВиМС, Томский государственный университет, ФПМК, ИПМиКН.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
И. А. Туренова, Е. Л. Туренова, С. П. Моисеева. Об истории научной школы по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания кафедры ТВиМС Томского государственного университета // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 372–379.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 519.21 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-372-379

About the history of the scientific school of Applied Probabilistic analysis and Queuing theory of the PT&MS Department of Tomsk State University

I. A. Turenova, E. L. Turenova, S. P. Moiseeva

Turenova Irina Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tomsk State University (Moscow).
e-mail: irenaturena@yandex.ru
Turenova Elena Lvovna — candidate of physical and mathematical sciences, assosiate professor, Academy of Civil Defense of the Ministry of Emergency Situations of Russia (Moscow).
e-mail: turenova@yandex.ru
Moiseeva Svetlana Petrovna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tomsk State University (Tomsk).
e-mail: smoiseeva@mail.ru

Abstract

This article provides a brief overview of the largest research areas of the scientific school on applied probabilistic analysis and queuing theory, which has been formed over the past 50 years at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics of the National Research Tomsk State University. The background of the formation of the department and the scientific interests of its employees are briefly described. Among the main areas of research are such as: management and adaptation in queuing systems; study of queuing systems with variable parameters; study of time series trends; study of doubly stochastic arrivals; identification of models and smoothing of experimental data by splines; search for a moving signal in a multichannel system; study of mathematical models of communication networks with random multiple access protocols; development of methods of asymptotic analysis, limit decomposition, dynamic sieving; development of research methods for non-markovian systems and queuing networks with non-Poisson arrivals; development of research methods for queuing systems with random volume of resource requirements; development of new mathematical models of data transmission processes in the transport connection of telecommunication networks and their analysis in order to optimize their reliability and performance. For each direction of research, the article contains the names of researchers who have made a significant contribution to the development of the corresponding direction and received the most significant results. The publications of some of them and the most fundamental works are referenced in the list of references. The article presents the main research topics being conducted at the moment, mentions the annual international conference held and founded by representatives of the scientific school on the applied queuing theory, and bearing the name of its founder Alexander Fedorovich Terpugov.

Keywords: queuing theory, applied probabilistic analysis, PT&MS Department, Tomsk State University, FAMC, IAM&CS.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. I. Subbotin. 2023, “About the history of the scientific school of Applied Probabilistic analysis and Queuing theory of the PT&MS Department of Tomsk State University” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 372–379.

1. Введение

В 60-ые годы прошлого столетия резко возрос интерес к кибернетике, электронно-вычислительной технике и программированию и возникла острая потребность в специалистах в данных областях. Первые исследования в области кибернетики в восточной части нашей страны начались в Томском государственном университете и связаны с именами П.П. Бирюлина, А.Д. Закревского, Г.А. Медведева, В.П. и Ф.П. Тарасенко [1]. Оказалось, что для развития теоретических и технических методов обработки информации и принятия решений, необходим высокий уровень владения методами теории вероятностей, математической статистики, численных и других прикладных математических методов. Профессор Г.А. Медведев проводил исследования в области прикладного вероятностного анализа для решения задач в теории систем автоматического поиска, радиоразведки и радиопротиводействия. В 1970г. он стал первым деканом открывшегося факультета прикладной математики, ныне институт прикладной математики и компьютерных наук в Томском государственном университете, сформированном на базе кафедры электронной вычислительной техники и автоматики радиофизического факультета.

Изначально факультет составляли кафедры прикладной математики, теоретической кибернетики и математической логики и программирования. Но вскоре была открыта кафедра теории вероятностей и математической статистики (ТВ и МС), где 50 лет назад под научным руководством первого заведующего кафедрой профессора Александра Федоровича Терпугова сформировалась известная в нашей стране и за рубежом научная школа по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания.

2. Основные направления исследований представителей научной школы

В 60-ые годы научный интерес профессора А.Ф. Терпугова среди прочих составляли задачи поиска в многоканальных системах неподвижного сигнала, а позднее, в связи с усложнением практических задач, и задачи поиска сигнала, перемещающегося по каналам. Результаты исследований по поиску неподвижного сигнала вошли в монографию Л.Е. Радюк, А.Ф. Терпугов, Ф.А. Шапиро «Поиск сигнала в многоканальной системе» [2] , а по поиску перемещающего сигнала в работах Ю.М. Тонконогова [3].

Большое практическое значение для прогнозирования состояния различных технических и экономических систем имеют результаты А.Ф. Терпугова и его учеников в области анализа трендов временных рядов. Важной особенностью этих исследований является нахождение оценок параметров моделей трендов в отсутствие некоторого случайного числа наблюдений или при наличии случайности моментов измерений, или даже неизвестности этих моментов. Результаты таких исследований, к примеру, были использованы в ОКБ «Полет» для разработки ПО систем телеметрического контроля и прогнозирования состояния навигационных спутников [4].

Одним из активно развиваемых направлений в конце 70х годов прошлого столетия стали управляемые системы массового обслуживания [5]. Исследованием таких систем с динамическими приоритетами занимался Анатолий Андреевич Назаров (доктор технических наук,

профессор, заведующий кафедрой ТВиМС 1999-2020гг) с помощью предложенной им модификации метода динамического программирования для СМО, функционирующих в стационарных режимах. Тогда же был введен термин адаптивного управления системами массового обслуживания, когда в режиме реального времени необходимо оценивать параметры системы и назначать оптимальное управление. Решать такие задачи предлагалось с помощью автоматов с целесообразным поведением. Также рассматривался класс управлений по косвенным наблюдениям, когда оно осуществляется по информации стохастически связанной с состоянием системы. Результаты проведенных исследований были защищены в докторской диссертации и опубликованы в монографии [6].

Большой практический и научный интерес имеют исследования систем массового обслуживания со случайно или детерминировано изменяющимися параметрами, так как они наиболее близко описывают реальные системы. Этой области посвящены исследования И.А. Коротаева, Н.И. Головко, И.А. Ташлинского. Ими были рассмотрены как классические по структуре СМО с переменным параметрами, так и СМО с групповым обслуживанием заявок, системы функционирующие в случайной среде с дважды стохастическим входящим потоком, СМО с нестационарным входящим потоком, зависящим от малого параметра [7].

Проводимые исследования систем массового обслуживания различной конфигурации привели к необходимости рассмотрения условий большой загрузки системы. Это означает, что загрузка системы стремится к критической, либо окно наблюдения неограниченно возрастает, либо возрастает число источников в сети связи, либо интенсивность потока заявок из источника повторных вызовов, если таковой имеется в системе, стремится к нулю. При решении этих и многих других задач А.А. Назарову открылось понимание широты применения такого подхода, и им был сформулирован метод асимптотического анализа для исследования марковских и немарковских, но марковизируемых систем массового обслуживания, а также некоторых классов случайных потоков однородных событий.

Суть метода асимптотического анализа изложена в монографиях [8,9,10], он может быть применен для исследования систем и сетей массового обслуживания различной конфигурации. Метод заключается в расширении фазового пространства состояний системы таким образом, что соответствующий многомерный случайный процесс их изменения во времени оказывается марковским (метод марковизации). Составляются уравнения Колмогорова для распределения вероятностей, частичных производящих функций или характеристических функций значений полученных многомерных марковских случайных процессов. В этих уравнениях выполняется предельный переход в некоторых предельных условиях, который позволяет получить предельные (асимптотические) уравнения. В настоящее время можно выделить несколько классов предельных условий: условие высокой интенсивности входящего потока и предельное условие большой загрузки систем с ожиданием, предельное условия растущего времени обслуживания, условие большой задержки заявок в RQ-системах, условие предельно-редких изменений состояний специальных потоков (MMPP, MAP, SM). Решениями этих уравнений являются соответствующие предельные (асимптотические) распределения рассматриваемых систем обслуживания.

В дальнейшем большим блоком решаемых задач под руководством профессора А.А. Назарова, стали задачи моделирования и исследования различных сетей связи с протоколами случайного множественного доступа [11,12]. В кандидатских диссертациях аспирантов кафедры отражены основные полеченные результаты исследований: для локальной вычислительной сети с протоколом «простая Алоха» (Н.М. Юревич), с протоколом «синхронная Алоха» (Ю.Д. Одышев); для сетей с протоколами множественного доступа с контролем несущей и обнаружением конфликта (П.И. Коцурюба); сетей связи с динамическими и адаптивными протоколами доступа (С.Л. Шохор, Д.Ю. Кузнецов, А.Н. Туенбаева, Т.В. Любина); сетей интегрального обслуживания (Н.Ю. Марголис); кольцевых сетей связи (М.Ш. Вайндер); спутниковых сетей связи (А.А. Назаров, С.Б. Пичугин); управляемых адаптивных терминальных

измерительных систем (А.А. Назаров, А.А. Южаков); рассмотрена проблема распределения буферной памяти узла коммутации глобальной сети (А.В. Зоркальцев), и многие другие задачи.

Помимо уже упомянутого метода асимптотического анализа, в последние годы активно развивается и широко используется ряд других оригинальных методов исследования. Метод предельной декомпозиции (А.А. Назаров, С.П. Моисеева, А.С. Морозова) разработан для анализа потоков обращений в системах с неограниченным числом приборов и обратной связью, был впервые опубликован в 2008г. Его приложения к решению экономических задач позволили решать оптимизационные задачи (И.Р. Гарайшина), в том числе в сфере математического маркетинга (И.А. Захорольная) [13].

Метод динамического просеивания (С.П. Моисеева, А.Н. Моисеева позволяет проводить исследование немарковских сетей массового обслуживания, гетерогенных и ресурсных СМО. Результаты этих исследований отражены в публикациях и докторских диссертациях С.П. Моисеевой, А.Н. Моисеева и кандидатских диссертациях, И.Л. Лапатина, И.А. Синяковой, Е.Ю. Лисовской, Е.В. Панкратовой.

В настоящее время основными направлениями исследований научной школы по прикладной теории массового обслуживания под руководством профессора А.А. Назарова и ее приложениям для технических и экономических систем на кафедре теории вероятностей и математической статистики ТГУ являются:

развитие общих подходов и методов к исследованию немарковских математических моделей сетей связи с протоколами случайного множественного доступа различной конфигурации (с конфликтами заявок, приоритетами в обслуживании, «нетерпеливыми» и «отрицательными» заявками, динамическим, адаптивным и статическим протоколами доступа) – С.В. Пауль, Е.Ю. Данилюк, Е.А. Федорова, Я.Е. Измайлова;

развитие асимптотических методов исследования немарковских моделей систем и сетей массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками (модулированными пуассоновскими, полумарковскими) различной конфигурации (многолинейные, многофазные, с обратной связью) Л.А. Задиранова, М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев;

разработка методов исследования СМО со случайным (дискретным и/или непрерывным) объемом требований к ресурсам – Е.Ю. Лисовская, С.П. Моисеева, И.А. Туренова;

разработка новых математических моделей процессов передачи данных в транспортном соединении телекоммуникационных сетей и их анализ с целью оптимизации быстродействия.

За 50 лет существования кафедры, благодаря интенсивной работе развившейся на ней научной школы по прикладному вероятностному анализу, теории массового обслуживания и ее приложениям, было подготовлено и успешно защищено 12 докторских диссертаций и более 70 кандидатских.

Сотрудники кафедры имеют богатый опыт представления научных работ на крупных международных конференциях и семинарах, являются организаторами нескольких международных конференций с привлечением ведущих ученых из разных стран мира. Поддерживает и развивает контакты с российскими и зарубежными научными коллективами в области теории массового обслуживания. Благодаря сотрудничеству с ведущими мировыми учеными в области ТМО получила признание мировым научным сообществом Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (http://itmmconf.tsu.ru/) [14,15]. Одним из доказательств этого служит ежегодный выпуск материалов конференции в качестве отдельного тематического тома “Queueing Theory and Applications” в рамках серии Communications in Computer and Information Science (CCIS) “Queueing Theory and Applications”, Springer Verlag, которая входит в базу цитирования Scopus [16].

По инициативе профессоров А.А. Назарова, С.П. Моисеевой, А.Н. Моисеева, доцентов С.В. Пауль, Е.А. Федоровой, активной поддержке молодых ученых кафедры и заслуженному

доверию как организаторам научных мероприятий в 2018 году впервые в России прошел Международный симпозиум "Workshop on Retrial Queues and Related Topics"[17]. Его проведение в Томском государственном университете имеет высокое значение для признания мировым сообществом научных исследований томской научной школы и способствовать установлению связей между вузами и научными организациями России (Томской области) и зарубежья, обмену опытом между учеными, определению перспективных направлений развития теории и практики, определению мировых тенденций, актуальных и перспективных направлений научных исследований и практических разработок.

Отдельно стоит отметить роль сотрудников кафедры в привлечении к занятиям наукой молодых талантливых исследователей, среди ее учеников есть стипендиаты премии Президента РФ для аспирантов, стипендиаты Оксфордского фонда, победители конкурса по предоставлению грантов на научные поездки Фонда Прохорова, руководители и участники грантов РФФИ.

В 2015-2020 гг. профессор А.А. Назаров являлся экспертом высшей аттестационной комиссии по управлению, информатике и вычислительной технике. В 2018 году коллектив кафедры под руководством профессора А.А. Назарова стал лауреатом премии Томской области в сфере образования, науки, здравоохранения и культуры для научных коллективов.

3. Заключение

50 лет существования научной школы по прикладному вероятностному анализу и теории массового обслуживания на базе кафедры теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета, велась непрерывная активная научно-исследовательская работа по многим направлениям теории массового обслуживания и прикладного вероятностного анализа. Разрабатывались методы, строились математические модели, проводилось решение многих и многих задач в ответ на постоянно возникающие вызовы в различных областях человеческой деятельности, отраслях науки и техники. В настоящее время, в эпоху цифровой трансформации, теория массового обслуживания является востребованным аппаратом математического моделирования, к которому все чаще обращаются специалисты сферы ИКТ при создании новых технологий. Существование и развитие научных школ по прикладной теории массового обслуживания и прикладному вероятностному анализу является важным фактором успеха будущих отечественных технологий, как в сфере телекоммуникаций, так и в экономической, логистической и прочих сферах, и их конкурентного преимущества в международном пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А. М. Факультет прикладной математики и кибернетики // Вестник Томскогогосударственного университета. 2000. No 271. С. 9-12.

2. Радюк Л. Е. Поиск сигнала в многоканальной системе. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 126 с.

3. Тонконогов Ю. М. Поиск движущегося сигнала в многоканальной системе. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 194 с.

4. Туренова Е.Л. Проверка статистических гипотез о соотношении интенсивностей нестационарных пуассоновских потоков / автореферат диссертации на соискание ученого звания к.ф.-м.н. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. 19 с.

5. Назаров А.А. Некоторые направления работ в Томском государственном университете по теории вероятностей и ее приложениям // Вестник Томскогогосударственного университета. 2000. No 271. С. 32-40.

6. Назаров А. А. Управляемые системы массового обслуживания. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.

7. Коротаев И. А. Системы массового обслуживания с переменными параметрами. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 166 с.

8. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 158 с.

9. Назаров А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

10. Моисеев А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.

11. Кузнецов, Д. Ю. Адаптивные сети случайного доступа / Д. Ю. Кузнецов, А. А. Назаров. – Томск : Дельтаплан, 2002. – 254 с.

12. Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.

13. Ананина И.А. Математическая модель процесса изменения дохода торговой компании, расширяющей свое присутствие на рынке// Вестник Томскогогосударственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. No 2(15). С. 5-14.

14. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : Материалы XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Томск, 10–15 сентября 2018 года. – Томск: Изд-во НТЛ, 2018. – 442 с.

15. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) : Материалы XIX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Томск, 02–05 декабря 2020 года. – Томск: Изд-во НТЛ, 2021. – 498 с.

16. Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. Communications in Computer and Information Science, vol 1391. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72247

17. 12-th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics, Tomsk, 10–15 сентября 2018 года. – Tomsk: Scientific Technology Publishing House, 2018. – 48 p.

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. 2000, “The department of applied mathematics and cybernetics”, *Tomsk State University Journal*, no 271, pp. 9-12.

2. Raduk, L.E. 1981, “Signal search in a multichannel system”, *Tomsk State University Publishing House, Tomsk*, 126 p.

3. Tonkonogov, Y.M. 1989, “Search for a moving signal in a multichannel system”, *Tomsk State University Publishing House, Tomsk*, 194 p.

4. Turenova, E.L. 1992, "Verification of statistical hypotheses about the ratio of nonstationary Poisson flows rates", *Abstract of the dissertation for the academic title of Ph.D. Tomsk State Univercity Publishing House, Tomsk*, 19 p.

5. Nazarov, A.A.. 2000, "Some works at Tomsk State University on probability theory and its applications" *Tomsk State University Journal*, no 271, pp. 32–40.

6. Nazarov, A.A. 1984, "Managed queuing systems", *Tomsk State University Publishing House, Tomsk*, 234 p.

7. Korotaev, I.A. 1991, "Queuing systems with variable parameters", *Tomsk State University Publishing House, Tomsk*, 166 p.

8. Nazarov, A.A. 1991, "Asymptotic analysis of systems that can be markovized", *Tomsk State University Publishing House, Tomsk*, 158 p.

9. Nazarov, A.A. 2006, "The method of asymptotic analysis in queuing theory", *Scientific and technical literature Publishing House, Tomsk*, 112 p.

10. Moiseev, A.N. 2015, "Infinitely linear queuing systems and networks", *Scientific and technical literature Publishing House, Tomsk*, 240 p

11. Kuznetsov, D.Y., Nazarov, A.A. 2002, "Adaptive random access networks", *Deltaplan, Tomsk*, 254 p.

12. Garayshina, I.R., Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. 2010, "Research methods of correlated flows and special queuing systems", *Scientific and technical literature Publishing House, Tomsk*, 204 p.

13. Ananina, I.A. 2011, "Mathematical model of the income change of the trading company expanding the presence in the market", *Tomsk State University Journal. Computer science and informatics management*, no 2(15), pp. 5–14.

14. "Information technology and mathematical modeling (ITMM-2018)", 2018, *The materials of the XVII international conference named after Terpugov A.F.Tomsk Sep, 10–15, 2018*, *Scientific and technical literature Publishing House, Tomsk*, 442 p.

15. "Information technology and mathematical modeling (ITMM-2020)" 2020, *The materials of the XIX international conference named after Terpugov A.F. Tomsk Dec,02–05,2020, Scientific and technical literature Publishing House, Tomsk*, 498 p.

16. Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds). 2020, *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM. Communications in Computer and Information Science*, vol 1391. *Springer, Cham.* https://doi.org/10.1007/978-3-030-72247

17. "12-th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics", 2018, *Scientific Technology Publishing House, Tomsk*, 48 p.

Получено: 06.04.2023
Принято в печать: 11.12.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-380-400

Алексей Яковлевич Канель-Белов

Н. Х. Агаханов, Н. Н. Андреев, С. Н. Асхабов, Н. М. Добровольский, А. Домошницкий, С. А. Дориченко, М. В. Зайцев, И. А. Иванов-Погодаев, А. А. Колчев, С. Малев, И. В. Митрофанов, А. А. Михалев, С. П. Мищенко, В. Г. Наводнов, Ю. В. Нестеренко, А. М. Песин, Ф. В. Петров, С. В. Пчелинцев, А. М. Райгородский, Ф. Д. Рухович, Л. М. Самойлов, А. Л. Семенов, В. А. Тиморин, О. Н. Тулупов, М. И. Харитонов, А. Л. Чернятьев, А. А. Чиликов, В. Н. Чубариков, А. И. Шафаревич

Для цитирования:
Н. Х. Агаханов, Н. Н. Андреев, С. Н. Асхабов, Н. М. Добровольский, А. Домошницкий, С. А. Дориченко, М. В. Зайцев, И. А. Иванов-Погодаев, А. А. Колчев, С. Малев, И. В. Митрофанов, А. А. Михалев, С. П. Мищенко, В. Г. Наводнов, Ю. В. Нестеренко, А. М. Песин, Ф. В. Петров, С. В. Пчелинцев, А. М. Райгородский, Ф. Д. Рухович, Л. М. Самойлов, А. Л. Семенов, В. А. Тиморин, О. Н. Тулупов, М. И. Харитонов, А. Л. Чернятьев, А. А. Чиликов, В. Н. Чубариков, А. И. Шафаревич. Алексей Яковлевич Канель-Белов // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 380–400.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-380-400

Alexey Yakovlevich Kanel-Belov

N. Kh. Agakhanov, N. N. Andreev, S. N. Askhabov, N. M. Dobrovolsky, A. Domoshnitsky, S. A. Dorichenko, M. V. Zaitsev, I. A. Ivanov-Pogodaev, A. A. Kolchev, S. Malev, I. V. Mitrofanov, A. A. Mikhalev, S. P. Mishchenko, V. G. Navodnov, Yu. V. Nesterenko, A. M. Pesin, F. V. Petrov, S. V. Pchelintsev, A. M. Raygorodsky, F. D. Rukhovich, L. M. Samoilov, A. L. Semenov, V. A. Timorin, O. N. Tulupov, M. I. Kharitonov, A. L. Cherniyayev, A. A. Chilikov, V. N. Chubarikov, A. I. Shafarevich

For citation:
N. Kh. Agakhanov, N. N. Andreev, S. N. Askhabov, N. M. Dobrovolsky, A. Domoshnitsky, S. A. Dorichenko, M. V. Zaitsev, I. A. Ivanov-Pogodaev, A. A. Kolchev, S. Malev, I. V. Mitrofanov, A. A. Mikhalev, S. P. Mishchenko, V. G. Navodnov, Yu. V. Nesterenko, A. M. Pesin, F. V. Petrov, S. V. Pchelintsev, A. M. Raygorodsky, F. D. Rukhovich, L. M. Samoilov, A. L. Semenov, V. A. Timorin, O. N. Tulupov, M. I. Kharitonov, A. L. Cherniyayev, A. A. Chilikov, V. N. Chubarikov, A. I. Shafarevich, 2023, “Alexey Yakovlevich Kanel-Belov” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 380–400.

Введение

9 июня 2023 г. исполнилось 60 лет замечательному математику Алексею Яковлевичу Канелю-Белову. Он родился в Москве, в семье математиков. Его мать – Майя Михайловна Белова, доцент Станкина, ученица В. В. Немыцкого, была хорошо известна на мехмате. К сожалению, она рано умерла (в 1985 году); на похороны пришло около 200 людей из математического сообщества. Отец – Яков Исаакович Канель, известный специалист по теории уравнений в частных производных, защитил диплом в Томском государственном университете под руководством А. И. Фета, кандидатскую диссертацию защитил под руководством О. А. Олейник. Дядя – Геннадий Исаакович Канель, чл.-корр. РАН, известный физик, сотрудник В. Е. Фортова, был профессором МФТИ и Мехмата МГУ (отделение механики). Алексей Яковлевич многие свои статьи подписывает так, как его имя указано в заголовке, хотя «по паспорту» его фамилия – просто «Белов». Двойную фамилию он использует, чтобы подчеркнуть уважение к своей семье.

В 1980 году Алексей Яковлевич Канель-Белов окончил школу № 2 Октябрьского района г. Москвы (ныне Лицей «Вторая Школа»), успешно участвовал в олимпиадах школьников, получил 2 премию на Всесоюзной Математической Олимпиаде в 1980 г.

Учеба и начало пути в науке

В 1985 году Алексей Яковлевич окончил МГПИ им. В. И. Ленина (ныне Московский педагогический государственный университет). Был победителем Московских и Всесоюзных студенческих олимпиад. Также он учился в, так называемом, Народном университете [34], в котором наибольшее влияние на него оказал Д. Б. Фукс.

Тема его дипломной работы: «О базисе Ширшова относительно свободной алгебры сложности n» (научный руководитель – С. В. Пчелинцев). В 1985 году Алексей Яковлевич поступил в аспирантуру Московского горного института (МГИ), которую окончил в 1988 году. В 1992 году в институте Физики Земли им. О. Ю. Шмидта защитил кандидатскую диссер-

тацию по специальности 25.00.16 – «Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр». Тема его диссертации: «Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов» (научн. рук. Р. Л. Салганик, офиц. оппоненты В. Б. Колмановский и Е. И. Динабург). Основным математическим результатом диссертации был метод, позволяющий для широкого класса случаев разбиения плоскости прямыми сводить изучение получающихся многоугольников к изучению линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод позволил вывести закон распределения площадей и периметров многоугольников для различных классов случаев, в частности для пуассоновского поля прямых и мозаик Вороного. Исследования блочных массивов, введенных в диссертации, послужили промежуточным шагом к изобретению самозаклинивающихся структур, см. далее.

В 1988–1990 годах Алексей Яковлевич работал в МГИ, в 1990–2001 годах в Доме научно-технического творчества молодежи (ДНТТМ – филиал Московского городского дворца пионеров и школьников). В дальнейшем, Алексей Яковлевич работал в ряде университетов в разных странах мира (Россия, Австралия, Германия, Израиль), а также в Московском институте открытого образования (ранее – Московский институт повышения квалификации работников образования).

Окончательное формирование основных научных интересов — комбинаторная алгебра

С 1986 года Алексей Яковлевич начинает активно заниматься алгеброй, продолжая свою студенческую линию, и принимает участие в работе семинара кафедры алгебры МГУ «Теория колец» под руководством В. Н. Латышева, А. В. Михалева и Е. С. Голода и в семинаре по PI-теории под руководством В. Н. Латышева. Под влиянием Виктора Николаевича Латышева, Алексей Яковлевич начинает заниматься PI-теорией.

Начиная с 1930-х годов шло изучение многообразий алгебраических систем. Одни из наиболее естественных вопросов здесь – конечная базируемость: верно ли, что каждое многообразие из некоторого класса может быть задано конечным числом тождеств (аналог теоремы компактности в логике и топологии)? Для многообразий групп Б. Нойманном в 1937 г. в работе [23] был поставлен вопрос: *каждое ли такое многообразие может быть определено конечным множеством тождеств?* На рубеже 1970-х гг. этот вопрос был решен отрицательно одновременно и независимо тремя исследователями: С. И. Адяном [2] на основе мощного метода Новикова – Адяна, построенного для бернсайдовских групп, Вон-Ли [4], а также А.Ю.Ольшанским [3].

В случае ассоциативных колец проблема конечной базируемости была поставлена Шпехтом в 1950 году в работе [1]: верно ли, что все тождества произвольной ассоциативной PI-алгебры следуют из конечного их числа? Вся работа Шпехта была посвящена алгебрам над полем нулевой характеристики. Он явно мотивировал это невозможностью использования применяемых им методов в случае простой характеристики.

Проблема Шпехта для характеристики 0 была решена положительно А. Р. Кемером [5] в 1984 году. (То есть ситуация здесь отличается от групповой.) Чуть позже А. Р. Кемер расширил доказательство [6], доказав, что любой T-идеал конечнопорожденной свободной ассоциативной алгебры над бесконечным полем порождается конечным множеством элементов, как T-идеал.

Подход Кемера дал новый взгляд на теорию супералгебр, созданную Ф. А. Березиным. А. Р. Кемер в нулевой характеристике свел изучение бесконечно порожденных свободных алгебр к конечно порожденным супералгебрам. Он показал, что в нулевой характеристике любое многобразие задается грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры [7]. И. П. Шестаков в работе [8] дал единообразное объяснение многих ранее построеных контрпримеров в

неассоциативных структурах через грассмановы оболочки конечномерных супералгебр.

Алексей Яковлевич существенно развил метод А. Р. Кемера. Для алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным нетеровым кольцом он доказал, что любая система тождеств от ограниченного числа переменных следует из конечной подсистемы. Более того, он распространил этот результат на алгебры над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом, а не только над полем. А. Я. Канель-Белов доказал, что в этом случае любая конечно порожденная относительно свободная ассоциативная Ф-алгебра вкладывается в алгебру, являющуюся нетеровым модулем над центром (локальная представимость).

Итак, Алексей Яковлевич показал, что для положительной характеристики в локально конечном случае проблема Шпехта также имеет положительное решение. При этом для общего (нелокального) случая он построил бесконечно базируемую систему тождеств над произвольном полем положительной характеристики. (А. В. Гришин и В. В. Щиголев также чуть позднее построили такие системы). Тем самым было завершено исследование проблемы Шпехта.

Ключевыми в исследовании явились идеи, связанные с некоммутативной алгебраической геометрией и применением леммы Артина – Риса, состоящей в следующем. Пусть I – идеал в коммутативном нётеровом кольце, M – конечно порожденный модуль, а N подмодуль в M. Тогда существует такое целое число $k \geqslant 1$, что

$$(I^n M) \cap N = I^{n-k}((I^k M) \cap N).$$

для всех $n \geqslant k$.

Предложенное Канелем-Беловым использование леммы Артина – Риса явилось ключевым соображением для развития исследований, связанных с проблемой Шпехта, что, в частности, отмечено в диссертации А. В. Гришина в 2000 г. [14] и работе В. В. Щиголева в 2001 г. [13].

Алгебра Грассмана обычно изучается над полем характеристики, не равной 2 (в случае поля характеристики 2 стандартный набор соотношений даёт обычную коммутативную алгебру). Контрпримеры к проблеме Шпехта в характеристике 2 привели Канеля-Белова к построению конструкции, нетривиально обобщающей алгебру Грассмана над любым кольцом (включая поле характеристики 2). Работа была проведена совместно с Галем Дором и Узи Вишне [49]. При этом вместо знака перестановки (плюс или минус один) возникло понятие обобщённого знака — элемента некоторого модуля, сопоставляемого перестановке. Эти конструкции открыли путь к построению супертеории над полем произвольной характеристики (включая характеристику 2).

Методы Канеля-Белова также позволили решить некоторые вопросы, связанные с проблемой следования для тождеств. Здесь также уместно провести аналогию с группами. На Международном математическом конгрессе в 1970 году С. И. Адян поставил вопрос: существуют ли группа с неразрешимой проблемой равенства, свободная в некотором конечно-базируемом многообразии? В 1982 году примеры таких групп построил Ю.Г Клейман [10], [11]. Еще раньше в 1967 г. подобные вопросы поставил для колец А. И. Мальцев в Коуровской тетради (вопрос 2.40-2i): *Существует ли конечно-аксиоматизируемое многообразие ассоциативных колец, совокупность тождеств, которого неразрешима?* В Днестровской тетради Мальцеву принадлежит вопрос 1.106: *Существует ли конечно-аксиоматизируемое многообразие колец, система всех тождественных соотношений которого неразрешима?* Алексей Яковлевич доказал существование алгоритма проверки следования тождества из данного конечного набора тождеств, тем самым ответив на эти вопросы.

В работе [88] Алексей Яковлевич доказал рациональность рядов Гильберта для относительно свободных ассоциативных алгебр, тем самым дав положительный ответ на вопрос, поставленный в 1970 г. К. Прочези [12]. В той же работе Канель-Белов привел пример представимой алгебры (вкладывающейся в алгебру матриц над кольцом многочленов) с трансцендентным рядом Гильберта.

В Днестровской тетради И. В. Львов поставил вопрос (2.66) о существовании ассоциативной PI-алгебры, совпадающей со своим коммутантом. В работе [84] Алексей Яковлевич решил этот вопрос, доказав, что такой алгебры не существует.

Все эти результаты были собраны в докторской диссертации «Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы», которую Алексей Яковлевич защитил в 2002 году. Научными консультантами были В. Н. Латышев и А. В. Михалев. Оппонентами выступили А. Р. Кемер, С. В. Пчелинцев и А. В. Яковлев.

Дальнейшие математические исследования

В дальнейшем Алексей Яковлевич существенно расширил область своих научных интересов. Он получает множество замечательных результатов и в PI-теории, и в некоммутативной теории колец, и в алгебраической геометрии, а также успешно работает в прикладных областях математики и в математической педагогике. Ниже представлены основные направления его исследований.

PI-теория

Обсужденным выше работам по конечной базируемости предшествовали исследования базисов алгебр. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем k с упорядоченными образующими $a_1 \prec \cdots \prec a_s$. Порядок на образующих индуцирует порядок на множестве слов (сперва по длине, потом лексикографически). *Нормальным базисом* называется множество слов, не представимых в виде линейной комбинации меньших. Вопросы, связанные с устройством такого базиса, чрезвычайно важны в алгебре и имеют связи с логикой и алгебраической геометрией.

Обструкциями являются старшие мономы элементов минимального базиса Гребнера – Ширшова.

Оказывается, в конечно определенной алгебре количество обструкций длины не выше n (т.е. элементов минимального базиса Гребнера – Ширшова идеала соотношений) либо растет не менее чем логарифмично, либо конечно (и тогда идеал соотношений имеет конечный базис Гребнера – Ширшова, этой тематике посвящено исследование Л. А. Бокутя и его школы [15]).

Если же сверхслово равномерно-рекуррентно (почти периодично в другой терминологии), то количество обструкций растет не менее чем логарифмично, что было показано в совместной работе А. Я. Канеля-Белова с учениками И. А. Мельниковым и И. В. Митрофановым [45]. Понятие *обструкции* для полилинейных многочленов было введено В. Н. Латышевым. Решение проблемы Шпехта вытекает из конечности числа таких полилинейных обструкций, что показывает важность этого понятия Латышева.

Также Алексей Яковлевич совместно с В. Н. Латышевым развил теорию мономиальных алгебр, обслуживающую комбинаторную теорию колец. Построенная ими техника замыкания по Зарисскому для многообразий мономиальных алгебр существенно облегчила дальнейшее исследование проблем шпехтового типа, исследование базисов алгебр. Построенная теория радикала для мономиальных алгебр, а также описание слабо нетеровых мономиальных алгебр, осуществляется в терминах равномерно рекуррентных слов и символической динамики. Кроме того, на этом направлении было получено несколько результатов, связанных с алгоритмической неразрешимостью, о чем пойдет речь в следующем разделе.

Проблематика, относящаяся к связям логики и алгебраической геометрии (в том числе некоммутативной)

Классические работы группы Бурбаки преследовали цель связать топологические свойства с арифметическими, изучив взаимосвязь между языками колец и геометрии. Алексей Яковлевич начал изучение связи геометрических и арифметических свойств с алгоритмическими. Например, интересен вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы изоморфизма двух алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Даны два ассоциативных коммутативных кольца, заданные образующими и соотношениями. Как проверить, изоморфны ли они? Первый результат здесь был получен совместно с А. А. Чиликовым – это алгоритмическая неразрешимость проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики [52].

Вместе с J. T. Yu и Л. Макар-Лимановым Алексей Яковлевич установил ([82]), что если $A[t]$ вкладывается в $B[\tau]$ (t и τ – переменные), то A вкладывается в B (A и B – области целостности). Это влечет гипотезу Абьянкара [24]: (если $A[t_1,\dots,t_n] \simeq B[t_1,\dots,t_n]$ то A вкладывается в B и B вкладывается в A. Вместе с J. T. Yu Алексей Яковлевич доказал, что над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики любое многообразие V, такое что цилиндр $V \times k$ бирационально изоморфен пространству k^3, само бирационально изоморфно пространству k^2 [76]. Это отвечает на вопрос М. Канга, поставленный в 1989 г. [16].

Теорема Ширшова о высоте

Данная теорема утверждает, что *l-порожденная ассоциативная PI-алгебра A линейно представима множеством элементов вида $v_{i_1}^{k_1}\cdots v_{i_s}^{k_s}$ где $s < H(A)$, $H(A)$ – константа, зависящая от алгебры A.*

Иными словами, если в алгебре выполнено тождество степени n, то нормальный базис состоит из кусочно периодических слов, каждый кусок периода не выше n, общее число кусков не превосходит константы H, универсальной для всех элементов нормального базиса, именуемой *высотой* алгебры в смысле Ширшова. *Базисом Ширшова* называется такое множество Y, что A порождается как векторное пространство множеством произведений вида $y_1^{k_1}\cdots y_m^{k_m}$, где $m \leqslant H$. В связи с теоремой Ширшова о высоте возникают вопросы: как устроены базисы Ширшова? Как оценить H? Каким может быть множество векторов степеней $(k_1,\dots,k_m)$?

Алексей Яковлевич провел исследование базисов Ширшова Y. Он показал, что в качестве Y можно взять множество слов степени не выше n, где n – максимальный размер матриц, все тождества которых выполняются в алгебре A [92]. Были описаны все базисы Ширшова, состоящие из слов для ассоциативной PI-алгебры, это дает ответ на известный вопрос С. Амицура и И. П. Шестакова ([25]. Существенная высота есть минимальное количество k_i, таких что все они одновременно могут быть сколько угодно большими. Алексеем Яковлевичем было установлено, что размерность Гельфанда – Кириллова для представимых алгебр совпадает с существенной высотой [32]. Тем самым в представимом случае существенная высота не зависит от выбора базиса Ширшова, а размерность Гельфанда – Кириллова является целым числом. Совместно с М. И. Харитоновым была доказана субэкспоненциальная оценка в теореме Ширшова о высоте (порядка $100l \cdot n^{100\log(n)}$, где n – минимальная степень тождества, l – число образующих), что дает ответ на вопрос 3.39 Е. И. Зельманова из Днестровской тетради.

Построение алгебраических монстров

Одной из непревзойденных вершин комбинаторного подхода в алгебре является решение П. С. Новиковым и С. И. Адяном проблемы Бернсайда. Геометрическая интерпретация этого

подхода в стиле теории малых сокращений, также с преодолением экстремальных технических трудностей, была построена А. Ю. Ольшанским и И. Рипсом. В некоммутативной алгебре имеются конструкции самых разнообразных алгебраических «монстров», многие из которых были построены Адяном: бесконечные бернсайдовские группы, монстр Тарского, пример Голода – Шафаревича и др.. Естественно возникает вопрос об аналогах в случае полугрупп и колец.

Исходя из уже рассмотренных результатов А. Я. Канеля-Белова напрашивается аналогия между спектром результатов Адяна, последовавших за решением проблемы Бернсайда и спектром результатов Канеля-Белова, последовавших за решением проблемы Шпехта.

В. Н. Латышев обратил внимание на важность и нетривиальность требования конечной определенности алгебраических объектов. Например, открытым вопросом является существование конечно определенной бесконечной периодической группы. Конечная определенность дает возможность интерпретировать алгебраические объекты в терминах конечных семейств конечных автоматов – буква алфавита символизирует конечный автомат, а слово – цепочку локально взаимодействующих автоматов. Задача состоит в координации поведения системы автоматов при обратимых преобразованиях из любых начальных состояний (обратимость отражает возможность прямого и обратного перехода при использовании определяющих соотношений). В рамках автоматного подхода (буква интерпретируется как автомат, слово – как цепочка локально взаимодействующих автоматов), Алексею Яковлевичу совместно с его учеником И. А. Ивановым-Погодаевым удалось построить ряд интересных объектов, таких как конечно определенная полугруппа с нецелой размерностью Гельфанда – Кириллова, алгебры с конечным базисом Гребнера и алгоритмически неразрешимой проблемой делителей нуля (отметим, что в мономиальном автоматном случае соответствующая проблема алгоритмически разрешима).

Л. Н. Шеврин и М. В. Сапир в Свердловской тетради поставили проблему (3.81б) существования бесконечной конечно определенной нильполугруппы. Построение такой полугруппы является результатом цикла работ И. А. Иванова-Погодаева и А. Я. Канеля-Белова ([41], [42], [43], [26]).

Для этого построения потребовались принципиально новые методы, связанные с геометрией апериодических мозаик. Слова рассматриваются как пути на геометрическом равномерно-эллиптическом комплексе, обладающем апериодической природой и набором специальных свойств. Эквивалентные слова при этом соответствуют локально эквивалентным путям с общим началом и концом. Определяющие соотношения отвечают минимальным клеткам комплекса.

Совместно с И. Рипсом, А. Аткарской, Е. Б. Плоткиным Алексей Яковлевич развивает теорию колец с малыми сокращениями. Недавно они установили, что бесконечное критическое кольцо должно быть телом. Совместно с И. Рипсом была начата разработка теории канонических форм для колец, а также концепции гиперболического кольца (пока весьма предварительной).

Аффинная алгебраическая геометрия

Знаменитая гипотеза Якобиана состоит в обратимости любого полиномиального отображения с единичным якобианом. Хотя сама гипотеза якобиана далека от своего решения, сопутствующие ей методы и подходы являются чрезвычайно ценными. Например, так называемое *антиквантование* – редукция кольца дифференциальных операторов по модулю бесконечно большого простого и изучение скобок Пуассона на центре. С гипотезой якобиана связаны также проблемы теории полиномиальных автоморфизмов. Например, проблема подъема – любой ли z-автоморфизм (т.е. автоморфизм сохраняющий z) кольца $k[x, y, z]$ можно поднять до ав-

томорфизма свободной ассоциативной алгебры. (Дикий z-автоморфизм до z-автоморфизма не поднимается согласно результату А. Я. Канеля-Белова и J.-T. Yu. Ими также показано, что z-автоморфизмы кольца $K\langle x, y, z\rangle$ стабильно ручные.) Другой пример – проблема Абьянкара о нестандартном вложении аффинной прямой в трехмерное пространство (см. монографию Эссена [29]). Известно, что над полем вещественных чисел нестандартные вложения есть – можно создать узел. Для комплексного случая это неизвестно. Иными словами, можно ли абстрактными средствами алгебраической геометрии выразить понятие узла, в том числе в положительной характеристике? В последнее время появилось поле красивых задач, связанных с квантованием, которые оказались связаны с теорией полиномиальных автоморфизмов. С квантованием связана и конструкция алгебраически замкнутого тела Макар-Лиманова, теорема о свободе и другие вопросы. В положительной характеристике подход состоит в исследовании многочленов от матриц. При этом работают как алгебро-геометрические методы, так и комбинаторные.

А. Я. Канель-Белов совместно с М. Л. Концевичем [79] (и, независимо от них, Цучимото [17]) разработали подход к теории D-модулей, гипотезе о якобиане и смежным вопросам (например, относящихся к универсальным обертывающим алгебрам конечномерных алгебр Ли). Если редуцировать алгебру дифференциальных операторов по модулю p, то возникает центр, над которым она становится нетеровым модулем. При редукции по модулю бесконечно большого простого p на центре возникают скобки Пуассона $\{P, Q\} = [\hat{P}, \hat{Q}]/p$, где $\hat{P}$ есть подъем в нулевую характеристику. В квантизационной теореме Концевича для пуассоновой структуры на $A[[h]]$ определяется структура $*$, при этом $x * y \simeq xy \ mod\ h$ и $(x * y - y * x)/h \simeq x, y \ mod\ h$. Отметим, что бесконечно большое простое играет роль постоянной Планка h. Эндоморфизм алгебры Вейля индуцирует полиномиальный симплектоморфизм, сохраняющий объемы. Отсюда следует эквивалентность гипотезы Диксмье и гипотезы якобиана, установленная у Цучимото, а также в работах А. Я. Канеля-Белова и М. Л. Концевича [79], [81]. В этой связи возникают задачи на стыке алгебраической геометрии и теории моделей.

С помощью теоремы Концевича о квантовании Алексей Яковлевич совместно с учениками получил альтернативное доказательство известной теоремы Бергмана о централизаторе ([28]). С помощью редукции по модулю T-идеала алгебры общих матриц и теории инвариантов было показано, что эта область есть кольцо многочленов. Впервые спустя почти 50 лет было получено передоказательство этой знаменитой теоремы другими методами: оригинальное доказательство использовало делимость в некоммутативных кольцах, а новое – теорему Концевича о квантовании и некоммутативную теорию инвариантов ([93], [94]).

Работа по проблеме якобиана сопряжена с исследованием IND-схем (индуктивных схем, понятие было введено И. Р. Шафаревичем в [27]). Вместе с Р. Липянским и А. Берзиньшем (учениками Б. И. Плоткина) А. Я. Канель-Белов описал группы автоморфизмов $End(k[x_1, \dots, x_n])$ и $End(k\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$, ответив на вопросы Б. И. Плоткина. Бесконечномерные аналоги групп Ли, в отличие от конечномерного случая, могут быть особыми многообразиями в каждой точке. Непосредственный подход, связанный с аппроксимацией (например, ручными преобразованиями) в проблемах аффинной алгебраической геометрии обычно не работает, в частности, он не работает в проблеме о якобиане. Например, у двух «изоморфных» бесконечномерных групп могут оказаться неизоморфные алгебры Ли, по крайней мере, при наивном их определении. Это имеет место, например, у группы автоморфизмов плоскости, сохраняющих площадь, и у группы автоморфизмов алгебры Вейля W_1. А. Я. Канелем-Беловым и его учеником А. М. Елишевым был разработан метод позволяющий в некоторых случаях контролировать эти явления. В совместной работе с Джей Тау Ю [54] было проведено систематическое исследование топологических и геометрических свойств IND-схем, соответствующих группам автоморфизмов коммутативных и свободных ассоциативных алгебр [54]. Также А. Я. Канель-Белов и А. М. Елишев нашли группы автоморфизмов IND-схем $Aut(k[x_1, \dots, x_n])$ и $Aut(k\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$, решив тем самым проблему Б. И. Плоткина.

Известная проблема Львова – Капланского (вопрос 1.98 в Днестровской тетради) состоит в том, что множество значений полилинейного многочлена в пространстве матриц есть либо нулевая матрица, либо скалярные матрицы, либо бесследовые, либо все вообще. Совместно с Роуэном и С. Малевым [58] было получено продвижение в этой проблеме для матриц третьего порядка. Установлено, что если множество значений многочлена не скалярно и не 3-центрально, то пересечение образа с множеством недиагонализируемых матриц плотно в пространстве недиагонализируемых матриц. При этом используется продвинутая техника: описание множества инвариантов и теорема Амицура об отсутствии делителей нуля.

Комбинаторика слов и символическая динамика

Совместно с Ф. Д. Руховичем и В. А. Тимориным с помощью глубокого компьютерного анализа было установлено, что для внешнего бильярда вокруг правильного семиугольника: 1) существуют самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами; 2) существует континуум попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств; эти множества могут быть получены как замыкания апериодических орбит и описаны в терминах символической динамики. Тем самым показано, что во внешних бильярдах существуют траектории, кодирующиеся неподстановочными системами. Впервые при изучении внешних бильярдов вокруг правильных многоугольников был обнаружен мультифрактал (фрактал с несколькими коэффициентами самоподобия). В совместной работе с В. Згурским, Ф. Д. Руховичем и В. А. Тимориным было установлено наличие бесконечного набора самоподобий при $n = 9$. Подробнее можно прочитать в [30].

В своем пленарном докладе на международном математическом конгрессе 2022 Ричард Шварц заявил: «The cases $n = 8, 10, 12$ also have a self-similar structure. Without having a reference, I have the sense that the case $n = 7$ is somewhat understood in the sense that there are some regions of renormalization. I think that the cases $n = 9, 11$ are not understood at all. G. Hughes has made beautiful and detailed pictures of outer billiards on regular polygons. These pictures (and earlier ones) suggest

Conjecture 6.5. *Outer billiards on the regular n-gon has an aperiodic orbit if* $n \neq 3, 4, 6$. *I think that this is not known aside from* $n = 5, 8, 10, 12$, *and perhaps* $n = 7$.» [35].

Текущий проект Алексея Яковлевича с В. Згурским, Ф. Д. Руховичем и В. А. Тимориным направлен на разработку методов, которые позволили бы доказать эту гипотезу. Совсем недавно обнаружились подходы к доказательству апериодичности, не опирающиеся на наличие самоподобия.

Фракталоподобные структуры возникают во многих разделах математики. Так, самоподобными объектами в комбинаторике слов являются морфические последовательности. Эти последовательности интересны тем, что бесконечный объект (сверхслово и соответствующая динамическая система) описывается конечным набором информации (два алфавита, подстановка и кодирование). О связи самоподобия с подстановочностью можно прочитать в [30].

Другой способ говорить про дискретные динамические системы — описывать их с помощью графов Рози.

А. Я. Канель-Белов и его ученик И. В. Митрофанов ответили на вопрос: что в терминах графов Рози значит, что данная динамическая система получена с помощью подстановки. Оказалось, что критерием подстановочности для минимальных систем является периодичность эволюции схем Рози (обобщение графов Рози) [69]. Этот результат (типа теоремы Вершика–Лившица) можно рассматривать как одно из обобщений того факта, что цепные дроби квадратичных иррациональностей периодичны с предпериодом. Также этот результат позволил И. В. Митрофанову решить [18], [19] (одновременно и независимо с Ф. Дюраном [20], [21]) несколько долго стоявших алгоритмических проблем, в том числе поставленных А. А. Муч-

ником, Ю. Л. Притыкиным и А. Л. Семеновым [22].

Вместе с учеником А. Л. Чернятьевым получен критерий того, что символическая динамика порождается перекладыванием отрезков, тем самым был дан ответ на вопрос, поставленный Г. Рози в 1979 г.[75].(Чуть позже для почти периодических слов удовлетворяющих i.d.o.c.-condition С.Ференци и Л.Дзамбони независимо получили аналогичный результат.) В сочетании с критерием подстановочности, это дает возможность строить перекладывания, отвечающие подстановочной системе, с алгебраическими числами любой степени.

Прикладная математика

Идеи Алексея Яковлевича находят применения в приложениях. Отличным примером может служить придуманная им замечательная конструкция самозаклинивающихся структур. Слой одинаковых кубов (или тетраэдров) можно расположить между двумя параллельными плоскостями так, что ни одно тело нельзя движением убрать из слоя, не затронув остальные тела. Начавшись с олимпиадной задачи, предложенной Алексеем Яковлевичем на Московской математической олимпиаде в 2000 году, эта тема стремительно развивалась, были получены интересные результаты, в дальнейшем Ю. Эстриным на полученный мегагрант Правительства РФ (2013) создана исследовательская лаборатория. Сейчас конструкция используется для создания новых типов композитных материалов. Исследования по самозаклинивающимся структурам проводятся совместно с МГТУ им Носова, был выигран грант РНФ, получено 10 патентов.

У результатов в статистической геометрии, полученных в аспирантуре Горного института, имеются приложения в горном деле. Трещины могут моделироваться случайными плоскостями. Алексей Яковлевич разработал метод, позволяющий находить явные формулы для вероятностных распределений в плоских задачах статистической геометрии, в частности распределение площадей и периметров при распределении плоскости пуассоновским полем прямых.

Алексей Яковлевич с соавторами получил также множество других результатов в комбинаторной геометрии [91], [56], [57],[132].

Педагогическая деятельность и ученики

С ранних лет Алексей Яковлевич уделял большое внимание математическому образованию. Уже в старших классах вел занятия в ВМШ при ММО. Будучи студентом, был старшим по параллели Московской Математической Олимпиады (в 82, 83, 84 году), руководил математическими кружками. Будучи председателем студенческого научного общества (СНО) он вместе с С.В.Пчелинцевым (ответственным за СНО) проводил олимпиады. Участвовал в согласованиии питерских и московских правил Матбоя (организовал это согласование А. К. Ковальджи). Канонические правила были потом опубликованы в журнале «Математика в Школе». Был председателем жюри Международной Интернет-олимпиады в Ариэле. Участвовал в подготовке команд Германии и Израиля на международную олимпиаду школьников. Входил в состав жюри международной олимпиады школьников в 2020 и в 2021 г.

В разное время был организатором и руководителем студенческих команд: Jacobs University Bremen, Southern University of Science and Technology (China) на Международной студенческой олимпиаде. Им также были заложены и в течение многих лет поддерживались традиции участия Израиля в международной студенческой олимпиаде.

Алексей Яковлевич также много лично занимался со способными школьниками на различных сборах и летних математических школах, а также около 30 лет является членом жюри Летней Конференции Турнира Городов, являющейся важнейшим этапом для школьников при

переходе от олимпиад к исследовательской работе в математике. Написал ряд широко известных статей и учебных пособий, а также, совместно с А. К. Ковальджи, книгу для школьников «Как решают нестандартные задачи».

Алексей Яковлевич также добился больших успехов в работе со студентами. Он отличается широтой научных интересов и умением увидеть перспективные направления и идеи. Эти качества дали возможность получить ряд научных результатов с учениками. Благодаря этому, много молодых математиков также продолжают развивать широкое дерево научных интересов Алексея Яковлевича.

Алексей Яковлевич подготовил шестерых кандидатов физ.-мат. наук: И. А. Иванова-Погодаева, А. Л. Чернятьева, М. И. Харитонова, И. В. Митрофанова (все совместно с проф. А. В. Михалевым), Ф. Д. Руховича (совместно с академиком А. Л. Семеновым), А. М. Елишева, кроме того, подготовлены к защите диссертации Ф. А. Ивлева и В. О. Кировой. А также трех PhD: С. Малев (совместно с профессором Л. Роуэном), З. Венчао, Ф. Розавия.

Редколегии и гранты

О высоком научном признании Алексея Яковлевича и широте интересов свидетельствует тот факт, что он является членом редколлегий рада журналов: «Фундаментальная и прикладная математика», «Чебышевский сборник», «Functional differential equations», «Квант», «Математическое просвещение» (редактор задачного раздела), «Математическое образование», «Потенциал», «Вестник Академии Наук Чеченской Республики» .

Алексей Яковлевич выиграл ряд грантов РФФИ, РНФ, Israel Science foundation. Также он является экспертом РАН и РНФ, получил почетное звание федерального профессора, а также профессора по специальности «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Пожелания

Алексей Яковлевич продолжает с увлечением заниматься математикой. Ученики, кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ, кафедра дискретной математики МФТИ, кафедра высшей алгебры МГУ, сотрудники Магнитогорского государственного университета поздравляют Алексея Яковлевича с юбилеем и желают новых научных достижений, доброго здоровья, счастья и реализации задуманных планов!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Статьи других авторов

1. *W. Specht Gesetze in Ringen* I. Math. Z., 52:557–589, 1950.

2. . *С. И. Адян*, *Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:4 (1970), 715–734; Math. USSR-Izv., 4:4 (1970), 721–739

3. *А.Ю. Ольшанский*, *О проблеме конечного базиса тождеств в группах*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:2 (1970), 376–384;

4. *M.R. Vaughan-Lee*, *Uncountably many varieties of groups*, Bull. London Math. Soc., 2:3 (1970), 280–286.

5. *А. Р. Кемер*, *Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр*, Алгебра и логика, 26:5 (1987), 597–641

6. *А. Р. Кемер*, *Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:4 (1990), 726–753; Math. USSR-Izv., 37:1 (1991), 69–96

7. *А. Р. Кемер*, *Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:5 (1984), 1042–1059.

8. *И.П.Шестаков*, *Супералгебры и контрпримеры*, Сиб. матем. журн., 32:6 (1991), 187–196

9. *А. В. Бадеев*, *О шпехтовости многообразий коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг*, Сиб. матем. журн., 41:6 (2000), 1252–1268

10. *Ю. Г. Клейман*, *О некоторых вопросах теории многообразий групп*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 47:1 (1983), 37–74; Math. USSR-Izv., 22:1 (1984), 33–65

11. *Ю. Г. Клейман*, *О тождествах в группах*, Тр. ММО, 44 (1982), 62–108

12. *Procesi C.*, *Rings with polynomial identities*, N.Y., 1973 -189 с.

13. *В. В. Щиголев*, *Конечная базируемость T-пространств над полями нулевой характеристики*, Изв. РАН. Сер. матем., 65:5 (2001), 191–224; Izv. Math., 65:5 (2001), 1041–1071

14. *А. В. Гришин Коммутативно-алгебраический подход к исследованию полиномиальных тождеств и T-пространств* Дис. д ф.м.н. М., 2000. 142 с

15. *Leonid Bokut, Yugun Chen, Kyriakos Kalorkoti, Pavel Kolesnikov, Viktor Lopatkin Gr?bner-Shirshov bases. Normal forms, combinatorial and decision problems in algebra.* Hackensack, NJ: World Scientific (ISBN 978-981-4619-48-6/hbk; 978-981-4619-50-9/ebook). xxii, 285 p. (2020).

16. *Kang, Ming-chang*, *A note on the birational cancellation problem*, J. Pure Appl. Algebra, 77, 141-154 (1992)

17. *Tsuchimoto, Yoshifumi*, *Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures* Osaka J.Math.42,No 2 435-452 (2005).

18. *I.Mitrofanov. Periodicity of Morphic Words* Journal of Mathematical Sciences, Volume 206, Issue 6 (2015), pp 679-687

19. *I.Mitrofanov. On almost periodicity of morphic sequences* Doklady Mathematics 93(2):207-210, 2016

20. *F.Durand Decidability of uniform recurrence of morphic sequences* RAIRO - Theoretical Informatics and Applications (RAIRO: ITA), 2013

21. *F.Durand Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem* International Journal of Foundations of Computer Science, 2013

22. *Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, "Последовательности, близкие к периодическим*, УМН, 64:5(389) (2009), 21–96; Russian Math. Surveys, 64:5 (2009), 805–871

23. *Neumann B. H.*, *Identical relations in groups.* I, Math. Ann., 114, (1937) 506-525

24. *Abhyankar, P. Eakin, W.J. Heinzer On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring*, J. Algebra 23 (1972), 310–342.

25. *Львов И. В. К теореме Ширшова о высоте.*— В кн.: V Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы докладов. Новосибирск, 1982.

26. *И. А. Иванов-Погодаев*, *Полугруппа путей на семействе равномерно эллиптических комплексов*, Функц. анализ и его прил., 57:2 (2023), 41–74

27. *И. Р. Шафаревич*, *О некоторых бесконечномерных группах. II*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 45:1 (1981), 214–226; Math. USSR-Izv., 18:1 (1982), 185–194

28. *G. M. Bergman*, *Centralizers in free associative algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, 137:327-344, 1969.

29. *Arno van den Essen*, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics (PM, volume 190)

30. *Ф. Д. Рухович*, Внешние биллиарды вне правильных многоугольников: ручной случай, Изв. РАН. Сер. матем., 86:3 (2022), 105–160

Обзоры и доп информация:

31. *Alexei Kanel-Belov, Yakov Karasik, Louis Halle Rowen*, Computational Aspects of Polynomial Identities: Volume l, Kemer's Theorems, 2nd Edition, Monographs and Research Notes in Mathematics., Boca Raton, FL: CRC Press, 2015, ISBN: 978-1-4987-2008-3 , 418 pp.,

32. *А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев*, *Мономиальные алгебры*, Алгебра - 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 26, ВИНИТИ, М., 2002, 35–214 *Belov A., Borisenko V., Latyshev V. Monomial algebras*. NY, Plenum. 1998, p. 5 – 190. J.Math.Sci., NY, 87, 1997, no 3, pp.3463–3575

33. *Louis Rowen, Roman Yavich, Sergey Malev, Alexei Kanel-Belov*, *Evaluations of noncommutative polynomials on finite dimensional algebras. Lvov-Kaplansky Conjecture*, Symmetry Integrability Geom. Methods Applications, 16 (2020), 071 , 61 pp., Special Issue on Algebra, Topology, and Dynamics in Interaction in honor of Dmitry Fuchs
https://www.emis.de/journals/SIGMA/2020/071/,

34. *Народный Университет* ru.wikipedia.org/wiki/Народный университет (1978—1982)

35. *Richard E. Schwartz Survey Lecture on Billiards*, International Mathematical Union, EMS Press

Чистая математика:

36. *И.Иванов-Погодаев, А.Канель-Белов.*, *Конечно определенная нильполугруппа: комплексы с равномерной эллиптичностью*, Изв. РАН. Сер. матем., 2021, 85:6, 126–163

37. *A. Atkarskaya, A. Kanel-Belov, E. Plotkin, and E. Rips*, *Group-like Small Cancellation Theory for Rings*, International Journal of Algebra and Computation, 2023. (Published online) arXiv: 2010.02836

38. *Lucio Centrone, Alexei Kanel-Belov; Sergey Malev*, *Hilbert series of T-spaces*, Journal of Algebra, 628 (2023), 350–361

39. *Alexei Kanel-Belov, Sergey Malev, Coby Pines, Louis Rowen*, *The images of multilinear and semihomogeneous polynomials on the algebra of octonions,* Linear and Multilinear Algebra (GLMA), 2023. (Published online), arXiv: 2204.07139

40. *Alexei Belov-Kanel, Farrokh Razavinia, Wenchao Zhang*, *Centralizers in Free Associative Algebras and Generic Matrices*, Mediterranean Journal of Mathematics, 20:85 (2023) 19 p.

41. *А.Я. Белов-Канель, И.А. Иванов-Погодаев*, *Конструкция бесконечной конечно определенной нильполугруппы*, Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 101:2 (2020), 81–85, arXiv: 1912.01695 *A. Ya. Belov, I. A. Ivanov-Pogodaev*, *Construction of infinite finitely presented nilsemigroup*, Dokl. Math., 101:2 (2020), 81–85

42. *И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов*, *Конечно определенная нильполугруппа: комплексы с равномерной эллиптичностью*, Изв. РАН. Сер. матем., 85:6 (2021), 126–163 *Finitely presented nilsemigroups: complexes with the property of uniform ellipticity*, Izv. Math., 85:6 (2021), 1146–1180

43. *И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов Детерминированная раскраска семейства комплексов*, Фундаментальная и прикладная Математика, 24:2, Выпуск посвящен памяти Александра Васильевича Михалева (2022), 37–180

44. *В. З. Шарич, А. Я. Канель-Белов, И. А. Решетников*, *Существование одноцветных симплексов заданного объема на раскрашенной рациональной решетке*, Матем. заметки, 110:2 (2021), 317–320 *V. Z. Sharich, A. Ya. Kanel-Belov, I. A. Reshetnikov*, *Existence of Monochromatic Simplices of Given Volume in a Colored Rational Lattice*, Math. Notes, 110:2 (2021), 301–304

45. *A. Kanel-Belov, I. Melnikov, I Mitrofanov*, *On cogrowth function of algebras and its logarithmical gap*, Comptes Rendus – Série Mathématique., 359:3 (2021), 297-303

46. *A.Atkarskaya, A.Kanel-Belov, E.Plotkin, E.Rips*, *Structure of Small Cancellation Rings*, Mathematics Research Reports, 2 (2021), 1–14 arXiv: 2010.03992

47. *А. Аткарская, А. Канель-Белов, Е. Плоткин, Э. Рипс*, *Аксиоматическое определение колец с малыми сокращениями*, Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 500 (2021), 16–22 *Axiomatic definition of small cancellation rings*, Dokl. Math., 104:2 (2021), 234–239

48. *Д. В. Гусев, И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов*, *Коллектив автоматов в конечно-порожденных группах*, Матем. заметки, 108:5 (2020), 692–701 *D. V. Gusev, I. A. Ivanov-Pogodaev, A. Ya. Kanel-Belov*, *Collectives of Automata in Finitely Generated Groups*, Math. Notes, 108:5 (2020), 671–678

49. *Gal Dor, Alexei Kanel-Belov, Uzi Vishne*, *The Grassmann algebra in arbitrary characteristic and generalized sign*, Transactions of the American Mathematical Society, series B., 7 (2020), 227–253 arXiv: 1501.02464

50. *E. G. Kondakova, A. Ya. Kanel-Belov. Probabilistic methods of bypass of the labyrinth using stones and random number generator.* Chebyshevskii Sb., 2019, Volume 20, Issue 3, Pp. 296–315

51. *A. Atkarskaya, A. Kanel-Belov, E. Plotkin, E. Rips*, *Construction of a quotient ring of $\mathbb{Z}_2\mathcal{F}$ in which a binomial $1 + w$ is invertible using small cancellation methods*, Contemporary Mathematics, Israel Mathematical Conference Proceedings (IMCP), 726, American Mathematical Society, 2019, 1–76

52. *А. Я. Канель-Белов, А. А. Чиликов*, *Об алгоритмической неразрешимости проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики*, Матем. заметки, 106:2 (2019), 307–310 *A. Ya. Kanel-Belov, A. A. Chilikov*, *On the Algorithmic Undecidability of the Embeddability Problem for Algebraic Varieties over a Field of Characteristic Zero*, Math. Notes, 106:2 (2019), 299–302

53. *Anna Erschler, Alexei Kanel-Belov, No iterated identities satisfied by all finite groups*, Israel Journal of Mathematics, 233:1 (2019), 167–197, arXiv: 1710.04084

54. *A. Kanel-Belov, Jie-Tai Yu, A. Elishev, On the tame authomorphism approximation, augmentation Topology of Automorphism Groups and Ind-schemes, and authomorphisms of tame automorphism groups*, 40 pp., 40 pages, dedicated to 90-th aniversary of prof. B.I.Plotkin, Special Issue of International Journal of Aljebra and computation, dedicated to prof. B.I.Plotkin, 28:8 (2018), 1449–1485, arXiv: 1712.01490 *A. Kanel-Belov, Jie-Tai Yu, A. Elishev, On the tame authomorphism approximation, augmentation Topology of Automorphism Groups and Ind-schemes, and authomorphisms of tame automorphism groups*, 40 pp., 40 pages, dedicated to 90-th aniversary of prof. B.I.Plotkin, Special Issue of International Journal of Aljebra and computation, dedicated to prof. B.I.Plotkin, 28:8 (2018), 1449–1485, arXiv: 1712.01490

55. *Alexei Kanel-Belov, Farrokh Razavinia, Wenchao Zhang, Bergman's Centralizer Theorem and quantization*, 10 pp., Quantum Algebra (math.QA), Comm. in Algebra, 46:5 (2018), 2123–2129, arXiv: 1708.04802

56. *Канель-Белов А.Я., Воронов В.А., Черкашин Д.Д., О хроматическом числе плоскости*, Алгебра и анализ„ 29:5 (2017), 68–89, arXiv: 1512.06444 *A. Ya. Kanel-Belov, V. A. Voronov, D. D. Cherkashin. On the cromatic number of infinitesimal plane layer*„ St. Petersburg Math. J., 29:5 (2018), 761–775

57. *Канель-Белов А.Я., Воронов В.А., Струков Г.А., Черкашин Д.Д., О хроматических числах трехмерных слоек*, Записки научных семинаров ПОМИ, 518 (2022), 94–113

58. *Alexei Kanel-Belov, Sergey Malev, Louis Rowen, The images of multilinear polynomials evaluated on* 3×3 *matrices*, 2013, Proc. of the Amer. Math. Soc. 44:1 (2016), 7–19, arXiv: 1306.4389,

59. *E. Aljadeff, A. Kanel-Belov and Y. Karasik, Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, J. Pure and Appl. Alg., 220:8, August (2016), 2771–2808 (Published online), arXiv: 1502.04298, 40 pp.

60. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Specht's problem for associative affine algebras over commutative Noetherian rings.* Trans. Amer. Math. Soc., 367 (2015), 5553–5596, arXiv: 1308.3055

61. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi PI-varieties associated to full quivers of representations of algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 365:5 (2013), 2681–2722.

62. *A.Belov-Kanel, Jie-Tai Yu. Stable tameness of automorphisms of* $F<x,y,z>$ *fixing* z. Selecta Matematica, December 2012, Volume 18, Issue 4, pp. 799–802.

63. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Full quivers of representations of algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 5525–5569.

64. *Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. Hilbert series of PI-relative free g-graded algebras are rational functions.* Bull. London Math. Soc., (2012), 44(3): 520–532, doi:10.1112/blms/bdr116

65. *А. Я. Белов, М. И. Харитонов, Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте*, Матем. сб., 203:4 (2012), 81–102 , arXiv: 1101.4909 *A. Ya. Belov, M. I. Kharitonov, Subexponential estimates in Shirshov's theorem on height*, Sb. Math., 203:4 (2012), 534–553, arXiv: 1207.2987

66. *Kanel–Belov A., Malev S., Rowen Louis H. The images of non-commutative polynomials evaluated on* 2×2 *matrices.* Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 465–478 (arXiv.:1005.0191v2).

67. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Application of full quivers of representations of algebras, to polynomial identities.* Comm. in Algebra, vol. 39: 4536–4551, 2011.

68. *A.Ya.Belov, G.V.Kondakov, I.Mitrofanov. Inverse problems of symbolic dynamics.* Banach Center Publ. 94 (2011), 43–60.

69. *A.Ya.Belov, I.Mitrofanov. Periodicity of Rauzy scheme and substitutional systems* https://doi.org/10.48550/arXiv.1107.0185

70. *A.Belov-Kanel, Jie-Tai Yu. On the lifting of the Nagata automorphism.* Selecta Mathematica, Vol. 17, Issue 4 (2011), p. 935–945.

71. *Belov, A., Lipyanskii R. Authomorphisms of Endomorphism group of free associative-commutative algebra over an arbitrary field.* Journal of Algebra, Volume 333, Issue 1, May 2011, pages 40–54.

72. *Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. Representability and Specht problem for G-graded algebras.* Adv. in Mat., vol. 225, No 5, 2010, pp. 2391–2428.

73. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Structure of Zariski-closed algebras.* Trans. Amer. Math.Soc., Vol.362, No 9, Pages 4695–4734, 2010.

74. *А. Я. Белов, Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец*, Изв. РАН. Сер. матем., 74:1 (2010), 3–134 *A. Ya. Belov, The local finite basis property and local representability of varieties of associative rings*, Izv. Math., 74:1 (2010), 1–126

75. *А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев, Слова медленного роста и перекладывания отрезков*, УМН, 63:1(379) (2008), 159–160 *A. Ya. Belov, A. L. Chernyatiev, Words with low complexity and interval exchange transformations*, Russian Math. Surveys, 63:1 (2008), 158–160

76. *Belov, Alexei; Yu, Jie-Tai. On Low-Dimensional Cancellation problems.* Journal of Algebra 319 (2008) 2235–2242.

77. *Belov, A., Berzins A., Lipiansky R. Automorphisms of endomorphism group of free associative algebra.* Int. Journ. of Algebra and Comp., Vol. 17, No.5/6, 2007, pp. 923–939.

78. *А. Я. Белов, О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным*, Матем. тр., 10:1 (2007), 29–96 A. Ya. Belov, *On Rings Asymptotically Close to Associative Rings*, Siberian Adv. Math., 17:4 (2007), 227–267

79. *Belov, A.; Kontsevich M.L. Jacobian and Dixmier Conjectures are stably equivalent.* Moscow Mathematical Journal. Vol. 7 (2007) (A special volume dedicated to the 60-th anniversary of A.G.Khovanskii), No 2, pp 209–218.

80. *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Normal bases of PI-algebras.* Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 378–389.

81. *Belov, A.; Kontsevich M.L. Automorphisms of Weyl algebras.* Letters in Mathematical Physics, 2005, vol. 74 (A special volume dedicated to the memory of F.A.Berezin), issue 3, pp. 181–199.

82. *Belov, Alexei; Makar–Limanov, Leonid; Yu, Jie-Tai. On generalized cancellation problem.* J. Algebra 281 (2004), no. 1, 161–166.

83. *А. Я. Белов*, *Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр*, Матем. сб., 195:12 (2004), 3–26*A. Ya. Belov*, *The Gel'fand–Kirillov dimension of relatively free associative algebras*, Sb. Math., 195:12 (2004), 1703–1726

84. *А. Я. Белов*, *Ассоциативных PI-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует*, Сиб. матем. журн., 44:6 (2003), 1239–1254 *A. Ya. Belov*, *No associative PI-algebra coincides with its commutant*, Siberian Math. J., 44:6 (2003), 969–980

85. *Belov A. J., Ivanov I.A. Construction of semigroups with some exotic properties.* Comm. Algebra 31 (2003), no. 2, p. 673–696.

86. *А. Я. Белов*, *О нешпехтовых многообразиях*, Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 47–66

87. *А. Я. Белов, Контрпримеры к проблеме Шпехта, Матем. сб., 191:3 (2000), 13–24 A. Ya. Belov, Counterexamples to the Specht problem, Sb. Math., 191:3 (2000), 329–340*

88. *А.Я.Белов, О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр, УМН, 52:2(314) (1997), 153–154 A. Ya. Belov, On the rationality of Hilbert series of relatively free algebras, Russian Math. Surveys, 52:2 (1997), 394–395*

89. *А. Я. Белов, Г. В. Кондаков, Обратные задачи символической динамики, Фундамент. и прикл. матем., 1:1 (1995), 71–79*

90. *Belov A. Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbitrary characteristics and height theorem. Comm. in Algebra, 1992, vol. 20, N 10, p. 2919–2922.*

91. *А. Я. Белов, Об одной задаче комбинаторной геометрии, УМН, 47:3(285) (1992), 151–152. Belov A. J. A problem in combinatorial geometry. translation in Russian Math. Surveys 47, 1992, n3, 167–168. https://en.wikipedia.org/wiki/Roberts%27s_triangle_theorem*

92. *А. Я. Белов, О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n, Матем. сб., 135(177):3 (1988), 373–384 A. Ya. Belov, On a Shirshov basis of relatively free algebras of complexity n, Math. USSR-Sb., 63:2 (1989), 363–374*

93. *Alexei Kanel-Belov, Farrokh Razavinia, Wenchao Zhang, Bergman's Centralizer Theorem and quantization, 10 pp., Quantum Algebra (math.QA), Comm. in Algebra, 46:5 (2018), 2123–2129*

94. *Belov-Kanel, Alexei; Razavinia, Farrokh; Zhang, Wenchao, Centralizers in free associative algebras and generic matrices. Zbl 07654952 Mediterr. J. Math. 20, No. 2, Paper No. 85, 19 p. (2023).*

Прикладная математика и инженерия:

95. *Alexei Kanel-Belov, Mehdi Golafshan, Sergey Malev, Roman Yavich, On the Distribution function of area and perimeter for planar poisson line process, 2022 (Published online), 19 pp., arXiv: 2205.05151*

96. *Vassily O. Manturov, Alexei Kanel-Belov, Seongjeong Kim, Two-dimensional self-interlocking structures in three-space, 2021 (Published online), 21 pp., arXiv: 2109.06426*

97. *Yury Izvekov, Oleg Tulupov, Vladislav Dubrovsky and Alexey Kanel-Belov, Stochastic Processes Occurring during the Transition of Technical State of the Structure, MATEC Web Conf., 346, International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2021) (2021), 03036 (Published online), 4 pp.*

98. *Yury Izvekov, Oleg Tulupov, Irina Kinzina and Alexey Kanel-Belov, Nonlinear Dynamics of Heavy Structures, MATEC Web Conf., 346, International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2021) (2021), 03037 (Published online), 5 pp.*

99. *A. J. Kanel–Belov, A. V. Dyskin, Y. Estrin, E. Pasternak, I. A. Ivanov. Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids. Moscow Mathematical Journal, vol 10, (2010) No 2, pp. 336–342.*

100. *Schaare, S.; Dyskin, A. V.; Estrin, Y.; Arndt, S.; Pasternak, E.; Kanel-Belov, A. Point loading of assemblies of interlocked cube-shaped elements. Internat. J. Eng. Sci. 46 (2008), no. 12, 1228–1238.*

101. *Dyskin, A.V., Estrin, Y., Pasternak, E., Khor, H.C., Kanel–Belov, A.J. 2005. The principle of topological interlocking in extraterrestrial construction, Acta Astronautica, 57, Issue 1, 10–21.*

102. *Estrin, Y., A.V. Dyskin, E Pasternak, S. Schaare, S. Stanchits & A.J.Kanel–Belov, 2003. Negative stiffness of a layer with topologically interlocked elements. Scripta Materialia, 50, Issue 2, 291–294.*

103. *Estrin, Y., A.V. Dyskin, E.Pasternak, H.C. Khor & A.J. Kanel–Belov 2003. Topological interlocking of protective tiles for Space Shuttle. Phil. Mag. Letters, 83, 351–355.*

104. *Dyskin, A.V., Y.Estrin, A.J.Kanel–Belov & E.Pasternak, 2003. Interlocking properties of buckyballs. Physics Letters A, 319, 373–378.*

105. *Dyskin A. V., Y. Estrin, A. J. Kanel–Belov , E. Pasternak, 2003. A new principle in design of composite materials: reinforcement by interlocked elements. Composites Science & Technology 63, Issues 3–4, 483–491.*

106. *Dyskin, A. V, Y. Estrin, E. Pasternak, H. C. Khor & A. J. Kanel-Belov 2003. Fracture resistant structures based on topological interlocking with non-planar contacts. Advanced Engineering Materials, 5, No 3, 116–119.*

107. *Dyskin, A.V., Estrin, Y., Kanel-Belov, A.J. and Pasternak, E. (2002) Topological interlocking of platonic solids: A way to new materials and structures, Phil. Mag. Letters, vol.83, N 3, 197–203.*

108. *Estrin, Y., Dyskin, A.V., Pasternak, E. and Kanel-Belov, A.J. (2002) Topological Interlocking of Projective Tiles for Space Shuttle., Phil. Mag. Letters, (accepted, 9/04/2003). vol.83, N 3, 197–203.*

109. *Dyskin A. V., Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov, E. Pasternak, A new concept in design of materials and structures: Assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements. Scripta Materialia, 2001, N 44, 2689–2694.*

110. *Dyskin A. V, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov, E. Pasternak, 2001. Toughening by fragmentation – How topology helps. Advanced Engineering Materials, 3, Issue 11, 885–888.*

111. *Белов А. Я., О случайных разбиениях., Деп. в ВИНИТИ. No 273–В91, ВИНИТИ, Москва, 1991, 26 с.*

Книги:

112. А.А.Колчев, А.Я.Канель-Белов, В.Г.Наводнов, А.И.Домошницкий, И.В.Журавлева, Международная открытая студенческая Интернет-олимпиада, Поволжский государственный технологический университет Ариэльский университет, Национальный фонд поддержки инноваций, Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола, 2020 , 202 с., Представлено описание российского и израильского проектов по проведению студенческих интернет олимпиад по математике, олимпиадные задачи разных лет сгруппированы по разделам, приведено решение всех задач. Предназначено как для индивидуальной подготовки к математическим олимпиадам так и для занятий в специальных группах.

113. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Как решают нестандартные задачи, 11-е, стереотипное, МЦНМО, Москва, 2018 , 96 с.,

114. Канель-Белов А.Я., Трепалин А.С., Ященко И.В., Олимпиадный ковчег., 2-е изд., МЦНМО, 2016 , 56 стр.

115. А.Я. Белов, Р. Явич, Проблемы одаренности и стадийность математического обучения (к работе И.С. Рубанова «Как обучать методу математической индукции»)., Вопросы дополнительного образования одаренных школьников в области точных и естественных наук, 2016, 4–9 http://cdoosh.ru/conf/download/conf-2016-tesis.pdf, arXiv: 1611.03966 (Министерство образования Кировской обл., КОГАОУ «Центр дополнительного образования одаренных школьников»)

116. В. В. Прасолов, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Я. Канель-Белов, И. В. Ященко, Ю. Г. Кудряшов, А. С. Трепалин, Московские математические олимпиады. 1958–1967 г., МЦНМО, Москва, 2013 , 328 с.

117. Прасолов В. В., Голенищева-Кутузова Т. И., Алексей Канель-Белов, Юрий Кудряшов, Иван Ященко, Московские математические олимпиады 1935–1957, МЦНМО, 2010 , 344 с.

118. Fedorov R.M, Kanel–Belov A. J., Kovaldji A. K., Yashenko I.V. Moscow Mathematical Olympiads. 1993–2005. — Moscow MCCME, 2006, pp. 456 (In Russian). English translation: Translated by Vladimir Dubrovsky. Edited by Roman Fedorov, Alexei Belov, Alexander Kovaldzhi and Ivan Yashchenko; translation edited by Silvio Levy. MSRI Mathematical Circles Library, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. VIII+176 pp.

119. Fedorov, Roman (ed.); Belov, Alexei (ed.); Kovaldzhi, Alexander (ed.); Yashchenko, Ivan (ed.), Moscow mathematical olympiads, 1993–1999., Transl. from the Russian by V. Dubrovsky and D. Leites. Translation edited by Silvio Levy. (English), MSRI Mathematical Circles Library 4. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Berkeley, CA: Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), 2011 , 220 pp.

120. в кн. Н. Б. Васильев, 62 Московская Математическая олимпиада. Подготовительный сборник. ч. II, Белов А. Я. Избранные задачи Московских математических олимпиад 80-х-90-х годов., ред. В. М. Тихомиров, МЦНМО, Москва, 1999 , 30–45 с.

121. А. Канель-Белов, А. Ковальджи., Московские математические олимпиады 60 лет спустя., Приложение к журналу "Квант", 6, ред. Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомиров, Москва : Бюро Квантум, 1995

122. Белов А. Я., Ковальджи А. К., Васильев Н. Б., Подготовительные задачи к 57 Московской математической олимпиаде 1994 года для 8–11 классов, Департамент образования Москвы, МГУ им. М.В.Ломоносова, Московское Математическое Общество, Treade Publishes, Москва, 1994 , 80 с.

Другое:

123. Pantazis Houlis, Arcady Dyskin, Alexei Kanel-Belov, Elena Pasternak, Yuri Estrin, Tornado, http://www.puzzle-place.com/wiki/Tornado, 2011

124. Kirill Grebnev, Alexei Kanel-Belov, Diamond in the Frame, http://www.johnrausch.com/DesignCompetition/2011/, 2011, http://mechanical-puzzles.blogspot.co.il/2011/08/2011-puzzle-design-competition-part-2.html

125. А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов, Занятия по математике – листки и диалог, Матем. просв., 19, Изд-во МЦНМО, М., 2015, 206–233 arXiv: 1502.01893

126. А. Я. Белов, Научное творчество школьников: где миф и где реальность?, Математическое Просвещение, 2014, 3-я серия, No 18, 231–247

127. А. Я. Белов, Г. О. Шнайдер, Об адаптированном курсе математики для кружковцев-химиков, Матем. обр., 2014, № 2(70), 18–22

128. A.Ya.Belov, N.S.Kellin What is a strict proof like?. Matematicheskoe Obrazovanie. vol.68, No 4, October–December 2013, p. 70–85 2–4.

129. A.Ya.Belov, R.Yavich. Gifting problems and staging of of mathematical education. Matematicheskoe Obrazovanie. vol.53, No 1, Janiary–March 2010, p. 2–5.

130. Белов Алексей Яковлевич, Самозаклинивающиеся структуры., Квант, 1 (2009), 20–23

131. М. В. Алехнович, А. Я. Белов, Сложность алгоритмов при построениях циркулем и линейкой, Фундамент. и прикл. матем., 7:2 (2001), 597–614

132. Belov(Kanel) A. J., Kovaldji A. Taking on triangles: in search of answers between the lines. Quantum 11, 2001, N 4, pp.10–16, Канель А., Ковальджи А., Треугольники и катастрофы, Квант, 11 (1992), 42–50

133. А. Я. Белов, Человеческое мышление и олимпиадные задачи., Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков, 2000, Дубна, сентябрь 2000, 73–74 , Москва, Издательство МЦНМО,

134. Белов А., Тихомиров В., Сложность алгоритмов, Квант, 1999, No 2, 8–11

135. Шарыгин И. Ф., Бузиниер М. А., Гордин Р. К., Трифонов С. И., Карпелевич М. Ф., Белов А. Я., Информационно-поисковая система по учебным задачам., Математика в школе, 1993, No 5, 14–16

136. А. Я. Белов, Сборник задач-монстров по математике, ДНТТМ, Москва, 1992 , 17 с., Олимпиадные Монстры, 2003

137. Белов А. Я., Келлин Н. С., Каким быть строгому доказательству?, Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша, No 6., ИПМ, Москва, 1992 , 37 с.

138. Белов А.Я., Сапир М.В. На круги своя. Квант, 1990, No 4, стр. 12–15.

139. Дерягин Д. В., Канель А. Я., Ковальджи А. К., Кондаков Г. В., Рубанов И. С., Финашин С. М., Фомин Д. В., Шапиро А. А., Яценко А. Д, Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения, Математика в школе, 1990, No 4, 20–25

140. Белов А. Я., Приемы мышления различного уровня четкости на примерах решения олимпиадных задач, Новые методы и средства обучения. Проблемные задачи и их место в учебном процессе., 1:9 (1989), 59–65

Решение
XXII Международной научной конференции
«Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интернат №18 при Московском университете
Россия, Тула, 26 – 29 сентября 2023 г.

1. Признать, что XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интернат №18 при Московском университете, прошла успешно. Её результаты будут способствовать развитию алгебры, теории чисел, дискретной геометрии, многомасштабного моделированию физических процессов, цифровых технологий и истории математики, их применению в различных областях исследований в России;

2. Отметить активное участие иностранных участников особенно из Беларуси и Таджикистана;

3. Выразить благодарность руководству Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого за организацию конференции;

4. Выразить благодарность руководству Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, руководству Математического института им. В. А. Стеклова РАН, руководству МЦМУ МЦФПМ, руководству Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, руководству Института истории науки и техники им. С. И. Вавилова РАН, руководству Московского педагогического университета, руководству Тульского государственного университета за поддержку конференции;

5. Выразить благодарность правительству Тульской области за финансовую поддержку проведения конференции (грантом правительства Тульской области);

6. Считать целесообразным продолжение систематических проведений конференций «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории»;

7. Провести XXIII Международную конференцию «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» в г. Туле в сентябре 2024 года;

8. Издать избранные труды конференции в г. Туле в 24 томе журнала «Чебышевский сборник»;

9. Рекомендовать посвятить XXIII Международную конференцию в 2024 году 80-летию профессора А. И. Галочкина и 75-летию профессора В. Г. Чирского;

10. Считать целесообразным расширение возможностей системы ПОИВС по информационному сопровождению конференций;

11. Поручить программному комитету конференции продолжить работу по реализации решений XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интернат №18 при Московском университете.

Ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого

К. А. Подрезов

Председатель программного комитета,
профессор

В. Н. Чубариков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 24 Выпуск 4

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Заместители главного редактора

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственные секретари

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Члены редколлегии

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.
e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.
e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).
e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 24 Issue 4

The main editor

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

The assistants of the main editor:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Executive secretaries

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Editorial Board

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.
e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of

Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).
e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).
e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius – Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 24 Issue 4

S. S. Demidov. Andrey Nikolaevich Kolmogorov at the turning point of the national history of the 50-s - 60-s 5

A. A. Veselova, I. B. Kozhukhov. Lattices of topologies and quasi-orders of a finite chain 12

A. F. Galimyanov, T. Y. Gorskaya. On a generalized interpolation polynomial operator 22

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova. Methods for finding optimal mixed strategies in matrix games with correlated random wins 33

V. I. Ivanov. The plexus operator for the generalized Dunkle transformation on a straight line . 48

V. O. Kirova, I. V. Godunov. Combinatorial complexity characteristics of Sturm's words 63

V. O. Kirova. Chromatic number of puffs with forbidden monochrome arithmetic progressions 78

S. N. Askhabov. Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity 85

M. N. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, A. V. Afonina, N. M. Dobrovolsky, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova. Universality and antiuniversality theorems for zeta functions of monoids of natural numbers 104

M. A. Korolev. About one distribution associated with Farey rows 137

Lopez Perez A., Cuellar Hustis O. On bijective functions of fixed variables in the Galois field of p^k elements and on the ring of integers p-adic numbers for an odd prime number p 191

N. V. Maksimenko, I. Yu. Rebrova. Dirichlet series space for multidimensional lattices 206

F. M. Malyshev. Invariant differential polynomials 212

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko. Matrix integral transformations for modeling wave processes in piecewise homogeneous media 239

U. M. Pachev, R. A. Dokhov, A. H. Kodzokov, M. S. Nirova. On some arithmetic applications to the theory of symmetric groups 252

Z. X. Rakhmonov, I. Allakov, B. H. Abraev. Generalization of the ternary Goldbach's problem with almost equal terms 264

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, I. Y. Rebrova, N. M. Dobrovolsky. Smooth lattice variety 299

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky. On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions II 311

BRIEF MESSAGES

D. V. Goryashin, S. A. Gritsenko. On diophantine inequalities with prime numbers 325

M. N. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky. On the accuracy of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids 335

A. Duaa, M. Meisami. The coefficient and arithmetic complexity of combining $n!$ 341

N. M. Korobov, M. N. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky. On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II 345

Yu. N. Shteynikov. On the extreme set of partial integers 354

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

R. A. Melnikov, O. A. Savvina. The historical and mathematical legacy of Fyodor Andreevich Medvedev (on the 100-th anniversary of his birth) 361

I. A. Turenova, E. L. Turenova, S. P. Moiseeva. About the history of the scientific school of Applied Probabilistic analysis and queuing theory of the Department of TWiMS of Tomsk State University 372

MEMORABLE DATES

N. Kh. Agakhanov, N. N. Andreev, S. N. Askhabov, N. M. Dobrovolsky, A. Domoshnitsky, S. A. Dorichenko, M. V. Zaitsev, I. A. Ivanov-Pogodaev, A. A. Kolchev, S. Malev, I. V. Mitrofanov, A. A. Mikhalev, S. P. Mishchenko, V. G. Navodnov, Yu. V. Nesterenko, A. M. Pesin, F. V. Petrov, S. V. Pchelintsev, A. M. Raygorodsky, F. D. Rukhovich, L. M. Samoilov, A. L. Semenov, V. A. Timorin, O. N. Tulupov, M. I. Kharitonov, A. L. Cherniyayev, A. A. Chilikov, V. N. Chubarikov, A. I. Shafarevich. Alexey Yakovlevich Kanel-Belov 380

Decision of the XXII International Scientific Conference “Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and problems of history” dedicated to the 120-th anniversary of the birth of Academician A. N. Kolmogorov and the 60-th anniversary of the opening of boarding school № 18 at Moscow University ... 401

РЕДКОЛЛЕГИЯ 403

THE EDITORIAL BOARD 407

TABLE OF CONTENTS 411