ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XXIV

Выпуск 2 (88)

Тула
2023

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 24 Выпуск 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-5-14

Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами[1]

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

В статье рассматривается функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции и для этой системы исследуется задача о базисах полных систем, а именно:

- *Имеет ли каждая полная система (конечный) базис?*
- *Существует ли для любого положительного целого числа n базис полной системы, состоящий из n функций?*
- *Найти конкретные базисы из n функций* $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Ответы на все эти вопросы положительные, что и является основным результатом данной статьи.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, рациональная функция, базис.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Н. Ф. Алексиадис. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 5–14.

---

[1] Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 519.716 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-5-14

Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Filippovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University "MPEI" (Moscow).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of rational functions with rational coefficients endowed with the superposition operation. We investigate the problem of bases of complete systems, namely:

- *Does every complete system have a (finite) basis?*;
- *For any positive integer n, is there a basis of a complete system consisting of n functions?*
- *a number of examples of basis consisting of n functions are presented explicitly* $(n = 1, 2, 3, ...)$.

The answers to all these questions are positive, which is the main result of this article.

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, rational function, basis.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
N. Ph. Aleksiadis, 2023, "Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 5–14.

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами, сделанного в сентябре 2021 года на XX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова [1] и ее можно считать продолжением моих статьей [2] и [3].

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут в принципе рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем определяет, с одной стороны, серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика функциональных систем обширна. К числу основных задач для функциональных систем относятся проблемы полноты и выразимости, о базисах, о синтезе и анализе, о тождественных преобразованиях и другие.

При исследовании проблемы полноты одной из основных задач является задача о базисах, т.е. о минимальных полных системах (минимум понимаем в том смысле, что никакая собственная подсистема полной системы не является опять полной).

В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов типа существования базисов полных систем, а также в отсечении негативных ситуаций, когда указанных базисов не существует.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7] и [11].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$. Полное множество принято называть *полной системой.*

Функциональная система **F** называется *конечно-порожденной*, если в **F** существует конечная полная система.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с. $\boldsymbol{F}$, т.е.* $[A] = F$.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [14]), 3-значная логика (Яблонский [12]), 4-значная логика (Мальцев [8]), k-значная логика (Розенберг [15], Саломаа [9], Слупецкий [16], Яблонский [13]), автоматные функции (Кудрявцев [6], Часовских [10]), счетнозначные логики (Гаврилов [4]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стало традицией).

С проблемой полноты связана и задача о базисах, т.е. изучение вопроса о минимальных полных системах.

Множество $A\,(A \subseteq F)$ называется *базисом* в ф.с. **F**, если A полная система, а никакая его собственная подсистема не является полной в ф.с. **F**.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется A-функцией, если $[\{f(x_1, ..., x_n)\}] = F$, т.е. если из однойединственной функции $f(x_1, ..., x_n)$ с помощью операций из O можно получить все функции из F.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных (включая 0).

Z — множества всех рациональных чисел.

Q — множества всех рациональных чисел.

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c, т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами.*

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, при этом $h(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также rq-функциями.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Пришло время определить основной объект нашего исследования — функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- *перестановку переменных,*
- *переименование переменных (без отождествления),*
- *отождествление переменных,*
- *введение фиктивной переменной,*
- *удаление фиктивной переменной,*
- *подстановку одной функции в другую.*

Заметим, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

3. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами

Целью настоящей работы является исследование задачи о базисах полных систем в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$:

- *Имеет ли каждая полная система (конечный) базис?*
- *Существует ли для любого положительного целого числа n базис полной системы, состоящий из n функций?*
- *Найти конкретные базисы из n функций ($n = 1, 2, 3, ...$).*

Теорема 1. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ каждая полная система имеет базис, причем конечный.*

Доказательство. Доказательство данного факта следует из того, что ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ является конечно-порожденной [2], а как известно, в конечно-порожденной функциональной системе каждая полная система имеет базис, причем конечный (см. [7]).

Теорема доказана. □

А для установления истинности второго утверждения (существуют базисы полных систем любой конечной мощности) нам понадобится несколько вспомогательных утверждений (лемм).

Лемма 1 (см. [5]). *Если $xy \neq 0$, то диофантово уравнение $x^4 + 4y^4 = z^2$ не имеет решения в множестве Z.*

Лемма 2. *Квадратный трехчлен $a^4x^2 + x$ не принимает значения n^4 ($n = 1, 2, 3, ...$) при любых рациональных значениях параметра $a \neq 0$ и переменной x.*

Доказательство. Надо показать, что для любых рациональных значений параметра $a \neq 0$, переменной x и положительных целых значений n уравнение

$$a^4x^2 + x = n^4$$

не имеет решения. Действительно,

$$a^4x^2 + x = n^4 \leftrightarrow a^4x^2 + x - n^4 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^4n^4}}{2a^4}.$$

Так как a произвольное рациональное число, кроме 0, то его можно представить в виде $a = \frac{m}{k}$, где $m \in Z, k \in N$ при этом $k \neq 0$ и $m \neq 0$.

Далее, имеем

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^4n^4}{k^4}}}{\frac{2m^4}{k^4}} = \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4m^4n^4}}{2m^4} =$$

$$= \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4(mn)^4}}{2m^4} = \frac{k^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + 4l^4}}{2m^4},$$

где $l = mn$ при этом $l \neq 0$, (так как $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

Понятно, что x является рациональным решением тогда и только тогда, когда $k^4 + 4l^4$ является полным квадратом, при этом $kl \neq 0$ (по условию), т.е. когда уравнение $k^4 + 4l^4 = r^2$ имеет решение в Z при $kl \neq 0$. Но, по лемме (1) это уравнение не имеет решения.

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$ *для любого натурального* $n \geq 1$ *существует базис, состоящий ровно из* n *функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что при $n = 1$ существует базис, состоящий из одной-единственной rq-функции и, как было установлено в [2], такой rq-функцией является

$$f(x, y, z, t, u, v) = (t - u) \cdot \frac{x}{v} + xz - yz + z + 1.$$

Теперь пусть $n > 1$. Тогда обозначим через

$$F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v) \equiv$$

$$[(x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2]^4 f^2(x, y, z, t, u, v) + f(x, y, z, t, u, v)$$

и рассмотрим систему из n функций

$$B = \{F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v), 1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

Докажем, что B является базисом в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$.

Для этого надо показать, что в ф. с. $\mathbf{F}_{RQ}$

1. B является полной системой;

2. Никакая ее собственная подсистема не является полной, другими словами, если из этой системы удалить какую-нибудь одну функцию, то полученная подсистема не будет полной.

Первый факт легко доказать. Действительно, суперпозиция

$$F(1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4, x, y, z, t, u, v) = f(x, y, z, t, u, v)$$

является A-функцией (см. выше). Следовательно, с помощью операций суперпозиции можно получить и все rq-функции.

Итак, B полная система.

Теперь докажем второй факт.

Если из полной системы B удалить функцию $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$, то полученная подсистема

$$B_{\bar{F}} = \{1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}$$

состоит из одних констант, поэтому

$$[B_{\bar{F}}] = B_{\bar{F}} \neq F_{RQ}.$$

Следовательно, $B_{\bar{F}}$ не является полной.

Если из B удалить любую константу k ($k \in \{1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}$), то полученная подсистема

$$B_{\bar{k}} = \{F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v), 1^4, 2^4, ..., (k-1)^4, (k+1)^4, ..., (n-1)^4\}$$

состоит из таких rq-функций, которые не принимают все значение из Q, т.е. пропускают хотя бы одно значения из Q. Для этого достаточно заметить, что функция

$$F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$$

имеет такую же структуру, какую имеет квадратный трехчлен a^4x^2+x, который в силу леммы (2) не принимает значения n^4 ($n = 1, 2, 3, ...$) при любых рациональных значениях параметра $a \neq 0$ и переменной x. Действительно, в нашем случае

$$a = (x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 ... + (x_{k-1} - (k-1)^4)^2 +$$

$$+(x_k - k^4)^2 + (x_{k+1} - (k+1)^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2,$$

а в качестве переменной x выступает функция $f(x, y, z, t, u, v)$, при этом условие, что первый коэффициент квадратного трехчлена $a \neq 0$ выполняется, т.к.

$$(x_1 - 1^4)^2 + (x_2 - 2^4)^2 ... + (x_{k-1} - (k-1)^4)^2 +$$

$$+(x_k - k^4)^2 + (x_{k+1} - (k+1)^4)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1)^4)^2 = 0$$

означает, что

$$x_1 = 1^4, x_2 = 2^4, ..., x_{k-1} = (k-1)^4, x_k = k^4, x_{k+1} = (k+1)^4, ..., x_{n-1} = (n-1)^4,$$

но в данном случае у нас нет константы k^4 и, следовательно, в силу леммы (2) функция $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, y, z, t, u, v)$ не принимает все значения из Q.

Итак,из функций множества $B_{\bar{k}}$ с помощью операций суперпозиции можно получить только rq-функций, которые "пропускают" хотя бы одно значение из Q, т.е. невозможно получить rq-функции, которые принимают все значения из Q. Поэтому $B_{\bar{k}}$−неполная система.

Из вышесказанного следует, что B является базисом.

Теорема доказана. □

Замечание 1. *Следует отметить, что конкретным примером базиса из n элементов является базис, приведенный в доказательстве теоремы (2), а именно,*

$$\{[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1))^2]^4 f^2(x, y, z, t, u, v) + f(x, y, z, t, u, v),$$

$$1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

4. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: доказано, что в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ каждая полная система имеет (конечный) базис и для любого положительного целого числа n существует базис полной системы, состоящий из n функций и такими базисами являются

- *при* $n = 1$: *базис*

$$B = \{f(x,y,z,t,u,v) = (t-u)\cdot\frac{x}{v} + xz - yz + z + 1\};$$

- *при* $n > 1$: *базис*

$$B = \{\{[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + ... + (x_{n-1} - (n-1))^2]^4 f^2(x,y,z,t,u,v) + f(x,y,z,t,u,v),$$
$$1^4, 2^4, 3^4, ..., (n-1)^4\}.$$

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М.В.Ломоносова А.В. Галатенко за поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XX Международной конференции, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова (Тула, 21–24 сентября 2021 года). Тула, 2021. С. 80-83.
2. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).
3. Н. Ф. Алексиадис. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14.
4. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5-64.
5. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — М.: Изд–во Наука, 1978. 63 с.
6. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами //В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45-74.
7. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд–во МГУ, 1982. 157 с.
8. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд–во Наука, 1976. 388 с.
9. Саломаа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики //В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т.8. С. 7-32.
10. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151-154.

11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд–во Наука, 1986. 384 с.
12. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153–1156.
13. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
14. Post E. Two-valued iterative sistems of mathematical logik. — Prinston. 1941.
15. Rosenberg Y. Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved. v. 80, №4. P. 393,1970.
16. Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102-128.

REFERENCES

1. N. Ph. Aleksiadis, 2021, “On the bases of rational functions with rational coefficients”, *Proc. 20th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”*, pp. 80-83.
2. N. Ph. Aleksiadis, 2022, “Rational A-functions with rational co efficients”, Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 4, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19)
3. N. Ph. Aleksiadis, 2023, “Closed classes in the functional system of polynomials with real Coefficients”, Chebyshevskii sbornik, vol. 24, № 1, pp. 5–14. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14.
4. Gavrilov, G. P. 1965, “On functional completeness in countable logic”, *Problems of cybernetics*, vol. 15, pp. 5-64.
5. Gelfond, A. O. 1978, “Solving equations in integers”, Moscow.:Science, 63 p.
6. Kudryavtsev, V. B. 1965, “On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata”, *Problems of cybernetics*, vol. 13, pp. 45-74.
7. Kudryavtsev, V. B. 1982, “Functional systems ”, Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.
8. Maltsev, A. I. 1976, “Selected works”. vol. II — Moscow: Publishing House “Nauka”, 388 p.
9. Salomaa, A. 1963, “Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain”, II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.
10. Chasavskikh, A. A. 2018, “The problem of completeness in classes of linear automata”, *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 22(2), pp. 151-154.
11. Yablonsky, S. V. 1986, “Introduction to discrete mathematics”, Moscow.:Science, 384 p.
12. Yablonsky, S. V. 1954, “On functional completeness in three-digit calculus”, *DAN USSR*, vol. 95(6), pp. 1153–1156.
13. Yablonsky, S. V. 1958, “Functional constructions in k-valued logic”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol.51, pp. 5–142.

14. Post, E. 1941,“Two-valued iterative sistems of mathematical logic”. — Prinston.
15. Rosenberg, Y.1970, “Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken”. *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved.*, v. 80, №4, p. 393.
16. Slupecki, J. 1939,“ Kriterium pelnosci wielowar — tosciowych systemow logiki zdan”. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 25.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-15-37

Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами

И.Аллаков, Б.Х.Абраев

Аллаков Исмаил —доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г.Термез, Узбекистан).
iallakov@mail.ru
Абраев Бахром Холтураевич — базовый докторант, Термезский государственный университет (г.Термез, Узбекистан).
babrayev@mail.ru

Аннотация

Пусть $X-$ достаточно большое действительное число, b_1, b_2- целые числа с условием $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, a_{ij}, $(i = 1, 2; j = \overline{1, 4})-$ целые положительные числа, $p_1, \ldots, p_4-$ простые числа. Положим $B = \max\{3|a_{ij}|\}, (i = 1, 2; j = \overline{1, 4})$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $K = 9\sqrt{2}B^3 \left|\bar{b}\right|$, $E_{2,4}(X) = \left\{b_i \;\middle|\; 1 \leq b_i \leq X,\;\; b_i \neq a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\; i = 1, 2\right\}$. В работе изучено разрешимость системы $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4$, $(i = 1, 2)$, в простых числах $p_1, \ldots, p_4$ и впервые получена степенная оценка для исключительного множества $E_{2,4}(X)$ и оценка снизу для $R(\bar{b})-$ количество решений рассматриваемый системы в простых числах, а именно доказано, что если X - достаточно большое, а $\delta (0 < \delta < 1)$ достаточно малое действительные числа, тогда: существует достаточно большое число A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка $E_{2,4}(X) < X^{2-\delta}$ и для $R(\bar{b})$ при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ справедлива оценка $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, для всех $\bar{b} = (b_1, b_2)$ за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них.

Ключевые слова: уравнение, система линейных уравнений, простые числа, целые коэффициенты, натуральные числа, определитель, критерия разрешимости, множество, мощность множества, оценка, степенная оценка, ряд Дирихле, характер Дирихле, исключительный нуль.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
И. Аллаков, Б. Х. Абраев. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 15–37.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-15-37

On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers

I.Allakov, B.Kh.Abrayev

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez,Uzbekistan).
e-mail:iallakov@mail.ru
Abrayev Bakhrom Kholturayevich — basic doctoral student (PhD),Termez State University (Termez,Uzbekistan).
e-mail: babrayev@mail.ru

Abstract

Let $X-$ be a sufficiently large real number, b_1, b_2-integers with $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, a_{ij},$(i = 1, 2;$ $j = \overline{1,4})-$ positive integers, p_1,…, p_4-prime numbers.Let $B = \max\{3\,|a_{ij}|\}$, $(i = 1, 2; j = \overline{1,4})$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $K = 9\sqrt{2}B^3\,|\bar{b}|$,

$$E_{2,4}(X) = \left\{b_i \;\middle|\; 1 \le b_i \le X,\, b_i \neq a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\ i = 1, 2\right\}.$$

The paper studies the solvability of a system of linear equations $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i4}p_4,\ i = 1, 2,$ in primes $p_1, \ldots, p_4$ and for the first time a power estimate for the exceptional set $E_{2,4}(X)$ and a lower estimate for $R(\bar{b})-$ the number of solutions of the system under consideration in prime numbers, are obtained, namely, that if X is sufficiently large and $\delta (0 < \delta < 1)$ is sufficiently small real numbers, then: there exists a sufficiently large number A, such that for $X > B^A$ estimate is fair $E_{2,4}(X) < X^{2-\delta}$; and for $R(\bar{b})$ given $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ fair estimate $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, for all $\bar{b} = (b_1, b_2)$ except for at most $X^{2-\delta}$ pairs of them.

Keywords: equation, system of linear equations, prime numbers, integer coefficients, natural numbers, determinant, solvability criteria, set, cardinality of a set, estimate, power estimate, Dirichlet series, Dirichlet character, exceptional zero.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
I.Allakov, B.Kh.Abrayev 2023, “On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers ” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 15–37.

1. Введение

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = \overline{1, s}), \tag{1.1}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_s-$ натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}-$ целые коэффициенты, а $p_1, p_2, \ldots, p_m-$ простые числа. Обозначим через $U_{s,m}(X)-$ множество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, для которых система (1.1) неразрешима в простых числах, т.е.

$$U_{s,m}(X) = \{\,(b_1, b_2, \ldots, b_s),\ 1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m\}$$

и пусть $E_{s,m}(X) = cardU_{s,m}(X)$.

Wu Fang [1], изучая разрешимость этой системы при $m \geqslant 2s+1$ и при некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1.1). Ming-Chit Liu и Kai-Tsang [2] исследовали систему (1.1) при $s = 2,\ m = 3$ и доказали степенную оценку

$$E_{2,3}(X) \leqslant X^{2-\varepsilon},$$

где $X-$ достаточно большое действительное число, $\varepsilon-$ абсолютное, эффективно вычисляемое, достаточно малое положительное постоянное число. И. Аллаков в [3] уточнил результаты работы Ming-Chit Liu и Kai-Tsang [2], а затем в [4] обобщил их для системы (1.1) при $s = n,\ m = n+1$.

Из выше изложенного следует, что вопрос исследования системы (1.1), при $s = 2, m = 4$ до сих пор оставался открытым. В настоящей работе рассмотрим, именно, этот случай. Полагая $s = 2, m = 4$ из (1.1), получим:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, \quad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

Известно, что разрешимость системы (1.1) связанно условиями, так называемые положительной разрешимости и конгруэнтной разрешимости (см.[5]). В нашем случае эти условия выгладят следующим образом:

a) для произвольного простого числа p существуют целые числа $1 \leqslant l_1, l_2, l_3, l_4 \leqslant p-1$ которые удовлетворяют систему линейных сравнений

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 + a_{i4}l_4 \equiv b_i (\mathrm{mod} p), \quad (i = 1, 2);$$

b) для некоторых положительных вещественных чисел y_1, y_2, y_3, y_4 справедливо равенство: $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 = b_i, (i = 1, 2)$.

Пусть $W_{2,4}(X)-$ множество векторов $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ которые удовлетворяют условиям a) и b). В [6] доказано, что для достаточно больших X, справедлива оценка

$$cardW_{2,4}(X) > 1,69954 \cdot X^2 B^{-20}\Big(e^{\gamma_0+10}\ln\ln B + 2,507 \cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\Big)^{-1},$$

где $\gamma_0 = 0,5772...-$ постоянная Эйлера.

Из этой оценки следует, что векторы $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, которые удовлетворяют условиям a) и b) достаточно много (см.[7]).

В дальнейшем рассмотрим только те (b_1, b_2), которые удовлетворяют этим двум условиям. В настоящей работе доказано:

Теорема. Если $X-$ достаточно большое, а $\delta (0 < \delta < 1)$ достаточно малое действительные числа, тогда:
a) существует достаточно большое число A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка

$$E_{2,4}(X) < X^{2-\delta};$$

b) для $R(\bar{b})$ при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2), 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$ справедлива оценка $R(\bar{b}) \geqslant K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, для всех $\bar{b} = (b_1, b_2)$ за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них.

2. Основные обозначения

Пусть

$$\Delta_{ij} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{ib} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & b_1 \\ a_{2i} & b_2 \end{pmatrix}, 1 \leqslant i, j \leqslant 4.$$

Для того, чтобы избежать тривиальности и вырожденности налагаем на коэффициенты системы (1.2) условия:

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34} \neq 0 \ \text{ и } \ \gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{14},\Delta_{23},\Delta_{24},\Delta_{34}) = 1.$$

Для достаточно малого положительного числа δ, положим

$$X \geqslant B^{\exp(\delta^{-2})}, \ \ Q = N^{\delta}, \ \ L = NQ^{-\frac{1}{100}} \ \text{ и } \ T = Q^{\frac{4}{\sqrt{\delta}}}, \ N = 18B^3X, \ B \leqslant Q^{\delta}. \tag{2.1}$$

Пусть χ характер Дирихле по модулю $q \leqslant T$ (относительно свойства характеров Дирихле см.[8])), $\Lambda(n)-$ функция Мангольдта, определяемая равенством

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m, p - \text{простое}, \ m > 0 - \text{целое}; \\ 0, & \text{если } n \neq p^m. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{cases} S(y) = \sum\limits_{L \leqslant n \leqslant N} \Lambda(n)e(ny), \ S_{\chi}(y) = \sum\limits_{L \leqslant n \leqslant N} \Lambda(n)\chi(n)e(ny), \\ I(y) = \int\limits_{L}^{N} e(xy)dx, \ \tilde{I}(y) = \int\limits_{L}^{N} x^{\tilde{\beta}-1}e(xy)dx, \quad I_{\chi}(y) = \int\limits_{L}^{N} e(xy) \sum\limits_{|\gamma| \leqslant T} {}' x^{\rho-1}dx, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $e(x) = e^{2\pi ix}$, $\tilde{\beta} > 1 - c(\ln T)^{-1} -$ исключительный нуль функции $L(s,\chi)$, т.е. единственный вещественный нуль $L-$ функции Дирихле, возможно существующий для одного характера $\chi(\text{mod} q), \sum'_{|\gamma| \leqslant T} -$ означает суммированию по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ (кроме $\tilde{\beta}$) функции $L(s,\chi)$ лежащий внутри области:

$$\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1(\ln T)^{-1}, \ |\gamma| \leqslant T. \tag{2.3}$$

(см.[8]). Пусть $\tau = T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$. Теперь для любых целых чисел $h_1, \ h_2, \ q$ удовлетворяющие условиям

$$1 \leqslant h_1, h_2, q \leqslant Q \ \text{ и } \ \text{НОД}(h_1, h_2, \ q) = 1, \tag{2.4}$$

положим $\bar{m}\left(h_1,h_2,q\right) = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 : \left|x_i - h_iq^{-1}\right| \leqslant \tau q^{-1}, \quad (i = 1,2)\right\}$ и

$$M_1 = \cup \bar{m}\left(h_1,h_2,q\right), \ M_2 = [\tau, 1+\tau]^2 \backslash M_1, \tag{2.5}$$

где $\bar{m}(h_1,h_2,q)$ попарно непересекаюшие квадратики и все лежать внутри квадрата $[\tau, 1+\tau]^2$.

Для произвольных вещественных x_1, x_2 и $\bar{b} = (b_1,b_2) \in W_{2,4}(X)$ положим

$$\bar{x}_b = b_1x_1 + b_2x_2 \ \text{ и } \ \bar{x}_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \quad (1 \leqslant j \leqslant 4). \tag{2.6}$$

Пусть

$$I(\bar{b}) = \sum \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)\Lambda(n_4), \tag{2.7}$$

где суммирование ведётся по всем n_j, удовлетворяющие условиям

$$L < n_1, n_2, n_3, n_4 \leqslant N, \ \ \sum_{j=1}^{4} a_{ij}n_j = b_i, (i = 1,2).$$

В виду (2.2) и (2.5), $I(\bar{b})$ можем представит в виде:

$$I(\bar{b}) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau}\int\limits_{\tau}^{1+\tau} e\left(-\bar{x}_b\right) \prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 = \left(\iint\limits_{M_1} + \iint\limits_{M_2}\right) e\left(-\bar{x}_b\right) \prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 =$$

$$= I_1(\bar{b}) + I_2(\bar{b}). \tag{2.8}$$

3. Большие дуги

Рассмотрим интеграл

$$I_1(\bar{b}) = \iint\limits_{M_1} e(-\overline{x}_b) \prod_{j=1}^{4} S(\overline{x}_j) dx_1 dx_2. \qquad (3.1)$$

Для произвольного характера Дирихле $\chi(modq)$ определим

$$C_{\chi}(m) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \chi(l) e_q(ml) \text{ и } C_q(m) = C_{\chi_0}(m),$$

где $e_q(ml) = e^{2\pi i \frac{ml}{q}}$ и χ_0- главный характер по модулю q. Ясно, что $|C_{\chi}(m)| \leqslant \ \varphi(q)$. Для произвольных $(x_1, x_2) \in \overline{m}(h_1, h_2, q)$ можем писать $x_k = \frac{h_k}{q} + \eta_k$ $(k = 1, 2)$. Тогда справедливо неравенство $|\eta_k| < \tau q^{-1}$ $(k = 1, 2)$. По аналогии (2.6) для $j = \overline{1, 4}$ положим

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{h}_j = a_{1j} h_1 + a_{2j} h_2 & \bar{h}_b = b_1 h_1 + b_2 h_2 \\ \bar{\eta}_j = a_{1j} \eta_1 + a_{2j} \eta_2 & \bar{\eta}_b = b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 \end{array}\right\}.$$

Тогда $\overline{x}_j = \frac{\overline{h}_j}{q} + \overline{\eta}_j$, $j = \overline{1, 4}$ и $\overline{x}_b = \frac{\overline{h}_b}{q} + \overline{\eta}_b$. Согласно свойству ортогональности характеров [9] и обозначению (2.2) имеем

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\bmod q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) S_{\chi}(\bar{\eta}_j) + O(\ln^2 N). \qquad (3.2)$$

Обозначим $G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) = \sum\limits_{\chi(\bmod q)} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) I_{\chi}(\bar{\eta}_j), 1 \leqslant j \leqslant 4$ и

$$H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) = C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right), \qquad (3.3)$$

где $\tilde{r}$ модул исключительного характера $\tilde{\chi}$ и

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \text{ делится на } \tilde{r}, \\ 0, & \text{если } q \text{ не делится на } \tilde{r}. \end{cases}$$

Для упрощения интеграла $I_1(\bar{b})$ воспользуемся леммами 3.4.1-3.4.3 работы [10]. Согласно теоремы 3.4.1 работы [10] для любого действительного y и произвольного $\chi(modq)$ с $q \leq T$, имеем

$$S_{\chi}(y) = \delta_{\chi_0} I(y) - \delta_q \widetilde{I}(y) - I_{\chi}(y) + O((1 + |y|N) N T^{-1} \ln^2 N) \qquad (3.4)$$

Поскольку

$$\left|\overline{\eta}_j\right| N = \left|(a_{1j}\eta_1 + a_{2j}\eta_2)\right| N < \frac{2B}{3} \tau q^{-1} N = \frac{2B}{3} T^{\frac{1}{4}} q^{-1},$$

то используя (3.4) из (3.2) получим

$$S(\overline{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ H_j(\overline{h}, q, \overline{\eta}) + O\left(\varphi(q) T^{-\frac{3}{4}} B N \ln^2 N\right) \right\} = \frac{1}{\varphi(q)} \{H_j + R\}. \qquad (3.5)$$

Отсюда следует, что для произвольных $(x_1, x_2) \in \overline{m}(h_1, h_2, q)$ справедливо равенство

$$\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \prod_{j=1}^{4} H_j(\overline{h}, q, \overline{\eta}) + O\left(\frac{\varphi^3(q) N^4 B \ln^2 N}{T^{\frac{3}{4}}}\right). \qquad (3.6)$$

Остаток в (3.6) получается как сумма 15 членов в каждом которого участвует качество множителя остаток R из равенство (3.5). При этом доминирующим членом будет $H_1H_2H_3R$, так как $|H_j| \leq \varphi^2(q)N,\ j=\overline{1,4}$ то отсюда следует, что $H_1H_2H_3R = O(\frac{\varphi^3(q)N^4B\ln^2 N}{T^{3/4}})$.
Пусть $\sum_h'$ – означает суммурованию по всем h_1, h_2 удовлетворяющие условию (2.4). Тогда согласно (2.6), (2.8), (3.1) и (3.6) имеем

$$I_1(\bar{b}) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} {\sum_h}' e_q(-\bar{h}_b) \iint\limits_{\left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2} e(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^{4} H_j(\bar{h},q,\bar{\eta}) d\eta_1 d\eta_2 + O\left(\frac{Q^4N^2B\ln^2 N}{T^{\frac{1}{4}}}\right). \qquad (3.7)$$

Следущим шагом является замена двойного интеграла в (3.7) по $\left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2$ интегралом по всей плоскости R^2. Пусть $\Gamma_1 = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2 \backslash \left[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}\right]^2$ и $\Gamma_2 = R^2 \backslash \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

4. Расширение границы интеграла от квадрата до всей плоскости

На правой части равенства (3.3) обозначим:

$$F_1^{(k)} = C_q(\bar{h}_j)I(\bar{\eta}_j), \quad F_2^{(k)} = \delta_q C_{\chi\chi_0}(\bar{h}_j)\tilde{I}(\bar{\eta}_j), \quad F_3^{(k)} = G_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right), \quad (k=1,2,3,4)$$

тогда получим

$$\prod_{j=1}^{4} H_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right) = \left(F_1^{(1)} - F_2^{(1)} - F_3^{(1)}\right)\left(F_1^{(2)} - F_2^{(2)} - F_3^{(2)}\right)\times \qquad (4.1)$$

$$\times\left(F_1^{(3)} - F_2^{(3)} - F_3^{(3)}\right)\left(F_1^{(4)} - F_2^{(4)} - F_3^{(4)}\right).$$

Заметим , что при раскрытие скобок правой части равенства (4.1) появляется 81 членов вида $F = F_1F_2F_3F_4$, где F_j равен $F_1^{(k)}$ или $F_2^{(k)}$ или $F_3^{(k)}$, $k=1,2,3,4$. Далее, рассуждая таким же образом, как в доказательство оценки (4.13) и (4.14) работы [10] (см. стр.88 и 89 [10], а также параграф 6 работы [2]) получим оценку

$$\iint\limits_{(\Gamma_1)} F\ e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 \ll N\ Q^{-4}, \qquad (4.2)$$

справедливую для всех пар $\bar{b} = (b_1,b_2),\ \ 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$, за исключением не более чем $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар из них. Также

$$\iint\limits_{(\Gamma_2)} F\ e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 \ll N\ Q^{-4} \qquad (4.3)$$

для всех $\bar{b} = (b_1,b_2),\ \ 1 \leqslant b_1, b_2 \leqslant X$. Используя (4.2),(4.3) из (3.7) находим

$$I_1(\bar{b}) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b) \iint\limits_{R^2} e(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^{4} H_j(\bar{h},q,\bar{\eta}) d\eta_1 d\eta_2 + O(N^2Q^{-1/3}) \qquad (4.4)$$

за исключение $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар из них $W(X)$.

5. Сингулярный ряд и сингулярный интеграл задачи

Для произвольного целого $q \geqslant 1$ и произвольного простого числа p обозначим

$$A(q) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j),$$

$$s(p) = 1 + A(p). \tag{5.1}$$

Для любого целого $q \geqslant 1$ через $\sum\limits_{(q)} 1$ обозначим суммирование по всем l_1, l_2, l_3, l_4, удовлетворяющим условиям $1 \leqslant l_j \leqslant q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{ij} l_j \equiv b_i (modq)$, $i = 1, 2$. Положим $N(q) = \sum\limits_{(q)} 1$. В этих обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. a) $A(q)$ и $N(q)$— мультипликативная функция,
b) для произвольного целого $k \geqslant 2$ справедливо равенство $A(p^k) = 0$,
c) для любого натурального $k \in N$ справедливо $N(p^k) = p^{k-1} N(p)$,
d) $s(p) = p^3 \varphi(p)^{-4} N(p)$ и, следовательно, $s(p) > 0$, для всех p ,
e) для простого p и натурального q справедливо $q^3 \varphi(q)^{-4} N(q) = \prod\limits_{p \backslash q} s(p)$.

Эта есть лемма 5.1 работы [11]. Мы хотим установит сходимость $\prod\limits_{p} s(p)$ и $\sum\limits_{(q)} A(q)$. Чтобы достичь этого мы вычеркиваем из рассмотрения те пары (b_1, b_2) в $[1, X]^2$ такие что $\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} = 0$. Ясно, что существуют не более чем $4X$ таких пар и ввиду $4X < X^{2-\delta}$ эта допустимо. Простые числа разбиваем на два множества следующем образом:
$P_B = \{p : p \,|\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\ \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\ \Delta_{4b}\}$, $P_D = \{p : p \notin P_B\}$.
Тогда справедлива следующее утверждение.

Лемма 5.2. Для $b = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ с условием $\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} \neq 0$ имеем:
a) $-\frac{18}{p} \leqslant A(p) \leqslant \frac{14}{p}$ для всех простых p и если $p \in P_D$ то $-\frac{1}{p} \leqslant A(p) \leqslant \frac{2}{p}$;
b) для всех простых справедливо $\prod\limits_{p} (1 + |A(p)|) \leqslant \prod\limits_{p} (1 + A(p)) \leqslant (\ln\ln N)^{14}$;
c) произведение $\prod\limits_{p} s(p)$ является абсолютно сходящимся и $\prod\limits_{p} s(p) > 0$;
d) для любого действительного числа $y \geqslant 1$ спрведлива неравенства

$$\sum_{q \geqslant y} |A(q)| \ll \tfrac{1}{y} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3(y+2).$$

Пусть $\chi_j(\mathrm{mod} r_j), (j = \overline{1, 4})$- примитивные характеры, а $r = gcm\,[r_1, \ldots, r_4]$ – чисел r_1, r_2, r_3, r_4. В наших будущих исследованиях для оценки некоторых выражений нужна сумма вида:

$$Z(q) = Z(q : \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j), \tag{5.2}$$

где q кратное r и χ_0— главный характер по модулю q.

Лемма 5.3. Если $\chi_i(modr_i)$— примитивный характер и число q кратны $r = gcm[r_1, ..., r_4]$, то:
a) справедливо равенство $Z(r) = r^3 \sum\limits_{r} \prod\limits_{j=1}^{4} \chi_j(l_j)$;
b) пусть $r \backslash q$ и $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$ и каждый простой делитель числа q_1 делит r , то $Z(q) = Z(q_1)\varphi(q_2)^4 A(q_2)$ и $Z(q_1) = 0$, если $q_1 > r$;
c) справедливо неравенство $\sum\limits_{\substack{q \leqslant Q, \\ r \backslash q}} \varphi(q)^{-4} Z(q) \leqslant \prod\limits_{p} s(p)$.

Доказательство этих лемм имеется в [11] (см. лемма 5.3,[11]).

Относительно сингулярного интеграла справедлива следующая лемма.

Лемма 5.4. Пусть ρ_j $(j=\overline{1,4})$ произвольные комплексные числа удовлетворяющий условие $0 \leqslant \operatorname{Re}\rho_j \leqslant 1$ тогда имеем

$$\iint\limits_{R^2} \left[\prod_{j=1}^{4} \int\limits_{L}^{N} x^{\rho_j-1} e(x\bar{\eta}_j)dx\right] e(-\bar{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} \prod_{j=3}^{4} (Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1dx_2, \tag{5.3}$$

где x_3, x_4 на правой части подинтеграла задаётся с

$$\begin{cases} x_3 = f_1(x_1,x_2) = \frac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{14}x_1 - \Delta_{24}x_2\right) \\ x_4 = f_2(x_1,x_2) = \frac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b3}N^{-1} + \Delta_{13}x_1 + \Delta_{23}x_2\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

и

$$D = \left\{x_1, x_2: \;\; LN^{-1} \leqslant x_1, x_2, f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2) \leqslant 1\right\}. \tag{5.5}$$

Кроме того, если $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ тогда

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}} \tag{5.6}$$

за исключаем самый больше $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пары $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

Доказательство. Сначала докажем (5.6). В зависимости от знака определителя Δ_{34} доказательство оценки (5.6) делим на два случая.

1. Пусть $\Delta_{34} \geqslant 0$. Согласно (5.4) и (5.5) двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2$ площади пересечения квадрата $\left[LN^{-1};1\right]^2$ с площадью образованной интервалами:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}};\; \frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \\ \\ \left[\frac{\Delta_{13}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{14}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}};\; \frac{\Delta_{13}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{14}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \end{cases}. \tag{5.7}$$

Соответственно обозначим первый и второй сегмент в (5.7) K_1, K_2 тогда имеем

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2$$

для $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, известно, что $|\Delta_{bj}| = \frac{2BX}{3}$, $|\Delta_{i,j}| = \frac{2B^2}{3}$ и согласно (2.1) нижней границе K_1, $\left|\frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right| \leqslant 2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right)$ верхние границы $\left|\frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right| \geqslant 2\left(1-2B^{-1}X\right)$. Таким образом, K_1 содержит под интервал $\left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right);\; 2\,\left(1-2B^{-1}X\right)\right]$.

Также для K_2 в (5.7) можем находить под интервал. Следовательно

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 = \int\limits_{K_1} dx_1 \int\limits_{K_2} dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2 \geqslant |K_1|^2 =$$

$$= \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 2B^{-1}X\right) -\; 2\,\left(1-2B^{-1}X\right)\right]^2 \geqslant \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 1\right)\right]^2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}.$$

Таким образом, имеем $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \leqslant 1$.

2. Пусть $\Delta_{34} < 0$. Аналогично к первому случаю интеграл $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2$ равен площади пересечения квадрата $\left[LN^{-1}; 1\right]^2$ с площадью образованной интервалами:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Delta_{23}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{24}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}; \frac{\Delta_{23}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{24}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \\ \\ \left[\frac{\Delta_{13}(\Delta_{34}-\Delta_{b4})+\Delta_{14}(\Delta_{34}-\Delta_{b3})}{\Delta_{12}\Delta_{34}}; \frac{\Delta_{13}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b4}\right)+\Delta_{14}\left(\Delta_{34}LN^{-1}-\Delta_{b3}\right)}{\Delta_{12}\Delta_{34}}\right] \end{cases}$$

Также как в первом случае эти интервалы соответственно обозначим K_1, K_2. Для левого конца имеем $\leqslant 2\left|1-3B^2X\right|$, для правой конечный точки $\geqslant 2\left|3B^2X - Q^{-\frac{1}{100}}\right|$,. Поэтому имеем

$$\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = \int\limits_{K_1} dx_1 \int\limits_{K_2} dx_2 = \left(|K_1| + |K_2| - \left|K_1 \bigcap K_2\right|\right)^2 \geqslant |K_1|^2 + |K_2|^2 > |K_2|^2 =$$

$$= \left[2\left(3B^2X - Q^{-\frac{1}{3}}\right) - \ 2\ \left(1-3B^2X\right)\right]^2 \geqslant \left[2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - 1\right)\right]^2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}.$$

Следовательно, если $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, то $\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \geqslant Q^{-\frac{1}{100}}$ верно для всех (b_1, b_2) пар кроме $X^2 Q^{-\frac{1}{101}}$. Так как $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, согласно (4) в работы [6] пар уравнение в (1.1) разрешимый в положительных y_j. Это эквивалентно, что два уравнений $\Delta_{34}y_3 = \Delta_{b4} + \Delta_{41}y_1 + \Delta_{42}y_2$, $\Delta_{34}y_4 = \Delta_{b3} + \Delta_{13}y_1 + \Delta_{23}y_2$ допускает положительное решение y_j $y_3 = \frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}} + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{34}}y_1 + \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{34}}y_2$ если $\Delta_{b4} < 0,\ \Delta_{41} < 0,\ \Delta_{42} < 0$ то $\frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}} > 0,\ \ \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{34}} > 0,\ \ \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{34}} > 0$, поэтому $y_3 > 0,\ \ y_1 > 0,\ \ y_2 > 0$.

Аналогично $y_4 = \frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}} + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{34}}y_1 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}}y_2$ если $\Delta_{b3} < 0, \Delta_{13} < 0, \Delta_{23} < 0$, то, $\frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}} > 0, \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{34}} > 0$, $\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}} > 0$, поэтому $y_4 > 0,\ y_1 > 0,\ y_2 > 0$. Для каждого фиксированного целого $k \geqslant 1$, существуют менее чем X пар (b_1, b_2) в $[1, X]^2$ такое что $k = \Delta_{b4}$, $(b_1, b_2) \in W\left(X\right), 1 \leqslant b_1 \leqslant X$, $1 \leqslant b_2 \leqslant X$, $\Delta_{b4} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{14} \\ b_2 & a_{24} \end{vmatrix} = a_{24}b_1 - a_{14}b_2 = k \quad \Rightarrow \quad a_{24}b_1 \equiv k\left(mod b_2\right)$. Следовательно, существуют $\leqslant \Delta_{41}NQ^{-\frac{1}{100}} + \Delta_{42}NQ^{-\frac{1}{100}} \leqslant 2\Delta NQ^{-\frac{1}{100}}$ пар$(b_1, b_2) \in W_{2,4}\left(X\right)$ такое, что $\frac{\Delta_{b4}}{2\Delta N} \leqslant Q^{-\frac{1}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{b4}}{\Delta} \leqslant 2NQ^{-\frac{1}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{41}} \leqslant NQ^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_1}$, $\frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{42}} \leqslant NQ^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_2}$. Применяя аналогичную аргументацию к $\frac{\Delta_{b3}}{\Delta_{34}}$ мы заключаем что $\Delta_{b4}(\Delta_{41}N)^{-1} \geqslant Q^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_1}$ $\left(\Delta_{b4}(\Delta_{42}N)^{-1} \geqslant Q^{-\frac{1}{100}+\varepsilon_2}\right)$ и

$$\Delta_{b3}(\Delta_{13}N)^{-1} > Q^{-\frac{1}{100}} \qquad \left(\Delta_{b3}(\Delta_{23}N)^{-1} > Q^{-\frac{1}{100}}\right) \tag{5.8}$$

за исключением самой большей $\left(\Delta_{41} + \Delta_{13}\right)NQ^{-\frac{1}{100}} \leqslant \frac{4B^2}{9}NQ^{-\frac{1}{100}} < 8X^2Q^{-\frac{1}{100}+5\delta} \ll$ $\ll X^2Q^{-\frac{1}{101}+5\delta}$ пары $(b_1, b_2) \in W\left(X\right)$. Так как $\Delta_{34} < 0$ и $\left|\Delta_{jb}N^{-1}\right| \leqslant \frac{2}{27B^2}$, $(j = \overline{1,4})$. Согласно (7) в работе [6], имеем $\Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{ij} < 0$ и $\Delta_{b3}N^{-1} - \Delta_{ij} < 0$, $\left|\Delta_{jb}N^{-1}\right| = N^{-1}(a_{1j}b_2 - - a_{2j}b_1) \leqslant N^{-1}\frac{2B}{3}\left(|b_2| + |b_1|\right) \leqslant \frac{2B}{3N}2X = \frac{4BX}{3N} = \frac{4BX}{3\cdot 18B^3X} = \frac{2}{27B^2}$, $\Delta_{bj}N^{-1} - \Delta_{ij} = \frac{2}{27B^2} - \frac{2B^2}{9} = = \frac{2-6B^4}{27B^2} = \frac{2\left(1-3B^4\right)}{27B^2} < 0$ т.е. нижние концы двух интегралов в (5.6) являются отрицательными, в то время согласно (5.8) и (7) в работе [6] их верхние концы являются

$2\frac{\Delta_{34}L-\Delta_{b4}N}{N\Delta_{34}} = 2\left(\frac{L}{N} - \frac{\Delta_{b4}}{\Delta_{34}}\right) = 2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - \frac{3X}{B}\right).$
Следовательно

$$\iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = \left(2\left(Q^{-\frac{1}{100}} - \frac{3X}{B}\right) - 2\left(1 - \frac{3X}{B}\right)\right)^2 \geqslant 4\Big(1 - Q^{-\frac{1}{100}}\Big)^2 > Q^{-\frac{1}{100}}$$

за исключением не более чем $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.
Теперь докажем справедливость (5.3). Известно, что

$$\iint\limits_{R^2} \left[\prod_{j=1}^{4} \int\limits_{L}^{N} x_j^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x_j) dx_j\right] e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 = \lim_{y\to\infty} \int\limits_{-y}^{y} \int\limits_{-y}^{y} e(-\bar{\eta}_b) \left[\prod_{j=1}^{4} \int\limits_{L}^{N} x_j^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x_j) dx_j\right] d\eta_1 d\eta_2.$$

Для любого $y > 0$ рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-y}^{y} \int\limits_{-y}^{y} e(-\bar{\eta}_b) \left[\prod_{j=1}^{4} \int\limits_{LN^{-1}}^{1} x^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x) dx\right] d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \prod_{j=1}^{4} (Nx_j)^{\rho_j-1} \left[\int\limits_{-y}^{y} \int\limits_{-y}^{y} e(\bar{\eta}_1 x_1 + \dots + \bar{\eta}_4 x_4) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2\right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$= \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \left(\prod_{j=1}^{4} (Nx_j)^{\rho_j-1}\right) \frac{\sin(2\pi t_1 y)}{\pi t_1} \frac{\sin(2\pi t_2 y)}{\pi t_2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

где $t_i = \sum\limits_{k=1}^{4} a_{1k} x_k - b_i N^{-1}$, $(i = 1, 2)$.
Обозначим этот кратный интеграл через J(y) и выполним простую замену, тогда получим:

$$J(y) = N^2 {\Delta_{34}}^{-2} \int\limits_{L/N}^{1} \int\limits_{L/N}^{1} \left(\prod_{j=1}^{2} (Nx_j)^{\rho_j-1}\right) \left(\iint\limits_{(D)} \prod_{j=3}^{4} (Nx_j)^{\rho_j-1} \frac{\sin 2\pi t_1 y}{\pi t_1} \frac{\sin 2\pi t_2 y}{\pi t_2} dt_1 dt_2\right) dx_1 dx_2,$$

где $x_3 = (\Delta_{t4} + \Delta_{b4} N^{-1} - \Delta_{14} x_1 - \Delta_{24} x_2)\Delta_{34}^{-1}$, $x_4 = (\Delta_{t3} + \Delta_{b3} N^{-1} - \Delta_{31} x_1 - \Delta_{32} x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и

$$D(x_1, x_2) = \left\{\bar{t} = (t_1, t_2);\ t_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j - b_i N^{-1}, \quad i = 1, 2;\ N^{-1}L \leqslant x_3, x_4 \leqslant 1\right\}.$$

. Интеграл в лемме равен $\lim\limits_{y\to\infty} N^2 J(y)$. Из теоремы Жордана об интеграле Дирихле следует, что если $g(t)$– непрерывно дифференцируемая функция для $\mu \leqslant t \leqslant \lambda$, то имеем

$$\lim_{y\to\infty} N^2 |\Delta_{34}|^{-2} J(y) = \lim_{y\to\infty} |\Delta_{34}|^{-2} N^2 \int\limits_{L/N}^{1} (Nx_1)^{\rho_1-1} \left[\int\limits_{D(x_1,x_2)} (Nx_3)^{\rho_3-1} \frac{\sin(2\pi t_1 y)}{\pi t_1} dt_1\right] dx_1 \times$$

$$\times \int\limits_{L/N}^{1} (Nx_2)^{\rho_2-1} \left[\int\limits_{D(x_1,x_2)} (Nx_4)^{\rho_4-1} \frac{\sin(2\pi t_2 y)}{\pi t_2} dt_2\right] dx_2, \qquad (5.9)$$

где $x_3 = (\Delta_{t4} + \Delta_{b4}N^{-1} - \Delta_{14}x_1 - \Delta_{24}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и $x_4 = (\Delta_{t3} + \Delta_{b3}N^{-1} - \Delta_{31}x_1 - \Delta_{32}x_2)\Delta_{34}^{-1}$. На это равенство применим теорема Жордана об интеграле Дирихле. Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{y\to\infty} \int\limits_{\mu}^{\lambda} g(t)\frac{\sin(2\pi ty)}{\pi t}dt = \begin{cases} g(0) \text{ если } & \mu \leqslant 0 \leqslant \lambda \\ \frac{1}{2}g(0) \text{ если } & \mu = 0 \quad \lambda{=}0 \\ \ 0 \quad \text{остальные случай} & \end{cases}.$$

согласно $\bar{t} = (0,0)$ принадлежит в $D\,(x_1, x_2)$, поэтому из этой теорема и из равенство (5.9) вытекает (5.3), т.е. находим

$$\lim_{y\to\infty} N^2 J(y) = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} \prod_{j=3}^{4} (Nx_j)^{\rho-1} dx_1 dx_2.$$

Так как $x_3 = (\Delta_{t4}+\Delta_{b4}N^{-1}-\Delta_{14}x_1-\Delta_{24}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ и $x_4 = (\Delta_{t3}+\Delta_{b3}N^{-1}-\Delta_{31}x_1-\Delta_{32}x_2)\Delta_{34}^{-1}$ равен Δ_{34} или $\Delta_{34}LN^{-1}$. Этим завершается доказательство лемма 5.4.

6. Оценка интеграла по большой дуге

При раскрытые скобок правой части в равенство (4.1) получим сумму, состоящую из 81 членов, которые принадлежить одному из трех категории [12]: (T_1) : слагаемое $\prod\limits_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j)I(\bar{\eta}_j)$
(T_2) : 65 слагаемые, каждый из которых по крайней мере один множитель $G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right)$
(T_3) : оставшиеся 15 слагаемые.
Для удобства обозначим

$$M_i = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} {\sum_{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \iint\limits_{R^2} T_i e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2\,, (i = 1, 2, 3). \tag{6.1}$$

Заметим, что каждый M_i является действительным. Согласно (4.4) имеем

$$I_1(\bar{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2Q^{-1}) \tag{6.2}$$

для всех пар $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, за исключением $E_{2,4}^{(1)}\,(X) < X^2Q^{-1}$ пар из них.

Пусть

$$M_0 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \prod_{p} s(p) \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \tag{6.3}$$

где $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4 : LN^{-1} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1\}$.
Ввиду лемма-5.2 с) и равенства (5.6) имеем

$$M_0 >> N^2B^{-2}Q^{-\frac{1}{100}} \tag{6.4}$$

за исключением не более $E_{2,4}^{(2)}\,(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пары $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

Докажем лемму.

Лемма 6.1. Для всех $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ справедливо равенство:

$$M_1 = M_0 + O\left(N^2Q^{-\frac{2}{3}}\right)$$

Доказательство. Согласно (6.1), (5.3) с $\rho_j = 1$ и лемма 5.2 d) имеем

$$M_1 = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}} e_q\left(-\bar{h}_b\right) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j) N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \sum_{q\leqslant Q} A(q) N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \left[\sum_{q=1}^{\infty} A(q) - \sum_{q>Q} A(q)\right] =$$

$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \sum_{p=1}^{\infty} A(q) - N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \sum_{q>Q} A(q) =$$

$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1 dx_2 \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q)\right) + O\left(N^2 Q^{-1} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3 Q\right).$$

Ясно, что главный член равен M_0, так как согласно лемма-5.1 a), в) и из равенство (5.1) имеем

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p (1 + A(p)) = \prod_p s\,(p).$$

Поскольку $Q = N^{\delta}$ и $X \geq B^{\exp(\delta^{-2})}$, то для остатка имеем

$$N^2 Q^{-1} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^3 Q \ll N^2 Q^{-\frac{2}{3}} \text{ при } \delta < \frac{12}{\ln\ln\left(18B^3 + \exp\left(\frac{1}{\delta^2}\right)\right)}.$$

Таким образом лемма доказана.

Далее, оценим M_3. Для удобство в изложении вводим следуюшие обозначении, пусть $m_1, m_2, \cdots$ различные целые числа из множество $\{1, 2, 3, 4\}$. Подобно с (2.1) работы [6] определим

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots) = \sum_{(\tilde r)} \tilde\chi(l_{m_1}) \tilde\chi(l_{m_2}) \cdots \tag{6.5}$$

и

$$\mathcal{P}\,(m_1, m_2, \cdots) = \iint\limits_{(D)} (N x_{m_1})^{\tilde\beta - 1} (N x_{m_2})^{\tilde\beta - 1} \cdots dx_1 dx_2, \tag{6.6}$$

где (D) выше указанная область (см.(5.5)).

Например $\mathcal{G}(3) = \sum\limits_{(\tilde r)} \tilde\chi(l_3)$, $\mathcal{P}\,(3,4) = \iint\limits_{(D)} (Nx_3)^{\tilde\beta-1} (Nx_4)^{\tilde\beta-1} dx_1 dx_2$ ясно, что

$$|\mathcal{P}\,(m_1, m_2, \cdots)| \leqslant 1. \tag{6.7}$$

Лемма 6.2. Имеют места следующие соотношение:

a) $|\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots)| \leqslant N(\tilde r) \leqslant \varphi(\tilde r)$;

b) $\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots) << B^6 \tilde r^{\frac{1}{4}}$ за исключением не более чем $X^2 \tilde r^{-\frac{3}{2}}$ пар $(b_1, b_2) \in [1, X]^2$.

Доказательство. Утверждение a) сразу следует из определения $N(\tilde r)$ и его мультипликативности, если учесть лемму 5.4. Утверждение b) следует из равенство (6.5).В самом деле, имеем

$$|\mathcal{G}(m_1, m_2, \cdots)| = \sum_{(\tilde r)} |\tilde\chi(l_{m_1}) \tilde\chi(l_{m_2}) \cdots| = \sum_{(\tilde r)} 1 = N(\tilde r) = \prod_{i=1}^{k} N\left(p_i^{\alpha_i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} N(p) \leqslant \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} (p_i - 1) = \varphi(\tilde r).$$

Для конкретности, как илюстрация аргументов рассмотрим $\mathcal{G}(1,2,3)$. По формуле (6.5) имеем

$$\mathcal{G}(1,2,3)=\frac{1}{\tilde{r}^3}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}} e_q(-\bar{h}_b)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4).$$

Используя неравенство Парсеваля [13] отсюда находим:

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2=\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\frac{1}{\tilde{r}^6}\left|\sum_{h_1,h_2\leqslant\tilde{r}} C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b)\right|^2=$$

$$=\frac{1}{\tilde{r}^6}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\chi}(\bar{h}_1)C_{\chi}(\bar{h}_2)C_{\chi}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2\sum_{b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b)\right|=$$

$$=\frac{1}{\tilde{r}^4}\sum_{h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2)C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3)C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}$ примитивным характером, то $C_{\tilde{\chi}}(m)=\tilde{\chi}(m)C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1)=\sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}}\left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2=\frac{1}{\tilde{r}^4}\sum_{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2\left|\tilde{\chi}\left(\bar{h}_1\bar{h}_2\bar{h}_3\right)\right|\leqslant\tilde{r}^{-1}\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2. \qquad (6.8)$$

Известно, что модули квадратичного характера $\tilde{\chi}$ имеет вид $\tilde{r}=\nu_1\nu_2\ldots\nu_k$, где $\nu_1=2^t$, $t\in\{0,1,2,3\}$ и $\nu_2<\nu_3<\cdots<\nu_k$ является нечетным простым числам.

Пусть $V_1=\{\nu_j:\ \ \nu_j\not\backslash\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34},\ j>2\,\}$ и $V_2=\{\nu_j:\ \ \nu_j\notin V_1\,\}$.
Обозначим $u_i=\prod\limits_{\nu_j\in V_i}\nu_j\ (i=1,2)$ так, что $u_1\cdot u_2=\tilde{r}$ и

$$u_2=8\left|\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\right|\leqslant 8\left(\frac{2B^2}{3}\right)^6=\frac{2^9B^{12}}{3^{12}}\ll B^{12} \qquad (6.9)$$

Аналогично доказательству леммы 5.1 а) можем показать также, что

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2=\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\nu_j\\(h_1,h_2,\nu_j)=1}}\left|C_{\nu_j}(\bar{h}_4)\right|^2\right). \qquad (6.10)$$

Фиксируем $\nu_j\in V_1$ и рассмотрим соответствующую сумму правой части в (6.10) существуют точно ν_j-1 пары h_1,h_2 для которых $\nu_j\backslash\bar{h}_4$. Так как

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_4)=\sum_{l\in\nu_j}e\left(\frac{l\bar{h}_4}{\nu_j}\right)=\begin{cases}\varphi(\nu_j) & \nu_j\backslash\bar{h}_4\\ -1 & \nu_j\nmid\bar{h}_4\end{cases}$$

имеем

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,\tilde{r})=1}}\left|C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4)\right|^2=\varphi(\nu_j)^2(\nu_j-1)=\varphi(\nu_j)^3$$

для всех $\nu_j \in V_1$. Используя эту и тривиальную ограничению ν_j^4 для верхной суммы когда $\nu_j \in V_2$, из (6.8), (6.10) и (6.9) получим

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2\leqslant\tilde{r}} \left|\mathcal{G}(1,2,3)\right|^2 \leqslant r^{-1} \prod_{\nu_j\in u_1} \varphi^3(\nu_j) \prod_{\nu_j\in u_2} {\nu_j}^4 \leqslant \tilde{r}^2 u_2 \ll \tilde{r}^2 B^{12}.$$

Это показывает, что количество пар (b_1, b_2) в $[1,\tilde{r}]^2$, для которых $|\mathcal{G}(1,2,3)| \gg B^6\tilde{r}^{\frac{1}{4}}$ не превосходит $\tilde{r}^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что $\mathcal{G}(1,2,3)$ зависит от классов сравнимости по модулю $\tilde{r}$, которые принадлежит b_1, b_2. Таким образом, за исключением неболее $[X/\tilde{r}]^2 r^{\frac{1}{2}} = X^2 r^{-\frac{3}{2}}$ пар $(b_1, b_2) \in [1, X]^2$ имеем $|\mathcal{G}(1,2,3)| \ll B^6\tilde{r}^{\frac{1}{4}}$.
Этим завершается доказательство леммы 6.2.

Лемма 6.3. Для M_3 имеем

$$M_3 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\left(\sum_{q\leqslant\frac{Q}{\tilde{r}},(q,\tilde{r})} A(q)\right)\left(-\sum_{j=1}^{4} G(j)P(j) + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4} G(i,j)P(i,j) - \right.$$

$$\left. - G(1,2,3)P(1,2,3) + G(1,2,3,4)P(1,2,3,4)\right). \tag{6.11}$$

Доказательство. Каждый из 15 слагаемов в (T_3) можно представит в виде

$$(-1)^m \delta_q \sum_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j)\tilde{I}(\tilde{\eta_j}) \prod_{j=m+1}^{4} C_q(\overline{h}_j) I(\tilde{\eta_j}),$$

где $m = 1, 2, 3$ или 4. Как обычно, пустое произведение берется как 1. Обозначим через $M_{3,m}$ вклад такого члена в M_3. Тогда

$$M_{3,m} = (-1)^m \sum_{q\leqslant Q} \delta_q \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\overline{h}}{}' e_q(-\overline{h}_b) \prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j) \prod_{j=m+1}^{4} C_q(\overline{h}_j) \times$$

$$\times \iint\limits_{R^2} e(-\overline{\eta}_b) \prod_{j=1}^{m} \tilde{I}(\overline{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{4} I(\overline{\eta}_j) d\eta_1 d\eta_2 = (-1)^m G_m Q_m, \tag{6.12}$$

где Q_m кратный интеграл по R^2 и

$$G_m = \sum_{q\leqslant Q,\tilde{r}|q} \delta_q \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\overline{h}}{}' e_q(-\overline{h}_b) \prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\overline{h}_j) \prod_{j=m+1}^{4} C_q(\overline{h}_j).$$

Согласно (2.1), лемма 5.4. с $\rho_j = \tilde{\beta}$ или 1, и из (6.6) имеем

$$Q_m = \iint\limits_{R^2} e(-\overline{\eta}_b) \prod_{j=1}^{m} \tilde{I}(\overline{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^{4} I(\overline{\eta}_j) d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= \iint\limits_{R^2} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{L}^{N} x^{\tilde{\beta}-1} e(\overline{\eta}_j x) dx\right)\right] \left[\prod_{j=m+1}^{4} \left(\int\limits_{L}^{N} e(\overline{\eta}_j x) dx\right)\right] e(-\overline{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{D} \prod_{j=1}^{m} (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2 = N^2|\Delta_{34}|^{-1} P(1,\ldots,m). \tag{6.13}$$

Далее, беря $\chi_1 = \cdots = \chi_m = \tilde{\chi}(mod\tilde{r})$ и $\chi_{m+1} = ... = \chi_4 = \chi_0(mod 1)$ в определение $Z(q)$ в (5.2), легко видим, что

$$G_m = \sum_{q \leqslant Q, \tilde{r}|q} \varphi^{-4}(q) Z(q). \tag{6.14}$$

В силу леммы 5.3 а), в) функция $Z(q)$ можем переписать в виде

$$Z(q) = Z(\tilde{r}) A(q'') \varphi^4(q'') = \tilde{r''} \sum_{(\tilde{r})} \prod_{j=1}^{4} \tilde{\chi}(l_j) A(q'') \varphi^4(q''), \tag{6.15}$$

где $q = \tilde{r} q'', (\tilde{r}, q'') = 1$. Из равенств (6.5),(6.14) и (6.15) имеем

$$G_m = Z(\tilde{r}) \varphi^{-4}(\tilde{r}) \sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'') = \tilde{r}^3 \varphi^{-4}(\tilde{r}) \mathcal{G}(1, 2, \ldots, m) \sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'').$$

Таким образом, подставляя это выражение и (6.13) в (6.12) будем иметь

$$M_{3,m} = \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{34}| \varphi^4(\tilde{r})} \left(\sum_{q'' \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q'', \tilde{r})=1} A(q'') \right) \left((-1)^m \mathcal{G}(1, 2, \ldots, m) \mathcal{P}(1, 2, \ldots, m) \right).$$

Собирая выражение при $m = 1, 2, 3, 4$ получим утверждение леммы. Когда $Q\tilde{r}^{-1}$ является "большое"сумма $\sum\limits_{q \leqslant Q\tilde{r}^{-1}, (q, \tilde{r})=1} A(q)$ в (6.11) достаточно длинной и в силу леммы 5.2 d) можем представить ее в виде

$$\sum_{\substack{q \leqslant \frac{Q}{\tilde{r}} \\ (q, \tilde{r})=1}} A\left(q\right) + O\left(\sum_{q > \frac{Q}{\tilde{r}},} \left| A\left(q\right) \right| \right) = \sum_{p \nmid \tilde{r}} s\left(p\right) + O\left(rQ^{-\frac{4}{5}} \right),$$

так как согласно (2.1) $N^{4/lnlnN} ln^3 Q \ll Q^{1/5}$ при $\delta < \dfrac{20}{ln(\delta lnQ)}$.
Таким образом, согласно (6.11), (6.7) и лемма 6.2. а) имеем:

$$M_3 = N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \left(-\sum_{j=1}^{4} \mathcal{G}(j) \mathcal{P}(j) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{G}(1, 2, 3) \mathcal{P}(1, 2, 3) + \mathcal{G}(1, 2, 3, 4) \mathcal{P}(1, 2, 3, 4) + O(N^2 \tilde{r} Q^{-4/5} (lnlnQ)^3 \right). \tag{6.16}$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 е)

$$\prod_{p|\tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^3 \varphi^{-4}(\tilde{r}) N(\tilde{r}) = \tilde{r}^3 \varphi^{-4}(\tilde{r}) \sum_{(\tilde{r})} 1. \tag{6.17}$$

Применяя леммы 6.1, получим

$$M_1 = N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \tilde{r}^3 \varphi^{-4}(\tilde{r}) \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \iint\limits_{D} dx_1 dx_2 + O\left(N^2 Q^{-4/5} \right).$$

Комбинируя этого с (6.16) и используя (6.5),(6.6) имеем

$$M_1 + M_3 =$$

$$= N^2|\Delta_{34}|^{-1}\tilde{r}^3\varphi^{-4}(\tilde{r})\prod_{p\nmid\tilde{r}} s(p)\sum_{(\tilde{r})}\iint\limits_{D}\prod_{j=1}^{4}\left(1-\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right)dx_1dx_2+O\left(N^2Q^{-4/5}\right). \quad (6.18)$$

Так как согласно (6.3) $Nx_j \geq L$ произведение в внутреннему интеграле на правой части есть

$$\prod_{j=1}^{4}\left(1-\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \prod_{j=1}^{4}\left(1-(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \left(1-L^{\tilde{\beta}-1}\right)^4.$$

Ввиду (2.1) и (4.5) в работе [2] при δ малом

$$1-L^{\tilde{\beta}-1} \geq \left\{1-\exp\left(-\frac{1}{2}(1-\tilde{\beta})\ln L\right)\right\} \geq \left(1-\tilde{\beta}\ln T\right) = \Omega$$

(см.(2.3)). Таким образом, из (6.17) и (6.18) получим

$$M_1+M_3 \geq \Omega^4 M_0 - O\left(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}\right). \quad (6.19)$$

В случае когда $Q\tilde{r}^{-1}$ являются "малым"мы не сможем давать лучше чем сейчас данный верхней ограничение суммы $\sum\limits_{q\leqslant Q\tilde{r}^{-1},(q,\tilde{r})=1} A(q)$, а именно $\prod\limits_{p}(1+|A(p)|)$ который согласно лемма 5.2 b) является $\ll (lnlnN)^{14}$.

Таким образом, при помощи лемма- 6.2 в) и (6.8) из лемма 6.3 выводим, что

$$M_3 = N^2|\Delta_{34}|^{-1}\frac{\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\left(\sum_{q\leq\frac{Q}{\tilde{r}},(q,\tilde{r})} A(q)\right)\left(-\sum_{j=1}^{4}\mathcal{G}(j)\mathcal{P}(j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}\mathcal{G}(i,j)\mathcal{P}(i,j)-\right.$$

$$\left.-\,\mathcal{G}(1,2,3)\mathcal{P}(1,2,3)+\mathcal{G}(1,2,3,4)\mathcal{P}(1,2,3,4)+O(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}(lnlnQ)^3\right).$$

$\mathcal{G}(m_1,m_2,...) \ll B^6\tilde{r}^{1/4}$ за исключение самого большего $X^2\tilde{r}^{-3/2}$ для пар $(b_1,b_2)\in[1,X]^2$.

$$\mathcal{P}(m_1,m_2,...) \leq 1, \quad M_3 \ll \frac{N^2\tilde{r}^3}{\varphi^4(\tilde{r})}\tilde{r}^{1/4}B^6(\ln\ln N)^{14} \ll N^2\tilde{r}^{-3/4}B^6(\ln\ln N)^{18}. \quad (6.20)$$

Теперь оценим M_2.

Лемма 6.4. Для всех $\tilde{b}=(b_1,b_2)\in[1,X]^2$ верно следующая оценка:

$$M_2 \ll M_0\left(\Omega^4\exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right),$$

где,

$$\Omega = \begin{cases}(1-\tilde{\beta})logT, & \text{если существуют } \tilde{\beta}\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Каждое из 65 слагаемых в (T_2) принадлежит к одному из следующих видов:

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j\left(\overline{h},q,\overline{\eta}\right)\prod_{j=1+l}^{m}\delta_q C_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right)\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=1+m}^{4}C_q(\overline{h}_j)I(\overline{\eta}_j)$$

или

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j\left(\overline{h},q,\overline{\eta}\right)\prod_{j=1+m}^{4}C_q(\overline{h}_j)\tilde{I}(\overline{\eta}_j)\prod_{j=1+l}^{m}\delta_q C_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right)I(\overline{\eta}_j)$$

где $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant 4$.

Эти выражение оценивается одинаково. Поэтому мы берём $l = 2,\ m = 3$ и получим следующий вклад в $M_2(l, m)$.

$$M_2(2,3) = \sum_{q \le Q} \varphi^{-4}(q)(-1)^3 \iint\limits_{R^2} \prod_{j=1}^{2} G_j(\overline{h}, q, \overline{\eta})\delta_q \prod_{j=3}^{4} C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_j)\tilde{I}(\overline{\eta}_j) \prod_{j=4} C_q(\overline{h}_4) I(\overline{\eta}_4) d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= (-1)^3 \sum_{q \le Q} \varphi^{-4}(q) \sum_{\overline{h}}{}' e_q(-\overline{h}_b) C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_3) C_{\tilde{\chi},\chi_0}(\overline{h}_4) C_q(\overline{h}_4) \sum_{\chi_1 (modq)} C_{\tilde{\chi_1}}(\overline{h}_1) \sum_{\chi_2 (modq)} C_{\tilde{\chi_2}}(\overline{h}_2) \times$$

$$\times \iint\limits_{R^2} I_{\chi_1}(\overline{\eta}_1) I_{\chi_2}(\overline{\eta}_2) \tilde{I}(\overline{\eta}_3) \tilde{I}(\overline{\eta}_4) I(\overline{\eta}_4) e(-\overline{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2. \tag{6.21}$$

Сперва рассмотрим двойной интеграл по R^2. Согласно определение в (2.2)

$$I_{\chi_j}(\overline{\eta}_j) = \sum_{|\gamma_j| \leqslant T}{}' \int\limits_{L}^{N} x^{\rho_j - 1} e(x\overline{\eta}_j) dx, \quad \text{для } j = 1, 2.$$

Следовательно, применяя (5.3) находим, что внутренний интеграл равен

$$N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \sum_{|\gamma_1| \leqslant T}{}' \sum_{|\gamma_2| \leqslant T}{}' \iint\limits_{(D)} (N\bar{x}_1)^{\rho - 1} (N\bar{x}_2)^{\rho - 1} (Nx_3)^{\tilde{\beta} - 1} (Nx_4)^{\tilde{\beta} - 1} dx_1 dx_2.$$

Подставляя в (6.21), после небольшой перегруппировки имеем

$$M_2(2,3) = -N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_4)^{\tilde{\beta}-1} \sum_{q \leqslant Q,\ \tilde{r}/q} \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\overline{h}} e_q(-\overline{h}_b) \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{4} C_{\tilde{\chi},\chi_0}\left(\overline{h}_j\right) C_q(\overline{h}_4) \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{\chi_j (modq)} \sum_{|\gamma_j| \leqslant T}{}' C_{\chi_j}(\overline{h}_j)(Nx_j)^{\rho_j - 1} \right) dx_1 dx_2. \tag{6.22}$$

Известно, что каждый характер индуцируется с единственным примитивным характером и наоборот для каждого q делимого с $\tilde{r}$ существуют единственный характер по $(modq)$, каждый индуцируется с этим примитивным характером. Более того, если χ^* индуцирует χ, тогда для L функции $L(s, \chi^*)$ и $L(s, \chi)$ имеет единственный нетривиальные нули с положительными вещественными частями[14-19]. Поэтому сумму

$$\sum_{q \leqslant Q, \tilde{r}/q} \prod_{j=1}^{2} \sum_{\chi_j (modq)} \sum_{|\gamma_j| \leqslant T}{}'$$

в (6.22) можем написать в виде

$$\sum_{r_1 \leqslant Q} \sum_{\chi_1}{}^{*} \sum_{|\gamma_1| \leqslant T}{}' \sum_{r_2 \leqslant Q} \sum_{\chi_2}{}^{*} \sum_{|\gamma_2| \leqslant T}{}' \sum_{q \leqslant Q [r, r_1, r_2] | q},$$

где $\sum^*$ – есть суммирование по $\chi_j(modr_j) \quad (j = 1, 2)$ с примитивным характером. Следовательно, ввиду равенства (5.2) имеем

$$M_2(2,3) = -N^2 |\Delta_{34}|^{-1} \iint\limits_{(D)} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_4)^{\tilde{\beta}-1} \sum_{r_1 \leqslant Q} \sum_{\chi_1}{}^{*} \sum_{|\gamma_1| \leqslant T}{}' (Nx_1)^{\rho_1 - 1} \times$$

$$\times \sum_{r_2\leqslant Q}\sum_{\chi_2}{}^{*}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}{}'(Nx_2)^{\rho_2-1}\sum_{q\leqslant Q,[r,r_1,r_2]|q}\varphi^{-4}(q)Z(q,\tilde{\chi}_1,\tilde{\chi}_2,\tilde{\chi})dx_1dx_2.$$

Согласно (5.5) для $j=\overline{1,4}$ имеем $Nx_j \geq L \geq \sqrt{N}$. Поэтому можем применять лемму 3.4.2 в работе [10] , чтобы ограничить суммы $\sum\limits_{r_j\leqslant Q}\sum\limits_{\chi_j}{}^{*}\sum\limits_{|\gamma_j|\leqslant T}{}'(N\chi_j)^{\rho_j-1}$ и использовать лемма 5.3 c), чтобы оценить $\sum\limits_{q\leqslant Q,[r,r_1,r_2,r_3]|q}\varphi^{-4}(q)Z(q)$.

Конечным результатом, согласно (6.3) является, что

$$M_2(2,3)\ll N^2|\Delta_{34}|^{-1}\left(\Omega^4\exp(-c/\sqrt{\delta})\right)\prod_p s(p)\iint\limits_{(D)}dx_1dx_2 = M_0\left(\Omega^4\exp(-c/\sqrt{\delta})\right).$$

Таким образом, собирая вклад всех таких выражений, получим утверждение леммы, т.е имеем

$$M_2(l,m)\ll M_0\left(\Omega^4\exp(-c/\sqrt{\delta})\right).$$

7. Оценка исключительного множества задачи

А теперь можем показать, что

$$I(\bar{b})\geqslant I_1(\bar{b})-\left|I_2(\bar{b})\right| > N^2Q^{-\frac{1}{3}} \tag{7.1}$$

за исключением не более чем

$$E_{2,4}(X) < X^{2-\delta} \tag{7.2}$$

значений $\bar{b}=(b_1,b_2)\in W_{2,4}(X)$. Отсюда в силу обозначения (2.7) вытекает утверждение a) теоремы. Здесь рассмотрим следующие три случаев:

1. Пусть $\delta_q=0$. Тогда M_3 отсутствует и $\Omega=1$, поэтому из (6.1), леммы 6.1 и 6.4 при δ достаточно малом, находим:

$$I_1(\bar{b}) = M_1+M_2+M_3+O(NQ^{-1}) = M_0\left(1-exp(-\frac{c}{\sqrt{\delta}})\right)-O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right)+O(NQ^{-1}) >$$

$$> 0,01M_0 - O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right),$$

за исключением не более, чем $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ значений $\bar{b}\in W_{2,4}(X)$ (см.[20]). Используя (6.4) получим

$$I_1(\bar{b}) > 0,01\frac{N^2}{B^2Q^{\frac{1}{100}}} - O\left(\frac{N^2}{Q^{\frac{2}{3}}}\right) > \frac{N^2}{Q^{2\delta+\frac{1}{100}}} \tag{7.3}$$

за исключением не более, чем

$$E_{2,4}^{(2)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}}$$

значений $\bar{b}=(b_1,b_2)\in W_{2,4}(X)$. В силу теоремы 3.1 в работы [11] имеем

$$\left|I_2(\bar{b})\right| < N^2Q^{-\frac{1}{16}} \tag{7.4}$$

за исключением не более, чем $E_{2,4}^{(3)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{9}}$ значений $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. Следовательно, из (7.3) имеем

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{-2\delta-\frac{1}{100}} - N^2Q^{-\frac{1}{16}} > N^2Q^{-2\delta-\frac{1}{100}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{16}+2\delta+\frac{1}{100}}\right)) \tag{7.5}$$

(где $\delta < 0,42$) за исключением не более, чем

$$E_{2,4}(X) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} E_{2,4}^{(i)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}} \tag{7.6}$$

значений $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$ (см.[20]).

2. Пусть $\delta_q = 1$ и $\tilde{r} \leqslant Q^{\frac{1}{18}}$ тогда согласно (6.2),(6.3) и (6.19) и из леммы 6.4 имеем:

$$I_1(\bar{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2Q^{-1}) \geqslant M_0\left(1 - \exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right)\Omega^4 - O\left(N^2Q^{-\frac{67}{90}}\right) \tag{7.7}$$

за исключением самый больше $E_{2,4}^{(1)}(X) < X^2Q^{-1}$ пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$. В силу равенства (2.3) в работе [10] $\Omega = \left(1 - \tilde{\beta}\right)\ln T \geqslant c_2\left(\sqrt{\tilde{r}}ln^2r\right)^{-1} lnT > \left(\sqrt{\delta}Q^{\frac{1}{36}}lnQ\right)^{-1}$, поэтому, учитывая (6.4) из (7.7), при достаточно малом δ получим

$$I_1(\bar{b}) \geqslant N^2\left(B^2Q^{\frac{1}{100}+\frac{1}{9}}ln^4Q\right)^{-1} + O\left(Q^{-\frac{67}{90}}\right) \geqslant N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}}.$$

Отсюда и из (7.4) находим

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}} - N^2Q^{-\frac{1}{8}} > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{8}+2\delta+\frac{109}{900}}\right) > N^2Q^{-2\delta-\frac{109}{900}} \tag{7.8}$$

(где $\delta < \frac{7}{450}$) за исключением самый больше

$$E_{2,4}^{(2)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{101}} \tag{7.9}$$

пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$.

3. Пусть $\delta_q = 1$ и $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{18}}$. В этом случае применяя леммы 6.1, 6.4, а также оценку (6.20), из правой части (6.2) выводим

$$I_1(\bar{b}) = M_0\left(1 - O\left(\Omega^4 exp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right)\right) + O\left(N^2Q^{-\frac{1}{73}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant M_0\left(1 - c'Q^{-\frac{1}{9}}ln^4Qexp\left(-\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right)\right) + O\left(N^2Q^{-\frac{1}{71}}\right) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} \tag{7.10}$$

за исключением самый больше $E_{2,4}^{(4)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{36}}$ пары $(b_1, b_2) \in [1, X]^2$.
Таким образом, из (7.10) и (7.4) в этом случае получим

$$I(\bar{b}) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} - N^2Q^{-\frac{1}{16}} > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}}\left(1 - Q^{-\frac{1}{18}-6\delta+\frac{5}{72}}\right) > N^2Q^{6\delta-\frac{5}{72}} \tag{7.11}$$

(где $\delta < \frac{1}{18}$). Причем (7.11) выполняется для всех $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ за исключением из них

$$E(X) = \sum_{j=1}^{4} E_{2,4}^{(i)}(X) < X^{2-\frac{\delta}{7}}. \tag{7.12}$$

Из (7.5), (7.8) и (7.11) следуют (7.1), а из (7.6), (7.9) и (7.12) получим (7.2). Таким образом доказано утверждение a) теоремы.

Теперь докажем утверждение b) теоремы. Пусть $R(\bar{b})-$ количество решений система (1.2) в простых числах с условием $p_j \leqslant X$ и $\frac{X}{2} \leq b_1, b_2 < X$. Известно, что в (2.7) суммирование ведётся по всем n_j, удовлетворяющим условиям $\frac{X}{2} < n_1, n_2, n_3, n_4 \leqslant X, \sum\limits_{j=1}^{4} a_{i,j}n_j = b_i, (i = 1, 2)$. Поэтому из (2.7) и определение $R(\bar{b})$ находим

$$I(\bar{b}) \ll \ln^4 X \sum_{\substack{p<X \\ a_{i1}p_1+\ldots+a_{i4}p_4=b_i}} 1 + \ln^4 X \sum_{k\geqslant 2} \sum_{\substack{p_1^k, p_2^k, p_3^k, p_4^k \leqslant X \\ a_{i1}p_1^k+\ldots+a_{i4}p_4^k=b_i}} 1$$

$$\leqslant R(\bar{b})\ln^4 X + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln^5 X\right)$$

Если учесть определение $R(\bar{b})$, то $I(\bar{b})$ можем переписат в виде

$$I\left(\bar{b}\right) = I_1\left(\bar{b}\right) + I_2\left(\bar{b}\right) \ll R(\bar{b})\ln^4 X + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln^5 X\right) \tag{7.13}$$

отсюда получим $R(\bar{b}) \gg \frac{I_1(\bar{b})}{\ln^4 X} + O\left(X^{\frac{1}{2}} \ln N\right)$. Как первом случае, если не существует исключительный нуль L функции Дирихле, то согласно лемму6.1-6.4 и равенство (7.5) имеем: $I(\bar{b}) \geqslant I_1(\bar{b}) - \left|I_2(\bar{b})\right| \geqslant M_0\left(1 - exp(-c\delta^{-\frac{1}{2}})\right) - O\left(N^2 Q^{-\frac{1}{3}}\right) - \left|I_2(\bar{b})\right|$. δ выбираем так, чтобы $\delta < \left(-\frac{ln0,99}{c}\right)^{-2}$. Тогда учитывая (7.4) и (6.4) получим $I(\bar{b}) > N^2 Q^{-2\delta-\frac{1}{100}} - N^2 Q^{-\frac{1}{3}} - N^2 Q^{-\frac{1}{16}} >$ $> N^2 Q^{-2\delta-\frac{1}{100}}\left(1 - Q^{-\frac{19}{48}+2\delta+\frac{1}{100}}\right)$ за исключением не более, чем $E_{2,4}(X) < X^{2-2\delta-\frac{1}{101}}$ значений $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$.

Из равенства (7.13) находим $R(\bar{b}) \geqslant \frac{1}{ln^4 X}\left(I_1(\bar{b}) - |I_2(\bar{b})|\right) - O(X^{\frac{1}{2}} lnX.)$ и учитивая, что $\left|\bar{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leqslant \sqrt{2}X, \quad N = 18B^3 X$ и $K = 9\sqrt{2}B^3\left|\bar{b}\right|$ при достаточно малом δ из (7.5),(7.8),(7.11) получим утверждение теоремы, т.е.

$$R(\bar{b}) \geqslant \frac{K^{2-\delta}}{\ln^4 K}, \quad \text{где} \quad K = 9\sqrt{2}B^3\left|\bar{b}\right|$$

за исключением не более $E_{2,4}(X) < X^2 Q^{-1} = X^{2-\delta c_1}$ пар $(b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ (где $1 < c_1 < 4$).

8. Заключение

Из выше изложенного следует, что система уравнение $b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, (i = 1, 2)$ разрешима в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 для всех пар $(b_1, b_2), 1 < b_1, b_2 \leq X$, за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них и $R(\bar{b})-$ число решений этой системи при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2), 1 < b_1, b_2 \leq X$ удовлетворяет неравенству $R(\bar{b}) \geqslant \frac{K^{2-\delta}}{(\ln K)^4}$. Здесь $\delta(0 < \delta < 1)$ достаточно малое, эффективно вычисляемое постоянное $X > B^A, B = \underbrace{max}_{i=1,2;j=\overline{1,4}} 3|a_{ij}|$, достаточно большое постоянное.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math. Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.

2. Ming-Chit Liu and Kai-Tsang. On pairs of linear equations in three prime and application to Goldbach's problem // J.Reine angew.Math.-1989.-V.399.-P.109-136.
3. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных дифонтовых уравнений в простых числах. Известия ВУЗов. «Математика».-Казань, 2006. № 1-С.3-10
4. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных уравнений в простых числах.// Вестник ТерГУ-Ташкент 2005.№ 2.-С.146-157.
5. Абраев Б.Х., Аллакова Д.И. О решение системы линейных уравнений в простых числах. Материалы научно-технической конференции «Прикладная математика и информационная безопасность» Ташкент. 2014 г. 28-30 апреля, С.50-54
6. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers //Uzb.mat.jurnal. -2020.-№ 3.-P.16-24.
7. Аллаков И.,Абраев Б.Х. О условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах.(Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории) Тула.23-26 сентябрь 2020. С.6-8.
8. Davenport H.Multiplicative number theory.Third edition.Springer.New York.2000.177p.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука.1983. -199с.
10. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез.Изд. «Сурхан нашр» 2021.160с.
11. Абраев Б.Х. Исследование сингулярного ряда в задаче об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел. Научный вестник.Самаркандский государственный университет, № 1 (131), 2022г. С.68-77.
12. Vaughan R.C.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997.232p.
13. Подвигин. И.В. Основы функционального анализа. Новосибирск. Изд. Новосибирский государственный университет, 2017. 184с.
14. Бабаназаров Б., Тулаганова М.И., Файнлейб А.С. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз.- Ташкент, 1992. - № 6-7. - С.7-9.
15. Аллаков И., Исраилов М.И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. -С.12-15.
16. Аллаков И.,Сафаров А.Ш. Об одной аддитивной проблеме Хуа-Ло- Кена.Чебышевский сборник, 2019, т.20, № 4, с.32-45.
17. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. Berlin- New York . - 1989. - P.595-624.
18. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - P.13-20.
19. Аллаков И. Об одновременном представлении чисел суммой простых чисел. Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа». Душанбе, 2019, 13-14 декабря, с.46-49.

20. Аллаков И. Абраев Б.Х. О разрешимости одной системы линейных уравнений с целыми коэффициентами в простых числах. Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, № 6, стр. 37-49

REFERENCES

1. Wu Fang . On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math. Sinica.-V.7.-P.102-121 (1957).

2. Ming-Chit Liu and Kai-Tsang. On pairs of linear equations in three prime and application to Goldbach's problem. J. Reine angew . Math.-V.399.-P.109-136 (1989).

3. Allakov I. On the conditions for the solvability of a system of linear difont equations in prime numbers. Proceedings of universities. "Mathematics ". - Kazan, V.1.p.3-10 (2006). (in Russian)

4. Allakov I. On the conditions for the solvability of a system of linear equations in prime numbers. Bulletin of TerSU - Tashkent No.2. - P. 146-157 (2005). (in Russian)

5. Abraev B.Kh. , Allakova D.I. On the solution of a system of linear equations in prime numbers. Materials of the scientific and technical conference "Applied Mathematics and Information Security"Tashkent. pp.50-54 (2014). (in Russian)

6. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzb.mat.jurnal . -No.3.-P.16-24 (2020).

7. Allakov I. Abrayev B.KH. On the conditions for the solvability of a pair of linear equations in four unknowns in prime numbers. (Algebra , number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history) Tula. pp.6-8 (2020). (in Russian)

8. Davenport H. Multiplicative number theory. (Third edition.Springer.New York.2000).

9. Karatsuba A.A. Fundamentals of analytic number theory. (Nauka, M., 1983). (in Russian).

10. Allakov I. Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory. (Surkhan nashr , Termez. 2021). (in Russian).

11. Abrayev B.Kh. Investigation of a singular series in the problem of simultaneous representation of a pair of numbers by the sum of four prime numbers. (Scientific Bulletin. Samarkand State University. 1(131),p.68-77.2022) (in Russian).

12. Vaughan R.C. The Hardy-Littlwood method. (Second edition. Cambridge University Press. 1997).

13. Podvigin I.V. Fundamentals of functional analysis. (Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2017). (in Russian).

14. Babanazarov B., Tulaganov M.I., Fineleib A.S. On the solvability of a system of linear equations in prime numbers // Dokl. AN RUz. - Tashkent, 1992. - No. 6-7. - P.7-9.

15. Allakov I., Israilov M.I. On the solvability of a system of linear equations in prime numbers // Dokl. AN RUz. - Tashkent, 1992. - No. 10-11. -p.12-15.

16. Allakov I., Safarov A.Sh. On one additive problem of Hua-Lo- Ken. Chebyshevsky collection, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 32-45.(in Russian).

17. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th.Conf. 1987. Laval University. Cand. Math.Soc. Berlin-New York p.595-624(1989).

18. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - R.13-20.

19. Allakov I. On the simultaneous representation of numbers as a sum of primes. Proceedings of the international conference "Modern problems and applications of algebra, number theory and mathematical analysis". Dushanbe, 2019, December 13-14, pp. 46-49.

20. Allakov I. Abrayev B.KH. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Bulletin of the Institute of Mathematics 2022, Vol. 5, № 6, pp.37-49 (in Russian).

Получено: 01.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-38-62

О скорости сходимости средних Чезаро двойного ряда Фурье функций обобщенной ограниченной вариации

Р. К. Бера, Б. Л. Годадра

Бера Радж Кумар — факультет математики, Бародский университет Махараджи Саяджирао (г. Гуджарат, Индия).
e-mail: rameshkbera8080@gmail.com
Годадра Бхикха Лила — факультет математики, Бародский университет Махараджи Саяджирао (г. Гуджарат, Индия).
e-mail: bhikhu_ghodadra@yahoo.com

Аннотация

В этой статье оценивается скорость сходимости средних Чезаро двойного ряда Фурье для 2π-периодической функции по каждой переменной и обобщенной ограниченной вариации. Полученный результат является обобщением результата С. М. Мажара для одного ряда Фурье и нашего более раннего результата для функции двух переменных.

Ключевые слова: двойной ряд Фурье, обобщенная ограниченная вариация, поточечная сходимость, скорость сходимости, среднее значение Чезаро.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Р. К. Бера, Б. Л. Годадра. О скорости сходимости средних Чезаро двойного ряда Фурье функций обобщенной ограниченной вариации // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 38–62.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-38-62

On the rate of convergence of Cesàro means of double Fourier series of functions of generalized bounded variation

R. K. Bera, B. L. Ghodadra

Bera Raj Kumar — department of mathematics, Maharaja Sayajirao University of Baroda (Gujarat, India).
email: rameshkbera8080@gmail.com
Ghodadra Bhikha Lila — department of mathematics, Maharaja Sayajirao University of Baroda (Gujarat, India).
email: bhikhu_ghodadra@yahoo.com

Abstract

In this paper, the rate of convergence of Cesàro means of the double Fourier series of a 2π-periodic function in each variable and of generalized bounded variation, is estimated. The result obtained is a generalization of a result of S. M. Mazhar for a single Fourier series and of our earlier result for a function of two variables.

Keywords: double Fourier series, generalized bounded variation, pointwise convergence, rate of convergence, Cesàro mean.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

R. K. Bera, B. L. Ghodadra, 2023, "On the rate of convergence of Cesàro means of double Fourier series of functions of generalized bounded variation" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 38–62.

1. Introduction

The Dirichlet-Jordan theorem (see [11] or [17, p. 57]) asserts that the Fourier series of a 2π-periodic function f of bounded variation on $[-\pi, \pi]$ converges at each point and the convergence is uniform on closed intervals of continuity of f. Bojanić [4], and Bojanić and Mazhar [6] have quantified this result by estimating the rate of convergence of the Fourier series and of Cesáro means of the Fourier series at each point, respectively. Also, Bojanić and Waterman [5], and Mazhar [13] have generalize the results of Bojanić [4], and Bojanić and Mazhar [6], respectively, for functions of generalized bounded variation. Hardy [10] proved the extension of the Dirichlet-Jordan theorem from single to double Fourier series. Similar to Bojaniȇ [4], and Bojanić and Waterman [5], Moriȇz [14] and, Bera and Ghodadra [7] have quantified the result of Hardy, by estimating the rate of convergence of double Fourier series of functions of bounded variation and of generalized bounded varition, respecctively. Here we shall give an estimate of the rate of convergence of Cesàro means of the double Fourier series of a function f, 2π-periodic in each variable and of generalized bounded variation. Our result of this paper is a generalization of a result of Mazhar [13] for a single Fourier series and of our earlier result [7] for a double Fourier series.

2. Single Fourier Series

Here we shall recall certain results for pointwise convergence and rate of convergence of a single Fourier series. We need the following definitions.

Definition 1. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a 2π-periodic function, which is Lebesgue integrable over $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$. The Fourier series of f, denoted by $S(f, x)$, is defined by*

$$S(f,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

where

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-inu} du, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

The n^{th} symmetric partial sum of the Fourier series of f, denoted by $S_n(f, x)$, is defined as

$$S_n(f,x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}, \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Definition 2. *The (ordinary) oscillation of a function* $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ *over a subinterval* J *of* $[a,b]$ *is defined as*

$$\operatorname{osc}_1(h,J) = \sup\{|h(t) - h(t')| : t, t' \in J\}.$$

In the sequel, we will distinguish the subintervals of the non-negative half of the one-dimensional torus $\bar{\mathbb{T}} = [-\pi,\pi] : I_{j,m} = [\theta_{j,m}, \theta_{j+1,m}]$, where $\theta_{j,m} = \frac{j\pi}{m+1}$, for $j = 0,1,2,\dots m; m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition 3. *Let* f *be a real-valued function defined on an interval* $[a,b]$ *and* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *be a non-decreasing sequence of positive numbers such that* $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ *diverges. Then the function* f *is said to be of* Λ*-bounded variation* ($f \in \Lambda BV$) *on* $[a,b]$ *if there exists a positive constant* M *such that*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(a_k) - f(b_k)|}{\lambda_k} \leqslant M$$

for every choice $\{I_k\}$ *of non-overlapping intervals with* $I_k = [a_k, b_k] \subset [a,b], \ k = 1, \dots, n$. *If* $f \in \Lambda BV\,[a,b]$, *the* Λ*-variation of* f *is defined by*

$$V_\Lambda(f,[a,b]) = \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(a_k) - f(b_k)|}{\lambda_k},$$

where the supremum is extended over all sequences $\{I_k\}$ *as above.*

Note that for $\Lambda = \{1\}$, ΛBV=BV, the set of all functions of bounded variation on $[a,b]$. Also, note that if f is of Λ-bounded variation, then $f(x+0)$ and $f(x-0)$ exist at every point x of $[a,b]$ (see, e.g., [16, Theorem 4]). We define, for $x \in [a,b]$,

$$s(f,x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\} \tag{1}$$

and

$$\phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \ t \in [a,b]. \tag{2}$$

Jordan [11] proved that if f is a 2π-periodic function of bounded variation on $[-\pi,\pi]$, then its Fourier series converges to $s(f,x)$ at each point of x. This result was quantified by Bojanič [4] by estimating the rate of convergence of the Fourier series of f at x by proving the following theorem.

Theorem 1. *If* f *is a* 2π*-periodic function and is of bounded variation on* $[-\pi,\pi]$, *then for all* x *and* n *we have*

$$|S_n(f,x) - s(f,x)| \leqslant \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} V\left(\phi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right).$$

R. Bojanić and D. Waterman [5] have generalized this result for the larger class ΛBV, where $\Lambda = \{n^\gamma\}$, $0 \leqslant \gamma < 1$, and denoted that class by γBV and the corresponding variation by $V_\gamma(f,[a,b])$. Their result (including their Lemmas 1 and 2) is as follows.

Theorem 2. *Let* $f \in \gamma BV(\bar{\mathbb{T}})$, $0 \leqslant \gamma < 1$, *and let* $V_\gamma(\phi_x, u)$ *denote the generalized variation of* ϕ_x *on* $[0,u]$. *Then*

$$|S_n(f,x) - s(f,x)| \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \operatorname{osc}_1(\phi_x, I_{k,n}) \leqslant \frac{2(2-\gamma)}{(n+1)^{1-\gamma}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\gamma} V_\gamma\left(\phi_x, \frac{\pi}{k}\right),$$

where $s(f,x)$ *and* $\phi_x(t)$ *are as in* (1) *and* (2), *respectively.*

In order to obtain a result for Cesàro means, we first recall the following definition and properties, which can be found in ([17, pp. 94–95], [13, Theorem 1], or [6]).

Definition 4. *Let* $K_n^\alpha(t)$ *denote the* (C,α) *kernel and* $\sigma_n^\alpha(f,x)$ *the* (C,α) *mean of* $S(f,x)$ *for* $-1<\alpha\leqslant 0$. *Then*

$$K_n^\alpha(t)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}D_\nu(t),$$
$$\sigma_n^\alpha(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n^\alpha(t)dt,$$

and

$$\sigma_n^\alpha(f,x)-s(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)K_n^\alpha(t)dt, \tag{3}$$

where $D_\nu(t)$ *and* A_n^α *are defined as*

$$D_\nu(t)=\frac{1}{2}\sum_{j=-\nu}^{\nu}e^{ijt}=\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

and

$$A_0^\alpha=1,\ \ A_n^\alpha=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Some properties of $K_n^\alpha(t)$ are as follows:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}K_n^\alpha(t)dt=1, \tag{4}$$

$$|K_n^\alpha(t)|\leqslant n+\frac{1}{2},\ 0<t<\pi, \tag{5}$$

$$\int_{\theta_{k,n}}^{\theta_{k+1,n}}|K_n^\alpha(t)|dt\leqslant\frac{C_1}{k^{1+\alpha}},\ k=1,2,\dots,n,\ |\alpha|<1, \tag{6}$$

and

$$\left|\int_t^{\pi}K_n^\alpha(u)du\right|\leqslant\frac{C_2}{(nt)^{1+\alpha}}, \tag{7}$$

where C_1 and C_2 are constants.

Mazhar [13] generalize the result of Bojanič and Waterman [5] by proving the following more general theorem (including their Lemmas 1 and 2).

Theorem 3. *Let* $f\in\gamma BV(\bar{\mathbb{T}})$, $0\leqslant\gamma<1$ *and let* $V_\gamma(\phi_x,u)$ *denote the generalized variation of* ϕ_x *on* $[0,u]$. *Then for* $\alpha>\gamma-1$, $-1<\alpha\leqslant 0$,

$$|\sigma_n^\alpha(f,x)-s(f,x)|\leqslant C_\alpha\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}}\mathrm{osc}_1\left(\phi_x,I_{k,n}\right)\leqslant\frac{(2+\alpha-\gamma)C_\alpha}{(n+1)^{\alpha-\gamma+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\gamma-\alpha}}V_\gamma\left(\phi_x,\frac{\pi}{k}\right), \tag{8}$$

where $C_\alpha=\left(1+\frac{2^{1+\alpha}}{\pi}C_1+\frac{2^{1+\alpha}}{\pi^{2+\alpha}}C_2\right)$, *and* $s(f,x)$ *and* $\phi_x(t)$ *are as in* (1) *and* (2), *respectively.*

3. Double Fourier Series

In this section, we shall recall certain results for pointwise convergence and rate of convergence of a Double Fourier series. We need the following definitions.

Definition 5. *Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ be a function, 2π-periodic in each variable and integrable over $\mathbb{T}^2$. The double Fourier series of f is defined by*

$$S(f,x,y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} e^{i(jx+ky)}, \tag{9}$$

where

$$c_{jk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u,v) e^{-i(ju+kv)} du dv, \ j,k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

We consider the double sequence of symmetric rectangular partial sums

$$S_{m,n}(f,x,y) = \sum_{j=-m}^{m} \sum_{k=-n}^{n} c_{jk} e^{i(jx+ky)}, \ m,n = 0,1,2,\dots. \tag{11}$$

The Cesàro (C,α,β)-means of the double Fourier series (9) for $-1 < \alpha, \beta \leqslant 0$ are defined (see, e.g., [9, p. 106]) by

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y) = \frac{1}{A_m^{\alpha}} \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} A_{m-\mu}^{\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1} S_{\mu,\nu}(f,x,y), \quad m,n = 0,1,2,\dots.$$

Definition 6. *A function f defined on a rectangle $R := [a,b] \times [c,d]$ is said to be of bounded variation in the sense of Vitali, in symbol, $f \in \mathrm{BV_V}(R)$, if*

$$\sup_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |f(x_j,y_k) - f(x_{j-1},y_k) - f(x_j,y_{k-1}) + f(x_{j-1},y_{k-1})| < \infty, \tag{12}$$

where the supremum is extended over all partitions

$$\mathcal{P}_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \ \ \text{and} \ \ \mathcal{P}_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

of $[a,b]$ and $[c,d]$ respectively. The supremum in (12) denoted by $V(f,[a,b],[c,d])$ is called the total variation of f over R.

If a function $f \in \mathrm{BV_V}(R)$ is such that the marginal functions $f(\cdot,c)$ and $f(a,\cdot)$ are of bounded variation over the intervals $[a,b]$ and $[c,d]$ respectively, then f is said to be of bounded variation in the sense of Hardy and Krause, in symbols, $f \in \mathrm{BV_H}(R)$.

Definition 7. *The rectangular oscillation of a function $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ over a subrectangle $J \times K$ of $[a,b] \times [c,d]$ is defined as*

$$\mathrm{osc}_2(f,J,K) = \sup\{|f(u,v) - f(u',v) - f(u,v') + f(u',v')| : u,u' \in J, v,v' \in K\}.$$

We also recall that the modulus of continuity of a function f on $\mathbb{T}^2$ is defined by

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) := \sup_{|u-u'| \leqslant \delta_1, \, |v-v'| \leqslant \delta_2} |f(u,v) - f(u',v) - f(u,v') + f(u',v')|,$$

the partial moduli of continuity of f are defined by

$$\omega_x(f,\delta) := \sup_{|u-u'| \leqslant \delta_1, \, v \in \mathbb{T}} |f(u,v) - f(u',v)|,$$

and

$$\omega_y(f,\delta) := \sup_{|v-v'|\leqslant\delta_2,\ u\in\mathbb{T}} |f(u,v)-f(u,v')|,$$

and also

$$\omega_i(f,\delta_i) = \sup_{|h_i|\leqslant\delta_i} \{|f(x+h_i)-f(x)| \ :\ x\in\mathbb{T}^n\},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Definition 8. *Let $f(x+0,y+0) := \lim_{s\to 0^+,t\to 0^+} f(x+s,y+t)$ be the limiting value of f as (x,y) is approached along any path lying north and east of (x,y). The other three quadrant limits $f(x-0,y+0)$,$f(x+0,y-0)$ and $f(x-0,y-0)$ can be defined analogously.*

Hardy [10] proved that if f is function of bounded variation (in the sense of Hardy and Krause) on $\bar{\mathbb{T}}^2$, 2π-periodic in each variable, then its Fourier series (9) converges to $s(f,x,y)$ at each point of (x,y).

Morièz [14] quantified Hardy's result by estimating the rate of convergence of double Fourier series of f at (x,y) by proving following theorems.

Theorem 4 ([14, Theorem 2]). *If f is a bounded, measurable function on $\bar{\mathbb{T}}^2$, 2π-periodic in each variable, such that the four limits $f(x\pm 0,y\pm 0)$ exist at a certain point (x,y), and the four limit functions $f(x\pm 0,\cdot)$ and $f(\cdot,y\pm 0)$ exist, then for any $m,n\geqslant 0$ we have*

$$\begin{aligned}|S_{m,n}(f,x,y)-s(f,x,y)| \leqslant{}& \left(1+\frac{1}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j+1)(k+1)} \operatorname{osc}_2(\phi_{xy},I_{j,m},I_{k,n}) \\ &+\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{(j+1)}\operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(\cdot,0),I_{j,m}) \\ &+\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)}\operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(0,\cdot),I_{k,n}),\end{aligned}$$

where

$$s(f,x,y)=\frac{1}{4}[f(x+0,y+0)+f(x-0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y-0)] \tag{13}$$

and

$$\phi_{xy}(u,v)=\begin{cases} f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)+f(x+u,y-v) & \\ +f(x-u,y-v)-4s(f,x,y), & \text{if } u,v>0; \\ f(x+0,y+v)+f(x-0,y+v)+f(x+0,y-v) & \\ +f(x-0,y-v)-4s(f,x,y), & \text{if } u=0 \text{ and } v>0; \\ f(x+u,y+0)+f(x-u,y+0)+f(x+u,y-0) & \\ +f(x-u,y-0)-4s(f,x,y), & \text{if } u>0 \text{ and } v=0; \\ 0, & \text{if } u=v=0. \end{cases} \tag{14}$$

Theorem 5 ([14, Theorem 3]). *If $f(x,y)$ is 2π-periodic in each variable and of bounded variation over $\bar{\mathbb{T}}^2$ in the sense of Hardy and Krause, then for all $m,n\geqslant 0$, we have*

$$\begin{aligned}|S_{m,n}(f,x,y)-s(f,x,y)| \leqslant{}& \frac{4\left(1+\frac{1}{\pi}\right)^2}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} V\left(\phi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{j}\right],\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right) \\ &+\frac{2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)}{m+1}\sum_{j=1}^{m} V\left(\phi_{xy}(\cdot,0),\left[0,\frac{\pi}{j}\right]\right) \\ &+\frac{2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)}{n+1}\sum_{k=1}^{n} V\left(\phi_{xy}(0,\cdot),\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right),\end{aligned}$$

where $s(f,x,y)$ *and* $\phi_{xy}(u,v)$ *are as in* (13) *and* (14), *respectively.*

In [20], Zhizhiashvili have proved the following theorem for function of several variables.

THEOREM 6. (a) *If* $f \in C(\mathbb{T}^n)$ *and*

$$\omega_i(f,\delta_i) = O\left\{\left(\log\frac{1}{\delta_i}\right)^{-n-\epsilon}\right\} \ (\delta_i \to 0,\ i = 1,2,\ldots,n),\ \ \epsilon > 0,$$

then the Fourier series of f *is uniformly convergent in the sense of Pringsheim.*

(b) *If*

$$\omega_i(f,\delta_i) = o\left\{\left(\log\frac{1}{\delta_i}\right)^{-n}\right\} \ (\delta_i \to 0,\ i = 1,2,\ldots,n),$$

then the Fourier series of the function f *is uniformly convergent in the sense of Pringsheim.*

Morièz [15] have also proved the similar type of result for function of two variables, which is as follows

THEOREM 7 ([15, Corollary 1.2]). *If* f *is continuous on* $\mathbb{T}^2$,

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) = o\left\{\left(\log\frac{1}{\delta_1}\right)^{-1}\left(\log\frac{1}{\delta_1}\right)^{-1}\right\} \ (\delta_1,\delta_2 \to 0),$$

$$\omega_x(f,\delta) = o\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\} \ (\delta \to 0),\ \ \textit{and}\ \ \omega_y(f;\delta) = o\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\} \ (\delta \to 0),$$

then the Fourier series of the function f *is uniformly convergent in the sense of Pringsheim.*

In [9], D'yachenko have constructed a continuos function of $2m$ variables ($m \in \mathbb{N}$) with modulus of continuity

$$\omega_i(f,\delta_i) = O\left(\left(\log\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\right)^{-m}\right) \tag{15}$$

and its Fourier series is divergent almost everywhere in the Pringsheim sense based on example of Bakhbukh and Nikishin [8]. Similar results for λ-divergent Fourier series are also constructed by Bakhvalov (see [1],[2]).

DEFINITION 9. *Let* f *be a measurable function defined on the rectangle* $[a,b]\times[c,d]$ *and* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *and* $\Lambda' = \{\lambda'_n\}_{n=1}^{\infty}$ *be non-decreasing sequences of positive numbers such that* $\lambda_n, \lambda'_n \to \infty$ *and* $\sum \frac{1}{\lambda_n}$, $\sum \frac{1}{\lambda'_n}$ *diverges. Then the function* f *is said to be of* (Λ,Λ')*-bounded variation* ($f \in (\Lambda,\Lambda')BV$) *on* $[a,b]\times[c,d]$, *if*

(1) $f(\cdot,c) \in \Lambda BV[a,b]$ *and* $f(a,\cdot) \in \Lambda' BV[c,d]$, *and*

(2) *if* $\mathcal{I}_1$ *and* $\mathcal{I}_2$ *are the sets of finite collections of non-overlapping intervals* $I_j = [a_j,b_j]$, $j = 1,2,\ldots,m$, *and* $J_k = [c_k,d_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, *in* $[a,b]$ *and* $[c,d]$ *respectively, and* $f(I_j\times J_k) = f(a_j,c_k) - f(a_j,d_k) - f(b_j,c_k) + f(b_j,d_k)$, *then*

$$\sup_{\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(I_j\times J_k)|}{\lambda_j\lambda'_k} < \infty. \tag{16}$$

We denote the supremum in (16) *by* $V_{(\Lambda,\Lambda')}(f,[a,b],[c,d])$.

Here we shall consider the class $(\Lambda, \Lambda')\,BV$, where $\Lambda = \{n^\gamma\}$ and $\Lambda' = \{n^\delta\}$, for $\gamma, \delta \geqslant 0$, $\gamma + \delta \leqslant 1$; denote this class by $(\gamma, \delta)BV$ and the corresponding variations by $V_\gamma(f(\cdot, c), [a, b])$, $V_\delta(f(a, \cdot), [c, d])$ and $V_{\gamma\delta}(f, [a, b], [c, d])$ respectively. The present authors have proved (see [7, Theorem 7]) that if $f(x, y) \in (\gamma, \delta)BV(\bar{\mathbb{T}}^2)$, then all the four limits $f(x \pm 0, y \pm 0)$ exist at every point (x, y). They have also generalized Theorem 5 of Moričz and proved the following (see [7, Theorem 8]).

Theorem 8. *Let $f \in (\gamma, \delta)BV(\bar{\mathbb{T}}^2)$, $\gamma, \delta \geqslant 0$, $\gamma + \delta \leqslant 1$, and let $V_\gamma(\phi_{xy}(\cdot, 0), u)$, $V_\delta(\phi_{xy}(0, \cdot), v)$, and $V_{\gamma\delta}(\phi_{xy}, u, v)$ denote the generalized variation of ϕ_{xy} on $[0, u]$, $[0, v]$ and $[0, u] \times [0, v]$, respectively. Then*

$$\begin{aligned}|S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| \leqslant &\frac{\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)^2 (2 - \gamma)(2 - \delta)}{(m + 1)^{1-\gamma}(n + 1)^{1-\delta}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j^\gamma k^\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) \\ &+ \frac{\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)(2 - \gamma)}{(m + 1)^{1-\gamma}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^\gamma} V_\gamma\left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j}\right) \\ &+ \frac{\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)(2 - \delta)}{(n + 1)^{1-\delta}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\delta} V_\delta\left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k}\right),\end{aligned}$$

where $s(f, x, y)$ and $\phi_{xy}(u, v)$ are as in (13) *and* (14)*, respectively.*

We note that if the four quadrant limits $f(x \pm 0, y \pm 0)$ exist at each point (x, y), then in view of (10) and (11), we have the representation

$$\sigma^{\alpha,\beta}_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \phi_{x,y}(u, v) K^\alpha_m(u) K^\beta_n(v)\, du dv. \tag{17}$$

Zhizhiashvili (see [18, Theorem A] or [19, p. 233]) redicovered this result with the supplement that if f is continuous on a rectangle R, then its Fourier series (9) converges to $f(x, y)$ uniformly on any rectangle R_1 inside R. He also proved that Hardy's result remains valid if convergence is replaced by (C, α, β)-summability, where $\alpha, \beta > -1$ are fixed real numbers. Bakhvalov [3] generalized the Zhizhiashivli's theorem for larger class of several variable function (see [3, Theorem 1]). In particular, Bakhvalov proved the following theorem (see [3, Corollary 1]).

Theorem 9. *Let α, $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ and $\gamma = \alpha + 1$, $\delta = \beta + 1$. Then, for any function $f \in (\gamma, \delta)BV(\mathbb{T}^2)$, its Fourier series is (C, α, β)-summable to $s(f, x, y)$ and the summability is uniform on any compact set in the neighborhood of which the function is continuous.*

4. Main Results

The main results of this paper are as follows.

Theorem 10. *If f is a bounded, measurable function on $\mathbb{T}^2$, 2π-periodic in each variable, such that the four limits $f(x \pm 0, y \pm 0)$ exist at a certain point (x, y), and the four limit functions $f(x \pm 0, \cdot)$ and $f(\cdot, y \pm 0)$ exist, then for any $m, n \geqslant 0$ and $-1 < \alpha, \beta \leqslant 0$, we have*

$$\begin{aligned}\left|\sigma^{\alpha,\beta}_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)\right| \leqslant &C_\alpha C_\beta \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j + 1)^{1+\alpha}(k + 1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_2(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}) \\ &+ C_\alpha \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(j + 1)^{1+\alpha}} \operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(\cdot, 0), I_{j,m}) \\ &+ C_\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k + 1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(0, \cdot), I_{k,n}),\end{aligned} \tag{18}$$

where constants C_α and C_β are as in Theorem 3.

Our second result, which is a particular case of Theorem 10, reads as follows.

Theorem 11. *Let $f \in (\gamma,\delta)BV(\bar{\mathbb{T}}^2)$, $\gamma,\delta \geqslant 0$, $\gamma+\delta \leqslant 1$, and let $V_\gamma\left(\phi_{xy}(\cdot,0),u\right)$, $V_\delta\left(\phi_{xy}(0,\cdot),v\right)$, and $V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy},u,v\right)$ denote the generalized variation of ϕ_{xy} on $[0,u]$, $[0,v]$ and $[0,u]\times[0,v]$, respectively. Then for $\alpha > \gamma-1$, $\beta > \delta-1$, and $-1<\alpha,\beta\leqslant 0$,*

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| \leqslant & \frac{(2+\alpha-\gamma)(2+\beta-\delta)C_\alpha C_\beta}{(m+1)^{\alpha-\gamma+1}(n+1)^{\beta-\delta+1}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{j^{\gamma-\alpha}k^{\delta-\beta}}V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy},\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)\\ &+\frac{(2+\alpha-\gamma)C_\alpha}{(m+1)^{\alpha-\gamma+1}}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{\gamma-\alpha}}V_\gamma\left(\phi_{xy}(\cdot,0),\frac{\pi}{j}\right)\\ &+\frac{(2+\beta-\delta)C_\beta}{(n+1)^{\beta-\delta+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\delta-\beta}}V_\delta\left(\phi_{xy}(0,\cdot),\frac{\pi}{k}\right), \end{aligned}\tag{19}$$

where constants C_α and C_β are as in Theorem 3.

In particular, taking $\gamma=\delta=0$ in Theorem 11, we get the following corollary.

Corollary 1. *Let $f \in BV_H(\bar{\mathbb{T}}^2)$, and let $V(\phi_{xy}(\cdot,0),u)$, $V(\phi_{xy}(0,\cdot),v)$, and $V(\phi_{xy},u,v)$ denote the variation of ϕ_{xy} on $[0,u]$, $[0,v]$ and $[0,u]\times[0,v]$, respectively. Then for $-1<\alpha,\beta\leqslant 0$, we have*

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| \leqslant & \frac{(2+\alpha)(2+\beta)C_\alpha C_\beta}{(m+1)^{\alpha+1}(n+1)^{\beta+1}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{j^{-\alpha}k^{-\beta}}V\left(\phi_{xy},\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)\\ &+\frac{(2+\alpha)C_\alpha}{(m+1)^{\alpha+1}}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{-\alpha}}V\left(\phi_{xy}(\cdot,0),\frac{\pi}{j}\right)\\ &+\frac{(2+\beta)C_\beta}{(n+1)^{\beta+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{-\beta}}V\left(\phi_{xy}(0,\cdot),\frac{\pi}{k}\right), \end{aligned}\tag{20}$$

where constants C_α and C_β are as in Theorem 3.

Also, we can derive the following corollary from Theorem 10.

Corollary 2. *Let $\alpha,\beta \in (-1,0)$.*

(i) *If*

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2)=o\left(\delta_1^{-\alpha}\delta_2^{-\beta}\right)\quad(\delta_1,\delta_2\to 0),$$
$$\omega_x(f;\delta_1)=o\left(\delta_1^{-\alpha}\right)\quad(\delta_1\to 0),\quad \textit{and}\ \ \omega_y(f;\delta_2)=o\left(\delta^{-\beta}\right)\quad(\delta_2\to 0),$$

then the Fourier series of the function f is uniformly (C,α,β)- summable in the sense of Pringsheim.

(ii) *If $f\in C(\mathbb{T}^2)$ and*

$$\omega_x(f,\delta_1)=O\left(\delta_1^{-2\alpha+\epsilon}\right)\quad \textit{and}\ \ \omega_y(f;\delta_2)=O\left(\delta_2^{-2\beta+\epsilon}\right)\quad(i=1,2),\quad \epsilon>0,$$

then the Fourier series of the function f is uniformly (C,α,β)- summable in the sense of Pringsheim.

(iii) *If*

$$\omega_x(f,\delta_1) = o\left(\delta_1^{-2\alpha}\right) \ \ and \ \ \omega_y(f;\delta_2) = o\left(\delta_2^{-2\beta}\right) \ \ (\delta_i \to 0,\ i = 1,2),$$

then the Fourier series of the function f is uniformly (C,α,β)- summable in the sense of Pringsheim.

(iv) *there exists a continuous function on $\mathbb{T}^2$ satisfying*

$$\omega_x(f,\delta_1) = O\left(\delta_1^{-\alpha}\right) \ \ (\delta_1 \to 0) \ \ and \ \ \omega_y(f,\delta_2) = O\left(\delta_2^{-\beta}\right) \ \ (\delta_2 \to 0), \tag{21}$$

and its (C,α,β)-mean of Fourier series diverges almost everywhere in restricted sense.

Замечание 2. *Our Theorem* 10 is more general than the Theorem 4 of Moričz (except for exact constants). Our Theorem 11 is a two-dimensional analogue of Theorem 3 and in a particular case, we provide a quantitative version of Theorem 9. Also, setting $\alpha = \beta = 0$ in Theorem 11, we get our earlier result Theorem 8 (except for exact constants). In Corollary 1, we provide a quantitative version of Zhizhiashvili's result (see [18, Theorem A] or [19, p. 233]) for (C,α,β)-summability, for $\alpha,\beta > -1$. Our Corollary 2 is more general than the Theorem 7 and also for the case of function of two variable in Theorem 6.

5. Proofs

We need the partial summation formulas for single and double sequences, which are as follows.

Lemma 1. *Consider $n \in \mathbb{N}$. For $j = 0,1,\ldots,n$, let a_j and b_j be real numbers. Let $B_j = \sum\limits_{k=j}^{n} b_k$ for $j = 0,1,2,\ldots,n$, and $B_{n+1} = 0$. Then*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1})\, B_j + a_0 B_1.$$

Lemma 2 ([12, Proposition 7.37]). *Consider $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. For $j = 0,1,\ldots,m$ and $k = 0,1,\ldots,n$, let $a_{j,k}$ and $b_{j,k}$ be real numbers, and let $B_{m,n} = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n} b_{j,k}$. Then*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}b_{j,k} = a_{m,n}B_{m,n} + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{j,k} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1}\right) B_{j,k} \\ + \sum_{j=0}^{m-1}\left(a_{j,n} - a_{j+1,n}\right) B_{j,n} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{m,k} - a_{m,k+1}\right) B_{m,k}.\end{aligned} \tag{22}$$

Also, if we assume that $B_{j,k} = \sum\limits_{j'=j}^{m}\sum\limits_{k'=k}^{n} b_{j',k'}$ and $B_{m+1,n+1} = B_{j,n+1} = B_{m+1,k} = 0$, for $j = 0,1,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,n$, then

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}b_{j,k} =& \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{j,k} - a_{j,k-1} - a_{j-1,k} + a_{j-1,k-1}\right) B_{j,k} \\ &+ \sum_{j=1}^{m}(a_{j,0} - a_{j-1,0})B_{j,1} + \sum_{k=1}^{n}(a_{0,k} - a_{0,k-1})B_{1,k} + a_{0,0}B_{1,1}.\end{aligned} \tag{23}$$

The proof of our Theorem 10 is similar to that of a result of Moric̀z [14, Theorem 2] and the proof of Theorem 11 is similar to that of our earlier result [7, Theorem 8].

Proof of Theorem 10. Let $m, n \in \mathbb{N}$ be fixed. We start with the representation (17) of the difference of $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)$ and $s(f,x,y)$. By writing ϕ instead of ϕ_{xy}, in view of (4), it is clear that

$$\begin{aligned}
&\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y) - s(f,x,y) \\
&\quad = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \{\phi(u,v) - \phi(u,0) - \phi(0,v)\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(u,0) K_m^\alpha(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(0,v) K_n^\beta(v)\,dv \\
&\quad = \mathrm{A}_{mn} + \mathrm{B}_m + \mathrm{C}_n, \text{ say.}
\end{aligned} \tag{24}$$

Defining $g(u,v) = \phi(u,v) - \phi(u,0) - \phi(0,v)$, we decompose the double integral defining A_{mn} as

$$\begin{aligned}
\pi^2 \mathrm{A}_{mn} &= \int_{I_{0,m}}\int_{I_{0,n}} g(u,v) K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{0,n}} \{g(u,v) - g(\theta_{j,m},v)\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{0,n}} g(\theta_{j,m},v) K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{0,m}}\int_{I_{k,n}} \{g(u,v) - g(u,\theta_{k,n})\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{0,m}}\int_{I_{k,n}} g(u,\theta_{k,n}) K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{k,n}} \{g(u,v) - g(u,\theta_{k,n}) - g(\theta_{j,m},v) + g(\theta_{j,m},\theta_{k,n})\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{k,n}} \{g(\theta_{j,m},v) - g(\theta_{j,m},\theta_{k,n})\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{k,n}} \{g(u,\theta_{k,n}) - g(\theta_{j,m},\theta_{k,n})\} K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{k,n}} g(\theta_{j,m},\theta_{k,n}) K_m^\alpha(u) K_n^\beta(v)\,dudv \\
&= \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_9, \text{ say.}
\end{aligned} \tag{25}$$

To estimate A_1 and A_2, from (5) and by definition of $g(u,v)$, as $\phi(0,0) = 0$, we have

$$\begin{aligned}
|\mathrm{A}_1| &\leqslant \int_{I_{0,m}}\int_{I_{0,n}} |g(u,v)||K_m^\alpha(u)||K_n^\beta(v)|\,dudv \\
&= \int_{I_{0,m}}\int_{I_{0,n}} |\phi(u,v) - \phi(u,0) - \phi(0,v) + \phi(0,0)||K_m^\alpha(u)||K_n^\beta(v)|\,dudv \\
&\leqslant \operatorname{osc}_2(\phi, I_{0,m}, I_{0,n}) \int_{I_{0,m}}\int_{I_{0,n}} \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) dudv \\
&\leqslant \pi^2 \operatorname{osc}_2(\phi, I_{0,m}, I_{0,n})
\end{aligned} \tag{26}$$

and using (6), we have

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{A}_2| &= \left|\sum_{j=1}^{m}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{0,n}}\{g(u,v)-g(\theta_{j,m},v)\}K_m^{\alpha}(u)K_n^{\beta}(v)dudv\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{0,n}}|\phi(u,v)-\phi(u,0)-\phi(\theta_{j,m},v)+\phi(\theta_{j,m},0)|\,|K_m^{\alpha}(u)|\left|K_n^{\beta}(v)\right|dudv \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m}\mathrm{osc}_2(\phi,I_{j,m},I_{0,n})\left(\int_{I_{j,m}}\frac{C_1}{j^{1+\alpha}}du\right)\left(\int_{I_{0,n}}\left(n+\frac{1}{2}\right)dv\right) \\
&\leqslant \pi C_1\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{1+\alpha}}\mathrm{osc}_2(\phi,I_{j,m},I_{0,n}) \\
&\leqslant \pi 2^{1+\alpha}C_1\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}}\mathrm{osc}_2(\phi,I_{j,m},I_{0,n}). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Similalry, we can get

$$
|\mathrm{A}_4| \leqslant \pi 2^{1+\beta}C_1\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{1+\beta}}\mathrm{osc}_2(\phi,I_{0,m},I_{k,n}). \qquad (28)
$$

Next, we estimate A_3. Put

$$
R_{j,m}^{\alpha} = \int_{\theta_{j,m}}^{\pi}K_m^{\alpha}(u)du,\quad j=0,1,\ldots,m+1 \qquad (29)
$$

and

$$
R_{k,n}^{\beta} = \int_{\theta_{k,n}}^{\pi}K_n^{\beta}(v)dv,\quad k=0,1,\ldots,n+1. \qquad (30)
$$

Then by (4) and (7), we have

$$
|R_{j,m}^{\alpha}| \leqslant C_2\left(\frac{2}{\pi j}\right)^{1+\alpha},\ j=1,2,\ldots,m;\ R_{0,m}^{\alpha}=\frac{\pi}{2},\ R_{m+1,m}^{\alpha}=0 \qquad (31)
$$

and similarly

$$
|R_{k,n}^{\beta}| \leqslant C_2\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1+\beta},\ k=1,2,\ldots,n;\ R_{0,n}^{\beta}=\frac{\pi}{2},\ R_{n+1,n}^{\beta}=0. \qquad (32)
$$

Now, by definition of A_3, we have

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_3 &= \sum_{j=1}^{m}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{0,n}}g(\theta_{j,m},v)K_m^{\alpha}(u)K_n^{\beta}(v)dudv \\
&= \int_{I_{0,n}}\left\{\sum_{j=1}^{m}g(\theta_{j,m},v)\int_{I_{j,m}}K_m^{\alpha}(u)du\right\}K_n^{\beta}(v)dv \\
&= \int_{I_{0,n}}\left\{\sum_{j=1}^{m}g(\theta_{j,m},v)\left(R_{j,m}^{\alpha}-R_{j+1,m}^{\alpha}\right)\right\}K_n^{\beta}(v)dv.
\end{aligned}
$$

Using the partial summation formula of Lemma 1 with $a_j = g(\theta_{j,m}, v)$ and $b_j = R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{j+1,m}$, for $j = 0, 1, \dots, m$, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_3 = \int_{I_{0,n}} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} \left(g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j-1,m}, v)\right) \left(R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{m+1,m}\right) \\ + g(\theta_{0,m}, v) \left(R^{\alpha}_{1,m} - R^{\alpha}_{m+1,m}\right) \Bigg\} K^{\beta}_{n}(v) dv \\ = \int_{I_{0,n}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\phi(\theta_{j,m}, v) - \phi(\theta_{j,m}, 0) - \phi(\theta_{j-1,m}, v) + \phi(\theta_{j-1,m}, 0)\right) R^{\alpha}_{j,m} \right\} K^{\beta}_{n}(v) dv, \end{aligned} \tag{33}$$

because $g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j-1,m}, v) = \phi(\theta_{j,m}, v) - \phi(\theta_{j,m}, 0) - \phi(\theta_{j-1,m}, v) + \phi(\theta_{j-1,m}, 0)$, $g(\theta_{0,m}, v) = = g(0, v) = 0$ by definition of $g(u, v)$, and $R^{\alpha}_{m+1,m} = 0$ by (31).

From (5), (31), and (33), we conclude that

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}_3| &\leqslant \int_{I_{0,n}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} |\phi(\theta_{j,m}, v) - \phi(\theta_{j,m}, 0) - \phi(\theta_{j-1,m}, v) + \phi(\theta_{j-1,m}, 0)| |R^{\alpha}_{j,m}| \right\} |K^{\beta}_{n}(v)| dv \\ &\leqslant \frac{C_2 2^{1+\alpha}}{\pi^{1+\alpha}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{1+\alpha}} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{j-1,m}, I_{0,n}) \int_{I_{0,n}} \left(n + \frac{1}{2}\right) dv \\ &\leqslant \frac{C_2 2^{1+\alpha}}{\pi^{\alpha}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{0,n}). \end{aligned} \tag{34}$$

Analogously, now using (32) instead of (31), we can see that

$$|\mathrm{A}_5| \leqslant \frac{C_2 2^{1+\beta}}{\pi^{\beta}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1+\beta}} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{0,m}, I_{k,n}). \tag{35}$$

Next we estimate A_6. By definition of $g(u, v)$, we have

$$\begin{aligned} g(u, v) - g(u, \theta_{k,n}) - g(\theta_{j,m}, v) + g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}) \\ = \phi(u, v) - \phi(u, \theta_{k,n}) - \phi(\theta_{j,m}, v) + \phi(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}), \end{aligned} \tag{36}$$

and hence by definition of A_6 and (6), we have

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}_6| &= \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{I_{j,m}} \int_{I_{k,n}} \{g(u, v) - g(u, \theta_{k,n}) - g(\theta_{j,m}, v) + g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})\} K^{\alpha}_{m}(u) K^{\beta}_{n}(v) du dv \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{I_{j,m}} \int_{I_{k,n}} |\phi(u, v) - \phi(u, \theta_{k,n}) - \phi(\theta_{j,m}, v) + \phi(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})| |K^{\alpha}_{m}(u)| \left|K^{\beta}_{n}(v)\right| du dv \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}) \int_{I_{j,m}} \int_{I_{k,n}} |K^{\alpha}_{m}(u)| \left|K^{\beta}_{n}(v)\right| du dv \\ &\leqslant C_1^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j^{1+\alpha} k^{1+\beta}} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}) \\ &\leqslant 2^{2+\alpha+\beta} C_1^2 \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha} (k+1)^{1+\beta}} \mathrm{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}). \end{aligned} \tag{37}$$

To estimate A_7, using notation (29) and the partial summation formula of Lemma 1 with $a_j = g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})$ and $b_j = R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{j+1,m}$ for $j = 0, 1, \ldots, m$, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_7 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{j,m}}\int_{I_{k,n}}\{g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})\}K^{\alpha}_{m}(u)K^{\beta}_{n}(v)\,du\,dv \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{k,n}}\left\{\sum_{j=1}^{m}(g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}))(R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{j+1,m})\right\}K^{\beta}_{n}(v)\,dv \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{k,n}}\Bigg\{\sum_{j=1}^{m}([g(\theta_{j,m}, v) - g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})] - [g(\theta_{j-1,m}, v) - g(\theta_{j-1,m}, \theta_{k,n})])(R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{m+1,m}) \\
&\qquad\qquad + (g(\theta_{0,m}, v) - g(\theta_{0,m}, \theta_{k,n}))(R^{\alpha}_{1,m} - R^{\alpha}_{m+1,m})\Bigg\}K^{\beta}_{n}(v)\,dv \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{k,n}}\left\{\sum_{j=1}^{m}(\phi(\theta_{j,m}, v) - \phi(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}) - \phi(\theta_{j-1,m}, v) + \phi(\theta_{j-1,m}, \theta_{k,n}))R^{\alpha}_{j,m}\right\}K^{\beta}_{n}(v)\,dv,
\end{aligned}$$

because $g(\theta_{0,m}, v) = g(\theta_{0,m}, \theta_{k,n}) = 0$ by definition of $g(u, v)$, $R^{\alpha}_{m+1,m} = 0$ by (31), and by (36) with $u = \theta_{j-1,m}$. Now, in view of (6) and (31), it follows that

$$\begin{aligned}
|\mathrm{A}_7| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{I_{k,n}}\left\{\sum_{j=1}^{m}|\phi(\theta_{j,m}, v) - \phi(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}) - \phi(\theta_{j-1,m}, v) + \phi(\theta_{j-1,m}, \theta_{k,n})||R^{\alpha}_{j,m}|\right\}|K^{\beta}_{n}(v)|\,dv \\
&\leqslant \frac{C_1C_2 2^{1+\alpha}}{\pi^{1+\alpha}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{j^{1+\alpha}k^{1+\beta}}\operatorname{osc}_2(\phi, I_{j-1,m}, I_{k,n}) \\
&\leqslant \frac{C_1C_2 2^{2+\alpha+\beta}}{\pi^{1+\alpha}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}}\operatorname{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}). \qquad (38)
\end{aligned}$$

Similarly, using (32) instead of (31), we can estimate

$$\begin{aligned}
|\mathrm{A}_8| &\leqslant \frac{C_1C_2 2^{1+\beta}}{\pi^{1+\beta}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{j^{1+\alpha}k^{1+\beta}}\operatorname{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k-1,n}) \\
&\leqslant \frac{C_1C_2 2^{2+\alpha+\beta}}{\pi^{1+\beta}}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}}\operatorname{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}). \qquad (39)
\end{aligned}$$

Keeping notation (29) and (30) in mind, we may write

$$\mathrm{A}_9 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})(R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{j+1,m})(R^{\beta}_{k,n} - R^{\beta}_{k+1,n}),$$

whence a double summation by parts (see (23) of Lemma 2) with $a_{j,k} = g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n})$ and $b_{j,k} = (R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{j+1,m})(R^{\beta}_{k,n} - R^{\beta}_{k+1,n})$ for $j = 0, 1, \ldots, m$ and $k = 0, 1, \ldots, n$, gives

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_9 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Big\{g(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}) - g(\theta_{j,m}, \theta_{k-1,n}) - g(\theta_{j-1,m}, \theta_{k,n}) + g(\theta_{j-1,m}, \theta_{k-1,n})\Big\} \\
&\qquad\qquad \times (R^{\alpha}_{j,m} - R^{\alpha}_{m+1,m})(R^{\beta}_{k,n} - R^{\beta}_{n+1,n}) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\{\phi(\theta_{j,m}, \theta_{k,n}) - \phi(\theta_{j,m}, \theta_{k-1,n}) - \phi(\theta_{j-1,m}, \theta_{k,n}) + \phi(\theta_{j-1,m}, \theta_{k-1,n})\}R^{\alpha}_{j,m}R^{\beta}_{k,n},
\end{aligned}$$

because $a_{j,0}=a_{0,k}=0$ by definition of $g(u,v)$, for all $j=0,1,\dots,m$ and $k=0,1,\dots,n$, by (31), (32), and by (36) with $u=\theta_{j-1,m}$ and $v=\theta_{k-1,n}$.

Thus, from (31) and (32), it follows that

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}_9| &\leqslant \frac{C_2^2 2^{2+\alpha+\beta}}{\pi^{2+\alpha+\beta}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j^{1+\alpha}k^{1+\beta}} \operatorname{osc}_2(\phi, I_{j-1,m}, I_{k-1,n}) \\ &\leqslant \frac{C_2^2 2^{2+\alpha+\beta}}{\pi^{2+\alpha+\beta}} \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}). \end{aligned} \tag{40}$$

Combining (25)–(28), (34)–(37), and (38)–(40) yields

$$|\mathrm{A}_{mn}| \leqslant C_\alpha C_\beta \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_2(\phi, I_{j,m}, I_{k,n}), \tag{41}$$

where $C_\eta = \left(1 + \frac{2^{1+\eta}}{\pi}C_1 + \frac{2^{1+\eta}}{\pi^{2+\eta}}C_2\right)$ for $\eta=\alpha,\beta$.

In order to estimate B_m and C_n in (24), it is enough to apply the first inequality of (8) of Theorem 3 with the equality (3), which gives

$$|\mathrm{B}_m| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(u,0)K_m^\alpha(u)du\right| \leqslant C_\alpha \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} \operatorname{osc}_1(\phi(\cdot,0), I_{j,m}) \tag{42}$$

and

$$|\mathrm{C}_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(v,0)K_n^\beta(v)dv\right| \leqslant C_\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_1(\phi(0,\cdot), I_{k,n}). \tag{43}$$

Now, using (41)–(43) in (24), we get (18) to be proved. ■

Proof of Theorem 11. For fixed m and n in $\{0,1,2,\dots\}$, set

$$\mathrm{M}_{j,k} = \sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(i+1)^\gamma (l+1)^\delta} \operatorname{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{i,m}, I_{l,n}\right),$$

$$\mathrm{M}_j^{'} = \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{(i+1)^\gamma (n+1)^\delta} \operatorname{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{i,m}, I_{n,n}\right),$$

and

$$\mathrm{M}_k^{''} = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(m+1)^\gamma (l+1)^\delta} \operatorname{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{m,m}, I_{l,n}\right),$$

where $j=0,1,...,m$; $k=0,1,...,n$. Then we have

$$\mathrm{M}_{j,k} \leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \theta_{j+1,m}, \theta_{k+1,n}\right). \tag{44}$$

Also, define functions $\mathrm{M}(u,v)$, $\mathrm{M}^{'}(u)$, and $\mathrm{M}^{''}(v)$ on the rectangle $\left[\frac{\pi}{m+1},\pi\right) \times \left[\frac{\pi}{n+1},\pi\right)$, and the intervals $\left[\frac{\pi}{m+1},\pi\right)$ and $\left[\frac{\pi}{n+1},\pi\right)$ respectively, by

$$\mathrm{M}(u,v) = \mathrm{M}_{\left[\frac{(m+1)u}{\pi}\right]-1,\left[\frac{(n+1)v}{\pi}\right]-1}, \tag{45}$$

$$\mathrm{M}^{'}(u) = \mathrm{M}_{\left[\frac{(m+1)u}{\pi}\right]-1}, \tag{46}$$

and

$$\mathrm{M}''(v) = \mathrm{M}_{\left[\frac{(n+1)v}{\pi}\right]-1}. \tag{47}$$

Note that

$$\begin{aligned}\frac{(j+1)\pi}{m+1} \leqslant u < \frac{(j+2)\pi}{m+1} &\implies j+1 \leqslant \frac{(m+1)u}{\pi} < j+2 \\ &\implies \left[\frac{(m+1)u}{\pi}\right] = j+1.\end{aligned}$$

Similarly,

$$v \in \left[\frac{(k+1)\pi}{n+1}, \frac{(k+2)\pi}{n+1}\right) \implies \left[\frac{(n+1)v}{\pi}\right] = k+1.$$

Therefore, for each $j = 0, 1, \ldots, m-1$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$, and for each (u, v) in $\left[\frac{(j+1)\pi}{m+1}, \frac{(j+2)\pi}{m+1}\right) \times$ $\times \left[\frac{(k+1)\pi}{n+1}, \frac{(k+2)\pi}{n+1}\right)$, by (45), we have

$$\mathrm{M}(u, v) = \mathrm{M}_{j,k}. \tag{48}$$

Now, using the double partial summation formula (see (22) of Lemma 2) with $a_{j,k} = \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}(k+1)^{1+\beta-\delta}}$ and $b_{j,k} = \frac{1}{(j+1)^{\gamma}(k+1)^{\delta}}\mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}\right)$ for $j = 0, 1, \ldots, m$; $k = 0, 1, \ldots, n$, we get

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}}\mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}\right) \\ &\quad= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}(k+1)^{1+\beta-\delta}}\frac{1}{(j+1)^{\gamma}(k+1)^{\delta}}\mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}\right) \\ &\quad= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{M}_{j,k}\biggl(\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}(k+1)^{1+\beta-\delta}} - \frac{1}{(j+2)^{1+\alpha-\gamma}(k+1)^{1+\beta-\delta}} \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}(k+2)^{1+\beta-\delta}} + \frac{1}{(j+2)^{1+\alpha-\gamma}(k+2)^{1+\beta-\delta}}\biggr) \\ &\qquad+ \frac{1}{(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{M}_{j,n}\left(\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}} - \frac{1}{(j+2)^{1+\alpha-\gamma}}\right) \\ &\qquad+ \frac{1}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{M}_{m,k}\left(\frac{1}{(k+1)^{1+\beta-\delta}} - \frac{1}{(k+2)^{1+\beta-\delta}}\right) \\ &\qquad+ \frac{\mathrm{M}_{m,n}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \\ &\quad= \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}, \text{ say.}\end{aligned} \tag{49}$$

We will use properties of the Riemann-Stieltjes integral to estimate A, B, and C. First, we estimate A. Since $\alpha > \gamma - 1$ and $\beta > \delta - 1$, the functions $-u^{-1-\alpha+\gamma}$ and $-v^{-1-\beta+\delta}$ are continuous and nondecreasing for $u, v > 0$. Therefore, we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}_{j,k}\left(\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}} - \frac{1}{(j+2)^{1+\alpha-\gamma}}\right)\left(\frac{1}{(k+1)^{1+\beta-\delta}} - \frac{1}{(k+2)^{1+\beta-\delta}}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}_{j,k}\left(\int_{j+1}^{j+2} d\left(-u^{-1-\alpha+\gamma}\right)\right)\left(\int_{k+1}^{k+2} d\left(-v^{-1-\beta+\delta}\right)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}_{j,k}\int_{j+1}^{j+2}\int_{k+1}^{k+2}(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)u^{-2-\alpha+\gamma}v^{-2-\beta+\delta}dudv\\
&= (1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}_{j,k}\left(\int_{j+1}^{j+2} u^{-2-\alpha+\gamma}du\right)\left(\int_{k+1}^{k+2} v^{-2-\beta+\delta}dv\right). \qquad (50)
\end{aligned}$$

Put $s = \frac{u\pi}{m+1}$. Then $\frac{du}{ds} = \frac{m+1}{\pi}$; $u \to j+1 \Leftrightarrow s \to \frac{(j+1)\pi}{m+1}$, $u \to j+2 \Leftrightarrow s \to \frac{(j+2)\pi}{m+1}$. Therefore

$$\begin{aligned}
\int_{j+1}^{j+2} u^{-2-\alpha+\gamma}du &= \int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}}\left(\frac{(m+1)s}{\pi}\right)^{-2-\alpha+\gamma}\left(\frac{m+1}{\pi}\right)ds\\
&= \left(\frac{m+1}{\pi}\right)^{-1-\alpha+\gamma}\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}} s^{-2-\alpha+\gamma}ds\\
&= \frac{\pi^{1+\alpha-\gamma}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}}\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}} u^{-2-\alpha+\gamma}du. \qquad (51)
\end{aligned}$$

Similarly,

$$\int_{k+1}^{k+2} v^{-2-\beta+\delta}dv = \frac{\pi^{1+\beta-\delta}}{(n+1)^{1+\beta-\delta}}\int_{\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+2)\pi}{n+1}} v^{-2-\beta+\delta}dv. \qquad (52)$$

Using (51) and (52) in (50), we get

$$\mathrm{A} = \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)\pi^{2+\alpha+\beta-\gamma-\delta}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}}\int_{\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+2)\pi}{n+1}} \mathrm{M}_{j,k}\, u^{-2-\alpha+\gamma}v^{-2-\beta+\delta}dudv.$$

Since $\mathrm{M}(u,v) = \mathrm{M}_{j,k}$ for all $(u,v) \in \left[\frac{(j+1)\pi}{m+1}, \frac{(j+2)\pi}{m+1}\right) \times \left[\frac{(k+1)\pi}{n+1}, \frac{(k+2)\pi}{n+1}\right)$, we get

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)\pi^{2+\alpha+\beta-\gamma-\delta}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}}\int_{\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+2)\pi}{n+1}} \mathrm{M}(u,v)u^{-2-\alpha+\gamma}v^{-2-\beta+\delta}dudv\\
&= \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)\pi^{2+\alpha+\beta-\gamma-\delta}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \mathrm{M}(u,v)u^{-2-\alpha+\gamma}v^{-2-\beta+\delta}dudv.
\end{aligned}$$

Put $u = \frac{\pi}{s}$ and $v = \frac{\pi}{t}$. Then $\frac{du}{ds} = -\pi s^{-2}$, $\frac{dv}{dt} = -\pi t^{-2}$, $u \to \frac{\pi}{m+1} \Leftrightarrow s \to m+1$, $u \to \pi \Leftrightarrow s \to 1$, $v \to \frac{\pi}{n+1} \Leftrightarrow t \to n+1$, and $v \to \pi \Leftrightarrow t \to 1$. Therefore

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)\pi^{2+\alpha+\beta-\gamma-\delta}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\times \\
& \times\int_{m+1}^{1}\int_{n+1}^{1}\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{s},\frac{\pi}{t}\right)\left(\frac{\pi}{s}\right)^{-2-\alpha+\gamma}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{-2-\beta+\delta}\pi^2 s^{-2}t^{-2}dsdt = \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\int_{1}^{m+1}\int_{1}^{n+1}\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{s},\frac{\pi}{t}\right)s^{\alpha-\gamma}t^{\beta-\delta}dsdt = \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{j}^{j+1}\int_{k}^{k+1}\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{s},\frac{\pi}{t}\right)s^{\alpha-\gamma}t^{\beta-\delta}dsdt = \\
& \leqslant \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)j^{\alpha-\gamma}k^{\beta-\delta}\int_{j}^{j+1}\int_{k}^{k+1}dsdt = \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)j^{\alpha-\gamma}k^{\beta-\delta}. \qquad (53)
\end{aligned}$$

Now, we estimate B. Proceeding as above, we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} & = \frac{1}{(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{M}_{j,n}\left(\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha-\gamma}}-\frac{1}{(j+2)^{1+\alpha-\gamma}}\right) \\
& = \frac{1}{(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{M}_{j,n}\left(\int_{j+1}^{j+2}d\left(-u^{-1-\alpha+\gamma}\right)\right) \\
& = \frac{1}{(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\mathrm{M}_{j,n-1}+\mathrm{M}'_j\right)\left(\int_{j+1}^{j+2}(1+\alpha-\gamma)u^{-2-\alpha+\gamma}du\right) \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)\pi^{1+\alpha-\gamma}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\mathrm{M}_{j,n-1}+\mathrm{M}'_j\right)\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}}u^{-2-\alpha+\gamma}du. \qquad (54)
\end{aligned}$$

Note that if $u\in\left[\frac{(j+1)\pi}{m+1},\frac{(j+2)\pi}{m+1}\right)$ and $v=\frac{n\pi}{n+1}$, then as $\left[\frac{(n+1)v}{\pi}\right]=\left[\frac{n+1}{\pi}\cdot\frac{n\pi}{n+1}\right]=n$, by (48), we have $\mathrm{M}\left(u,\frac{n\pi}{n+1}\right)=\mathrm{M}_{j,n-1}$. Also, for $u\in\left[\frac{(j+1)\pi}{m+1},\frac{(j+2)\pi}{m+1}\right)$, $\left[\frac{(m+1)u}{\pi}\right]-1=j$, so that $\mathrm{M}'(u)=\mathrm{M}'_j$. So from (54), we get

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} & = \frac{(1+\alpha-\gamma)\pi^{1+\alpha-\gamma}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\frac{(j+1)\pi}{m+1}}^{\frac{(j+2)\pi}{m+1}}\left(\mathrm{M}\left(u,\frac{n\pi}{n+1}\right)+\mathrm{M}'(u)\right)u^{-2-\alpha+\gamma}du \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)\pi^{1+\alpha-\gamma}}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi}\left(\mathrm{M}\left(u,\frac{n\pi}{n+1}\right)+\mathrm{M}'(u)\right)u^{-2-\alpha+\gamma}du \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\int_{1}^{m+1}\left(\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{s},\frac{n\pi}{n+1}\right)+\mathrm{M}'\left(\frac{\pi}{s}\right)\right)s^{\alpha-\gamma}ds \\
& = \frac{(1+\alpha-\gamma)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=1}^{m}\int_{j}^{j+1}\left(\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{s},\frac{n\pi}{n+1}\right)+\mathrm{M}'\left(\frac{\pi}{s}\right)\right)s^{\alpha-\gamma}ds \\
& \leqslant \frac{(1+\alpha-\gamma)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}}\sum_{j=1}^{m}\left(\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{j},\frac{n\pi}{n+1}\right)+\mathrm{M}'\left(\frac{\pi}{j}\right)\right)j^{\alpha-\gamma}, \qquad (55)
\end{aligned}$$

and similarly, we can prove

$$C \leqslant \frac{(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{M}\left(\frac{m\pi}{m+1}, \frac{\pi}{k}\right) + \mathrm{M}''\left(\frac{\pi}{k}\right) \right) k^{\beta-\delta}. \tag{56}$$

In view of (44)–(47), we have

$$\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) = \mathrm{M}_{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1, \left[\frac{n+1}{k}\right]-1} \leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \theta_{\left[\frac{m+1}{j}\right], m}, \theta_{\left[\frac{n+1}{k}\right], n}\right) \leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) \tag{57}$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\left(\frac{\pi}{j}, \frac{n\pi}{n+1}\right) + \mathrm{M}'\left(\frac{\pi}{j}\right) &= \mathrm{M}_{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1, n-1} + \mathrm{M}'_{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^{\gamma}(l+1)^{\delta}} \mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{i,m}, I_{l,n}\right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1} \frac{1}{(i+1)^{\gamma}(n+1)^{\delta}} \mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{i,m}, I_{n,n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^{\gamma}(l+1)^{\delta}} \mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{i,m} I_{l,n}\right) \\ &= \mathrm{M}_{\left[\frac{m+1}{j}\right]-1, n} \\ &\leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi\right). \end{aligned} \tag{58}$$

In a similar way, we can prove the inequalities

$$\mathrm{M}\left(\frac{m\pi}{m+1}, \frac{\pi}{k}\right) + \mathrm{M}''\left(\frac{\pi}{k}\right) \leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \frac{\pi}{k}\right) \tag{59}$$

and

$$\mathrm{M}_{m,n} \leqslant V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \pi\right). \tag{60}$$

Using (57) into (53), (58) into (55), (59) into (56), and then the results and (60) into (49), we get

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}} \mathrm{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}\right) \\ &\leqslant \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} j^{\alpha-\gamma} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) \\ &\quad + \frac{(1+\alpha-\gamma)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{j=1}^{m} j^{\alpha-\gamma} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi\right) \\ &\quad + \frac{(1+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \frac{\pi}{k}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \pi\right). \end{aligned} \tag{61}$$

Note that

$$\sum_{j=1}^{m} j^{\alpha-\gamma} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{\alpha-\gamma} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \frac{\pi}{k}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{\alpha-\gamma} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right),$$

and

$$V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \pi, \pi\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{\alpha-\gamma} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right).$$

Therefore, from (61) we get

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_2\left(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}\right)\\ &\leqslant \frac{(2+\alpha-\gamma)(2+\beta-\delta)}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{\alpha-\gamma} k^{\beta-\delta} V_{\gamma\delta}\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right). \qquad (62)\end{aligned}$$

Second, in view of the second inequality of (8) of Theorem 3, we get the inequalities

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} \operatorname{osc}_1\left(\phi_{xy}(\cdot,0), I_{j,m}\right) \leqslant \frac{2+\alpha-\gamma}{(m+1)^{1+\alpha-\gamma}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{\gamma-\alpha}} V_{\gamma}\left(\phi_{xy}(\cdot,0), \frac{\pi}{j}\right) \qquad (63)$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{1+\beta}} \operatorname{osc}_1\left(\phi_{xy}(0,\cdot), I_{k,n}\right) \leqslant \frac{2+\beta-\delta}{(n+1)^{1+\beta-\delta}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\delta-\beta}} V_{\delta}\left(\phi_{xy}(0,\cdot), \frac{\pi}{k}\right). \qquad (64)$$

Using (62)–(64) in the Inequality (18) of Theorem 10 we get (19). This completes the proof of Theorem 11. ■

Proof of Corollary 2. For any δ_1 and δ_2 greater than zero, existence of positive integers m and n satisfying $\frac{1}{m+2} \leqslant \frac{\delta_1}{2\pi} < \frac{1}{m+1}$ and $\frac{1}{n+2} \leqslant \frac{\delta_2}{2\pi} < \frac{1}{n+1}$ respectively, implies that

$$\operatorname{osc}_2(\phi_{xy}, I_{j,m}, I_{k,n}) \leqslant 4\omega(f, \delta_1, \delta_2),$$

$$\operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(\cdot,0), I_{j,m}) \leqslant 2\omega_x(f, \delta_1), \text{ and } \operatorname{osc}_1(\phi_{xy}(0,\cdot), I_{k,n}) \leqslant 2\omega_y(f, \delta_2).$$

Also, for $\alpha \in (-1, 0)$, we have

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} \int_{j}^{j+1} dt \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{m} \int_{j}^{j+1} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt = 1 + \int_{1}^{m+1} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt\\ &= 1 - \frac{1}{\alpha(m+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} = O\left(\frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right) = O(\delta_1^{\alpha}).\end{aligned}$$

Similarly for $\beta \in (-1, 0)$, we have

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{1+\beta}} = O(\delta_2^{\beta}).$$

Now, using the inequality of Theorem 10, we have

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| \leqslant & 4C_\alpha C_\beta \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}}\omega(f,\delta_1,\delta_2)\\ & + 2C_\alpha\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}}\omega_x(f,\delta_1)+2C_\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{1+\beta}}\omega_y(f,\delta_2) \qquad (65)\\ = & O(\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta})\omega(f,\delta_1,\delta_2)+O(\delta_1^{\alpha})\omega_x(f,\delta_1)+O(\delta_2^{\beta})\omega_y(f,\delta_2). \qquad (66)\end{aligned}$$

Now, if f satisfies conditions in (i), then from (66)

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| &= O(\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta})o(\delta_1^{-\alpha}\delta_2^{-\beta})+O(\delta_1^{\alpha})o(\delta_1^{-\alpha})+O(\delta_2^{\beta})o(\delta_2^{-\beta})\\ &= o(1), \ \text{ as } \ \delta_1,\delta_2\to 0.\end{aligned}$$

For the proof of (ii) and (iii), first we have

$$\begin{aligned}\omega(f,\delta_1,\delta_2) &= \sup_{|u-u'|\leqslant\delta_1,\ |v-v'|\leqslant\delta_2}|f(u,v)-f(u',v)-f(u,v')+f(u',v')|\\ &\leqslant \sup_{|u-u'|\leqslant\delta_1,\ v\in\mathbb{T}}|f(u,v)-f(u',v)|+\sup_{|u-u'|\leqslant\delta_1,\ v'\in\mathbb{T}}|f(u,v')-f(u',v')|\\ &= 2\omega_x(f,\delta_1),\end{aligned}$$

similarly, we have $\omega(f,\delta_1,\delta_2)\leqslant 2\omega_y(f,\delta_2)$, and

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2)=\sqrt{\omega(f,\delta_1,\delta_2)}\sqrt{\omega(f,\delta_1,\delta_2)}\leqslant 2\sqrt{\omega_x(f,\delta_1)}\sqrt{\omega_y(f,\delta_2)}.$$

Now, if f satisfies conditions in (ii), then by (65), we have

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| \leqslant & 8C_\alpha C_\beta \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}(k+1)^{1+\beta}}\sqrt{\omega_x(f,\delta_1)}\sqrt{\omega_y(f,\delta_2)}\\ & + 2C_\alpha\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}}\omega_x(f,\delta_1)+2C_\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{1+\beta}}\omega_y(f,\delta_2) \qquad (67)\\ = & O(\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta})O(\delta_1^{-\alpha+\epsilon/2}\delta_2^{-\beta+\epsilon/2})+O(\delta_1^{\alpha})O(\delta_1^{-2\alpha+\epsilon})+O(\delta_2^{\beta})\delta_2^{-2\beta+\epsilon}\\ = & O(\delta_1^{\epsilon/2}\delta_2^{\epsilon/2})+O(\delta_1^{-\alpha+\epsilon})+O(\delta_2^{-\beta+\epsilon})=o(1), \ \text{ as } \ \delta_1,\delta_2\to 0.\end{aligned}$$

Similarly, if f satisfies conditions in (iii), then by (67), we have

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(f,x,y)-s(f,x,y)\right| =& O(\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta})o(\delta_1^{-\alpha}\delta_2^{-\beta})+O(\delta_1^{\alpha})o(\delta_1^{-2\alpha})+O(\delta_2^{\beta})o(\delta_2^{-2\beta})\\ =& o(1)+o(\delta_1^{-\alpha})+o\left(\delta_2^{-\beta}\right)=o(1), \ \text{ as } \ \delta_1,\delta_2\to 0.\end{aligned}$$

Finally, we will prove (iv) by contradiction. Suppose for any continuous function f on $\mathbb{T}^2$ satisfying (21), its Fourier series is (C,α,β) summable in restricted sense. Then it is $(C,0,0)$-summable in the Pringsheim sense. Now, we will show that (21) implies (15) (for the case $m=2$). First, we have

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^{-\alpha}}{(\log\left(\frac{1}{\delta}\right))^{-1}}=0 \ \ (\alpha>-1).$$

Therefore for any fixed $\epsilon > 0$, there is $\delta_0 > 0$ such that for any $0 < \delta_1, \delta_2 \leqslant \delta_0$, we have

$$\delta_1^{-\alpha} \leqslant \epsilon \left(\log\left(\frac{1}{\delta_1}\right)\right)^{-1} \text{ and } \delta_2^{-\beta} \leqslant \epsilon \left(\log\left(\frac{1}{\delta_2}\right)\right)^{-1}.$$

Therefore, in view of (21), we have

$$\omega_x(f, \delta_1) = O\left(\delta_1^{-\alpha}\right) = O\left(\left(\log\left(\frac{1}{\delta_1}\right)\right)^{-1}\right) \quad (\delta_0 \geqslant \delta_1 \to 0) \tag{68}$$

and

$$\omega_y(f, \delta_2) = O\left(\delta_2^{-\beta}\right) = O\left(\left(\log\left(\frac{1}{\delta_2}\right)\right)^{-1}\right) \quad (\delta_0 \geqslant \delta_2 \to 0). \tag{69}$$

That means, for any function $f \in C(\mathbb{T}^2)$ satisfying the conditions (68) and (69), its Fourier series converges in the Pringsheim sense. Which contradicts the theorem of D'yachenko [9, Theorem 1.2.4]. This completes the proof. ■

Funding

The first author would like to thank Council of Scientific and Industrial Research (CSIR) for financial support through JRF (File No. 09/114(0233)/2019-EMR-I).

Data availability

Not applicable.

Declarations

Ethical conduct

This article is original, it has not been previously published, and it has not been simultaneously submitted for evaluation to another journal.

Informed consent

The research does not involve human participants and/or animals.

Conflict of interest

On behalf of all authors, the corresponding author states that there is no conflict of interest.

Acknowledgements

The authors are thankful to the referee for his/her valuable suggestions for the present form of the paper.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов А. Н. Расхождение всюду ряда Фурье непрерывных функций нескольких переменных // *Математический сборник*, **188** (8), 1997, С. 1153–1170.

2. Бахвалов А. Н. λ-расходимость ряда Фурье непрерывных функций нескольких переменных // *Математика. Примечания*, **72** (4), 2002, С. 454–465.

3. Бахвалов А. Н. Суммирование рядов Фурье функций из многомерных классов Уотермана методами Чезаро // *Докл. Акад. Науки*, **437** (6), 2011, С. 731–733. Английский перевод. в *Докл. Математика*, **83** (2), С. 247–249.

4. Боянич Р. Оценка скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации // *Опубл. Инст. Математика. (београд)*,**26** (40), 1979, С. 57–60.

5. Боянич Р., Уотерман, Д. О скорости сходимости рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации // *Акад. Наука Умжет. Босне Герцегов. Рад. Оджель. Природа. Мат. Наука*, **22**, 1983, С. 5–11.

6. Боянич Р., Мажар С. М. Оценка скорости сходимости средних Чезаро рядов Фурье функций ограниченной вариации // *Математический анализ и его приложения (Кувейт, 1985)*, 1988, С. 17–22, *KFAS Proc. Ser., 3, Пергам, Оксфорд.*

7. Бера Р. К., Годадра Б. Л. О скорости сходимости двойных рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации // *Acta Sci. Math. (Сегед)*, **88**, 2022, С. 723–737.

8. Бахдух М., Никишин Е. М. Сходимость двойного ряда Фурье непрерывных функций // *Сибирск. Мат. ж.*, **14**, 1973, С. 1189–1199; Английский перевод. в Сибирской математике. J., **14** (6), 832–839.

9. Дьяченко М. И. Некоторые проблемы теории множественных тригонометрических рядов // *Успехи мат. Науки.*, **47** (5), 1992, С. 97–162. Английский перевод. по русской математике. Опросы **47**.

10. Харди, Г. Х. О двойных рядах Фурье // *Quart. J. Math.*, **35**, 1906, С. 53–79.

11. Джордан, С. Серия Фурье // *Париж. Акад. Науки*, **92**, 1881, С. 228–230.

12. Лимайе, Б. В., Горпаде, С. Р. Курс многомерного исчисления и анализа // Спрингер, Нью-Йорк, Дордрехт, Гейдельберг, Лондон, 2010.

13. Мажар, С. М. О скорости сходимости средних Чезаро рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации // *Китайский Дж. Математика.*, **13** (3), 1985, С. 195–202.

14. Мóрич, Ф. Количественная версия теста Дирихле-Жордана для двойных рядов Фурье // *Журнал Теор. Приближ.*, **71**, 1992, С. 344–358.

15. Мóрич, Ф. Аппроксимация прямоугольными частичными суммами двойных сопряженных рядов Фурье // *урнал Теор. Приближ.*, **103**, 2000, С. 130–150.

16. Перлман, С. Функции обобщенной вариации // *Польская академия наук. Инст. Математика.*, **105** (3), 1979, С. 199–211.

17. Зигмунд, А. Тригонометрический ряд I // Кембриджский университет, 1959.

18. Жижиашвили Л. В. Сходимость и суммируемость рядов Фурье // *Сообщение. Акад. Наука Грузин. SSR*, **29**, 1962, С. 257–261.

19. Жижиашвили Л. В. Сопряженные функции и тригонометрические ряды // *Изд. Тбилиси. Университет, Тбилиси.*, 1969.

20. Жижиашвили Л. В. О некоторых задачах теории простых и кратных тригонометрических рядов // *Русская математика. Опросы*, **28** (2), 1973, С. 65–119.

REFERENCES

1. Bakhvalov, A. N. 1997, “Divergence everywhere of the Fourier series of continuous functions of several variables”, *Sb. Math.*, **188** (8), 1153–1170.

2. Bakhvalov, A. N. 2002, “λ-divergence of the Fourier series of continuous functions of several variables”, *Math. Notes*, **72** (4), 454–465.

3. Bakhvalov, A. N. 2011, “Summation of Fourier series of functions from multidimensional Waterman classes by Cesàro methods”, *Dokl. Akad. Nauk*, **437** (6), 731–733. English transl. in *Dokl. Math.*, **83** (2), 247–249.

4. Bojanić, R. 1979, “An estimate of the rate of convergence of Fourier series of functions of bounded variation”, *Publ. Inst. Math. (beograd)*, **26** (40), 57–60.

5. Bojanić, R. & Waterman, D. 1983, “On the rate of convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation”, *Akad. Nauka Umjet. Bosne Hercegov. Rad. Odjelj. Prirod. Mat. Nauka*, **22**, 5–11.

6. Bojanić, R. & Mazhar, S. M. 1988, “An estimate of the rate of convergence of Cesàro means of Fourier series of functions of bounded variation”, *Mathematical analysis and its applications (Kuwait, 1985)*, 17–22, *KFAS Proc. Ser., 3, Pergamon, Oxford.*

7. Bera, R. K. & Ghodadra, B. L. 2022, “On the rate of convergence of double Fourier series of functions of generalized bounded variation”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **88**, 723–737.

8. Bahduh, M. & Nikishin E. M. 1973, “The convergence of the double Fourier series of continuous functions’, *Sibirsk. Mat. Zh.*, **14**, 1189–1199; English transl. in Siberian Math. J., **14** (6), 832-839.

9. D’yachenko, M. I. 1992, “Some problems in the theory of multiple trigonometric series”, *Uspekhi Mat. Nauk.*, **47** (5), 97–162. English transl. in Russian Math. Surveys, **47**.

10. Hardy, G. H. 1906, “On double Fourier series”, *Quart. J. Math.*, **35**, 53–79.

11. Jordan, C. 1881, “Sur la series de Fourier”, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **92**, 228–230.

12. Limaye, B. V. & Ghorpade, S. R. 2010, “A course in multivariable calculus and analysis”, Springer, New York, Dordrecht Heidelberg, London.

13. Mazhar, S. M. 1985, “On the rate of convergence of Cesàro means of Fourier series of functions of generalized bounded variation”, *Chinese J. Math.*, **13** (3), 195–202.

14. Móricz, F. 1992, “A quatitiative version of the Dirichlet-Jordan test for double Fourier series”, *Journal of Approx. Theory*, **71**, 344–358.

15. Móricz, F. 2000, “Approximation by rectangular partial sums of double conjugate Fourier series”, *Journal of Approx. Theory*, **103**, 130–150.

16. Perlman, S. 1979, “Functions of generalized variation”, *Polish Acad. Sci. Inst. Math.*, **105** (3), 199–211.

17. Zygmund, A. 1959, “Trigonometric series I”, Cambridgee Univ. Press.

18. Zhizhiashvili, L. V. 1962, “Convergence and summability of Fourier series”, *Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR*, **29**, 257–261.

19. Zhizhiashvili, L. V. 1969, “Conjugate functions and trigonometric series”, Izdat. Tbilis. Univ., Tbilisi. (In Russian)

20. Zhizhiashvili, L. V. 1973, “On some problems of the theory of simple and multiple trigonometric series”, *Russian Math. Surveys*, **28** (2), 65–119.

Получено: 28.01.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 3 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-63-80

Задача о нахождении функции по ее шаровым средним

Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков

Волчкова Наталья Петровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Донецкий национальный технический университет (г. Донецк).
e-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com
Волчков Виталий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, Донецкий государственный университет (г. Донецк).
e-mail: v.volchkov@donnu.ru

Аннотация

Классическим свойством непостоянной $2r$-периодической функции на вещественной оси является отсутствие у нее периода, несоизмеримого с r. Одним из многомерных аналогов этого утверждения является следующая хорошо известная теорема Л. Зальцмана о двух радиусах: для существования ненулевой локально суммируемой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиусов r_1 и r_2 в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $r_1/r_2 \in E_n$, где E_n — множество всевозможных отношений положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$. Условие $r_1/r_2 \notin E_n$ эквивалентно равенству $\mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\chi}_{r_1}\big)\cap\mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\chi}_{r_2}\big) = \varnothing$, где χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\widetilde{\chi}_r$ — сферическое преобразование (преобразование Фурье-Бесселя) индикатора χ_r, $\mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$ — множество всех положительных нулей четной целой функции $\widetilde{\chi}_r$. В терминах сверток теорема о двух радиусах означает, что оператор

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

инъективен тогда и только тогда, когда $r_1/r_2 \notin E_n$. В данной работе найдена новая формула обращения оператора $\mathcal{P}$ при условии $r_1/r_2 \notin E_n$. Полученный результат существенно упрощает известные ранее процедуры восстановления функции f по заданным шаровым средним $f*\chi_{r_1}$ и $f*\chi_{r_2}$. В доказательствах используются методы гармонического анализа, а также теории целых и специальных функций.

Ключевые слова: периодические в среднем функции, радиальные распределения, теорема о двух радиусах, формулы обращения

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:
Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков. Задача о нахождении функции по ее шаровым средним // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 63–80.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 3 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-63-80

The problem of finding a function by its ball means values

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov

Volchkova Natalia Petrovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Donetsk National Technical University (Donetsk).
e-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com
Volchkov Vitaliy Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Donetsk State University (Donetsk).
e-mail: v.volchkov@donnu.ru

Abstract

A classical property of a non-constant $2r$-periodic function on the real axis is that it has no period incommensurable with r. One of the multidimensional analogues of this statement is the following well-known theorem of L. Zalcman on two radii: for the existence of a nonzero locally summable function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ with nonzero integrals over all balls of radii r_1 and r_2 in $\mathbb{R}^n$ it is necessary and sufficient that $r_1/r_2 \in E_n$, where E_n is the set of all possible ratios of positive zeros of the Bessel function $J_{n/2}$. The condition $r_1/r_2 \notin E_n$is equivalent to the equality $\mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\chi}_{r_1}\big) \cap \mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\chi}_{r_2}\big) = \varnothing$, where χ_r is the indicator of the ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\widetilde{\chi}_r$ is the spherical transform (Fourier-Bessel transform) of the indicator χ_r, $\mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$ is the set of all positive zeros of even entire function $\widetilde{\chi}_r$. In terms of convolutions, L. Zalcman's theorem means that the operator

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

is injective if and only if $r_1/r_2 \notin E_n$. In this paper, a new formula for the inversion of the operator $\mathcal{P}$ is found under the condition $r_1/r_2 \notin E_n$. The result obtained significantly simplifies the previously known procedures for recovering a function f from given ball means values $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$. The proofs use the methods of harmonic analysis, as well as the theory of entire and special functions.

Keywords: mean periodic functions, radial distributions, two-radii theorem, inversion formulas

Bibliography: 37 titles.

For citation:
N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov, 2023, “The problem of finding a function by its ball means values”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 63–80.

1. Введение

Задача о существовании ненулевой функции $f \in C(\mathbb{R}^2)$ с нулевыми интегралами по всем кругам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^2$ восходит к Д. Помпейю [1]. В этой работе он анонсировал следующее, но как позже выяснилось, неверное утверждение: если $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и

$$\iint\limits_K f(x,y)dxdy = \mathrm{const}$$

для любого круга $K \subset \mathbb{R}^2$ фиксированного радиуса r, то f является постоянной. Ошибочное доказательство сформулированного утверждения было опубликовано в работе [2].

Первые примеры ненулевых функций с нулевыми интегралами по всем кругам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^2$ были найдены Л. Чакаловым [3]. Он заметил, что

$$\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq 1} \sin(\lambda x)dxdy = 2\pi\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}J_1(\lambda) = 2\pi\sin(\lambda a)\mathbf{I}_1(\lambda),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}.$$

В частности, если $\mathbf{I}_1(\lambda) = 0$, то функция $f(x,y) = \sin\lambda x$ имеет нулевые интегралы по всем кругам единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$. Аналогичные примеры, связанные с нулями функции $\mathbf{I}_{n/2}$, можно построить и для шаровых средних в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$. Отсюда видно, что знание средних функции f по всем шарам одного радиуса недостаточно для однозначного восстановления f. В дальнейшем изучением класса функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^n$, занимались многие авторы (см. [4]–[9] и библиографию к этим работам). Хорошо известным результатом в этом направлении является следующий аналог знаменитой теоремы Ж. Дельсарта [10] о двух радиусах для гармонических функций.

Теорема 1 ([11], [12]). *Пусть r_1, $r_2 \in (0,+\infty)$, $\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — последовательность всех положительных нулей функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания, E_n — множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда:*

1) если $r_1/r_2 \notin E_n$, $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{|x-y|\leq r_1} f(x)dx = \int_{|x-y|\leq r_2} f(x)dx = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

то f — нулевая функция;

2) если $r_1/r_2 \in E_n$, то существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая соотношениям (1).

В терминах сверток (см. формулу (6) ниже) теорема 1 означает, что оператор

$$\mathcal{P}f = (f * \chi_{r_1}, f * \chi_{r_2}), \quad f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

инъективен тогда и только тогда, когда $r_1/r_2 \notin E_n$ (здесь и далее, χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$). В связи с этим возникает проблема о нахождении явной формулы обращения оператора $\mathcal{P}$ при условии $r_1/r_2 \notin E_n$.

Следующий результат К.А. Беренстейна, А. Ижера и Б.А. Тейлора [14], [15] дает частичное решение этой проблемы.

Теорема 2 ([14], [15]). *Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства распределений и распределений с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$ соответственно. Предположим, что число r_1/r_2 плохо приближается элементами E_n, т.е. существуют положительные константы c_1 и c_2, такие что*

$$\left|\frac{r_1}{r_2} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{c_1}{(1+\beta)^{c_2}}$$

для всех положительных нулей α и β функции $J_{n/2}$. Тогда можно построить явно распределения $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с носителями $\operatorname{supp}\nu_1 \subset \overline{B}_{r_2}$, $\operatorname{supp}\nu_2 \subset \overline{B}_{r_1}$, такие что

$$f = \nu_1 * (f * \chi_{r_1}) + \nu_2 * (f * \chi_{r_2})$$

для любого распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что дополнение A_n к множеству положительных чисел, плохо приближаемых элементами E_n, имеет нулевую лебегову меру и его пересечение с любым интервалом $(a,b)\subset(0,+\infty)$ является множеством мощности континуум [16, лемма 14]. Условие $r_1/r_2\notin A_n$ в теореме 2 нельзя опустить в силу известных фактов о разрешимости аналитического уравнения Безу (см. [15], [17]). Позже К.А. Беренстейн, Р. Гей и А. Ижер [18] получили следующий локальный результат для случая $r_1/r_2\notin E_n$.

Теорема 3 ([18]). *Пусть $r_1/r_2\notin E_n$, $R>r_1+r_2$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R/(r_1+r_2)-1$, $R_k=(r_1+r_2)(1+\varepsilon_k)$, $R_0=0$. Тогда для любого $r>0$, $r\in[R_{k-1},R_k)$, и любой сферической гармоники Y степени m на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ можно построить явно две последовательности распределений $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_l$ порядка не выше $n+3$ с компактными носителями в B_{R-r_1} и B_{R-r_2} соответственно, такие что для $l\geqslant cm^2$ и любой функции $f\in C^{\infty}(B_R)$ имеет место оценка*

$$\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\sigma)Y(\sigma)d\sigma-\langle\mathfrak{A}_l,f*\chi_{r_1}\rangle-\langle\mathfrak{B}_l,f*\chi_{r_2}\rangle\right|\leq$$

$$\leqslant\frac{\gamma}{l}(R-r)^{-N}r^{-(n-3)/2}\max_{\substack{|\alpha|\leqslant N\\ |x|\leq R'_k}}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}f(x)\right|, \tag{3}$$

где $N=[(n+13)/2]+1$, $R'_k=(2R+R_k)/3$, γ и c — положительные константы, зависящие от r_1, r_2, R, n, ε_1.

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Распределения $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_l$ имеют весьма сложный вид и строятся как обратные преобразования Фурье-Бесселя к некоторым линейным комбинациям произведений рациональных и бесселевых функций (см. доказательство предложения 8 и теоремы 9 в [18]). Далее, всякая функция $f\in C^{\infty}(B_R)$ представима в виде сходящегося в пространстве $C^{\infty}(B_R)$ ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m}f_{m,j}(r)Y_j^{(m)}(\sigma),\quad x=r\sigma,\quad \sigma\in\mathbb{S}^{n-1}, \tag{4}$$

где $\{Y_j^{(m)}\}_{j=1}^{d_m}$ — фиксированный ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник степени m на $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$f_{m,j}(r)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(r\sigma)\overline{Y_j^{(m)}(\sigma)}d\sigma$$

(см., например, [19, гл. 1, § 2, предложение 2.7], [20, § 1]). Поэтому оценка (3) при $l\to\infty$ и разложение (4) влекут восстановление функции $f\in C^{\infty}(B_R)$ по ее шаровым средним $f*\chi_{r_1}$ и $f*\chi_{r_2}$ в шаре B_R. Переход к классу $L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ можно осуществить с помощью сглаживания f свертками вида $f*\varphi_{\varepsilon}$, где φ_{ε} — "шапочка" в $\mathbb{R}^n$ (см. [18, п. 3]). С учетом сделанных замечаний, теорему 3 при $R=\infty$ можно рассматривать как решение сформулированной выше проблемы. Однако, приведенная конструкция является весьма громоздкой и трудна для восприятия. Поэтому представляет интерес нахождение более простых формул обращения для оператора (2). Целью данной работы является решение этой задачи.

2. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением

$$(\zeta,\varsigma)=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\,\overline{\varsigma}_j,\quad \zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n),\quad \varsigma=(\varsigma_1,\dots,\varsigma_n).$$

Преобразованием Фурье-Лапласа распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является целая функция

$$\widehat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(\zeta,x)} \rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

При этом $\widehat{T}$ растет на $\mathbb{R}^n$ не быстрее полинома и

$$\langle \widehat{T}, \psi \rangle = \langle T, \widehat{\psi} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{5}$$

где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [21, гл. 7]).

Если $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то их свертка $T_1 * T_2$ является распределением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующим по правилу

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

где $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$. Для $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула Бореля

$$\widehat{T_1 * T_2} = \widehat{T_1}\,\widehat{T_2}. \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (инвариантных относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$) распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Простейшим примером распределения из класса $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ является дельта-функция Дирака δ с носителем в нуле. Сферическое преобразование распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(z) = \langle T, \varphi_z \rangle, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

где φ_z — сферическая функция в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\varphi_z(x) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(см. [22, гл. 4]). Функция φ_z однозначно определяется следующими условиями:

1) φ_z радиальная и $\varphi_z(0) = 1$;

2) φ_z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta(\varphi_z) + z^2\varphi_z = 0. \tag{9}$$

Отметим, что $\widetilde{T}$ — четная целая функция экспоненциального типа и преобразование Фурье $\widehat{T}$ выражается через $\widetilde{T}$ по формуле

$$\widehat{T}(\zeta) = \widetilde{T}\big(\sqrt{\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2}\big), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{10}$$

Множество всех нулей функции $\widetilde{T}$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси, обозначим $\mathcal{Z}_+(\widetilde{T})$.

Для $T = \chi_r$ имеем (см. [9, часть 2, гл. 3, формула (3.90)])

$$\widetilde{\chi}_r(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz). \tag{11}$$

Отсюда и из формулы

$$\mathbf{I}'_\nu(z) = -z\mathbf{I}_{\nu+1}(z) \tag{12}$$

(см. [23, гл. 7, п. 7.2.8, формула (51)]) находим

$$\widetilde{\chi}'_r(z) = -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2} z \mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(rz). \tag{13}$$

Используя хорошо известные свойства нулей функций Бесселя (см., например, [23, гл. 7, п. 7.9]), можно получить соответствующую информацию о множестве $\mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$. В частности, все нули $\widetilde{\chi}_r$ являются простыми, принадлежат $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

$$\mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r) = \left\{\frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots\right\}. \tag{14}$$

Кроме того, поскольку функции $J_{\frac{n}{2}-1}$ и $J_{\frac{n}{2}}$ не имеют общих нулей на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то корректно определена функция

$$\chi_r^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} - 1\right)\chi_r(x), \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r).$$

Пусть

$$p_r(z) = \prod_{j=1}^{m}\left(z - \left(\frac{\lambda_j}{r}\right)^2\right), \quad m = \left[\frac{n+7}{4}\right], \tag{15}$$

$$\xi_r = p_r(\Delta)\chi_r. \tag{16}$$

Тогда в силу формулы

$$\widetilde{p(\Delta)T}(z) = p(-z^2)\widetilde{T}(z) \quad (p - \text{алгебраический многочлен}), \tag{17}$$

имеем

$$\widetilde{\xi}_r(z) = p_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z), \tag{18}$$

$$\mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\xi}_r\big) = \left\{\frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{i\lambda_1}{r}, \frac{i\lambda_2}{r}, \dots, \frac{i\lambda_m}{r}\right\}, \tag{19}$$

причем все нули $\widetilde{\xi}_r$ являются простыми. Кроме того,

$$\mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\xi}_{r_1}\big) \cap \mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\xi}_{r_2}\big) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} \notin E_n. \tag{20}$$

Для $\lambda \in \mathcal{Z}_+\big(\widetilde{\xi}_r\big)$ положим

$$\xi_r^\lambda = p_r(\Delta)\chi_r^\lambda, \tag{21}$$

если $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$, и

$$\xi_r^\lambda = q_{r,\lambda}(\Delta)\chi_r, \tag{22}$$

если $p_r(-\lambda^2) = 0$, где

$$q_{r,\lambda}(z) = -\frac{p_r(z)}{z+\lambda^2}. \tag{23}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 4. *Пусть* $\frac{r_1}{r_2} \notin E_n$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. *Тогда*

$$f = \sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2-\mu^2)\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)}\Big(p_{r_2}(\Delta)\big((f*\chi_{r_2})*\xi_{r_1}^\lambda\big) - $$

$$-p_{r_1}(\Delta)\big((f*\chi_{r_1})*\xi_{r_2}^\mu\big)\Big), \tag{24}$$

где ряд (24) *сходится безусловно в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Равенство (24) восстанавливает распределение f по известным сверткам $f*\chi_{r_1}$ и $f*\chi_{r_2}$ (см. (15), (18), (19), (21)–(23)). Таким образом, теорема 4 дает решение сформулированной выше задачи. Одномерный аналог формулы (24) получен авторами ранее в работе [24]. Относительно других результатов, связанных с обращением оператора сферического среднего, см. [25]–[34].

3. Вспомогательные утверждения

Приведем сначала свойства функций $\mathbf{I}_\nu$, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 1. *1) При $\nu > -1/2$, $z \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство*

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \le \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}. \tag{25}$$

2) Если $\nu \in \mathbb{R}$, то

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}, \quad \mathrm{Im}\, z \to \infty. \tag{26}$$

3) Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех положительных нулей функции $\mathbf{I}_\nu$, занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\lambda_{\nu,j} = \pi\left(j + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty. \tag{27}$$

Кроме того,

$$\lim_{j\to\infty} \left(\lambda_{\nu,j}\right)^{\nu+\frac{3}{2}} |\mathbf{I}_{\nu+1}(\lambda_{\nu,j})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{28}$$

Доказательство. 1) Из интегрального представления Пуассона [23, гл. 7, п. 7.12, формула (8)] имеем

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^1 \cos(uz)(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \le \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^1 e^{u|\mathrm{Im}\, z|}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du \le$$

$$\le \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right) e^{|\mathrm{Im}\, z|} = \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

что и требовалось.

2) Из асимптотического разложения бесселевых функций [23, гл. 7, п. 7.13.1, формула (3)] следует равенство

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\nu-\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{|z|}\right)\right), \quad z \to \infty, \quad -\pi < \arg z < \pi. \tag{29}$$

Учитывая, что

$$|\cos w| \sim \frac{e^{|\mathrm{Im}\, w|}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, w \to \infty,$$

из (29) получаем (26).

3) Асимптотика (27) для нулей $\mathbf{I}_\nu$ хорошо известна (см., например, [8, гл. 7, формула (7.9)]). Тогда

$$\cos\left(\lambda_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi j - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) = O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty.$$

Отсюда следует, что
$$\lim_{j\to\infty}\left|\sin\left(\lambda_{\nu,j}-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|=1.$$
Используя это соотношение и равенство
$$\mathbf{I}_{\nu+1}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{-\nu-\frac{3}{2}}\left(\sin\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,z|}}{|z|}\right)\right),\quad z\to\infty,\quad -\pi<\arg z<\pi$$
(см. (29)), приходим к (28). □

Следствие 1. *Для любого* $r>0$
$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)}\frac{1}{|\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)|}<+\infty. \tag{30}$$

Доказательство. Используя (18) и (13), находим
$$\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)=p_r(-\lambda^2)\widetilde{\chi_r}'(\lambda)-2\lambda p_r'(-\lambda^2)\widetilde{\chi}_r(\lambda)=$$
$$=-(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^{n+2}\lambda p_r(-\lambda^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(r\lambda)-2\lambda p_r'(-\lambda^2)\widetilde{\chi}_r(\lambda).$$
Теперь из (14) и (19) имеем
$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)}\frac{1}{|\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)|}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{|\widetilde{\xi}_r{}'(i\lambda_j/r)|}+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^{n+1}}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j|p_r(-\lambda_j^2/r^2)||\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(\lambda_j)|}.$$
Этот ряд сравним со сходящимся рядом
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2m-\frac{n+1}{2}}}$$
(см. (15), (27) и (28)). Отсюда получаем требуемое утверждение. □

Лемма 2. *Пусть* $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — *четная целая функция и* $g(\lambda)=0$ *для некоторого* $\lambda\in\mathbb{C}$. *Тогда*
$$\left|\frac{\lambda g(z)}{z^2-\lambda^2}\right|\le\max_{|\zeta-z|\le 2}|g(\zeta)|,\quad z\in\mathbb{C}, \tag{31}$$
где при $z=\pm\lambda$ *левая часть в* (31) *доопределена по непрерывности.*

Доказательство. Имеем
$$\left|\frac{2\lambda g(z)}{z^2-\lambda^2}\right|=\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}-\frac{g(z)}{z+\lambda}\right|\le\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right|+\left|\frac{g(z)}{z+\lambda}\right|. \tag{32}$$
Оценим первое слагаемое в правой части (32).

Если $|z-\lambda|>1$, то
$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq |g(z)| \leq \max_{|\zeta-z|\leq 2}|g(\zeta)|. \tag{33}$$

Пусть $|z-\lambda|\leq 1$. Тогда применяя принцип максимума модуля к целой функции $\dfrac{g(\zeta)}{\zeta-\lambda}$, получаем
$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta-\lambda|\leq 1}\left|\frac{g(\zeta)}{\zeta-\lambda}\right| = \max_{|\zeta-\lambda|=1}|g(\zeta)|.$$
Учитывая, что окружность $|\zeta-\lambda|=1$ содержится в круге $|\zeta-z|\leq 2$, приходим к оценке
$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta-z|\leq 2}|g(\zeta)|, \tag{34}$$
которая справедлива для всех $z\in\mathbb{C}$ (см. (33)).

Аналогично,
$$\left|\frac{g(z)}{z+\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta-z|\leq 2}|g(\zeta)|, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{35}$$
поскольку $g(-\lambda)=0$. Из (34), (35) и (32) следует требуемое утверждение. □

Лемма 3. *Функция χ_r^λ удовлетворяет уравнению*
$$\Delta(\chi_r^\lambda)+\lambda^2\chi_r^\lambda=-\chi_r, \quad \lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r). \tag{36}$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем
$$\langle\Delta(\chi_r^\lambda)+\lambda^2\chi_r^\lambda,\varphi\rangle = \langle\chi_r^\lambda,(\Delta+\lambda^2)\varphi\rangle =$$
$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\leq r}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}-1\right)\Delta\varphi(x)dx+$$
$$+\int_{|x|\leq r}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}-1\right)\varphi(x)dx.$$
Применим к первому интегралу формулу Грина
$$\int_G(v\Delta u-u\Delta v)dx=\int_{\partial G}\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)d\sigma$$
(см., например, [35, гл. 5, § 21, п. 2]). Тогда
$$\langle\Delta(\chi_r^\lambda)+\lambda^2\chi_r^\lambda,\varphi\rangle = \frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\leq r}\Delta\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}-1\right)\varphi(x)dx-$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|=r}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}-1\right)d\sigma(x)+$$
$$+\int_{|x|\leq r}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}-1\right)\varphi(x)dx.$$
Отсюда и из (9) получаем
$$\langle\Delta(\chi_r^\lambda)+\lambda^2\chi_r^\lambda,\varphi\rangle = -\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|=r}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\right)d\sigma(x)-\langle\chi_r,\varphi\rangle.$$

Теперь используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big(f(|x|)\big) = f'(|x|), \quad \mathbf{n} = \frac{x}{|x|}$$

и равенство (12), находим

$$\langle \Delta(\chi_r^\lambda) + \lambda^2\chi_r^\lambda, \varphi\rangle = \int_{|x|=r} \varphi(x)\,|x|\,\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\,d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi\rangle =$$

$$= r\,\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int_{|x|=r} \varphi(x) d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi\rangle.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r) = 0$ в силу соотношения (11), поскольку $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$. □

Замечание 3. *Из* (17) *и инъективности сферического преобразования следует, что для распределений* $U, T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ *и* $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{T})$

$$\Delta U + \lambda^2 U = -T \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{U}(z) = \frac{\widetilde{T}(z)}{z^2-\lambda^2}. \tag{37}$$

Поэтому соотношение (36) *влечет равенство*

$$\widetilde{\chi_r^\lambda}(z) = \frac{\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r). \tag{38}$$

Лемма 4. *Пусть* $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)$. *Тогда*

$$\widetilde{\xi_r^\lambda}(z) = \frac{\widetilde{\xi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}. \tag{39}$$

Доказательство. Формула (39) легко следует из (17) и замечания 3. Действительно, если $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$, то в силу (21), (17), (38) и (18) имеем

$$\widetilde{\xi_r^\lambda}(z) = p_r(-z^2)\widetilde{\chi_r^\lambda}(z) = \frac{p_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2} = \frac{\widetilde{\xi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}.$$

Аналогично, если $p_r(-\lambda^2) = 0$, то

$$\widetilde{\xi_r^\lambda}(z) = q_{r,\lambda}(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z) = \frac{p_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2} = \frac{\widetilde{\xi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}$$

(см. (22), (23), (17) и (18)). □

Лемма 5. *Пусть*

$$\eta_r^\lambda = \frac{2\lambda}{\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)}\,\xi_r^\lambda, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r). \tag{40}$$

Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)} \eta_r^\lambda = \delta, \tag{41}$$

где ряд (41) *сходится безусловно в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определим функцию $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\psi(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,y)} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда (см. (5), (10) и (39))

$$\langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle = \langle \eta_r^\lambda, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\eta_r^\lambda}, \psi \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widetilde{\eta_r^\lambda}(|x|) dx = \frac{2}{\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\lambda \widetilde{\xi}_r(|x|)}{|x|^2 - \lambda^2} dx.$$

Используя это представление и лемму 2, получаем

$$\left| \langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle \right| \leq \frac{2}{\left| \widetilde{\xi}_r{}'(\lambda) \right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| \widetilde{\xi}_r(\zeta) \right| dx.$$

Из (18), (11) и (25) имеем

$$\max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| \widetilde{\xi}_r(\zeta) \right| = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| p_r(-\zeta^2) \right| \left| \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\zeta) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| p_r(-\zeta^2) \right| \cdot e^{r|\mathrm{Im}\zeta|} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| p_r(-\zeta^2) \right|.$$

Поэтому

$$\left| \langle \eta_r^\lambda, \varphi \rangle \right| \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left| \widetilde{\xi}_r{}'(\lambda) \right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left| p_r(-\zeta^2) \right| dx. \tag{42}$$

Это неравенство и следствие 1 показывают, что ряд (41) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к некоторому распределению f с носителем в $\overline{B}_r$. По лемме 4 для сферического преобразования этого распределения справедливо равенство

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)} \widetilde{\eta_r^\lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)} \frac{2\lambda}{\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)} \frac{\widetilde{\xi}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}. \tag{43}$$

При этом, если $\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)$, то

$$\widetilde{f}(\mu) = \frac{2\mu}{\widetilde{\xi}_r{}'(\mu)} \lim_{z \to \mu} \frac{\widetilde{\xi}_r(z)}{z^2 - \mu^2} = 1. \tag{44}$$

Далее, поскольку $\widetilde{f}(z) - 1$ и $\widetilde{\xi}_r(z)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа, то в силу (44) и простоты нулей $\widetilde{\xi}_r$ их отношение

$$h(z) = \frac{\widetilde{f}(z) - 1}{\widetilde{\xi}_r(z)}$$

является целой функцией не выше первого порядка (см. [36, гл. 1, § 9, следствие из теоремы 12]). При $\mathrm{Im}\, z = \pm \mathrm{Re}\, z$, $z \neq 0$ она оценивается следующим образом:

$$|h(z)| \leq \frac{|\widetilde{f}(z)|}{|\widetilde{\xi}_r(z)|} + \frac{1}{|\widetilde{\xi}_r(z)|} =$$

$$=\left|\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)}\frac{1}{\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)}\left(\frac{1}{z-\lambda}-\frac{1}{z+\lambda}\right)\right|+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^n|p_r(-z^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|}\leq$$

$$\leq\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)}\frac{1}{|\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)|}\left(\frac{1}{|z-\lambda|}+\frac{1}{|z+\lambda|}\right)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^n|p_r(-z^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|}\leq$$

$$\leq\frac{2\sqrt{2}}{|z|}\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_r)}\frac{1}{|\widetilde{\xi}_r{}'(\lambda)|}+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^n|p_r(-z^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|}.$$

Из этой оценки и соотношений (30), (26) видно, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im}z=\pm\operatorname{Re}z}}h(z)=0. \tag{45}$$

Тогда по принципу Фрагмена-Линделёфа функция h ограничена на $\mathbb{C}$. Теперь из (45) и теоремы Лиувилля следует, что $h=0$. Отсюда $\widetilde{f}=1$, т.е. $f=\delta$. Таким образом, лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Пусть* $\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})$, $\mu\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})$. *Тогда*

$$(\lambda^2-\mu^2)\eta_{r_1}^{\lambda}*\eta_{r_2}^{\mu}=\frac{4\lambda\mu}{\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)}\left(\xi_{r_2}*\xi_{r_1}^{\lambda}-\xi_{r_1}*\xi_{r_2}^{\mu}\right). \tag{46}$$

Доказательство. Из (39), (37) и (40) имеем

$$(\Delta+\lambda^2)\left(\eta_{r_1}^{\lambda}\right)=-\frac{2\lambda}{\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)}\xi_{r_1}, \tag{47}$$

$$(\Delta+\mu^2)\left(\eta_{r_2}^{\mu}\right)=-\frac{2\mu}{\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)}\xi_{r_2}. \tag{48}$$

Из (47), (40) и перестановочности оператора дифференцирования со сверткой получаем

$$(\Delta+\lambda^2)\left(\eta_{r_1}^{\lambda}*\eta_{r_2}^{\mu}\right)=\frac{-4\lambda\mu}{\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)}\,\xi_{r_1}*\xi_{r_2}^{\mu}.$$

Аналогично, из (48) следует, что

$$-(\Delta+\mu^2)\left(\eta_{r_1}^{\lambda}*\eta_{r_2}^{\mu}\right)=\frac{4\lambda\mu}{\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)}\,\xi_{r_2}*\xi_{r_1}^{\lambda}.$$

Складывая два последних равенства, приходим к соотношению (46). □

4. Доказательство теоремы 4

Из леммы 5 получаем

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})}\eta_{r_1}^{\lambda}=\delta,\qquad\sum_{\mu\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})}\eta_{r_2}^{\mu}=\delta. \tag{49}$$

Докажем, что

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})}\sum_{\mu\in\mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})}\eta_{r_1}^{\lambda}*\eta_{r_2}^{\mu}=\delta, \tag{50}$$

где ряд (50) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi = \widehat{\psi}$. Для $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})$, $\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})$ имеем (см. (7) и доказательство оценки (42))

$$\left|\left\langle \eta^\lambda_{r_1} * \eta^\mu_{r_2}, \varphi \right\rangle\right| = \left|\left\langle \eta^\lambda_{r_1} * \eta^\mu_{r_2}, \widehat{\psi} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \widehat{\eta^\lambda_{r_1}}\,\widehat{\eta^\mu_{r_2}}, \psi \right\rangle\right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widetilde{\eta^\lambda_{r_1}}(|x|) \widetilde{\eta^\mu_{r_2}}(|x|) dx \right| =$$

$$= \frac{4}{\left|\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)\right|} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\lambda \widetilde{\xi}_{r_1}(|x|)}{|x|^2 - \lambda^2} \, \frac{\mu \widetilde{\xi}_{r_2}(|x|)}{|x|^2 - \mu^2} dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{4\pi^n (r_1 r_2)^n e^{2(r_1 + r_2)}}{\left|\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)\right| \left(\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)^2} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|p_{r_1}(-\zeta^2)\right| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|p_{r_2}(-\zeta^2)\right| dx.$$

Отсюда и из (30) следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \left|\left\langle \eta^\lambda_{r_1} * \eta^\mu_{r_2}, \varphi \right\rangle\right| \right) < \infty.$$

Значит (см., например, [37, гл. 1, теорема 1.24]), ряд в (50) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. При этом (см. (6), (49))

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \langle \eta^\lambda_{r_1} * \eta^\mu_{r_2}, \varphi \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \left\langle \eta^\mu_{r_2}(y), \langle \eta^\lambda_{r_1}(x), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle \right) =$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \langle \eta^\lambda_{r_1}(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0),$$

что доказывает (50).

Сворачивая обе части (50) с f и учитывая раздельную непрерывность свертывания $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, (46) и (20), находим

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2)\widetilde{\xi}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{\xi}_{r_2}{}'(\mu)} \left(f * (\xi_{r_2} * \xi^\lambda_{r_1}) - f * (\xi_{r_1} * \xi^\mu_{r_2}) \right). \qquad (51)$$

Наконец, используя (51), (16) и коммутативность оператора свертки с оператором дифференцирования, приходим к формуле (24). Таким образом, теорема 4 доказана.

5. Заключение

Доказательство теоремы 4 показывает, что ключевую роль в формуле (24) играет разложение дельта-функции по распределениям η_r^λ, $\lambda \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi_r})$ (см. лемму 5). Эта система распределений является биортогональной к системе сферических функций φ_μ, $\mu \in \mathcal{Z}_+(\widetilde{\xi_r})$, т.е.

$$\langle \eta_r^\lambda, \varphi_\mu \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu \neq \lambda, \\ 1, & \text{если} \quad \mu = \lambda \end{cases}$$

(см. (8), (39) и (40)). С помощью подобных разложений можно получить формулы обращения и для других операторов свертки с радиальными распределениями. В частности, методы данной работы применимы для операторов $f \to (f * \sigma_{r_1}, f * \sigma_{r_2})$ и $f \to (f * \sigma_r, f * \chi_r)$, где σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на сфере радиуса r с центром в нуле из $\mathbb{R}^n$. Отметим наконец, что формула (24) существенно упрощает известные ранее процедуры восстановления функции f по заданным шаровым средним $f * \chi_{r_1}$ и $f * \chi_{r_2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompéiu D. Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale de fonctions de plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. Vol. 188. P. 1138-1139.
2. Pompéiu D. Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). 1929. Vol. 15. P. 265-269, https://zbmath.org/JFM 55.0139.01.
3. Chakalov L. Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. 1944. Vol. 40. P. 1-14.
4. Беренстейн К. А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1989. Т. 54. С. 5-111, https://doi.org/10.1007/978-3-642-58011-6-1.
5. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. 1992. Vol. 365. P. 185-194, https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2-17.
6. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" // Contemp. Math. (Radon Transform and Tomography). 2001. Vol. 278. P. 69-74, https://doi.org/10.1090/conm/278.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9.
8. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer, 2009, https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8.
9. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013, https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1958. Vol. 246. P. 1358–1360, https://zbmath.org/0084.09403.
11. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Anal. Mech. 1972. Vol. 47, N 3. P. 237–254, https://doi.org/10.1007/BF00250628.

12. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. Vol. 72, N 3. P. 403-416, https://doi.org/10.1017/S0305004100047241.

13. Zalcman L. Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. Vol. 87, N 3. P. 161-175, https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994985.

14. Berenstein C. A., Taylor B. A., Yger A. Sur quelques formules explicites de déconvolution // J. Optics (Paris). 1983. Vol. 14, N 2. P.75-82, https://doi.org/10.1088/0150-536X/14/2/003.

15. Berenstein C. A., Yger A. Le problème de la déconvolution // J. Funct. Anal. 1983. Vol. 54, N 2. P. 113-160, https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90051-4.

16. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сборник. 1995. Т. 186, N 6. С. 15-34, http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.

17. Berenstein C. A., Yger A. Analytic Bezout identities // Adv. Appl. Math. 1989. Vol. 10, N 1. P. 51–74, https://doi.org/10.1016/0196-8858(89)90003-1.

18. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. 1990. Vol. 54, N 1. P. 259-287, https://doi.org/10.1007/bf02796152.

19. Helgason S. Geometric Analysis on Symmetric spaces. Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2008, http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1266-1.

20. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Матем. сб. 2008. Т. 199, N 8. С. 29-60, http://dx.doi.org/10.1070/SM2008v199n08ABEH003957.

21. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. I. М.: Мир, 1986, https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2.

22. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987, http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1310-1.

23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. II. М.: Наука, 1974, https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738.

24. Волчкова Н. П., Волчков Вит. В. Проблема деконволюции для индикаторов отрезков // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26, N 3. С. 1-14, https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.47.12.001.

25. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. Vol. 67, N 1. P. 1-37, https://doi.org/10.1007/BF02787785.

26. Berkani M., El Harchaoui M., Gay R. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique - Cas des deux boules // J. Complex Variables. 2000. Vol. 43, N 1. P. 29-57, https://doi.org/10.1080/17476930008815300.

27. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН. 2001. Т. 379, N 5. С. 587–590, https://zbmath.org/1041.43005.

28. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, N 5. С. 169-197, https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00830-1.

29. Volchkov Vit. V. On functions with given spherical means on symmetric spaces // J. Math. Sci. 2011. Vol. 175, N 4. P. 402-412, https://doi.org/10.1007/s10958-011-0354-2.

30. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Inversion of the local Pompeiu transformation on Riemannian symmetric spaces of rank one // J. Math. Sci. Vol. 2011. 179, N 2. P. 328-343, https://doi.org/10.1007/s10958-011-0597-y.

31. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, N 2. С. 3-34, https://doi.org/10.1070/IM2013v077n02ABEH002634.

32. Rubin B. Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9, N 4. P. 1627-1664, https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1.

33. Salman Y. Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres // Anal. Math. Phys. 2017. Vol. 7, N 2. P. 165-185, https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7.

34. Hielscher R., Quellmalz M. Reconstructing an function on the sphere from its means along vertical slices // Inverse Probl. Imaging. 2016. Vol. 10, N 3. P. 711-739, https://doi.org/10.3934/ipi.2016018.

35. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, ISBN 978-5-9221-0310-7.

36. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: URSS, 2022, ISBN 978-5-9710-9633-7.

37. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, Т. II. М.: Юрайт-Издат, 2013, ISBN 978-5-9710-9916-2742-9.

REFERENCES

1. Pompéiu, D. 1929, “Sur certains systèmes d’équations linéaires et sur une propriété intégrale de fonctions de plusieurs variables“, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 188, pp. 1138-1139.

2. Pompéiu, D. 1929, “Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles“, *Bull. Sci. Acad. Royale Belgique* (*5*), vol. 15, pp. 265-269, https://zbmath.org/JFM 55.0139.01.

3. Chakalov, L. 1944, “Sur un problème de D. Pompeiu“, *Annuaire* [*Godišnik*] *Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1*, vol. 40, pp. 1-14.

4. Berenstein, C.A.& Struppa, D.C. 1993, “Complex analysis and convolution equations“, *Several complex variables.* V*: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, vol. 54, pp. 1-108, https://doi.org/10.1007/978-3-642-58011-6-1.

5. Zalcman, L. 1992, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem“, *Approximation by solutions of partial differential equations*, vol. 365, pp. 185-194, https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2-17.

6. Zalcman, L. 2001, “Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” ”, *Contemp. Math.* (*Radon Transform and Tomography*), vol. 278, pp. 69-74, https://doi.org/10.1090/conm/278.

7. Volchkov, V. V. 2003, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9.
8. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2009, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London: Springer, https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8.
9. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2013, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel: Birkhäuser, https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. Delsarte, J. 1958, "Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, vol. 246, pp. 1358-1360, https://zbmath.org/0084.09403.
11. Zalcman, L. 1972, "Analyticity and the Pompeiu problem", *Arch. Rat. Anal. Mech.*, vol. 47, № 3, pp. 237-254, https://doi.org/10.1007/BF00250628.
12. Smith, J. D. 1972, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 72, № 3, pp. 403-416, https://doi.org/10.1017/S0305004100047241.
13. Zalcman, L. 1980, "Offbeat integral geometry", *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, № 3, pp. 161-175, https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994985.
14. Berenstein, C. A., Taylor, B. A. & Yger, A. 1983, "Sur quelques formules explicites de déconvolution", *J. Optics* (*Paris*), vol. 14, № 2, pp. 75-82, https://doi.org/10.1088/0150-536X/14/2/003.
15. Berenstein, C. A. & Yger, A. 1983, "Le problème de la déconvolution", *J. Funct. Anal.*, vol. 54, № 2, pp. 113-160, https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90051-4.
16. Volchkov, V. V. 1995, "A definitive version of the local two-radii theorem", *Sb. Math.*, vol. 186, № 6, pp. 783-802, http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.
17. Berenstein, C. A. & Yger, A. 1989, "Analytic Bezout identities", *Adv. Appl. Math.*, vol. 10, № 1, pp. 51-74, https://doi.org/10.1016/0196-8858(89)90003-1.
18. Berenstein, C. A., Gay, R. & Yger A. 1990, "Inversion of the local Pompeiu transform", *J. Analyse Math.*, vol. 54, № 1, pp. 259-287, https://doi.org/10.1007/bf02796152.
19. Helgason, S. 2008, *Geometric Analysis on Symmetric spaces*, Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1266-1.
20. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2008, "Convolution equations in many-dimensional domains and on the Heisenberg reduced group", *Sb. Math.*, vol. 199, № 8, pp. 1139-1168, http://dx.doi.org/10.1070/SM2008v199n08ABEH003957.
21. Hörmander, L. 2003, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. I. Springer-Verlag: New York, https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2.
22. Helgason, S. 1984, *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press: New York, http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1310-1.
23. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F.G. 1953, *Higher Transcendental Functions*, vol. II. New York: McGraw-Hill., https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738.

24. Volchkova, N. P. & Volchkov, Vit. V. 2019, “Deconvolution problem for indicators of segments”, *Math. Notes NEFU*, vol. 26, № 3, pp. 3-14, https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.47.12.001.

25. El Harchaoui, M. 1995, “Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules)”, *J. Anal. Math.*, vol. 67, № 1, pp. 1-37, https://doi.org/10.1007/BF02787785.

26. Berkani, M., El Harchaoui, M. & Gay, R. 2000, “Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l’espace hyperbolique quaternique - Cas des deux boules”, *J. Complex Variables*, vol. 43, № 1, pp. 29-57, https://doi.org/10.1080/17476930008815300.

27. Volchkov, Vit. V. & Volchkova, N. P. 2001, “Inversion of the local Pompeiu transform on the quaternion hyperbolic space”, *Dokl. Math.*, vol. 64, № 1, pp. 90-93, https://zbmath.org/1041.43005.

28. Volchkov, Vit. V. & Volchkova, N. P. 2004, “Inversion theorems for the local Pompeiu transformation in the quaternion hyperbolic space”, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 15, № 5, pp. 753-771, https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00830-1.

29. Volchkov, Vit. V. 2011, “On functions with given spherical means on symmetric spaces”, *J. Math. Sci.*, vol. 175, № 4, pp. 402-412, https://doi.org/10.1007/s10958-011-0354-2.

30. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2011, “Inversion of the local Pompeiu transformation on Riemannian symmetric spaces of rank one”, *J. Math. Sci.*, vol. 179, № 2, pp. 328-343, https://doi.org/10.1007/s10958-011-0597-y.

31. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. 2013, “Spherical means on two-point homogeneous spaces and applications”, *Ivz. Math.*, vol. 77, № 2, pp. 223-252, https://doi.org/10.1070/IM2013v077n02ABEH002634.

32. Rubin, B. 2019, “Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections”, *Anal. Math. Phys.*, vol. 9, № 4, pp. 1627-1664, https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1.

33. Salman, Y. 2017, “Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres”, *Anal. Math. Phys.*, vol. 7, № 2, pp. 165-185, https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7.

34. Hielscher, R. & Quellmalz, M. 2016, “Reconstructing an function on the sphere from its means along vertical slices”, *Inverse Probl. Imaging.*, vol. 10, № 3, pp. 711-739, https://doi.org/10.3934/ipi.2016018.

35. Vladimirov, V. S. & Zharinov, V. V. 2008, *Equations of mathematical physics* [*Uravneniya matematicheskoy fiziki*]. Moskva: FIZMATLIT. ISBN 978-5-9221-0310-7.

36. Levin, B. Ya. 2022, *Distribution of roots of entire functions* [*Raspredeleniye korney tselikh funktsiy*] Moskva: URSS. ISBN 978-5-9710-9633-7.

37. Ilyin, V. A., Sadovnichiy, V. A. & Sendov, Bl. Kh. 2013, *Mathematical analysis* [*Matematicheskiy analiz*], vol. II. Moskva: Yurayt-Izdat. ISBN 978-5-9710-9916-2742-9.

Получено: 04.08.2022
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 514.172, 514.177.2, 515.124 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-81-128

Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами[1]

А. Х. Галстян

Галстян Арсен Хачатурович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ares.1995@mail.ru

Аннотация

Проблема Ферма — Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ пространства Y минимальна. В настоящей работе эта проблема рассматривается в случае, когда $Y = \mathcal{H}(X)$ — это пространство непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа, то есть $\mathcal{H}(X)$ является *гиперпространством* над X. Множество A называют *границей*, все A_i — *граничными множествами*, а компакты, которые реализуют минимум суммы расстояний до A_i — *компактами Штейнера*.

В данной статье изучается вопрос *устойчивости* в проблеме Ферма — Штейнера при переходе от границы из конечных компактов A_i к границе, состоящей из их выпуклых оболочек $\mathrm{Conv}(A_i)$. Под устойчивостью здесь имеется в виду, что при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов минимум суммы расстояний S_A не изменится.

В работе было продолжено изучение геометрических объектов, а именно, *множеств сцепки*, возникающих в проблеме Ферма — Штейнера. Также были выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы из $\mathcal{H}(X)$, два из которых опираются на построенную теорию таких *множеств*. Для случая неустойчивой границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ был разработан метод поиска деформаций некоторого элемента из $\mathcal{H}(X)$, которые приводят к компактам, дающим меньшее значение суммы расстояний до $\mathrm{Conv}(A_i)$, чем S_A.

Построенная в рамках данного исследования теория была применена к одной известной из недавних работ границе $A \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, а именно, была доказана её неустойчивость и были найдены компакты, реализующие меньшую, чем S_A, сумму расстояний до $\mathrm{Conv}(A_i)$.

Ключевые слова: метрическая геометрия, гиперпространства, выпуклые множества, расстояние Хаусдорфа, проблема Штейнера, проблема Ферма — Штейнера, экстремальные сети.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. Х. Галстян. Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 81–128.

---

[1] А. Х. Галстян является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (договор No 21-8-3-3-1).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 514.172, 514.177.2, 515.124 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-81-128

Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces

A. Kh. Galstyan

Galstyan Arsen Khachaturovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ares.1995@mail.ru

Abstract

The Fermat–Steiner problem is to find all points of the metric space Y such that the sum of the distances from each of them to points from some fixed finite subset $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ of the space Y is minimal. In this paper, this problem is considered in the case when $Y = \mathcal{H}(X)$ is the space of non-empty compact subsets of a finite-dimensional normed space X endowed with the Hausdorff metric, i.e. $\mathcal{H}(X)$ is a *hyperspace* over X. The set A is called *boundary*, all A_i are called *boundary sets*, and the compact sets that realize the minimum of the sum of distances to A_i are called *Steiner compacts*.

In this paper, we study the question of *stability* in the Fermat–Steiner problem when passing from a boundary consisting of finite compact sets A_i to a boundary consisting of their convex hulls $\mathrm{Conv}(A_i)$. By stability here we mean that the minimum of the sum of distances S_A does not change when passing to convex hulls of boundary compact sets.

The paper continued the study of geometric objects, namely, *hook sets* that arise in the Fermat–Steiner problem. Also three different sufficient conditions for the instability of the boundary from $\mathcal{H}(X)$ were derived, two of which are based on the constructed theory of such *sets*. For the case of an unstable boundary $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, a method was developed to search for deformations of some element from $\mathcal{H}(X)$, which lead to compact sets that give a smaller value of the sum of distances to $\mathrm{Conv}(A_i)$ than S_A.

The theory constructed within the framework of this study was applied to one of the well-known from recent works boundary $A \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, namely, its instability was proved and compact sets were found realizing the sum of distances to $\mathrm{Conv}(A_i)$, less than S_A.

Keywords: metric geometry, hyperspaces, convex sets, Hausdorff distance, Steiner problem, Fermat–Steiner problem, extremal networks.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. Kh. Galstyan, 2023, “Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite–dimensional normed spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 81–128.

1. Введение

Во многих областях деятельности человека возникают вопросы минимизации затрат каких бы то ни было ресурсов, например, времени в пути на доставку чего-либо: чем оно меньше, тем больше выгода. Проблема, которой посвящена данная работа, как раз из этой области. Одна из частных прикладных постановок задачи может быть такой: допустим, есть ряд предприятий и ставится вопрос о постройке ещё одного дополнительного, которое ежедневно будет тесно взаимодействовать с исходными. Вопрос — где его разместить? Логично, например, в месте, которое находится на наименьшем суммарном расстоянии от исходных предприятий.

История подобного рода задач восходит ещё к 17 веку (подробную историческую сводку можно найти, например, в работах [1, 2, 3]). А именно, в одной из своих работ Пьер Ферма сформулировал следующую проблему. Дано три точки на плоскости, требуется найти четвёртую такую, что сумма расстояний от неё до трёх изначальных минимальна. Около 1640 года Эванджелиста Торричелли, узнав об этой задаче от самого Ферма, решил её, опираясь на законы физики. Это решение было опубликовано в одной из работ Винченцо Вивиани, ученика Торричелли. До сих пор остаётся неясным вопрос о том, знал ли сам Ферма ответ на свою задачу. Историки в большинстве своём отдают пальму первенства в решении проблемы именно итальянскому учёному. Стоит отметить, что на протяжении веков задача Ферма забывалась, переоткрывалась и решалась заново разными европейскими математиками посредством новых методов и подходов (Т. Симпсон, Ф. Хейнен, Ж. Бертран и др.).

Ещё одна похожая проблема была сформулирована в 1836 году Карлом Гауссом. В письме своему ученику Г. Х. Шумахеру он задался вопросом, как построить сеть железных дорог минимальной суммарной длины, которая будет соединять четыре немецких города: Бремен, Гамбург, Ганновер и Брауншвейг (в Германии того времени весьма активно развивалось строительство железнодорожной сети по всей стране). Гаусс в своём ответе пишет, что задача Ферма здесь, а именно, поиск точки, реализующей минимум суммы расстояний до четырёх заданных, не приводит к графу минимального веса, соединяющему эти точки, в отличие от случая проблемы на трёх точках. Карл Гаусс в рамках той переписки впервые заявил о хорошо известном сегодня алгоритме построения кратчайшей сети на плоскости, соединяющей конечный набор точек: нужно перебрать все так называемые *графы Штейнера*, соединяющие эти точки [2, 4]. Минимальные сети будут среди них и только среди них. Графом Штейнера принято называть плоский граф, вершины в котором имеют степени смежности только три, два или один. И если вершина имеет степень три, то все рёбра из неё выходят под углом 120 градусов относительно друг друга, а если вершина имеет степень два, то угол между двумя исходящими рёбрами должен быть не меньше 120 градусов.

В 1934 году В. Ярник и М. Кёсслер сформулировали задачи Ферма и Гаусса в более общем виде: требуется соединить n точек в k-мерном евклидовом пространстве сетью минимального веса [5]. Однако свои основные результаты они получили лишь для случая плоскости. В частности, ими было доказано, что каждая кратчайшая сеть, которая соединяет вершины правильного n-угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n-угольника за исключением любой одной. Также Ярник и Кёсслер построили очевидные сети минимального веса для $n = 3, 4, 5$.

Широкую известность задача поиска минимальных сетей приобрела с выходом в 1941 году книги Р. Куранта и Г. Роббинса “Что такое математика?” [6], которая впоследствии оказалась весьма популярной. Однако в этой работе авторы приписывают пальму первенства постановки и решения проблемы построения геометрического графа минимального веса другому математику, Якобу Штейнеру, работавшему в 19 веке в стенах Берлинского университета. Штейнер формулировал задачу следующим образом: требуется соединить три деревни A, B и C системой дорог минимальной суммарной длины. Как пишут современные историки, всё дело в том, что Курант и Роббинс узнали про задачу Ферма из опубликованных черновиков берлинского математика. Таким образом, с 40-х годов прошлого столетия проблему поиска кратчайшей сети в метрическом пространстве, соединяющей заданные точки, принято называть *проблемой Штейнера*. А родственную задачу, в которой поиск ведётся лишь среди графов типа звезда, где исходный набор точек является множеством листьев такого графа, с недавнего времени стали именовать *проблемой Ферма — Штейнера* [7].

Общая и естественная постановка задачи Ферма — Штейнера может быть такой. Пусть Y — метрическое пространство и A — конечное подмножество Y. Проблема Ферма — Штейнера состоит в поиске всех точек $y \in Y$, находящихся на наименьшем суммарном расстоянии от точек множества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. В соответствии с терминологией из теории графов множество A называют *границей*. Множество всех решений всюду далее будет обозначаться через $\Sigma(A)$.

В настоящей работе рассматривается проблема Ферма — Штейнера в случае, когда $Y = \mathcal{H}(X)$ является пространством с метрикой Хаусдорфа d_H, см. раздел 2.3, всех непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$. Пространство $Y = \mathcal{H}(X)$ ещё называют *гиперпространством* над X, см. [8]. Таким образом, задачу можно сформулировать так. Требуется найти все $K \in \mathcal{H}(X)$, которые реализуют минимум следующего функционала:

$$S(A, K) = \sum_{i=1}^{n} d_H(A_i, K). \tag{1}$$

Само минимальное значение $S(A, K)$ будет далее обозначаться через S_A.

Вообще говоря, в произвольном метрическом пространстве множество $\Sigma(A)$ может оказаться пустым. Однако из [7] известно, что в ограниченно компактных метрических пространствах, то есть в таких, где всякий замкнутый шар есть компакт, решение проблемы Ферма — Штейнера всегда существует. Более того, в [7] было доказано, что если X ограниченно компактно, то и $\mathcal{H}(X)$ тоже ограниченно компактно. Хорошо известно, что в конечномерных нормированных пространствах замкнутое и ограниченное подмножество есть компакт. Таким образом, согласно сказанному выше, в данной работе всюду выполнено $\Sigma(A) \neq \emptyset$. Элементы из $\Sigma(A)$ далее будут называться *компактами Штейнера*.

Пусть $K \in \Sigma(A)$. Тогда обозначим расстояние по Хаусдорфу между K и $A_i \in A$ через d_i (A_i из границы далее будут ещё называться *граничными компактами*). Вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$ назовём *вектором решения* проблемы. Множество всех таких векторов решений для границы A обозначим через $\Omega(A)$. Отметим, что разные компакты Штейнера могут задавать один и тот же элемент из $\Omega(A)$. При этом очевидно, что по элементу из $\Sigma(A)$ его вектор d восстанавливается однозначно. Таким образом, множество решений проблемы Ферма — Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, каждый из которых соответствует своему вектору решения $d \in \Omega(A)$. Согласно работе [7] в ограниченно компактных пространствах каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе по включению единственный *максимальный компакт Штейнера* (он обозначается через K_d) и, вообще говоря, множество *минимальных компактов Штейнера*. В [7] также было доказано для случая ограниченно компактных пространств, что если $d \in \Omega(A)$, то $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, где $B_{d_i}(A_i)$ — шар (или ещё говорят замкнутая окрестность) с центром в компакте A_i, см. определение в разделе 2.2. Более того, $K \in \Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда с некоторым минимальным компактом Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо $K_\lambda \subset K \subset K_d$.

Геометрии пространств $\mathcal{H}(X)$ и, в частности, проблема Ферма — Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ имеют потенциальные применения в таких прикладных областях математики, как распознавание и сравнение образов, реализация непрерывных деформаций одних геометрических объектов в другие и т. д. Поэтому в последнее время стала активно развиваться наука по работе в различных гиперпространствах (см., например, [9], в которой рассматриваются кратчайшие кривые в $\mathcal{H}(X)$, или статьи [10, 11, 12] по исследованию и приложению более общего расстояния Громова–Хаусдорфа).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13], где рассматривались только границы в $\mathcal{H}(X)$, все элементы которых есть конечные подмножества $\mathbb{R}^m$. В данной статье делается шаг в сторону перехода от исследования конечных граничных компактов к выпуклым компактным подмножествам в рамках проблемы Ферма — Штейнера. В частности, изучается возможность обобщения такого понятия, как *множество сцепки*, введённого в работе [13], см. раздел 3.2. Также исследуются вопросы того, что можно сказать при переходе от границы из конечных компактов к границе, состоящей из их выпуклых оболочек. В данной работе границы, для которых минимум функционала (1) при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов останется прежним, будут называться *устойчивыми*, иначе — *неустойчивыми*.

В секции 2 приводятся все нужные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в статье. Раздел 3.1 разрабатывает необходимую теорию, связанную с оператором взятия выпуклой оболочки непустого компактного подмножества, в рамках проблемы Ферма — Штейнера. В частности, важным утверждением здесь является следствие 2. Оно используется в разделе 3.4, который посвящён вопросам устойчивости границ. В разделе 3.2 происходит обобщение понятия множества сцепки, которое было сделано в [13] для границ из конечных компактов. В секции 3.3 посредством множества сцепки определённого типа $\mathrm{HP}(F)$ раскрывается связь максимального компакта Штейнера с границей, состоящей из выпуклых компактных множеств. Результаты разделов 3.2 и 3.3 также используются в разделе 3.4. В секции 3.5 было положено начало исследованию вопроса уменьшения веса сети в неустойчивом случае. Ключевым утверждением здесь является теорема 9. Раздел 3.6 демонстрирует приложение результатов секции 3.5 на примере конкретной задачи из [7, 13]. И наконец, в разделе 4 подводятся итоги проделанной работы и обсуждаются возможные продвижения данной задачи.

Основными результатами статьи являются утверждение 10, утверждение 12, теорема 3 и теорема 5, обобщающие понятие множества сцепки, теорема 6 о взаимосвязи границы из выпуклых компактов с K_d, утверждение 13, опирающееся на следствие 2 и дающее ответ на вопрос, что произойдёт в векторами решений из $\Omega(A)$ и каким будет максимальный компакт Штейнера в случае устойчивой границы, следствия 6, 7 и теорема 9, приводящие различные достаточные условия неустойчивости границы (в теореме 9, в частности, приводится оценка снизу на величину уменьшения веса сети в неустойчивом случае), и наконец, теорема 7, раскрывающая связь между третьим достаточным условием неустойчивости (теорема 9) и вторым (следствие 7).

Отметим, что утверждение 13 не является новым, его можно найти в статье [14], однако в настоящей работе приводится альтернативное доказательство этого факта.

Также отметим, что настоящая статья является существенно переработанной и дополненной версией работы [23].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору А. А. Тужилину, и профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

2. Необходимые определения и утверждения

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Для удобства расстояние между двумя точками $a, b \in X$ будем обозначать через $|ab|$ вместо $\rho(a, b)$, а также вместо (X, ρ) будем писать просто X.

Во многих местах в тексте будут использоваться следующие общепринятые обозначения для любых двух точек a и b в случае, когда X является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$:

$$[a, b) = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \bigm| \lambda \in [0, 1)\big\},$$

$$(a, b] = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \bigm| \lambda \in (0, 1]\big\},$$

$$[a, b] = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \bigm| \lambda \in [0, 1]\big\}.$$

2.1. Метрические проекции

Определение 1. *Пусть $A \subset X$. Расстоянием от точки $p \in X$ до множества $A \subset X$ называется величина*

$$|p\,A| = \inf\{|pa| \,:\, a \in A\}.$$

В частности, когда $A = \emptyset$, будем полагать

$$|p\,\emptyset| = \infty.$$

Определение 2. *Пусть M — непустое подмножество X. Множество всех подмножеств X обозначим через 2^X. Отображение $P_M \colon X \to 2^X$, заданное по правилу*

$$P_M \colon x \mapsto \{z \in M : |xz| = |xM|\},$$

называется метрической проекцией X на M.

Лемма 1. *Если $M \subset X$ — непустой компакт, то для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто.*

Доказательство.

Данный результат прямо вытекает из непрерывности функции расстояния между двумя точками в метрическом пространстве.

□

В случае конечномерного нормированного пространства X верен следующий факт (см., например, [17]).

Утверждение 1 ([17]). *Пусть $M \subset X$ — непустой выпуклый компакт. Тогда для любой точки $x \in X \setminus M$, для любой точки $y \in P_M(x)$ и для всех $\lambda \geqslant 0$ выполняется*

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big).$$

2.2. О шарах в метрических пространствах

Определение 3. *Пусть $A \subset X$. Множества*

$$B_r(A) = \{p \,:\, |pA| \leqslant r\};\;\; U_r(A) = \{p \,:\, |pA| < r\}$$

называются, соответственно, замкнутым и открытым шаром с центром в A радиуса r.

Замечание 1. *Согласно определению 1 для любого $0 \leqslant r < \infty$ верно*

$$B_r(\emptyset) = U_r(\emptyset) = \emptyset.$$

В случае $A = \{a\}$, где $a \in X$, для краткости $B_r\big(\{a\}\big)$ и $U_r\big(\{a\}\big)$ будут заменяться на $B_r(a)$ и $U_r(a)$, соответственно.

Лемма 2. *Пусть $A \subset X$ — компакт и $0 \leqslant r < \infty$. Тогда $B_r(A) = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$.*

Доказательство.

В случае, когда $A = \emptyset$, равенство очевидно. Пусть далее A непусто.

По определению $B_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\}$. Покажем сначала $\{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\} \subset \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\}$. Так как A — компакт, то согласно лемме 1 справедливо $P_A(p) \neq \emptyset$. Пусть $q \in P_A(p)$. Тогда $|pq| = |p\,A| \leqslant r$. Значит, $p \in B_r(q) \subset \bigcup\limits_{a\in A} B_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\} \subset \bigcup\limits_{a\in A} B_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\}$. Но для любой $p \in \bigcup\limits_{a\in A} B_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in B_r(q)$. Значит, так как $q \in A$, то $|p\,A| \leqslant r$. Следовательно, $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p имеем $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\}$.

Таким образом, $B_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\} = \bigcup\limits_{a\in A} B_r(a)$.

□

Замечание 2. *В доказательстве* $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| \leqslant r\} = B_r(A)$ *из леммы* 2 *нигде не использовалась компактность. Поэтому включение* $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset B_r(A)$ *верно для любого* $A \subset X$.

Лемма 3. *Пусть* $A \subset X$ *и* $0 \leqslant r < \infty$. *Тогда* $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Доказательство.

Если $A = \emptyset$, то согласно замечанию 1 имеем $U_r(A) = \emptyset$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{a\in A=\emptyset} U_r(a) = \emptyset$. Значит, в таком случае $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Если $r = 0$, то ввиду неотрицательности функции расстояния также получаем $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) = \emptyset$.

Пусть далее $A \neq \emptyset$ и $0 < r < \infty$. По определению $U_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Покажем сначала $\{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Это означает, что $|p\,A| = \inf\limits_{a\in A} |pa| < r$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $a' \in A$ такая, что $|pa'| \leqslant |p\,A| + \varepsilon$. Подберём ε так, чтобы выполнялось $|pa'| \leqslant |p\,A| + \varepsilon < r$. Таким образом, мы имеем точку $a' \in A$ такую, что $p \in U_r(a') \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Но для любой $p \in \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in U_r(q)$, то есть $|pq| < r$. Значит, так как $q \in A$, то $|p\,A| < r$. Следовательно, $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p получаем $\bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$.

Таким образом, $U_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

□

Согласно [15] справедливо следующее утверждение, которое нам понадобится далее.

Утверждение 2 ([15]). *Для непустого* $A \subset X$ *функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R},$$

заданая правилом

$$f\colon x \mapsto |xA|,$$

непрерывна.

Всюду далее множество всех граничных точек подмножества $A \subset X$ будем обозначать через ∂A.

Лемма 4. *Пусть A — непустое подмножество нормированного пространства X и $r \geqslant 0$. Тогда для любого $p \in \partial B_r(A)$ справедливо $|p\,A| = r$.*

Доказательство.

Пусть $p \in \partial B_r(A)$. Рассмотрим последовательности точек $\{x_n\} \subset B_r(A)$ и $\{y_n\} \subset X \backslash B_r(A)$, сходящиеся к p. Заметим, что $|x_i\,A| \leqslant r$ и $|y_j\,A| > r$ для всех i, j. В силу утверждения 2, а также ввиду $||p - x_i|| \to 0$ при $i \to \infty$ и $||p - y_j|| \to 0$ при $j \to \infty$ получаем $|p\,A| \leqslant r$ и $|p\,A| \geqslant r$. Значит, $|p\,A| = r$.

□

Лемма 5. *Пусть x — точка в нормированном пространстве X и $r \geqslant 0$. Тогда для любого $p \in X$ из $|px| = r$ следует $p \in \partial B_r(x)$.*

Доказательство.

Проведём луч l из x, проходящий через p. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap [x, p]$ в силу линейности пространства X верно $|xy| \leqslant r$. С другой стороны, снова ввиду линейности пространства X для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap l \setminus [x, p]$ справедливо $|xy| > r$. Значит, всякая окрестность точки p содержит как точки из $B_r(x)$, так и точки из $X \setminus B_r(x)$. Следовательно, p — граничная точка для $B_r(x)$, то есть $p \in \partial B_r(x)$.

□

Лемма 6. *Пусть A — компактное подмножество нормированного пространства X и $0 \leqslant r < \infty$. Тогда $\partial B_r(A) \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.*

Доказательство.

Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1. Значит, $\partial B_r(A) = \emptyset \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Возьмём точку $p \in \partial B_r(A)$. Согласно лемме 4 верно $|p\,A| = r$. Также ввиду компактности A имеем $P_A(p) \neq \emptyset$. Пусть $x \in P_A(p)$. Следовательно, получаем $|px| = r$, и поэтому по лемме 5 имеем $p \in \partial B_r(x)$. Отсюда $p \in \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$. Значит, в силу произвольности $p \in \partial B_r(A)$ справедливо $\partial B_r(A) \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.

□

Следующий факт можно найти, например, в работе [13].

Лемма 7 ([13]). *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки нормированного пространства со строго выпуклой нормой. Тогда если множество*

$$C = B_{r_1}(a_1) \cap \ldots \cap B_{r_n}(a_n)$$

состоит более чем из одной точки, то оно имеет непустую внутренность.

Замечание 3. *Все результаты из разделов 2 и 3 работы [13], опирающиеся на лемму 7, прямо обобщаются без изменения доказательств на случай конечномерных нормированных пространств со строго выпуклой нормой, а все остальные утверждения из этих разделов обобщаются точно так же без каких бы то ни было изменений в доказательствах на случай произвольных конечномерных нормированных пространств. Более того, все результаты работы [13] аналогично без изменений распространяются на случай, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов.*

Далее потребуется следующее определение.

Определение 4. *Суммой Минковского двух подмножеств A и B линейного пространства называется множество*

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

Также по определению полагаем

$$\lambda A = \{\lambda a \,:\, a \in A\},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 8. *Пусть A — непустое замкнутое подмножество пространства X и $r, r' \geqslant 0$. Тогда $B_r\bigl(B_{r'}(A)\bigr) = B_{r+r'}(A)$.*

Доказательство.

В силу замкнутости множества A имеем

$$B_r\bigl(B_{r'}(A)\bigr) = A + B_r(0) + B_{r'}(0) = A + B_{r+r'}(0) = B_{r+r'}(A).$$

□

Утверждение 3. *Пусть A — выпуклый компакт в нормированном пространстве X. Тогда $B_r(A)$ выпукло для любого $r \geqslant 0$.*

Доказательство.

Если $r = \infty$, то $B_r(A) = X$ для любого A, следовательно, $B_r(A)$ выпукло. Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, тоже выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу компактности A по лемме 2 имеем $B_r(0)+A = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a) = B_r(A)$. Также из [16] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Но $B_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $B_r(A)$ тоже выпукло.

□

Утверждение 4. *Пусть A — выпуклое подмножество в нормированном пространстве X. Тогда $U_r(A)$ выпукло для любого $r \geqslant 0$.*

Доказательство.

Если $r = \infty$, то $U_r(A) = X$ для непустого A и $U_r(A) = \emptyset$ для пустого A. Следовательно, $B_r(A)$ выпукло при $r = \infty$ для любого A. Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $U_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, также выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу леммы 2 верно $U_r(0) + A = \bigcup\limits_{a \in A} U_r(a) = U_r(A)$. Из [16] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Множества $U_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $U_r(A)$ тоже выпукло.

□

2.3. О расстояниях между подмножествами метрического пространства

В определениях 5 и 6 множества $A \subset X$ и $B \subset X$ непусты.

Определение 5. *Расстоянием между A и B называется величина*

$$|A\,B| = \inf_{a \in A} |a\,B| = \inf_{a \in A,\, b \in B} |ab|.$$

Определение 6. *Расстоянием Хаусдорфа между A и B называется величина*

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r \,:\, A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\bigr\}.$$

Геометрия расстояния Хаусдорфа довольно подробно описана, например, в работе [18].

Обозначим множество непустых замкнутых и ограниченных подмножеств пространства X через $\mathcal{H}(X)$. Известно (см., например, [19, 20]), что в отличие от $|A\,B|$ расстояние Хаусдорфа $d_H(A,B)$ задаёт метрику на $\mathcal{H}(X)$.

Определение 7. *Метрическое пространство* $\big(\mathcal{H}(X), d_H\big)$ *называется гиперпространством над пространством* X.

В леммах 9, 10 и 11 пространство X является конечномерным нормированным пространством над полем $\mathbb{R}$. Отметим, что лемма 9 используется только для доказательства леммы 10.

Лемма 9. *Пусть* $M \in \mathcal{H}(X)$, $x \in M$ *и* l *— луч с началом в точке* x. *Тогда* $l \cap \partial M \neq \emptyset$.

Доказательство.

Обозначим $l \cap M$ через l'. Заметим, что l' замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Более того, l' — компакт как замкнутое подмножество компакта. Рассмотрим функцию $f\colon l' \to \mathbb{R}$, заданную правилом $a \mapsto ||a-x||$. Функция f непрерывна как функция расстояния, и на l' она достигает своей точной верхней грани, так как l' компакт. Пусть $p \in l' \subset M$ такая, что

$$\max_{a\,\in\, l'} f(a) = f(p). \tag{2}$$

Но в силу (2) и ввиду линейности пространства X любая окрестность точки p содержит точки, не лежащие в M. Значит, по определению $p \in \partial M$. Следовательно, $l \cap \partial M \neq \emptyset$.

□

Лемма 10. *Пусть* $A, C \in \mathcal{H}(X)$, A *— выпукло,* $r > 0$, $C \subset B_r(A)$ *и* $\big|C\,\partial B_r(A)\big| = \gamma > 0$. *Тогда для любого* $0 \leqslant \delta \leqslant \min\{r,\gamma\}$ *верно* $C \subset B_{r-\delta}(A)$.

Доказательство.

Допустим противное, что $C \setminus B_{r-\delta}(A) \neq \emptyset$. Пусть $x \in C \setminus B_{r-\delta}(A)$ и $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(x)$. Выпустим луч l из точки y, проходящий через x. Ввиду ограниченности множества A имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$. Отсюда по лемме 9 получаем $l \cap \partial B_r(A) \neq \emptyset$. Пусть $z \in l \cap \partial B_r(A)$. По лемме 8 справедливо $\partial B_r(A) = \partial B_\delta\big(B_{r-\delta}(A)\big)$. Поэтому $z \in \partial B_\delta\big(B_{r-\delta}(A)\big)$. При этом согласно утверждению 1 верно $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(z)$. Значит, в силу леммы 4

$$||z-y|| = \delta.$$

Но $x \in C$, $z \in \partial B_r(A)$ и по условию $\big|C\,\partial B_r(A)\big| = \gamma$, поэтому

$$||z-x|| \geqslant \gamma.$$

При этом

$$\delta \leqslant \min\{r,\gamma\} \leqslant \gamma.$$

Следовательно,

$$\delta = ||z-y|| = ||z-x|| + ||x-y|| \geqslant \gamma + ||x-y||.$$

Отсюда $||x-y|| = 0$. Таким образом, $x = y$. Значит, $x \in \partial B_{r-\delta}(A) \subset B_{r-\delta}(A)$. Но по предположению $x \in C \backslash B_{r-\delta}(A)$. Получили противоречие. Значит, $C \backslash B_{r-\delta}(A) = \emptyset$, то есть $C \subset B_{r-\delta}(A)$. Лемма доказана.

□

Лемма 11. *Пусть* $M, N \in \mathcal{H}(X)$, $|M\,N| = \gamma > 0$ *и* $0 < \varepsilon < \gamma$. *Тогда* $\big|U_\varepsilon(M)\;N\big| = \gamma - \varepsilon$.

Доказательство.

Покажем, что $\big|U_\varepsilon(M)\ N\big| \leqslant \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M и N существуют такие $x \in M$, $y \in N$, что длина отрезка $[x, y] = \big\{(1-\lambda)x + \lambda y \ \big|\ \lambda \in [0,1]\big\}$ равна γ. Значит, ввиду $\varepsilon < \gamma$ можно выбрать такое $\lambda' \in (0,1)$, что $||x - (1-\lambda')x - \lambda' y|| = \varepsilon$. Обозначим точку $(1-\lambda')x + \lambda' y$ через z. Значит, $|z\,M| \leqslant \varepsilon$, так как $x \in M$.

Покажем, что на самом деле $|z\,M| = \varepsilon$. Допустим, что $|z\,M| = \varepsilon' < \varepsilon$. Отметим, что ввиду $z \in (x, y)$ верно $||z - y|| = \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M найдётся точка $t \in M$ такая, что $||t - z|| = \varepsilon'$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[t, z]$ и $[z, y]$, равна $\varepsilon' + \gamma - \varepsilon < \gamma$. Противоречие с тем, что $|M\,N| = \gamma$. Поэтому $|z\,M| = \varepsilon$.

В силу линейности пространства X имеем $\big|z\ U_\varepsilon(M)\big| = 0$. Отсюда ввиду $||z - y|| = \gamma - \varepsilon$ получаем $\big|U_\varepsilon(M)\ N\big| \leqslant \gamma - \varepsilon$.

Покажем, что $\big|U_\varepsilon(M)\ N\big| = \gamma - \varepsilon$. Допустим, $\big|U_\varepsilon(M)\ N\big| < \gamma - \varepsilon$. Пусть $a \in B_\varepsilon(M)$ и $b \in N$ такие, что $||a - b|| < \gamma - \varepsilon$. Рассмотрим $c \in P_M(a)$, то есть $||c - a|| \leqslant \varepsilon$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[c, a]$ и $[a, b]$, строго меньше, чем γ. Получили противоречие с тем, что $|M\,N| = \gamma$. Значит, $\big|U_\varepsilon(M)\ N\big| = \gamma - \varepsilon$. Лемма доказана.

□

2.4. Разные вспомогательные утверждения и обозначения

В данном подразделе X — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Введём отображение $\mathrm{Conv}\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу гиперпространства $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.

Утверждение 5 ([14]). *Преобразование* Conv *является* 1-*липшицевым.*

Согласно работе [21] справедлив следующий результат.

Теорема 1 ([21]). *Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X. Тогда*

$$f\colon \big[|A\,B|, +\infty\big) \to \mathcal{H}(X),$$

$$f\colon r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывно.

Замыкание подмножества $M \subset X$ всюду далее будем обозначать через $\mathrm{Cl}\,M$. В разделе 3.4 будет нужна следующая лемма.

Лемма 12. *Пусть B — выпуклое подмножество X с непустой внутренностью и U — открытое подмножество X. Тогда если $\partial B \cap U \neq \emptyset$, то $\mathrm{Int}\,B \cap U \neq \emptyset$.*

Доказательство.

Известно [16, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества B с непустой внутренностью верно

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\,B) = \mathrm{Cl}\,B. \tag{3}$$

Пусть $x \in \partial B \cap U$. Так как U — открытое подмножество X и $x \in U$, то U является окрестностью точки x. Из (3) получаем, что любая точка из $\mathrm{Cl}\,B$ является точкой прикосновения для $\mathrm{Int}\,B$. Но $x \in \partial B \subset \mathrm{Cl}\,B$. Значит, $\mathrm{Int}\,B \cap U \neq \emptyset$. Лемма доказана.

□

3. Основная часть

Как отмечалось выше, в данной работе будут рассматриваться только гиперпространства $\mathcal{H}(X)$, построенные над конечномерными нормированными пространствами, а в качестве метрики на них будет браться расстояние Хаусдорфа.

Итак, пусть X всюду далее — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — произвольная (если не оговорено противное) граница, $d = \{d_1, \ldots, d_n\} \in \Omega(A)$ и $K_d \in \Sigma_d(A)$ — максимальный компакт Штейнера.

3.1. О некоторых свойствах выпуклых оболочек

Отображение Conv, вообще говоря, не сохраняет метрику Хаусдорфа d_H. Продемонстрируем этот факт на примере, см. рис. 1. Пусть $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ и $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$, где ближайшая точка из L для k_i — это l_i, $|k_il_i| = c_1$ и $|k_5l_i| = c_2 > c_1$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c_2$ и $d_H\big(\mathrm{Conv}(K), \mathrm{Conv}(L)\big) = c_1$.

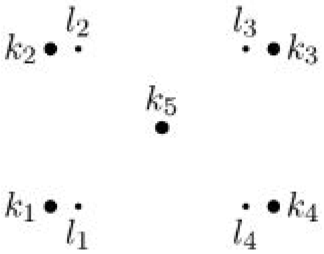

Рис. 1: Случай, когда $d_H\big(\mathrm{Conv}(K), \mathrm{Conv}(L)\big) < d_H(K, L)$

Заметим, что в случае выше справедливо также следующее неравенство: $d_H\big(K, \mathrm{Conv}(L)\big) < d_H(K, L)$. Однако если взять выпуклую оболочку только одного компакта, то расстояние по Хаусдорфу может и увеличиться, см. рис. 2. А именно, пусть $K = \{k_1, k_2\}$ и $L = \{l_1, l_2\}$, где $|k_il_i| = c$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c$ и $d_H\big(K, \mathrm{Conv}(L)\big) = \sqrt{c^2 + (\frac{|l_1l_2|}{2})^2} > c = d_H(K, L)$.

Рис. 2: Случай, когда $d_H\big(K, \mathrm{Conv}(L)\big) > d_H(K, L)$

Из сказанного выше возникает вопрос: когда Conv сохранит расстояние между двумя компактами? Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$ и $d_H(A, B) = r$. Преобразование* Conv *сохраняет расстояние между A, B, если и только если существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \mathrm{Conv}(A) = \emptyset$.*

Доказательство.

Необходимость. По теореме Каратеодори любую точку a' из $\mathrm{Conv}(A)$ можно представить в виде $a' = \sum\limits_{i=1}^{N+1} \lambda_i a_i$, где $a_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$ и N — размерность пространства X. Так как $A \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(B)\big)$, то для любой $a_i \in A$ существует $b_i \in \mathrm{Conv}(B)$ такая, что $|a_ib_i| < r = d_H(A, B)$. Замечаем, что $b' = \sum\limits_i \lambda_i b_i \in \mathrm{Conv}(B)$. Следовательно,

$||a'-b'|| = ||\sum\limits_i \lambda_i(a_i-b_i)|| \leqslant \sum\limits_i \lambda_i||a_i-b_i|| < r$. Значит, $\mathrm{Conv}(A) \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(B)\big)$. Аналогично получаем, что $\mathrm{Conv}(B) \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(A)\big)$. Значит,

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A),\mathrm{Conv}(B)\big) = \min\big\{s : \mathrm{Conv}(A) \subset B_s\big(\mathrm{Conv}(B)\big), \mathrm{Conv}(B) \subset B_s\big(\mathrm{Conv}(A)\big)\big\} < r$$

— противоречие. Поэтому существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \mathrm{Conv}(A) = \emptyset$.

Достаточность. Не ограничивая общности, пусть существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$. Допустим, что расстояние не сохранилось. Согласно утверждению 5 оно могло лишь уменьшиться, то есть $r > d_H\big(\mathrm{Conv}(A),\mathrm{Conv}(B)\big)$. Это означает, что для найденной точки $a \in A \subset \mathrm{Conv}(A)$ существует точка $b \in \mathrm{Conv}(B)$ такая, что $|ab| < r = d_H(A,B)$. Поэтому $b \in U_r(a)$. Но тогда $b \in U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B)$ — противоречие.

□

Утверждение 6. *Пусть* $\{K_1,\dots,K_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. *Тогда* $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^n K_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n \mathrm{Conv}(K_i)$.

Доказательство.

Имеем: $\bigcap\limits_{i=1}^n K_i \subset K_j$ для всех j. Поэтому $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^n K_i) \subset \mathrm{Conv}(K_j)$ для всех j. Значит, $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^n K_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n \mathrm{Conv}(K_i)$.

□

Утверждение 7. *Пусть* $K \in \mathcal{H}(X)$. *Тогда* $B_r\big(\mathrm{Conv}(K)\big) = \mathrm{Conv}\big(B_r(K)\big)$ *для любого* $r \geqslant 0$.

Доказательство.

По теореме Каратеодори

$$\mathrm{Conv}(K) = \bigcup_{p_1,\dots,p_{N+1}\in K}\ \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_{N+1}p_{N+1},$$

где $\lambda_i \geqslant 0$ и N — размерность пространства X. Также

$$\bigcup_{p_1,\dots,p_{N+1}\in K}\ \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_{N+1}p_{N+1} = \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1}K.$$

Отсюда имеем в силу свойств суммы Минковского

$$B_r\big(\mathrm{Conv}(K)\big) = \mathrm{Conv}(K) + B_r(0) =$$
$$= \left(\bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1}K\right) + B_r(0) = \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \Big(\lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1}K + B_r(0)\Big) =$$
$$= \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1\big(K + B_r(0)\big) + \ldots + \lambda_{N+1}\big(K + B_r(0)\big) = \mathrm{Conv}\big(K + B_r(0)\big) = \mathrm{Conv}\big(B_r(K)\big).$$

□

Обозначим $\bigcap\limits_{i=1}^n B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$ через K_d^{Conv}.

Следствие 1. $\mathrm{Conv}(K_d) \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$.

Доказательство.
По утверждению 6 имеем

$$\mathrm{Conv}(K_d) = \mathrm{Conv}\big(\bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)\big) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}\big(B_{d_i}(A_i)\big).$$

По утверждению 7 получаем

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}\big(B_{d_i}(A_i)\big) = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big) = K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Поэтому $\mathrm{Conv}(K_d) \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$.
□

Следствие 2. *Для всех i выполняется $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \leqslant d_i$.*

Доказательство.
Имеем $K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. С другой стороны, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$, то

$$\mathrm{Conv}(A_i) \subset \mathrm{Conv}\big(B_{d_i}(K_d)\big).$$

По утверждению 7 получаем

$$\mathrm{Conv}\big(B_{d_i}(K_d)\big) = B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(K_d)\big).$$

И в силу следствия 1

$$B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(K_d)\big) \subset B_{d_i}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Таким образом, $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$ для всех i. Следовательно,

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \leqslant d_i.$$

□

3.2. Далёкие, неплотные и дискретные точки, их взаимосвязь

Введём следующее определение.

Определение 8. *Пусть дана граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём далёкой точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geqslant 0$, если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_{j} F_{\widetilde{d}}^{A_j}$.*

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Часто уточнение о том, для какого именно вектора $\widetilde{d}$ точка $a \in A_i$ является далёкой, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, далёкие точки будут рассматриваться только для $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$.

Утверждение 8. *Если $a \in F_d^{A_i}$ и $d_i > 0$, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.*

Доказательство.

Пусть $a \in A_i$ — далёкая, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Значит, $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$. В нормированном пространстве любая точка из $\partial B_{d_i}(a)$ является точкой прикосновения для $U_{d_i}(a)$. Но $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset K_d$. Поэтому, так как $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и $d_i > 0$, в любой окрестности точки из $B_{d_i}(a) \cap K_d$ содержатся как точки из K_d, так и точки, не лежащие в K_d. Следовательно, по определению граничных точек $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

□

Определение 9. *Границу A, все элементы которой являются выпуклыми компактами, назовём выпуклой.*

Утверждение 9. *Пусть $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ — выпуклая граница, $a \in A_i$ — далёкая точка и $d_i > 0$. Тогда $a \in \partial A_i$.*

Доказательство.

Так как $a \in A_i$ — далёкая, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, так как $d_i > 0$, то $a \in X \setminus K_d$. Компакт K_d выпуклый в силу выпуклости границы. Поэтому согласно утверждению 1 для точки a и для любой точки $p \in P_{K_d}(a)$ верно $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$ при всех $\lambda \geqslant 0$, где $a_\lambda = (1-\lambda)p + \lambda a$.

Заметим, что $B_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$. Значит, $|aK_d| = d_i$ ввиду того, что a — далёкая точка. Но $p \in P_{K_d}(a)$, поэтому $|ap| = d_i$ по определению 2.

Допустим, что $a \in \operatorname{Int} A_i$. Тогда в силу линейности пространства X существует такое $\lambda > 1$, что $|a_\lambda p| > |ap| = d_i$ и при этом $a_\lambda \in A_i$. Ввиду того, что $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$, имеем $|a_\lambda K_d| > d_i$. Значит, $A_i \not\subset B_{d_i}(K_d)$. Получили противоречие с тем, что $d_i = d_H(A_i, K_d)$. Поэтому $a \in \partial A_i$.

□

Вообще говоря, неясно, для любой ли конечной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ далёкие точки всегда найдутся хотя бы в одном A_i и хотя бы для одного вектора $d \in \Omega(A)$. Например, возможно, не исключена ситуация, изображённая на рисунке 3. А именно, $A = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$, где $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3\}; \mathfrak{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}; \mathfrak{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Предположим, что вектор

$$d = \Big(d_1 = d_H(\mathfrak{A}, K_d); d_2 = d_H(\mathfrak{B}, K_d); d_3 = d_H(\mathfrak{C}, K_d)\Big),$$

по которому построен

$$\begin{aligned} K_d = \Big(B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(b_1) \cap B_{d_3}(c_1)\Big) \cup \\ \cup \Big(B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1)\Big) \cup \Big(B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_2}(b_3) \cap B_{d_3}(c_2)\Big) \cup \Big(B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3)\Big) \cup \\ \cup \Big(B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_4) \cap B_{d_3}(c_4)\Big), \end{aligned}$$

принадлежит $\Omega(A)$. Причём, оба множества

$$B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1) \subset U_{d_2}(b_2)$$

и

$$B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3) \subset U_{d_3}(c_3)$$

одноточечны. Замечаем, что если мы сколь угодно уменьшим d_1, то перестроенный в соответствии с уменьшенным расстоянием d_1 компакт K_d, обозначим его через $K_{d'}$ уже не будет компактом Штейнера, так как тогда, например, $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$, чего быть не может по определению расстояния Хаусдорфа. Аналогично, если сколь угодно уменьшим d_2, то $c_3 \notin B_{d_3}(K_{d'})$ и если сколь угодно уменьшим d_3, то снова $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$.

При этом $U_{d_1}(a_i) \cap K_d \neq \emptyset$, $U_{d_2}(b_i) \cap K_d \neq \emptyset$ и $U_{d_3}(c_i) \cap K_d \neq \emptyset$ для всех i. Таким образом, если в самом деле данный вектор d является решением проблемы Ферма — Штейнера для границы A, то у всех граничных компактов из A нет далёких точек.

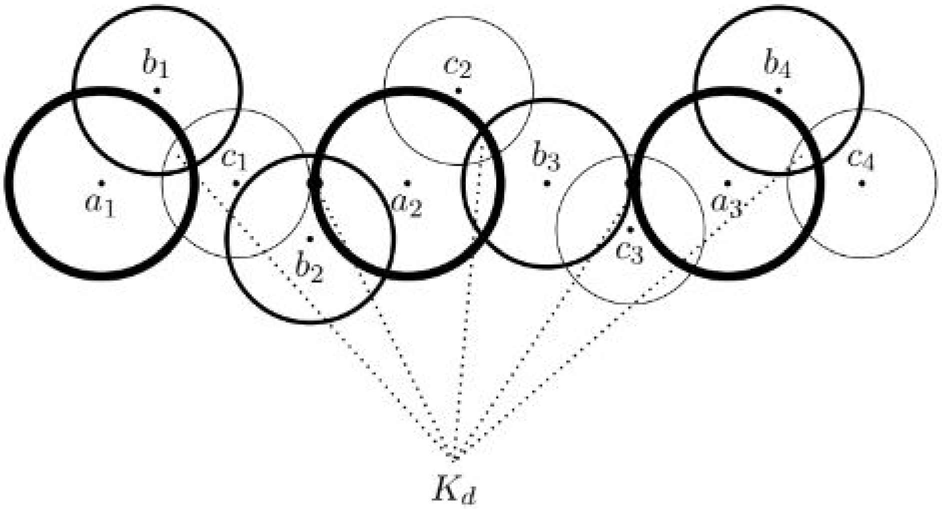

Рис. 3: Случай границы без далёких точек

Определение 10. *Пусть дана граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём неплотной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geqslant 0$, если $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$. Множество всех неплотных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $L^{A_i}_{\widetilde{d}}$. Также положим $L^{A}_{\widetilde{d}} = \bigcup_j L^{A_j}_{\widetilde{d}}$.*

Аналогично, если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j)\big) = \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big),$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Как в случае далёких точек, уточнение о том, для какого именно вектора $\widetilde{d}$ точка $a \in A_i$ является неплотной, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений из $\Omega(A)$ обозначаются в тексте через d, а их компоненты — через d_i.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, неплотные точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

Замечание 4. *В силу определения 8 далёкие точки всегда являются неплотными. Действительно, если $a \in F_d^{A_i}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и поэтому $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$ при $d_i > 0$, либо $B_{d_i}(a) \cap K_d = \{a\}$ при $d_i = 0$. Следовательно, $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$, то есть $a \in L_d^{A_i}$ — неплотная точка.*

Однако обратное, вообще говоря, неизвестно. А именно, неясно, всегда ли неплотные точки являются далёкими.

Утверждение 10. *Если $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Доказательство.

Напомним, что в настоящей работе через F_d^A обозначается множество всех далёких точек для вектора d, а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d. Согласно замечанию 4 имеем $F_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать $L_d^A \subset F_d^A$ при условии, что $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$.

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in F_d^A$, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Допустим противное, а именно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Возьмём $x \in U_{d_i}(a) \cap K_d$. В силу условия $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$ любая точка из K_d является точкой прикосновения для $\operatorname{Int} K_d$. Значит, так как $U_{d_i}(a)$ является окрестностью взятой точки $x \in K_d$, то $U_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$. Хорошо известно, что в топологических пространствах внутренность пересечения конечного числа множеств равна пересечению их внутренностей. Поэтому $\emptyset \neq U_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d = \operatorname{Int} B_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d = \operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$. Получили противоречие.

Значит, из $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$ следует $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Поэтому $L_d^A \subset F_d^A$. Отсюда $L_d^A = F_d^A$. Утверждение доказано.

□

Следствие 3. *Если $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$ и граница A выпукла, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Доказательство.

Граница A выпукла, поэтому K_d — выпуклый компакт как пересечение выпуклых множеств.

Известно [16, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества M с непустой внутренностью верно $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} M) = \operatorname{Cl} M$. Так как K_d — компакт, то $\operatorname{Cl} K_d = K_d$. Следовательно, $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$.

Таким образом, мы приходим к условию утверждения 10. Значит, для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.

□

Теорема 3. *Пусть граница A является выпуклой. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий далёкую для этого вектора решения точку.*

Доказательство.

Допустим противное, то есть что для всех A_i и всех точек $a \in A_i$ выполнено $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда $A_i \subset U_{d_i}(K_d)$ для любого i. Значит, положительна величина:

$$\gamma_i = \bigl|A_i\, \partial B_{d_i}(K_d)\bigr|.$$

Следовательно, в силу конечного числа компактов в границе A получаем

$$\gamma = \min_{i \in [1,n]} \gamma_i > 0.$$

Таким образом, для любого i согласно лемме 10 имеем

$$A_i \subset B_{d_i-\gamma}(K_d).$$

По условию все A_i выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при малых возмущениях d_i. Зафиксируем номер i. Таким образом, для $0 < \varepsilon < \gamma$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon\bigl(B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d\bigr).$$

Обозначим $B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d$ через K. Таким образом, $K_d \subset B_\varepsilon(K)$. Значит, для любого j согласно лемме 8 верно

$$A_j \subset B_{d_j-\gamma}(K_d) \subset B_{d_j-\gamma}\bigl(B_\varepsilon(K)\bigr) = B_{d_j-\gamma+\varepsilon}(K).$$

При этом $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j и $K \subset B_{d_i-\delta}(A_i)$. Значит, $d_H(K, A_j) \leqslant d_j$ и $d_H(K, A_i) \leqslant \max(d_i-\delta, d_i-\gamma+\varepsilon) < d_i$. Следовательно, $S(A, K) < S(A, K_d)$, получили противоречие. Теорема доказана.

□

Следствие 4. *Пусть граница A является выпуклой и $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий неплотную для этого вектора решения точку.*

Доказательство.

Согласно следствию 3 в случае выпуклой границы и непустой внутренности максимального компакта Штейнера K_d далёкие точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 3 у выпуклой границы существует по крайней мере одна далёкая точка. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

Определение 11. *Границу A, все элементы которой являются конечными множествами, назовём финитной.*

Определение 12. *Пусть дана граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Точку $a \in A_i$ назовём дискретной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geqslant 0$, если $\#B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$. Множество всех дискретных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $D_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j D_{\widetilde{d}}^{A_j}$.*

Снова, если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$\#B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \#B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = \#B_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Как с далёкими и с неплотными точками, ввиду ясности часто не будет уточняться вектор $\widetilde{d}$, для которого точка $a \in A_i$ является дискретной.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, дискретные точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

Утверждение 11. *Если $a \in A_i$ дискретна, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.*

Как было отмечено в замечании 3, доказательство утверждения 11 в наших условиях дословно повторяет соответствующее доказательство из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непересекающимися компактами.

Теорема 4. *Пусть $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница и норма пространства X строго выпукла. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка для этого вектора решения.*

Снова, как отмечено в замечании 3, доказательство теоремы 4 в точности такое же, как и в [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ с попарно непересекающимися граничными компактами.

Утверждение 12. *В случае финитной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ и пространства X со строго выпуклой нормой для вектора $d \in \Omega(A)$ неплотные точки совпадают с дискретными.*

Доказательство.

Напомним, что в настоящей работе через D_d^A обозначается множество всех дискретных точек для вектора d, а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d. Согласно утверждению 11 имеем $D_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать, что $L_d^A \subset D_d^A$ в случае финитной границы A и строго выпуклой нормы X.

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in D_d^A$, то есть $\#B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$. Имеем

$$K_d = \bigcup_{j_1,\dots,j_n} B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n}).$$

Так как по условию $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$, то

$$\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n})\bigr) = \emptyset$$

для всех наборов $j_1, \dots, j_n$. Значит, согласно лемме 7 каждое множество

$$B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n})$$

одноточечно. В силу финитности границы A таких множеств конечное число. Поэтому множество $B_{d_i}(a) \cap K_d$ состоит из конечного числа точек. Следовательно, точка a является дискретной точкой. Отсюда в силу произвольности a получаем $L_d^A \subset D_d^A$. Значит, $L_d^A = D_d^A$. Утверждение доказано.

□

Следствие 5. *Пусть граница A является финитной, а пространство X имеет строго выпуклую норму. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий неплотную для этого вектора решения точку.*

Доказательство.

Согласно утверждению 12 в случае финитной границы и пространства X со строго выпуклой нормой дискретные точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 4 у финитной границы существует по крайней мере одна дискретная точка для любого вектора $d \in \Omega(A)$. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

Из утверждений 10 и 12 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Если $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница, норма пространства X строго выпукла и выполняется условие $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$, то*

$$F_d^A = L_d^A = D_d^A.$$

Введём обозначения, которые нам понадобятся в следующих разделах настоящей работы. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{d}_j \geqslant 0$ для всех j. Положим также, что $Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$ — один из трёх типов точек $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$, $L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ или $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$, то есть $Y^{A_i}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A_i}_{\widetilde{d}}, L^{A_i}_{\widetilde{d}}, D^{A_i}_{\widetilde{d}}\}$ и $Y^{A}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A}_{\widetilde{d}}, L^{A}_{\widetilde{d}}, D^{A}_{\widetilde{d}}\}$. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}} \mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{i} \mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому в таком случае $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{d}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in Y^{A_i}_{d}$.

Подчеркнём, что в обозначении $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$ параметр $Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F^{A_i}_{\widetilde{d}}$ имеем $U_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ верно $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$; а при $p \in D^{A_i}_{\widetilde{d}}$ справедливо $\# B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Далее везде, где будет ясно, о какой границе A и о каком векторе $\widetilde{d}$ идёт речь, верхний индекс A и нижний индекс $\widetilde{d}$ будут опускаться, а именно, $\boldsymbol{Y^{A_i}_{\widetilde{d}}}$ **и** $\boldsymbol{Y^{A}_{\widetilde{d}}}$ **будут заменяться на** $\boldsymbol{Y^i}$ **и** $\boldsymbol{Y}$ соответственно при $Y \in \{F, L, D\}$.

Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

Леммы 13, 14, 15 и замечание 5 сформулированы, чтобы раскрыть геометрию множества $\mathrm{HP}(F^i)$, которое далее будет часто использоваться.

Лемма 13. *Если* $d_i = 0$, *то* $\mathrm{HP}(F^{A_i}_{d}) = A_i$.

Доказательство.

Так как $d_i = 0$, то для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) = \emptyset$, и значит, $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, $F^i = A_i$. Ввиду того, что $0 = d_i = d_H(A_i, K_d)$, имеем $A_i = K_d$. Поэтому $\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = A_i$.

□

Лемма 14. *Если* $A_i \subset K_d$ *и* $A_i \neq K_d$, *то* $\mathrm{HP}(F^{A_i}_{d}) = \emptyset$.

Доказательство.

Так как $A_i \subset K_d$ и $A_i \neq K_d$, то $d_i > 0$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ справедливо $U_{d_i}(a) \neq \emptyset$. При этом $a \in A_i \subset K_d$. Следовательно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой точки $a \in A_i$. Поэтому $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно замечанию 1 верно $\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = \emptyset$.

□

Заметим, что $\mathrm{HP}(F^{A_i}_{d})$ можно определить следующим образом. Ввиду того, что $F^{A_i}_{d}$ — это множество всех далёких точек в A_i, имеем $F^{A_i}_{d} = A_i \setminus U_{d_i}(K_d)$. Тогда по лемме 2 в силу компактности $F_d^{A_i}$ верно

$$\mathrm{HP}(F_d^{A_i}) = \bigcup_{p\in F_d^{A_i}} \mathrm{HP}(p, F_d^{A_i}) = \bigcup_{p\in F_d^{A_i}} \bigl(B_{d_i}(p)\cap K_d\bigr) = \Bigl(\bigcup_{p\in F_d^{A_i}} B_{d_i}(p)\Bigr)\cap K_d = B_{d_i}(F_d^{A_i})\cap K_d. \quad (4)$$

Замечание 5. *Множество* $\mathrm{HP}(F_d^{A_i})$ *— компакт как пересечение двух компактов.*

Лемма 15. *Множество* $\mathrm{HP}(F_d^{A_i})$ *непусто тогда и только тогда, когда* $F_d^{A_i}$ *непусто.*

Доказательство.
Согласно лемме 2

$$\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i)\cap K_d = \bigcup_{f\in F^i\subset A_i} B_{d_i}(f)\cap K_d.$$

Напомним, что для любой точки $a\in A_i$ верно $B_{d_i}(a)\cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, $\bigcup_{f\in F^i\subset A_i} B_{d_i}(f)\cap$ $\cap\, K_d \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^i \neq \emptyset$. Лемма доказана.
□

3.3. О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Главным результатом, содержащимся в данном разделе, является теорема 6 о *взаимосвязи* выпуклой границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ с максимальным компактом Штейнера K_d. Под *взаимосвязью* здесь имеется в виду то, как именно каждый шар $B_{d_i}(A_i)$ пересекается, то есть *взаимодействует*, с компактом K_d. Теорема 6 говорит о том, что это пересечение обязано содержать элементы из множества $\mathrm{HP}(F_d^A)\subset K_d$ (как было отмечено, более лаконично такое множество в тексте ещё обозначается через $\mathrm{HP}(F)$). Также теорема 6 утверждает, что если сам компакт A_i не порождает множество $\mathrm{HP}(F^i)\subset \mathrm{HP}(F)$, то есть если $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$, что эквивалентно $F^i = \emptyset$ согласно лемме 15, то тогда $\mathrm{HP}(F)\cap \partial B_{d_i}(A_i)\neq\emptyset$. Однако прежде чем переходить к формулировке этой теоремы и её доказательству, требуется ввести следующий вспомогательный результат, лемма 16.

Отметим, что все результаты настоящего раздела формулируются для некоторого вектора решения $d\in\Omega(A)$, где $A = \{A_1, \ldots, A_n\}\subset \mathcal{H}(X)$.

Пусть граница A выпукла, $\mathrm{HP}(F^i)\neq\emptyset$ и для некоторого $j\neq i$ верно $\mathrm{HP}(F^i)\subset U_{d_j}(A_j)$. Положим

$$\gamma = \bigl|\mathrm{HP}(F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\bigr|. \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 16. *Для любого* $0<\varepsilon<\gamma$ *найдётся* $\Delta>0$ *такое, что для любого* $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ *при*

$$H = B_{d_i+\delta}(F^i)\cap K_d$$

верно

$$\bigl|H\,\partial B_{d_j}(A_j)\bigr| \geqslant \gamma-\varepsilon > 0.$$

Доказательство.

Пусть $p\in F^i$, то есть $U_{d_i}(p)\cap K_d = \emptyset$. По условию все граничные компакты выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1 множество $\mathrm{HP}(p, F^i) = B_{d_i}(p)\cap K_d$ меняется непрерывно при увеличении d_i.

Пусть $0 < \varepsilon < \gamma$. Тогда для ε найдётся такое $\Delta > 0$, что для любого $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$ верно

$$H(p) := B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d \subset B_{d_i+\Delta}(p) \cap K_d \subset U_\varepsilon\big(B_{d_i}(p) \cap K_d\big) = U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big).$$

Заметим, что $\mathrm{HP}(p, F^i) \subset \mathrm{HP}(F^i)$. Напомним, что согласно (5) имеем $\big|\mathrm{HP}(F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\big| = \gamma$. Поэтому $\big|\mathrm{HP}(p, F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\big| =: \gamma' \geqslant \gamma$. Но тогда по лемме 11

$$\Big|U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big)\ \partial B_{d_j}(A_j)\Big| = \gamma' - \varepsilon \geqslant \gamma - \varepsilon.$$

Значит, так как $H(p) \subset U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big)$, то

$$\big|H(p)\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \geqslant \gamma - \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\inf_{p \in F^i}\big|H(p)\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \geqslant \gamma - \varepsilon > 0.$$

В силу компактности F^i, по лемме 2 имеем равенство

$$\bigcup_{p \in F^i} H(p) = \bigcup_{p \in F^i}\big(B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d\big) = \Big(\bigcup_{p \in F^i} B_{d_i+\delta}(p)\Big) \cap K_d = B_{d_i+\delta}(F^i) \cap K_d = H.$$

Следовательно, $\big|H\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \geqslant \gamma - \varepsilon > 0$. Лемма доказана.

□

Теорема 6 (О взаимосвязи выпуклой границы с K_d). *Пусть граница A выпукла и все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Тогда для любого номера i существует точка $p \in \mathrm{HP}(F)$ такая, что $p \in \mathrm{HP}(F^i)$ или $p \in \partial B_{d_i}(A_i)$.*

Доказательство.

Допустим противное, а именно, пусть существует номер i такой, что для любой $p \in \mathrm{HP}(F)$ верно $p \notin \mathrm{HP}(F^i)$ и $p \notin \partial B_{d_i}(A_i)$. Значит,

$$\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset.$$

Также по определению $\mathrm{HP}(F) \subset K_d$. Но $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$. Значит, $\mathrm{HP}(F) \subset B_{d_i}(A_i)$. Следовательно, ввиду $\mathrm{HP}(F) \cap \partial B_{d_i}(A_i) = \emptyset$ имеем

$$\mathrm{HP}(F) \subset U_{d_i}(A_i).$$

Так как $\mathrm{HP}(F^j) \subset U_{d_i}(A_i)$ и $\mathrm{HP}(F^j)$ — компакт согласно замечанию 5, то $\gamma_j = \big|\mathrm{HP}(F^j) \cdot \partial B_{d_i}(A_i)\big| > 0$ для всех непустых $\mathrm{HP}(F^j)$. По теореме 3 существует по крайней мере один $A_j \in A$ такой, что $\mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset$. Поэтому определено

$$\gamma = \min_{j\colon \mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset} \gamma_j > 0.$$

Пусть $\mathrm{HP}(F^k) \neq \emptyset$, что эквивалентно $F^k \neq \emptyset$ по лемме 15. Тогда согласно лемме 16 для $0 < \varepsilon < \gamma$ найдётся $R_k > 0$ такое, что для любого $0 < r_k \leqslant R_k$ верно $\Big|\big(B_{d_k+r_k}(F^k) \cap K_d\big)\ \partial B_{d_i}(A_i)\Big| \geqslant \gamma_k - \varepsilon \geqslant \gamma - \varepsilon > 0$.

Введём обозначения:

$$r = \min_{j\colon \mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset} r_j > 0;$$

$$H_j = B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d. \tag{6}$$

Согласно замечанию 1 если $F^j = \emptyset$, то $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$ и поэтому $H_j = \emptyset$. С другой стороны, так как $F^j \subset A_j$ и $B_{d_j}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой $a \in A_j$, то из $H_j = \emptyset$ следует $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$. Но $F^j \subset B_{d_j+r}(F^j)$. Значит, $F^j = \emptyset$. Таким образом, $H_j = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^j = \emptyset$.

Заметим, что из сказанного выше вытекает

$$\eta := \min_{j\colon H_j \neq \emptyset} \bigl|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\bigr| = \min_{j\colon F^j \neq \emptyset} \bigl|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\bigr| \geqslant \gamma - \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Отметим, что согласно замечанию 1 при $F^j = \emptyset$ верно $U_r(F^j) \subset B_r(F^j) = \emptyset$. Тогда для

$$A'_j := A_j \setminus U_r(F^j) \tag{8}$$

имеем $A'_j \subset A_j$ и при $F^j = \emptyset$ получаем $A'_j = A_j$.

Замечаем, что $A'_j \subset U_{d_j}(K_d)$ для любого j. Следовательно, в силу компактности A'_j, для всех непустых A'_j положительна величина $\mu_j = \bigl|A'_j\, \partial B_{d_j}(K_d)\bigr|$. Поэтому, так как все d_i положительны, получаем

$$\mu = \min\{ \min_{A'_j \neq \emptyset} \mu_j, \min_i d_i\} > 0.$$

Таким образом, для любого j в силу леммы 10 имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d). \tag{9}$$

По условию все A_j выпуклы. Также по условию $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, верно $|A_i\, K_d| < d_i$. Поэтому согласно теореме 1 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при небольших уменьшениях d_i. Значит, для $0 < \varepsilon < \min\{\eta, \mu\}$ существует $0 < \delta \leqslant d_i - |A_i\, K_d|$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon\bigl(B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d\bigr).$$

Без ограничения общности будем считать $\delta \leqslant \varepsilon$. Для удобства введём обозначение

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d. \tag{10}$$

Таким образом,

$$K_d \subset B_\varepsilon(K). \tag{11}$$

Для любого j в силу (6) верно $H_j \subset K_d \subset B_{d_i}(A_i)$ и в силу (7) для всех непустых H_j имеем $0 < \eta \leqslant \bigl|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\bigr|$. Но $\delta \leqslant \varepsilon < \eta$, поэтому по лемме 10 имеем $H_j \subset B_{d_i-\delta}(A_i)$ для всех j. При этом, как отмечалось выше, $H_j \subset K_d$. Значит, ввиду (10) для всех j верно

$$H_j \subset K. \tag{12}$$

Лемма 17. *Для всех j верно $A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K)$.*

Доказательство.

Если $F^j = \emptyset$, то $A_j \cap U_r(F^j) = \emptyset \subset B_{d_j}(K)$. Пусть теперь $F^j \neq \emptyset$.

Для произвольной $p \in A_j$ имеем $B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset$. Значит, для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ тоже верно

$$B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset. \tag{13}$$

Однако согласно лемме 8 имеем

$$B_{d_j}\bigl(A_j \cap U_r(F^j)\bigr) \subset B_{d_j}\bigl(U_r(F^j)\bigr) \subset B_{d_j}\bigl(B_r(F^j)\bigr) = B_{d_j+r}(F^j). \tag{14}$$

Отсюда в силу (14), (6), и (12) справедливо

$$B_{d_j}\big(A_j \cap U_r(F^j)\big) \cap K_d \subset B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d = H_j \subset K. \tag{15}$$

Согласно замечанию 2 верно $\bigcup\limits_{p\,\in\, A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p) \subset B_{d_j}\big(A_j \cap U_r(F^j)\big)$. Поэтому в силу (15) справедливо

$$\Big(\bigcup_{p\,\in\, A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p)\Big) \cap K_d \subset K. \tag{16}$$

Отсюда для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ в силу (13) и (16) имеем $\emptyset \neq B_{d_j}(p) \cap K_d \subset K$. Значит, $p \in B_{d_j}(K)$. Следовательно,

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

Лемма 18. *Для всех j верно $A_j \subset B_{d_j}(K)$.*

Доказательство.

Для любого j в силу (9) имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d) \tag{17}$$

Согласно (11) верно

$$B_{d_j-\mu}(K_d) \subset B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K). \tag{18}$$

Но ввиду сделанного выше выбора $0 < \varepsilon < \mu$ справедливо

$$B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K) \subset B_{d_j}(K). \tag{19}$$

Отсюда согласно (17), (18) и (19) получаем

$$A'_j \subset B_{d_j}(K). \tag{20}$$

При этом по лемме 17 справедливо

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K) \tag{21}$$

Но ввиду (8) для любого j верно

$$A_j = A'_j \cup \big(A_j \cap U_r(F^j)\big). \tag{22}$$

Значит, в силу (20), (21) и (22) получаем

$$A_j \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

Заметим, что $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j. Значит, по лемме 18 для всех j имеем

$$d_H(K, A_j) \leqslant d_j. \tag{23}$$

Лемма 19. $d_H(K, A_i) \leqslant \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$.

Доказательство.

Напомним, что по предположению $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$, что по лемме 15 эквивалентно $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно (8) и замечанию 1 верно

$$A'_i = A_i \setminus U_r(F^i) = A_i. \tag{24}$$

Далее, в силу (10)

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d \subset B_{d_i-\delta}(A_i).$$

При этом ввиду (24), (17) и (18) верно

$$A_i = A'_i \subset B_{d_i-\mu+\varepsilon}(K).$$

Поэтому $d_H(K, A_i) \leqslant \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$, так как $0 < \varepsilon < \mu$. Лемма доказана.

□

Следовательно, согласно (23) и лемме 19 верно $S(A, K) < S(A, K_d)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

□

3.4. Устойчивость границы в проблеме Ферма — Штейнера

Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Обозначим границу $\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$ через A^{Conv}. Введём определение устойчивой границы.

Определение 13. *Финитную границу $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ назовём устойчивой, если $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$, иначе — неустойчивой.*

Замечание 6. *В силу следствия 2 для любой финитной границы A верно неравенство $S_A \geqslant S_{A^{\mathrm{Conv}}}$.*

Напомним, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$ в разделе 3.1 было обозначено через K_d^{Conv}. Справедливость следующего утверждения была показана в работе [14], однако здесь приводится его альтернативное доказательство на основе следствия 2.

Утверждение 13 (Необходимое условие устойчивости). *Если граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ устойчива, то $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и для любого $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$ множество K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$.*

Доказательство.

Пусть $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ устойчива. Возьмём $d \in \Omega(A)$. В силу $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$ и следствия 2 мы получаем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = d_i$ для всех i. Отсюда существует класс решений $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$ и, таким образом, $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$. Значит, так как $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$, мы получаем, что K_d^{Conv} — максимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$. Также мы показали, что $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$.

□

Пусть нам дана финитная граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (неважно, устойчивая или нет), произвольный вектор решения $d \in \Omega(A)$ и соответствующий компакт $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. Чтобы сформулировать следующие утверждения, напомним некоторые обозначения, введённые в разделе 3.2, а именно, выпишем их для частного случая вектора $d \in \Omega(A)$ и границы $A^{\mathrm{Conv}} = \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$:

- $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \big\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset\big\}$;
- $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) := B_{d_i}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$;
- $\mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big) := \bigcup\limits_i \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big)$;
- $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \big\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = \emptyset\big\}$.

Из утверждения 13 и теоремы 3 вытекает следующее следствие.

Следствие 6 (Первое достаточное условие неустойчивости). *Пусть граница* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *финитна и* $d \in \Omega(A)$. *Если для всех* i *верно* $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ *или для всех* i *верно* $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, *то граница* A *неустойчива.*

Доказательство.

Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 13 верно, что $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$.

Пусть для всех i выполняется $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. В таком случае вектор решения $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ является вектором, для которого ни в одном граничном компакте нет далёких точек. Так как граница A^{Conv} выпукла, то мы приходим к противоречию с теоремой 3.

Пусть теперь для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. Тогда согласно определению множества $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ для всех $a \in \mathrm{Conv}(A_i)$ справедливо, что

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = \mathrm{Int}\, B_{d_i}(a) \cap \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Отсюда $\mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Значит, согласно следствию 3 в силу выпуклости границы A^{Conv} получаем

$$L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}.$$

Таким образом, снова имеем ситуацию, когда для всех i выполнено $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, что в случае выпуклой границы противоречит теореме 3, как отмечено выше. Следовательно, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

□

Далее, также из утверждения 13 и теоремы 6 вытекает следствие ниже.

Следствие 7 (Второе достаточное условие неустойчивости). *Пусть граница* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *финитна. Пусть также все* d_i *положительны для некоторого* $d \in \Omega(A)$. *Если существует номер* s *такой, что* $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ *и для любой* $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ *верно* $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, *тогда граница* A *неустойчива.*

Доказательство.

Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 13 компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$. Таким образом, мы пришли к тому, что существует номер s такой, что для всех точек $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно, что $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ $\Big($так как $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset\Big)$ и согласно условию $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Также отметим, что граница A^{Conv} является выпуклой и по условию все d_i положительны. Следовательно, получаем противоречие с теоремой 6. Значит, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

□

Следующая теорема даёт альтернативный способ понять, когда свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 6 не выполняется для K_d^{Conv} и вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, эта теорема говорит, при каких условиях для номера s и всех точек $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ будет верно $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ и $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Преимущество этого способа заключается в том, что в нём ненужно находить все множества $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big)$.

Итак, положим

$$U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Заметим, что так как внутренность пересечения равна пересечению внутренностей, то верно $U_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Int}\, B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. Отметим, что для любого $K \in \mathcal{H}(X)$ при $r > 0$ справедливо $\mathrm{Int}\, B_r(K) = U_r(K)$, а при $r = 0$ и $\mathrm{Int}\, K \neq \emptyset$ выполнено $\mathrm{Int}\, B_0(K) = \mathrm{Int}\, K \neq U_0(K) = \emptyset$.

Напомним, что согласно теореме 4 в случае финитной границы A и пространства X со строго выпуклой нормой для любого класса $\Sigma_d(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка, то есть $\mathrm{HP}(D_d^A) \neq \emptyset$.

Всюду далее в случае финитной границы A количество точек в компакте $A_i \in A$ будет обозначаться через m_i.

Сформулируем отдельно условия, которыми будем пользоваться в рамках данной работы.

Условия 1.

(1) *Норма пространства X строго выпукла;*

(2) *Граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна;*

(3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, *где* $d \in \Omega(A)$;

(4) $d_s > 0$;

(5) $\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

В силу утверждения 12 имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий 1 можно заменить на

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{25}$$

Более того, если также выполнено $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то по теореме 5 получаем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий 1 или выражение (25) можно заменить на

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{26}$$

Теорема 7 (Условия нарушения взаимосвязи K_d^{Conv} с границей A^{Conv}). *Пусть выполнены все пункты* (1)–(5) *из условий* 1. *Тогда для любой точки* $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ *верно* $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ *и* $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$.

Доказательство.

Будем считать, что пункты (1)–(5) из условий 1 выполнены. Опишем план доказательства. В начале будет показано, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ — лемма 20. Затем мы покажем, что при $i \neq s$ для любой точки $a \in A_i \cap F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ верно $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) = \emptyset$ — лемма 21. И наконец, докажем, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \cap \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) = \emptyset$ при $i \neq s$ — лемма 23.

Лемма 20. $F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)} = \emptyset$ *и, значит,* $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$.

Доказательство.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Отметим, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap \cap K_d \subset \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пункту (5) из условий 1 справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

Если $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$, то $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ и, значит, $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Напомним, что мы имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Поэтому в данном случае верно $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 12 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, и, значит, $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Отсюда в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ также бесконечно. Значит, тоже получаем $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ верно $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$, то есть $A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$. Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 4 множество $U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset \mathrm{Conv}\Big(U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big) = U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Отсюда для любой точки $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Поэтому $F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)} = \emptyset$ и, значит, в силу замечания 1 имеем

$$\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = B_{d_s}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset.$$

Лемма доказана.

□

Лемма 21. $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ *для любой* $a \in A_i \cap F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ *при* $i \neq s$.

Доказательство.

Так как $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$. Поэтому в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ одноточечно. Но тогда пересечение $B_{d_i}(a) \cap K_d$ тоже одноточечно как непустое подмножество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$, то есть

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = B_{d_i}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}). \tag{27}$$

Ввиду пунктов (4) и (5) из условий 1, а также в силу $U_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Int}\, B_{d_j}\big(\mathrm{Conv}(A_j)\big)$ справедливо

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big), \tag{28}$$

При этом так как $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset K_d \subset B_{d_s}(A_s)$ и $B_{d_s}(A_s) = \bigcup\limits_{j=1}^{m_s} B_{d_s}(a_j^s)$ по лемме 2 ввиду компактности A_s, то согласно лемме 3

$$\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \setminus \bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap \bigcup_{j=1}^{m_s} U_{d_s}(a_j^s) = \\ = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \quad (29)$$

Отсюда в силу (28) и (29) получаем $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Значит, ввиду (27)

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Лемма доказана.

□

Лемма 22. *Пусть $i \neq s$, $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ и для каждой $a_j^i \in A_i$ выполняется*

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset.$$

Тогда верно

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Доказательство.

Имеем $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} \subset \mathrm{Conv}(A_i)$. Значит, по свойству выпуклых оболочек найдутся такие $\lambda_j \geqslant 0$ с условием $\sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_j = 1$, что $a = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_j a_j^i$. В таком случае для каждой $a_j^i \in A_i$ возьмём точку $p_j \in B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. В силу выпуклости $K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ верно

$$p := \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j p_j \in K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Но тогда так как $p_j \in B_{d_i}(a_j^i)$, то

$$||a - p|| = ||\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j (a_j^i - p_j)|| \leqslant \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j ||a_j^i - p_j|| \leqslant d_i.$$

Значит, справедливо $p \in B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Но в силу строгой выпуклости нормы пространства X, выпуклости компакта K_d^{Conv}, а также согласно условию $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$ множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ одноточечно. Значит, $\{p\} = B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Лемма доказана.

□

Лемма 23. $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ *для любой* $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ *при* $i \neq s$, *то есть* $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$.

Доказательство.

Пусть $a \in \mathrm{Conv}(A_i) \setminus A_i$, где $i \neq s$, и

$$a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}, \quad (30)$$

то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$.

Нам нужно показать, что $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Докажем, что для каждой $a_j^i \in A_i$ множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ непусто.

Существует два случая. Первый, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$, то есть $a_j^i \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$. Но тогда по лемме 21 справедливо $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Поэтому $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s} \cdot \cdot \big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$, так как $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ ввиду $a_j^i \in A_i \subset B_{d_i}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$ согласно определению расстояния Хаусдорфа.

Второй случай, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, то есть $a_j^i \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$. По условию $U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, поэтому K_d^{Conv} выпуклое множество с непустой внутренностью. Значит, по лемме 12 если $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, то $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Если же $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$, то всё равно $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, так как $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ согласно предположению. Отсюда $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Но так как $K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, то $U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Следовательно, $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$, и отсюда $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$.

Таким образом, для каждой $a_j^i \in A_i$

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset.$$

Значит, согласно условию (30) и в силу леммы 22 справедливо

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$$

при $i \neq s$. Отсюда ввиду произвольности точки $a \in \mathrm{Conv}(A_i) \setminus A_i$ и леммы 21 получаем

$$\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Лемма доказана.

□

Таким образом, для любой точки $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ согласно лемме 20 и $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ согласно лемме 23. Доказательство теоремы закончено.

□

3.5. О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на уменьшение веса сети

Теорема 7 из предыдущего раздела говорит о том, что в случае выполнения пунктов (1)–(5) из условий 1 для K_d^{Conv} нарушается свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 6. В свою очередь если все $d_i > 0$, то следствие 7 говорит, что при нарушении свойства из теоремы 6 для K_d^{Conv} граница A оказывается неустойчивой.

Целью данного раздела является поиск значения $\delta' > 0$ такого, что при выполнении всех пунктов (1)–(5) условий 1 для любого $0 < \delta \leqslant \delta'$ справедливо

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s - \delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \geqslant \delta. \tag{31}$$

Отметим, что из неравенства (31) по определению вытекает неустойчивость границы A. Таким образом, в данном разделе мы заодно докажем, что пунктов (1)–(5) из условий 1 уже достаточно, чтобы граница A была неустойчивой, то есть ненужно требовать положительности всех компонент d_i вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, следствием 7 в этом случае пользоваться уже необязательно.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 24. *Пусть выполнены все пункты* (1)–(5) *условий* 1. *Тогда*

$$\emptyset \neq \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Доказательство.

Согласно теореме 4 из пунктов (1) и (2) условий 1 вытекает $\emptyset \neq \mathrm{HP}(D_d^A)$.

Далее, в силу определений $\mathrm{HP}(D_d^A)$ и K_d имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) \subset K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, значит,

$$\mathrm{HP}(D_d^A) \subset B_{d_s}(A_s). \tag{32}$$

Ввиду компактности A_s по лемме 6 справедливо $\partial B_{d_s}(A_s) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)$. Поэтому, а также согласно пункту (5) из условий 1 и определению U_d^{Conv} верно

$$\partial B_{d_s}(A_s) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{33}$$

При этом

$$U_{d_s}(A_s) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{34}$$

Таким образом, из (32), (33) и (34) получаем $\mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$.

□

Замечание 7. *Ввиду утверждения* 12 *в рамках выполнения пунктов* (1) *и* (2) *условий* 1 *верно* $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, *поэтому согласно лемме* 24 *из условий* 1 *также следует*

$$\mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

И если при этом справедливо $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, *то в силу теоремы* 5 *и леммы* 24 *в условиях* 1 *имеем*

$$\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Обозначим мультимножество $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ через $\widetilde{A}$. Нам понадобятся следующие определения.

Определение 14. *Отношением между множествами M и N называется произвольное подмножество декартова произведения $M \times N$.*

Определение 15. *Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$, где X — произвольное конечномерное нормированное пространство, и $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \Omega(A)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \widetilde{A}$ следующим образом: $(p, a_j^i) \in R(K)$, если и только если $|p\, a_j^i| \leqslant d_i$, где $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} \{a_j^i\}$. Отношение $R(K)$ назовем d-каноническим или просто каноническим.*

Определение 16. *Пусть дано отношение $R \subset M \times N$. Двудольный граф G_R с мультимножеством вершин $M \sqcup N$, две вершины $m \in M$ и $n \in N$ которого соединены ребром, если и только если $(m, n) \in R$, называется графом отношения R.*

Нам будет нужен алгоритм из работы [13] построения минимального компакта Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ в случае финитной границы A.

Алгоритм 1. *[13]*

- *Шаг 1. Пусть $K' \in \Sigma_d(A)$ — произвольный компакт Штейнера, например, $K' = K_d = \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, и $R' = R(K')$ — каноническое отношение.*

- *Шаг 2. Для каждой* $a^i_j \in \widetilde{A}$ *выберем* $p \in K'$ *такую, что* $(p, a^i_j) \in R'$ *(для разных* a^i_j *выбранные точки могут совпадать); множество выбранных точек обозначим через* K. *Подчеркнём, что* K *не является мультимножеством, то есть в отличие от* $\widetilde{A}$ *каждая точка в* K *встречается единожды. Таким образом, мы получим каноническое отношение* $R = R(K)$ *как ограничение* R' *на* $K \times \widetilde{A}$. *Возьмём граф* G_R *этого отношения.*
- *Шаг 3. Если в* K *содержатся точки, являющиеся вершинами графа* G_R, *смежными лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем её из множества* K, *перестраиваем отношение* $R(K)$ *и граф* G_R. *Повторяем Шаг 3 до тех пор, пока это возможно.*

Утверждения 14 и 15 формулируются для случая произвольного конечномерного нормированного пространства X.

Утверждение 14. *Алгоритм* 1 *корректен, результат его работы — минимальный компакт Штейнера.*

Утверждение 15. *С помощью алгоритма* 1 *может быть построен любой минимальный компакт* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$.

Как отмечено в замечании 3, доказательства утверждений 14 и 15 дословно повторяют соответствующие доказательства из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непересекающимися компактами. Отметим, что в доказательстве утверждения 14 из работы [13] доказательство теоремы, на которую оно ссылается, также остаётся дословно таким же в случае произвольного конечномерного нормированного пространства X и, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов.

Определение 17. *Минимальный компакт* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *назовём погружённым, если* $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D^A_d) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.

Утверждение 16. *Пусть норма пространства* X *строго выпукла, граница* A *финитна и* $\mathrm{Int}\, K_d = \emptyset$ *в некотором классе* $\Sigma_d(A)$. *Тогда*

$$K_d = \mathrm{HP}(D^A_d) = \mathrm{HP}(L^A_d).$$

Доказательство.
По определению максимального компакта Штейнера имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a^i_j)\Big) = \bigcup_{j_1\in\{1,\ldots,m_1\},\,\ldots,\,j_n\in\{1,\ldots,m_n\}} B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n}). \tag{35}$$

Если множество $B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n})$ состоит более чем из одной точки, то согласно лемме 7 в силу строгой выпуклости нормы пространства X это множество имеет непустую внутренность. Но тогда и K_d имеет непустую внутренность, что противоречит условию. Значит, в (35) каждое множество $B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n})$ либо пусто, либо одноточечно. Ввиду финитности границы A таких множеств конечное число. Значит, $\#K_d < \infty$. Но тогда $\#B_{d_i}(a^i_j) \cap K_d < \infty$ для любого $a^i_j \in A_i$, то есть $D^{A_i}_d = A_i$ для всех i. Следовательно, $B_{d_i}(a^i_j) \cap K_d = \mathrm{HP}(a^i_j, D^{A_i}_d)$ для любого $a^i_j \in A_i$. Отсюда, а также ввиду $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a^i_j)\Big)$ имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a^i_j) \cap K_d\Big) = \bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i} \mathrm{HP}(a^i_j, D^{A_i}_d) = \mathrm{HP}(D^A_d).$$

Так как по условию норма пространства X строго выпукла, а граница A финитна, то согласно утверждению 12 также имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$. Таким образом, получаем

$$K_d = \mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A).$$

□

Следствие 8. *Пусть норма пространства X строго выпукла, граница A финитна и $\operatorname{Int} K_d = \emptyset$ в некотором классе $\Sigma_d(A)$. Тогда любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является погружённым.*

Доказательство.

Согласно утверждению 16 в наших условиях имеем $K_d = \mathrm{HP}(D_d^A)$. Но $K_\lambda \subset K_d$. Значит, $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) = \emptyset$. Таким образом, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

Утверждение 17. *Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Тогда любой класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе погружённый минимальный компакт K_λ.*

Доказательство.

Доказательство будет конструктивным, а именно, мы в явном виде построим такой компакт на основе алгоритма 1.

Итак, на шаге 1 в качестве компакта K' возьмём максимальный компакт Штейнера K_d. Далее на шаге 2 этого алгоритма для каждой a_j^i точку p будем выбирать следующим образом. Если a_j^i не является дискретной (или не является неплотной, или при $\mathrm{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$ не является далёкой, см. теорему 5 о равенстве множеств D_d^A, L_d^A и F_d^A), то согласно лемме 7 в пространстве со строго выпуклой нормой множество

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\dots,m_1\},\, \dots,\, j_n \in \{1,\dots,m_n\}} B_{d_i}(a_j^i) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$$

имеет непустую внутренность:

$$\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\bigr) \neq \emptyset,$$

и в таком случае на шаге 2 построения мы возьмём точку p именно из

$$\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\bigr) = U_{d_i}(a_j^i) \cap \operatorname{Int} K_d \subset \operatorname{Int} K_d.$$

А если a_j^i дискретна, то по определению $\mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$, и значит, $(p, a_j^i) \in R'(K_d)$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i})$.

Наконец, шаг 3 проведём в точности так, как описано в алгоритме 1. В итоге получим, что по построению $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \operatorname{Int} K_d$. Значит, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

Следствие 9. *Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Если минимальный компакт Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ — единственный минимальный компакт в своём классе решений, то K_λ является погружённым.*

Отметим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8 ([13]). *Пусть норма пространства X строго выпукла и граница $A \subset \mathcal{H}(X)$ финитна. Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a_j^i такая, что $\mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = \{p\}$.*

Как было сказано в замечании 3, доказательство теоремы 8 дословно повторяет соответствующее доказательство из [13] для случая $X = \mathbb{R}^m$ и финитной границы A с попарно непересекающимися компактами. Отметим, что в этом доказательстве из работы [13] доказательства всех утверждений, на которые оно ссылается, также остаются дословно теми же в случае произвольного пространства X со строго выпуклой нормой и, быть может, пересекающимися конечными граничными компактами.

Лемма 25. *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 1 *выполнены и минимальный компакт Штейнера* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *является погружённым. Тогда*

$$\delta_1 := \Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0.$$

Доказательство.

В силу леммы 24 верно

$$K_\lambda \cap \operatorname{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big). \tag{36}$$

Но по определению погружённого минимального компакта верно

$$K_\lambda \setminus \operatorname{HP}(D_d^A) \subset \operatorname{Int} K_d \subset U_d^{\operatorname{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big). \tag{37}$$

Значит, согласно (36) и (37)

$$K_\lambda \subset U_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big).$$

Наконец, в силу компактности K_λ и $\partial B_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big)$ получаем $\Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\operatorname{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0$.

□

Лемма 26. *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 1 *выполнены, тогда*

$$\delta_2 := \Big| \operatorname{Conv}(A_s) \ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\operatorname{Conv}}\big) \Big| > 0.$$

Доказательство.

Аналогично доказательству леммы 20 покажем, что

$$\operatorname{Conv}(A_s) \subset U_{d_s}\big(K_d^{\operatorname{Conv}}\big).$$

Для этого сначала докажем $A_s \subset U_{d_s}\big(K_d^{\operatorname{Conv}}\big)$.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Напомним, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \operatorname{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap \cap K_d \subset \operatorname{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\operatorname{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \operatorname{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пунктам (3) и (5) условий 1 справедливо

$$\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\operatorname{Conv}}. \tag{38}$$

Далее возможны два варианта.

Первый, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$. Тогда $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\operatorname{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$.

Второй вариант, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Ввиду (38) справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как $U_d^{\operatorname{Conv}}$ открыто, по лемме 12 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$. Таким образом, когда $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\operatorname{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\operatorname{Conv}}$. Отсюда согласно пункту (1) условий 1 и выпуклости компакта $K_d^{\operatorname{Conv}}$ верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\operatorname{Conv}} \neq \emptyset$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ имеем $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, что эквивалентно

$$A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}}).$$

Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 4 множество $U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset \mathrm{Conv}\Big(U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big) = U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big). \tag{39}$$

Поэтому ввиду компактности $\mathrm{Conv}(A_s)$ из пунктов (1)–(5) условий 1 вытекает: $\Big|\mathrm{Conv}(A_s)\ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > 0$. Лемма доказана.
□

Теорема 9 (Теорема об уменьшении веса сети или третье достаточное условие неустойчивости). *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 1 *выполнены. Тогда граница* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *неустойчива. Более того, в таком случае согласно леммам* 25 *и* 26 *выполнено* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$, *значит,* $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$. *Выберем произвольное* $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ *и положим*

$$K = B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{40}$$

Тогда также справедливо следующее неравенство:

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geqslant \delta. \tag{41}$$

Доказательство.

Из неравенства (41) прямо вытекает неустойчивость границы A. Поэтому доказательство теоремы будет заключаться в доказательстве справедливости неравенства (41). Оно будет состоять из двух частей, каждая из которых оформлена в отдельную лемму.

Лемма 27. *Верно неравенство*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_s), K\big) \leqslant d_s - \delta < d_s.$$

Доказательство.

В силу выражения (39), леммы 26, выпуклости K_d^{Conv}, положительности d_s и леммы 10 получаем $\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$. Это эквивалентно тому, что для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ верно

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Отсюда, а также согласно (40) для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ справедливо

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K = B_{d_s-\delta}(a) \cap B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}(K). \tag{42}$$

Таким образом, в силу (40) и (42) имеем $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_s), K\big) \leqslant d_s - \delta < d_s$.
□

Теперь рассмотрим произвольный граничный компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$, $i \neq s$.

Лемма 28. *Верно неравенство*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K\big) \leqslant d_i.$$

Доказательство.

Имеем

$$K \subset K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big). \tag{43}$$

Покажем далее, что $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Согласно лемме 25, выпуклости $\mathrm{Conv}(A_s)$, положительности d_s и лемме 10 имеем $K_\lambda \subset \subset B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. И так как $K_\lambda \subset K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$, то в силу (40) получаем

$$K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = K.$$

Отсюда, а также согласно $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо

$$A_i \subset B_{d_i}(K_\lambda) \subset B_{d_i}(K). \tag{44}$$

Множество K выпукло как пересечение выпуклых, и $B_{d_i}(K)$ выпукло по лемме 3. Таким образом, в силу (44), так как выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества, имеем $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Поэтому, а также в силу (43) для всех $i \neq s$ справедливо

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K\big) \leqslant d_i.$$

□

Ввиду лемм 27 и 28 получаем

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geqslant \delta > 0.$$

Следовательно, по определению граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива. Теорема доказана.

□

3.6. Пример неустойчивой границы

В качестве примера возьмём конфигурацию из работы [13], где $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}\big(\mathbb{R}^2\big)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i, см. рис. 4.

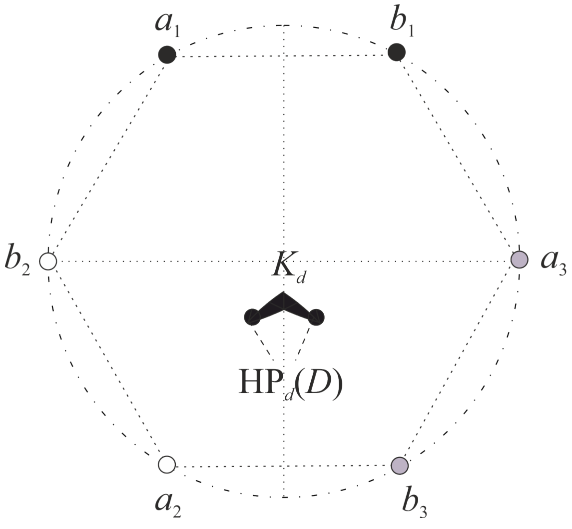

Рис. 4: Конфигурация из работы [13].

В данной конфигурации множество точек $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ расположено на единичной окружности с центром в начале координат, и оно является множеством вершин правильного шестиугольника. Координаты точек следующие:

$$a_1 = \Big(-\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Big);$$

$$b_1 = \Big(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Big);$$

$$a_2 = \Big(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Big);$$

$$b_2 = (-1, 0);$$

$$a_3 = (1, 0);$$

$$b_3 = \Big(\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Big).$$

На рис. 4 изображён максимальный компакт Штейнера K_d одного из трёх классов решений для границы A. Также в границе K_d выделено множество $\mathrm{HP}(D)$, которое в данном случае состоит из двух точек и совпадает с минимальным компактом Штейнера K_λ, являющимся единственным минимальным компактом в рассматриваемом классе решений, см. работу [13].

Возьмём теперь границу $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \mathrm{Conv}(A_2), \mathrm{Conv}(A_3)\big\}$, см. рис. 5, и обозначим левую точку $\mathrm{HP}(D)$ через p, а правую — через q.

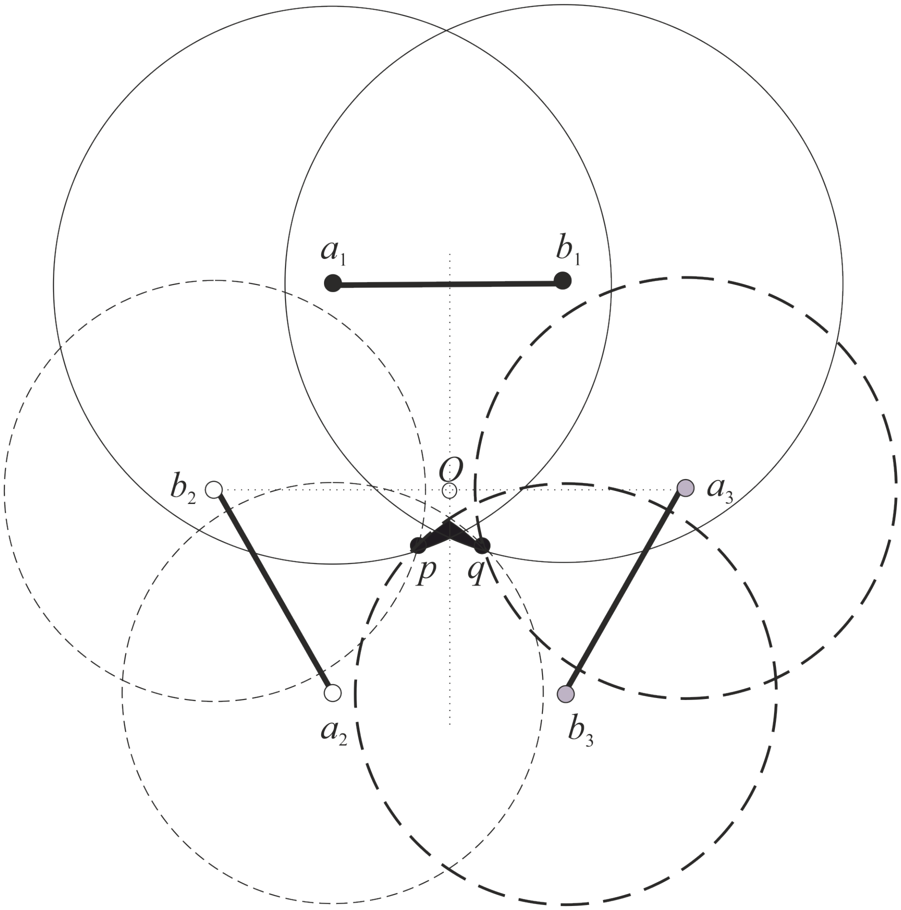

Рис. 5: Граница A^{Conv} и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Согласно работе [13]

$$|O\,p| = |O\,q| = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} < 0.5. \tag{45}$$

Также точка p лежит на отрезке $[O, a_2]$ и угол между $[O, a_2]$ и $[O, b_2]$ равен $\pi/3$. Значит, в декартовых координатах

$$p = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} \cdot \bigl(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\bigr).$$

Точка q располагается зеркально относительно вертикальной оси симметрии, проходящей через точку O, поэтому

$$q = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} \cdot \bigl(\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\bigr).$$

3.6.1. Обоснование неустойчивости

Норма евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ строго выпукла, описанная выше граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ финитна и $U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Рассмотрим компакт $A_1 = \{a_1, b_1\}$. По условию $d_1 > 0$. Таким образом, в данном примере выполняются пункты (1)–(4) из условий 1. Покажем, что для расстояния d_1 также выполняется пункт (5) из условий 1:

$$\Bigl(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^{3} U_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr) = U_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Имеем $K_\lambda = \mathrm{HP}(D) \subset \partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)$, см. рис. 5. Поэтому

$$\Bigl(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D).$$

Следовательно, нам нужно доказать, что $\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Покажем сначала, что $\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_1}\bigl(\mathrm{Conv}(A_1)\bigr)$.

В силу (45) абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1. При этом $p \in B_{d_1}(a_1)$ и $q \in B_{d_1}(b_1)$. Поэтому $\bigl|p\ [a_1, b_1]\bigr| < d_1$ и $\bigl|q\ [a_1, b_1]\bigr| < d_1$. Следовательно,

$$\mathrm{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_1}\bigl(\mathrm{Conv}(A_1)\bigr).$$

Далее покажем $\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr)$. Согласно доказанному в работе [13] имеем $p \in U_{d_2}(a_2)$, поэтому нам надо только показать, что $q \in U_{d_2}\bigl([a_2, b_2]\bigr)$. Заметим, что треугольник a_2Ob_2 является правильным, и его сторона равна 1, так как a_i, b_i — вершины правильного шестиугольника со стороной 1 согласно условию. Отсюда высота, опущенная из вершины O, поделит противоположную сторону на два отрезка длиной 0.5 каждый. Далее, как уже было отмечено, p лежит на отрезке $[O, a_2]$, а точка q расположена симметрично относительно оси ординат. Следовательно, $q \in [O, b_3]$, и в силу (45) справедливо $|O\,q| < 0.5$. Значит, ввиду параллельности отрезков $[a_2, b_2]$ и $[O, b_3]$ проекция q на $[a_2, b_2]$ попадёт внутрь этого отрезка. При этом $q \in B_{d_2}(a_2)$. Отсюда расстояние от q до отрезка $[a_2, b_2]$ меньше d_2. Значит,

$$\mathrm{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr).$$

В силу зеркальной симметрии аналогично доказывается, что $\{p, q\} \subset U_{d_3}\bigl(\mathrm{Conv}(A_3)\bigr)$. Таким образом, мы показали

$$\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr)$$

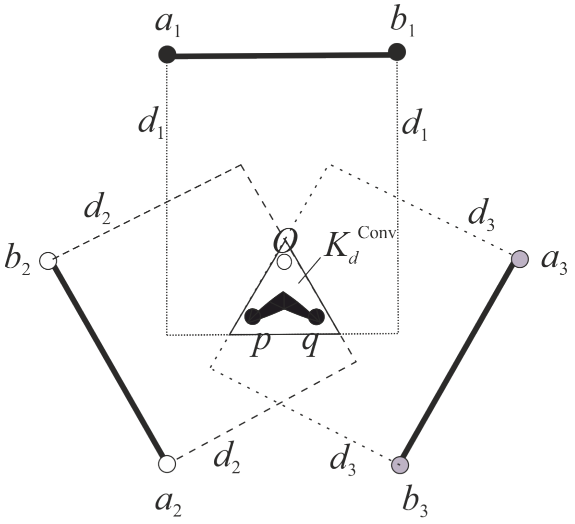

Рис. 6: $\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}} = \operatorname{Int} K_d^{\text{Conv}}$.

для всех i, см. рис. 6. Следовательно, мы нашли компакт A_1 такой, что

$$\emptyset \neq \Big(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^{3} U_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big) = U_d^{\text{Conv}}.$$

Значит, все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены для $s = 1$. Отсюда согласно теореме 9 граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ является неустойчивой.

3.6.2. Уменьшение расстояния d_1

Вычислим теперь компакт, дающий меньшую сумму расстояний относительно величины $S(A^{\text{Conv}}, K_d^{\text{Conv}})$. Согласно доказанному

$$K_\lambda = \{p, q\} = \mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\text{Conv}} \subset U_{d_1}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big).$$

Значит,

$$\delta_1 = \Big|K_\lambda\ \partial B_{d_1}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big)\Big| > 0.$$

Далее, все пункты (1)–(5) условий 1 выполнены, следовательно, по лемме 26

$$\delta_2 = \Big|\mathrm{Conv}(A_1)\ \partial B_{d_1}\big(K_d^{\text{Conv}}\big)\Big| > 0.$$

Поэтому для уменьшения веса сети можно воспользоваться теоремой 9, согласно которой величина затяжения расстояния d_1 может быть определена как, в частности, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, d_1\}$.

Найдём сначала значение δ_1. Отрезок $[p, q]$ параллелен отрезку $[a_1, b_1]$ и, как отмечалось выше, абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1. Следовательно, исходя из координат перечисленных точек и расстояния d_1, равного $\sqrt{c^2 + c + 1}$, где $c = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} = 0.210424\ldots$, имеем

$$\delta_1 = -c \cdot \sin(\pi/3) - \big(\sin(\pi/3) - \sqrt{c^2 + c + 1}\big) = \sqrt{c^2 + c + 1} - (c + 1) \cdot \sin(\pi/3) = 0.071876\ldots .$$

Далее, как отмечено выше, $\delta_2 = \Big|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}\big(K_d^{\text{Conv}}\big)\Big|$. Покажем, что начало координат O лежит внутри K_d^{Conv}. Высота в треугольнике $a_2 O b_2$ равна $\sqrt{3}/2$. Сравним это число с $d_2 = \sqrt{c^2 - c + 1}$:

$$\sqrt{3}/2 \quad \ldots \quad \sqrt{c^2 - c + 1};$$

$$3/4 \ \ \dots \ \ c^2 - c + 1/4 + 3/4;$$

$$0 \ \ \dots \ \ (c - 1/2)^2.$$

Как мы отмечали выше, $c = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} < 0.5$, значит, $(c - 1/2)^2 > 0$, и поэтому $d_2 > \sqrt{3}/2$. Отсюда $O \in U_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)$, см. рис 7. Ввиду симметрии аналогично показывается, что $O \in U_{d_3}\big(\mathrm{Conv}(A_3)\big)$. Следовательно, $O \in U_d^{\mathrm{Conv}} \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Но $d_1 = \sqrt{c^2 + c + 1} = 1.120135\dots$. Значит, $a_1, b_1 \in U_{d_1}(O)$, так как $|a_1\,O| = |b_1\,O| = 1$. Заметим, что любая точка из отрезка $[a_1, b_1]$ расположена не дальше от начала координат O, чем точка a_1 или точка b_1. Отсюда

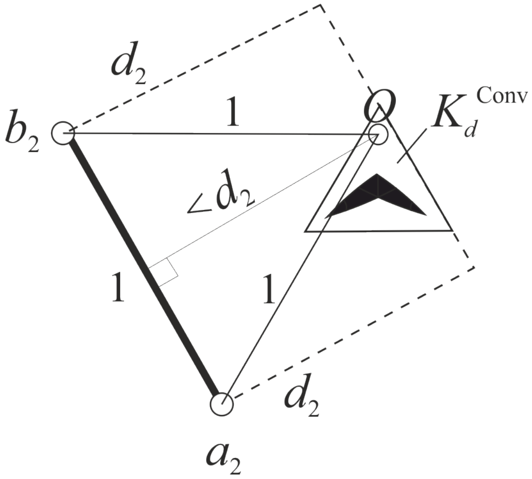

Рис. 7: $O \in U_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)$.

$$\Big|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}(O)\Big| = \Big|a_1\ \partial B_{d_1}(O)\Big| = \Big|b_1\ \partial B_{d_1}(O)\Big| = d_1 - |a_1\,O| = d_1 - |b_1\,O|. \tag{46}$$

Но так как $O \in U_d^{\mathrm{Conv}} \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$, то

$$B_{d_1}(O) \subset U_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \subset B_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Следовательно, ввиду компактности $B_{d_1}(O)$ и $\partial B_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$ имеем, что

$$\Big|B_{d_1}(O)\ \partial B_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > 0. \tag{47}$$

И наконец, из (46) и (47) вытекает, что

$$\delta_2 = \Big|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > d_1 - |a_1\,O| = 0.120135\ldots > \delta_1 = 0.071876\ldots.$$

Поэтому

$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_1\} = \delta_1 = 0.071876\ldots.$$

Таким образом, по теореме 9 одним из компактов в данном случае, дающих меньшую сумму расстояний, является компакт $K = B_{d_1-\delta_1}\big([a_1, b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$, который равен треугольнику K_d^{Conv} с основанием, поднятым вверх до пересечения с $K_\lambda = \{p, q\}$, см. рис. 8.

Заметим, что в данном случае, так как все $d_i > 0$, можно вместо d_1 в качестве затягиваемого расстояния d_s выбрать d_2 или d_3, так как

$$\Big(\partial B_{d_2}(a_2) \cup \partial B_{d_2}(b_2)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \Big(\partial B_{d_3}(a_3) \cup \partial B_{d_3}(b_3)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D)$$

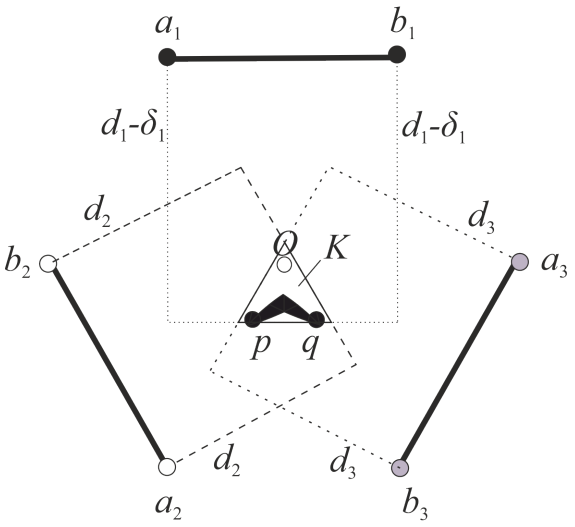

Рис. 8: $K = B_{d_1-\delta_1}\big([a_1, b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$.

и по доказанному

$$\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}},$$

то есть, другими словами, пункт (5) из условий 1 выполняется тоже для d_2 и d_3.

Отметим, что в силу симметрии значение $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены относительно d_2, равно значению $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены уже относительно d_3. Поэтому достаточно рассмотреть случай какого-то одного из этих двух расстояний, например, d_2.

3.6.3. Уменьшение расстояния d_2

Итак, найдём $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$. Согласно установленному выше, отрезок $[O, q]$ параллелен $[a_2, b_2]$, и проекция $[O, q]$ на $[a_2, b_2]$ лежит строго внутри отрезка $[a_2, b_2]$, то есть в (a_2, b_2). Причём $\big|O\ [a_2, b_2]\big| = \sqrt{3}/2$ и $d_2 = 0.913156\ldots$. Значит,

$$\delta_1 = \Big|K_\lambda\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = \Big|q\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = d_2 - \sqrt{3}/2 = 0.047130\ldots.$$

Теперь вычислим

$$\delta_2 = \Big|\mathrm{Conv}(A_2)\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| = \Big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big|.$$

Выпишем уравнения прямых, на которых лежат отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_3, b_3]$. Для первого отрезка уравнение имеет вид $y - \sin(\pi/3) = 0$, то есть

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

а для второго оно имеет вид $\frac{x-1}{\cos(\pi/3)-1} + \frac{y}{\sin(\pi/3)} = 0$ или после эквивалентных преобразований

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0.$$

Чтобы получить уравнения прямых, на которых лежат основание треугольника K_d^{Conv} и его левая боковая сторона, сдвинем первую прямую на ортогональный ей вектор $d_1(0, -1)$, а вторую прямую — также на ортогональный ей вектор $d_2\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$. В итоге получим уравнения

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} + d_1 = 0, \tag{48}$$

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} + 2d_2 = 0. \tag{49}$$

Отсюда координаты пересечения этих двух прямых равны

$$t := \Big(\frac{3\sqrt{3} - 2(d_1 + 2d_2)}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} - d_1\Big) = (-0.201132\ldots, -0.254109\ldots).$$

Серединный перпендикуляр к отрезку $[a_2, b_2]$ пройдёт через точку O и пересечёт левую сторону треугольника K_d^{Conv}, так как $O \in U_d^{\mathrm{Conv}}$ по доказанному. Точка t — крайняя нижняя точка левой стороны этого треугольника. Значит, t лежит не выше серединного перпендикуляра к $[a_2, b_2]$. Отсюда

$$|t\,a_2| \leqslant |t\,b_2| = \big|(-1, 0)\ (-0.201132\ldots, -0.254109\ldots)\big| = 0.838308\ldots .$$

При этом $d_2 = 0.913156\ldots > 0.838308\ldots = |t\,b_2|$. Следовательно,

$$\big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}(t)\big| = \big|b_2\ \partial B_{d_2}(t)\big|.$$

Также $t \in K_d^{\mathrm{Conv}}$, и поэтому

$$B_{d_2}(t) \subset B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Таким образом, имеем

$$\delta_2 = \Big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| \geqslant \Big|b_2\ \partial B_{d_2}(t)\Big| = \\ = d_2 - |t\ b_2| = 0.913156\ldots - 0.838308\ldots = 0.074847\ldots > \delta_1 = 0.047130\ldots .$$

Поэтому

$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = \delta_1 = 0.047130\ldots .$$

Значит, расстояние d_2 согласно теореме 9 максимально можно уменьшить не более чем на $\delta_1 = 0.047130\ldots$, и $K_\lambda = \mathrm{HP}(D) = \{p, q\}$ будет пересекаться с границей нового компакта $K = B_{d_2-\delta_1}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ по точке q, то есть

$$K_\lambda \cap \partial\Big(B_{d_2-\delta_1}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) = \{q\}.$$

3.6.4. Уменьшение расстояния d_3

Как было отмечено выше, случай $d_s = d_3$ аналогичен ввиду симметрии случаю $d_s = d_2$ и при этом $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\} = \min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = 0.047130\ldots$, где каждые δ_i вычислялись для соответствующих расстояний d_3 и d_2. Заметим, что в случае затяжения d_3 имеем

$$K_\lambda \cap \partial\Big(B_{d_3-\delta_1}\big([a_3, b_3]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) = \{p\}.$$

3.6.5. Уменьшение двух расстояний d_1 и d_2

Попробуем теперь выяснить, можно ли уменьшить сразу два расстояния, например, d_1 и d_2, где d_1 зятягивается на δ_1, посчитанное в разделе 3.6.2, обозначим эту величину через $\delta_1(d_1)$, а d_2 затягивается на δ_1, вычисленное в разделе 3.6.3, обозначим эту величину через $\delta_1(d_2)$. Также для удобства введём обозначения

$$K(d_1) := B_{d_1-\delta_1(d_1)}\big([a_1, b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}};$$

$$K(d_2) := B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Покажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_2), K(d_1)\cap K(d_2)\big) \leqslant d_2 - \delta_1(d_2)$. Докажем сначала, что $[a_2, b_2] \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big)$. Рассмотрим точку b_2. Точка p находится ниже точки b_2, и $|p\,b_2| = d_2$, см. рис. 9. Также ввиду симметрии

$$\Big|p\ \partial B_{d_3}\big(\mathrm{Conv}(A_3)\big)\Big| = \Big|q\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = \delta_1(d_2),$$

см. раздел 3.6.3. Обозначим через m пересечение отрезка $[b_2, p]$ с левой боковой стороной треугольника $K(d_1)\cap K(d_2)$. Отсюда имеем, что $[m, p] \subset K(d_1)\cap K(d_2)$ и $|m\,p| \geqslant \delta_1(d_2)$. Значит, $|b_2\,m| \leqslant d_2 - \delta_1(d_2)$, и поэтому $b_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}(m)$. Следовательно,

$$b_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big). \tag{50}$$

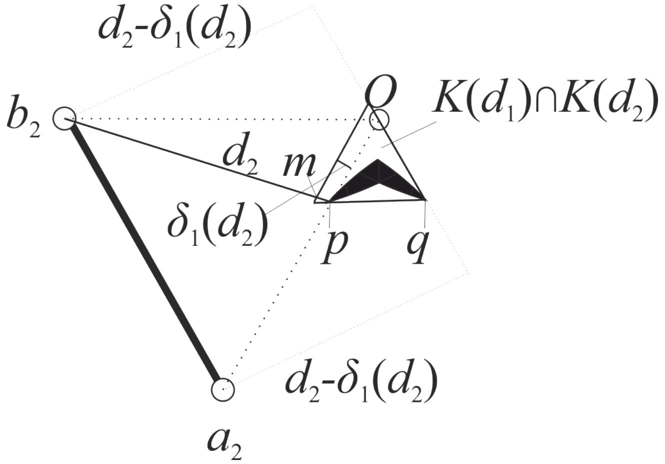

Рис. 9: $K(d_1)\cap K(d_2)$ и компакт $\mathrm{Conv}(A_2)$.

Далее рассмотрим точку a_2 и покажем, что $a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big)$. Имеем

$$|a_2\ p| = 1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} = 1 - 0.210424\ldots < 0.8\,.$$

При этом

$$d_2 - \delta_1(d_2) = 0.913156\ldots - 0.047130\ldots > 0.8\,.$$

Значит, $a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}(p)$. Также $p \in K(d_1)\cap K(d_2)$, см. разделы 3.6.2 и 3.6.3. Отсюда

$$a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big). \tag{51}$$

Множество $B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big)$ выпукло по лемме 3, так как $K(d_1)\cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Следовательно, в силу (50) и (51) имеем, что

$$\mathrm{Conv}(A_2) = [a_2, b_2] \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big).$$

При этом $K(d_1)\cap K(d_2) \subset K(d_2) \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)$. Поэтому

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_2), K(d_1)\cap K(d_2)\big) \leqslant d_2 - \delta_1(d_2).$$

Далее покажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_1), K(d_1)\cap K(d_2)\big) \leqslant d_1 - \delta_1(d_1)$. Имеем, что $O \in K(d_1)\cap K(d_2)$ и $d_1 - \delta_1(d_1) = 1.120135\ldots - 0.071876\ldots > |a_1\ O| = |b_1\ O| = 1$, см. раздел 3.6.2. Следовательно, $[a_1, b_1] \subset B_{d_1-\delta_1(d_1)}(O)$. Значит,

$$\mathrm{Conv}(A_1) = [a_1, b_1] \subset B_{d_1-\delta_1(d_1)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big).$$

При этом

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K(d_1) \subset B_{d_1 - \delta_1(d_1)}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big).$$

Поэтому

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_1), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \leqslant d_1 - \delta_1(d_1).$$

Наконец, докажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \leqslant d_3$. Заметим, что $K_\lambda = \{p, q\} \subset$ $\subset K(d_1) \cap K(d_2)$. Также по условию имеем, что $A_3 \subset B_{d_3}(K_\lambda)$. Значит,

$$A_3 \subset B_{d_3}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big). \tag{52}$$

Множество $B_{d_3}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big)$ выпукло по лемме 3, так как $K(d_1) \cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Поэтому в силу (52) получаем

$$\mathrm{Conv}(A_3) = [a_3, b_3] \subset B_{d_3}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big).$$

Также

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_3}\big(\mathrm{Conv}(A_3)\big).$$

Отсюда

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \leqslant d_3.$$

Таким образом, мы установили, что в данной конфигурации можно затянуть сразу два расстояния d_1 и d_2 на свои $\delta_1(d_1)$ и $\delta_1(d_2)$. Аналогично показывается в силу симметрии, что можно одновременно затянуть d_1 и d_3. В итоге мы имеем, что

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \geqslant \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2).$$

Напомним, что величина затяжения расстояния d_3 равна $\delta_1(d_2)$ ввиду симметрии, но $\delta_1(d_1) > \delta_1(d_2)$. Поэтому одновременное уменьшение расстояний d_2 и d_3 (даже если оно возможно) даст компакт, находящийся на большем суммарном расстоянии по Хаусдорфу до граничных компактов $\mathrm{Conv}(A_i)$, чем компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$.

3.6.6. Об уменьшении сразу трёх расстояний d_1, d_2 и d_3

Возникает естественный вопрос, можно ли уменьшить все расстояния d_i на соответствующие вычисленные δ_1 одновременно? Ответ отрицательный. А именно, пусть мы одновременно уменьшили описанным выше способом расстояния d_1 и d_2 и получили компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$, см. рис. 9. Но тогда ближайшей к a_3 точкой в $K(d_1) \cap K(d_2)$ будет точка q, так как по условию $|a_3\, q| = d_3$, см. рис. 5. Следовательно, расстояние d_3 никак уменьшить уже будет нельзя.

Таким образом, величина общего затяжения в данной конфигурации равна

$$\begin{aligned} S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \geqslant \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2) = \\ = 0.071876\ldots + 0.047130\ldots = 0.119007\ldots. \end{aligned}$$

4. Заключение

В данной работе было проведено исследование вопроса устойчивости границы в проблеме Ферма — Штейнера в случае гиперпространства над конечномерным нормированным пространством X над полем $\mathbb{R}$. Такое гиперпространство всюду выше обозначалось через $\mathcal{H}(X)$. Под устойчивостью границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ здесь имеется в виду выполнение следующего условия:

$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} \sum_{i=1}^{n} d_H(A_i, K) = \min_{K' \in \mathcal{H}(X)} \sum_{i=1}^{n} d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K'\big).$$

В разделах 3.4 и 3.5 были выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы. В первом достаточном условии (следствие 6) для установления неустойчивости требуется показать, что хотя бы для одного вектора $d \in \Omega(A)$ ни один компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$ не содержит относительно $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr)$ так называемых далёких точек, описанных в разделе 3.2, которые согласно теореме 3 обязаны присутствовать хотя бы в одном $\mathrm{Conv}(A_i)$, если $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$, где $A^{\mathrm{Conv}} = \bigl\{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\bigr\}$. Напомним, что согласно необходимому условию устойчивости если граница A устойчива, то $d = (d_1, \dots, d_n) \in \Omega(A) \subset \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и K_d^{Conv} — максимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$, см. утверждение 13.

Второе достаточное условие (следствие 7) может быть полезно в случае, когда относительно K_d^{Conv} такие далёкие точки для каждого вектора $d \in \Omega(A)$ в каких-то граничных компактах $\mathrm{Conv}(A_i)$ всё же нашлись, то есть соответствующие множества $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\bigr)$ (см. введение обозначений перед следствием 6), лежащие в K_d^{Conv}, оказались непустыми. Тогда, как говорится в следствии 7, чтобы показать неустойчивость границы A, нужно, во-первых, найти хотя бы один вектор $d \in \Omega(A)$ и хотя бы один компакт $\mathrm{Conv}(A_s)$, который не имеет далёких для этого вектора d точек, во-вторых, нужно доказать, что $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\bigr) \subset U_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr)$.

Третье достаточное условие (теорема 9) может пригодиться, с одной стороны, в случае, когда пункты (1)–(4) из условий 1 выполнены и проверить выполнимость пункта (5) из условий 1 оказывается проще, чем находить множество всех далёких точек $F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}$, что требуется в следствиях 6 и 7. С другой стороны, теорема 9 заодно даёт ответ на вопрос, как найти компакты, реализующие меньшую сумму расстояний до границы A^{Conv}, чем компакт K_d^{Conv}.

Применение третьего достаточного условия неустойчивости было продемонстрировано в настоящей статье на одной известной из недавних работ конфигурации, где исходная граница находится в евклидовой плоскости и состоит из трёх компактов, лежащих определённым образом на единичной окружности, см. раздел 3.6. А именно, для данной конфигурации посредством теоремы 9 была доказана её неустойчивость, а также оценена величина уменьшения значения функционала $S(A^{\mathrm{Conv}}, K)$ относительно величины $S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$.

В настоящей работе помимо упомянутых выше далёких точек, обнаруженных в граничных компактах финитных и выпуклых границ (финитной в данной статье называлась граница, все компакты в которой конечны, а выпуклой — граница, все компакты в которой выпуклы), также были найдены ещё два типа точек — дискретные и неплотные, см. раздел 3.2. Здесь эта теория получила развитие как продолжение соответствующей теории точек сцепки из работы [13].

В дальнейших работах было бы интересно обобщить вид пространства X, над которым рассматривалось гиперпространство в настоящей работе, обобщить теоремы о существовании дискретных, неплотных и далёких точек на случай произвольных границ, а также попытаться отыскать критерий неустойчивости границы пусть даже в гиперпространстве над конечномерным нормированным пространством. Ещё любопытно продвинуться в изучении вопроса уменьшения значения функционала $S(A^{\mathrm{Conv}}, K)$ в неустойчивом случае. А именно, в предыдущем разделе мы каждое расстояние по отдельности затягивали на максимально возможную величину. В итоге оказалось, что таким образом можно затянуть не более двух расстояний, причём в случае расстояний d_1 и d_2 или d_1 и d_3 оставшееся третье расстояние уменьшать уже никак было нельзя. Здесь возникает вопрос, можно ли добиться большего уменьшения значения функционала $S(A^{\mathrm{Conv}}, K)$ относительно величины $S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$, если расстояния уменьшать не на свои максимальные величины или вообще если позволить какие-то расстояния даже увеличивать?

Все описанные выше задачи являются темами возможных дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one–dimensional variational problems // World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, xxii+342 pp.
2. Cieslik D. Steiner minimal trees // Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, xii+319 pp.
3. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: a review // Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Cham, 2016, 43–80 pp.
4. Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // North–Holland, 1992, 339 p.
5. Jarnik V., Kössler M. On minimal graphs containing n given points // Časopis Pest. Mat. Fys., 63:8 (1934), 223–235 pp.
6. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов, 3-е изд., испр. и доп. // МЦНМО, М., 2001, 568 с.
7. A. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom., 108:2 (2017), 575–590.
8. Nadler S. B. Hyperspaces of sets // Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1978, 707 p.
9. Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.
10. Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague, 2007, 81–90.
11. Memoli F. Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete Comput. Geom., 48:2 (2012), 416–440.
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Mat. Vesnik, 71:1-2 (2019), 123–154.
13. Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56
14. Тропин А. М. Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 25, 2, 2021, стр. 81–107
15. Mendelson B. Introduction to topology // Dover Publications, 1990, 206 p.
16. Leonard I. E., Lewis J. E. Geometry of convex sets // Wiley, 2015, 336 p.
17. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, No 4, с. 21–91.
18. Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 pp., http://faculty.gvsu.edu/schlicks/ HMG2008.pdf.
19. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.

20. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов // М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017. 111 с.

21. А. Х. Галстян. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечномерных нормированных пространствах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 152–160.

22. Drusvyatskiy D. Convex analysis and nonsmooth optimization // University Lecture, 2020, https://sites.math.washington.edu/ ddrusv/crs/Math_516_2020/bookwithindex.pdf

23. Galstyan A. Kh. Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces // arXiv:2212.01881, 2022

REFERENCES

1. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2001, *Branching solutions to one–dimensional variational problems*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, xxii+342 pp.

2. Cieslik, D. 1998, *Steiner minimal trees*, Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, xii+319 pp.

3. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2016, “Minimal networks: a review”, *Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Cham*, 43–80 pp.

4. Hwang, F. K., Richards, D. S. & Winter, P. 1992, *The Steiner Tree Problem*, North–Holland, 339 p.

5. Jarnik, V. & Kössler, M. 1934, “On minimal graphs containing n given points”, *Časopis Pĕst. Mat. Fys.*, vol. 63, no. 8 , pp. 223–235.

6. Courant, R. & Robbins, H. 2001, *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods, 3-rd ed., cor. and ad.*, Izdatelstvo MCNMO, M., p. 568.

7. Ivanov, A., Tropin, A. & Tuzhilin, A. 2017, “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *J. Geom.*, vol. 108, no. 2, pp. 575–590.

8. Nadler, S. B. 1978, *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 707 p.

9. Blackburn, C. C., Lund, K., Schlicker, S., Sigmon, P. & Zupan, A. 2007, *An introduction to the geometry of* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.

10. Memoli, F. 2007, “On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison”, *Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague*, pp. 81–90.

11. Memoli, F. 2012, “Some properties of Gromov–Hausdorff distances”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 48, no. 2, pp. 416–440.

12. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, “Isometry group of Gromov–Hausdorff space”, *Mat. Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.

13. Galstyan, A. Kh., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2021, “The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric”, *Sb. Math.*, vol. 212, no. 1, pp. 25–56.

14. Tropin, A. M. 2021, “An Estimation of the Length of a Minimal Parametric Network in Hyperspaces under the Deformation of the Boundary Set”, *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 25, no. 2, pp. 81–107.

15. Mendelson, B. 1990, *Introduction to topology*, Dover Publications, 206 p.

16. Leonard, I. E. & Lewis, J. E. 2015, *Geometry of convex sets*, Wiley, 336 p.

17. Alimov, A. R. & Tsarkov, I. G. 2014, “Connection and other geometric properties of suns and Chebyshev sets”, *Fundamental and applied mathematics*, vol. 19, no. 4, pp. 21–91.

18. Schlicker, S. 2008,“The geometry of the Hausdorff metric”, *GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI*, 11 pp., http://faculty.gvsu.edu/schlicks/ HMG2008.pdf.

19. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2004, *A course in metric geometry*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, p. 512.

20. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2017, *Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances: the case of compact sets*, Faculty of mechanics and mathematics of MSU, Moscow, p. 111.

21. Galstyan, A. Kh. 2022, “About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 152–160.

22. Drusvyatskiy, D. 2020, *Convex analysis and nonsmooth optimization*, University Lecture, https://sites.math.washington.edu/ ddrusv/crs/Math_516_2020/bookwithindex.pdf

23. Galstyan A. Kh. 2022, “Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces” // arXiv:2212.01881

Получено: 17.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153

Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье—Данкля и его обобщения[1]

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Классический результат Хаусдорфа—Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1,2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1,\infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди—Литлвуда.

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1,\infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Boas (1972) предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{\gamma-\delta} f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Liflyand и S. Tikhonov (2011) доказали многомерную гипотезу Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f: $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta} f\|_p$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана E. Liflyand и S. Tikhonov (2008). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана L. De Carli, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov и S. Tikhonov (2016) обобщили данные результаты были на случай (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье. A. Debernardi (2019) изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса рассматривалась для функций на полуоси. В данной работе она изучается на всей оси. Для этого рассматривается интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Также показывается, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье, при $a = 2$ дающее преобразование Данкля. В итоге имеем

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta} f\|_{p,\kappa,a},$$

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

где $\gamma \in (\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p})$, $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Ключевые слова: неравенство Фурье, гипотеза Боаса, неравенство Харди, неравенство Беллмана, преобразование Данкля, обобщенное преобразование Фурье.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев. Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье — Данкля и его обобщения // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 141–153.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-141-153

Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization[2]

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

The question of integrability of the Fourier transform and other integral transformations $\mathcal{F}(f)$ on classes of functions in weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ is a fundamental problem of harmonic analysis. The classical Hausdorff–Young result says that if a function f from $L^p(\mathbb{R}^d)$ with $p \in [1, 2]$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. For $p > 2$ the Fourier transform in the general situation will be a generalized function. The Fourier transform can be defined as an usual function for $p > 2$ by considering the weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$. In particular, the classical Pitt inequality implies that if $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ and function f is integrable in $L^p(\mathbb{R}^d)$ with power weight $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ belongs to the space $L^q(\mathbb{R}^d)$ with weight $|x|^{-q\gamma}$. The case $p = q$ corresponds to the well-known Hardy–Littlewood inequality.

The question arises of extending the conditions for the integrability of the Fourier transform under additional conditions on the functions. In the one-dimensional case, G. Hardy and J. Littlewood proved that if f is an even nonincreasing function tending to zero and $f \in L^p(\mathbb{R})$ for $p \in (1, \infty)$, then $\mathcal{F}(f)$ belongs to $L^p(\mathbb{R})$ with weight $|x|^{p-2}$. R. Boas (1972) suggested that for a monotone function f the membership $|\cdot|^{\gamma-\delta} f \in L^p(\mathbb{R})$ is equivalent to $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ if and only if $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. The one-dimensional Boas conjecture was proved by Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Liflyand and S. Tikhonov (2011) proved the multidimensional Boas conjecture for radial functions, moreover, on a wider class of general monotone non-negative radial functions f: $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta} f\|_p$ if and only if $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, where $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. For radial functions, the Fourier transform is expressed in terms of the Bessel transform of half-integer order, which reduces to the classical Hankel transform and includes the cosine and sine Fourier transforms. For the latter, the Boas conjecture was proved by E. Liflyand and S. Tikhonov (2008). For the Bessel–Hankel transform with an arbitrary order, the Boas conjecture was proved by L. De Carli, D. Gorbachev and S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov and S. Tikhonov (2016) generalized these results to the case of (κ, a)-generalized

---

[2] This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

Fourier transform. A. Debernardi (2019) studied the case of the Hankel transform and general monotone alternating functions.

So far, the Boas conjecture has been considered for functions on the semiaxis. In this paper, it is studied on the entire axis. To do this, we consider the integral Dunkl transform, which for even functions reduces to the Bessel–Hankel transform. It is also shown that the Boas conjecture remains valid for the (κ, a)-generalized Fourier transform, which gives the Dunkl transform for $a = 2$. As a result, we have

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa,a},$$

where $\gamma \in (\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p})$, $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Keywords: Fourier inequality, Boas conjecture, Hardy inequality, Bellman inequality, Dunkl transform, generalized Fourier transform.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2023, “Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 141–153.

1. Введение

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье, Данкля и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Это обусловлено важными приложениями в функциональном анализе, уравнениях в частных производных, теории приближений (см., например, наши недавние работы [5, 8, 9] и библиографию там).

Классический результат Хаусдорфа–Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1, 2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди–Литлвуда. Данные результаты для преобразования Фурье подробно изложены в работе [1], для интегральных преобразований из задачи Штурма–Лиувилля в [12].

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1, \infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Boas [2] предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{\gamma-\delta}f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher [15].

В работе [11] доказана многомерная гипотеза Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f: для $1 < p < \infty$ имеем

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}(f)\|_p \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_p \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Эквивалентность (1) означает, что если конечна правая часть, то преобразование Фурье определено как функция и ограничено в весовой норме. И, наоборот, если преобразование Фурье определено как функция (здесь требуется дополнительное условие интегрируемости функции, см. [11]) и ограничено в весовой норме, то весовая норма функции ограничена.

Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана в работе [13] (см. также [6, 14]). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана в работе [4]. Ее решение имеет тот же вид, что и (1), только нужно взять преобразование Бесселя–Ханкеля порядка $\frac{d}{2}-1$, использовать норму $L^p(\mathbb{R}_+, x^{d-1}\,dx)$ и считать, что $d\geqslant 1$ не обязательно целое. В [7] данные результаты были обобщены на случай (κ,a)-обобщенного преобразования Фурье. A. Debernardi [3] изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса по-существу рассматривалась для функций на полуоси. Интересно доказать ее в случае всей оси. Для этого рассмотрим интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Основным утверждением работы является теорема 1. В разделе 4 также будет показано, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ,a)-обобщенного преобразования Фурье.

Через c, C, C_1, ... будем обозначать положительные константы, которые не зависят от существенных параметров и могут меняться от места к месту, $C(a)$ означает константу, зависящую от параметра a.

2. Гипотеза Боаса для преобразования Данкля

Пусть $\kappa\geqslant 0$. Преобразование Данкля на оси определяется равенством

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x),\quad y\in\mathbb{R},$$

где

$$d\mu_\kappa(x)=\frac{|x|^{2\kappa}\,dx}{2^{\kappa+1/2}\Gamma(\kappa+1/2)},\quad e_\kappa(t)=j_{\kappa-1/2}(t)+\frac{it}{2\kappa+1}\,j_{\kappa+1/2}(t),$$

$j_\alpha(t)=2^\alpha\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}J_\alpha(t)$ — нормированная условием $j_\alpha(0)=1$ функция Бесселя порядка α. Заметим, что для обратного преобразования Данкля имеем $\mathcal{F}_\kappa^{-1}(f)(x)=\mathcal{F}_\kappa(f)(-x)$.

При $\kappa=0$ получаем $e_\kappa(t)=\cos t+i\sin t=e^{it}$ и случай преобразования Фурье. Для четных функций $f(x)=f(-x)$ имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y)=2\int_{\mathbb{R}_+} f(x)j_{\kappa-1/2}(xy)\,d\mu_\kappa(x),\quad y\in\mathbb{R}_+.$$

Отсюда при $\kappa=0$ и $\kappa=1$ в силу $j_{-1/2}(t)=\cos t$ и $j_{1/2}(t)=t^{-1}\sin t$ выводятся косинус- и синус-преобразования Фурье соответственно.

Отметим, что нормированная функция Бесселя $j_\alpha(\lambda t)$ является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля на полуоси со степенным весом

$$\frac{1}{t^{2\alpha+1}}\,\frac{d}{dt}\Bigl(t^{2\alpha+1}\,\frac{d}{dt}\,j_\alpha(\lambda t)\Bigr)=-\lambda^2 j_\alpha(\lambda t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad j_\alpha'(0)=0.$$

В отличие от этого ядро преобразования Данкля $e_\kappa(\lambda t)$ является собственной функцией на всей оси для дифференциально-разностного оператора Данкля

$$T_\kappa f(t)=f'(t)+\frac{\kappa}{t}\,(f(t)-f(-t)),$$

а именно

$$T_\kappa e_\kappa(\lambda t)=i\lambda e_\kappa(\lambda t),\quad t\in\mathbb{R},\quad e_\kappa(0)=1.$$

По аналогии с четным случаем (см. [11]) введем класс $BV_{loc,0}$ функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ локально ограниченной вариации, таких что $f(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Функцию $f\in BV_{loc,0}$ назовем обобщенно монотонной ($f\in GM$), если для всех $t>0$

$$\int_{|x|\geqslant t}|df(x)|\leqslant C\int_{|x|\geqslant t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx<\infty. \tag{2}$$

Здесь $C>0$ и $c>1$ — некоторые константы, зависящие от f.

Заметим, что интеграл Римана–Стильтеса $\int g(x)\,|df(x)|$ понимается как предел интегральных сумм $\sum_k g(x_k)|f(x_{k+1})-f(x_k)|$.

Функции GM ограничены вне окрестности нуля, так как, например, при $t>0$

$$|f(t)|=\left|\int_t^\infty df(x)\right|\leqslant\int_t^\infty|df(x)|<\infty.$$

Если функция $f(x)$ неубывает при $x\leqslant 0$ и невозрастает при $x\geqslant 0$, то $f\in GM$, так как

$$\int_t^\infty|df(x)|=f(t),\quad \int_{-\infty}^{-t}|df(x)|=f(-t),$$

$$\int_{t/c}^\infty\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant\int_{t/c}^t\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant f(t)\int_{t/c}^t\frac{dx}{x}=f(t)\ln c,$$

$$\int_{-\infty}^{-t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant\int_{-t}^{-t/c}\frac{|f(x)|}{|x|}\,dx\geqslant f(-t)\int_{-t}^{-t/c}\frac{dx}{|x|}=f(-t)\ln c,$$

что влечет условие (2).

Пусть $L^p(\mathbb{R},d\mu_\kappa)$ — пространство функций с нормой $\|f\|_{p,\kappa}=(\int_{\mathbb{R}}|f|^p\,d\mu_\kappa)^{1/p}$ при $p<\infty$ и $\|f\|_{\infty,\kappa}=\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}}|f|$. Рассмотрим вопрос весовой интегрируемости преобразования Данкля для обобщенно монотонных функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R},d\mu_\kappa)$. Напомним, что для четных функций имеем изученный в работе [4] случай преобразования Бесселя–Ханкеля. Следующая основная теорема решает гипотезу Боаса для неотрицательных обобщенно монотонных функций. В ней $d_\kappa=2\kappa+1$ — размерность Данкля.

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\kappa\geqslant 0$, $\delta=d_\kappa(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})$.*
Пусть функция $f\in GM$. Тогда

(a) *Если*

$$\gamma\in\Big(\frac{d_\kappa}{p}-\frac{d_\kappa+1}{2},\frac{d_\kappa}{p}\Big) \tag{3}$$

и $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$, то

$$\int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|x|^\kappa\,|df(x)|<\infty, \tag{4}$$

преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$.

(b) *Пусть выполнено* (4). *Тогда $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля. Если при этом $\gamma>\frac{d_\kappa}{p}-d_\kappa$, $f\geqslant 0$ и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$, то $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$.*

(c) *Условие* (3) *является необходимым для выполнения* (a) *и* (b) *одновременно.*

Заметим, что по сравнению с [11, 4] в теорему включены крайние случаи $p=1,\infty$.

3. Доказательство теоремы 1

Будем действовать по схеме работ [11, 4]. Вначале установим ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in BV_{loc,0}$ удовлетворяет условию* (4)*. Тогда ее преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ существует в смысле главного значения, непрерывно вне окрестности нуля и оценивается для всех $y \neq 0$ как*

$$|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| \leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant 1/|y|} |f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx + \frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/|y|} |x|^{\kappa}\,|df(x)|\biggr). \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{|x|\leqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x) + \int_{|x|\geqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x).$$

Так как на оси $|e_\kappa(t)| \leqslant 1$, то

$$\biggl|\int_{|x|\leqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\biggr| \leqslant C\int_{|x|\leqslant 1/|y|} |f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx.$$

Покажем, что

$$\biggl|\int_{|x|\geqslant 1/|y|} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\biggr| \leqslant \frac{C}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant 1/|y|} |x|^{\kappa}\,|df(x)|.$$

Сделаем это только при $x, y > 0$, в остальных случаях действуем аналогично.

Имеем

$$\int_{1/y}^{\infty} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x) = C\int_{1/y}^{\infty} f(x)e_\kappa(-xy)\,x^{2\kappa}\,dx = C\int_{1/y}^{\infty} f(x)\,dK_y(x), \tag{6}$$

где

$$K_y(x) = \int_0^x e_\kappa(-\xi y)\xi^{2\kappa}\,d\xi = \frac{1}{y^{2\kappa+1}}\int_0^{xy} e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi, \quad xy \geqslant 1. \tag{7}$$

Для $t = xy$ находим

$$\begin{aligned}\int_0^t e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi &= \int_0^t \Bigl(j_{\kappa-1/2}(\xi) - \frac{i\xi}{2\kappa+1}\,j_{\kappa+1/2}(\xi)\Bigr)\xi^{2\kappa}\,d\xi \\ &= C_1\int_0^t J_{\kappa-1/2}(\xi)\xi^{\kappa+1/2}\,d\xi - iC_2\int_0^t J_{\kappa+1/2}(\xi)\xi^{\kappa+1/2}\,d\xi. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть

$$\psi(t) = \int_0^t J_{\alpha+b}(s)s^{\alpha+1}\,ds, \quad \alpha \geqslant -1/2, \quad b \geqslant 0.$$

В [4, лемма 3.1] установлено, что $|\psi(t)| \leqslant Ct^{\alpha+1/2}$ для $t \geqslant 1$. Отсюда и из (8) выводим

$$\biggl|\int_0^t e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi\biggr| \leqslant Ct^{\kappa}, \quad t \geqslant 1,$$

что по (7) влечет

$$|K_y(x)| \leqslant \frac{C(xy)^{\kappa}}{y^{2\kappa+1}}, \quad xy \geqslant 1. \tag{9}$$

Оценим теперь интегралы из (6). Имеем

$$\int_{1/y}^{\infty} f(x)\,dK_y(x) = f(x)K_y(x)\Big|_{1/y}^{\infty} - \int_{1/y}^{\infty} K_y(x)\,df(x).$$

Здесь

$$|K_y(1/y)| = \frac{1}{y^{2\kappa+1}}\left|\int_0^1 e_\kappa(-\xi)\xi^{2\kappa}\,d\xi\right| = \frac{C}{y^{2\kappa+1}},$$

откуда

$$|f(1/y)K_y(1/y)| = \left|\int_{1/y}^{\infty} df(x)\right| |K_y(1/y)| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa}\,|df(x)|.$$

Далее по (9) и (4)

$$|f(x)K_y(x)| \leqslant \frac{Cx^{\kappa}}{y^{\kappa+1}}\int_x^{\infty} |df(u)| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_x^{\infty} u^{\kappa}\,|df(u)| \to 0, \quad x\to\infty,$$

$$\left|\int_{1/y}^{\infty} K_y(x)\,df(x)\right| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa}\,|df(x)|.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{1/y}^{\infty} f(x)e_\kappa(-xy)\,d\mu_\kappa(x)\right| \leqslant \frac{C}{y^{\kappa+1}}\int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa}\,|df(x)|.$$

Неравенство (5) установлено. Оно влечет существование преобразования Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ в смысле главного значения (с несвязанными пределами в нуле и бесконечности) и его непрерывность вне окрестности нуля. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть неотрицательная функция* $f \in BV_{loc,0}$ *удовлетворяет условию* (4). *Тогда для* $a > 0$

$$\int_{1\leqslant|ax|\leqslant2} \frac{f(x)}{|x|}\,dx \leqslant C\int_{|y|\leqslant 2a} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,|y|^{2\kappa}\,dy.$$

Доказательство. В [4, лемма 3.2] построена четная непрерывная функция $K\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ (ядро типа Фейера), зависящая от параметра $a > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\operatorname{supp} K \subset [-2a, 2a], \quad K(t) \leqslant K(0) = 1, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}_\kappa(K)(s) = C(\kappa)a^{2\kappa+1}j_{\kappa+1/2}^2(as), \quad s\in\mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_\kappa(K)(s) \geqslant ca^{2\kappa+1}, \quad 1\leqslant|as|\leqslant 2.$$

Здесь учтена взаимосвязь между преобразованиями Данкля и Бесселя–Ханкеля для четных функций. Из свойств нормированной функции Бесселя следует, что

$$\mathcal{F}_\kappa(K)(s) \leqslant C, \quad |as|\leqslant 1, \quad \mathcal{F}_\kappa(K)(s) \leqslant C|s|^{-2\kappa-2}, \quad |as|\geqslant 1.$$

Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы. Тогда по лемме 1 для нее определено непрерывное преобразование Данкля. Далее из самосопряженности преобразования Данкля следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}_\kappa(K)(x)\,d\mu_\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\kappa(f)(y)K(y)\,d\mu_\kappa(y).$$

Для обоснования этого равенства достаточно доказать, что интегралы сходятся абсолютно. Для правого интеграла это следует из ограниченности носителя K. Из свойств $\mathcal{F}_\kappa(K)$ и ограниченности f вне окрестности нуля левый интеграл с точностью до константы оценивается

$$\int_{|x|\leqslant1} |f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx + \int_{|x|\geqslant1} |f(x)|\,|x|^{-2}\,dx < \infty.$$

Из свойств K следует, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\kappa(f)(y)K(y)\,d\mu_\kappa(y)\right| \leqslant C\int_{|y|\leqslant 2a} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,|y|^{2\kappa}\,dy.$$

С учетом неотрицательности f

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}_\kappa(K)(x)\,d\mu_\kappa(x) \geqslant ca^{2\kappa+1}\int_{1\leqslant|ax|\leqslant2} f(x)\,|x|^{2\kappa}\,dx \geqslant c\int_{1\leqslant|ax|\leqslant2}\frac{f(x)}{|x|}\,dx.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 ([11]). *Если $t>0$, $\nu\geqslant0$, $f\in GM$, $\int_{|x|\geqslant t/c}|x|^{\nu-1}|f(x)|\,dx<\infty$, то*

$$\int_{|x|\geqslant t}|x|^{\nu}\,|df(x)|\leqslant C\int_{|x|\geqslant t/c}|x|^{\nu-1}|f(x)|\,dx,$$

где $c>1$ — константа функции из GM-условия (2).

Доказательство. Так как в [11] не приведено прямое доказательство этого факта, сделаем это. Достаточно ограничиться случаем $\nu>0$, $x>0$. Тогда, используя GM-условие (2), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty x^\nu\,|df(x)| &= -\int_t^\infty x^\nu\,d\int_x^\infty|df(u)|\\
&= t^\nu\int_t^\infty|df(u)|-\lim_{x\to\infty}x^\nu\int_x^\infty|df(u)|+\nu\int_t^\infty x^{\nu-1}\int_x^\infty|df(u)|\,dx\\
&\leqslant C\biggl(t^\nu\int_{t/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\lim_{x\to\infty}x^\nu\int_{x/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\int_t^\infty x^{\nu-1}\int_{x/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du\,dx\biggr)\\
&\leqslant C\biggl(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+\lim_{x\to\infty}\int_{x/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+\int_{t/c}^\infty\int_x^\infty u^{-1}|f(u)|\,dx^\nu\biggr)\\
&= C\biggl(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du+(t/c)^\nu\int_{t/c}^\infty u^{-1}|f(u)|\,du+\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du\biggr)\leqslant C\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1}|f(u)|\,du.
\end{aligned}$$

Лемма 3 установлена.

Лемма 4. *Если $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in GM$ и $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$ то условие* (4) *выполнено.*

Доказательство. Аналогично случаю четных функций [4, замечание 3.1]). По лемме 3

$$\begin{aligned}
I=\int_{|x|\leqslant1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant1}|x|^\kappa\,|df(x)| &\leqslant C\biggl(\int_{|x|\leqslant1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant1/c}|x|^{\kappa-1}|f(x)|\,dx\biggr)\\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}}\frac{|x|^{2\kappa}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\,|f(x)|\,dx=C\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\,d\mu_\kappa(x),
\end{aligned}$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$I\leqslant C\Bigl\|\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\Bigr\|_{p',\kappa}\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}.$$

Здесь с учетом (3)

$$d_\kappa\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\Bigr)-\frac{d_\kappa}{p}<\delta-\gamma<d_\kappa\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\Bigr)-\frac{d_\kappa}{p}+\frac{d_\kappa+1}{2}$$

или

$$-\frac{2\kappa+1}{p'}<\delta-\gamma<-\frac{2\kappa+1}{p'}+\kappa+1.$$

При $p'=\infty$ это влечет ограниченность функции $\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}$. При $p'<\infty$ в окрестности нуля

$$J=\Big(\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\Big)^{p'}|x|^{2\kappa}\asymp|x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa},$$

что интегрируемо в силу $(\delta-\gamma)p'+2\kappa>-1$. В окрестности бесконечности имеем

$$J\asymp|x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa-(\kappa+1)p'},$$

что также интегрируемо в силу $(\delta-\gamma)p'+2\kappa-(\kappa+1)p'<-1$. Таким образом, $\big\|\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}\big\|_{p',\kappa}<\infty$ при $1\leqslant p'\leqslant\infty$. Лемма 4 доказана.

Теперь докажем части (a)–(c) теоремы 1 для $f\in GM$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

(a) Пусть $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}<\infty$. Тогда по лемме 4

$$\int_{|x|\leqslant1}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\int_{|x|\geqslant1}|x|^{\kappa}\,|df(x)|<\infty,$$

откуда по лемме 1 получаем, что преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция.

Покажем, что $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}<\infty$. Для этого воспользуемся весовыми неравенствами Харди и Беллмана для меры Данкля [9, теорема 3.1]: для $1\leqslant p\leqslant\infty$

$$\||x|^{-\alpha}H_{|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \alpha>\frac{d_\kappa}{p},$$

$$\||x|^{-\alpha}B_{|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \alpha<\frac{d_\kappa}{p},$$

где интегральные операторы Харди H и Беллмана B определяются равенствами

$$H_{|x|}f=\int_{|y|\leqslant|x|}f(y)\,d\mu_\kappa(y),\quad B_{|x|}f=\int_{|y|\geqslant|x|}f(y)\,d\mu_\kappa(y).$$

Отсюда с помощью замены переменного для соответствующих α получаем

$$\||x|^{\alpha-2d_\kappa/p}H_{1/|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa},\quad \||x|^{\alpha-2d_\kappa/p}B_{1/|x|}f\|_{p,\kappa}\leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}f\|_{p,\kappa}. \tag{10}$$

По леммам 1, 3

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|&\leqslant C\Big(\int_{|x|\leqslant1/|y|}|f(x)|\,|x|^{2\kappa}\,dx+\frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant1/|y|}|x|^{\kappa}\,|df(x)|\Big)\\&\leqslant C\Big(\int_{|x|\leqslant1/|y|}|f(x)|\,d\mu_\kappa(x)+\frac{1}{|y|^{\kappa+1}}\int_{|x|\geqslant1/(c|y|)}|x|^{-\kappa-1}|f(x)|\,d\mu_\kappa(x)\Big)\\&\leqslant C\big(H_{1/|y|}f+|y|^{-\kappa-1}B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1}f)\big),\end{aligned}$$

откуда

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}\leqslant C\big(\||y|^{-\gamma}H_{1/|y|}f\|_{p,\kappa}+\||y|^{-\gamma-\kappa-1}B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1}f)\|_{p,\kappa}\big).$$

Воспользуемся (10) с $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma > \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора H и $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma - \kappa - 1 < \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора B. Отсюда $\frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2} < \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$, что влечет условие (3). Теперь вспоминая, что $\delta = d_\kappa(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}) = d_\kappa(\frac{2}{p} - 1)$, находим

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} \leqslant C\big(\||x|^{d_\kappa-(2d_\kappa/p-\gamma)}f\|_{p,\kappa} + \||x|^{d_\kappa-(2d_\kappa/p-\gamma-\kappa-1)-\kappa-1}f\|_{p,\kappa}\big) \leqslant C\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa}.$$

Часть (a) установлена.

(b) Пусть выполнено (4). Тогда по лемме 1 преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля.

Далее пусть $f \geqslant 0$ и $\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} < \infty$. Покажем, что $\||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa} < \infty$. Для этого воспользуемся несложно проверяемыми неравенствами (см. также [4])

$$f(x) \leqslant \int_{|u|\geqslant|x|} |df(u)| \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/c} \frac{f(u)}{|u|}\,du \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/(2c)} \int_{|u|\leqslant|v|\leqslant 2|u|} \frac{f(v)}{|v|}\,dv\,\frac{du}{|u|}.$$

Отсюда по лемме 2

$$f(x) \leqslant C\int_{|u|\geqslant|x|/(2c)} \int_{|y|\leqslant 2/|u|} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)|\,d\mu_\kappa(y)\,\frac{du}{|u|} = CB_{|x|/(2c)}(|u|^{-d_\kappa}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)).$$

Вновь воспользуемся неравенствами Харди и Беллмана. Для $\alpha = \delta - \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$

$$\||x|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa} \leqslant C\||u|^{d_\kappa-\alpha}(|u|^{-d_\kappa}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f))\|_{p,\kappa} = C\||u|^{\gamma-\delta}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa}.$$

Здесь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$, что шире $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2}$, так как $d_\kappa \geqslant 1$. Теперь для $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} + \gamma - \delta > \frac{d_\kappa}{p}$

$$\||u|^{\gamma-\delta}H_{2/|u|}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} \leqslant C\||x|^{d_\kappa-\alpha}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa} = C\||x|^{-\gamma}\mathcal{F}_\kappa(f)\|_{p,\kappa},$$

где вновь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$. Часть (b) установлена.

Часть (c) вытекает из того факта, что для четных функций имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля, где необходимость условия (3) доказана в работе [4].

Теорема 1 доказана.

4. Случай (κ, a)-обобщенного преобразования Фурье

Теорему 1 несложно обобщить на случай одномерного (κ, a)-обобщенного (деформированного) преобразования Фурье (см. [7])

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a}\int_{\mathbb{R}} f(x)B_{\kappa,a}(x,y)|x|^{2\kappa+a-2}\,dx,$$

где $\kappa \geqslant 0$, $a > 0$, $2\kappa + a > 1$ и ядро $B_{\kappa,a}(x,y) = b_{\kappa,a}(xy)$,

$$b_{\kappa,a}(t) = j_{\frac{2\kappa-1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|t|^{\frac{a}{2}}\Big) + \frac{\Gamma(\frac{2\kappa-1}{a}+1)}{\Gamma(\frac{2\kappa+1}{a}+1)}\,\frac{t}{(ai)^{\frac{2}{a}}}\,j_{\frac{2\kappa+1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|t|^{\frac{a}{2}}\Big).$$

При $a = 2$ имеем преобразование Данкля.

Пусть $\frac{2\kappa-1}{a} \geqslant -\frac{1}{2}$. Случай четных GM-функций изучен в работе [7], где обобщенное преобразование Фурье сводится к деформированному преобразованию Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a}\int_{\mathbb{R}} f(x)j_{\frac{2\kappa-1}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{\frac{a}{2}}\Big)|x|^{2\kappa+a-2}\,dx.$$

В этом случая гипотеза Боаса при выполнении условий как в теореме 1 кратко записывается в виде

$$\||\cdot|^{-\gamma}\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)\|_{p,\kappa,a} \asymp \||\cdot|^{\gamma-\delta}f\|_{p,\kappa,a}, \quad \gamma \in \Big(\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a}+\frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p}\Big),$$

где $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Нетрудно проверить, следуя доказательству теоремы 1, что гипотеза Боаса остается верной, если функция не обязательно четная и GM-условие определено аналогично (2). Для этого достаточно проверить свойства ограниченности ядра в окрестности нуля и нужного асимптотического поведения его первообразной в окрестности бесконечности, которое может быть выведено как при доказательстве леммы 1. При $|t| \leqslant 1$ ограниченность $e_{\kappa,a}(t)$ при $\frac{2\kappa-1}{a} \geqslant -\frac{1}{2}$ вытекает из ограниченности нормированной функции Бесселя, а при $|t| \geqslant 1$ имеем

$$\Big|\int_0^t b_{\kappa,a}(\xi)|\xi|^{2\kappa+a-2}\,d\xi\Big| \leqslant C\Big(\Big|\int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa-1}{a}}(\xi)\xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1}\,d\xi\Big| + \Big|\int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa+1}{a}}(\xi)\xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1}\,d\xi\Big|\Big) \leqslant C|t|^{\frac{d_{\kappa,a}-\frac{a}{2}}{2}}.$$

В заключении скажем, что интересно изучить случай $\frac{2\kappa-1}{a} < -\frac{1}{2}$, когда требуется более детальное изучение свойств ядра обобщенного преобразования Фурье. Некоторые результаты в этом направлении содержаться в недавней работе [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benedetto J.J., Heinig H.P. Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations // J. Fourier Anal. Appl. 2003. Vol. 9. P. 1–37.
2. Boas R.P. The integrability class of the sine transform of a monotonic function // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 365–369.
3. Debernardi A. The Boas problem on Hankel transforms // J. Fourier Anal. Appl. 2019. Vol. 25. P. 3310–3341.
4. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, no. 2. P. 762–774.
5. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Weighted gradient inequalities and unique continuation problems // Calc. Var. Partial Dif. 2020. Vol. 59, no. 3. Article 89.
6. Dyachenko M., Liflyand E., Tikhonov S. Uniform convergence and integrability of Fourier integrals // Jour. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 372. P. 328–338.
7. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // Int. Math. Res. Notices. 2016. Vol. 23. P. 7179–7200.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. Article 105462.
9. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Anal. 2021. Vol. 55. P. 513–538.
10. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. On the kernel of the (κ, a)-generalized Fourier transform // arXiv:2210.15730. 2022.

11. Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S. Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$ // J. d'Anal. Math. 2011. Vol. 114. P. 99–120.

12. Gorbachev D., Liflyand E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for integral transforms // Indiana Univ. Math. J. 2018. Vol. 67, no. 5. P. 1949–2003.

13. Liflyand E., Tikhonov S. Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2008. Vol. 346. P. 1137–1142.

14. Liflyand E., Tikhonov S. Two-sided weighted Fourier inequalities // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). 2012. Vol. XI. P. 341–362.

15. Sagher Y. Integrability conditions for the Fourier transform // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 54. P. 151–156.

REFERENCES

1. Benedetto, J.J. & Heinig, H.P. 2003. "Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 1–37.

2. Boas, R.P. 1972. "The integrability class of the sine transform of a monotonic function", *Studia Math.*, vol. 44, pp. 365–369.

3. Debernardi, A. 2019. "The Boas problem on Hankel transforms", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 25, pp. 3310–3341.

4. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2013. "Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 408, no. 2, pp. 762–774.

5. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Weighted gradient inequalities and unique continuation problems", *Calc. Var. Partial Dif.*, vol. 59, no. 3, article 89.

6. Dyachenko, M., Liflyand, E.& Tikhonov, S. 2010. "Uniform convergence and integrability of Fourier integrals", *Jour. Math. Anal. Appl.*, vol. 372, pp. 328–338.

7. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2016. "Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform", *Int. Math. Res. Notices*, vol. 23, pp. 7179–7200.

8. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. "Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting", *J. Approx. Theory*, vol. 258, article 105462.

9. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2021. "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform", *Potential Anal.*, vol. 55, pp. 513–538.

10. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2022. "On the kernel of the (κ, a)-generalized Fourier transform", *arXiv:2210.15730.*

11. Gorbachev, D., Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2011. "Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$", *J. d'Anal. Math.*, vol. 114, pp. 99–120.

12. Gorbachev, D., Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2018. "Weighted norm inequalities for integral transforms", *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 67, no. 5, pp. 1949–2003.

13. Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2008. "Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms", *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 346, pp. 1137–1142.

14. Liflyand, E. & Tikhonov, S. 2012. “Two-sided weighted Fourier inequalities”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, vol. XI, pp. 341–362.

15. Sagher, Y. 1976. “Integrability conditions for the Fourier transform”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 54, pp. 151–156.

Получено: 17.11.2022
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-154-164

Области сходимости дзета-функции некоторых моноидов натуральных чисел[1]

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе исследуется вопрос об области абсолютной сходимости дзета-ряда для некоторых моноидов натуральных чисел. Рассмотрены два основных случая: моноиды с C степенной θ-плотностью и моноиды с C-логарифмической θ-степенной плотностью.

Введено новое понятие — сильная $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ степенная $\vec{\theta}$-плотность. Для дзета-функции последовательности натуральных чисел A с сильной $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ степенной $\vec{\theta}$-плотностью доказана теорема, согласно которой дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ является аналитической функцией переменной α, регулярной при $\sigma > 0$, имеющая n полюсов первого порядка, и найдены вычеты в этих полюсах.

Для случая C логарифмической θ-степенной плотности доказан принципиально другой результат: если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $0 < \theta < 1$, то дзета-функция моноида M имеет область голоморфности полуплоскость $\sigma > 0$ и мнимая ось является линией особенностей.

В третьем разделе рассмотрен вопрос об аналитическом продолжении дзета-функции моноида натуральных чисел в трёх случаях: для моноида k-ых степеней натуральных чисел, для множества натуральных чисел свободных от k-ых степеней и для объединения двух моноидов k-ых степеней натуральных чисел, когда показатели степеней взаимно простые числа.

Во всех трёх случаях показано, что аналитическое продолжение существует на всю комплексную плоскость. Найдены функциональные уравнения для каждого из трёх случаев. Они все имеют принципиально разный вид. Кроме этого, для каждого аналитического продолжения в критической полосе найдены новые свойства дзета-функции, которые отсутствуют у дзета-функции Римана.

В заключении перечислены перспективные, актуальные темы дальнейших исследований.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 20 названий.

---

[1] Исследование выполнено по гранту РНФ № 22-21-00544 «Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» .

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Области сходимости дзета-функции некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 2, С. 154–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-154-164

Convergence domains of the zeta function of some monoids of natural numbers[2]

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper investigates the question of the domain of absolute convergence of the zeta series for some monoids of natural numbers. Two main cases are considered: monoids with C powerθ-density and monoids with C-logarithmic θ-power density.

A new concept is introduced — strong $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$ power $\vec{\theta}$ is the density. For the zeta function of a sequence of natural numbers A with a strong $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$power $\vec{\theta}$-density proved the theorem according to which the zeta function $\zeta(A|\alpha)$ is an analytical function of the variable α, regular at $\sigma>0$, having n poles of the first order, and deductions are found in these poles.

For the case of C logarithmic θ-power density, a fundamentally different result is proved: if the monoid M has a C logarithmicθ-power density with $0<\theta<1$, then the zeta function of the monoid M has a holomorphic half-plane $\sigma>0$ and the imaginary axis is the singularity line.

In the third section, the question of the analytical continuation of the zeta function of the monoid of natural numbers in three cases is considered: for a monoid of k-th powers of natural numbers, for a set of natural numbers free of k-th powers, and for the union of two monoids of k-th powers of natural numbers when the exponents of the degrees are mutually prime numbers.

In all three cases, it is shown that the analytic continuation exists on the entire complex plane. Functional equations are found for each of the three cases. They all have a fundamentally different look. In addition, new properties of the zeta function that are missing from the Riemann zeta function are found for each analytic continuation in the critical band.

In conclusion, promising, relevant topics for further research are listed.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, the zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 20 titles.

---

[2] The study was carried out under the grant from the RSF No. 22-21-00544 “Zeta function of monoids of natural numbers and related issues”.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Convergence domains of the zeta function of some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 154–164.

1. Введение

Общее определение дзета-функции произвольного множества натуральных чисел следующее [5]:

Определение 1. *Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством*

$$\zeta(A|\alpha)=\sum_{x\in A}\frac{1}{x^{\alpha}}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>\sigma_A),\tag{1}$$

где σ_A — абсцисса абсолютной сходимости.

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma>\sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha=\sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0\leqslant\sigma_A\leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$. Отметим, что при $\sigma>\sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma\geqslant\sigma_0$ для любого $\sigma_0>\sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A)=\{a_1\dots a_l|a_1,\dots,a_l\in A,l\geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Нетрудно понять, что имеется несчетное множество моноидов натуральных чисел и, следовательно, несчетное множество различных дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Исследованию области абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции моноида натуральных чисел посвящено несколько работ [5, 6, 7, 8, 9, 11, 12]. Так как каждый такой ряд является рядом Дирихле, то для него определено понятие абсциссы абсолютной сходимости.

Следуя за Б. М. Бредихиным [1], обозначим через $\nu_M(x)$ — количество элементов моноида M, непревосходящих x, а через $\pi_M(x)$ — количество простых элементов, непревосходящих x.

Работы по дзета-функции моноидов натуральных чисел оказались тесно связаны с циклом работ Б. М. Бредихина о чём говорится в обзорной работе [4].

Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности (см. [1]), и для таких последовательностей элементарными методами получал асимптотический закон распределения образующих элементов. Для моноидов это понятие звучит следующим образом:

Определение 2. *Моноид M натуральных чисел имеет C степенную θ-плотность, если существует предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\nu_M(x)}{x^{\theta}}=C.\tag{2}$$

Ясно, что натуральный ряд имеет единичную степенную 1-плотность.

Пусть $\mathbb{P}_k=\{2^k,3^k,5^k,\dots\}$ — множество k-ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P})=\mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k)=\mathbb{N}_k=\{1^k,2^k,3^k,4^k,\dots\}$ — множество k-ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$-плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$. Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел.

Наилучший результат здесь получается, конечно, исходя из оценок И. М. Виноградова [2] и Н. М. Коробова [20]:

$$\pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x} + O\left(xe^{-a(\ln x)^{0.6}(\ln\ln x)^{-0.2}}\right),$$

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int\limits_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{dx}{\ln x} + O\left(x^{\frac{1}{k}}e^{-a(\frac{1}{k}\ln x)^{0.6}(\ln\ln x - \ln k)^{-0.2}}\right),$$

где $a > 0$ — некоторая положительная константа.

Здесь используется очевидное равенство $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$.

Планируется получить условия, связывающие плотность распределения элементов моноида натуральных чисел и абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида. Здесь подразумевается рассмотреть следующие случаи: степенная плотность и C-логарифмическая θ-степенная плотность. Исходя из функции распределения элементов моноида, получить интегральное представление для дзета-функции моноида с помощью теоремы Абеля и найти полюс с помощью асимптотической формулы для функции распределения со степенной плотностью. По-видимому, в случае C-логарифмической θ-степенной плотности абсцисса абсолютной сходимости всегда равна 0. В пользу последнего предположения следует отнести результаты статьи [17] о свойствах дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых и статьи [8], в которой установлена область голоморфности этой дзета-функции. Аналогичные результаты установлены в работах [10] и [18] для дзета-функции основного моноида типа q.

Цель данной статьи — получить новые результаты в этом направлении исследований.

2. Области абсолютной сходимости

Прежде всего выпишем интегральное представление для дзета-функции моноида M с помощью теоремы Абеля:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{x\in M}\frac{1}{x^\alpha} = \alpha\int\limits_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}}dx \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_M),$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости.

Теорема 1. *Если моноид M имеет C степенную θ-плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M = \theta$, в точке $\alpha = \theta$ полюс первого порядка и для вычета справедливо равенство*

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta}\zeta(M|\alpha) = C\cdot\theta.$$

Доказательство. Действительно, из определения C степенной θ-плотности следует, что $\nu_M(x) = C \cdot x^\theta + r(x)$, где $r(x) = x^\theta \cdot \delta(x)$ и $\delta(x) = o(1)$.

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{C \cdot x^\theta + x^\theta \cdot \delta(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha \cdot C}{\alpha - \theta} + \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{\alpha+1-\theta}} dx = C + \frac{\theta \cdot C}{\alpha - \theta} + \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\delta(x)}{x^{\alpha+1-\theta}} dx.$$

Так как числитель последнего интеграла ограничен, то этот несобственный интеграл сходится при $\sigma > \theta$, причем равномерно в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \theta_0 > \theta$. □

Сравнивая полученный результат с теорией дзета-функции Римана, мы видим, что последний интеграл не увеличивает область абсолютной сходимости. Объяснение этому факту достаточно простое — определение C степенной θ-плотности не дает существенной оценки остаточного члена для функции распределения, в то время как для дзета-функции Римана мы имеем $O(1)$ в сравнении с x для главного члена. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение 3. *Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ и $1 \geqslant \theta_1 > \theta_1 > \ldots > \theta_n > 0$, тогда будем говорить что бесконечная последовательность $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots\}$ натуральных чисел имеет сильную $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ степенную $\vec{\theta}$-плотность, если для функции распределения $\nu_A(x)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\nu_A(x) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot x^{\theta_j} + r(x), \quad r(x) = O(1).$$

Рассмотрим пример множества $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ из работы [6] при $0 < \theta < 1$. Согласно лемме 1 из этой работы для любого натурального n справедливо неравенство $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]$. По определению бесконечное множество $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ задается равенством

$$A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}} = \left\{ \left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Лемма 1. *Для любого $0 < \theta < 1$ множество $A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}$ имеет единичную сильную θ-степенную плотность:*

$$\nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}}(x) = x^\theta + r(x), \quad |r(x)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Действительно, для наибольшего n неравенство $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] \leqslant x$ влечёт неравенства $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right]^\theta \leqslant x^\theta < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]^\theta$. Отсюда следует, что $x^\theta < n+1$. С другой стороны, $\left[n^{\frac{1}{\theta}}\right] \leqslant x < \left[(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\right]$, $n^{\frac{1}{\theta}} < (x+1)$ и, следовательно, $n < (x+1)^\theta$. Так как $\theta < 1$, то $(x+1)^\theta < x^\theta + 1$ и, следовательно, $\nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta}}}(x) = x^\theta + r(x)$, где $|r(x)| \leqslant 1$. □

Определим множество $A_{\vec{\theta}}$ с помощью равенства

$$A_{\vec{\theta}} = \bigcup_{j=1}^n A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta_j}}.$$

Очевидно, что

$$\nu_{A_{\vec{\theta}}}(x) \leqslant \sum_{j=1}^n \nu_{A_{\mathbb{N},\frac{1}{\theta_j}}}(x).$$

Лемма 2. *Для последовательности $A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}$ имеет место сильная* $(1,1,-1)$ $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$*-степенная плотность:*

$$\nu_{A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}}(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+r(x),\quad |r(x)|\leqslant 3.$$

Доказательство. Действительно, $A_{\mathbb{N},2}\bigcap A_{\mathbb{N},3}=A_{\mathbb{N},6}$. Поэтому справедливо равенство

$$\nu_{A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}}(x)=\nu_{A_{\mathbb{N},2}}(x)+\nu_{A_{\mathbb{N},3}}(x)-\nu_{A_{\mathbb{N},6}}(x).$$

Применяя лемму 1, получим доказываемое утверждение. □

Заметим, что аналогичные утверждения справедливы и для других случаев $\vec{\theta}$, но имеют более сложные формулировки.

Теорема 2. *Если множество A имеет сильную $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$ степенную $\vec{\theta}$-плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M=\theta_1$, в точке $\alpha=\theta_1$ полюс первого порядка и для вычета справедливо равенство*

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta_1}\zeta(A|\alpha)=C_1\cdot\theta_1.$$

Кроме этого, дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ является аналитической функцией переменной α, регулярной при $\sigma>0$ кроме точек $\alpha=\theta_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$, в которых полюса первого порядка с вычетами

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\theta_j}\zeta(A|\alpha)=C_j\cdot\theta_j,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. Действительно, из определения сильной $\vec{C}=(C_1,\ldots,C_n)$ степенной $\vec{\theta}$-плотности следует, что

$$\nu_A(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot x^{\theta_j}+r(x),\quad r(x)=O(1).$$

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot x^{\theta_j}+r(x)}{x^{\alpha+1}}dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha\cdot C_j}{\alpha-\theta_j}+\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{r(x)}{x^{\alpha+1}}dx=\sum_{j=1}^{n}C_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\theta_j\cdot C_j}{\alpha-\theta_j}+\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{r(x)}{x^{\alpha+1}}dx.$$

Так как числитель последнего интеграла ограничен, то этот несобственный интеграл сходится при $\sigma>0$, причем равномерно в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0>0$. □

Теперь перейдём к случаю C-логарифмической θ-степенной плотности. По определению последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством

$$\nu_M(x)=\sum_{n\in M,\,n\leqslant x}1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\nu_M(x)}{\ln^{\theta}x}=C,\quad C>0,\quad \theta>0.$$

Лемма 3. *Если множество простых элементов $P(M)$ моноида M конечно, то C-логарифмическая θ-степенная плотность моноида M нулевая для любого значения $\theta>0$.*

Доказательство. Действительно, если $P(M)=\{q_1<q_2<\ldots<q_n\}$, то

$$M=\{q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_n^{m_n}|m_1,\ldots,m_n=0,1,\ldots\}$$

и $\nu_M(x)\leqslant\ln_{q_1}x\cdot\ldots\cdot\ln_{q_n}x\leqslant\ln^n x$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\nu_M(x)}{\ln^\theta x}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\ln\ln(x)}{\ln^\theta x}=0$. □

Из доказанной леммы следует, что если моноид M имеет ненулевую C логарифмическую θ-степенную плотность, то множество простых элементов $P(M)$ моноида M бесконечное счётное множество.

Теорема 3. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $0<\theta<1$, то дзета-функция моноида M имеет область голоморфности полуплоскость $\sigma>0$ и мнимая ось является линией особенностей.*

Доказательство. Действительно, из определения C-логарифмической θ-степенной плотности следует, что $\nu_M(x)=e^{C\cdot\ln^\theta x+r(x)}$, где $r(x)=\ln^\theta x\cdot\delta(x)$ и $\delta(x)=o(1)$.

Применяя интегральное представление, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{e^{\ln^\theta x\cdot(C+\delta(x))}}{x^{\alpha+1}}dx.$$

В данном несобственном интеграле сделаем замену переменных $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$, получим

$$\zeta(M|\alpha)=\alpha\int\limits_0^\infty e^{u^\theta\cdot(C+\delta(e^u))-\alpha\cdot u}du.$$

Для любого $\sigma_0>0$ при $\alpha=\sigma+it$ и $\sigma\geqslant\sigma_0$ найдется $u_0=u_0(\sigma_0)$ такое, что так как $0<\theta<1$, то для любого $u\geqslant u_0$ справедливо неравенство $|e^{u^\theta\cdot(C+\delta(e^u))-\alpha\cdot u}|\leqslant e^{-\frac{\sigma_0}{2}u}$. Отсюда следует, что несобственный интеграл равномерно сходится в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0$ и $\zeta(M|\alpha)$ голоморфная функция в полуплоскости $\sigma>0$.

Так как множество простых элементов $P(M)$ моноида M бесконечное счётное множество: $P(M)=\{q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots\}$, то при $\alpha=\frac{2k\pi i}{\ln q_n}$ для любого целого k и натурального n дзета-ряд $\zeta(M|\alpha)=\sum_{x\in M}\frac{1}{x^\alpha}$ содержит счётное число слагаемых равных единицы:

$$\frac{1}{(q_n^m)^{\frac{2k\pi i}{\ln q_n}}}=1,\quad m=1,2,\ldots.$$

Отсюда следует, что на мнимой оси существует всюду плотное множество особых точек. Повторяя рассуждения из работы [8], получим что мнимая ось целиком является особой линией для дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$. □

3. Аналитическое продолжение

Для моноида $M(\mathbb{P}_k)=\mathbb{N}_k=\{1^k,2^k,3^k,4^k,\ldots\}$ — множества k-ых степеней всех натуральных чисел, как было отмечено выше, справедливо тождество $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\zeta(k\alpha)$. Из этого тождества сразу следует, что дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha=\frac{1}{k}$, где полюс первого порядка с вычетом $\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{k}}\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)=\frac{1}{k}$. Критической полосой является полоса $0<\sigma<\frac{1}{k}$, критической прямой — прямая $\sigma=\frac{1}{2k}$. Далее воспользуемся функциональным уравнением для дзета-функции

Римана: $\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha)$, где $M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана. Отсюда получаем функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)$:

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha) = M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha).$$

Рассмотрим множество A_k натуральных чисел свободных от k-ых степеней:

$$A_k = \{p_1^{m_1}\dots p_n^{m_n} | 1 \leqslant m_1, \dots, m_n < k,\, p_j \in \mathbb{P}\, (j = 1, \dots, n)\}.$$

Очевидно, что для любого натурального n найдётся единственная пара натуральных $a_k(n) \in \in A_k$, $m_k(n) \in M(\mathbb{P}_k)$ такая, что $n = a_k(n)m_k(n)$. Отсюда следует, что справедливо равенство $\mathbb{N} = M(\mathbb{P}_k) \cdot A_k$. Переходя к дзета-функциям, получим равенство

$$\zeta(A_k|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha)} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(k\alpha)}.$$

Из этого равенства следует, что дзета-функция множества натуральных чисел свободных от k-ых степеней является аналитической функцией, для которой абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда $\alpha = 1$. В критической полосе имеется ноль в точке $\alpha = \frac{1}{k}$. На прямой $\sigma = \frac{1}{2k}$ имеется бесконечное множество полюсов первого порядка, так как на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2k}$ дзета-функции $\zeta(k\alpha)$ имеется бесконечное число нулей.

Функциональное уравнение имеет достаточно неожиданный вид:

$$\zeta(A_k|\alpha) = \frac{M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha)}.$$

Нетрудно видеть, что $A_{\mathbb{N},k} = M(\mathbb{P}_k)$ для любого натурального $k > 1$. Если $(k_1, k_2) = 1$, то $P(M(\mathbb{P}_{k_1}) \cdot M(\mathbb{P}_{k_2})) = \mathbb{P}_{k_1} \bigcup \mathbb{P}_{k_2}$, но моноид $M(\mathbb{P}_{k_1}) \cdot M(\mathbb{P}_{k_2})$ уже не будет моноидом с однозначным разложением на простые элементы, так как $M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcap M(\mathbb{P}_{k_2}) = M(\mathbb{P}_{[k_1,k_2]})$. Отсюда следует, что дзета-функция моноида $M(\mathbb{P}_{k_1}) \cdot M(\mathbb{P}_{k_2})$ не равна произведению дзета-функций сомножителей и не имеет эйлерова произведения.

Как и во втором разделе, мы можем утверждать что для множества $M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})$ дзета-функция имеет простое представление

$$\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2}) \middle| \alpha\right) = \zeta(M(\mathbb{P}_{k_1})|\alpha) + \zeta(M(\mathbb{P}_{k_2})|\alpha) - \zeta(M(\mathbb{P}_{[k_1,k_2]})|\alpha) =$$
$$= \zeta(k_1\alpha) + \zeta(k_2\alpha) - \zeta([k_1,k_2]\alpha).$$

Из последнего равенства следует, что дзета-функция $\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2}) | \alpha\right)$ имеет три полюса первого порядка в точках $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2}$, $\frac{1}{[k_1,k_2]}$ с вычетами, соответственно,

$$\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{k_j}} \zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2}) \middle| \alpha\right) = \frac{1}{k_j}, \quad (j = 1, 2),$$
$$\mathrm{Res}_{\alpha=\frac{1}{[k_1,k_2]}} \zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2}) \middle| \alpha\right) = -\frac{1}{[k_1,k_2]}.$$

Функциональное уравнение будет иметь более сложный вид:

$$\zeta\left(M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2}) \middle| \alpha\right) = M(k_1\alpha)\zeta(1-k_1\alpha) + M(k_2\alpha)\zeta(1-k_2\alpha) - M([k_1,k_2]\alpha)\zeta(1-[k_1,k_2]\alpha).$$

Если $k_1 < k_2$, то абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для моноида $M(\mathbb{P}_{k_1}) \bigcup M(\mathbb{P}_{k_2})$ будет равна $\frac{1}{k_1}$. В полосе $\frac{1}{k_2} < \sigma \leqslant \frac{1}{k_1}$ дзета функция представима как линейная комбинация одного несобственного интеграла и двух дзета-рядов, в полосе $\frac{1}{[k_1,k_2]} < \sigma \leqslant \frac{1}{k_2}$ дзета функция представима как линейная комбинация двух несобственных интегралов и одного дзета-ряда, в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{[k_1,k_2]}$ дзета функция представима как линейная комбинация трёх несобственных интегралов.

4. Заключение

Во втором разделе показано, что моноид k-ых степеней имеет единичную сильную $\frac{1}{k}$-степенную плотность. На простейшем примере объединения двух моноидов k-ых степеней показано аналогичное свойство, которое справедливо и в более сложных случаях. Возникает вопрос об описании широкого класса моноидов, для которых имеет место сильная степенная плотность.

В третьем разделе найдено аналитическое продолжение. На наш взгляд, желательно описать в явном виде в каждом из трёх случаев множество тривиальных нулей соответствующих дзета-функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.
2. И. М. Виноградов, Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем., 22:2 (1958), 161–164.
3. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.
4. Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, С. 19–28.
5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
9. Н. Н. Добровольский, “Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера”, Матем. заметки, 109:3 (2021), 464–469.
10. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).
11. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
12. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
13. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

14. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

15. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

17. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

18. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q// Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 59–71.

19. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 57–71

20. Н. М. Коробов, Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел // Докл. АН СССР, 123:1 (1958), 28–31.

REFERENCES

1. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", Doklady Akademii nauk SSSR, 118:5, pp. 855–857.

2. I. M. Vinogradov, 1958, "A new evaluation of the function $\zeta(1+it)$", *Izv.v. AN SSSR. Ser. matem.*, 22:2, 161–164.

3. M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Koguhov, I. Yu. Rebrova, 2022, "Monoid of pro ducts of zeta functions of monoids of natural numb ers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 102–117.

4. N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov, 2020, "Boris Maximovich Bredikhin and his scientific and pedagogical activity" ,*Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 19–28.

5. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

7. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 142–150.

8. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One mo del Zeta function of the monoid of natural numb ers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163

9. N. N. Dobrovol'skii, "Abscissa of Absolute Convergence of a Class of Generalized Euler Products", *Math. Notes*, 109:3 (2021), 483–488.

10. N. N. Dobrovol'skii, 2022, "Distribution of simple elements in some monoids of natural numbers", *Math. Notes* (in print).

11. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

12. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

13. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

14. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

15. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

17. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.

18. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The inverse problem for a basic monoid of type q" ,*Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 59–71.

19. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Entropy for some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 57–71.

20. N. M. Korobov, 1958, "Estimates of Weyl sums and distribution of primes" , *Dokl. USSR Academy OF Sciences*, 123:1, 28-31.

Получено: 21.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-165-178

Условия разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка, где $f_1(t, x), f_2(t, x), S_1, S_2$ - известные функции

М. В. Донцова

Донцова Марина Владимировна — кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород).
e-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Аннотация

Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами. Сформулированы и доказаны теоремы о локальном и нелокальном существовании и единственности решений задачи Коши. Определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши. Определены достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0, T]$). Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Исследование нелокальной разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными свободными членами опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: система квазилинейных уравнений, метод дополнительного аргумента, задача Коши, глобальные оценки.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
М. В. Донцова. Условия разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка, где $f_1(t, x), f_2(t, x), S_1, S_2$ - известные функции // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 165–178.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-165-178

Solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first-order quasi-linear equations, where $f_1(t,x), f_2(t,x), S_1, S_2$ are given functions

M. V. Dontsova

Dontsova Marina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, National Research Lobachevskii State University of Nizhni Novgorod (Nizhny Novgorod).
e-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Abstract

We consider a Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms. Theorems on the local and nonlocal existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem are formulated and proved. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a local solution of the Cauchy problem in the initial coordinates at which the solution has the same smoothness with respect to x as the initial functions of the Cauchy problem are determined. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a nonlocal solution of the Cauchy problem in the initial coordinates (for a given finite interval $t \in [0,T]$) are determined. Local existence and uniqueness theorem of the solution of the Cauchy problem for a system of quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms is proved with the method of an additional argument. The investigation of a nonlocal solvability of the Cauchy problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded free terms relies on global estimates.

Keywords: a system of quasilinear equations, the method of an additional argument, Cauchy problem, global estimates.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
M. V. Dontsova, 2023, “Solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first-order quasi-linear equations, where $f_1(t,x), f_2(t,x), S_1, S_2$ are given functions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 165–178.

1. Введение

В работах [1], [2] определены конкретные достаточные условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта и для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта. В работах [3], [15] определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси.

В работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для некоторых видов систем квазилинейных уравнений первого порядка.

В данной работе рассмотрим систему вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{array} \right. \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

В данной работе проводится исследование условий локальной и нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2).

В данной работе доказываем существование и единственность локального решения задачи Коши в исходных координатах, у которого гладкость по x не ниже, чем у начальных функций задачи Коши (1), (2), если

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,\ \ K = 2\max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}.$

В данной работе доказываем существование и единственность нелокального решения задачи Коши (1), (2) в исходных координатах, если

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}\,,$

$$K = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\} + T\max\{\sup\limits_{\Omega_T}|f_1|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|f_2|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_1|\,, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\}.$$

2. Существование локального решения

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [4]–[15]

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu, \tag{3}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu, \tag{4}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_1(\nu,\eta_1)d\nu, \tag{5}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s f_2(\nu,\eta_2)d\nu, \tag{6}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{7}$$

Подставим (3), (4) в (5) - (7), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{8}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{9}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{10}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{11}$$

Мы будем писать, что константы $K_0,\ K_1,\ K_2...$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедливо утверждение

Утверждение 1. *Если функции $w_j,\ j=\overline{1,4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (8)–(11) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи Коши (1), (2) на $\Omega_{T_0},\ T_0 \leqslant T$, где T_0 – константа, определяемая через исходные данные.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [4], [5], [6], [7], [11], [12].

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T>0\}$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i=1,2,\ l=\overline{0,2}\},\ C_f = \max\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_1|, \sup_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\},$$

$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$, где K - произвольно зафиксированное положительное число, $l = \max\left\{\sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_2|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_2|\right\}$, $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m=\overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n=1,2....$,

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T}|U(s,t,x)|,\ \|f\| = \sup_{\Omega_T}|f(t,x)|.$$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1), (2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1,f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1,S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, где*

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}),\ K = 2C_\varphi,$$

и выполняются условия

$$\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } R,\ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0, \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений (8)–(11).*

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

Лемма 1. *При выполнеии условий*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = 2C_\varphi$$

и

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}) \tag{12}$$

система интегральных уравнений (8)–(11) имеет единственное решение $w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [11]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (8)–(11) зададим равенствами: $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (8)–(11) определим при помощи последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\tau)d\nu, \tag{13}$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\tau)d\nu, \tag{14}$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n})d\nu), \tag{15}$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n})d\nu). \tag{16}$$

Для системы уравнений (13)–(16) нулевое приближение определим равенствами:

$$w_{jn}^0 = w_{j(n-1)},\ j = \overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (13)–(16) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\tau)d\nu, \tag{17}$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\tau)d\nu, \tag{18}$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)d\nu), \tag{19}$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)d\nu). \tag{20}$$

Так же, как в [5], [6], [7], [11], при выполнении условия

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}) \tag{21}$$

получаем, что последовательные приближения (17)–(20) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (13)–(16), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\partial_x w_{jn},\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 8C_\varphi.$$

Так же, как в [5], [6], [7], [11], при выполнении условия (12) получаем, что последовательные приближения (13)–(16) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (8)–(11), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\partial_x w_j,\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_x w_i\| \leqslant 4C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\partial_x w_3\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\| \leqslant 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j=\overline{1,4}$, имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как в статье [11].

Введем условия

$$\begin{gathered}\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0,\ (u,v)\in Z_K,\\ \varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0, \quad x\in R,\ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0,\ (t,x)\in\Omega_T.\end{gathered} \tag{22}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar C^2(R),\ f_1,f_2\in \bar C^{2,2}(\Omega_T),\ S_1,S_2\in \bar C^{2,2}(Z_K),\ K=2C_\varphi$, *тогда при выполнении условий (12), (22) функции* $w_j,\ j=\overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений (8)–(11), имеют непрерывные и ограниченные производные* $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial t}$, $j=\overline{1,4}$ *на* Γ_T, *где* $T\leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$.

Доказательство.

Дважды продифференцируем последовательные приближения (13)–(16) по x и обозначим $\omega_j^n = w_{jnxx},\ j=\overline{1,4}$. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}\omega_1^n\,(s,t,x) = {}&-\varphi_1'(x-\int\limits_0^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu)\int\limits_0^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\nu\,-\\ &-\int\limits_0^s \partial_x f_1\int\limits_\nu^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\tau d\nu + G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}),\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\omega_2^n\,(s,t,x) = {}&-\varphi_2'(x-\int\limits_0^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu)\int\limits_0^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\nu\,-\\ &-\int\limits_0^s \partial_x f_2\int\limits_\nu^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\tau d\nu + G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\omega_3^n\,(s,t,x) = \omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx}+\partial_v S_1 w_{3nx})d\nu)^2 - w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t(\partial_u S_1\omega_1^n+\partial_v S_1\omega_3^n)d\nu\,+\\ +G_3(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\omega_4^n\,(s,t,x) = \omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(\partial_u S_2 w_{4nx}+\partial_v S_2 w_{2nx})d\nu)^2 - w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t(\partial_u S_2\omega_4^n+\partial_v S_2\omega_2^n)d\nu\,+\\ +G_4(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}),\end{aligned} \tag{26}$$

где $G_j, j=1,2,3,4$ – известные функции.

При выполнении условия (12), учитывая оценки $\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$, получаем

$$|\int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu| \leqslant S_K T,\ |\int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu| \leqslant S_K T,$$

$$S_K = \max\left\{\sup_{Z_K}|S_1|, \sup_{Z_K}|S_2|\right\},\ K=2C_\varphi.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in R$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0 - S_K T \leqslant x \leqslant x_0 + S_K T\},\ K=2C_\varphi.$$

Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$.

Докажем, что справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|, \tag{27}$$

$$|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|, \tag{28}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu.$$

Продифференцировав последовательные приближения (13)–(16) по x, получим

$$w_{1nx} = \varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n},w_{3n})d\nu)(1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu) +$$

$$+ \int\limits_0^s \partial_x f_1(1 - \int\limits_\nu^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\tau)d\nu, \tag{29}$$

$$w_{2nx} = \varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n},w_{2n})d\nu)(1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu) +$$

$$+ \int\limits_0^s \partial_x f_2(1 - \int\limits_\nu^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\tau)d\nu, \tag{30}$$

$$w_{3nx} = w_{2(n-1)x}(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu), \tag{31}$$

$$w_{4nx} = w_{1(n-1)x}(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu). \tag{32}$$

Предположим, что

$$w_{1(n-1)x} \geqslant 0,\ w_{2(n-1)x} \leqslant 0. \tag{33}$$

При выполнении условия (12) с учетом оценок

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 8C_\varphi$$

получаем, что для всех $n \in N$ на Γ_T справедливы неравенства:

$$1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx})d\nu > 0,\ 1 - \int\limits_0^t(\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx})d\nu > 0. \tag{34}$$

Из (31), (32), (33), (34) следует, что $w_{3nx} \leqslant 0,\ w_{4nx} \geqslant 0$.

Из (2), (2) при выполнении условий (22) с учетом неравенств (34), получаем

$$w_{1nx} \geqslant 0,\ w_{2nx} \leqslant 0.$$

Так как $w_{1nx} \geqslant 0,\ w_{2nx} \leqslant 0,\ w_{3nx} \leqslant 0,\ w_{4nx} \geqslant 0$, то

$$1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx}) d\nu \leqslant 1,\ 1 - \int\limits_s^t (\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx}) d\nu \leqslant 1. \tag{35}$$

В силу неравенств (34) и (35), по теореме о конечных приращениях получаем, что справедливы неравенства (27), (28).

Так же, как в [5], [6], при выполнении условий (12), (22) получаем, что справедливы неравества

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \Phi_{1n} +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{2n} + \left|\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))\right| +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

где Φ_{1n}, Φ_{2n} - последовательности такие, что для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех n будет $\Phi_{1n} < 0.5\varepsilon,\ \Phi_{2n} < 0.5\varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Следовательно,

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon + |\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))| +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Доказано, что при $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливы неравенства:

$$|\omega_i^0(s,t,x_1) - \omega_i^0(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ |\omega_i^1(s,t,x_1) - \omega_i^1(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ i = 1,2.$$

Предположим, что для некоторого $n-1$, $(n = 1,2,\ldots)$ при $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$|\omega_1^{(n-1)}(s,t,x_1) - \omega_1^{(n-1)}(s,t,x_2)| < \varepsilon,\ |\omega_2^{(n-1)}(s,t,x_1) - \omega_2^{(n-1)}(s,t,x_2)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon +$$
$$+0.1(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|), \tag{36}$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 1.5\varepsilon +$$
$$+0.3(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|). \tag{37}$$

Сложим неравенства (2) и (2), получим:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < 2\varepsilon$$
$$+0.4(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Следовательно,

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \frac{10}{3}\varepsilon. \tag{38}$$

Из неравенств (2) и (38) следует, что $|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Аналогично $|\omega_2^n(s,t,x_1) - \omega_2^n(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Итак, последовательности $\{\omega_i^n(s,t,x)\}$, $i = 1,2$ равностепенно непрерывны по x при $x \in \Omega_{x_0}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu)\int\limits_0^t(\partial_u S_1\tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1\tilde{\omega}_3^n)d\nu -$$
$$-\int\limits_0^s \partial_x f_1 \int\limits_\nu^t(\partial_u S_1\tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1\tilde{\omega}_3^n)d\tau d\nu + G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}), \tag{39}$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu)\int\limits_0^t(\partial_u S_2\tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2\tilde{\omega}_2^n)d\nu -$$
$$-\int\limits_0^s \partial_x f_2 \int\limits_\nu^t(\partial_u S_2\tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2\tilde{\omega}_2^n)d\tau d\nu + G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}), \tag{40}$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1}\cdot(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_1 w_{1x} + \partial_v S_1 w_{3x})d\nu)^2 - w_{2x}\int\limits_s^t(\partial_u S_1\tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1\tilde{\omega}_3^n)d\nu +$$
$$+G_3(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}), \tag{41}$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1}\cdot(1 - \int\limits_s^t(\partial_u S_2 w_{4x} + \partial_v S_2 w_{2x})d\nu)^2 - w_{1x}\int\limits_s^t(\partial_u S_2\tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2\tilde{\omega}_2^n)d\nu +$$
$$+G_4(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}), \tag{42}$$

где $G_j, j = 1,2,3,4$ – известные функции.

При выполнении условий (12), (22) при каждом n существует решение системы (39)–(2), $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\| \leqslant 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3\| \leqslant 4C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\| \leqslant 4C_\varphi.$$

При выполнении условий (12), (22) доказано, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1,4}$ при $n \to \infty$ на Γ_T.

При выполнении условий (12), (22) доказано, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = \overline{1,4}$, непрерывны и ограничены на Γ_T.

При выполнении условий (12), (22) доказано, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t},\ j = \overline{1,4}$ на Γ_T.

3. Существование нелокального решения

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0,T]$).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, $K = C_\varphi + TC_f$ *и выполняются условия (22). Тогда для любого* $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений (8)–(11).*

Доказательство. Для доказательства существования нелокального решения исходной задачи и вывода для него глобальных оценок, надо дополнить систему (3)–(7) двумя уравнениями. Сначала продифференцируем систему уравнений (1) по x и обозначим

$$p(t,x)=\partial_x u(t,x),\quad q(t,x)=\partial_x v(t,x).$$

Получим систему

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t p+S_1(u,v)\partial_x p=-\partial_u S_1 p^2-\partial_v S_1 pq+\partial_x f_1,\\ \partial_t q+S_2(u,v)\partial_x q=-\partial_v S_2 q^2-\partial_u S_2 pq+\partial_x f_2,\\ p(0,x)=\varphi_1'(x),\quad q(0,x)=\varphi_2'(x).\end{array}\right. \tag{43}$$

Добавим к системе уравнений (3)–(7) два уравнения

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds}=-\partial_u S_1\gamma_1^2(s,t,x)-\partial_v S_1\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1)+\partial_x f_1(s,\eta_1),\\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds}=-\partial_v S_2\gamma_2^2(s,t,x)-\partial_u S_2\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x)+\partial_x f_2(s,\eta_2),\end{array}\right. \tag{44}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x)=\varphi_1'(\eta_1),\quad \gamma_2(0,t,x)=\varphi_2'(\eta_2). \tag{45}$$

Перепишем систему уравнений (44) в следующем виде

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1\,(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)+\int\limits_0^s[-\partial_u S_1\gamma_1^2-\partial_v S_1\gamma_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)+\partial_x f_1]d\nu,\\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)+\int\limits_0^s[-\partial_v S_2\gamma_2^2-\partial_u S_2\gamma_2\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2)+\partial_x f_2]d\nu.\end{array}\right\} \tag{46}$$

Доказательство существования непрерывного решения системы (46) на Γ_T при выполнении условий (12), (22) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1^{n+1}\,(s,t,x)={\varphi'}_1(\eta_1)+\int\limits_0^s[-\partial_u S_1(\gamma_1^n)^2-\partial_v S_1\gamma_1^n\gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1)+\partial_x f_1]d\nu,\\ \gamma_2^{n+1}(s,t,x)={\varphi'}_2(\eta_2)+\int\limits_0^s[-\partial_v S_2(\gamma_2^n)^2-\partial_u S_2\gamma_2^n\gamma_1^n(\nu,\nu,\eta_2)+\partial_x f_2]d\nu,\end{array}\right\} \tag{47}$$

при этом $\gamma_1^0(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1),\quad \gamma_2^0(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)$.

Аналогично, как [4], [5], [6], [7], доказано, что последовательные приближения (47) сходятся к непрерывному и оганиченному решению системы (46), у которого существуют непрерывные и оганиченные производные по t и x. Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x)=p(t,x)=\frac{\partial u}{\partial x},\gamma_2(t,t,x)=q(t,x)=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из (5), (6), учитывая, что $u(t,x)=w_1(t,t,x)$, $v(t,x)=w_2(t,t,x)$, получаем при всех t и x на Ω_T справедливы оценки

$$\|u\|\leqslant C_\varphi+TC_f,\ \|v\|\leqslant C_\varphi+TC_f. \tag{48}$$

Из (44) получаем систему:

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1\,(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s(\partial_u S_1\gamma_1+\partial_v S_1\gamma_2)\,d\nu)+\\ +\int\limits_0^s\partial_x f_1\exp(-\int\limits_\tau^s(\partial_u S_1\gamma_1+\partial_v S_1\gamma_2)\,d\nu)d\tau,\\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s(\partial_u S_2\gamma_1+\partial_v S_2\gamma_2)\,d\nu)+\\ +\int\limits_0^s\partial_x f_2\exp(-\int\limits_\tau^s(\partial_u S_2\gamma_1+\partial_v S_2\gamma_2)\,d\nu)d\tau.\end{array}\right\}. \tag{49}$$

Из (49) при выполнении условий $\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0, \quad x \in R,\ \partial_x f_1 \geqslant 0,\ \partial_x f_2 \leqslant 0,\ (t,x) \in \in \Omega_T$, следует, что $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T. Так как $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T, то при выполнении условий $\partial_u S_1 > 0,\ \partial_v S_1 < 0,\ \partial_u S_2 > 0,\ \partial_v S_2 < 0,\ (u,v) \in Z_K,\ K = C_\varphi + TC_f$, получаем, что справедливы оценки $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|\partial_x v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{50}$$

Так же, как в [4], [6], доказано, что при всех t и x справедливы оценки:

$$|\partial^2_{x^2} u| \leqslant E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{51}$$

$$|\partial^2_{x^2} v| \leqslant E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{52}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для $u,\ v,\ \partial_x u,\ \partial_x v,\ \partial^2_{x^2} u,\ \partial^2_{x^2} v$ ((48), (50)–(52)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0, x),\ v(T_0, x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, возьмем начальные значения $u(T_1, x),\ v(T_1, x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$. Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

4. Заключение

С помощью метода дополнительного аргумента определен вариант достаточных условий существования и единственности локального решения задачи Коши (1), (2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши и вариант достаточных условий существования и единственности нелокального решения задачи Коши (1), (2), где $f_1(t,x),\ f_2(t,x),\ S_1,\ S_2$ – известные функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2012. Вып. 14. С.34–41.

2. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2013. Вып. 15. С.52–59.

3. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси. // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 2. С. 115–124.

4. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. 2013. №3 (177). С. 190–201.

5. Донцова М. В. Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №3. С. 21 – 36.

6. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. №4. С. 116 – 130.

7. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т.6, №4. С. 71-82.

8. Донцова М. В. Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. 2014. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

9. Донцова М. В. Исследование разрешимости одной системы квазилинейных уравнений первого порядка // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. М: МИАН. Суздаль, 2016. С. 68.

10. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 384–394.

11. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т.379, №1. С. 16–21.

12. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н. Метод дополнительного аргумента // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Спец. выпуск. 2006. №1. С. 60–64.

13. Шемякина Т. А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т.13, №2. С. 127–131.

14. Шемякина Т. А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 2 (146). С. 130–140.

15. Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky D. E. Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument // Applicable Analysis. 2017. V. 96. № 9. P. 1444–1465.

REFERENCES

1. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2012 , “The investigation of a so lvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite“, *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, issue 14, pp. 34-41.

2. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2013 , “The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite“, *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, issue 15, pp. 52-59.

3. Alekseenko, S. N. & Dontsova, M. V. 2016 , “The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 18, no. 2, pp. 115-124.

4. Alekseenko, S. N., Shemyakina, T. A. & Dontsova, M. V. 2013 , “Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations“, *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko – matematicheskie nauki*, no 3 (177), pp. 190-201.

5. Dontsova, M. V. 2014 , “The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides“, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, no. 3, pp. 21-36.

6. Dontsova, M. V. 2014 , “ Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides“, *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, no. 4, pp. 116-130.

7. Dontsova, M. V. 2014 , “ Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides“, *Ufa Mathematical Journal*, vol. 6, no. 4, pp. 71-82.

8. Dontsova, M. V. “Study of solvability for a system of first order partial differential equations with free terms“, *Materialy Mezhdunarodnogo molodezhnogo nauchnogo foruma «LOMONOSOV-2014»*, Moscow, 2014, 1 electron. wholesale. disc (DVD-ROM).

9. Dontsova, M. V. “Investigation of the solvability of a system of quasilinear equations of the first order“, *Mezhdunarodnaya konferenciya po differencial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Tezisy dokladov* , Suzdal, 2016. pp. 68.

10. Dontsova, M. V. 2018 , “The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 20, no. 4, pp. 384-394.

11. Imanaliev, M. I. & Alekseenko, S. N. 2001, “To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations“, *Doklady RAN,* vol. 379, no. 1, pp. 16-21.

12. Imanaliev, M. I., Pankov, P. S. & Alekseenko, S. N. 2006, “Method of an additional argument“, *Vestnik KazNU. Ceriya matematika, mekhanika, informatika. Spec. vypusk*, no. 1, pp. 60-64.

13. Shemyakina, T. A. 2011 , “Conditions for the existence and dierentiability of solutions of Frankl in the hyperbolic case“, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 13, no. 2, pp. 127-131.

14. Shemyakina, T. A. 2012 , “The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type“, *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko – matematicheskie nauki*, no 2 (146), pp. 130-140.

15. Alekseenko, S. N., Dontsova, M. V. & Pelinovsky D. E. 2017, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument“, *Applicable Analysis*, vol. 96, no. 9, pp. 1444–1465.

Получено: 24.01.2019
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-179-196

Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Жуков Игорь Борисович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
Иванова Ольга Юрьевна — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

Данный обзор посвящён p-расширениям полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики, где p — характеристика поля вычетов. Известно, что любое вполне разветвлённое расширение Галуа с немаксимальным скачком ветвления может быть задано уравнением Артина-Шрайера, при этом верхняя граница скачка ветвления соответствует нижней границе нормирования правой части уравнения. Задача построения расширений с произвольными группами Галуа не решена.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина-Шрайера.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0 // Чебышевский сборник,2023, т.24, вып.2, с. 179–196.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-179-196

Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Zhukov Igor Borisovich — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: — i.zhukov@spbu.ru
Ivanova Olga Yur'evna — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: — olgaiv80@mail.ru

Abstract

This survey article is devoted to p-extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic where p is the characteristic of the residue field. It is known that any totally ramified Galois extension with a non-maximal ramification jump can be determined by an Artin-Schreier equation, and the upper bound for the ramification jump corresponds to the lower bound of the valuation in the right-hand side of the equation. The problem of construction of extensions with arbitrary Galois groups is not solved.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

Bibliography: 28 titles.

For citation:
I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2023, “Explicit constructions of extensions of complete field of characteristic 0” , *Chebyshevskii sbornik*, vol.24, no.2, pp. 179–196.

1. Введение

Если K — поле характеристики $p > 0$, то, как хорошо известно, любое циклическое расширение L/K степени p может быть получено присоединением корня уравнения Артина-Шрайера, то есть уравнения $x^p - x = a$, где $a \in K$. Обобщением этой конструкции служит теория векторов Витта (см. [14, гл. VI]): любое циклическое расширение L/K степени p^n может быть задано в виде $L = K(x_0, \dots, x_{n-1})$,

$$(x_0^p, \dots, x_{n-1}^p) -_{W_n(L)} (x_0, \dots, x_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}),$$

где $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, а $W_n(L)$ — «группа p-векторов Витта длины n», в которой сложение задаётся при помощи определённого набора из n многочленов от $2n$ переменных над $\mathbb{F}_p$.

Менее известна конструкция Инабы [19], которая описывает способ построения произвольных конечных p-расширений Галуа поля характеристики p. Любое такое расширение L/K может быть получено присоединением элементов некоторой квадратной унипотентной матрицы X, удовлетворяющей уравнению вида

$$X^{(p)} = AX,$$

где $X^{(p)}$ обозначает поэлементное возведение в степень p, а A — некоторая унипотентная матрица с элементами из K (см. подробнее в §4).

Если простое число p отлично от характеристики поля K, мы не располагаем каким-либо способом явного построения p-расширений K, исключая случай, когда K содержит первообразный корень степени p^n из 1. В этом случае любое циклическое расширение L/K степени p^n получается присоединением корня уравнения Куммера $x^{p^n} = a$, где $a \in K^*$.

Однако при наличии на поле K дополнительной структуры, а именно, дискретного нормирования, относительно которого K является полным и имеет поле вычетов характеристики p (не обязательно совершенное), мы можем пытаться строить p-расширения Галуа поля K с помощью тех же конструкций (Артина-Шрайера, Витта и Инабы). В каждом случае мы можем построить все расширения соответствующего класса при определённом ограничении сверху на инварианты ветвления расширения (скачки ветвления, глубину ветвления или порядок дифференты).

Данный обзор включает разнообразные результаты, касающиеся свойств p-расширений Галуа полных полей характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$; в частности, рассматриваются конструкции, позволяющие получать такие расширения.

В §3 мы обсуждаем свойства циклических расширений степени p и выясняем, при каких условиях такое расширение может быть задано уравнением Артина-Шрайера.

В §4 рассматриваются расширения, которые можно задать при помощи конструкции Инабы. В частности, обсуждается возможность погружения любого p-расширения полей изучаемого типа в расширение Инабы.

В §5 мы приводим результаты, описывающие возможность погружения заданного циклического расширения степени p^l в циклическое расширение степени p^n.

В §6 мы показываем, как заданное циклическое расширение степени p с достаточно малым скачком ветвления может быть погружено в расширение степени p^2, задаваемое при помощи вектора Витта длины 2 или некоторой его модификации.

В §7 мы строим семейство свирепых циклических расширений степени p^n поля K при выполнении зависящего от n ограничения снизу на абсолютный индекс ветвления поля K; результаты получены для класса полей со свойством $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$, к которому относятся, в частности, двумерные локальные поля.

Наконец, в §8 изучаются абсолютно неразветвлённые поля K (поля с условием $v_K(p) = 1$). Для них воспроизводится конструкция, позволяющая построить семейство циклических расширений, композит которых представляет собой максимальное абелево расширение K показателя p^n (т. е. с группой Галуа, аннулируемой умножением на p^n),

Интерес к явным конструкциям расширений полей с несовершенным полем вычетов связан, в частности, с потенциальной возможностью описывать в терминах этих конструкций отображение взаимности высшей теории полей классов, построенной в работах А. Н. Паршина, К. Като, С. В. Востокова, И. Б. Фесенко, см., например, обзор [18]. Вдохновляющим примером здесь служат работы [15] и [2], где отображение взаимности описано в терминах теории Витта и Куммера соответственно.

2. Обозначения и предварительные сведения

Всюду в тексте через K обозначается полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$. Для таких полей:

- v_K — нормализованное нормирование на K, а также его ненормализованное продолжение на какое-либо расширение K;
- $e_K = v_K(p)$ — абсолютный индекс ветвления поля K;
- $\mathcal{O}_K = \{a \in K | v_K(a) \geqslant 0\}$;
- $mathfrakM_K = \{a \in K | v_K(a) > 0\}$;
- $\overline{K} = \mathcal{O}_K / mathfrakM_K$ — поле вычетов поля K;
- π_K — какая-либо униформизирующая K, т. е. элемент с $v_K(\pi_K) = 1$;
- $\overline{a}$ — класс вычетов в $\overline{K}$ элемента $a \in \mathcal{O}_K$.

Для конечного расширения L/K:

- $e(L/K) = v_L(\pi_K)$—индекс ветвления L/K; $e(L/K) = e_t(L/K)e_w(L/K)$,где $(e_t(L/K), p) = = 1$, $e_w(L/K)$ — степень p;
- $f(L/K) = [\overline{L} : \overline{K}]$ — степень инерции L/K; $f(L/K) = f_s(L/K)f_i(L/K)$, где $f_s(L/K) = = [\overline{L} : \overline{K}]_{sep}$, $f_i(L/K) = [\overline{L} : \overline{K}]_{ins}$;
- $s_G(\sigma) = \min\{v_L(a^{\sigma-1} - 1) | a \in K^*\}$ — число ветвления Суона элемента $\sigma \in G = Gal(L/K)$;
- $d_K(M/L) = \inf\{v_K(\mathrm{Tr}_{M/L}(y)/y) | y \in M^*\}$ — глубина ветвления M/L, где $M/L/K$ — конечные сепарабельные расширения.

Одним из важнейших свойств глубины ветвления является её аддитивность ([17, (2-4)]):

Лемма 1. *Пусть N — промежуточное поле в M/L. Тогда $d_K(M/L) = d_K(M/N) + + d_K(N/L)$.*

Отметим также, что $d_K(M/L) = 0$, если и только если M/L ручное ([17, (2-12)]).

Подробную информацию о различных инвариантах ветвления в случае несовершенного поля вычетов можно найти в [26] = [27].

Через ζ_n обозначается фиксированный первообразный корень степени n из 1 в алгебраическом замыкании рассматриваемого поля.

Обозначим через $\mathbf{G}_0 \in \mathbb{Z}_p[X,Y]$ (соответственно $\mathbf{G}_m$) формальный групповой закон Любина-Тэйта с эндоморфизмом умножения на p, задаваемым рядом $[p]_0 = pX + X^p$ (соответственно $[p]_m = (1+X)^p - 1$). (Теория Любина-Тэйта изложена в оригинальной статье [22] и в книгах [12, 13].) Через $f_G(X) = X + \dots \in \mathbb{Z}_p[X]$ будет обозначаться изоморфизм между $\mathbf{G}_m$ и $\mathbf{G}_0$, то есть единственный ряд вида $X + \dots$ такой, что $f_G([p]_m) = [p]_0(f_G)$.

Положим $w = f_G(\zeta_p - 1)$; нетрудно видеть, что $[p]_0(w) = 0$, т. е. $w^{p-1} = -p$.

Пусть $K_1 = K(\zeta_p) = K(w)$. Тогда $Gal(K_1/K)$ — циклическая группа порядка m, делящего $p-1$. Обозначим через σ некоторый образующий этой группы, через g — такой первообразный корень из 1 степени m в $\mathbb{Z}_p$, что $\zeta_p^\sigma = \zeta_p^g$; легко видеть, что для формальной группы $\mathbf{G}_0$ выполнено $[g]_0(X) = gX$. Положим $mathfrakM_1 = mathfrakM_{K_1}$. Для $s_1, s_2 \in mathfrakM_1$ будем писать

$$s_1 \equiv s_2 \mathrm{mod}[p]_0 \mathbf{G}_0(mathfrakM_1),$$

если $s_1 = s_2 +_{\mathbf{G}_0} [p]_0(s)$ при некотором $s \in mathfrakM_1$.

Следующая лемма обобщает лемму 4 в [3] (вместо многомерного локального поля рассматриваем случай произвольного поля вычетов) и отвечает на вопрос, при каком условии данное циклическое расширение степени p поля K_1 является подъёмом некоторого циклического расширения поля K.

Лемма 2. *1. Пусть $L_1 = K_1(x)$, $x^p = a \in K_1^*$. Тогда расширение L_1/K является абелевым, если и только если $a^\sigma \equiv a^g \mathrm{mod}(K_1^*)^p$.*

2. Пусть $L_1 = K_1([p]_0^{-1}(c))$ при некотором $c \in mathfrakM_1$. Тогда расширение L_1/K является абелевым, если и только если $c^\sigma \equiv gc \mathrm{mod}[p]_0 \boldsymbol{G}_0(mathfrakM_1)$.

Доказательство. Поскольку в [3] доказательство фактически опущено, приведём для удобства читателя полное доказательство. Продолжение σ на сепарабельное замыкание K будем также обозначать через σ. Через τ обозначим произвольный образующий $Gal(L_1/K_1)$ (можно считать $L_1 \neq K_1$).

Пусть L_1/K абелево. Тогда элементы, сопряжённые с x, лежат в L_1, тем самым $a^\sigma \equiv a^l \mathrm{mod}(K_1^*)^p$ для некоторого натурального $l \leqslant p-1$. Отсюда $x^\sigma = x^l b$ для некоторого $b \in K_1^*$.

При подходящем выборе ζ_p имеем $x^\tau = \zeta_p x$. Получаем

$$\zeta_p^l x^l b = (x^l b)^\tau = x^{\tau\sigma} = x^{\sigma\tau} = (\zeta_p x)^\sigma = \zeta_p^g x^l b,$$

откуда $g \equiv l \mathrm{mod} p$.

Обратно, пусть $a^\sigma \equiv a^l \mathrm{mod}(K_1^*)^p$, тогда $x^\sigma = x^g b$ для некоторого $b \in K_1^*$, откуда видно, что все сопряжённые с x^σ лежат в L_1, и L_1/K нормальное. Далее,

$$x^{\sigma\tau} = (\zeta_p x)^\sigma = \zeta_p^g x^g b = (x^g b)^\tau = x^{\tau\sigma},$$

и мы заключаем, что L_1/K абелево.

Вторая часть вытекает из первой, если подставить $a = 1 + f_G^{-1}(c)$.

3. Циклические расширения степени p

Пусть L/K — циклическое расширение степени p. Из равенства

$$p = e(L/K) f(L/K) = e_t e_w f_s f_i$$

мы заключаем, что имеет место один из трёх случаев (так как e_t взаимно просто с p):

- L/K неразветвлённое: $f_s = p$, $e_w = f_i = 1$;
- L/K вполне (дико) разветвлённое: $e_w = p$, $f_s = f_i = 1$;
- L/K свирепо разветвлённое: $f_i = p$, $f_s = e_w = 1$.

Под скачком ветвления $h(L/K)$ будем понимать число ветвления Суона $s_G(\sigma)$ нетривиального элемента $\sigma \in G = Gal(L/K)$.

Доказательство. Пусть $\zeta_p \in K$, $L = K(\gamma)$ — нетривиальное расширение, $\gamma^p = a \in K$. Тогда:

1) если $v_K(a-1) = \frac{p}{p-1}e_K$, то L/K неразветвлено;

2) если $0 < v_K(a-1) < \frac{p}{p-1}e_K$ и $(p, v_K(a-1)) = 1$, то L/K вполне разветвлено и $h(L/K) = \frac{p}{p-1}e_K - v_K(a-1)$;

3) если $0 < v_K(a-1) < \frac{p}{p-1}e_K$, $p|v_K(a-1)$ и $v_K(a-1) = \max\{v_K(b-1)|b \in a(K^*)^p\}$, то L/K свирепо разветвлено и $h(L/K) = \frac{1}{p-1}e_K - \frac{1}{p}v_K(a-1)$;

4) если $v_K(a) = 0$, $\overline{a} \notin \overline{K}^p$, то L/K свирепо разветвлено и $h(L/K) = \frac{1}{p-1}e_K$;

5) если $v_K(a) > 0$, $(p, v_K(a)) = 1$, то L/K вполне разветвлено и $h(L/K) = \frac{p}{p-1}e_K$.

Доказательство. См. [17, Lemma (2-16)]. □

Нетрудно видеть, что в куммеровском случае ($\zeta_p \in K$) в любом нетривиальном классе $K^*/(K^*)^p$ найдётся a, удовлетворяющий условию одного из пунктов предложения.

Опишем глубину ветвления таких расширений ([17, Lemma (2-10)]).

Доказательство. Пусть L/K — циклическое расширение степени p. Тогда $d_L(L/K) = (p-1)h(L/K)$.

Удобно работать не со скачком, а с глубиной ветвления; это часто позволяет единообразно формулировать результаты в диком и свирепом случае. В частности, мы получаем, что для циклического расширения L/K степени p выполнено $0 \leqslant d_K(L/K) \leqslant e_K$. (Если $\zeta_p \notin K$, это следует из $d_K(L/K) = d_K(L(\zeta_p)/K(\zeta_p))$).

Обсудим, когда может достигаться равенство $d_K(L/K) = e_K$, т. е. L/K является *максимально разветвлённым* (см. [5]). Для этого вновь полагаем $K_1 = K(\zeta_p)$ и используем обозначение $mathfrakM_1 = mathfrakM_{K_1}$.

Доказательство. 1. Предположим, что расширение K_1/K не является неразветвлённым. Если расширение $K_1(x)/K$, где $x^p = a \in K_1^*$, абелево, то $a \in (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

2. Предположим, что $\zeta_p \notin K$ и $K_1(x)/K_1$, где $x^p = a \in K_1^*$, вполне разветвлено. Тогда если $K_1(x)/K$ абелево , то $a \in (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

Доказательство. Второе утверждение доказано в [16, Ch. III, (2-3)].

Для доказательства первого утверждения можно, не умаляя общности, считать $a \in \mathcal{O}_{K_1}$. По условию $l = e(K_1/K) > 1$. Обозначим через σ образующую $Gal(K_1/K)$. Заменяя K на $K_0 = K_1^{\langle\sigma^l\rangle}$, можно считать K_1/K вполне разветвлённым; при этом $K_1 \neq K$. Тогда имеем $a^\sigma \equiv a\mathrm{mod}(1 + mathfrakM_1)$, откуда по лемме 2

$$a \equiv a^g \mathrm{mod}(1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p.$$

При редукции по модулю $mathfrakM_1$ получаем $\overline{a}^{g-1} \in (\overline{K_1}^*)^p$, откуда $\overline{a} \in (\overline{K_1}^*)^p$, так как g — корень степени $p-1$ из 1, отличный от 1. □

Замечание 1. *В общем случае условие разветвлённости K_1/K не может быть заменено на более слабое условие $K_1 \neq K$, т. е. $\zeta_p \notin K$; тем самым следствие к лемме 4 в [3] нуждается в уточнении.*

Действительно, пусть $K = \mathbb{Q}_p\{\{t\}\}(\pi)$, $\pi^{p-1} = -pt^{-1}$. Тогда $K_1 = K(\zeta_p) = K(w) = K(t_1)$, где $t_1^{p-1} = t$, представляет собой вполне разветвлённое циклическое расширение K степени $p-1$; пусть σ — образующая его группы Галуа. Из $\zeta_p^\sigma = \zeta_p^g$ вытекает $w^\sigma = [g]_0(w) = gw$.

Далее, из $wt_1^{-1} = \pi$ получаем $t_1^{\sigma} = gt_1$. Тогда по лемме 2 расширение $K_1(\sqrt[p]{t_1})/K$ является абелевым, в то время как, очевидно, $t_1 \notin (1 + mathfrakM_1)(K_1^*)^p$.

Следствие 1. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p, $d = d_K(L/K)$.*

1. Если L/K вполне разветвлённое, то либо $0 < d < e_K$ и $(p, pd) = 1$, либо $d = e_K$. Последний вариант возможен только при $\zeta_p \in K$.

2. Если L/K свирепо разветвлённое, то $0 < d \leqslant e_K$; при этом равенство возможно только если K_1/K неразветвлённое.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из предыдущих предложений с учётом того, что во вполне разветвлённом случае $pd = (p-1)h(L/K)$. □

Все циклические расширения L/K, не являющиеся максимально разветвлёнными в смысле [5] (то есть $d_K(L/K) < e_K$), могут быть заданы также при помощи уравнений Артина-Шрайера. Более точно, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть $\alpha \in K$, $v_K(\alpha) > -\frac{p}{p-1}e_K$, $L = K(\lambda)$, где λ — корень многочлена $X^p - X - \lambda$.*

(i) Многочлен $X^p - X - \lambda$ либо раскладывается на линейные множители, либо неприводим в $K[X]$. В последнем случае L/K — циклическое степени p. При этом для некоторого нетривиального $\sigma \in Gal(L/K)$ выполнено $v_L(\sigma(\lambda) - \lambda - 1) > 0$.

(ii) Если $v_K(\alpha) > 0$, то $L = K$.

(iii) Пусть $v_K(\alpha) = 0$, $\bar{\alpha} \notin \wp(\overline{K})$, где $\wp(x) = x^p - x$. Тогда L/K — неразветвлённое степени p.

(iv) Пусть $v_K(\alpha) < 0$, $p \nmid v_K(\alpha)$. Тогда L/K — вполне разветвлённое степени p с $d_K(L/K) = -\frac{p-1}{p}v_K(\alpha)$.

(v) Пусть $v_K(\alpha) = -pc$ с натуральным c и $\overline{\pi_K^{pc}\alpha} \notin (\overline{K})^p$. Тогда L/K — свирепо разветвлённое степени p с $d_K(L/K) = -\frac{p-1}{p}v_K(\alpha)$.

Доказательство. Утверждения (i)–(iv) доказаны в [16, Ch. III, (2-5)]. В случае (v) положим $y = \pi^c\lambda$. Имеем $y^p - \pi^{(p-1)c}y + \pi^{pc}\alpha = 0$, откуда $\bar{y}^p = -\overline{\pi^{pc}\alpha} \notin \overline{K}^p$. Тем самым $\overline{L}/\overline{K}$ — нетривиальное несепарабельное расширение. □

Верно и обратное.

Предложение 2. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p, и $d_K(L/K) < e_K$. Тогда найдётся $\alpha \in K$, $-\frac{p}{p-1}e_K < v_K(\alpha) \leqslant 0$ такое, что $L = K(\lambda)$, где λ — корень многочлена $X^p - X - \alpha$. При этом α можно выбрать так, чтобы для него выполнялось одно из условий в пунктах (iii), (iv), (v) предыдущего предложения.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения было дано в [23], оно воспроизводится в [16, Ch. III. (2-4)] для случая вполне разветвлённого расширения. □

Данное утверждение может быть доказано также с использованием формальных групповых законов Любина-Тэйта в духе [3]. Опишем основную идею такого доказательства.

Пусть $K_1 = K(\zeta_p)$, $L_1 = L(\zeta_p)$. В силу теории Куммера имеем $L_1 = K_1(x)$, $x^p = a \in K_1$; можно считать $a \in \mathcal{O}_{K_1}$. Условие $d_K(L/K) < e_K$ влечёт $d_{K_1}(L_1/K_1) < e_{K_1}$, откуда $\overline{a} \in (\overline{K_1}^{*})^p$. Умножая a на подходящий элемент $(K_1^*)^p$, можно обеспечить выполнение условия $a \in 1+mathfrakM_{K_1}$, причём для $a-1$ будет выполняться одно из условий в пунктах (iii), (iv), (v) предыдущего предложения. Тогда имеем $L_1 = K_1(x-1) = K_1(y)$, где $[p]_0(y) = f_G(a-1)$. Отсюда $L_1 = K_1(z)$, где $z = w^{-1}y$ удовлетворяет уравнению Артина-Шрайера

$$z^p - z = w^{-p}f_G(a-1).$$

4. Конструкция Инабы

Введем обозначения:

- $M_n(K)$ — множество квадратных матриц порядка n с коэффициентами в поле K;
- унипотентная матрица — верхнетреугольная квадратная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны 1.
- $A^{(p)}$ — матрица, полученная из матрицы A возведением каждого элемента в степень p;
- U_n — группа унипотентных матриц порядка n с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$;
- при $k \geqslant 0$ множество элементов $a_{i,i+k}$ матрицы $A = (a_{i,j})$ будем называть ее k-й диагональю.

В работе Инабы [19] рассматривались матричные уравнения $X^{(p)} = AX$, где решение X также предполагается унипотентной матрицей. Будем называть такие уравнения уравнениями Инабы.

Уравнение для матриц n-го порядка равносильно системе из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений:

$$\begin{cases} x^p_{s,1+s} - x_{s,1+s} = a_{s,1+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-1 \\ x^p_{s,2+s} - x_{s,2+s} = a_{s,1+s}x_{1+s,2+s} + a_{s,2+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-2 \\ \dots \\ x^p_{s,i+s} - x_{s,i+s} = \sum\limits_{j=s+1}^{s+i-1} a_{s,j}x_{j,i+s} + a_{s,i+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-i \\ \dots \end{cases}.$$

Элементы каждой диагонали матрицы X задаются уравнениями Артина-Шрайера с коэффициентами из поля, полученного из поля K присоединением всех предыдущих диагоналей. Следовательно, система имеет решение в алгебраическом замыкании поля K.

Расширением Инабы будем называть расширение, полученное из поля K присоединением всех элементов некоторой матрицы X, являющейся решением матричного уравнения Инабы для $A \in M_n(K)$.

Поля характеристики p

В [19] рассматривались поля характеристики $p > 0$.

Предложение 3. *Пусть K — поле характеристики p, и L/K — расширение Инабы.*

1) Расширение L/K является расширением Галуа.

2) Пусть унипотентная матрица $X \in M_n(L)$ такова, что L получено из K присоединением элементов X, и X удовлетворяет уравнению Инабы. Тогда для любого $\sigma \in Gal(L/K)$ существует матрица $\Lambda_X(\sigma) \in U_n$, такая, что $\sigma X = X\Lambda_X(\sigma)$.

3) Отображение $\sigma \mapsto \Lambda_X(\sigma)$ является инъективным гомоморфизмом

$$Gal(L/K) \to U_n.$$

4) Пусть Y — унипотентная матрица, являющаяся решением того же уравнения Инабы. Тогда представления Λ_X и Λ_Y сопряжены, то есть существует матрица $D \in U_n$, такая, что

$$\Lambda_X(\sigma) = D^{-1}\Lambda_Y(\sigma)D$$

для любого $\sigma \in Gal(L/K)$.

Доказательство. См.[19], §1. □

Следствие 2. *В обозначениях предложения 3 выполено $|Gal(L/K)| = p^s$ для некоторого $s \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.*

Унипотентные матрицы A и B будем называть p-эквивалентными, если существует унипотентная матрица C, такая, что $C^{(p)}AC^{-1} = B$. Очевидно, p-эквивалентность является отношением эквивалентности.

Предложение 4. *Пусть K — поле характеристики p, и L_1, L_2 — расширения Инабы поля K с p-эквивалентными матрицами. Тогда $L_1 = L_2$.*

Доказательство. См.[19], §1. □

Теорема 1. *Пусть $K \subset L$ — поля характеристики p, пусть L/K — p-расширение Галуа. Пусть Λ — представление $Gal(L/K)$ в U_n. Тогда существуют унипотентные матрицы $A \in M_n(K)$, $X \in M_n(L)$ такие, что $X^{(p)} = AX$, поле L получено из поля K присоединением элементов матрицы X, и $\Lambda = \Lambda_X$ в обозначениях предложения 3. Матрица A определена однозначно с точностью до p-эквивалентности.*

Доказательство. См.[19], теорема 1. □

Поля характеристики 0

В серии работ [6], [11],[9] рассматривались расширения Инабы дискретно нормированных полей смешанной характеристики.

Пусть K — дискретно нормированное поле, и $A \in M_n(K)$. Через $A[i]$ будем обозначать множество элементов i-й диагонали матрицы A, а через $v_K(A[i])$ — минимум нормирований элементов из $A[i]$.

В первой работе [6] были доказаны аналоги утверждения из предложения 3 из работы Инабы при некоторых ограничениях на нормирования элементов матрицы A:

Теорема 2. *Пусть n — натуральное число; α — рациональное число, $\alpha < 1/(n-1)$. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, такое, что*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p.$$

Пусть $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что

$$v_K(A[i]) \geqslant -i\alpha e_K$$

для любого i, и пусть X — некоторое решение матричного уравнения $X^{(p)} = AX$. Положим $K_i = K(X[1], \ldots, X[i])$.

1) Имеем $v_K(X[i]) \geqslant -\frac{i\alpha e_K}{p}$ при всех i.

2) Для любого $\sigma \in Gal(K)$ найдётся единственная унипотентная матрица $\Lambda(\sigma) \in \in M_n(\mathbb{Z}_p)$, элементы которой являются элементами Тайхмюллера, такая, что

$$\sigma(X) - X\Lambda(\sigma) \in M_n(mathfrakM_K).$$

3) При этом $v_K(\Delta_\sigma[i]) > (1-i\alpha)e_K$ при всех i.

4) K_i/K — расширение Галуа при всех i.

Доказательство. См. [6], теорема 1, §3. □

Интересен также вопрос об аналогах теоремы 1, то есть о том, какие расширения можно задать как расширения Инабы или погрузить в расширение Инабы. Некоторые результаты в этом направлении получены в [9].

Теорема 3. *Пусть поля*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i – расширения степени p, заданные уравнениями Артина-Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K, заданные матрицами порядка $p^{n-1}+2$ и $p^{n-1}+1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$.

Доказательство. См.[9], теорема 3.3. □

Позже был получен следующий результат, который будет опубликован в [10]:

Теорема 4. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $charK = 0$, $char\overline{K} = p$, и K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Тогда для любого p-расширения Галуа L/K существует поле E, такое, что $K \subset L \subset E$, расширение E/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и $|E:K| \leqslant |L:K|^2$.*

Из теорем 3 и 4 следует, что для любого p-расширения Галуа L/K дискретно нормированных полей смешанной характеристики, содержащих первообразный корень p-й степени из единицы, существует такое поле M, что M/K и LM/K — расширения Инабы. Расширения можно задать матрицами порядка $p^{2n-1}+2$ и $p^{2n-1}+1$, где n таково, что $|L:K| = p^n$.

Предложение 5. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p.$$

Пусть L/K – вполне разветвлённое расширение Галуа степени p^2, и для некоторого поля M, такого, что

$$K \subset M \subset L, \qquad |M:K| = p,$$

выполнено

$$h(M/K) \leqslant \frac{e_K}{p},$$

$$h(L/M) \leqslant (p-1)h(M/K) + \frac{e_M}{p}.$$

Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K порядка p^{p+1} и p^p, такие, что

1) $M_I L = L_I$,

2) расширения L_I/K и M_I/K являются расширениями Галуа, и их группы Галуа изоморфны некоторым подгруппам групп U_{p+1} и U_p.

Доказательство. См.[9], предложение 4.3. □

Теорема 5. *Пусть n – натуральное число, K – полное дискретно нормированное поле,*

$$charK = 0, \qquad char\overline{K} = p,$$

$e_K > p-1$, и h – такое число, что

$$0 < h < \frac{e_K}{n-1}.$$

Пусть L/K – вполне разветвлённое расширение Галуа, такое, что группа $Gal(L/K)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят h. Тогда расширение L/K можно погрузить в расширение Галуа с группой Галуа, изоморфной U_n.

Доказательство. См.[9], теорема 6.2. □

5. Продолжимость циклических расширений

Оставшаяся часть этого обзора будет посвящена построению абелевых p-расширений поля K.

В пределах данного параграфа используются такие обозначения:

•$K_n = K(\zeta_{p^n})$ для всех натуральных n;

• $M_{n,K} = N_{K_n/K_1}(K_n^*)(K_1^*)^p$.

Специфика полей с несовершенным полем вычетов состоит в том, что, вообще говоря, не любое циклическое расширение степени p может быть погружено в циклическое расширение степени p^n с $n > 1$. В терминах уравнения Куммера возможность такого погружения определяется следующим результатом Мики ([24, §1, Cor. to Prop. 3]).

Предложение 6. *Пусть p — простое число, K — поле характеристики, не равной p, L/K — циклическое расширение степени p, n — натуральное число.*

Тогда следующие условия равносильны:

1. Существует циклическое расширение M/K степени p^n такое, что $L \subset M$.

2. $L_1 = K_1(\sqrt[p]{a})$, где $a \in M_{n,K}$.

Группы $M_{n,K}$ образуют убывающую фильтрацию:

$$K_1^* = M_{1,K} \supset M_{2,K} \supset \cdots \supset (K_1^*)^p.$$

Регулярное поведение этой фильтрации при переходе от K к некоторому его расширению проверено в [1] при сильных дополнительных предположениях.

Справедливо следующее обобщение предложения 6 в предположении $\zeta_{p^l} \in K$ для некоторого $l \geqslant 1$ ([4, Предложение 2.4]). Через μ_{p^∞} здесь обозначена группа всех p-примарных корней из 1 в K^*

Предложение 7. *Пусть $b \in K^*$, $b \notin \mu_{p^\infty} \cdot (K^*)^p$, $L = K(x)$, $x^{p^l} = b$. Тогда равносильны следующие два условия.*

1. Существует циклическое расширение M/K степени p^n такое, что $L \subset M$.

2. $b \in (N_{K_n/K} K_n^*)(K^*)^{p^l}$.

Как следствие предложения 6, можно получить ([4, Предложение 3.1]):

Предложение 8. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p; $d_K(L/K) < \frac{1}{p} e_K$. Тогда существует циклическое расширение M/K степени p^2 такое, что $L \subset M$.*

6. Векторы Витта в характеристике 0

Если наложить несколько более сильное ограничение на глубину ветвления L/K, чем указано в предложении 8, а именно, потребовать $d_K(L/K) < \frac{1}{p+1} e_K$ вместо $d_K(L/K) < \frac{1}{p} e_K$, подходящее циклическое расширение степени p^2 можно задать с помощью простой конструкции, идентичной конструкции p-векторов Витта длины 2 в характеристике p ([4, Предложение 3.2]):

Предложение 9. *Пусть $a \in K$, $-\frac{p}{p^2-1} e_K < v_K(a) \leqslant 0$. Положим $M = K(x_0, x_1)$, где*

$$(x_0^p, x_1^p) -_{W_2(K)} (x_0, x_1) = (a, 0).$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, то M/K — циклическое степени p^2.

Фактически это означает, что если L/K получено присоединением корня уравнения $x^p - x = a$, то $M = K(x_0, x_1)$,

$$\begin{aligned}&x_0^p - x_0 = a,\\ &x_1^p - x_1 = -p{-}1((a + x_0)^p - a^p - x_0^p).\end{aligned}$$

Если же значение глубины ветвления лежит в «критическом диапазоне»

$$\frac{1}{p+1}e_K \leqslant d_K(L/K) < \frac{1}{p}e_K,$$

данные формулы приходится модифицировать, что было сделано в [8, теорема 2.1]:

Теорема 6. *Пусть* $a \in K$, $-\frac{e_K}{p-1} < v_K(a) \leqslant 0$. *Пусть* $M = K(x_0, x_1)$, *где*

$$\begin{aligned}&x_0^p - x_0 = a,\\ &x_1^p - x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n,\\ &\Delta_n = \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p}{i}}{p}\right) a^{p-i} x_0^i, & n = 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+1}, & n = 1,\\ p^{p^n + p^{n-1} + \dots + p} x_0^{p^{n+2} - p + 1}, & n \geqslant 2.\end{cases}\end{aligned}$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, *то* M/K *— циклическое расширение степени* p^2.

Доказательство. В [8] доказано, что построенное M/K является абелевым; доказательство цикличности приведено только для случая вполне разветвлённого расширения, т. е. в предположении $p \nmid v_K(a)$. Однако при этом в общем случае доказано, что для $b = w((a + x_0)^p - a^p - x_0^p)$ выполнено

$$b^\sigma = b +_{\mathbf{G}_0} [p]_0(c)$$

для некоторого $c = wx_0^{p-1} + \dots$, где σ — образующая $Gal(L/K)$. Нетрудно видеть, что для любого такого c выполняется

$$N_{L/K}(1 + f_G^{-1}(c)) \neq 1,$$

откуда по лемме 1.1 в [8] (она же лемма 1.2 в [7]) заключаем, что расширение M/K — циклическое. □

Полученное расширение M/K мы можем рассматривать как задаваемое «вектором Витта» $(a, 0)$ в некоторой гипотетической «теории Витта в характеристике 0».

В работе [21] предложение 9 используется для построения всех циклических расширений M/K порядка p^2, у которых глубина ветвления «нижнего этажа» удовлетворяет $d_K(L/K) < \frac{1}{p+1}e_K$, и для описания структуры аддитивных модулей Галуа в этом случае.

7. Свирепые циклические p-расширения

В работах [24] и [17] исследовались циклические p-расширения полей. В [24] было доказано, что у дискретно нормированного поля K, такого, что $charK = 0$, $char\overline{K} = p$, не существует циклического свирепого расширения сколь угодно большой степени, и получена оценка на степень расширения, зависящая от e_K. В [17] оценка была улучшена, а именно, был получен следующий результат.

Предложение 10. *Пусть K — дискретно нормированное поле, L/K — циклическое свирепое расширение, и*

$$g = \max\{a + b \mid rp^{a-1} + p^{b-2}(p^2 - p + 1)(p - 1) < n, a, b \in \mathbb{Z}, b \geqslant 0\}.$$

Тогда $|L : K| \leqslant p^g$.

Доказательство. См. [17], предложение 0-4. □

Неизвестно, является ли данная оценка точной. Интересен вопрос существования циклических свирепых расширений большой степени, а также явные конструкции для них.

По теореме 2 расширение Инабы является расширением Галуа. Это позволяет строить расширения Галуа с заданными скачками, если скачки достаточно малы.

Будем называть поле K *двумерным*, если $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$. К этому классу относятся, в частности, двумерные локальные поля характеристики 0 с произвольным совершенным полем вычетов характеристики p. (Действительно, в этом случае $\overline{K}$ можно отождествить с полем формальных рядов Лорана $k((X))$, где k — совершенное поле, и $[k((X)) : k((X^p))] = p$.)

Как было показано ещё в работе [20], для свирепых расширений таких полей можно построить теорию ветвления, аналогичную классической. В частности, выполняется следующий аналог теоремы Эрбрана.

Лемма 3. *Пусть K двумерное, L/K — конечное свирепое расширение Галуа с группой G, H — нормальная подгруппа в G. Тогда для $\sigma \in Gal(L/K)$ выполнено*

$$s_{G/H}(\sigma) = s_G(g_1) + \dots + s_G(g_n),$$

где $g_1, \dots, g_n$ — все представители σ в G.

Доказательство. Отметим, что свирепые расширения двумерного поля являются *моногенными*: $\mathcal{O}_L$ как $\mathcal{O}_K$-алгебра порождается одним элементом. А именно, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[t]$, где $t \in \mathcal{O}_L$ таков, что $\bar{t} \notin \overline{L}^p$. Отсюда $s_G(g) = v_L(t^{g-1} - 1)$, и формула 3 доказывается аналогично классическому случаю, см., например, [25, Ch. IV, Prop. 3]. □

Как следствие, получаем такой аналог леммы 3.3.1 из [26].

Лемма 4. *Пусть L_1/K и L_2/K — свирепые расширения Галуа степени p двумерного поля K и для скачков расширения $h = h(L_1/K)$ и $h' = h(L_2/K)$ выполнено $0 < h < h'$. Тогда*

$$h(L_1L_2/L_2) = h/p,$$

$$h(L_1L_2/L_1) = h/p + (h' - h).$$

Теорема 7. *Пусть K двумерное, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Пусть π – униформизирующая поля K, и $a_1, \dots, a_n \in K$ таковы, что*

$$p^n \mid v_K(a_1), \qquad \overline{\pi^{-v_K(a_1)}a_1} \notin \overline{K}^p,$$

$$-\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n - 1}\right\}e_K < v_K(a_1) < 0,$$

$$v_K(a_i) > \left(1 + \frac{p^{i-1} - 1}{p^{n-1}(p - 1)}\right)v_K(a_1) \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда существуют $x_1, \dots, x_n \in K^{alg}$, такие, что

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1 \\ x_2^p - x_2 = a_1x_1 + a_2 \\ \dots \\ x_i^p - x_i = a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_{i-1}x_1 + a_i \\ \dots \end{cases},$$

и $K(x_1, \dots, x_n)/K$ является циклическим свирепым расширением степени p^n.

Доказательство. См. [11], теорема 4.2. При этом в доказательстве, приведенном в [11], была ошибочно сделана ссылка на лемму 3.3.1 в [26], на самом деле необходимо использовать вышеприведённую лемму 4. □

Следствие 3. *Пусть K – двумерное, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы, $n \in \mathbb{N}$,*

$$e_K > \frac{p^n}{\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n - 1}\right\}}.$$

Тогда у поля K существует циклическое свирепое степени p^n, полученное присоединением к полю K некоторого решения уравнения Инабы.

Доказательство. См. [11], следствие 4.3. □

8. Расширения абсолютно неразветвлённого поля

Будем предполагать, что $p > 2$ и что K — абсолютно неразветвлённое, то есть $e_K = 1$. В этой ситуации мы можем явным образом построить максимальное абелево p-расширение K в соответствии с [4] и [28].

Из предложений 1 и 2 легко вытекает следующее утверждение ([4, Предложение 4.1]).

Предложение 11. *Расширение L/K является циклическим степени p, если и только если $L = K(x)$, $x^p - x = a \in K$, $v_K(a) \geqslant -1$ и $x \notin K$, При этом L/K неразветвлено, если и только если $v_K(a) = 0$.*

Предложение 6 даёт в этом случае следующий простой критерий возможности погружения данного циклического расширения степени p в циклическое расширение степени p^n ([4, Предложение 4.2]).

Предложение 12. *Пусть $K_1 = K(x)$, $x^p - x = -p^{-1}a$, $a \in \mathcal{O}_K$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существует циклическое расширение K_n/K степени p^n такое, что $K_1 \subset K_n$;
(2) $\overline{a} \subset (\overline{K})^{p^{n-1}}$.

Обозначим через K^{ab,p^n} (соответственно K^{ab,p^n}_{ur}) максимальное абелево (соответственно максимальное абелево неразветвлённое) расширение K показателя p^n.

Из теоретико-групповых соображений отсюда мы можем получить такое описание K^{ab,p^n} ([4, Предложение 4.3]).

Предложение 13. *Для $1 \leqslant i \leqslant n$ выберем $A_i \subset \mathcal{O}_K$ так, что $\{\overline{d} : d \in A_i\}$ образует $\mathbb{F}_p$-базис $\overline{K}^{p^{i-1}}/\overline{K}^{p^i}$ при $i \leqslant n-1$ и $\mathbb{F}_p$-базис $\overline{K}^{p^{n-1}}$ при $i = n$. Пусть $K_{i,d}$ $(d \in A_i)$ — любое циклическое расширение степени p^i, которое содержит x с $x^p - x = -p^{-1}d$. Тогда $K^{ab,p^n}/K$ является композитом линейно разделённых расширений $K_{i,d}/K$ $(1 \leqslant i \leqslant n$; d пробегает $A_i)$ и $K^{ab,p^n}_{ur}/K$.*

Далее будем предполагать $p > 3$. Для любого $n \geqslant 1$ и любого $b \in \overline{K}^{p^{n-1}}$ мы построим циклическое расширение $K_{n,d}/K$ степени p^n так, что $x \in K_{n,d}$, $x^p - x = -p^{-1}d$, где $d \in \mathcal{O}_K$ таков, что его класс вычетов равен b.

Для этого мы введём некий «универсальный» (зависящий только от p) степенной ряд, подстановка в который различных элементов будет давать нам правые части уравнений Артина-Шрайера, задающих «этажи» искомого расширения.

Продолжим p-адический показатель на кольцо многочленов $\mathbb{Q}_p[T]$:

$$v\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\Big) = \min v_p(a_i)$$

и далее на поле $\mathbb{Q}_p(T)$. Через $\mathcal{O}_T$ обозначим кольцо целых соответствующего пополнения, через v — нормирование на нём. Тогда справедливо следующее утверждение ([4, Предложение 4.4]).

Предложение 14. *Существуют $g_i = d_i(T) \in \mathcal{O}_T$, $i \in \mathbb{Z}$, и $R_i = R_i(T) \in \mathcal{O}_T$, $i \geqslant 0$, со следующими свойствами.*

(1) $g_0 \equiv 1 \operatorname{mod} p\mathcal{O}_T$, $g_i \equiv 0 \operatorname{mod} p\mathcal{O}_T$ при $i \neq 0$.

(2) $R_0 = T$.

(3) $v(g_i) \geqslant -i + 2 + \left[\frac{i}{p}\right] + \left[\frac{i-2}{p}\right]$ для $i \leqslant -1$.

(4) Имеем

$$g(X) = g(X,T) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_i X^{i(p-1)+1}, \quad R(X,T) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i X^{i(p-1)+1}$$

и

$$g(X) +_{\boldsymbol{G}_0} [p]_0 R(g(X),T) = g(X +_{\boldsymbol{G}_0} R([p]_0 X, T^p)).$$

Замечание 2. *У нас нет оснований полагать, что условия (1–4) однозначно определяют g_i и R_i. Однако в [4] приведён некоторый канонический способ построения (g,R) с помощью p-адических приближений.*

Зафиксируем пару (g,R), удовлетворяющую условиям предложения, и обозначим через

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} S_i(T) X^{i(p-1)+1} = T^{-1}X + \dots$$

ряд, обратный к R относительно подстановки рядов в $\mathcal{O}_T[[X]]$.

Следующая теорема описывает построение искомых циклических расширений ([4, Предложение 4.1]).

Теорема 8. *Пусть $d \in \mathcal{O}_K^*$. Рассмотрим $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^{sep}$ такие, что*

$$\beta_1^p - \beta_1 = -p^{-1} \sum_{i \geqslant 0} S_i(d^{p^{n-1}})(-p)^i,$$

$$\beta_j^p - \beta_j = -p^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} g_i(d^{p^{n-j}})(-p)^i \beta_{j-1}^{i(p-1)+1}, \quad j \geqslant 2.$$

Тогда $K_{n,d^{p^{n-1}}} = K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — циклическое расширение K степени p^n, содержащее корень многочлена $X^p - X + p^{-1}d^{p^{n-1}}$.

Отметим, что при построении циклических расширений степени p^n для конкретных значений n мы можем аппроксимировать правые части уравнений в теореме 8 конечными суммами. В частности, при $n = 2$ имеем следующее описание максимального абелева расширения K показателя p^2 ([28, Theorem 14.5]).

Теорема 9. *Для любого $d \in \mathcal{O}_K^*$ пусть $\tilde{K}_{1,d} = K(y)$, где $y^p - y = -p^{-1}d$. Далее, пусть $\tilde{K}_{2,d^p} = K(y_1, y_2)$, где*

$$y_1^p - y_1 = -p^{-1}d^p,$$

$$y_2^p - y_2 = -p^{-1}y_1 + p^{-1} \cdot \frac{d^{1-p}-1}{2} y_1^{-p+2} - \frac{d^{1-p}-1}{2}(1-d^p)y_1.$$

Тогда:

1. Все $\tilde{K}_{1,d}/K$ — циклические p, и все $\tilde{K}_{2,d^p}/K$ — циклические p^2.

2. $K^{ab,p^2}/K$ — композит следующих линейно разделённых расширений:

(a) $\tilde{K}_{1,d}/K$, где d пробегает систему представителей $\mathbb{F}_p$-базиса $\overline{K}/\overline{K}^p$;

(b) $\tilde{K}_{2,d^p}/K$, где d пробегает систему представителей $\mathbb{F}_p$-базиса $\overline{K}$;

(c) $K_{ur}^{ab,p^2}/K$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойцов, В. Г., Жуков, И. Б., Продолжимость циклических расширений полных дискретно нормированных полей/ В. Г. Бойцов, И. Б. Жуков// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2003. Т. 305 - С. 5-17

2. Востоков, С. В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля/ С. В. Востоков// Изв. АН СССР. Сер. матем 1985. - Т. 49 - № 2 - С. 283–308

3. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. - 1990. - Т. 2 - № 4. - С. 91-118.

4. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для $\mathfrak{p}$-адических полей/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков// Труды С.-Петерб. мат. общ. - 1995 - Т.3 - С. 194-214. olga

5. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 1999. - Т. 265 - С. 77-109.

6. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Расширения Инабы полных полей характеристики 0/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб. - 2019 - Т. 20 - № 3 - С. 124-133.

7. Жуков, И. Б. Структурная теорема для полных полей/ И. Б. Жуков//Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва. - 1995. Т. 3. - С. 194-214.

8. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля/ И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2017. - Т. 455 - С. 52-66.

9. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. О расширениях Инабы двумерных локальных полей смешанной характеристики/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2022. - Т. 513 - С. 57-73.

10. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Устранение максимальных скачков/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Готовится к публикации

11. Иванова, О. Ю. Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы/ О. Ю. Иванова//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 2022. -Т. 513 - С. 74-84.

12. Ивасава, К., Локальная теория полей классов/ К. Ивасава - Москва: Мир - 1983.

13. Касселс, Дж., Фрёлих, А. (ред.) Алгебраическая теория чисел/ Дж. Касселс, А. Фрёлих - М.: Мир, 1969.

14. Ленг, С. Алгебра/ С. Ленг - М.: Мир, 1968.

15. Паршин, А. Н. Локальная теория полей классов/ А. Н. Паршин// Алгебраическая геометрия и ее приложения, Сборник статей, Тр. МИАН СССР 1984. - Т. 165 - С. 143–170

16. Fesenko I. B., Vostokov, S.V. Local fields and their extensions. A constructive approach/ I. B. Fesenko and S. V. Vostokov - Second edition - AMS - Providence - RI - 2002.

17. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case/ O. Hyodo// Adv. Stud. Pure Math. - 1987. - Vol. 12 - P. 287-314.

18. Ikeda, K. İ., Serbest E. Local abelian Kato-Parshin reciprocity law: a survey, Hacet/ K. İ. Ikeda, E. Serbest// J. Math. Stat. - 2021. - Vol. 50 - № 5 - P. 1225-1250.

19. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p/ E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. - 1961. - Vol. 12 - P. 26-36.

20. Kato, K. Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory/ K. Kato// Duke Math. J. 1987. - Vol. 55 - P. 629-659.

21. Keating, K., Schwartz, P. Galois scaffolds and Galois module structure for totally ramified C_{p^2}-extensions in characteristic 0/ K. Keating, P. Schwartz// Number Theory 2022. - Vol. 239 - P. 113-136.

22. Lubin, J., Tate, J. Formal complex multiplication in local fields/ J. Lubin, J. Tate// Ann. Math. - 1965. - Vol. 81 - P. 380-387.

23. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero/ R. E. MacKenzie, G. Whaples// Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.

24. Miki, H. On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields/ H. Miki//J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A - 1974. - Vol. 21 - P. 377-393.

25. Serre, J.-P., Local fields/ J.-P. Serre - Springer - 1979.

26. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions/ L. Xiao, I. Zhukov//Алгебра и анализ. 2014. - Т. 26 - № 5 - С. 695-740.

27. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions/ L. Xiao, I. Zhukov// in: Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18-29 - 2011. Zürich: European Mathematical Society (EMS). - 2014. - P. 600-656 (Zbl 1312.14010)

28. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields/ I. Zhukov// in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs - 2000. Vol. 3 - P. 117-122.

REFERENCES

1. Boitsov, V. G., Zhukov, I. B. 2005 “Continuability of cyclic extensions of complete discrete valuation fields”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, vol. 130, № 3 (2005), pp. 4643-4650.
2. Vostokov, S. V. 1986 “Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field” *Math. USSR-Izv.*, vol. 26, № 2, pp. 263—287.
3. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B. 1990, “On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions”, *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.
4. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B. 1995, “Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 157–174, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
5. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G.K. 1999, “Extensions with almost maximal depth of ramification”, *J. Math. Sci.*, vol. 112, № 3, pp. 4285-4302
6. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. 2019 “Inaba extensions of complete fields of characteristic 0” *Chebyshevskii sbornik* vol. 20, № 3, pp. 124-133
7. Zhukov, I. B., 1995 “Structure theorems for complete fields”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 175–192, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
8. Zhukov, I. B., Lysenko, E. F. 2018, “Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field”, *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157
9. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. 2022 “On Inaba extensions for two-dimensional local fields of mixed characteristic” *J. Math. Sci.*, to appear.
10. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. “Elimination of maximal jumps” In preparation
11. Ivanova, O. Yu. 2022 “Construction of a cyclic ferocious extension by means of an Inaba equation” *J. Math. Sci.*, to appear.
12. Iwasawa, K. 1986 *Local class field theory*, Oxford University Press.
13. Cassels, J. W. S. Frohlich, A. (eds.), 1967, “*Algebraic Number Theory*”, Academic Press, London and New York.
14. Lang. S. 2002 “*Algebra*”, Rev. 3rd edition, Springer, New York et al.
15. Parshin, A. N. 1985 “Local class field theory” *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 165, pp. 157-185.
16. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, “*Local fields and their extensions. A constructive approach*”, Second edition, AMS, Providence, RI.
17. Hyodo, O., 1987, “Wild ramification in the imperfect residue field case”, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.
18. Ikeda, K. İ., Serbest E. 2021, “Local abelian Kato-Parshin reciprocity law: a survey”, K. İ. Ikeda, E. Serbest *Hacet J. Math. Stat.*, vol. 50, № 5, pp. 1225-1250.
19. Inaba, E., 1961, “On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.

20. Kato, K. 1987 “Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory” *Duke Math. J.*, vol. 55, pp. 629-659.

21. Keating, K. and Schwartz, P., 2022 “Galois scaffolds and Galois module structure for totally ramified C_{p^2}-extensions in characteristic 0” *J. Number Theory*, vol. 239, pp. 113-136.

22. Lubin, J., Tate, J. 1965 “Formal complex multiplication in local fields”, *Ann. Math.* vol. 81, pp. 380-387.

23. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.

24. Miki, H. 1974, “On Z_p-extensions of complete p-adic power series fields and function fields”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A*, vol. 21, pp. 377-393.

25. Serre, J.-P. 1979, “*Local fields*”, Springer.

26. Xiao, L., Zhukov, I. 2014, “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, *Algebra i Analiz*, vol. 26, № 5. pp. 695-740. *St. Petersbg. Math. J.* 26, № 5, pp. 695-74

27. Xiao, L., Zhukov, I. 2014 “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions” L. Xiao, I. Zhukov in: *Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory*, Segovia and El Escorial, Spain, July 18-29, 2011. *European Mathematical Society (EMS)*, Zürich, 2014, pp. 600-656 (Zbl 1312.14010)

28. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.

Получено: 15.02.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-197-213

Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений недивергентного вида

О. Х. Каримов, З. Дж. Хакимова

Каримов Олимджон Худойбердиевич — доктор физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru
Хакимова Зумрат Джамшедовна — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: zumrat@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена установлению коэрцитивных оценок и доказательств теорем разделимости для нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида в весовом пространстве. На основе полученных коэрцитивных оценок исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Проблемой "разделимости дифференциальных выражений"впервые занимались математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Они подробно изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Существуют лишь отдельные работы, в которых рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы, представляющие собой слабые нелинейные возмущения линейных операторов. Случай, когда исследуемый оператор нелинейный, т.е. его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные здесь результаты также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. На основе разделимости рассматриваемого эллиптического оператора недивергентного вида исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального уравнения в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Ключевые слова: Эллиптический оператор, недивергентный вид оператора, коэрцитивные свойства, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство, весовое пространство.

Библиография: 21 названия.

Для цитирования:
О. Х. Каримов, З. Дж. Хакимова, Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных операторов недивергентного вида // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 197–213.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-197-213

Coercive estimates, separability and coercive solvability of a nonlinear elliptic differential operator in a weight space

O. Kh. Karimov, Z. Zh. Hakimova

Karimov Olimjon Khudoyberdievich — doctor of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Hakimova Zumrat Jamshedovna — candidate of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: zumrat@mail.ru

Abstract

The work is devoted to establishing coercive estimates and proofs of separability theorems for a nonlinear elliptic differential operator of non-divergence form in a weighted space. On the basis of the obtained coercive estimates, the coercive solvability of a nonlinear elliptic differential second-order operator in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated. The problem of "separability of differential expressions"was first studied by mathematicians V.N.Everitt and M. Girtz. They studied in detail the separability of the Sturm-Liouville operator. Further development of this theory belongs to K.H.Boymatov, M. Otelbaev and their students. Most of the published works on this theory relate to linear operators. There are only some papers that consider nonlinear differential operators, which are weak nonlinear perturbations of linear operators. The case when the operator under study is nonlinear, i.e. it cannot be represented as a weak perturbation of a linear operator, is considered only in some separate papers. The results obtained here also relate to this little-studied case. In this work, the coercive properties of a non-divergence nonlinear elliptic differential operator are studied

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

in the weight space $L_{2,\rho}(R^n)$ and on the basis of coercive estimates, its separability in this space is proved. Based on the separability of the considered elliptic operator of nondivergent form, we study the coercive solvability of a nonlinear elliptic differential equation in a weighted Hilbert space $L_{2,\rho}(R^n)$.

Keywords: Elliptic operator, non-divergent type of operator, coercive estimates, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space,weight space.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
O. Kh. Karimov, Z. Zh. Hakimova, 2023, “Coercive estimates, separability and coercive solvability of a nonlinear elliptic differential operator in a weight space” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 197–213.

1. Введение

В работе исследуется разделимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x)\in C^2(R^n)$.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$, и получены новые достаточные условия разделимости этого эллиптического оператора в весовом гильбертовом пространстве. На основе полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается коэрцитивная разрешимость эллиптического дифференциального уравнения в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Основы теории "разделимости дифференциальных операторов"заложены в работах В.Н. Эверитта и М.Гирца, опубликованных в начале семидесятых годов прошлого столетия. В статьях [1]–[4] был получен ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам (см.[5]–[11] и имеющуюся там библиографию). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [11]. В публикациях [12]-[15] и [20] изучаются разделимость и разрешимость бигармонического и трижды гармонического операторов, операторов Шредингера и Лапласа-Бельтрами. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [17]-[19],[21].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в статье К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работе [15] и [16]. Данная работа обобщает результаты работ [15] и [16] на нелинейный случай и случай весового пространства.

2. Формулировка основного результата

Введем пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u;L_{2,\rho}(R^n)\|=\left\{\int_{R^n}\rho(x)|u(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x)\in C^1(R^n)$ - положительная функция.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u,v;L_{2,\rho}(R^n))=\int_{R^n}\rho(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+V(x,u)u(x)=f(x),\quad u(x)\in W^2_{2,loc}(R^n), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)$, если*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Пусть для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \leq \sigma_1, \tag{2}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2 \leq \sigma_2, \tag{3}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2 \leqslant \sigma_3, \tag{4}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega; \mathbb{C}\right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}}\Omega; \mathbb{C}\right\|. \tag{5}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2 \leqslant \sigma_4, \tag{6}$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu + \nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega; \mathbb{C}\right\| \leq \delta_2 \left\| F\Omega; \mathbb{C}\right\|. \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(7) и пусть числа σ_j, $(j = \overline{1,4})$, δ_1, δ_2 такие, что*

$$\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} < 1 - \delta_1,\ \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)} < 1 - \delta_2 \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$, справедливы включения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x,u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\|+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \leq M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \qquad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

после интегрирования по частям, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon u) = \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u + a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + J_1^\varepsilon(u) + J_2^\varepsilon(u) + J_3^\varepsilon(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle, \qquad (10)$$

где

$$J_1^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$J_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$J_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

Преобразуем функционал $J_1^\varepsilon(u)$ к виду

$$ReJ_1^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \qquad (11)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \rho\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}(x)u\rangle).$$

Так как функция φ_ε - вещественно-значная и

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}\right| \le M_0\varepsilon^2, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|, \; M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_1^\varepsilon(u) = 0.$$

Далее поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $J_m^\varepsilon(u), \; m = 2, 3$, применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имея в виду неравенства (2) и (3), из равенства (10) получим следующие оценки:

$$|J_2^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{12}$$

$$|J_3^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon} V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2. \tag{13}$$

Имея ввиду эти оценки, из равенства (10), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\mathrm{Re}\,\langle f, u\rangle \ge (1-\alpha_1)\sum_{i,j=1}^n \left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + (1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2)}{2\alpha_1})\langle V(x,u)u, u\rangle,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) –(5) и пусть функция $u(x)$ из класса $L_{2,\rho}(R^n) \cap \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Тогда функции*

$$F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x), \; a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}, \; j = 1, \ldots, n,$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, интегрируя по частям, учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u+$$
$$+\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{14}$$
$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + G_5^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle,$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$
$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u\rangle,$$
$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle,$$
$$G_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $G_1^\varepsilon(u) \to 0$ при $\varepsilon \to 0:$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReG_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{15}$$

Относительно функционалов $G_m^\varepsilon(u),\ m = \overline{2,5}$, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

получаем следующие оценки:

$$|G_2^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle| \le \delta_1\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|G_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_3}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{3}{2}}u\|^2,$$

$$\begin{aligned}
|G_4^\varepsilon(u)| &= |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} Fu\rangle| \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac12} u \right\|^2 \right\} \le \\
&\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|G_5^\varepsilon(u)| &= |\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac12}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon F^{\frac12} u\rangle| \le \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{-\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-\frac32} F^{\frac32} u\|^2 \right\} \le \\
&\le \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\beta} \|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,
\end{aligned}$$

Здесь β– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_3 и δ_1 - константы из условий (2) – (5). На основе полученных оценок из равенства (14) имеем

$$\begin{aligned}
|\langle f, \rho\varphi_\varepsilon Fu)\rangle| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle - |G_1^\varepsilon(u)| + \\
+ (1 - \frac{3}{2}\beta - \delta_1) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned}
\|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Fu; L_{2,\rho}(R^n)\| \ge |(f, Fu)| \ge \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) + \\
+ \left(1 - \frac{3}{2}\beta - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac12} a_{ij}^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Теперь подбираем положительное число β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{2\beta} < 1, \quad 3\beta + 2\delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_{2,\rho}(R^n)$, то из неравенства (16) следует, что функции $a_{ij}(x)^{\frac12}(x) F^{\frac12} \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $F^{\frac32} u$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u(x), \rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + B_1^{(\varepsilon)}(u) + B_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{17}$$

$$+ B_3^{(\varepsilon)}(u) + B_4^{(\varepsilon)}(u) + B_5^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u\rangle,$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial\xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial Q(x,u)}{\partial\eta})u\rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1,\,5}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = \overline{2,5}$ получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle| \le \delta_2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{-\frac12}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_4}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Qu\rangle| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$
\begin{aligned}
|B_5^\varepsilon(u)| &= |\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V^{\frac{1}{2}}u\rangle| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-1}Vu\|^2\right\} \leq \\
&\leq \frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,
\end{aligned}
$$

Здесь β_1– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_4 и δ_2 – константы из условий (2), (3), (6) и (7).

На основе полученных оценок из равенства (17) имеем

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \varphi_\varepsilon Vu)\rangle| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4}{2\beta_1}\right)\cdot\langle Vu, \varphi_\varepsilon Vu\rangle - |B_1^\varepsilon(u)| + \\
+\cdot\left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.
\end{aligned}
$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$
\begin{aligned}
\|f; L_{2,\rho}(R^n)\|\|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu, Vu) + \\
+\left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Далее подбираем положительное число β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$
\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\beta_1} < 1, \quad 3\beta_1 + 2\delta_2 < 1.
$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9). Из него следует разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Теорема 1 полностью доказана.

5. Разрешимость

С помощью теоремы 1 докажем следующие результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения 1.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$
L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu
$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$
\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|^2 \leq \theta_1, \tag{19}
$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{n^2}$. *Тогда уравнение (1) для всех* $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ *имеет единственное решение в пространстве* $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu = 0 \tag{20}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{gathered}
\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle = \langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle = \\
= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\rho\phi\psi u]\rangle = \\
= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - \\
- \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.
\end{gathered} \tag{21}$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$\begin{gathered}
Re\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle = -Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle - \\
- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \\
- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.
\end{gathered} \tag{22}$$

Имея в виду, что

$$\begin{gathered}
2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle = \\
= \sum_{i,j=1}^{n}\left\| \left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + a_{ij}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}} u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2,
\end{gathered} \tag{23}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{gathered}
Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle = \\
= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle \rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq \\
\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\|,
\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho \phi \psi u \rangle = \\ = Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}) V^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\ \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u\|, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u) \rangle = \\ = Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\ \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u\|. \end{aligned} \tag{26}$$

Учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \leq \frac{\alpha}{2} |y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha} |y_2|^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} - Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \phi \psi u] \rangle \leq \\ \leqslant \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2 \theta_1}{2\alpha_2} \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u\|^2, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} -Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u) \rangle \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i})] V^{\frac{1}{2}} u\| \leq \\ \leq \frac{n\alpha_2}{2} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2 \sigma_1}{2\alpha_2} \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u\|^2, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} -Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u) \rangle = \\ \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} Q^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u\| \\ \leqslant \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n^2 \sigma_2}{2\alpha_2} \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u\|^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Применяя далее для равенства (22) неравенства (27)-(29), получим

$$(1-\frac{n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2+$$

$$+\frac{3}{2}\alpha_2\cdot\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2-\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2. \tag{30}$$

Пусть $\psi(x)\equiv 1$ для любых $x\in R^n$ и $\alpha_2=\frac{2}{3}$, тогда имеем

$$0<(1-(n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)\|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n\|^2\le 0. \tag{31}$$

Следовательно, получим

$$0<(1-n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2)\int_{R^n}|\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2dx\le 0. \tag{32}$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv 0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (20).

Пусть далее $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+Vu=f(x) \tag{33}$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\ldots,$ $f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора $\acute{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+V$, $D(\acute{A}=C_0^\infty(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция $\vartheta_p\in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta_p}{\partial x_i\partial x_j}+V\vartheta_p=f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим, что

$$\left\|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_i\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|+\|V(\vartheta_p-\vartheta_k);L_{2,\rho}(R^n)\|+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f_p-f_k;L_{2,\rho}(R^n)\|. \tag{34}$$

Переходя к пределу $p,\ k\to\infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,V\vartheta_1,V\vartheta_2,\ldots,a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},\ \ a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j},\ldots,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_1)}{\partial x_i\partial x_j},\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_2)}{\partial x_i\partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta \in W^2_{2,loc}(R^n)$, $\vartheta^{(1)} = V\vartheta$,

$$\vartheta^{(2)} = a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j},\ \vartheta^{(3)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (34) к пределу при $p,\ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, т.е. теорема полностью доказана.

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного эллиптического дифференциального оператора недивергентного вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Изучена коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка недивергентного вида в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math.Soc. 1971. Vol. 23, P. 301 – 324.
2. Everitt W. N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math.Soc. 1972. Vol. 24, P. 149 – 170.
3. Everitt W. N.,Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math. Z. 1972. Vol. 126, P. 308 – 326.
4. Everitt W. N.,Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect A. 1977. Vol. 79, P. 149 – 170.
5. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009 – 1011.
6. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170, С. 37 – 76.
7. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033 – 1036.
8. Бойматов К. Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т. 326, № 3. С. 393 – 398.
9. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110 – 112.
10. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161, С. 195 – 217.

11. Муратбеков М. Б., Муратбеков М. М., Оспанов К. Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т. 435, № 3. С. 310 – 313.

12. Zayed E. M. E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337, P. 659 – 666.

13. Zayed E. M. E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13 – 23.

14. Zayed E. M. E., Mohamed A. S., Atia H. A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. P. 81 – 92.

15. Zayed E. M. E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamits of continuous, discrede and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis. 2015. № 22. P. 409 – 421.

16. Mohamed A. S., H. A, Atia Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces // Applied Mathematics and Computation. 2005. № 162. P. 155 – 163.

17. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157). С. 42 – 50.

18. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 8. С. 665 – 673.

19. Каримов О. Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 1. С. 55 – 62.

20. Каримов О. Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61, № 11 – 12. С. 829 – 836.

21. Karimov O. Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces // Journal of mathematical sciences. 2019. Vol. 241, № 5. P. 589 – 595.

REFERENCES

1. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.

2. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions", *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.

3. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "Some inequallities associated with certain differential operators", *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.

4. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1977, "Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$", *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.

5. Boimatov, K. Kh. 1973, "Theorems of separability", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.

6. Boimatov, K. Kh. 1984, " Separability theorems, weighted spaces and their applications", *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.

7. Boimatov, K. Kh. 1988, "Coercive estimates and separability for second order elliptic differential equations", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 301, № 5, pp. 1033 – 1036.

8. Boimatov, K. Kh., & Saripov, A. 1992, "Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators", *Dokl. Mathematics*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.

9. Boimatov, K. Kh. 1989, "Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order", *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.

10. Otelbaev, M. 1983, "Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n" *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.

11. Muratbekov, M. B., & Muratbekov, M. M., & Ospanov, K. N. 2010, "Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications", *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.

12. Zayed, E. M. E. 2008, "Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem", *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.

13. Zayed, E. M. E., & Salem, Omram. 2010, "Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert", *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.

14. Zayed, E. M. E., & Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2007, "Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces", *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.

15. Zayed, E. M. E., 2015, "Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem", *Dynamits of continuous, discrete and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis*, № 22, pp. 409 – 421.

16. Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2005, "Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted weighted Hilbert spaces", *Applied Mathematics and Computation.* № 162. pp. 155 – 163.

17. Karimov, O. Kh. 2014, "On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients" *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 42 – 50, (in Russian).

18. Karimov, O. Kh. 2015, "On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, № 8, pp. 665 – 673, (in Russian).

19. Karimov. O. Kh. 2017, "Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential", *Ufa mathematical journal*, vol. 9, № 1, pp. 55 – 62.

20. Karimov, O. Kh. 2018, "On coercive solvability the schrodinger equation in a Hilbert space", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, № 11 - 12, pp. 829 – 836, (in Russian).

21. Karimov, O. Kh. 2019, “On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces”, *Journal of mathematical sciences*, vol. 241, № 5, pp. 589 – 595.

Получено: 30.01.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-214-227

Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток[1]

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Кормачева Антонина Николаевна — Швейцария (г. Цюрих).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок типа оценок Быковского для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки. В ней продолжены исследования аналогичные тем, что ранее мы выполнили для оценок меры качества и количественной меры параллелепипедальной сетки.

Основная идея, используемая в данной работе, восходит к работе В. А. Быковского (2002 год) об оценке погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам и её обобщению в работе О. А. Горкуши и Н. М. Добровольского (2005 год) на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки. Центральное место в этих работах играет множество Быковского, состоящее из локальных минимумов второго рода, и суммы по этим множествам.

Как и в работе «Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов» был обнаружен эффект, что в оценках отклонения появляется множитель с логарифмическим порядком роста, который стал входить в определение модифицированной суммы Быковского.

Методом работы является объединение подходов из работы «Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток» (1984 год) с подходами 2005 года.

Намечены дальнейшие пути для получения уточнения полученных оценок.

Ключевые слова: функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 214–227.

---

[1] Исследование выполнено РНФ № 23-21-00317 по теме «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-214-227

On Bykovsky estimates for deviations of generalized parallelepipedal grids[2]

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Switzerland (Zurich).
e-mail: juska789@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This paper is devoted to obtaining estimates of the type of Bykovsky estimates for the deviation of a generalized parallelepipedal grid. It continues the studies similar to those that we previously performed to assess the quality measure and the quantitative measure of the parallelepipedal grid.

The main idea used in this paper goes back to the work of V. A. Bykovsky (2002) on estimating the error of approximate integration over parallelepipedal grids and its generalization in the work of O. A. Gorkusha and N. M. Dobrovolsky (2005) for the case of a hyperbolic zeta function of an arbitrary lattice. The central place in these works is played by the Bykovsky set, consisting of local minima of the second kind, and sums over these sets.

As in the work "On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients the effect was found that a multiplier with a logarithmic order of growth appears in the deviation estimates, which began to include the definition of the modified Bykovsky sum.

The method of work is to combine the approaches from the work "Estimates of deviations of generalized parallelepipedal grids"(1984) with the approaches of 2005.

Further ways to obtain clarification of the received estimates are outlined.

Keywords: quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 214–227.

Посвящается 65-летию
Виктора Алексеевича Быковского.

---

[2] Acknowledgments: The reported study was funded by the RSF No. 23-21-00317 on the topic "Number geometry and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis".

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [12] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

имеют простой вид, но требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1\ (j = 1, 2, \ldots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \ldots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \ldots, a_s)$. $S_p(z_1, \ldots, z_s)$ выражается через сумму[3]

$$S_p(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \tag{2}$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod p, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod p. \end{cases} \tag{3}$$

В работе [5] было дано следующее определение обобщённой параллелепипедальной сетки. Пусть $s > 1$ и Λ произвольная s-мерная решётка. Если $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s})$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$ — базис решётки Λ, то взаимную решётку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{\lambda}_1^* = (\lambda_{1\,1}^*, \ldots, \lambda_{1\,s}^*)$, $\ldots$, $\vec{\lambda}_s^* = (\lambda_{s\,1}^*, \ldots, \lambda_{s\,s}^*)$, который однозначно характеризуется соотношениями

$$(\vec{\lambda}_\nu, \vec{\lambda}_\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 1. *Параллелепипедальной сеткой I типа или просто обобщённой параллелепипедальной сеткой решётки Λ будем называть сетку $M(\Lambda)$, состоящую из точек взаимной решётки Λ^*, лежащих в s-мерном единичном полуоткрытом кубе $G_s = [0; 1)^s$.*

Рассмотрим характеристическую функцию $\chi(\vec{x}, \vec{\alpha})$ прямоугольной области $\Pi(\vec{\alpha}) = [0; \alpha_1) \times \ldots \times [0; \alpha_s)$. Локальным отклонением $D(M(\Lambda), \vec{\alpha})$ называется величина

$$D(M(\Lambda), \vec{\alpha}) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(\vec{x_k}, \vec{\alpha}) - N \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s,$$

где $N = |M(\Lambda)|$ – количество точек обобщённой параллелепипедальной сетки решётки Λ. Отклонением сетки $M(\Lambda)$ называется величина

$$D_s(M(\Lambda)) = \sup_{\vec{\alpha} \in [0;1]^s} |D(M(\Lambda), \vec{\alpha})|.$$

В работе [5] была доказана теорема об оценке величины отклонения сетки $M(\Lambda)$ через детерминант решётки Λ и величину её гиперболического параметра $q(\Lambda)$. Напомним, что гиперболическим параметром решётки Λ называется величина

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s,$$

где для вещественных x величина $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

---

[3] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Пусть для решётки Λ справедливо неравенство $q(\Lambda) > 1$, тогда для отклонения обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(M(\Lambda)) \leqslant 2\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln(2\det\Lambda))^s\right), \tag{5}$$

$$N = \det\Lambda + \theta(\Lambda)\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln(2\det\Lambda))^s\right), \tag{6}$$

где N — количество точек обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ и $|\theta(\Lambda)| \leqslant 1$.

Данная теорема является аналогом обобщённой теоремы Н. С. Бахвалова об оценке сверху гиперболической дзета-функции произвольной решётки [4].

В работе [2] В. А. Быковский получил принципиально новые оценки для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α. Фактически В. А. Быковский получил оценки сверху и снизу для гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения через сумму по конечному множеству минимальных решений, которое мы в своих работах называем множеством Быковского. В работе [3] оценки Быковского были перенесены на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Цель данной работы — получить аналог оценок Быковского для отклонения обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ с $\det\Lambda > 1$ и $q(\Lambda) > 1$.

2. Множество Быковского и вспомогательные леммы

Рассмотрим в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$, который является линейно независимой системой векторов:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ненулевая точка $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \Lambda$ называется локальным минимумом второго рода, если не существует другой ненулевой точки $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \Lambda$, для которой

$$\overline{y_1} \leqslant \overline{x_1}, \ldots, \overline{y_s} \leqslant \overline{x_s}; \quad \overline{y_1} + \ldots + \overline{y_s} < \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_s}.$$

Минимальным множеством решётки Λ назовем множество $B(\Lambda)$, состоящее из всех локальных минимумов $\vec{x}$ второго рода.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\overline{x_j} < \det\Lambda$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j})$ $(1 \leqslant j \leqslant r,\ r = r(\Lambda))$ есть все локальные минимумы второго рода из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого локального минимума второго рода $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является локальным минимумом второго рода, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество локальных минимумов второго рода, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взят ровно один. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \bigcup -B^*(\Lambda). \tag{7}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предпологать, что нумерация локальных минимумов согласована с разбиением (7): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a},\vec{x})$ прямоугольный $s-$мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a},\vec{x}) = \left\{\vec{y}\;\middle|\; \begin{cases} a_\nu \leqslant y_\nu < a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geqslant 0 \\ a_\nu < y_\nu \leqslant a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} (\nu = 1,\ldots,s)\right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a},\vec{x})$ — количество точек решётки Λ, лежащих в этом параллелепипеде.

Полагаем $\vec{1} = (1,\ldots,1)$, $G_s = [0,1)^s$ — полуоткрытый единичный s-мерный куб, $K_s = [-1,1]^s$ — s-мерный куб объёма 2^s, $N(\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ, лежащих в этом кубе. Следующая лемма в другой формулировке была доказана в [4].

Лемма 1. *Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det\Lambda > 1$ и для точки $\vec{a}$ и для любого локального минимума $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство*

$$N_\Lambda(\vec{a},\vec{x}_j) \leqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. См. [4]. □

Для доказательства теоремы 1 в работе [5] использовались следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть гладкая функция $f(\vec{x})$ обращается в ноль вместе со своими производными $\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_1^{n_s}} f(\vec{x}\ (0 \leqslant n_1,\ldots,n_s \leqslant 1)$ на границе s-мерного прямоугольного параллелепипеда $[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_s;b_s]$ и обращается тождественно в ноль вне его.*

Тогда для погрешности приближенного интегрирования квадратурной формулы

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_s}^{b_s} dx_s f(\vec{x}) = \frac{1}{\det\Lambda}\sum_{\vec{x}\in\Lambda^*} f(\vec{x}) - R(f) \tag{9}$$

справедливо равенство

$$R(f) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_s}^{b_s} dx_s f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{y},\vec{x})}. \tag{10}$$

Доказательство. См. [5]. □

Пусть $0 < \Delta < 0,25$ и $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $\vec{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_s)$ произвольные фиксированные точки из s-мерного куба $\left[-1-\frac{\Delta}{2}; 1+\frac{\Delta}{2}\right]^s$ такие, что $\Delta < \beta_j - \alpha_j < 1+\Delta$ $(j = 1,\ldots,s)$. Положим $\delta = \Delta/2$. Для каждого $j = 1,\ldots,s$ определим функции $\psi_{0j}(x)$, $\psi_j(x)$ следующими соотношениями

$$\psi_{0j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_j < x < \beta_j, \\ 0 & \text{при } x \notin (\alpha_j;\beta_j), \end{cases} \tag{11}$$

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz. \tag{12}$$

Лемма 3. *Для каждой функции $\psi_j(x)$, определенной равенством (12) справедливы соотношения*

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } x \in (\alpha_j+\delta;\beta_j-\delta), \\ 0 & \textit{при } x \notin (\alpha_j-\delta;\beta_j+\delta), \\ \frac{x+\delta-\alpha_j}{2\delta} & \textit{при } x \in [\alpha_j-\delta;\alpha_j+\delta], \\ \frac{\delta+\beta_j-x}{2\delta} & \textit{при } x \in [\beta_j-\delta;\beta_j+\delta]. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, при $x \in (\alpha_j + \delta; \beta_j - \delta)$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} 1dz = 1.$$

При $x \notin (\alpha_j - \delta; \beta_j + \delta)$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} 0dz = 0.$$

При $x \in [\alpha_j - \delta; \alpha_j + \delta]$ имеем:

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{x+\delta} 1dz = \frac{x+\delta-\alpha_j}{2\delta}.$$

Наконец, при $x \in [\beta_j - \delta; \beta_j + \delta]$ имеем:

$$\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{\beta_j} 1dz = \frac{\delta+\beta_j-x}{2\delta}.$$

□

Лемма 4. *Для любого действительного σ и интеграла*

$$J_j(\sigma) = \int\limits_{-1-\Delta}^{1+\Delta} \psi_j(x)e^{-2\pi i\sigma x}dx \tag{14}$$

справедливы соотношения

$$J_j(\sigma) = \beta_j - \alpha_j \quad \textit{при } \sigma = 0, \tag{15}$$

$$J_j(\sigma) = \frac{\sin 2\pi\sigma\delta}{2\pi\sigma\delta} e^{-\pi i\sigma(\beta_j+\alpha_j)} \frac{\sin \pi\sigma(\beta_j-\alpha_j)}{\pi\sigma} \quad \textit{при } \sigma \neq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть

$$J_{1j}(\sigma) = \int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta} \psi_j(x)e^{-2\pi i\sigma x}dx.$$

Тогда $J_j(\sigma) = J_{1j}(\sigma)$, так как $\beta_j + \delta = \beta_j + \frac{\Delta}{2} \leqslant 1 + \Delta$, $\alpha_j - \delta = \alpha_j - \frac{\Delta}{2} \geqslant -1 - \Delta$ и $\psi_j(x) = 0$ при $x \notin (\alpha_j - \delta; \beta_j + \delta)$.

Далее имеем

$$J_{1j}(\sigma) = \int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta} \psi_j(x)e^{-2\pi i\sigma x}dx =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j-\delta}^{\beta_j+\delta} \left(\int\limits_{-\delta}^{\delta} \psi_{0j}(x+z)dz\right) e^{-2\pi i\sigma x}dx = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j-2\delta}^{\beta_j+2\delta} \psi_{0j}(z) \left(\int\limits_{\max(\alpha_j-\delta,z-\delta)}^{\min(\beta_j+\delta,z+\delta)} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\int\limits_{\max(\alpha_j-\delta,z-\delta)}^{\min(\beta_j+\delta,z+\delta)} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right) dz = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\int\limits_{z-\delta}^{z+\delta} e^{-2\pi i\sigma x}dx\right) dz.$$

При $\sigma = 0$, очевидно, имеем $J_{1j}(\sigma) = \beta_j - \alpha_j$.

При $\sigma \neq 0$ получаем

$$J_{1j}(\sigma) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{e^{-2\pi i\sigma(z+\delta)} - e^{-2\pi i\sigma(z-\delta)}}{-2\pi i\sigma}dz = \frac{e^{2\pi i\sigma\delta} - e^{-2\pi i\sigma\delta}}{2\delta(2\pi i\sigma)}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} e^{-2\pi i\sigma z}dz = \frac{\sin(2\pi\sigma\delta)}{2\delta\pi\sigma}\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{-2\pi i\sigma\beta_j} - e^{-2\pi i\sigma\alpha_j}}{-2\pi i\sigma} = \frac{\sin(2\pi\sigma\delta)}{2\delta\pi\sigma}e^{-\pi i\sigma(\beta_j+\alpha_j)}\frac{\sin\pi\sigma(\beta_j-\alpha_j)}{\pi\sigma}$$

и лемма полностью доказана. □

Заметим, что

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sin 2\pi\sigma\delta}{2\pi\sigma\delta}e^{-\pi i\sigma(\beta+\alpha)}\frac{\sin\pi\sigma(\beta-\alpha)}{\pi\sigma} = \beta - \alpha. \tag{17}$$

В работе [3] доказана принципиальная лемма:

Лемма 5. *Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. При $\alpha > 1$ для суммы*

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\,j}},\dots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\,j}}}} \frac{1}{(\overline{y_1}\dots\overline{y_s})^\alpha} \tag{18}$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) \leqslant \frac{2^s\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\overline{x_{1\,j}}\dots\overline{x_{s\,j}})^\alpha}.$$

Рассмотрим сумму

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{\det\Lambda}\sum_{\vec{x}\in\Lambda^*}\psi_1(x_1)\dots\psi_s(x_s) - (\beta_1-\alpha_1)\dots(\beta_s-\alpha_s), \tag{19}$$

тогда, применяя леммы 2 и 4, получим

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\sin(\pi x_j\Delta)}{\Delta\pi x_j}e^{-\pi i x_j(\beta_j+\alpha_j)}\frac{\sin\pi x_j(\beta_j-\alpha_j)}{\pi x_j},$$

здесь при $x_j = 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$ раскрывается с помощью равенства (17).

Пользуясь неравенством $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\max(|x|,1)}$, получим

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})| \leqslant {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi x_j}\cdot\overline{\pi x_j(\beta_j-\alpha_j)}}.$$

Рассмотрим сумму, соответствующую локальному минимуму $\vec{x}_\nu$,

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) = {\sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\nu}},\dots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\nu}}}}}'\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}}$$

Следующая лемма является аналогом леммы 5 применительно к оценке $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$.

Лемма 6. *Пусть $\vec{x}_\nu$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$ справедливо неравенство*

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)\leqslant\frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right).$$

Доказательство. Положим $\vec{x}\,'_\nu=(x'_{1\nu},\ldots,x'_{s\nu})$, где $x'_{j\nu}=\overline{x_{j\nu}}$ $(j=1,\ldots,s)$. Будим использовать покоординатное умножение двух точек: $\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1\cdot\overline{y_1},\ldots,x_s\cdot\overline{y_s})$.

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a}\cdot\vec{x}\,'_\nu,\vec{x}_j)$ с $\vec{a}\in\mathbb{Z}^s$, $a_j\neq-1,0$ $(1\leqslant j\leqslant s)$:

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)=\sideset{}{'}\sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\nu}},\ldots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\nu}}}}\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}}}=$$

$$=\sum_{\substack{\vec{a}\in\mathbb{Z}^s,\\ a_\nu\neq-1,0\ (1\leqslant\nu\leqslant s)}}\ \sum_{\vec{y}\in\Pi(\vec{a}\cdot\vec{x}\,'_\nu,\vec{x}_\nu)}\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\overline{\Delta\pi y_j}\cdot\overline{\pi y_j(\beta_j-\alpha_j)}}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{\vec{a}\in\mathbb{Z}^s,\\ a_\nu\neq-1,0\ (1\leqslant\nu\leqslant s)}}N_\Lambda(\vec{a}\cdot\vec{x}\,'_\nu,\vec{x}_\nu)\prod_{j=1}^{s}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\overline{\Delta\pi\min(|a_j|,|a_j+1|)\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)\min(|a_j|,|a_j+1|)\overline{x_{j\nu}}}}}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{a=-\infty}^{-2}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\overline{\Delta\pi|a_j+1|\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)|a_j+1|\overline{x_{j\nu}}}}}+\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\overline{\overline{\Delta\pi a_j\overline{x_{j\nu}}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a_j\overline{x_{j\nu}}}}}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$S(\Delta,\overline{x})=\sum_{a=-\infty}^{-2}\frac{1}{\overline{\overline{\Delta\pi|a+1|\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)|a+1|\overline{x}}}}+\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\overline{\Delta\pi a\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}}}=$$

$$=2\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\overline{\Delta\pi a\overline{x}}\cdot\overline{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}}}.$$

Нетрудно видеть, что, так как $\Delta<\beta_j-\alpha_j$, то

$$S(\Delta,\overline{x})=2\left(\sum_{1\leqslant a<\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}}1+\sum_{\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}\leqslant a<\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}\frac{1}{\pi(\beta_j-\alpha_j)a\overline{x}}+\sum_{a\geqslant\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}\frac{1}{\Delta\pi^2(\beta_j-\alpha_j)a^2\overline{x}^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant2\left(\frac{1}{(\beta_j-\alpha_j)\pi\overline{x}}+\frac{\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+1}{\pi(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}}+\frac{1}{\pi^2\Delta(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}^2}\int\limits_{\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}}\frac{2\left([a]-\left[\frac{1}{\Delta\pi\overline{x}}\right]\right)}{a^3}da\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi(\beta_j-\alpha_j)\overline{x}}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right).$$

Отсюда следует, что

$$R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)\leqslant\prod_{j=1}^{s}\frac{2}{\pi\overline{x_{j\nu}}}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)=\frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)$$

и лемма полностью доказана. □

Суммой Быковского называется выражение вида

$$SB_N(\Lambda) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}.$$

Назовём модифицированной суммой Быковского выражение вида

$$SB_N^*(\Lambda;\Delta) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right)}{\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}}}.$$

Лемма 7. *Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j},\ldots,x_{s\,j})$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ — все локальные минимумы из $B(\Lambda)$, причём $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $\quad(j = 1,\ldots,r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $\quad(j = 1,\ldots,r^*)$. Тогда справедливо неравенство*

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})| \leqslant \frac{2^s}{\pi^s}\cdot SB_N^*(\Lambda;\Delta). \tag{20}$$

Доказательство. Действительно,

$$|R(\vec{\alpha},\vec{\beta})| \leqslant \sum_{j=1}^{r^*} R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu) \leqslant \sum_{j=1}^{r^*} \frac{2^s}{\pi^s\overline{x_{1\nu}}\ldots\overline{x_{s\nu}}}\prod_{j=1}^{s}\left(\ln\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\Delta}\right)+4\right) = \frac{2^s}{\pi^s}\cdot SB_N^*(\Lambda;\Delta).$$

□

3. Оценка отклонения

Следующие рассуждения являются видоизменением аналогичных из работы [5].

Лемма 8. *Пусть $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ — две произвольные точки из s-мерного куба $[-1;1]^s$ такие, что $0 \leqslant \omega_j - \gamma_j \leqslant 1$ $(j = 1,\ldots,s)$ и $Z(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ — количество точек решётки Λ^* в области $[\gamma_1;\omega_1)\times\ldots\times[\gamma_s;\omega_s)$. Тогда при $q(\Lambda) > 1$ и $\det\Lambda > 4$ справедливо равенство*

$$Z(\vec{\gamma},\vec{\omega}) = (\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)+$$
$$+\theta(\vec{\gamma},\vec{\omega})\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^s\det\Lambda\cdot(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s\cdot SB_N(\Lambda)+4^s\right), \tag{21}$$

где $|\theta(\vec{\gamma},\vec{\omega})| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть для $k = 1,\ldots,s+1$

$$R_k = \sup_{\substack{2\Delta\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant1\,(j=1,\ldots,k-1),\\ 0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant1\,(j=k,\ldots,s)}} |Z(\vec{\gamma},\vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)|; \tag{22}$$

$$Q_k = \sup_{\substack{2\Delta\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant1\,(j=1,\ldots,k-1),\\ 0\leqslant\omega_k-\gamma_k<2\Delta,\\ 0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant1\,(j=k+1,\ldots,s)}} |Z(\vec{\gamma},\vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)| \tag{23}$$

и

$$R = \sup_{0\leqslant\omega_j-\gamma_j\leqslant1\,(j=1,\ldots,s)} |Z(\vec{\gamma},\vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\omega_s-\gamma_s)|, \tag{24}$$

тогда

$$R = \max_{k=1,\ldots,s+1} R_k, \quad R_k = \max(Q_k, R_{k+1}) \quad (k = 1,\ldots,s). \tag{25}$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant s$ и для точек $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ выполнены неравенства

$$\begin{cases} 2\Delta \leqslant \omega_j - \gamma_j \leqslant 1 & \text{при } (j = 1, \ldots, k-1), \\ 0 \leqslant \omega_k - \gamma_k < 2\Delta & \\ 0 \leqslant \omega_j - \gamma_j \leqslant 1 & \text{при } (j = k+1, \ldots, s). \end{cases} \tag{26}$$

Пусть $\vec{\gamma}_\nu = (\gamma_{1\,\nu}, \ldots, \gamma_{s\,\nu})$, $\vec{\omega}_\nu = (\omega_{1\,\nu}, \ldots, \omega_{s\,\nu})$ $(\nu = 1, 2)$ и $\gamma_{j\,\nu} = \gamma_j$, $\omega_{j\,\nu} = \omega_j$ $(j \neq k,$ $1 \leqslant j \leqslant s$, $\nu = 1, 2)$, а $\gamma_{k\,\nu}$ и $\omega_{k\,\nu}$ определены следующим образом:

1. Если $\gamma_k < 2\Delta - 1$, то $\gamma_{k\,1} = \gamma_k$, $\omega_{k\,1} = \omega_k + 2\Delta$, $\gamma_{k\,2} = \omega_k$, $\omega_{k\,2} = \omega_k + 2\Delta$;
2. Если $\gamma_k > 2\Delta - 1$, то $\gamma_{k\,1} = \gamma_k - 2\Delta$, $\omega_{k\,1} = \omega_k$, $\gamma_{k\,2} = \gamma_k - 2\Delta$, $\omega_{k\,2} = \gamma_k$.

Так как $\omega_{k\,\nu} - \gamma_{k\,\nu} \geqslant 2\Delta$ $(\nu = 1, 2)$, то

$$|Z(\vec{\gamma}_\nu, \vec{\omega}_\nu) - (\det\Lambda)(\omega_{1\,\nu} - \gamma_{1\,\nu}) \cdot \ldots \cdot (\omega_{s\,\nu} - \gamma_{s\,\nu})| \leqslant R_{k+1} \quad (\nu = 1, 2).$$

Из равенств

$$Z(\vec{\gamma}_1, \vec{\omega}_1) = Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) + Z(\vec{\gamma}_2, \vec{\omega}_2), \quad \prod_{j=1}^{s}(\omega_{j\,1} - \gamma_{j\,1}) = \prod_{j=1}^{s}(\omega_j - \gamma_j) + \prod_{j=1}^{s}(\omega_{j\,2} - \gamma_{j\,2})$$

следует, что

$$|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant 2R_{k+1}.$$

Отсюда вытекает, что $Q_k \leqslant 2R_{k+1}$ и, значит, $R_k \leqslant 2R_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, s)$, что влечет за собой неравенство $R \leqslant 2^s R_{s+1}$.

Пусть $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ произвольные точки такие, что $2\Delta \leqslant \omega_j - \gamma_j$, $|\gamma_j|, |\omega_j| \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, s)$. Положим $\vec{\alpha}_1 = (\alpha_{1\,1}, \ldots, \alpha_{s\,1}) = \left(\gamma_1 + \frac{\Delta}{2}, \ldots, \gamma_s + \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\beta}_1 = (\beta_{1\,1}, \ldots, \beta_{s\,1}) = \left(\omega_1 - \frac{\Delta}{2}, \ldots, \omega_s - \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\alpha}_2 = (\alpha_{1\,2}, \ldots, \alpha_{s\,2}) = \left(\gamma_1 - \frac{\Delta}{2}, \ldots, \gamma_s - \frac{\Delta}{2}\right)$, $\vec{\beta}_2 = (\beta_{1\,2}, \ldots, \beta_{s\,2}) = \left(\omega_1 + \frac{\Delta}{2}, \ldots, \omega_s + \frac{\Delta}{2}\right)$.

В силу леммы 3 и равенства (19) имеем:

$$\begin{gathered}(\det\Lambda)(R(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1) + (\beta_{1\,1} - \alpha_{1\,1}) \ldots (\beta_{s\,1} - \alpha_{s\,1})) \leqslant Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) \leqslant \\ \leqslant (\det\Lambda)(R(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) + (\beta_{1\,2} - \alpha_{1\,2}) \ldots (\beta_{s\,2} - \alpha_{s\,2})).\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant (\det\Lambda)\left(\max_{\nu=1,2} |R(\vec{\alpha}_\nu, \vec{\beta}_\nu)| + \right. \\ \left. + \max\left(\prod_{j=1}^{s}(\omega_j - \gamma_j) - \prod_{j=1}^{s}(\omega_j - \gamma_j - \Delta), \prod_{j=1}^{s}(\omega_j - \gamma_j + \Delta) - \prod_{j=1}^{s}(\omega_j - \gamma_j)\right)\right).\end{gathered}$$

Так как $\Delta \leqslant \beta_{j\,\nu} - \alpha_{j\,\nu} \leqslant 1 + \Delta$, $-1 - \frac{\Delta}{2} \leqslant \alpha_{j\,\nu}, \beta_{j\,\nu} \leqslant 1 + \frac{\Delta}{2}$ $(j = 1, \ldots, s; \nu = 1, 2)$, то применима лемма 7, из которой вытекает, что

$$\begin{gathered}|Z(\vec{\gamma}, \vec{\omega}) - (\det\Lambda)(\omega_1 - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (\omega_s - \gamma_s)| \leqslant \frac{2^s \det\Lambda}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) + \\ +(\det\Lambda)\max(1 - (1-\Delta)^s, (1+\Delta)^s - 1) \leqslant \\ \leqslant 2^s \det\Lambda\left(\frac{1}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) + \Delta\right).\end{gathered}$$

Из произвольности $\vec{\gamma}$ и $\vec{\omega}$ следует, что

$$R_{s+1} \leqslant 2^s(\det\Lambda)\left(\frac{1}{\pi^s} SB_N^*(\Lambda; \Delta) + \Delta\right)$$

и, значит,

$$R \leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{1}{\pi^s}SB^*_N(\Lambda;\Delta)+\Delta\right).$$

Полагая $\Delta=\frac{1}{\det\Lambda}$, получим $\Delta<0,25$, $SB^*_N(\Lambda;\Delta)\leqslant(\ln(\det\Lambda+1)+4)^sSB_N(\Lambda)$ и

$$R \leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1j}}\ldots\overline{x_{sj}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right)$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть для решётки Λ справедливы неравенства $q(\Lambda)>1$, $\det\Lambda>4$, тогда для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(N)\leqslant 2\cdot 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1j}}\ldots\overline{x_{sj}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right),\qquad(27)$$

$$N=\det\Lambda+\theta(\Lambda)4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1j}}\ldots\overline{x_{sj}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right),\qquad(28)$$

где N — количество точек сетки $M(\Lambda)$ и $|\theta(\Lambda)|\leqslant 1$.

Доказательство. По определению отклонения

$$D_s(N)=\sup_{\vec{\omega}\in G_s}|Z(\vec{0},\vec{\omega})-N\omega_1\ldots\omega_s|.$$

Так как $N=Z(\vec{0},\vec{1})$, то применяя леммы 7 и 8, находим

$$D_s(N)\leqslant\sup_{\vec{\omega}\in G_s}|Z(\vec{0},\vec{\omega})-(\det\Lambda)\omega_1\ldots\omega_s|+|N-\det\Lambda|\leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1j}}\ldots\overline{x_{sj}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right),$$
$$|N-\det\Lambda|\leqslant 4^s(\det\Lambda)\left(\frac{(\ln(\det\Lambda+1)+4)^s}{\pi^s}\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{\overline{x_{1j}}\ldots\overline{x_{sj}}}+\frac{1}{\det\Lambda}\right)$$

что и требовалось доказать. □

4. Заключение

Оценки теоремы 2, по-видимому, можно усилить, так как суммы, задающие величины $R(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_\nu)$ имеют бесконечные области пересечения. На наш взгляд, перспективно для улучшения этой оценки использовать подходы из работы [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
4. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.
5. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.
6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.
7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.
8. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.
9. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.
10. Н. М. Добровольский, Н. М. Коробов. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сб., 2002, Т. 3, вып. 1, С. 41–48.
11. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
12. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
15. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
16. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

17. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193 — 201.

18. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1, 2015. С. 22–29.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

4. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “The hyperbolic Zeta function of lattices”, Dep. v VINITI, no. 6090–84.

5. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, Dep. v VINITI, no. 6089–84.

6. N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korob ov grids Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.

7. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil’kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, “On a single algorithm for finding optimal coefficients”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

8. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

9. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

10. Dobrovol’skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, “On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

11. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, 2021, “On the hyp erb olic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons”, Chebyshevskii sbornik, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

12. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

13. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

14. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

15. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

16. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

17. Seregina N. K., 2013, "Algorithms of numerical integration with the stopping rule" , *TulSU extraction. Natural sciences.* Issue 3. pp. 193 — 201.

18. Seregina N. K., 2015, "On the quantitative measure of the quality of optimal coefficients" , *Izvestiya TulSU. Natural sciences.* Issue 1, pp. 22–29.

Получено: 21.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-228-247

Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана

Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина

Куртова Лилиана Николаевна —кандидат физико-математических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: Kurtova@bsu.edu.ru
Мотькина Наталья Николаевна —кандидат физико-математических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается задача о представлении натурального числа n диагональной квадратичной формой с четырьмя переменными $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, где a, b, c, d – заданные положительные целые числа. Ставится вопрос — определить, при каких условиях на коэффициенты a, b, c, d не существует такого представления для заданного n. Такие условия, полученные на основании теории сравнений или без доказательства, приводятся в работе Клоостермана (1926).

Клоостерман также получил асимптотическую формулу для числа решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. Главный член формулы является рядом $\sum\limits_{q=1}^{+\infty} \Phi(q)$ от мультипликативной функции $\Phi(q)$, содержащей одномерные суммы Гаусса с коэффициентами a, b, c, d. Наша работа связана с изучением представления этого особого ряда в виде произведения по простым числам $\prod\limits_{p|q}(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)$.

Ранее авторы рассмотрели случай, когда $p \neq 2$. С использованием точных формул для одномерных сумм Гаусса, суммы Рамануджана и обобщенной суммы Рамануджана от степени простого числа доказаны условия на коэффициенты a, b, c, d, n, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

В этой работе рассматривается случай, когда $p = 2$ и n – нечетное. С учетом формул для одномерных сумм Гаусса от степени двойки возникают некоторые суммы, родственные сумме Клоостермана, которые ранее не изучались. Для таких сумм от степени двойки нами были получены точные значения. Это позволило привести полное доказательство условий для коэффициентов a, b, c, d, хотя бы два из которых четные. При этих условиях нечетное натуральное число нельзя представить диагональной квадратичной формой с четырьмя переменными. Отметим, что некоторые из этих условий являются новыми и не упоминаются в работе Клоостермана.

Ключевые слова: асимптотическая формула, сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина. Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 228–247.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-228-247

Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem

L. N. Kurtova, N. N. Mot'kina

Kurtova Liliana Nikolaevna —candidate of physical and mathematical sciences, Belgorod State National Research University (Belgorod).

e-mail: Kurtova@bsu.edu.ru

Mot'kina Natalia Nikolaevna —candidate of physical and mathematical sciences, Belgorod State National Research University (Belgorod).

e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Abstract

The representation problem of a natural number n in the diagonal quadratic form with four variables $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, where a, b, c, d are given positive integers, is considered in this paper. The question is posed to define under what conditions on the coefficients a, b, c, d such representation does not exist for a given n. These conditions, which obtained based on the theory of congruences or without proof, are given in the Kloosterman's work (1926).

Kloosterman also has obtained an asymptotic formula for the number of solutions to the equation $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. The main term of this formula is a series $\sum\limits_{q=1}^{+\infty} \Phi(q)$ of a multiplicative function $\Phi(q)$ containing the one-dimensional Gaussian sums with coefficients a, b, c, d. Our work is related to the study of the representation of this special series as a product over primes $\prod\limits_{p|q}(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)$.

Previously, the authors have been considered the case when $p \neq 2$. Conditions for the coefficients a, b, c, d, n under which the equation $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ has no solutions have been proved with using exact formulas for the one-dimensional Gaussian sums, Ramanujan sum and the generalized Ramanujan sum from the power of a prime.

The case for $p = 2$ and n odd is considering in this paper. Taking into account formulas for the one-dimensional Gaussian sums from the power of two, the some not previously studied sums that are close to the Kloosterman sum, are appeared. For such sums from the power of two, we obtained the exact values. This allowed us to give a complete proof of the conditions on the coefficients a, b, c, d, at least two of which are even. Under these conditions an odd natural number cannot be represented by a diagonal quadratic form with four variables. Note that some of these conditions are new and are not mentioned in Kloosterman's work.

Keywords: asymptotic formula, Gaussian sum, Kloosterman sum.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

L. N. Kurtova, N. N. Mot'kina, 2023, "Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 228–247.

1. Введение

В 1770 году Ж. Лагранж [1] доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = n$$

(*задача Лагранжа*).

До этого времени П. Ферма, Л. Эйлер и другие математики изучали квадратичные формы частного вида. Именно Ж. Лагранж показал связь между представимостью чисел квадратичной формой и существованием решений соответствующего сравнения второй степени. К. Ф. Гаусс, позднее Л. Дирихле [2], продолжили исследования Л. Эйлера, создав теорию представления натуральных чисел квадратичными формами [3]. К. Ф. Гаусс ввел в рассмотрение тригонометрические суммы

$$S(q, a, b) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} e^{2\pi i(aj^2+bj)/q}$$

(*суммы Гаусса*), показал их полезность в решении задач теории чисел [4].

Пусть a, b, c, d, n — положительные целые числа и $N(a, b, c, d; n)$ определяет число решений уравнения

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$.

В 1828 году Якоби, используя эллиптические функции, доказал, что

$$N(1, 1, 1, 1; n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ d\not\equiv 0 \pmod 4}} d.$$

В 1847 году Эйзенштейн [5] получил формулы для $N(1, 1, 1, 3; n)$ и $N(1, 1, 1, 5; n)$. С 1859 по 1866 годы Лиувилль в серии работ указал около 90 предположений о точных значениях для $N(a, b, c, d; n)$. Большинство гипотез Лиувилля были доказаны (см. [6]–[10], обзорная статья Купера [11]).

В 1926 году Х. Клоостерман [12] получил асимптотическую формулу для $N(a, b, c, d; n)$ (*задача Клоостермана*) и привел примеры отдельных случаев, когда число представлений целого положительного числа диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными равно нулю.

Случаи, когда n или некоторые из коэффициентов a, b, c, d делятся на $p = 2$, рассмотрены Клоостерманом более подробно, чем для нечетного простого p.

Применение точных формул для сумм Гаусса ([13]–[16]) позволило нам дополнить случаи, при которых уравнение

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где a, b, c, d, n — положительные целые числа, не имеет решения. В [17] изучались представления главного члена асимптотической формулы для $N(a, b, c, d; n)$ в виде произведений по простым числам $p \neq 2$, и приведены точные доказательства случаев, когда нечетное n невозможно представить в виде линейной комбинации с четырьмя квадратами.

В данной работе рассматривается случай, когда $p = 2$ и n – нечетное. Получены следующие условия на коэффициенты a, b, c, d [18].

Теорема 1. *Пусть n и 2 взаимно просты и один коэффициент квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ делится на 2:*

$$a = 2^\alpha a_1, (a_1, 2) = 1, (b, 2) = 1, (c, 2) = 1, (d, 2) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решения, если*

$$3 \le \alpha, \quad b \equiv c \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{bcdn}\right) = 1.$$

Теорема 2. *Пусть* n *и* 2 *взаимно просты и два коэффициента квадратичной формы* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *делятся на* 2*:*

$$a = 2^{\alpha}a_1, (a_1, 2) = 1, b = 2^{\beta}b_1, (b_1, 2) = 1, (c, 2) = 1, (d, 2) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решения, если* $2 \le \alpha \le \beta$, $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

У Клоостермана ([12], с. 453) есть этот случай, но нет условий с коэффициентами.

Теорема 3. *Пусть* n *и* 2 *взаимно просты и и три коэффициента квадратичной формы* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *делятся на* 2*:*

$$a = 2^{\alpha}a_1, b = 2^{\beta}b_1, c = 2^{\gamma}c_1, (a_1, 2) = (b_1, 2) = (c_1, 2) = 1, (d, 2) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решений в случаях:*

1. если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma \ge 3$ *и*

$$a_1 \equiv b_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = 1;$$

2. если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma \ge 3$*, два коэффициента из трех* a_1, b_1, d *и число* n *сравнимы по модулю* 4*, но не сравнимы с третьим коэффициентом из* a_1, b_1, d *по модулю* 4 *и*

$$\left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

3. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$*,*

$$a_1 \equiv d \equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

4. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$*,*

$$a_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = 1;$$

5. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$*,*

$$a_1 \not\equiv d \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

6. если $2 = \alpha \le \beta \le \gamma$ *и*

$$\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1;$$

7. если $3 \le \alpha \le \beta \le \gamma$*,*

$$\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1 \quad \text{\textit{или}} \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения, если $(n, 2) = 1$ и все коэффициенты a, b, c, d делятся на 2.

Случаи с $p = 2$ сформулированы в работе Клоостермана с помощью теории сравнений и приведены без доказательства. Случай 7 теоремы 6 является новым.

При доказательстве теорем возникают некоторые суммы, родственные суммам Клоостемана. Для этих сумм были получены точные значения от степени двойки.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *(Равенства для одномерной суммы Гаусса)*
Справедливы следующие утверждения:
1. Если $(l,2)=1$, *то*

$$S(2^\alpha,l,0)=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha=1,\\ \left(\frac{2}{l}\right)^\alpha 2^{\alpha/2}(1+i^l), & \text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

2. Если $(q,l)=n$, *то*

$$S(q,l,m)=\begin{cases} nS(q/n,l/n,m/n), & \text{если } n\mid m,\\ 0, & \text{если } n\nmid m.\end{cases}$$

Доказательство. [13], с. 20.

Лемма 2. *(Равенства для множителей, входящих в одномерные суммы Гаусса)*
1. Пусть $(a,2)=(b,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})=c_2(a,b,l)=\begin{cases}2i^l, & \text{если } a,b\equiv 1 \pmod 4,\\ 2, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b\equiv 1 \pmod 4,\\ -2i^l, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

2. Пусть $(a,2)=(b,2)=(c,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})=c_3(a,b,c,l)=$$

$$=\begin{cases}-2+2i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 1 \pmod 4,\\ 2+2i^l, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c\equiv 1 \pmod 4,\\ 2-2i^l, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c\equiv 1 \pmod 4,\\ -2-2i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

3. Пусть $(a,2)=(b,2)=(c,2)=(d,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl})=c_4(a,b,c,d,l)=$$

$$=\begin{cases}-4, & \text{если } a,b,c,d\equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d\equiv 3 \pmod 4,\\ 4i^l, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 4, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ -4i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

Доказательство.

Если $a\equiv 1 \pmod 4$, то $1+i^{al}=1+i^l$. Если $a\equiv 3 \pmod 4$, то $1+i^{al}=1-i^l$. В дальнейшем будем учитывать, что l — нечетное число.

1. Рассмотрим произведение $(1+i^{al})(1+i^{bl})$.

Пусть $a,b\equiv 1 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1+i^l)^2=1+2i^l+(-1)^l=2i^l$.

Пусть $a,b\equiv 3 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1-i^l)^2=-2i^l$.

Пусть $a\equiv 3 \pmod 4$ и $b\equiv 1 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1-i^l)(1+i^l)=1-(-1)^l=2$.

2. Рассмотрим произведение $(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})$.

Пусть $a,b,c\equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})=(1+i^l)^3=1+3i^l+3(-1)^l-i^l=-2+2i^l.$$

Пусть $a, b, c \equiv 3 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)^3 = 1 - 3i^l + 3(-1)^l + i^l = -2 - 2i^l.$$

Пусть $a \equiv 3 \pmod 4$ и $b, c \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)(1+i^l)^2 = (1-i^l)2i^l = 2 + 2i^l.$$

Пусть $a, b \equiv 3 \pmod 4$ и $c \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)^2(1+i^l) = -2i^l(1+i^l) = 2 - 2i^l.$$

3. Проведем исследование для $(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl})$.
Пусть $a, b, c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1+i^l)^4 = 1 + 4i^l + 6(-1)^l - 4i^l + 1 = -4.$$

Пусть $a, b, c, d \equiv 3 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^4 = 1 - 4i^l + 6i^{2l} - 4i^{3l} + i^{4l} =$$

$$= 1 - 4i^l + 6(-1)^l + 4i^l + 1 = 2 + 6(-1)^l = -4.$$

Пусть $a \equiv 3 \pmod 4$ и $b, c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)(1+i^l)^3 = (1-i^{2l})(1+i^l)^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)(1 + 2i^l + (-1)^l) = 4i^l.$$

Пусть $a, b \equiv 3 \pmod 4$ и $c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^2(1+i^l)^2 = (1-i^{2l})^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)^2 = 4.$$

Пусть $a, b, c \equiv 3 \pmod 4$ и $d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^3(1+i^l) = (1-i^{2l})(1-i^l)^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)(1 - 2i^l + (-1)^l) = -4i^l.$$

Лемма 3. *(Точные формулы для суммы Клоостермана)*
Пусть

$$K(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^\alpha} e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— сумма Клоостермана.
При $(n, 2) = 1$, $\alpha > 1$

$$K(2, n, 0) = -1, \quad K(2^\alpha, n, 0) = 0.$$

Доказательство.
При нечетном n и $\alpha > 1$ имеем

$$K(2, n, 0) = e^{-\pi i n} = -1;$$

$$K(2^\alpha, n, 0) = e^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} + e^{-2\pi i \frac{3n}{2^\alpha}} + \ldots + e^{-2\pi i \frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}} = e^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{e^{-2\pi i n} - 1}{e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = 0.$$

Лемма 4. *(Точные формулы для измененной суммы Клоостермана)*
Пусть

$$K_i(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— измененная сумма Клоостермана.
Пусть $(n,2)=1$. *Тогда*

$$K_i(2,n,0) = -i,$$

$$K_i(4,n,0) = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right),$$

$$K_i(2^\alpha,n,0) = 0, \quad \alpha > 2.$$

Доказательство.
Пусть $(n,2)=1$, $\alpha > 2$, тогда имеем

$$K_i(2,n,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2}} = ie^{-\pi i n} = i\cos \pi n = -i.$$

$$K_i(4,n,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{4}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{4}} - ie^{-2\pi i \frac{3n}{4}} = \sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -2, & \text{если } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right).$$

$$K_i(2^\alpha,n,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} - ie^{-2\pi i \frac{3n}{2^\alpha}} + \cdots + ie^{-2\pi i \frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}} - ie^{-2\pi i \frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}} =$$

$$= ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{(-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}})^{2^{\alpha-1}} - 1}{-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{e^{-2\pi i n} - 1}{-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = 0.$$

Лемма 5. *(Точные формулы для обобщенной суммы Клоостермана)*
Пусть

$$K_2(2^\alpha,n,0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} \left(\frac{2}{l}\right) e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— обобщенная сумма Клоостермана.
Пусть $(n,2)=1$. *Тогда*

$$K_2(2,n,0) = -1, \quad K_2(4,n,0) = -2i \cdot \left(\frac{-1}{n}\right),$$

$$K_2(8,n,0) = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{n}\right); \quad K_2(2^\alpha,n,0) = 0, \quad \alpha > 3.$$

Доказательство.
Пусть $(n,2)=1$, $\alpha>3$, тогда

$$K_2(2,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2}}=\cos\pi n=-1.$$

$$K_2(4,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{4}}=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{4}}=-i\sin\frac{\pi n}{2}+i\sin\frac{3\pi n}{2}=-2i\cdot\left(\frac{-1}{n}\right).$$

$$K_2(8,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{8}}=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}+e^{-2\pi i\frac{7n}{8}}=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2}}\right)=$$

$$=2e^{-\pi i\frac{n}{4}}\left(1-e^{-\pi i\frac{n}{2}}\right)=2\left(e^{-\pi i\frac{n}{4}}-e^{-\pi i\frac{3n}{4}}\right)=$$

$$=2\left(\cos(\pi n/4)-\cos(3\pi n/4)+i(\sin(3\pi n/4)-\sin(\pi n/4))\right)=$$

$$=4\left(\sin(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)+i\sin(\pi n/4)\cdot\cos(\pi n/2)\right)=$$

$$=4\sin(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)=$$

$$=\begin{cases}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 1 \pmod 8 \text{ или } n\equiv 7 \pmod 8,\\ -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 3 \pmod 8 \text{ или } n\equiv 5 \pmod 8\end{cases}=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{n}\right).$$

$$K_2(2^\alpha,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{2^\alpha}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}+e^{-2\pi i\frac{7n}{2^\alpha}}+\dots-$$

$$-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}+e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})-e^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})+\dots-$$

$$-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})(1-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}+\dots-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-4)n}{2^\alpha}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{(-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}})^{2^{\alpha-2}}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=0.$$

Лемма 6. *(Точные формулы для обобщенной измененной суммы Клоостермана) Пусть*

$$K_{2i}(2^\alpha,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}$$

— обобщенная измененная сумма Клоостермана.

Пусть $(n,2)=1$. *Тогда*

$$K_{2i}(2,n,0)=-i,\quad K_{2i}(4,n,0)=0$$

$$K_{2i}(8,n,0)=2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right),\quad K_{2i}(2^\alpha,n,0)=0,\quad \alpha>3.$$

Доказательство.

Пусть $(n,2)=1$, $\alpha>3$, тогда

$$K_{2i}(2,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2}\left(\frac{2}{l}\right)i^le^{-2\pi i\frac{nl}{2}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2}}=i\cos\pi n=-i.$$

$$K_{2i}(4,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}\left(\frac{2}{l}\right)i^le^{-2\pi i\frac{nl}{4}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{4}}+ie^{-2\pi i\frac{3n}{4}}=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{4}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}(1+\cos\pi n)=0.$$

$$K_{2i}(8,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)i^le^{-2\pi i\frac{nl}{8}}=i\left(e^{-2\pi i\frac{n}{8}}+e^{-2\pi i\frac{3n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{7n}{8}}\right)=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)-ie^{-2\pi i\frac{5n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2}}\right)=$$

$$=2ie^{-\pi i\frac{n}{4}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=2i\left(e^{-\pi i\frac{n}{4}}+e^{-\pi i\frac{3n}{4}}\right)=$$

$$=2i\left(\cos(\pi n/4)+\cos(3\pi n/4)-i(\sin(\pi n/4)+\sin(3\pi n/4))\right)=$$

$$=4i\left(\cos(\pi n/4)\cdot\cos(\pi n/2)-i\cos(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)\right)=$$

$$=4\cos(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)=$$

$$=\begin{cases}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 1 \pmod 8 \text{ или } n\equiv 3 \pmod 8,\\ -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 5 \pmod 8 \text{ или } n\equiv 7 \pmod 8\end{cases}=2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right).$$

$$K_{2i}(2^\alpha,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)i^le^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}+ie^{-2\pi i\frac{3n}{2^\alpha}}-ie^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}-ie^{-2\pi i\frac{7n}{2^\alpha}}+\cdots-$$

$$-ie^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}-ie^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})-ie^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})+\cdots-$$

$$-ie^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})(1-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}+\cdots-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-4)n}{2^\alpha}})=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{(-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}})^{2^{\alpha-2}}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=0.$$

3. Доказательства теорем 1–3

Для числа решений $N(a,b,c,d;n)$ уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ была получена асимптотическая формула [12]:

$$N(a,b,c,d;n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} nS(n) + O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0).$$

Для особого ряда $S(n)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0).$$

Она является мультипликативной. По свойству мультипликативной функции получим представление особого ряда $S(n)$ в виде произведения

$$S(n) = \prod_{p\setminus q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + ...).$$

Найдем явные формулы для всех таких возможных произведений при нечетном n и $p = 2$.

3.1. 1. Случай, когда коэффициенты a, b, c, d — нечетные

По лемме 1 имеем $S(2,al,0) = 0$, тогда $\Phi(2) = 0$. При $\mu > 1$ по лемме 2

$$\Phi(2^\mu) = 2^{-2\mu} \left(\frac{2}{abcd}\right)^\mu \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\mu} (1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) e^{-\frac{2\pi inl}{2^\mu}} =$$

$$= 2^{-2\mu+2} \left(\frac{2}{abcd}\right)^\mu \cdot \begin{cases} -K(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d \equiv 3 \pmod 4,\\ K_i(2^\mu,n,0), & \text{если } a \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K_i(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Из лемм 3, 4 следует, что

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot C_0(a,b,c,d,n),$$

где

$$C_0(a,b,c,d,n) = \begin{cases} 0, & \text{если } a,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d \equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ 0, & \text{если } a,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\Phi(2^\mu) = 0, \quad \mu > 2.$$

Получаем множитель в представлении особого ряда в виде произведений по степеням двойки:

$$\prod_{\substack{(a,2)=1\\(b,2)=1\\(c,2)=1\\(d,2)=1\\(n,2)=1}} (1 + 1/2 \cdot C_0(a,b,c,d,n)) > 0.$$

3.2. 2. Случай, когда один из коэффициентов a, b, c, d делится на 2

Пусть $a = 2^\alpha a_1, (a_1,2) = 1$ и $(b,2) = 1, (c,2) = 1, (d,2) = 1, (n,2) = 1$.

По лемме 1 имеем

$$S(2^{\alpha+1}, al, 0) = S(2^{\alpha+1}, 2^\alpha a_1 l, 0) = 2^\alpha S(2, a_1 l, 0) = 0$$

и $S(2, bl, 0) = 0$, тогда $\Phi(2) = 0$, $\Phi(2^{\alpha+1}) = 0$.

При $\mu > 3$ любая из возможных сумм $K(2^\mu, n, 0)$, $K_i(2^\mu, n, 0)$, $K_2(2^\mu, n, 0)$, $K_{2i}(2^\mu, n, 0)$, которая может входить в $\Phi(2^\mu)$ (лемма 2), равна 0 (леммы 3–6). Тогда имеем $\Phi(2^\mu) = 0$ при $\mu > 3$.

Рассмотрим $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

2.1. $\alpha = 1$.

$$\Phi(4) = 0,$$

$$\Phi(8) = 2^{-11/2}\left(\frac{2}{bcd}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8} c_4(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{l}\right)e^{-\frac{2\pi i n l}{8}} =$$

$$= 2^{-7/2}\left(\frac{2}{bcd}\right)\cdot\begin{cases}-K_2(8,n,0), & \text{если } a_1,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1,b,c,d \equiv 3 \pmod 4,\\ K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0), & \text{если } a_1,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4\end{cases} =$$

$$= 1/4 \cdot C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{bcdn}\right),$$

где

$$C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l) = \begin{cases}-1, & \text{если } a_1,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1,b,c,d \equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } a_1,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\(b,2)=1\\(c,2)=1\\(d,2)=1\\(n,2)=1}} \left(1 + 1/4 \cdot C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right) > 0.$$

2.2. $\alpha = 2$.

$$\Phi(4) = 2^{-3} \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4} c_3(b,c,d,l) e^{-\frac{2\pi i n l}{4}} =$$

$$= 2^{-2} \cdot \begin{cases} -K(4,n,0) + K_i(4,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K(4,n,0) + K_i(4,n,0), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K(4,n,0) - K_i(4,n,0), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K(4,n,0) - K_i(4,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right),$$

где

$$C_{\alpha=2}(b,c,d) = \begin{cases} 1, & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ -1, & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4,\\ -1, & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

$$\Phi(8) = 0.$$

Получаем множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1,(a_1,2)=1\\(b,2)=1\\(c,2)=1\\(d,2)=1\\(n,2)=1}} \left(1 + 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right)\right) > 0.$$

2.3. $\alpha \geqslant 3$.

Как и в случае 2.2

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right).$$

Из лемм 2, 5, 6 имеем

$$\Phi(8) = 2^{-9/2} \left(\frac{2}{bcd}\right) \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8} c_3(b,c,d,l) \left(\frac{2}{l}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{8}} =$$

$$= 2^{-7/2} \left(\frac{2}{bcd}\right) \cdot \begin{cases} -K_2(8,n,0) + K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0) + K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0) - K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K_2(8,n,0) - K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/4 \cdot C_{\alpha\geqslant 3}(b,c,d,n) \left(\frac{2}{bcdn}\right),$$

где

$$C_{\alpha\geqslant 3}(b,c,d,n) = \begin{cases} -1 + \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1 + \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1 - \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4,\\ -1 - \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1\\ \alpha\geqslant 3\\ (b,2)=1\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1+1/2\cdot C_{\alpha=2}(b,c,d)\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot C_{\alpha\geqslant 3}(b,c,d,n)\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Если $b,c,d\equiv 1\pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(-1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Он равен нулю, если $n\equiv 3\pmod 4$ и $\left(\frac{2}{bcdn}\right)=1$.

Если $b\equiv 3\pmod 4$ и $c,d\equiv 1\pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Если $b,c\equiv 3\pmod 4$ и $d\equiv 1\pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1-1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Если $b,c,d\equiv 3\pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1-1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(-1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Множитель равен 0, если $n\equiv 1\pmod 4$ и $\left(\frac{2}{bcdn}\right)=1$.

Теорема 1 доказана.

3.3. 3. Случай, когда два коэффициента из a, b, c, d делятся на 2

Пусть $a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1,b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1$ и $(c,2)=1,(d,2)=1,(n,2)=1$.

В дальнейшем будем считать, что $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$. Имеем $\Phi(2)=0$, $\Phi(2^{\alpha+1})=0$, $\Phi(2^{\beta+1})=0$, $\Phi(2^\mu)=0$, если $\mu>3$. Вычислим $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

3.1. $1=\alpha\leqslant\beta$.

Тогда $\Phi(4)=0$.

$$S(8,al,0)S(8,bl,0)S(8,cl,0)S(8,dl,0)=2^7\left(\frac{2}{cd}\right)\cdot\begin{cases}c_4(a_1,b_1,c,d,l), & \text{если } \beta=1,\\ 0, & \text{если } \beta=2,\\ 2c_3(a_1,c,d,l), & \text{если } \beta\geqslant 3.\end{cases}$$

В зависимости от значений, которые принимают $c_4(a_1,b_1,c,d,l)$ и $c_3(a_1,c,d,l)$, $\Phi(8)$ будет содержать равные нулю суммы $K(8,n,0)$ или $K_i(8,n,0)$. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 1\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}(1).$$

3.2. $2 = \alpha \leqslant \beta$.

По леммам 1–4 имеем

$$\Phi(4) = 1/4 \cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4} c_2(c,d,l)e^{-\frac{2\pi inl}{4}} =$$

$$= 1/2 \cdot \begin{cases} K_i(4,n,0), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4 \\ K(4,n,0), & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4 \\ -K_i(4,n,0), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} = C_{2,\beta}(c,d,n),$$

где

$$C_{2,\beta}(c,d,n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

По лемме 1 следует, что $\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 2\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{2,\beta}(c,d,n)\right).$$

Скобка равна нулю, если $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

3.3. $3 \leqslant \alpha \leqslant \beta$.

Как и в случае 3.2

$$\Phi(4) = C_{2,\beta}(c,d,n).$$

По лемме 1 имеем

$$\Phi(8) = 1/8 \cdot \left(\frac{2}{cd}\right) \cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8} c_2(c,d,l)e^{-\frac{2\pi inl}{8}}.$$

Поскольку $\Phi(8)$ по лемме 2 будет содержать суммы $K(8,n,0)$ или $K_i(8,n,0)$, которые равны 0 (леммы 3–4), то $\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{2,\beta}(c,d,n)\right),$$

где

$$C_{2,\beta}(c,d,n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Скобка равна нулю, если $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

Теорема 2 доказана.

3.4. 4. Случай, когда три коэффициента из a, b, c, d делятся на 2

Пусть $a = 2^\alpha a_1, (a_1, 2) = 1, b = 2^\beta b_1, (b_1, 2) = 1, c = 2^\gamma c_1, (c_1, 2) = 1,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ и $(d, 2) = 1, (n, 2) = 1$.

$\Phi(2^\mu) = 0$, если $\mu = 1$, $\mu = \alpha + 1$, $\mu = \beta + 1$, $\mu = \gamma + 1$.

$\Phi(2^\mu) = 0$, если $\mu > 3$, так как любая из возможных сумм $K(2^\mu, n, 0)$, $K_i(2^\mu, n, 0)$, $K_2(2^\mu, n, 0)$, $K_{2i}(2^\mu, n, 0)$, которая может входить в $\Phi(2^\mu)$, равна 0.

Поэтому нужно вычислить $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

4.1. $1 = \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Из леммы 2 следует, что $\Phi(4) = 0$,

$$S(8, al, 0)S(8, bl, 0)S(8, cl, 0)S(8, dl, 0) =$$

$$= 2^{15/2}\left(\frac{2}{dl}\right) \cdot \begin{cases} c_4(a_1, b_1, c_1, d, l), & \text{если } \beta = \gamma = 1,\\ 0, & \text{если } \beta = 1, \gamma = 2 \text{ или } \beta = 2, \gamma \geqslant 2,\\ 2c_3(a_1, b_1, d, l), & \text{если } \beta = 1, \gamma \geqslant 3,\\ 4c_2(a_1, d, l), & \text{если } 3 \leqslant \beta \leqslant \gamma. \end{cases}$$

4.1.1. $1 = \alpha = \beta = \gamma$.

$$\Phi(8) = 2^{-5/2}\left(\frac{2}{d}\right) \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} -K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1, b_1, c_1, d \equiv 3 \pmod 4,\\ K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1, c_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/2 \cdot C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n)\left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n) = \begin{cases} -1, & \text{если } a_1, b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1, b_1, c_1, d \equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, b_1, c_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2b_1,(b_1,2)=1\\ c=2c_1,(c_1,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1 + 1/2 \cdot C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n)\left(\frac{2}{dn}\right)\right) > 0.$$

4.1.2. $1 = \alpha = \beta, \gamma = 2$ или $\alpha = 1, 2 = \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(8) = 0.$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^\gamma c_1,(c,2)=1\\ \beta=1,\gamma=2\\ \beta=2,\gamma\geqslant 2\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} (1)\,.$$

4.1.3. $1 = \alpha = \beta, \gamma \geqslant 3$.

$$\Phi(8) = 2^{-5/2}\left(\frac{2}{d}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} -K_2(8,n,0)+K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0)+K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0)-K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4,\\ -K_2(8,n,0)-K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/2\cdot C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n)\left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n) = \begin{cases} -1+\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 1+\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 1-\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4,\\ -1-\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^\gamma c_1,(c_1,2)=1\\ \gamma\geqslant 3\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1+1/2\cdot C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n)\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Если $a_1, b_1, d \equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(-1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Он равен 0 при $n \equiv 3 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right) = 1$.

Если $a_1, b_1, d \equiv 3 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(-1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

который равен 0 при $n \equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right) = 1$.

Утверждение 1 теоремы 3 доказано.

Если $a_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $b_1, d \equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Множитель равен 0 при $n \equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$.

Если $a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $d \equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1 + 1/2 \cdot (1 - \left(\frac{-1}{n}\right)) \left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

равный 0 при $n \equiv 3 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$.

Утверждение 2 теоремы 3 доказано.

4.1.4. $\alpha = 1, 3 \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(8) = 2^{-3/2} \left(\frac{2}{d}\right) \cdot \begin{cases} K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, d \equiv 1 \pmod 4, \\ K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1 \not\equiv d \pmod 4, \\ -K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= C_{1,3,3}(a_1, d, n) \left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,3,3}(a_1, d, n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, d \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } a_1 \not\equiv d \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1 \\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1 \\ c=2^\gamma c_1,(c_1,2)=1 \\ 3\leqslant\beta\leqslant\gamma \\ (d,2)=1 \\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{1,3,3}(a_1, d, n) \left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Если $a_1 \equiv d \equiv n \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 3 теоремы 3 доказано.

Если $a_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = 1$. Утверждение 4 теоремы 3 доказано.

Если $a_1 \not\equiv d \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 5 теоремы 3 доказано.

4.2. $2 = \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{4} (1 + i^{dl}) e^{-\frac{2\pi i n l}{4}} = \left(\frac{-1}{dn}\right).$$

$\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1,(a_1,2)=1 \\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1 \\ c=2^\gamma c_1,(c_1,2)=1 \\ 2\leqslant\beta\leqslant\gamma \\ (d,2)=1 \\ (n,2)=1}} \left(1 + \left(\frac{-1}{dn}\right)\right).$$

Если $\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1$, то скобка равна 0. Утверждение 6 теоремы 3 доказано.

4.3. $3 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(4) = \left(\frac{-1}{dn}\right).$$

$$\Phi(8) = 2^{-3/2}\left(\frac{2}{d}\right)\cdot\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)(1+i^{dl})e^{-\frac{2\pi inl}{8}} =$$

$$= 2^{-3/2}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)\cdot\left(K_2(8,n,0)+\left(\frac{-1}{d}\right)K_{2i}(8,n,0)\right) = \left(\frac{2}{dn}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right).$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)+\left(\frac{2}{dn}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right)\right) =$$

$$= \prod_{\substack{a=2^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right)\left(1+\left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

который равен 0 при $\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1$ или $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 7 теоремы 3 доказано.

4. Заключение

В данной работе рассмотрено представление особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана в виде произведения по простым числам. Для случая $p = 2$ и $(n, 2) = 1$ доказываются условия на коэффициенты a, b, c, d, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений в целых числах. Изучение особого ряда при $p = 2$ и четном n представляет интерес для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лагранж Ж. Л. 1736—1936: Сборник статей к 200–летию со дня рождения. —М. –Л.: Изд. АН СССР, 1937, 220 с.

2. Lejeune Dirichlet P. G. Vorlesungen Über Zahlentheorie. —Braunschweig: F. Vieweg und sohn., 1863, 416 с.

3. Бухштаб А. А. Теория чисел. —М.: Просвещение, 1966, 384 с.

4. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. —М.: Изд. АН СССР, 1959, 980 с.

5. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. Carnegie Institute of Washington, Washington D.C.. Vol. III. 1923.

6. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. Nineteen quaternary quadratic forms // Acta Arith. 2007. Vol. 130. P. 277-310.

7. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. Jacobi's identity and representations of integers by certain quaternary quadratic forms // Int. J. Modern Math. 2007. Vol. 2. P. 143-176.

8. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. The number of representations of a positive integer by certain quaternary quadratic forms // Int. J. Number Theory. 2009. Vol. 5. P. 13-40.

9. Alaca A. Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 3 and 9 // Acta Arith. 2009. Vol. 136. P. 151-166.

10. Alaca A. Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 4, 9 and 36 // J. Number Theory. 2011. Vol. 131. P. 2192-2218.

11. Cooper S. On the number of representations of integers by certain quadratic forms II // J. Combin. Number Theory. 2009. Vol. 1. P. 153-182.

12. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ // Acta Math. 1926. Vol. 49. P. 407–464.

13. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 65. С. 3–212.

14. Hua Loo–Keng. Introduction to number theory, Springer, 1982, 572 p.

15. Estermann T. A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. 1962. Vol. 12. P. 425–444.

16. Estermann T. On Kloosterman's sum // Mathematica. 1961. Vol. 8. P. 83–86.

17. Куртова Л. Н., Мотькина Н. Н. О видах решений задачи Лагранжа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 166. С. 41–48.

18. Куртова Л. Н., Мотькина Н. Н. Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана // Алгебра, теория чисел и дискретная математика: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII межд. конф., Тула, 2020. С. 224–225.

REFERENCES

1. Lagrange, J–L 1937, *1736–1936. Sbornik statei k 200-letiyu so dnya rozhdeniya* [1736–1936. Collection of articles for the 200th anniversary of the birth]. Izd. AN SSSR, Moscow, pp. 220.

2. Lejeune Dirichlet, PG 1863, *Vorlesungen Über Zahlentheorie.* F. Vieweg und sohn., Braunschweig, pp. 416.

3. Bukhshtab, AA 1966, *Teoriya chisel* [The theory of numbers], Prosveshchenie, Moscow, pp. 384.

4. Gauss, KF 1959, *Trudy po teorii chisel* [Works on Number Theory], Izd. AN SSSR, Moscow, pp. 980.

5. Dickson, L.E. 1923, *History of the Theory of Numbers*, Vol. III, Carnegie Institute of Washington, Washington D.C.. Reprinted by AMS Chelsea, 1999.

6. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2007, "Nineteen quaternary quadratic forms", *Acta Arith..* vol. 130, pp. 277–310.

7. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2007, “Jacobi’s identity and representations of integers by certain quaternary quadratic forms“, *Int. J. Modern Math.* vol. 2, pp. 143–176.

8. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2009, “The number of representations of a positive integer by certain quaternary quadratic forms“, *Int. J. Number Theory.* vol. 5, pp. 13–40.

9. Alaca, A. 2009, “Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 3 and 9“, *Acta Arith.*. vol. 136, pp. 151–166.

10. Alaca, A. 2011, “Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 4, 9 and 36“, *J. Number Theory.* vol. 131, pp. 2192–2218.

11. Cooper, S. 2009, “On the number of representations of integers by certain quadratic forms II“, *J. Combin. Number Theory*, vol. 1, pp. 153–182.

12. Kloosterman, H. D. 1926, “On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$“, *Acta Math.*, vol. 49, pp. 407–464.

13. Malyshev, A. V. 1962, “On the representation of integers by positive quadratic forms“, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 65, pp. 3–212.

14. Hua, LK 1982, *Introduction to number theory*, Springer, pp. 572.

15. Estermann, T. 1962, “A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method“ , *Proc. London Math. Soc.*, vol. 12, pp. 425–444.

16. Estermann, T. 1961, “On Kloosterman’s sum“, *Mathematica*, vol. 8, pp. 83–86.

17. Kurtova, L. N. & Mot’kina, N. N. 2019, “On types of solutions of the Lagrange problem“, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovr. mat. i ejo pril. Temat. obz.*, vol. 166, pp. 41–48.
doi: 10.36535/0233-6723/2019/166/41-48

18. Kurtova, L. N. & Mot’kina, N. N. “Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman’s problem“, *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya matematika: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii. Materialy XVIII mezhd. konf.* Tula, 2020, pp. 224–225.

Получено: 19.02.2021
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-248-255

О разложении чисел по последовательности чисел Фибоначчи

А. Х. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказаны теоремы о разложении действительных чисел по последовательности Фибоначчи . Особое внимание обращено на “явные формулы” и условия единственности таких представлений. Отметим, что единственность разложения действительного числа по обратным значениям мультипликативной системы позволяет получить оценку вида

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{x_n}{n!},\frac{1}{n+1}\le x_n<\frac{1}{n}.$$

Разложения чисел по последовательности обратных чисел Фибоначчи существенно использует их представление через степени “золотого сечения” $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ключевые слова: последовательность Фибоначчи.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. Х. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О разложении чисел по последовательности чисел Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 248–255.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-248-255

On an expansion numbers on Fibonacci's sequences

A. Kh. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).
e-mail: ...
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the expression of real numbers on Fibonacci sequence. It pay a special attention to "explicit formulas" and conditions of the uniqueness of such representations. We note that unifiing of an expression of a real number over inverse values of a multiplicaticative system permits to get the estimation of the form

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{x_n}{n!},\frac{1}{n+1}\leq x_n<\frac{1}{n}.$$

Expressions of numbers over the sequence of inverse of Fibonacci numbers essentially uses these representation throw powers of "the gold section" $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Keywords: the Fibonacci's sequence.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. Kh. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2023, "On an expansion numbers on Fibonacci's sequences" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 248–255.

Введение

В настоящей работе даны обобщения теоремы об однозначном представлении в виде ряда в позиционной системе счисления действительного числа и формулы А.О.Гельфонда с нецелым основанием, большим единицы.

Следуя Гельфонду, числу $\theta>1$, являющемуся "основанием системы счисления", для любого действительного числа α из полуинтервала $[0,1)$ определим "цифры" $\bar{\lambda}_n=\bar{\lambda}_n(\alpha), n\geq 1,$ — целые числа с условием $0\leq\bar{\lambda}_n<\theta$. Пусть число α представлено сходящимся рядом вида

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_n}{\theta^n},x_0=\alpha.$$

Отсюда находим

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_n}{\theta^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}},\frac{\bar{\lambda}_n}{\theta^n}+\frac{x_n}{\theta^n}=\frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}},\bar{\lambda}_n+x_n=\theta x_{n-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\bar{\lambda}_n=[\theta x_{n-1}],x_n=\{\theta x_{n-1}\}.$$

Будем говорить, что число α представлено рядом

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_k}{\theta^k},0\leq\bar{a}_k<\theta(k\geq 1),$$

где $\bar{a}_k$ — целые числа, и для любого $n\geq 1$ справедливо условие

$$0\leq\alpha-A_n<\theta^{-n},A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{a}_k}{\theta^k}.$$

Тогда найденное выше представление числа α в виде ряда — единственно. Предположим противное. Предположим, что существует представление, отличное от предыдущего,

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_k}{\theta^k},0\leq\bar{b}_k<\theta(k\geq 1),$$

где $\bar{b}_k$ — целые числа, и для любого $n\geq 1$ справедливо условие

$$0\leq\alpha-B_n<\theta^{-n},B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{b}_k}{\theta^k},$$

причем найдется число m такое, что

$$A_1=B_1,\ldots,A_{m-1}=B_{m-1},A_m\neq B_m.$$

Имеем

$$0\leq\alpha-A_m<\theta^{-m},0\leq\alpha-B_m<\theta^{-m}.$$

Отсюда получим

$$1\leq|\bar{a}_m-\bar{b}_m|=|A_m-B_m|\theta^m<1.$$

Поскольку $\theta>1$, последнее неравенство противоречиво. Отсюда следует единственность представления числа α в виде ряда по убывающим степеням числа θ.

Разложение целых чисел по последовательности Фибоначчи [4]

Пусть задана последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0=F_1=1,F_{k+1}=F_k+F_{k-1}(k\geq 1),$$

или задана как функция своего номера

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}), \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \bar{\varphi} = 1 - \varphi.$$

Возьмем любое натуральное число $a \geq 1$. Тогда найдется натуральное число $n \geq 1$ такое, что $F_n \leq a < F_{n+1}$, и набор $\{a_1, \dots, a_n\}$, состоящий из чисел 0 и 1, причем $a_n = 1, a_s \cdot a_{s+1} = 0$ для всех $s = 1, \dots, n-1$, такой, что имеет место единственное разложение вида

$$a = a_1F_1 + a_2F_2 + \dots + a_nF_n.$$

Действительно, положив $a_n = 1$, имеем цепочку равенств

$$\begin{gathered} a = a_nF_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < F_n, \\ r_n = a_{n-1}F_{n-1} + r_{n-1}, \quad 0 \leq r_{n-1} < F_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ r_2 = a_1F_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < F_1, \\ r_1 = a_0F_0. \end{gathered}$$

Имеем, что $0 \leq a_k \leq 1$ при $1 \leq k \leq n$, причем при $s = n-1, n-2, \dots, 1$ получим

$$a_sa_{s+1} = 0, a_n = 1.$$

Докажем теперь единственность такого представления. От противного. Предположим, что имеется два различных представления числа a в виде

$$a = a_1F_1 + a_2F_2 + \dots + a_nF_n = b_1F_1 + b_2F_2 + \dots + b_mF_m,$$

где $a_k, k \geq 1$, и $b_l, l \geq 1$, могут принимать только два значения 0 или 1.

Тогда

$$0 = a - a = \sum_{t=0}^{s} c_tF_t, c_t = a_t - b_t, |c_t| \leq 1, c_s \neq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $c_s = 1$. Далее, поскольку $a_{s-1}a_s = 0$ и $b_{s-1}b_s = 0$, получим, что либо $c_{s-1} = 0$, либо $c_{s-1} = -1$ Отсюда находим цепочку эквивалентных неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1}) = F_s \leq |c_s|F_s = |\sum_{t=0}^{s-1} c_tF_t| \leq$$

$$\leq \sum_{t=0}^{s-2} F_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi^s - 1}{\varphi - 1} - \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\bar{\varphi} - 1}\right);$$

$$\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} \leq -\frac{\varphi^s - 1}{\bar{\varphi}} + \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\varphi};$$

$$\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} \leq \varphi^{s+1} + \varphi - \bar{\varphi}^{s+1} + \bar{\varphi}; \quad 0 \geq 1.$$

Последнее неравенство противоречиво. Следовательно, единственность представления числа a в указанном виде доказана.

Представление действительного числа в виде бесконечного ряда по обратным числам Фибоначчи

Будем говорить, что число $a \geq 0$ представимо в виде ряда

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, \qquad (1)$$

где $a_0 = [a]$ — целая часть числа a, целые числа $\bar{\alpha}_k, k \geq 1$, могут принимать всего два значения 0 и 1, и, кроме того, для любого натурального n выполняется неравенство

$$0 \leq a - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} < F_n^{-1}. \qquad (2)$$

Теорема. *Любое действительное число единственным образом представимо в виде (1) и (2).*

Доказательство. Докажем сначала единственность представления a в виде (1) и (2). Предположим противное, т.е. найдутся, по крайней мере, два различных представления числа a с условиями (1) и (2):

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}.$$

Поскольку эти представления различны, найдется m такое, что

$$A_1 = B_1, \ldots, A_{m-1} = B_{m-1}, A_m \neq B_m,$$

где

$$A_m = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, B_m = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}, \bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m.$$

Из соотношений (4) получим

$$0 \leq a - A_m < F_m^{-1}, \quad 0 \leq a - B_m < F_m^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$0 \leq F_m(a - A_m) < 1, \quad 0 \leq F_m(a - B_m) < 1.$$

Следовательно,

$$-1 < F_m(A_m - B_m) < 1, \quad -1 < F_m(A_{m-1} - B_{m-1}) + \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m = \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m < 1,$$

но

$$|\bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m| = 1,$$

так как $\bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m$. Из полученных противоречивых неравенств находим, что для любого $m \geq 1$ справедливы равенства $A_m = B_m$. Тем самым единственность представления (4) и (5) доказана.

Теперь докажем существование представления числа a в виде (1) и (2). Определим “цифры” $\bar{\lambda}_k, k \geq 1$.

Положим $a_0 = [a]$

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} + \frac{x_n}{F_n}, 0 \leq x_n < 1, x_0 = \{a\}. \qquad (6)$$

Отсюда находим $x_n + \bar{\lambda}_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}$, что дает возможность определить величины

$$\bar{\lambda}_n = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right], \quad x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}_n, n > 1$ — целые, причем

$$-1 \leq \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} - 1 < \bar{\lambda}_n \leq \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2,$$

т.е. $\bar{\lambda}_n$ может принимать только два значения: 0 и 1.

Вычислим сумму

$$A_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{F_k}{F_{k-1}} x_{k-1} \right]}{F_k} =$$

$$= [a] + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k-1}}{F_{k-1}} - \frac{x_k}{F_k} \right) = [a] + \frac{x_0}{F_0} - \frac{x_n}{F_n} = a - \frac{x_n}{F_n}.$$

Следовательно, выполняется условие (2), что и завершает доказательство теоремы.

Заключение

Построенные разложения действительных чисел по последовательности Фибоначчи представляют интерес при изучении свойств арифметических функций и в анализе Фурье. В основе наших исследований лежат работы [1]–[16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., 1914, **37**.

2. Borel E. Les probabilités dénombarables et leurs applications arithmétiques.// Rend Circolo math. Palermo, 1909, **27**.

3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем (in Russian). 1959, **23** (Избр.тр. с.366-371).

4. Zeckendorf E. Reprśentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.

5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washigton. 1919. Ch.17.

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.

7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.

8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.

9. Бернулли Д.// Comment. Acad.Sci. Petrop., 1728, **3**, p. 85–100.

10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.

11. de Moivre A.// Philos. Trans., 1922, **32**, p. 162–178.

12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.

13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.

14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.

15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.

16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel’fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14,** № 3, p.370.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E., 1914, “The fractional part of $n^k\theta$”. // Acta math., **37**.

2. Borel E., 1909, “Les probabilités dénombarables et leurs applications arithmétiques”. // Rend Circolo math. Palermo, **27**.

3. Gel’fond A. O., 1959, “On one general property of numerical system” // Izv. AN SSSR, Ser. math. (in Russian). **23** (Selected works. p.366-371).

4. Zeckendorf E., 1972, “Reprśentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas” // Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). **41**, p. 179-182.

5. Dickson L. E., 1919, “History of the theory of numbers” — Carnegie Inst. of Washigton. Ch.17.

6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N., 2006, “Lectures on mathematical analysis” — M.: Drofa. Pp. 640.

7. Cassels J. W. S., 1961, “An introduction to Diophantine approximation” — Cambridge University Press. Pp.212.

8. Hall M.,Jr., 1970, “Combinatorial theory” — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp. Pp. 424.

9. Bernoulli D., 1728, “Combinatorial theory”. // Comment. Acad.Sci. Petrop., **3**, p. 85–100.

10. Knuth D. E., 1998, The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed. — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, california-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc.. Pp. 720.

11. de Moivre A., 1922, // Philos. Trans., **32**, p. 162–178.

12. Chebyshev P. L., 1936, “The theory of probabilities” — AN SSSR. §23. 143–147. (in Russian).

13. Landau E., 1947, “Fundamentals of analysis”. — M.: Inostr.literature.(in Russian).

14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A., 1987, “Series and the Uolsh’s transformations: the theory and applications”. — M.: Nauka, pp. 344.(in Russian).

15. Mineev M. P., Chubarikov V. N., 2014, “Lectures on arithmetical questions of cryptography”. — M.: OOO“Luch”, pp. 224. (in Russian).

16. Ghyasi A. H., 2007, “A generalization of the Gel’fond theorem concerning number systems” // Russian Journal of Mathematical Physics. **14,** № 3, p.370.

Получено: 06.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

Об идеальной экономической ситуации – росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется экономическая модель роста Рамсея — Касса — Купманса. Мы исследовали монотонность функций $C(t)$ и $K(t)$ при специальном начальном условии. Наши результаты получены при помощи вспомогательной системы дифференциальных уравнений, которая аналогична исходной системе дифференциальных уравнений, возникающей в случае постоянства стационарной нормы сбережения.

Ключевые слова: математическая модель экономического роста, задача Рамсея — Касса — Купманса, монотонность функции сбережения и капитала, конкурентные домохозяйства, сепаратриса, стационарная норма сбережения.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 256–265.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article is devoted to the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model. We investigated the monotonicity of the functions $C(t)$ and $K(t)$ under a special initial condition. Our results are obtained using an auxiliary system of differential equations, which is similar to the original system of differential equations arising in the case of constancy of the stationary rate of savings.

Keywords: mathematical model, Ramsey — Kass — Koopmans problem, monotony of the function of saving and capital, competitive households, stationary savings rate.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2023, “About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 256–265.

1. Введение и основной результат

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [17]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются

$x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [9] –[18].

В большинстве исследований по этой тематике рассматривается значение $\theta > 1$; этот случай будет в центре внимания и в нашей работе.

В [3] мы обнаружили, что система дифференциальных уравнений (1) допускает решение в квадратурах, если константы x_1, x_2, α связаны соотношением

$$\alpha x_1 = x_2. \tag{2}$$

Это соотношение соответствует экономическим структурам со стационарной нормой сбережения. Такие структуры достаточно хорошо изучены и не представляют в настоящее время большого интереса. Поэтому в подавляющем большинстве современных работ, где встречается система (1), изучают общий случай, когда равенство (2) не имеет места. Основной интерес представляют модели, в которых

$$\xi = \alpha x_1 - x_2 > 0. \tag{3}$$

Как правило, число α, являющееся показателем степени в определении производственной функции Кобба – Дугласа

$$f(K) = aK^{\alpha}, \tag{4}$$

лежит в пределах $0.7 \leqslant \alpha \leqslant 0.95$, x_1, x_2 – “небольшие” постоянные $(0,02 \leqslant x_2 \leqslant 0,06)$, причём константа x_1 такова, что αx_1 лишь “немного больше” x_2 (обычно $0.1x_2 \leqslant \xi \leqslant 0.4x_2$).

В связи с тем, что в [3] мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (1) с соотношение (2), а именно

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) - bC - x_3 K, \\ \dot{C} = \alpha\theta^{-1}\left(\frac{f(K)}{K}\right)C - x_2 C, \quad \text{где } x_3 = \frac{x_2}{\alpha},\ b > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$K(0) = K_0,\ C(0) = C_0, \tag{6}$$

мы там же предложили в случае (3) заменить систему уравнений (1) системой уравнений (5), отличающейся от (1) множителем b перед C в правой части первого уравнения, равным

$$b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}, \tag{7}$$

а также заменой x_1 на $\frac{x_2}{\alpha}$ в том же уравнении. Такой выбор параметра b обусловлен тем, что из равенства (7) следует совпадение значений правых частей первых уравнений систем (1) и (5) в начальный момент времени. А поскольку вторые уравнения этих систем одинаковы, то мы имеем “близость” решений задачи Коши для систем (1) и (5) с совпадающими начальными условиями (6) при “относительно небольших” временах.

В этой работе мы изучаем вопрос о монотонности функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши (5), (6). Данный вопрос постоянно привлекает внимание исследователей моделей экономического роста. Обычно рассматривают модели, в которых “заложено” возрастание компонент решения $(K(t),\ C(t))$ в самом начале процесса, и выясняют, каких значений могут достичь, возрастая, эти функции, и сколь долго будет длиться их возрастание. Из (5), (6) видно, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2, \tag{8}$$

Это условие в дальнейшем предполагается выполненным. Из (5), (6) также видно, что положительность $\dot{K}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$f(K_0) > bC_0 + x_3K_0,$$

а значит заведомо $f(K_0) > bC_0$. Обычно предполагают, что

$$f(K_0) \geqslant \frac{\theta}{\theta-1}bC_0, \tag{9}$$

(В частности, если $\theta = 2$, то $f(K_0) \geqslant 2bC_0$, а если $\theta = 3$, то $f(K_0) \geqslant 1.5bC_0$.)

Множитель $\frac{\theta}{\theta-1}$ (напомним, что у нас $\theta > 1$) появился в (9) не случайно. В случае, когда в (9) достигается равенство, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, и выполняются условие (8) и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta-1}bC_0. \tag{10}$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши (5), (6) существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{11}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы тождества

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t \tag{12}$$

Замечание 4. *Теорема 1 означает, что на фазовой плоскости (см. рис. 1) мы попадаем на сепаратрису — единственную интегральную кривую, обладающую свойством бесконечного монотонного возрастания сразу обеих функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши (5), (6). Таким образом мы попадаем в идеальную экономическую ситуацию, когда с ростом времени у нас растёт как потребление, так и капитал. Причём этот процесс продолжается до бесконечности и в итоге обе функциии стремятся к конечным значениям (11) с ростом времени на бесконечности.*

2. Доказательство теоремы

Покажем, что если в 1-е и 2-е уравнения системы (5) подставить функцию $C(t)$, определённую в (12), то эти уравнения окажутся совпадающими. Действительно, первое уравнение системы (5) примет вид

$$\dot{K}(t) = \frac{1}{\theta}f(K(t)) - \frac{x_2}{\alpha}K(t). \tag{13}$$

Если же продифференцировать выражение C через K из (12) по t, то получим

$$\dot{C}(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}\dot{K}(t)\alpha a K^{\alpha-1}(t) = \alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}C(t) \Rightarrow \frac{\dot{C}}{C} = \alpha\frac{\dot{K}}{K}. \tag{14}$$

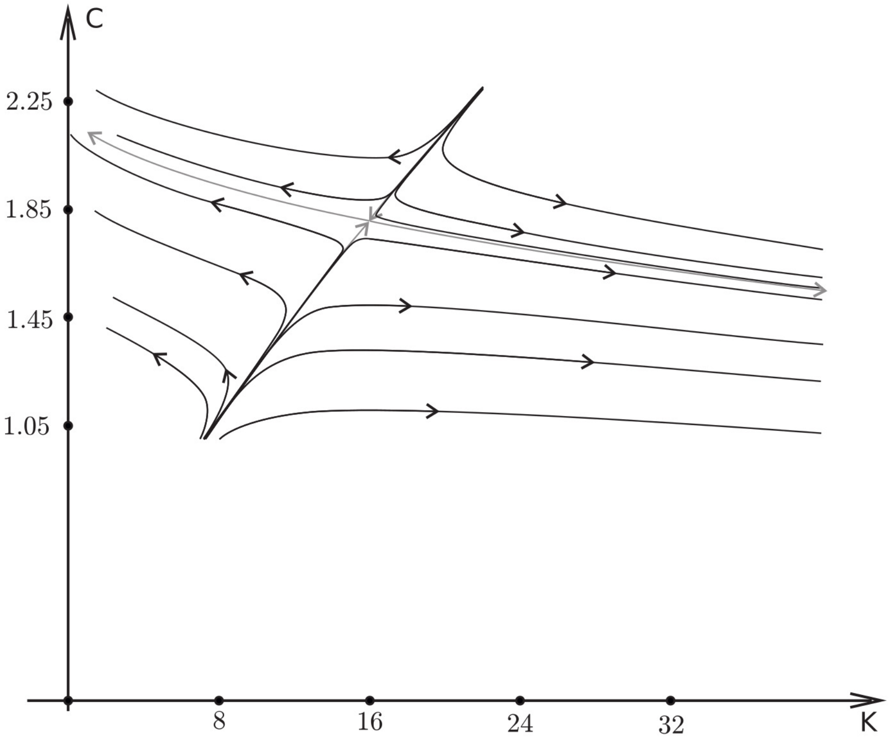

Рис. 1: Фазовый портрет. Построен для так называемых “эталонных значений”: $\alpha = 3/4$, $\theta = 3$, $n = 0.01$, $\delta = 0.05$, $x = 0.02$, $x_1 = 0.08$, $x_2 = 13/300$, $a = 26/75$.

Второе уравнение системы (5), будучи переписано в равносильной форме (после деления обеих частей на положительную функцию $C(t)$) имеет вид

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K)}{K} - x_2. \tag{15}$$

После подстановки выражения (14) для логарифмической производной функции C в левую часть уравнения (15) получим уравнение

$$\frac{\alpha\dot{K}}{K} = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K)}{K} - x_2 \Rightarrow \dot{K} = \frac{1}{\theta}f(K) - \frac{x_2}{\alpha}K,$$

которое совпадает с (13).

Осталось проверить, что решением задачи Коши

$$\frac{dK}{dt} = \frac{f(K)}{\theta} - \frac{x_2 K}{\alpha},\ K(0) = K_0, \tag{16}$$

является функция $K(t)$, определяемая вторым соотношением (12). Для этого проинтегрируем уравнение (16), разделив в нём переменные:

$$\int \frac{dK}{\theta^{-1}f(K) - (\frac{x_2}{\alpha})K} = \int dt.$$

Затем воспользуемся начальным условием $K(0) = K_0$ и учтём, что вследствие неравенства (8) знаменатель подынтегральной функции положителен в начальной точке K_0, остаётся положительным на интервале

$$K_0 < K < K_+,\ \text{где}\ K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

и в точке K_+ обращается в нуль. Заметим далее, что продолжаемость функции $K(t)$ на всю положительную полуось следует из расходимости к $+\infty$ несобственного интеграла

$$\int_{K_0}^{K_+} \frac{du}{\frac{1}{\theta} f(u) - (\frac{x_2}{\alpha}) u}.$$

На рис. 2 мы изобразили график функции $h(t) = \int_{K_0}^{t} \frac{du}{\frac{1}{\theta} f(u) - (\frac{x_2}{\alpha}) u}$ для $t \in [K_0; K_+)$. Отсюда сразу же получаем первое равенство (11), а из него и выражения (12) $C(t)$ через $K(t)$ следует второе равенство (11). Теорема полностью доказана.

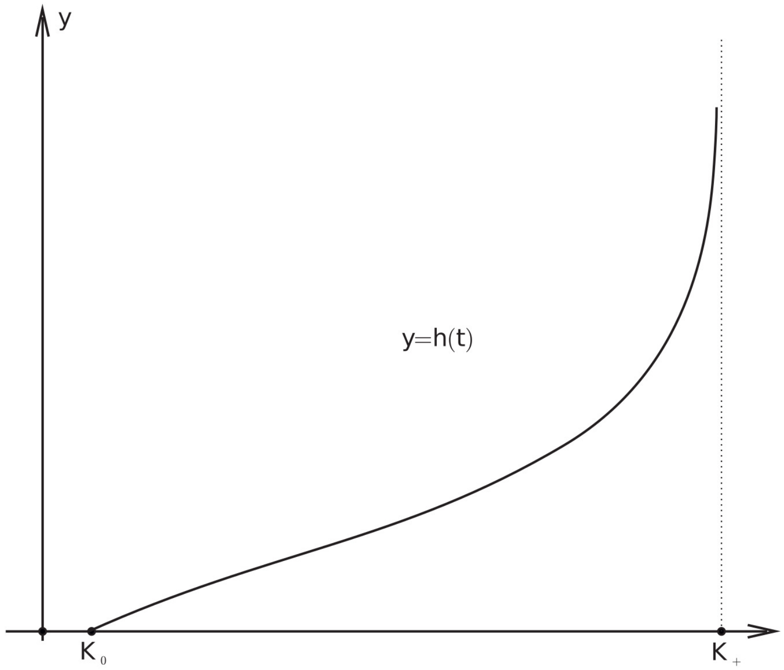

Рис. 2: График функции $h(t)$. Построен для “эталонных значений”.

Завершая параграф, выясним, во сколько раз увеличиваются значения $K(t)$ и $C(t)$ по сравнению с начальными значениями этих функций по завершении экономической деятельности (то есть при больших временах) при наличии специального соотношения (10) между K_0 и C_0. Ответ мы выразим через постоянную H, которую определим следующим образом

$$H = \frac{\alpha}{\theta} \frac{f(K_0)}{x_2 K_0}.$$

Напомним, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна неравенству $H > 1$.

Выше мы доказали, что предел при $t \to +\infty$ функции $K(t)$ равен

$$K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2 \theta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha a K_0^\alpha}{\theta x_2 K_0^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha f(K_0)}{\theta x_2 K_0} K_0^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0. \tag{17}$$

Отношение предела $C_+ = \lim_{t \to +\infty} C(t)$ к C_0 проще всего выразить, воспользовавшись не равенством (11), а только что выведенным равенством (17), затем первым тождеством (12) и равенством (10), согласно которому

$$\begin{aligned} C_+ = \frac{\theta-1}{b\theta} f(K_+) = &\frac{\theta-1}{b\theta} a(H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0)^\alpha = \frac{\theta-1}{b\theta} a K_0^\alpha H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ &\frac{\theta-1}{b\theta} f(K_0) H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = C_0 H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда заключаем, что первоначальное значение $C(t)$ умножается в пределе на $H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, а первоначальное значение $K(t)$ умножается на $H^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

3. Заключение

Обсудим содержание и итоги проведенного исследования. Вопрос о монотонности компонент решения задачи Коши для системы уравнений (1) является актуальным и обсуждается во многих работах. Однако, нам не известны какие-либо результаты теоретического характера на эту тему: в основном, в упомянутых статьях анализируется поведение приближённых решений системы, найденных численными методами для различных значений экономических параметров.

Основная трудность в этой тематике состоит в том, что компоненты решения системы дифференциальных уравнений (1), судя по всему, в общем случае не могут быть записаны в удобной для изучения их поведения аналитической форме. Тем не менее, мы обнаружили, что если в системе уравнений (1) постоянную x_1 заменить на $\frac{x_2}{\alpha}$, то полученная система допускает решение в квадратурах, но не только она! В [3] мы выяснили, что после такой замены константы x_1 решение в квадратурах допускает целый класс систем, в которых вычитаемое C в первом уравнении заменено на bC, где b – произвольная положительная постоянная. Это обстоятельство даёт возможность заменить первое уравнение системы (1) первым уравнение решаемой в квадратурах системы (5) (вторые уравнения систем (1) и (5) при этом совпадают), выбрав величину b по формуле (7), чтобы обеспечить равенство значений правых частей этих уравнений в начальный момент времени. Последнее должно повлечь за собой малое отличие решений задач Коши для систем (1) и (5) с одинаковыми условиями (6). Теоретическую оценку уклонения решения задачи Коши (1), (6) от решения задачи Коши (5), (6) ещё предстоит получить. Проведенные нами численные эксперименты показывают, что при наиболее востребованных в приложениях значениях экономических параметров α, θ, x_1, x_2 и соотношениях между $f(K_0)$ и C_0 относительное отличие решений упомянутых задач Коши на довольно больших промежутках времени лежит в пределах $1\%-2\%$. Эта погрешность, как часто бывает в математическом моделировании, сопоставима с погрешностью, даваемой самой моделью в описании реально происходящего процесса.

В этой работе мы продемонстрировали эффективность перехода от системы (1) к близкой ей системе (5) в вопросе изучения монотонности решений задачи Коши. Пока мы рассмотрели случай $\theta > 1$. В этом случае нами обнаружено “критическое соотношение” (10) для начальных условий (6), при выполнении которого обе компоненты решения задачи Коши (5), (6) возрастают на всей положительной полуоси (естественно, при выполнении условия (8)). Кроме того, $K(t)$ и $C(t)$ в случае равенства (10) ограничены; их пределы на бесконечности нами найдены.

Таким образом, при произвольном значении параметра $\theta > 1$, мы нашли соотношение между $f(K_0)$ и C_0, выполнение которого влечёт за собой возрастание обеих компонент решения задачи Коши (5), (6). Подчеркнём, что сформулированные выше результаты получены благодаря найденному в [3] интегральному тождеству, в которое входит функция $C(t)$.

В дальнейшем мы планируем продолжить исследование монотонности компонент решения задачи Коши (5), (6): в частности, изучить поведение компонент $C(t)$, $K(t)$ не только в случае $f(K_0) > \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0, но и $f(K_0) < \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0. Заслуживает внимания также задача нахождения или оценки максимальных значений (или точных верхних граней) $K(t)$ и $C(t)$ на положительной полуоси; пока это сделано только при выполнении равенства (10) (см. окончание §2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022;23(4):115-125. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125.*

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея —Касса —Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.*

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея —Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея —Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*

8. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Vol 23(1), С. 118-129. *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.*

9. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model // *http://ciep.itam.mx/˜rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_ model.pdf.*

10. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

11. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: *https://ssrn.com/abstract=899250.*

12. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.

13. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: *http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.*

14. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

15. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

16. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

17. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 *https://eml.berkeley.edu/˜webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf*

18. Эглит Я.Я., Эглите К.Я., Дудин В.С., Юрченко Е.А. Функция потребления и оценивание её параметров по экспереминтальным данным // Транспортное дело России. 2022. No. 2, С. 7-9. DOI: 10.52375/20728689_2022_2_7.

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth”, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory”, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol.23(4), September. pp. 115-125. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125.*

4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey —Kass —Koopmans problem with logarithmic utility function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.*

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey — Kass —Koopmans problem for consumer choice”, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey —Kass —Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey —Kass —Koopmans problem”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*

8. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The consumption function in the Ramsey—-Kass—-Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) *https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.*
9. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model”, 2018, *https://gente.itam.mx/rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*
10. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)”, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)”, *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: *https://ssrn.com/abstract=899250.*
12. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, “When Economic Growth is Less than Exponential”, *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.
13. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model”, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*
14. Romer, D. 2006, “Advanced Macroeconomics. 3rd ed”, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.
15. Robert J. Barro. 1999, “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model”, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
16. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model”, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.
17. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model”, *UC Berkeley Fall*, *https://eml.berkeley.edu/ webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.*
18. Eglit Y., Eglite K., Dudin V., Yurchenko E. 2022, “Consumption function and estimation of its parameters from experimental data”, *Transport business in Russia.* vol. 2, pp. 7-9.

Получено: 10.04.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517.946 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций

М. М. Хасанов , И. Д. Рахимов

Хасанов Музаффар Машарипович — кандидат физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, (г. Ургенч).
e-mail: hmuzaffar@mail.ru
Рахимов Илхом Давронбекович — аспирант, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч).
e-mail: ilxom@urdu.uz

Аннотация

В данной работе рассматривается уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций. Показано, что уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с решением уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций.

Ключевые слова: КдФ отрицательного порядка, самосогласованный источник, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина - Трубовица.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
М. М. Хасанов, И. Д. Рахимов. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 266–275.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517.946 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275

Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions

M. M. Khasanov, I. D. Rakhimov

Khasanov Muzaffar Maksharipovich — candidate of physical and mathematical sciences, Urganch State University (Urganch).
e-mail: hmuzaffar@mail.ru
Rakhimov Ilkhom Davronbekovich — postgraduate student, Urganch State University (Urganch).
e-mail: ilxom@urdu.uz

Abstract

In this paper, we consider the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions. It is shown that the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions can be integrated by the method of the inverse spectral problem. The evolution of the spectral data of the Sturm-Liouville operator with a periodic potential associated with the solution of a negative-order KdV equation with a free term in the class of periodic functions is determined. The results obtained make it possible to apply the inverse problem method to the solution of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions.

Keywords: KdV of negative order, self-consistent source, inverse spectral problem, Dubrovin - Trubovits system of equations.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
M. M. Khasanov, I. D. Rakhimov, 2023, "Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 266–275.

1. Введение

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющей большое прикладное значение, является уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые было установлена в работе [1]. Исследованию уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций посвящены работы [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

В работе [9] В.К. Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций, а в работе [10] изучено уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В работе [11] исследовалось уравнение КдФ со свободным членом, независящим от пространственной переменной, в классе периодических функций.

Большинство исследований касающихся изучению интегрируемых уравнений с самосогласованным источником связаны с нелинейными эволюционными уравнениями положительного порядка.

Изучению уравнения КдФ отрицательного порядка посвящены работы [12, 13]. В частности, Дж. М. Вероски [12] при изучении симметрий и отрицательных степеней рекурсивного оператора получил следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$\begin{cases} q_t = p_x \\ p_{xxx} + 4qp_x + 2q_xp = 0. \end{cases} \tag{1}$$

S.Y. Lou [13] представил дополнительные симметрии, основанные на обратимый рекурсивный оператор системы КдФ, и, в частности, вывел уравнение КдФ отрицательного порядка в следующем виде

$$q_t = 2pp_x, \;\; p_{xx}+qp = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{p_{xx}}{p}\right)_t +2pp_x= 0 \tag{2}$$

Изучение интегрируемых иерархий отрицательного порядка играют важную роль в теории остроконечных солитонов [14, 15]. В работе [16] изучена иерархия уравнения КдФ отрицательного порядка, в частности, уравнений (1) и (2).

В работах [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N-солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения КдФ отрицательного порядка.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + f(t) \\ pq + p_{xx} = 0, \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{4}$$

где $q_0(x)$, $p_0(t)$ и $f(t) \in C[0,\ \infty)$ заданные действительные функции. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p^2(x,t)$, которые π - периодические по переменной x:

$$p^2(x+\pi,t) \equiv p^2(x,t), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), t \geqslant 0, \quad x \in R^1 \tag{5}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} q(x,t) \in C_t^1(t>0) \cap C(t \geqslant 0), \\ p(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C(t \geqslant 0). \end{array} \tag{6}$$

Цель данной работы дать процедуру построения решения $q(x,t)$ задачи (3)-(6), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задачаи для оператора штурма-лиувилля с периодическим коэффициентом

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly \equiv -y'' + (-q(x))y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{7}$$

где $q(x)$ - действительная непрерывная π-периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (7) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$ и , $s'(0,\lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi,\ \lambda) + s'(\pi,\ \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (7) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E = \{\lambda \in R^1 : \ -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\ \} = [\lambda_0, \lambda_1] \bigcup [\lambda_2,\ \lambda_3] \bigcup ... \bigcup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}] \bigcup ....$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n = 1,\ 2,\ ...$ называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} - собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi)$,$y'(0) = y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} - собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$,$y'(0) = -y'(\pi)$) для уравнения (7).

Пусть ξ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ корни уравнения $s(\pi, \lambda) = 0$. Отметим, что ξ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0) = y(\pi) = 0$) для уравнения (7), кроме того выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Числа ξ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ вместе со знаками $\sigma_n = sign\,\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ называются спектральными параметрами задачи (7). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ и границы λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ спектра называются спектральными данными оператора (7). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (7).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x + \tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geqslant 1 \tag{8}$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau, t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t))$$

дают метод решения обратной задачи.

3. Эволюция спектральных параметров

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x, t)$ решение задачи* (3)-(6). *Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$, $n \geqslant 0$ следующего оператора*

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x, t))y = \lambda y, \ \ x \in R^1 \tag{9}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\lambda}_n(t) = -f(t), \quad n \geqslant 0, \tag{10}$$

а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \geqslant 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(0, t)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} - f(t), \quad n \geqslant 1, \tag{11}$$

где знак $\sigma_n(t)$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1}(t),\ \lambda_{2n}(t)]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия:*

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0\,, n \geqslant 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geqslant 1$ *- спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом* $q_0(x)$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы будем использовать метод работы [11]. Вводя обозначение

$$G(x,t) = f(t),$$

уравнение (3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + G(x,t) \\ pq + p_{xx} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Обозначим через $y_n(x,t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$) для уравнения (9), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = -\int_0^\pi q_t(x,t)y_n^2(x,t)dx. \tag{13}$$

Здесь $(\cdot\ ,\ \cdot)$ скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$. Подставляя (12) в (13) находим

$$\dot{\xi}_n = -2\int_0^\pi y_n^2(x,t)pp_x dx - \int_0^\pi y_n^2(x,t)G(x,t)dx. \tag{14}$$

Интегрируя по частям первый интеграл в равенстве (14), имеем

$$2\int_0^\pi y_n^2 pp_x dx = \int_0^\pi y_n^2 d(p^2) = y_n^2 p^2\big|_0^\pi - 2\int_0^\pi y_n y_n' p^2 dx = -2\int_0^\pi y_n y_n' p^2 dx,$$

из уравнения (9) следует следующее равенство

$$y_n = -\frac{1}{\xi_n}(y_n'' + qy_n). \tag{15}$$

Используя эти тождества и второе уравнение (12), получим

$$2\int_0^\pi y_n^2 pp_x dx = \frac{1}{2\xi_n}[(y')_n^2(\pi,t) - (y')_n^2(0,t)]p^2(0,t). \tag{16}$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в равенстве (14):

$$\int_0^\pi G y_n^2 dx = f(t). \tag{17}$$

Подставляя выражения (16) и (17) в (14) получим равенство

$$\dot{\xi}_n = [(y')_n^2(\pi,t) - (y')_n^2(0,t)] \times \left\{-\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t)\right\} - f(t). \tag{18}$$

Используя (18) и равенство

$$(y')^2_n(\pi,t)-(y')^2_n(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\tag{19}$$

получим (11).

Известно, что границы $\lambda_n(t)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ спектра оператора (9) совпадают либо с собственными значениями периодической задачи, либо антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (9). Обозначив через $v_n(x,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (9), действуя вышеприведенным образом, выводим равенства (10). Теорема доказана.

Следствие 1. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\geqslant 1$. В этом случае, система (9) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(\tau,t)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}-f(t),\quad n\geqslant 1.\tag{20}$$

Здесь

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t,\tau)-\lambda}{k^2}.\tag{21}$$

Учитывая формулы следов

$$q(\tau,t)=-\lambda_0-\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)),\tag{22}$$

$$p^2(\tau,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\tau}\frac{\partial\xi_k(s,t)}{\partial t}ds-\int_0^{\tau}f(s)ds+p_0^2(t).\tag{23}$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (3)-(6). Действительно, обозначим через $\lambda_n(t)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, спектральные данные задачи

$$-y''+(-q(x+\tau,t))y=\lambda\,y,\qquad x\in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n^0, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ для уравнения

$$-y''+(-q_0(x+\tau))y=\lambda y,\qquad x\in R^1.$$

Решая уравнения (9) с начальными условиями $\lambda_n(t)|_{t=0} = \lambda_n^0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ находи

$$\lambda_n(t) = \lambda_n^0 - \int_0^t f(s)ds, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\,. \tag{24}$$

Далее, решаем задачу Коши $\xi_n(\tau, t)\,|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau, t)\,\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ для системы уравнений Дубровина (20). По формуле следов (22) находим решение $q(x, t)$ задачи (3)-(6) и по формуле (23) определим $p^2(x, t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett.. 1967. Vol. 19, № 19, P. 1095-1097.

2. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I // Функц. анализ и прил.. 1974. Т. 8, № 3. С. 54-66.

3. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 12, С. 2131-2143.

4. Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза // Мат. сб.. 1974. Т. 95, № 3. С. 331-356.

5. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и прил.. 1975. Т. 9, № 3. С. 41-51.

6. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза // Теорет. мат. физ.. 1975. Т. 23, № 1. С. 51-68.

7. Lax P. Periodic solutions of the KdV equations // Lecture in Appl. Math. AMS. 1974. Vol. 15. P. 85-96.

8. Lax P. Periodic Solutions of the KdV equation // Comm. Pure and Appl. Math.. 1975. Vol. 28. P. 141-188.

9. Мельников В.К. Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Вриса с самосогласованным источником // Препринт. Дубна. 1988.

10. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теорет. мат. физ.. 2010. Т. 164, № 2. С. 214-221.

11. Яхшимуратов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций // Уфимский матем. журнал. - Уфа. 2011. Т. 3. № 4. С. 144-150.

12. Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators // J. Math. Phys. 1991. Vol. 32. P. 1733-1736.

13. Lou S.Y. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35. P. 2390-2396.

14. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability, in symmetry and perturbation theory // edited by A. Degasperis and G. Gaeta, World Scientific. 1999. P. 23-37.

15. G. P., Qiao Z.J. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis-Procesi equation under inhomogeneous boundary condition // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10. P. 205-225.

16. Qiao Z.J., Fan E.G. Negative-order Kortewe-de Vries equations // Phys. Rev. 2012. Vol. 86. P 016601.

17. Chen J.B. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.. 2018. Vol. 15. No. 03. P. 1-34.

18. Qiao Z.J., Li J.B. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // Euro. Phys. Lett. 2011. Vol. 94. P. 50003.

19. Zhao S., Sun Y. A Discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation // Z. Naturforsch. 2016. Vol. 71(12)A. P. 1151-1158.

20. Chen J. Quasi-periodic solutions to the negative-order KdV hierarchy // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2019. Vol. 15. P. 1850040.

21. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative Order KdV equation with no solitary traveling waves // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 48.

22. Wazwaz A. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator // Waves Random Complex Media. 2017. Vol. 27. P. 768.

23. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm-Liouville operators with frozen argument // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 131. P. 108035.

24. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // В 2-х т. - М.: ИЛ. 1961. Т. 2. С. 556.

25. Magnus W., Winkler W. Hill's equation // New York: Interscience Wiley. 1966.

26. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34-37.

27. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб.. 1975. Т. 97. С. 540-606.

28. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure and Appl. Math.. 1977. Vol. 30. P. 321-337.

29. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака // М.: “Наука” 1988.

REFERENCES

1. Gardner C.S. Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. 1967, “Method for solving the Korteweg-de Vries equation“, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, № 19, pp. 1095-1097.

2. Novikov S.P. 1974, “The periodic problem for the Korteweg—de vries equation“, *Funct Anal Its Appl*, vol. 8, pp. 236–246.

3. Dubrovin B.A., Novikov S.P. 1974, Periodic and conditionally periodic analogues of multisoliton solutions of the Korteweg-de Vries equation“, *ZhETF.*, vol. 67, № 12, pp. 2131-2143.

4. Marchenko V.A. 1974, “Korteweg-de Vries periodic problem“, *Math. Sat.*, vol. 95, № 3, pp. 331-356.

5. Dubrovin B.A. 1975, “Periodic Problem for the Korteweg-de Vries Equation in the Class of Finite-Gap Potentials“, *Funct. analysis and application*, vol. 9, № 3, pp. 41-51.

6. Its A.R., Matveev V.B. 1975, “Finite-gap Schrödinger operators and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation“, *Teoret. mat. Phys.*, vol. 23, № 1, pp. 51-68.

7. Lax P. 1974, “Periodic solutions of the KdV equations“, *Lecture in Appl. Math. AMS.*, vol. 15, pp. 85-96.

8. Lax P. 1975, “Periodic Solutions of the KdV equation“, *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 28, pp. 141-188.

9. Melnikov V.K. 1988, “Method for integrating the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source“, *Preprint. Dubna.*.

10. Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. 2010, “On the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions“, *Teoret. mat. Phys.*, vol. 164, № 2, pp. 214-221.

11. Yakhshimuratov A.B. 2011, “Integration of the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions“, *Ufimskii Matem. magazine. - Ufa.*, vol. 3, № 4, pp. 144-150.

12. Verosky J.M. 1991, “Negative powers of Olver recursion operators“, *J. Math. Phys.*, vol. 32, pp. 1733-1736.

13. Lou S.Y. 1994, “Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations“, *J. Math. Phys.*, vol. 35, pp. 2390-2396.

14. Degasperis A., Procesi M. 1999, “Asymptotic integrability, in symmetry and perturbation theory“, *edited by A. Degasperis and G. Gaeta, World Scientific.*, pp. 23-37.

15. G. P., Qiao Z.J. 2007, “Cuspons and smooth solitons of the Degasperis-Procesi equation under inhomogeneous boundary condition“, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry.*, vol. 10, pp. 205-225.

16. Qiao Z.J., Fan E.G. 2012, “Negative-order Kortewe-de Vries equations“, *Phys. Rev.*, vol. 86, pp. 016601.

17. Chen J.B. 2018, “Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation“, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 15, № 03, pp. 1-34.

18. Qiao Z.J., Li J.B. 2011, “Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions“, *Euro. Phys. Lett.*, vol. 94, pp. 50003.

19. Zhao S., Sun Y. A 2016, “Discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation“, *Z. Naturforsch.*, vol. 71(12)A. pp. 1151-1158.

20. Chen J. 2019, “Quasi-periodic solutions to the negative-order KdV hierarchy“, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 15, pp. 1850040.

21. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. 2022, “Negative Order KdV equation with no solitary traveling waves“, *Mathematics.*, vol. 10, pp. 48.

22. Wazwaz A. 2017, “Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator“, *Waves Random Complex Media.*, vol. 27, pp. 768.

23. Kuznetsova M. 2022, “Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm-Liouville operators with frozen argument“, *Applied Mathematics Letters.*, vol. 131, pp. 108035.

24. Titchmarsh E.Ch. 1961, “Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations“, *In 2 vols. - M.: IL.*, vol. 2, pp. 556.

25. Magnus W., Winkler W. 1966, “Hill’s equation“, *New York: Interscience Wiley.*.

26. Stankevich I.V. 1970, “On a Problem of Spectral Analysis for the Hill Equation“, *DAN SSSR.*, vol. 192, № 1, pp. 34-37.

27. Marchenko V.A., Ostrovsky I.V. 1975, “Characterization of the spectrum of the Hill operator“, *Math. Sat.*, vol. 97. pp. 540-606.

28. Trubowitz E. 1977, “The inverse problem for periodic potentials“, *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 30, pp. 321-337.

29. Levitan B.M., Sargsyan I.S. 1988, “Sturm-Liouville and Dirac operators“, *M.: Nauka.*

Получено: 13.02.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-276-283

О полиадических числах[1]

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Кольцо полиадических чисел можно определять несколькими способами. Можно ввести метризуемую топологию на кольце целых чисел,считая множество идеалов (m) полной системой окрестностей нуля. Полной системой окрестностей в кольце целых чисел является совокупность множеств вида $a+(m)$. Операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии и кольцо целых чисел с этой топологией является топологическим кольцом. Пополнение полученного топологического кольца целых чисел - это кольцо полиадических чисел. Равносильное определение - обратный (проективный) предел

$$\varprojlim_{m} \mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Напоним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел Q_p . Обозначая сумму этого ряда в поле Q_p символом $\lambda^{(p)}$, мы получаем, что любое полиадическое число λ можно рассматривать, как элемент прямого произведения колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p. Верным является и обратное утверждение, означающее, что кольцо целых полиадических чисел совпадает с этим прямым произведением. Однако доказательства последнего утверждения обнаружить не удалось. Цель рассматриваемой заметки - восполнить этот пробел. Кроме того, рассказано о некоторых применениях полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадическое число,прямое произведение,

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. О полиадических числах // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 276–283.

---

[1] Работа выполнена при поддержке проекта Ведущие научные школы МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-276-283

On polyadic numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The ring of polyadic numbers can be defined in several ways. One can introduce a metrizable topology on the ring of integers by counting the set of ideals (m) by a complete system of neighborhoods of zero. The complete system of neighborhoods in the ring of integers is a collection of sets of the form $a + (m)$. The operations of addition and multiplication are continuous in this topology and the ring of integers with this topology is a topological ring. Completion of the resulting topological ring of integers - this is the ring of polyadic numbers. An equivalent definition is the inverse (projective) limit

$$\varprojlim_{m} \mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Let's recall that the canonical decomposition of the polyadic number λ has the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of $p-$ adic numbers Q_p .Denoting the sum of this series in the field Q_p with the symbol $\lambda^{(p)}$, we get that any polyadic number λ can be considered as an element of the direct product of rings of integer $p-$ adic numbers Z_p for all primes p. The converse statement is also true, meaning that the ring of polyadic integers coincides with this direct product. However, evidence of the latter claim could not be found. The purpose of this note is to fill this gap. In addition, some applications of polyadic numbers are described.

Keywords: polyadic number,direct product

Bibliography: 20 titles.

For citation:
V. G. Chirskii, 2023, “On polyadic numbers” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 276–283.

1. Введение

Одно из определений кольца целых полиадических чисел строится следующим образом. На кольце целых чисел можно ввести топологию, считая множество идеалов (m) ((m) обозначает идеал, состоящий из целых чисел, делящихся на число m) полной системой окрестностей нуля. Полной системой окрестностей в кольце целых чисел является совокупность множеств вида $a + (m)$. Операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии и кольцо целых чисел с этой топологией является топологическим кольцом. Введённую топологию можно метризовать, положив

$$\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}(\theta_m(x,y))/2^m,$$

где $\theta_m(x,y)=0$,если $x-y$ делится на m и $\theta_m(x,y)=1$,если $x-y$ не делится на m. Последовательность целых чисел a_n называется фундаментальной, если для любого натурального числа M найдётся такое натуральное число N , что для всех $m,n>N$ выполняется сравнение $a_m\equiv a_n(modM!)$. Последовательность целых чисел b_n называется нулевой, если для любого натурального числа M найдётся такое натуральное число N , что для всех $m>N$ выполняется сравнение $a_m\equiv 0(modM!)$. Фундаментальные последовательности эквивалентны, если их разность является кулевой последовательностью. Полиадическим числом называется класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей целых чисел. Полиадические числа были введены в рассмотрение в 1925 г. Прюфером [1], также см. [2]. На множестве полиадических чисел вводятся операции сложения и умножения, придающие этому множеству структуру коммутативного кольца с единицей и с делителями нуля. Эквивалентное определение кольца полиадических чисел - обратный (проективный) предел. Напомним, что частично упорядоченное множество представляет собой пару $(I,\preceq)$, где $I-$ это множество, а $\preceq$ – рефлексивное $a\preceq a$,транзитивное (из $a\preceq b$ и $b\preceq c$ следует $a\preceq c$)и точное (из $a\preceq b$ и $b\preceq a$ следует $a=b$) бинарное отношение на множестве I. Проективной системой колец называется множество колец R_i, индексы которых принадлежат индуктивному множеству I, такое, что для каждой пары индексов $i\preceq j$ задан гомоморфизм $\psi_{ij}:R_j\mapsto R_i$, удовлетворяющий условиям:$\psi_{ii}-$ тождественное отображение и для любых индексов с условием $i\preceq j\preceq k$ имеем $\psi_{ij}\circ\psi_{jk}=\psi_{ik}$. Кольца $\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}$ образуют проективную систему колец относительно отображений

$$\mathrm{Z}/(m+1)!\mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Кольцо полиадических чисел представляет собой обратный предел

$$\varprojlim_{m}\mathrm{Z}/m!\mathrm{Z}.$$

Легко видеть, что множества $m!\mathrm{Z}$ образуют базу окрестностей нуля. Поэтому определение кольца полиадических чисел, приведенное в начале, совпадает с определением, использующим обратный предел. Каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!, a_n\in\mathrm{Z}, 0\le a_n\le n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел Q_p . Обозначая сумму этого ряда в поле Q_p символом $\lambda^{(p)}$, мы получаем, что любое полиадическое число λ можно рассматривать, как элемент прямого произведения колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p. Верным является и обратное утверждение, означающее, что кольцо целых полиадических чисел совпадает с этим прямым произведением. Однако доказательства последнего утверждения обнаружить не удалось. Цель рассматриваемой заметки - восполнить этот пробел.

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть*

$$p_1<p_2<...-$$

упорядоченное множество всех простых чисел. Для любых заданных целых p_i- *адических чисел* $\Lambda_i, i=1,2,...$ *существует полиадическое число* λ *такое, что* $\lambda^{(p_i)}=\Lambda_i, i=1,2,....$

Иными словами, кольцо полиадических чисел совпадает с прямым произведением колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p.

Доказательство.Для доказательства этой теоремы предположим, что

$$\Lambda_i=\sum_{t=0}^{\infty}a_{ti}p_i^t, \Lambda_i^{(k)}=\sum_{t=0}^{k}a_{ti}p_i^t, i=1,2,...$$

Рассмотрим произвольное натуральное число M и обозначим

$$p_1<p_2<...<p_{k(M)}$$

все простые числа, не превосходящие числа M. Применяя китайскую теорему об остатках [3], теорема 5.2 ,мы получаем, что существуют натуральные числа

$$x_1^{(M)},...,x_{k(M)}^{(M)}$$

такие, что

$$x_l^{(M)}\equiv 1(modp_l^M), x_l^{(M)}\equiv 0(modp_r^M), r,l=1,2,...,k(M), r\neq l. \tag{1}$$

При каждом значении M определим натуральное число a_M равенством

$$a_M=\Lambda_1^{(M)}x_1^{(M)}+...+\Lambda_{k(M)}^{(M)}x_{k(M)}^{(M)}.$$

Докажем, что последовательность чисел a_M фундаментальная и что её предел - искомое полиадическое число. Для этого зафиксируем число M и рассмотрим числа $m>M, n>M$. Им соответствуют числа

$$a_m=\Lambda_1^{(m)}x_1^{(m)}+...+\Lambda_{k(M)}^{(m)}x_{k(M)}^{(m)}+....+\Lambda_{k(m)}^{(m)}x_{k(m)}^{(m)},$$

$$a_n=\Lambda_1^{(n)}x_1^{(n)}+...+\Lambda_{k(M)}^{(n)}x_{k(M)}^{(n)}+....+\Lambda_{k(n)}^{(n)}x_{k(n)}^{(n)}.$$

Разность этих чисел имеет вид

$$a_m-a_n=(\Lambda_1^{(m)}x_1^{(m)}-\Lambda_1^{(n)}x_1^{(n)})+...+(\Lambda_{k(M)}^{(m)}x_{k(m)}^{(m)}-\Lambda_{k(M)}^{(n)}x_{k(M)}^{(n)})+$$

$$+\Lambda_{k(M)+1}^{(m)}x_{k(M)+1}^{(m)}+....+\Lambda_{k(m)}^{(m)}x_{k(m)}^{(m)}-\Lambda_{k(M)+1}^{(n)}x_{k(M)+1}^{(n)}-....-\Lambda_{k(n)}^{(n)}x_{k(n)}^{(n)}.$$

Пусть $l\leq k(M)$. Если $r>k(M)$, то, согласно (1)

$$x_r^{(M)}\equiv 0(modp_l^M), r=k(M)+1,...,\max(k(m),k(n)), r\neq l. \tag{2}$$

Если $s\leq k(M)$, но $s\neq l$, то , согласно (1),

$$\Lambda_s^{(m)}x_s^{(m)}\equiv 0(modp_l^M), \Lambda_s^{(n)}x_s^{(n)}\equiv 0(modp_l^M)$$

и, следовательно,

$$\Lambda_s^{(m)}x_s^{(m)}-\Lambda_s^{(n)}x_s^{(n)}\equiv 0(modp_l^M).$$

Рассмотрим, далее, разность

$$\Lambda_l^{(m)}x_l^{(m)}-\Lambda_l^{(n)}x_l^{(n)}.$$

Согласно (1)

$$x_l^{(m)}\equiv 1(modp_l^m)\equiv 1(modp_l^M), x_l^{(n)}\equiv 1(modp_l^n)\equiv 1(modp_l^M).$$

По определению чисел $\Lambda_i^{(k)} = \sum_{t=0}^{k} a_{ti} p_i^t$,

$$\Lambda_l^{(m)} x_l^{(m)} = \sum_{t=0}^{m} a_{ti} p_i^t x_l^{(m)} \equiv \sum_{t=0}^{M} a_{ti} p_i^t (mod p_l^M),$$

$$\Lambda_l^{(n)} x_l^{(n)} = \sum_{t=0}^{n} a_{ti} p_i^t x_l^{(n)} \equiv \sum_{t=0}^{M} a_{ti} p_i^t (mod p_l^M).$$

Таким образом,

$$\Lambda_l^{(m)} x_l^{(m)} - \Lambda_l^{(n)} x_l^{(n)} \equiv 0 (mod p_l^M). \tag{3}$$

Следовательно,согласно (2),(3), для любых $m > M, n > M$ натуральное число $a_m - a_n$ делится на каждое из чисел $p_l^M, l = 1, ..., k(M)$. Поэтому $a_m - a_n$ делится на число $M!$, так как степень, в которой простое число p, меньшее M, входит в разложение числа $M!$ на простые множители, равна

$$\frac{M - S_M}{p - 1},$$

где S_M обозначает сумму цифр в $p-$ ичном разложении числаM, а эта величина меньше, чем M. Таким образом, последовательность чисел a_n является фундаментальной. Пусть она задает полиадическое число λ.

Осталось доказать, что для любого простого числа p_i выполняется равенство $\lambda^{p_i} = \Lambda^i$. Это сразу следует из того, что частичная сумма a_M ряда λ в поле поле p_i- адических чисел Q_{p_i} равна $\Lambda_i^{(M)}$. Предел этих частичных сумм равен Λ_i. Теорема доказана.

3. Заключение

Теория полиадических чисел развивалась и применялась в нескольких направлениях.

Элементы классического анализа и теории аналитических функций в полиадической области, теория меры и интеграла, их приложения к задачам вероятностной теории чисел приведены в работах [3, 4].

Полиадические числа широко применяются в теории абелевых групп [5]-[10] . Достаточно заметить, что $Z-$адическое пополнение любой абелевой группы A, т.е. соответствующий обратный предел, является модулем над кольцом полиадических чисел. Также любая периодическая абелева группа является модулем над кольцом полиадических чисел. Отметим псевдорациональные числа - элементы кольца полиадических чисел, для которых существуют целые числа $a, b, b \neq 0$такие, что для всех, кроме конечного числа, простых чисел p в кольце Z_p выполняется равенство $ba^{(p)} = a$.

Доказанная в работе теорема о том, что кольцо полиадических чисел совпадает с прямым произведением колец целых $p-$ адических чисел Z_p по всем простым числам p составляет основу многих исследований по теории трансцендентных чисел в полиадической области [11]-[20]. Полиадическое число λ называется бесконечно трансцендентным, если для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле Q_p выполняется неравенство $P(\lambda^p) \neq 0$. Рассмотрим интересный пример. Пусть в обозначениях теоремы $\Lambda_n = n$. Соответствующее полиадическое число λ является бесконечно трансцендентным, так как многочлен не может обратиться в ноль на бесконечном множестве точек.При этом все его координаты - целые числа! Другой важный пример бесконечно трансцендентного числа - ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!$. Бесконечная трансцендентность этого числа доказана в работе [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prüfer H. Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie.//Math.Ann.94.-1925.-№ 3-4.-pp.-198-243.
2. Постников А. Г. введение в аналитическую теорию чисел.-М.: «Наука».-1971.-416 с.
3. Новоселов Е. В. Основы классического анализа и теории аналитических функций в полиадической области.// Известия вузов. Математика.-1963.-№ 5.-с.-71-88.
4. Новоселов Е. В. Новый метод в вероятностной теории чисел.// ИАН СССР, сер. Математика.-1964.-т.-28.-№ 2.-с.-307-364.
5. Fomin A. A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers.//Abelian Groups and Modules.Trends in Math. Birkhäeuser,Basel.-1999.-pp.87-100.
6. Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups.//Abelian Groups, Rings and Modules. Amer. Math. Soc. Series Contemporary Mathematics.-2001.-v.273.-pp.117-128.
7. Крылов П. А.,Пахомова Е. Г. Абелевы группы и регулярные модули.//Матем.заметки.-2001.-т.69.-№ 3.-с.402-411.
8. Тимошенко Т. А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел.//Журнал СФУ, сер.Математика и физика,-2011.-т.4.-№ 4.-с.198-214.
9. Царев А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы.// Алгебра и анализ,-2006.-т.18.-№ 4.-с.541-550.
10. Царев А. В.Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы.// СФУ,матем. журн.-2008.-т.49.-№ 4.-с.945-953.
11. Bertrand D., Chirskii V. G.,Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series.//Annales Fac.Sci.Toulouse.-2004.-v.13.-№ 2.-pp.241-260.
12. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, № 3, pp.286-305.
13. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, № 2, pp.175-184.
14. Чирский В. Г.Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494- с. 69-70.
15. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter. //Russ. J. Math. Phys. 2021.- v.28, № 3, pp.293-302.
16. Чирский В. Г.Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.505.- с. 63-65.
17. Чирский В. Г.Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическим трансцендентными параметрами.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506- с. 95-107.
18. Юденкова Е. Ю.Бесконечная линейная и алгебраическая независимость знгачений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346.

19. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей// Чебышевский сборник. -2019.-т.20.- вып. 2.-с. 383 – 390.

20. Крупицын Е. С.Арифметические свойства рядов некоторых классов.//Чебышевский сборник. -2019.-т. 20.- вып. 2.-с. 374 – 382.

REFERENCES

1. Prüfer H.1925. “Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie“,*Math.Ann*, Vol, 94,№ 3-4. pp.198-243.

2. Postnikov A.G. 1971.“Introduction to Analytic Number Theory “,*Nauka.*,416 pp.

3. Novoselov. E.V.1963.“A new method in probabilistic number theory.“,*Izvestiya vuzov, Math.*, № 5, pp.71-78.

4. Novoselov. E.V.1964.“Fundamentals of classical analysis and theory of analytic functions in polyadic domain.“*IAN SSSR, Math.*,Vol.28 № 2, pp.307-364.

5. Fomin A.A.1999. “Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *Abelian Groups and Modules.Trends in Math. Birkhäeuser,Basel*, pp.87-100.

6. Fomin A.A.2001. “Quotient divisible mixed groups“, *Abelian Groups, Rings and Modules. Amer. Math. Soc. Series Contemporary Mathematics*, Vol.273. pp.117-128.

7. Krylov P.A.,Pahomova E.G. 2001. “ Abelian groups and regular modules“, *(*Math. Zametki). Vol. 69.№ 3.pp.402-411.

8. Timoshenko T.A. V. G.,2011. “Projective modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *(*J.SFU, nath.,phys.),Vol.4. № 4,pp.541-550.

9. Tsarev A. V. 2006. “Modules over the ring of pseudo-rational numbers and factor divisible groups“, *Algebra and Analysis.*, Vol.18, № 4, pp.945-953.

10. Tsarev A. V. 2008. “ Certain morphisms of modules over the ring of pseudo-rational numbers“, *SFU.Math.J*, Vol.49, № 4, pp.198-214.

11. Bertrand D., Chirskii V.G.,Yebbou. J. 2004.“ Effective estimates for global relations on Euler-type series“*Annales Fac.Sci.Toulouse.*-v.13.-№ 2.-pp.241-260.

12. Chirskii V.G.2019. “ Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers.“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, № 3, pp.286-305.

13. Chirskii V.G.2020. “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, № 2, pp.175-184.

14. Chirskii V.G.2020. “ Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter“, *Dokl. Math.*, Vol.102, № 2, pp.412-413.

15. Chirskii V.G.2021. “ Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter“, *Russ.J.Math.Phys.*, Vol.28, № 3, pp.293-302.

16. Chirskii V.G.2022. “ New Problems in the Theory of Transcendental Polyadic Numbers“, *Dokl. Math.*, Vol.106, № 1, pp.265-267.

17. Chirskii V.G.2022. “ Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameter “, *Dokl. Math.*, Vol.106, № 2, pp.386-397.

18. Yudenkova E. Yu.2021.“ Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point .“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp.334-346.

19. Matveev V. Yu. 2019. “ Properties of elements of direct products of fields“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp.383-390.

20. Krupitsin E. S. 2019. “ Arithmetic properties of series of certain classes“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp.374-382.

Получено: 03.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-284-294

И. М. Виноградов в Императорском Санкт-Петербургском университете: к постановке проблемы

Т. Г. Бобкина, М. А. Королёв

Бобкина Татьяна Геннадьевна — Мемориальный дом-музей академика И.М. Виноградова (г. Великие Луки).
e-mail: museumimv1891@mail.ru
Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: hardy_ ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

В работе делается первая попытка осветить студенческий период биографии выдающегося советского математика, Героя Социалистического Труда академика Ивана Матвеевича Виноградова. В частности, на основании данных личного дела студента Императорского Санкт-Петербургского университета И.М. Виноградова выявлены адреса, по которым проживал будущий академик в Санкт-Петербурге в период с 1910 по 1914 гг. Заметка представляет собой незначительно изменённое содержание доклада, подготовленного авторами для Краеведческой конференции «Великолукская история в лицах», посвящённой жизни и деятельности выдающихся великолучан, Году науки и технологий и проведённой 18 ноября 2021 г. в г. Великие Луки при поддержке Комитета культуры Администрации города Великие Луки, Общественного совета по вопросам историко-культурного наследия, Великолукского городского краеведческого общества и Центральной городской библиотеки им. М.И. Семевского.

Текст доклада (с другим набором иллюстраций) был опубликован (после подачи первоначального варианта в «Чебышевский сборник») в краеведческом альманахе «Великолукский вестник»[1] и приводится здесь с любезного разрешения главного редактора «Великолукского вестника» Д.А. Белюкова.

Ключевые слова: академик И. М. Виноградов, Санкт-Петербург, Императорский Санкт-Петербургский университет, физико-математический факультет, Лесной, Зверинская улица, Васильевский остров, Петроградская сторона, Широкая улица, Малый проспект.

Для цитирования:
Т. Г. Бобкина, М. А. Королёв. И. М. Виноградов в Императорском Санкт-Петербургском университете: к постановке проблемы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 284–294.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-284-294

I. M. Vinogradov at Saint Petersburg Emperor University: to the problem stating

T. G. Bobkina, M. A. Korolev

Bobkina Tatiana Gennad'evna — Memorial House Museum of Academician I. M. Vinogradov (Velikiye Luki).
e-mail: museumimv1891@mail.ru
Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Abstract

This paper covers the student biography period of the outstanding Soviet mathematician, twice Hero of Socialist Labour academician Ivan Matveevich Vinogradov. In particulary, the personal matter of the student of the Saint Petersburg Emperor University I.M. Vinogradov from St. Petersburg Historical archive allows one to reveal the list of his addresses in St. Petersburg during 1910-1914. This paper is a slight modification of the report presented by the authors at the local history conference «The history of Velikiye Luki in faces» dedicated to the life and work of outstanding citizens of Velikiye Luki and to the Year of science and technologies. This conference took place in Velikiye Luki at November 18, 2021 under the support of the Cultural commitee of Velikiye Luki Administration, Public Council on Historical and Cultural Heritage, the Local history society of Velikiye Luki and Central City Library of M. I. Semevsky.

The text of the report (with the different set of photos) was published after the submission to «Chebyshevskii Sbornik» in annual local history almanac «Velikiye Luki Bulletin» and is posted here with kindly permission of D.A. Belyukov, the chief editor of the bulletin.

Keywords: academician I. M. Vinogradov, Saint Petersburg, Saint Petersburg Emperor University, Faculty of Physics and Mathematics, Lesnoy, Zverinskaya street, Vasilyevsky Island, Petrograd Side, Shirokaya street, Maly Prospekt.

For citation:
T. G. Bobkina, M. A. Korolev, 2023, "I. M. Vinogradov at Saint Petersburg Emperor University: to the problem stating" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 284–294.

В прошлом году исполнилось 130 лет со дня рождения выдающегося советского математика, Героя Социалистического Труда академика Ивана Матвеевича Виноградова, уроженца Великолукского уезда. Это событие широко отмечалось общественностью города Великие Луки. Одним из ключевых мероприятий этого празднования стала научная конференция, проведённая Мемориальным домом-музеем академика И.М. Виноградова совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова (Москва) 13-17 сентября 2021 года.

Научное наследие И.М. Виноградова ещё долго сохранит свою актуальность. Его идеи и методы будут востребованы не одним поколением математиков. Велик интерес и к личности Ивана Матвеевича. Об этом свидетельствует, в частности, включение Мемориального дома-музея в новые туристические маршруты, а также тот успех, которым пользуется изданная в 2011 г. книга «Иван Матвеевич Виноградов»[2]. Это богато иллюстрированное издание увидело свет благодаря совместным усилиям сотрудников Мемориального дома-музея, издательства

«РМП» (г. Ярославль) и Математического института им. В.А. Стеклова, директором которого И.М. Виноградов был без малого полвека. Уникальные фотографии, яркое, лаконичное изложение словно переносят читателя то в великолукский дом родителей учёного — протоиерея Матвея Авраамовича и матушки Александры Фёдоровны, то в рабочий кабинет академика в Математическом институте, а то и в альпинистские лагеря Кавказа. К сожалению, до сих пор не существует подробного жизнеописания Ивана Матвеевича. Его составление — сложная и актуальная задача, решение которой требует совместных усилий историков науки, математиков, музейных и архивных работников, краеведов.

В частности, слабо освещён в публикациях период пребывания И.М. Виноградова на физико-математическом факультете Императорского Санкт-Петербургского (с 1914 г. — Петроградского) университета. Но именно этот период сыграл ключевую роль в формировании Ивана Матвеевича как учёного. В годы студенчества (1910-1914) он основательно знакомится с трудами своих великих предшественников — Л. Эйлера, О.Л. Коши, К.Ф. Гаусса, П.Г.Л. Дирихле, П.Л. Чебышёва и др., начинает размышлять над трудными задачами аналитической теории чисел и в итоге избирает эту область математики в качестве будущей профессии. В период подготовки к профессорскому званию (от окончания университетского курса весной 1914 г. до отъезда в Пермь в 1918 г.) И.М. Виноградов добивается выдающихся успехов в задачах, связанных с оценками сумм характеров, распределением дробных долей вещественных функций и др. и через это оказывается в числе ведущих математиков своего времени.

Цель настоящей статьи — рассказать о первых шагах, предпринятых её авторами по заполнению лакуны в ранней биографии великого учёного.

Катализатором этой работы стало обнаружение в 2018 г. в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова переплетённой ксерокопии рукописи студенческой работы И.М. Виноградова «Суммы Гаусса и их приложение к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов»[3]. В этой работе, написанной под научным руководством приват-доцента Санкт-Петербургского университета Якова Викторовича Успенского (1883-1947) и датированной 1914 г., И.М. Виноградов излагает три различных доказательства закона взаимности, найденных Коши, Гауссом и Дирихле. Несмотря на то, что она не является самостоятельным научным исследованием, её внимательное изучение позволяет хотя бы отчасти реконструировать круг научного чтения молодого Ивана Матвеевича, а также понять, труды каких учёных сформировали его математические «вкусы», заметнее всего повлияли на его математические интересы и в итоге привели к выбору аналитической теории чисел как будущей специальности[4]. Руководствуясь этими соображениями, второй из авторов подготовил к печати текст работы, снабдив его необходимыми комментариями[5].

Другой важной вехой на пути исследования биографии И.М. Виноградова стало знакомство с его студенческим личным делом, хранящимся в Центральном государственном историческом архиве Санкт-Петербурга (ЦГИА СПб)[6]. Несмотря на сравнительно небольшой объём, материалы этого дела позволяют составить представление о некоторых сторонах студенческой жизни будущего академика. Ниже мы коснёмся лишь одной из них, связанной с выявлением адресов Северной столицы, по которым в 1910-1914 гг. проживал Иван Матвеевич.

Возможно, вопросы такого рода не являются первостепенными в исследовании биографии учёного-математика (в отличие, скажем, от биографии художника или литератора). Однако их важность представляется авторам несомненной. Во-первых, именно такая «привязка» ко времени и конкретному месту тех или иных событий в жизни давно ушедшего человека способна оживить в нашем сознании его образ, сделать чуть более близким и понятным для нас. Иными словами, исследование такого рода способно породить в нас драгоценное чувство сопричастности. Во-вторых, знания такого рода могут оказать и практическую помощь, если в будущем будет принято решение об увековечении памяти И.М. Виноградова в Санкт-Петербурге.

Успешно окончив 3 июня 1910 года дополнительный (7-й) класс Великолукского реального училища и выдержав 25 августа того же года экзамен по латыни за восьмилетний курс мужской гимназии, 1 сентября И.М. Виноградов подаёт прошение на имя ректора[7] о зачислении в университет: «...покорнейше прошу Ваше Превосходительство принять меня в число студентов Математического Отделения Физико-Математического Факультета. При сем прилагаю следующие документы: аттестат за 6 классов реального училища за № 929, свидетельство за дополнительный (7-й) класс за № 497, свидетельство о личности за № 9118, свидетельство о приписке к призывному участку за № 1008, послужной список отца, метрическую выпись за № 56, 3 фотографические карточки»[8]. Просителем была внесена необходимая сумма (25 рублей), и уже 7 сентября прошение было удовлетворено.

Из этого же документа становится известен первый адрес И.М. Виноградова в Санкт-Петербурге: Лесной, Малая Спасская, дом № 14, квартира 10. Лесной — один из районов Санкт-Петербурга по дореволюционному административно-территориальному делению — получил своё название по основанному здесь ещё в 1803 г. Лесному институту. На рубеже XIX–XX столетий Лесной являлся «уникальным сочетанием дачного предместья и научного пригорода..., полугородом-полупригородом, уютным, тихим, со своим особым ритмом жизни»[9].

Второстепенная магистраль Лесного, Малая Спасская улица тянулась от границ города на северо-восток, до Старо-Парголовского проспекта. Дом № 14, где первоначально квартировал Иван Матвеевич, принадлежал Ольге Алексеевне Блохиной[10]. В 1914 г. (видимо, по смерти владелицы) он перешёл в собственность братства во имя свв. апостолов Петра и Павла. Здание дома до наших дней не дошло; остатки старинной (преимущественно деревянной) застройки исчезли здесь ещё в 1960-е гг. Тогда же Малая Спасская улица была переименована в ул. Карбышева[11].

Как отмечалось выше, документы дела позволяют установить, как менялся петербургский адрес И.М. Виноградова за годы учёбы. Будучи студентом университета, Иван Матвеевич имел право на отсрочку от призыва на воинскую службу сроком на 4 года (до 20 августа 1914 г.). Свой студенческий статус требовалось периодически подтверждать. Соответствующая отметка-штамп «явлен» с названием полицейской части города, номером участка и вписанным от руки адресом проставлялась на особом бланке. Такой бланк имеется и в деле И.М. Виноградова[12].

Дом А.А. Сталь фон Гольштейна. Зверинская ул., 34. Фото М.В. Королёвой. Январь 2022 г.

Первые две отметки, датированные 7 сентября 1912 г. и 22 января 1913 г., указывают следующий адрес Ивана Матвеевича: 1-й участок Петербургской части, Зверинская улица, дом № 34. Этот доходный дом, построенный в 1904 г. по проекту архитектора Леона Вильгельмовича Богусского[13], принадлежал барону Александру Анатольевичу Сталь фон Гольштейну (1863-1917)[14]. Последний проживал в доме № 4 по Максимиллиановскому переулку; ему же принадлежали доходные дома на улицах Подольская (№ 26) и Большая Пушкарская (№ 35)[15].

Несколько месяцев спустя Иван Матвеевич переехал на Васильевский остров, о чём свидетельствует третья отметка, датированная сентябрём 1913 г. К сожалению, улица в отметке не указана, а имеющиеся данные (2-й полицейский участок Васильевской части, дом № 53) не позволяют восстановить точный адрес: в этом участке было несколько домов с таким номером. В их числе — дома по 2-й, 4-й, 8-й, 10-й и 12-й линиям. Ещё один дом (по 6-й линии) имел двойную нумерацию: 53/15.[16]

В последующие полгода молодой учёный переменял место жительство как минимум дважды, однако все съёмные квартиры располагались в доходных домах по Широкой улице (с 1923 г. — ул. Ленина[17]), что на Петроградской стороне: № 20/66, квартира 43 (сентябрь 1913), № 40/18, квартира 18 (январь-апрель 1914)[18].

Оба здания сохранились до наших дней[19]. Второе принадлежало домовладельцу Александру Аксёновичу (Авксентьевичу) Голубеву. Это пятиэтажное строение в стиле «эклектика» на углу Широкой улицы и Геслеровского переулка было возведено в 1901-1902 гг. по проекту техника-строителя, архитектора Городской управы Петра Львовича Спокойского-Францевича[20]. Во владении Голубева находились также дома на улицах Колпинской (№ 20) и Большой Ружейной (№ 31)[21].

Дом А.А. Голубева. Ул. Ленина, 40. Фото М.В. Королёвой. Январь 2022 г.

Примечательна личность владельца первого из названных зданий — доходного дома № 20/66 на углу Широкой улицы и Малого проспекта Петроградской стороны. Им был крестьянин деревни Ермаковой Бушневской волости Чухломского уезда Костромской губернии, фельдфебель запаса Иван Фёдорович Алюшинский. В конце XIX столетия вместе с отцом и братьями он поселился в Петербурге, в доме № 128 по Невскому проспекту[22]. Помогая отцу с малярными подрядами, И.Ф. Алюшинский заработал первые капиталы и впоследствии широко проявил себя на хозяйственном, общественном и благотворительном поприще. Так, в 1913 году, уже имея звание потомственного почётного гражданина и занимаясь строительными подрядами, он состоял членом Правления Петровского общества взаимного кредита, казначеем приходского благотворительного братства при Введенской, на Петроградской стороне, церкви, а также старостой домовой церкви свв. равноапостольных Константина и Елены при Павловском военном училище[23]. Год спустя (1914) он состоял кандидатом в директора Правления акционерного общества Сиверского древообделывательного завода[24], а в 1915-1917 гг. исполнял должность Председателя «Общества оказания помощи сиротам обоего пола, оставшимся после смерти проживавших на Петроградской стороне родителей, умерших от холеры и других эпидемических заболеваний». Оставив место старосты Константино-Еленинского храма вакантным, Иван Фёдорович нёс в предреволюционные годы нёлегкую обязанность старосты величественного храма св. апостола Матфия[25]. В городе ему принадлежали также дома № 27 по Большой Пушкарской, № 20 по Сергиевской улице и № 13 по Чубарову переулку[26].

Дом И.Ф. Алюшинского. Малый проспект Петроградской стороны, 66 – ул. Ленина, 32. Фото М.В. Королёвой. Январь 2022 г.

В 1907 г. Иван Фёдорович выкупил на торгах за 33 тыс. руб. участок на Широкой улице под будущее строительство, и в 1907-1908 г.г. здесь вырос шестиэтажный красавец-дом с каменным флигелем во дворе[27]. Проект дома был разработан зодчим Александром Львовичем Лишневским (1868-1942) при участии художника и архитектора Павла Петровича Светлицкого (1878-1967)[28].

И теперь внимание прохожих привлекают элементы лепного декора на фасаде: «Встав на дыбы, медведи, зажатые деталями рассчитанного на два окна наличника барочных очертаний, передними лапами удерживают щиты. Беспокойство испытывают и другие существа, облепившие фасады снизу доверху: по сторонам парадных злобно шипят дикие коты, пробивающиеся сквозь заросли чертополоха, сверху на них давят граненые столбы, завершенные испуганно шипящими кошками с поднятыми хвостами.»[29]

Лепной декор на фасадах дома И.Ф. Алюшинского. Фото М.В. Королёвой. Январь 2022 г.

Интересно отметить, что соседом Ивана Матвеевича по дому был известный художник-архитектор Ганс Людвигович Конради, проживавший здесь в 1910-1916 гг.[30]

К концу лета 1914 года относятся сведения о последней известной перемене адреса Ивана Матвеевича. В прошении о выдаче одного документа для испытательной комиссии, поданном

23 августа, адресом просителя значится: Васильевский остров, 5-я линия, дом № 56, квартира 34. Четырёхэтажный дом с флигелем был построен в 1877-1878 гг. по проекту архитектора Фёдора Фёдоровича Соколова[31]. Он известен как «доходный дом Григорьева», однако в 1914 году его владелицей была уже Марья Ивановна Зайцева[32]. Здание благополучно пережило все потрясения, выпавшие на долю Северной столицы в XX столетии, и дошло до нас в перестроенном виде.

Доходный дом Григорьева. 5-я линия Васильевского острова, 56. Фото М.В. Королёвой. Январь 2022 г.

Чем вызвана столь частая перемена места проживания? Не исключено, что причиной тому явилась стеснённость Ивана Матвеевича в средствах. На эту мысль наводит то обстоятельство, что в течение трёх лет — с осени 1911 по весну 1914 г. Иван Матвеевич был освобождён от уплаты за учёбу, а в 1912/13 и 1913/14 учебных гг. даже получал стипендию в размере 600 руб. ежегодно[33]. Согласно правилам, утверждённым Министерством Народного Просвещения, такие стипендии назначались «недостаточным» (т.е. малоимущим) студентам[34].

Этим исчерпываются сведения о петербургских адресах Ивана Матвеевича Виноградова в период 1910-1914 гг. Можно выразить надежду, что будущие архивные находки, а также анализ эпистолярного наследия семьи Виноградовых позволит выявить новые данные о пребывании И.М. Виноградова в Петербурге, относящиеся ко времени между окончанием университета (1914) и отъездом в Пермь (1918).

Примечания

1. *Т.Г. Бобкина, М.А. Королёв*, И.М. Виноградов в Петроградском университете: к постановке проблемы // Великолукский вестник. Краеведческий альманах. 2023, № 10, с. 163-168.
2. Иван Матвеевич Виноградов. Ярославль, ООО «Издательство РМП», 2011.
3. Следует отметить, что об этой работе упоминал выдающийся советский и российский математик, соавтор и коллега И.М. Виноградова профессор Анатолий Алексеевич Карацуба (1937-2008), отдавший много сил исследованию, развитию и популяризации научного наследия И.М. Виноградова. См.: *А.А. Карацуба*, И.М. Виноградов и его метод тригонометрических сумм // *Теория чисел и анализ*, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова, Труды МИАН, 207. М., Наука, 1994, с. 3–20. На с. 9 воспроизведена часть титульного листа указанной рукописи.
4. В упомянутой выше книге «Иван Матвеевич Виноградов» отмечено (с. 22), что он «с первого же курса увлёкся теорией чисел». Однако не лишним будет напомнить, что «при обучении в университете Иван Матвеевич с большим интересом занимался теорией вероятностей, которую им читал А.А. Марков» и «знал курс Маркова наизусть». См.: *А.А. Карацуба*, Иван Матвеевич Виноградов (к девяностолетию со дня рождения) // Успехи математических наук, 1981, т. 36, № 6 (222), с. 3–16 [с. 5].
5. *И.М. Виноградов*, Суммы Гаусса и их приложение к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сборник, 2021, т. XXII, № 4 (80), с. 6–86 (факсимиле рукописи И.М. Виноградова - с. 49–86).
6. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325. По запросу авторов сотрудниками архива была изготовлена цифровая копия дела, переданная в сентябре 2021 г. в фонд Мемориального дома-музея академика И.М. Виноградова.
7. С 1 марта 1910 по 12 сентября 1911 г. обязанности ректора исполнял доктор римского права, профессор Давид Давидович Гримм (1864-1941). См.: *Е.А. Ростовцев*, Столичный университет Российской империи: ученое сословие, общество и власть (вторая половина XIX – начало XX в.). М., Политическая энциклопедия, 2017, с. 609, 636.
8. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л. 3.
9. *С.Е. Глезеров*, Северные окраины Петербурга. Лесной, Гражданка, Ручьи, Удельная... СПб., Центрполиграф, 2013, с. 35–36.
10. Весь Петербург на 1910 год, отдел IV «Алфавитный список улиц города С.-Петербурга и его пригородов», стб. 537.
11. *К. Горбачевич, Е. Хабло*, Почему так названы? О происхождении названий улиц, площадей, островов, рек и мостов Санкт-Петербурга. СПб., Норинт, 2002, с. 102.
12. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л. 35–35 об.
13. *А.М. Гинзбург, Б.М. Кириков*, Архитекторы-строители Санкт-Петербурга середины XIX - начала XX века. Справочник. Под общ. ред. Б.М. Кирикова. СПб., Пилигрим, 1996, с. 52; архитектурный сайт Санкт-Петербурга «Citywalls», `https://www.citywalls.ru/house6388.html` (режим доступа: 10.11.2021).
14. Весь Петербург на 1913 год. СПб., отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 602.
15. Весь Петербург за 1913 год, отдел «Город С.-Петербург», стб. 119, 209, 295, 312.
16. Весь Петербург на 1913 год, отдел «Город С.-Петербург», стб. 183-185, 187, 189, 190.
17. *К. Горбачевич, Е. Хабло*, Указ. соч., с. 134.
18. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л.л. 7а, 8, 11, 35об.
19. Их современные адреса — Малый пр-т Петроградской стороны, 66 / ул. Ленина, 32; ул. Ленина, 40.
20. *А.М. Гинзбург, Б.М. Кириков*, Указ. соч., с. 286; архитектурный сайт Санкт-Петербурга «Citywalls», `https://www.citywalls.ru/house6763.html` (режим доступа: 10.11.2021).
21. Весь Петербург за 1913 год, отдел «Город С.-Петербург», стб. 71, 152, 336, 421.
22. См., напр.: Весь Петербург на 1899 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 16; «Торгово-промышленный отдел», с. 1150.

23. Весь Петербург на 1913 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 15; отдел «Установления Центрального и местного управлений с подведомственными им учреждениями», стб. 431, 912.

24. Весь Петербург на 1914 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 16.

25. Весь Петербург на 1915 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 15; отдел «Установления Центрального и местного управлений с подведомственными им учреждениями», стб. 371-372, 861, «Торгово-промышленный отдел», с. 1122. Весь Петроград на 1916 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 16. Весь Петроград на 1917 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 17.

26. Весь Петербург за 1913 год, раздел «Город С.-Петербург», стб. 356, 405, 481.

27. Архитектурный сайт Санкт-Петербурга «Citywalls», `https://www.citywalls.ru/house877.html` (режим доступа: 10.11.2021).

28. *А.И. Чепель*, Художник-архитектор Павел Петрович Светлицкий // История Петербурга, 2001, № 1(59), с. 9–14 [с. 9]; *А.М. Гинзбург*, *Б.М. Кириков*, Указ. соч., с. 196, 276.

29. *А.И. Чепель*, Указ. соч., с. 9.

30. См., напр.: Весь Петербург за 1913 год, отдел «Алфавитный указатель жителей города С.-Петербурга, ...», с. 308. Ганс-Вильгельм Людвигович Конради (1882-1936) род. на территории совр. Латвии в семье Людвига-Германа-Карла Конради (1848-1887) и Иоганны-Мальвины (урожд. Фельско). Ученик Академии художеств с 1902 г.; в 1905-1907 гг. работал в Германии. 20 мая 1909 г. получил звание художника-архитектора за проект «Курзал на минеральных водах». Из сохранившихся в Петербурге построек: доходный дом (1911; ул. Петрозаводская, 10). Погребен на Смоленском лютеранском кладбище в Санкт-Петербурге. См.: *А.М. Гинзбург*, *Б.М. Кириков*, Указ. соч., с. 168; сайт «Смоленское Лютеранское Кладбище (Smolensky Lutheran Cemetery)», `https://spslc.ru/burial-places/konradi-gans-vilgelm-lyudvigovich.html` (режим доступа: 24.11.2022).

31. *А.М. Гинзбург*, *Б.М. Кириков*, Указ. соч., с. 285; архитектурный сайт Санкт-Петербурга «Citywalls», `https://www.citywalls.ru/house9607.html` (режим доступа: 10.11.2021).

32. Весь Петербург за 1914 год, отдел «Алфавитный список улиц города С.-Петербурга и его пригородов», стб. 191.

33. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л.л. 12, 36.

34. ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л. 30.

Получено: 25.03.2023
Принято в печать: 14.06.2023

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 24 Выпуск 2

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Заместители главного редактора

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственные секретари

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Члены редколлегии

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.
e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.
e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).
e-mail: zarullo_ r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).
e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 24 Issue 2

The main editor

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

The assistants of the main editor:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Executive secretaries

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Editorial Board

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.
e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

TABLE OF CONTENTS

Volume 24 Issue 2
