

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXIV

Выпуск 1 (87)

Тула

2023

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Х. М. Салиба (Ливан, г. Зук-Мосбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 24. Выпуск 1

Н. Ф. Алексиадис. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами.....	5
К. В. Будиянская, И. Б. Кожухов. Конгруэнции свободного унара.....	15
А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями.....	27
В. Г. Дурнев, А.И. Зеткина. Проблема разрешимости позитивной теории произвольной группы алгоритмически неразрешима.....	40
А. Г. Елисеев, П.В. Кириченко. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии сильной точки поворота у предельного оператора.....	50
В. А. Кибкало. Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской.....	69
О. И. Кузнецова. Применение мегастабильной системы с $2-D$ полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи.....	89
О. Э. Мирзаев. Частично-изоспектральные операторы Штурма—Лиувилля на конечном отрезке.....	104
В. И. Паньженский, А. О. Растрепина. Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского.....	114
А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков. Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля четных канонических произведений.....	127
И. А. Тлюстангелов. О симметриях трехмерных алгебраических цепных дробей.....	139
М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов. О наилучшем полиномиальном приближении функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$	182
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
С. А. Алдашев. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре для одного класса многомерных гиперболических уравнений.....	194
И. С. Басков. Когомологии де Рама алгебры полиномиальных функций на симплициальном комплексе.....	203
В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина.....	213
О. Х. Гуломов. Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных.....	219
И. А. Шилин. О преобразованиях Бушмана — Эрдеи и Мелера — Фока, связанных с группой $SO_0(3, 1)$	228

Ю. Н. Штейников. О множестве исключений в произведении множеств натуральных чисел с асимптотической плотностью 1	237
--	-----

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Д. Бреки, А. О. Поздняков, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, В. А. Яхимович, Е. Б. Седакова, А. Я. Башкарев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Эмпирическая математическая модель динамики изменения коэффициента трения полимерного композиционного материала по стали 20Х13 в вакууме при ионной бомбардировке	243
В. И. Горбачев, В. В. Некрасов. Концентрация напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим вырезом	253
Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина. XVIII век. У истоков регулярного математического просвещения в России. «Полный курс чистой математики» Ефима Дмитриевича Войтяховского	264
М. С. Мирзоев, А. И. Нижников. Методика обучения основам искусственного интеллекта в школьном курсе информатики	276
С. Л. Толоконников, А. А. Спасова. Кавитационное обтекание клина при наличии расположенного в его вершине точечного стока	294
А. О. Юлина. Аналитическое обоснование гироскопического эффекта в работах О. И. Сомова	304

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

С. С. Демидов. Алексей Николаевич Паршин в мире гуманитарного знания.....	313
В. И. Леванков, Н. М. Добровольский. Игорь Моисеевич Кричевер (в воспоминаниях) ...	325
А. И. Шафаревич, В. Н. Чубариков, А. Л. Семенов, В. М. Бухштабер, А. О. Иванов, В. М. Тихомиров, Вл. П. Визгин, В. Г. Чирский, В. В. Козлов, М. В. Козлов, Е. А. Зайцев, Г. С. Смирнова, В. Н. Чиненова, Н. М. Добровольский. Сергей Сергеевич Демидов (к 80-летию со дня рождения).....	334

РЕДКОЛЛЕГИЯ	356
-------------------	-----

THE EDITORIAL BOARD	360
---------------------------	-----

TABLE OF CONTENTS	364
-------------------------	-----

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14

Замкнутые классы в функциональной системе полиномов
с действительными коэффициентами¹

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

Мы рассматриваем функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции, и для этой системы исследуем задачу о замкнутых классах (структура, базис, число конечных и бесконечных замкнутых классов). Это обусловлено тем, что проблема полноты решается с помощью (максимальных) замкнутых классов.

В настоящей статье для функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами:

1. описаны в явном виде все конечные замкнутые классы;
2. найдено число всех конечных замкнутых классов, всех бесконечных замкнутых классов и всех замкнутых классов;
3. изучена задача о базисах замкнутых классов, а именно, установлено, что существует замкнутый класс, имеющий конечный базис, существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис, и существует замкнутый класс, не имеющий базиса; приведены конкретные примеры соответствующих замкнутых классов;
4. найдено число замкнутых классов, имеющих конечный базис, число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, и число замкнутых классов, не имеющих базиса.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, замкнутый класс, базис, полином, полиномиальная функция.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Ф. Алексиадис. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14.

¹Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14

Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients²

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Philipovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness; this problem consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of polynomials with real coefficients endowed with the superposition operation for this system we study the problem of closed classes (structure, basis, number of finite and infinite closed classes).

Importance of the problem of closed classes is ensured by the fact that completeness problem can frequently be solved with the help of (maximal) closed classes.

The main results concerning the functional system of polynomials with real coefficients presented in our paper are the following:

1. *all finite closed classes are described explicitly;*
2. *the number of finite closed classes, infinite closed classes and all closed classes is found;*
3. *the problem of bases of closed classes is studied, namely, it is established that there exist closed classes with a finite basis, there exist closed classes with an infinite basis, and there exist closed classes without a basis; explicit examples of the corresponding closed classes are given;*
4. *the number of closed classes with a finite basis, the number of closed classes with an infinite basis and the number of closed classes without a basis are established.*

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, closed class, basis, polynomial, polynomial function.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. Ph. Aleksiadis, 2023, “Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 5–14.

²The work was performed at Lomonosov Moscow State University

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами, сделанного на XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы [1], и ее можно считать продолжением цикла моих работ [2]-[4] о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций.

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут, в принципе, рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

При изложении материала в основном используется терминология книг [8] и [12].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F , при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F .

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F , которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O . Множество $[A]$ называется *замыканием множества A* .

Множество A ($A \subseteq F$) называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом*.

Множество A ($A \subseteq F$) называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Полная система называется *базисом* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если никакая ее собственная подсистема не является полной в $\mathbf{F}$, т.е. базис – это минимальная полная система в ф.с. $\mathbf{F}$.

Аналогично определяются полная система и базис любого замкнутого класса в $\mathbf{F}$.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. $\mathbf{F} = (F, O)$, т.е. $[A] = F$.*

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [15]), 3-значная логика (Яблонский [13]), 4-значная логика (Мальцев [9]), k -значная логика (Розенберг [16], Саломая [10], Слупецкий [17], Яблонский [14]), автоматные функции (Бабин [5], Кудрявцев [7], Часовских [11]), счетнозначные логики (Гаврилов [6]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных замкнутых классов). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стал традицией).

При исследовании центральной проблемы теории функциональных систем – проблемы полноты одной из основных задач является задача о замкнутых классах. В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа полиномиальных функций, так и в вычленении позитивных результатов, а также в отсеке негативных ситуаций.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных чисел,

R — множества всех действительных чисел.

$|A|$ — мощность множества A .

c_0 — мощность счетного множества.

$c = 2^{c_0}$ — мощность континуум.

2^c — мощность гиперконтинуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Основные результаты

Определим наш основной объект исследования — функциональную систему полиномов с действительными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in R$, называется *мономом с действительным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с действительным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с действительными коэффициентами называется *полиномом с действительным коэффициентом*.

Обозначим через $F_{PR}^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) множество всех функций из R^n в R , задаваемых полиномами с действительными коэффициентами и зависящих от n переменных, при этом $F_{PR}^{(0)} = R$, а через F_{PR} множество всех функций, задаваемых полиномами с действительными коэффициентами, т.е. $F_{PR} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{PR}^{(n)}$. Эти функции назовем *полиномиальными функциями с действительными коэффициентами*.

Полиномиальные функции с действительными коэффициентами будем называть также *pr-функциями* или *pr-полиномами*³.

³ p – первая буква слова polynomial, r – первая буква слова real

Более того, вместо термина "полиномиальная функция" будем говорить просто "полином", т.е. мы отождествляем функцию и формулу, задающую эту функцию.

Говорят, что pr -функция $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i , если существуют такие два набора $(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n)$ и $(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)$ значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, что

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) \neq f(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной* pr -функции

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Если x_i не является существенной переменной функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, то она называется *фиктивной переменной* функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ две pr -функции и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Если для любых $c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n$ значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ имеем

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n),$$

то говорят, что $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получается из $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *изъятием (удалением) фиктивной переменной x_i* и, наоборот, $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получена из $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *добавлением фиктивной переменной x_i* .

Две функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если дана конечная система функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. имеют вид

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.

Обозначим через F_{PR} множество всех полиномов с действительными коэффициентами.

Функциональная система полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ – это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} – множество всех полиномов с действительными коэффициентами, а O – множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя: перестановку переменных, переименование переменных, отождествление переменных, введение фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, подстановку одной функции в другую.

Следует отметить, что приведенное определение функциональной системы полиномов с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция pr -функций из F_{PR} является опять pr -функцией из F_{PR} .

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

ТЕОРЕМА 1. В ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$ существуют только следующие конечные замкнутые классы:

- 1) C , где C – произвольное конечное подмножество множества R ;
- 2) $I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$;
- 3) $C \cup I_1, \{\pm c_1, \dots, \pm c_k\} \cup I_2$, где $\pm c_1, \dots, \pm c_k \in R$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что каждое из перечисленных множеств является конечным замкнутым классом в $\mathbf{F}_{PR}$. Покажем, что в $\mathbf{F}_{PR}$ не существует других конечных замкнутых классов, отличных от перечисленных. Для этого достаточно доказать, что если замкнутый класс содержит pr -функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, отличную от константы, $g(x) = x$ и $h(x) = -x$, то он содержит бесконечное число попарно различных pr -функций.

Пусть A – произвольный замкнутый класс, который содержит такую pr -функцию $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку $f(x_1, \dots, x_n)$ отлична от константы, то она имеет существенную переменную; не ограничивая общности, можно считать, что существенными переменными функции $f(x_1, \dots, x_n)$ являются переменные $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$).

Далее, возможны два случая:

1. $n = 1$, т.е. f имеет одну существенную переменную. Можно считать, что $f = f(x)$.

Так как функция f отлична от $g(x)$ и $h(x)$, то очевидно, что последовательность функций

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

состоит из попарно различных функций и все они принадлежат множеству A (поскольку A – замкнутый класс).

2. $n \geq 2$, т.е. $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет более одной существенной переменной. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных $x_1, \dots, x_n$ (см. замечание (3)).

Тогда очевидно, что если в функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на место переменной x_1 подставим функцию $f(y_1, \dots, y_n)$ (где $\{y_1, \dots, y_n\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$), то получим функцию

$$f(f(y_1, \dots, y_n), x_2, \dots, x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $2n - 1$ переменных; затем, если в функции

$$f(f(y_1, \dots, y_n), x_2, \dots, x_n)$$

на место переменной y_1 подставим функцию $f(z_1, \dots, z_n)$, где

$$\{z_1, \dots, z_n\} \cap \{y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n\} = \emptyset,$$

то получим функцию

$$f(f(f(z_1, \dots, z_n), y_2, \dots, y_n), x_2, \dots, x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $3n - 2$ переменных и т.д.

Итак, имеем бесконечную последовательность функций

$$f(x_1, \dots, x_n), f(f(y_1, \dots, y_n), x_2, \dots, x_n), f(f(f(z_1, \dots, z_n), y_2, \dots, y_n), x_2, \dots, x_n), \dots,$$

которая состоит из попарно различных функций (поскольку числа существенных переменных этих функций попарно различны) и все они принадлежат множеству A (т.к. A – замкнутый класс). Следовательно, A содержит бесконечное число попарно различных функций. $\square$

На вопрос сколько конечных замкнутых классов вышеприведенных видов, ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$

- 1) число всех конечных замкнутых классов равно c ;
- 2) число всех бесконечных замкнутых классов равно 2^c ;
- 3) число всех замкнутых классов равно 2^c ;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Справедливость первого утверждения непосредственно следует из теоремы (1), в которой перечислены все замкнутые классы в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

2) Понятно, что чтобы доказать мощность некоторого множества A равна $|A| = 2^c$, достаточно показать, что $|A| \geq 2^c$ и $|A| \leq 2^c$.

С одной стороны, поскольку любое бесконечное подмножество $G = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ множества действительных чисел R является замкнутым классом (легко проверить, что $[G] = G$), то число всех бесконечных замкнутых классов не меньше 2^c , так как мощность множества всех действительных чисел равна c , а, как известно, мощность множества всех бесконечных подмножеств множества мощности c равна 2^c . Но, с другой стороны, это число не может больше 2^c , так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c , т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно 2^c .

3) Ясно, что (число всех замкнутых классов) = (число всех конечных замкнутых классов) + (число всех бесконечных замкнутых классов), т.е. (число всех замкнутых классов) = $c + 2^c = 2^c$. $\square$

А что касается базисов замкнутых классов, то оказывается, что имеют место все три случая.

ТЕОРЕМА 3. В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$

- 1) существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;
- 2) существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;
- 3) существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

1. Пусть $A = \{2x, 4x, 8x, \dots, 2^n x, \dots\}$, где n – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{2x\}$ – его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий конечный базис.

2. Пусть $A = \{x, 2x, 3x, \dots, mx, \dots\}$, где m – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, \dots, px, \dots\}$, где p – любое простое число, является его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий бесконечный базис.

3. Пусть $A = [T]$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, \dots\}$. Покажем, что замкнутый класс A не имеет базиса.

Очевидно, что A состоит из всех rq -функции вида 1 и $x_1^{2k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{2k_n}$, где n – любое положительное целое число, а $k_1, \dots, k_n$ – любые натуральные числа.

Допустим, что класс A имеет базис; обозначим его через B . Ясно, что $1 \in B$ и B содержит функцию, отличную от константы 1 ; обозначим ее через $f_1(x_1, \dots, x_{n_1})$, где $n_1 > 0$. Пусть число переменных, которые содержит эта функция во 2-ой степени, равно m_1 ($0 \leq m_1 \leq n_1$); не ограничивая общность, можно считать, что этими переменными являются переменные $x_1, \dots, x_{m_1}$. Следовательно, $f_1(x_1, \dots, x_{n_1})$ имеет вид

$$f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = x_1^2 \dots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^{2k_{m_1+1}} \dots x_{n_1}^{2k_{n_1}},$$

где $k_{m_1+1}, \dots, k_{n_1}$ – некоторые натуральные числа отличные, от 0 и 1.

Очевидно, что из функций 1 и $f_1(x_1, \dots, x_{n_1})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию

$$g(x_1, \dots, x_{m_1+1}) \equiv x_1^2 \dots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2.$$

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_2(x_1, \dots, x_{n_2}) = x_1^2 \dots x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2 \dots x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^{2l_{m_2+1}} \dots x_{n_2}^{2l_{n_2}},$$

где n_2, m_2 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_2 > n_1$ и $n_1 < m_2 \leq n_2$, а $l_{m_2+1}, \dots, l_{n_2}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1.

Очевидно, что из функций $1, f_1(x_1, \dots, x_{n_1})$ и $f_2(x_1, \dots, x_{n_2})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию $g(x_1, \dots, x_{m_2+1}) \equiv x_1^2 \dots x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2$.

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_3(x_1, \dots, x_{n_3}) = x_1^2 \dots x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2 \dots x_{m_3}^2 x_{m_3+1}^{2s_{m_2+1}} \dots x_{n_3}^{2s_{n_3}},$$

где n_3, m_3 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_3 > n_2$ и $n_2 < m_3 \leq n_3$, а $s_{m_3+1}, \dots, s_{n_3}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1 и т.д.

Итак, B содержит бесконечное число попарно различных функций

$$1, f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, \dots, x_{n_2}), f_3(x_1, \dots, x_{n_3}), \dots$$

Но, с другой стороны, если рассмотрим любую бесконечную подпоследовательность этой последовательности, содержащую константу 1, то очевидно, что из функций этой подпоследовательности с помощью операции суперпозиции можно получить все функции множества T , следовательно, и все функции замкнутого класса Φ . Следовательно, собственная подсистема базиса B является полной в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$. Получили противоречие. Итак, замкнутый класс A не имеет базиса. $\square$

На вопрос сколько конечных замкнутых классов, имеющие конечные базисы, имеющих бесконечные базисы или вообще не имеющих базисов, ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$*

- 1) *число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно c ;*
- 2) *число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно 2^c ;*
- 3) *число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно 2^c .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Любое конечное множество вида $G = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, где $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$, является базисом самого этого множества G ; поэтому число замкнутых классов, имеющих конечный базис, не меньше c . Но это число не может больше c , так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c , т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех его конечных подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно c .

2) Любое бесконечное множество вида $G = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$, где $c_1, c_2, c_3, \dots \in R$, является базисом самого этого множества G ; поэтому число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, не меньше 2^c . Но это число не может больше 2^c , так как $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ является функциональной системой мощности c , т.е. $|F_{PR}| = c$ и, следовательно, число всех его бесконечных подмножеств множества $|F_{PR}|$ равно 2^c .

3) Чтобы убедиться в справедливости последнего пункта, достаточно заметить, что множество

$$A_T = [\{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, \dots\} \cup T],$$

где T – произвольное бесконечное подмножество множества всех действительных чисел, не имеет базиса и, если $T_1 \neq T_2$, где T_1, T_2 – любые подмножества множества всех действительных чисел, то $A_{T_1} \neq A_{T_2}$. $\square$

3. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: изучена структура замкнутых классов и их базисов; найдено число замкнутых классов и их базисов для каждого возможного типа, более того, приведены соответствующие конкретные примеры для каждого случая.

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Галатенко за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О замкнутых классах в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы. (Тула, 17–21 мая 2022 года). Тула, 2022. С. 142–145.
2. Алексиадис Н. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами // Вестник МЭИ, 2015, № 3, с. 110–117.
3. Алексиадис Н. Ф. О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 2019, т.23, вып. 4, с. 93–114.
4. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 11–19. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19.
5. Бабин Д. Н. О задаче полноты для автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 82–83.
6. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5–64.
7. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами // В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45–74.
8. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
9. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд-во Наука, 1976. 388 с.
10. Саломеа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т.8. С. 7–32.
11. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151–154.
12. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.
13. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153–1156.
14. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
15. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton. 1941.
16. Rosenberg Y. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Akademie Ved. v. 80, № 4. P. 393, 1970.
17. Slupecki J. Kriterion pelnosci wielowar — tosciwych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsavie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102–128.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2022, "On closed classes in a functional system of polynomials with real coefficients", Proc. XXI Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history", pp. 142-145.
2. Aleksiadis, N. Ph. 2015, "Algorithmic unsolvability of the completeness problem for polynomials with integer coefficients" , Vestnik MPEI, no. 3, pp. 110-117.
3. Aleksiadis, N. Ph. 2019, "On the functional system of polynomials with rational coefficients" *Intelligent systems. Theory and applications*, Vol. 23, № 4, с. 93-114.
4. Aleksiadis, N. Ph. 2022, "Rational A-functions with rational coefficients" // *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 23, № 4, pp. 11–19. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19.
5. Babin, D.N. 2020, "On the completeness problem for automata", *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*, Vol. 23(4), pp. 82-83.
6. Gavrilov, G. P. 1965, "On functional completeness in countable logic", *Problems of cybernetics*, Vol. 15, pp. 5-64.
7. Kudryavtsev, V.B. 1965, "On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata", *Problems of cybernetics*, Vol. 13, pp. 45-74.
8. Kudryavtsev, V. B. 1982, "Functional systems", Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.
9. Maltsev, A.I. 1976, "Selected works". Vol. II — Moscow: Publishing House "Nauka", 388 p.
10. Salomaa, A. 1963, "Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain", II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.
11. Chasavskikh, A. A. 2018, "The problem of completeness in classes of linear automata", *Intelligent systems. Theory and Applications*, Vol. 22(2), pp. 151-154.
12. Yablonsky, S. V. 1986, "Introduction to discrete mathematics", Moscow.:Science, 384 p.
13. Yablonsky, S. V. 1954, "On functional completeness in three-digit calculus", *DAN USSR*, Vol. 95(6), pp. 1153–1156.
14. Yablonsky, S. V. 1958, "Functional constructions in k -valued logic", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, Vol.51, pp. 5–142.
15. Post, E. 1941, "Two-valued iterative systems of mathematical logic". — Princeton.
16. Rosenberg, Y. 1970, "Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken". *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Akademie Ved.*, Vol. 80, № 4, p. 393.
17. Slupecki, J. 1939, Kriterium pelnosci wielowar — toscowych systemow logiki zdan. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsavie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 05.09.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 512.534.32 + 512.577 + 512.567.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-15-26

Конгруэнции свободного унара¹

К. В. Будиянская, И. Б. Кожухов

Будиянская Кристина Викторовна — ООО «Ист-Вест Технолоджис» (г. Москва).*e-mail: budianskayak@yandex.ru***Кожухов Игорь Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, НИУ «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).*e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru*

Аннотация

Получено полное описание всех конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. А именно, каждая конгруэнция однозначно определяется некоторым набором параметров, каждый из которых представляет собой целое неотрицательное число или символ ∞ ; сформулированы ограничения на эти параметры.

Ключевые слова: полигон над полугруппой, унар, конгруэнция.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

К. В. Будиянская, И. Б. Кожухов. Конгруэнции свободного унара // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 15–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 512.534.32 + 512.577 + 512.567.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-15-26

Congruences of a free unar

C. V. Budianskaia, I. B. Kozhukhov

Budianskaia Cristina Viktorovna — “East-West Technologies” LTD (Moscow).*e-mail: budianskayak@yandex.ru***Kozhukhov Igor Borisovich** — professor, doctor of physical and mathematical sciences, NRU “MIET”; Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru*

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 22-11-00052

Abstract

We obtain a complete description of all congruences of a free unar with arbitrary set of free generators. Namely, every congruence is characterized uniquely by a collection of parameters which are either non-negative integers or the symbol ∞ ; the restrictions on the parameters are formulated.

Keywords: act over senigroup, unar, congruence.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

C. V. Budianskaia, I. B. Kozhukhov, 2023, “Congruences of a free unar”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 15–26.

1. Введение

Полигоном над полугруппой S называется множество X , на котором действует полугруппа S , т.е. определено отображение $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(ss') = (xs)s'$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$ (см. [1]). Полигон является алгебраической моделью автомата, при этом X — множество состояний, а S — полугруппа входных сигналов (см. [2]). Унар X — алгебра с одной унарной операцией $f : X \rightarrow X$ будет рассматриваться здесь как полигон над бесконечной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$, где $xa = f(x)$ для всех $x \in X$. Унар можно рассматривать как автомат с однобуквенным входным алфавитом.

Конгруэнция универсальной алгебры — отношение эквивалентности, стабильное относительно операций этой алгебры. Конгруэнции алгебры A образуют полную решётку $\text{Con } A$ с наименьшим элементом $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$ и наибольшим элементом $\nabla_A = A \times A$. Хорошо известно, что решётка $\text{Con } A$ является полной подрешёткой решётки $\text{Eq } A$ всех отношений эквивалентности на множестве A . Часто индекс A у Δ и ∇ мы будем опускать.

Для полугруппы относительно простого строения все полигоны над ней могут быть описаны, а в ряде случаев удаётся описать и конгруэнции полигонов над этой полугруппой. Так, в работе [3] были описаны все полигоны над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, в работе [4] получено описание правых конгруэнций вполне 0-простой полугруппы. В работах [5, 6] были описаны конгруэнции полигонов над группами и полугруппами правых/левых нулей. Оказывается, все конгруэнции свободного унара также могут быть описаны, что является целью данной работы.

2. Конгруэнции свободного циклического унара

Пусть $\{X_i | i \in I\}$ — семейство полигонов над одной полугруппой S , причём $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда множество $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ очевидным образом превращается в полигон над полугруппой S — это *копроизведение* полигонов X_i . В этом случае мы пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$. В теории унаров эту конструкцию называют прямой суммой.

Пусть S — бесконечная циклическая полугруппа, тогда $S^1 = \{1, a, a^2, \dots\}$ — свободный циклический моноид.

Свободный циклический унар можно представлять как расширенное множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ с действием $ma^j = m + j$ ($m, j \in \mathbb{N}$). Очевидно, имеет место изоморфизм моноидов $(S^1, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +)$. Свободный унар с множеством свободных образующих $\{x_i | i \in I\}$ состоит из формальных выражений вида $x_i a^j$ ($i \in I$, $j \in \mathbb{N}$), которые мы будем обозначать $[i, j]$. Очевидно, свободный унар с произвольным множеством свободных образующих является копроизведением свободных циклических унаров.

Конгруэнции свободного циклического унара были описаны в работе [7]. Приведём это описание, но вначале введём некоторые обозначения. НОД и НОК будут обозначать *наибольший общий делитель* и *наименьшее общее кратное* соответственно. Будем считать, что $\text{НОД}(\delta, 0) = \delta$ и $\text{НОК}(\delta, 0) = 0$ при $\delta \in \mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ порядок элементов из $\mathbb{N}$ обычный и $n < \infty$ при $n \in \mathbb{N}$. Для $\kappa, \delta \in \mathbb{N}$ таких, что $\delta > 0$, положим

$$\rho(\kappa, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x, y \geq \kappa \text{ и } x \equiv y \pmod{\delta}\} \cup \{\Delta\}.$$

Кроме того, пусть $\rho(\infty, 0) = \Delta$.

ТЕОРЕМА 1. [7, предложение 1]. Решётка конгруэнции свободного циклического унара $\mathbb{N}$ имеет вид $\text{Con } \mathbb{N} = \{\rho(\kappa, \delta) \mid \kappa \geq 0, \delta > 0\} \cup \{\rho(\infty, 0)\}$. При этом

$$\rho(\kappa, \delta) \wedge \rho(\kappa', \delta') = \rho(\max(\kappa, \kappa'), \text{НОК}(\delta, \delta')),$$

$$\rho(\kappa, \delta) \vee \rho(\kappa', \delta') = \rho(\min(\kappa, \kappa'), \text{НОД}(\delta, \delta')).$$

3. Конгруэнции свободного унара

Перейдём теперь к конгруэнциям свободного унара X с произвольным множеством свободных образующих. Согласно введённым ранее обозначениям $X = \{[i, n] \mid i \in I, n \in \mathbb{N}\}$, $[i, n] \cdot a^k = [i, n + k]$ и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i = \{[i, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Всякая конгруэнция $\rho \in \text{Con } X$ определяет на X_i конгруэнцию $\rho_i = \rho \cap (X_i \times X_i)$ свободного циклического унара X_i . Из теоремы 1 следует, что $\rho_i = \rho(\kappa_i, \delta_i)$, то есть $\rho_i = \{([i, \kappa_i + m\delta_i + t], [i, \kappa_i + n\delta_i + t]) \mid m, n, t \geq 0\} \cup \Delta_{X_i}$ при некоторых $\kappa_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\delta_i \geq 0$, причём $\kappa_i \in \mathbb{N}$, если $\delta_i > 0$. Итак, на каждом X_i конгруэнция ρ “вырезает” конгруэнцию ρ_i вида $\rho(\kappa_i, \delta_i)$, но возможно также, что некоторые $[i, m]$ и $[j, n]$ при $i \neq j$ лежат в одном ρ -классе. Определим на множестве I следующее отношение:

$$\sigma = \{(i, j) \in I \times I \mid \exists m, n \in \mathbb{N}, ([i, m], [j, n]) \in \rho\}.$$

Проверим, что σ – отношение эквивалентности на множестве I . Рефлексивность и симметричность отношения σ очевидны, проверим транзитивность. Пусть $(i, j), (j, k) \in \sigma$. Тогда $[i, m] \rho [j, n]$ и $[j, p] \rho [k, q]$ при некоторых $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Если $n = p$, то $[i, m] \rho [k, q]$ ввиду транзитивности отношения ρ , а значит, $(i, k) \in \sigma$. Пусть $n \neq p$. Без ограничения общности мы можем считать, что $p > n$. Тогда $p = n + r$ при некотором $r > 0$. Так как ρ – конгруэнция, то $[i, m]a^r \rho [j, n]a^r$, то есть $[i, m + r] \rho [j, n + r]$. Отсюда получаем: $[i, m + r] \rho [j, n + r] = [j, p] \rho [k, q]$. Следовательно, $[i, m + r] \rho [k, q]$, а значит, $(i, k) \in \sigma$. Таким образом, σ транзитивно. Следовательно, $\sigma \in \text{Eq } I$.

Пусть σ осуществляет разбиение множества I на классы эквивалентности $K \in I/\sigma$. Тогда, полагая $X_K = \bigcup_{i \in K} X_i$ и $\rho_K = \rho \cap (X_K \times X_K)$, будем иметь

$$\rho = \bigcup_{K \in I/\sigma} \rho_K. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\rho \in \text{Con } X$, $(i, j) \in \sigma$, $i \neq j$ и $\kappa_i, \delta_i, \kappa_j, \delta_j$ – параметры, определяющие конгруэнции $\rho_i = \rho \cap (X_i \times X_i)$ и $\rho_j = \rho \cap (X_j \times X_j)$, т.е. $\rho_i = \rho(\kappa_i, \delta_i)$, $\rho_j = \rho(\kappa_j, \delta_j)$. Тогда $\delta_i = \delta_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай, когда $\delta_i = 0$. Покажем, что тогда также $\delta_j = 0$. Пусть это не так, т.е. $\delta_j > 0$. Так как $(i, j) \in \sigma$, то $(x, y) \in \rho$ при некоторых $x \in X_i$, $y \in X_j$.

Имеем: $x = [i, m]$, $y = [j, n]$. Отсюда получаем: $[i, m] \rho [j, n] \rho [j, n + \delta_j] \rho [i, m + \delta_j]$. Это означает, что $[i, m] \rho [i, m + \delta_j]$, что противоречит равенству $\delta_i = 0$.

Далее будем считать, что $\delta_i, \delta_j > 0$. Так как $[i, m] \rho [j, n] \rho [j, n + \delta_j] \rho [i, m + \delta_j]$, то $\delta_j \dot{\vdash} \delta_i$.

Аналогично доказывается, что $\delta_i \dot{\vdash} \delta_j$. Следовательно, $\delta_i = \delta_j$. $\square$

Зафиксируем конгруэнцию $\rho \in \text{Con } X$ и пусть $\rho \cap (X_i \times X_j) \neq \emptyset$ для некоторых $i \neq j$. Пусть

$$m = \min\{m' | \exists t [i, m'] \rho [j, t]\}, \quad q = \min\{q' | [i, m] \rho [j, q']\}, \quad (2)$$

$$n = \min\{n' | \exists t [i, t] \rho [j, n']\}, \quad p = \min\{p' | [i, p'] \rho [j, n]\}. \quad (3)$$

Будем говорить, что между X_i и X_j *связь I-го типа*, если $[i, m] \rho [j, n]$, и *II-го типа* в противном случае. Эти же слова будем применять и к элементам из I : если X_i и X_j имеют связь I-го (или II-го) типа, то будем говорить, что i и j имеют связь I-го (соотв., II-го) типа.

Так как на каждом X_i строение конгруэнции ρ известно (а именно, $\rho|_{X_i} = \rho(\kappa_i, \delta_i)$), то следует сосредоточиться на выяснении строения отношений $\rho \cap (X_i \times X_j)$ при $i \neq j$.

Начнём с наиболее простого случая: когда σ -класс K таков, что $\delta_i = 0$ при некотором $i \in K$ (а значит, по лемме 1 $\delta_i = 0$ при всех $i \in K$). В этом случае $\rho|_{X_i} = \Delta_{X_i}$ при $i \in K$, и остаётся определить отношения $\rho \cap (X_i \times X_j)$ при $i \neq j$.

Для $i, j \in K$ таких, что $i \neq j$, положим

$$\mu_{ij} = \min\{t | \exists u [i, t] \rho [j, u]\}. \quad (4)$$

Зафиксируем какой-либо элемент из K и обозначим его символом 0. Для каждого $i \in K \setminus \{0\}$ положим

$$\mu_i = \mu_{0i}, \quad \nu_i = \mu_{i0}. \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Пусть K – σ -класс, для которого $\delta_i = 0$ для какого-либо (а значит, и для всех) $i \in K$. Тогда $[i, \mu_{ij}] \rho [j, \mu_{ji}]$ при $i \neq j$ из K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем: $[i, \mu_{ij}] \rho [j, q]$, $[j, \mu_{ji}] \rho [i, p]$ при некоторых $p, q \geq 0$.

Из определения (4) чисел μ_{ij}, μ_{ji} получаем: $p \geq \mu_{ij}$, $q \geq \mu_{ji}$. Имеем:

$$[i, \mu_{ij}] \rho [j, q] = [j, \mu_{ji} + (q - \mu_{ji}) \rho [i, p + (q - \mu_{ji})].$$

Так как $\delta_i = 0$, то $\mu_{ij} = p + q - \mu_{ji}$. То есть $(p - \mu_{ij}) + (q - \mu_{ji}) = 0$. Так как $p - \mu_{ij}, q - \mu_{ji} \geq 0$, то $p = \mu_{ij}$, $q = \mu_{ji}$. Следовательно, $[i, \mu_{ij}] \rho [j, \mu_{ji}]$ $\square$

Заметим, что из определений (4), (5) и леммы 2 следует, что

$$[0, \mu_i] \rho [i, \nu_i]. \quad (6)$$

ЛЕММА 3. Пусть i, j – различные ненулевые элементы из K и $\delta_i = 0$. Тогда:

- (i) если $\mu_i > \mu_j$, то $\mu_{ij} = \nu_i$, $\mu_{ji} = \mu_i + \nu_j - \mu_j$;
- (ii) если $\mu_i < \mu_j$, то $\mu_{ij} = \nu_i + \mu_j - \mu_i$, $\mu_{ji} = \nu_j$;
- (iii) если $\mu_i = \mu_j$, то $\nu_i - \mu_{ij} = \nu_j - \mu_{ji} \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_i > \mu_j$. Тогда $\mu_i = \mu_j + \tau$ при некотором $\tau > 0$.

По лемме 2 $[0, \mu_i] \rho [i, \nu_i]$ и $[0, \mu_j] \rho [j, \mu_j]$. Покажем, что $\mu_{ij} = \nu_i + \tau$, $\mu_{ji} = \nu_j$. Имеем: $[i, \nu_i + \tau] \rho [0, \mu_i + \tau] = [0, \mu_j] \rho [j, \nu_j]$. Ввиду минимальности μ_{ij} (см. формулы (4)) имеем: $\mu_{ij} \leq \nu_i + \tau$ и $\mu_{ji} \leq \nu_j$. Пусть $\mu_{ij} < \nu_i + \tau$. Тогда $\mu_{ij} \geq \nu_i + (\tau - 1)$, а значит, $\nu_i + \tau - 1 = \mu_{ij} + \xi$ при некотором $\xi \geq 0$. Используя лемму 2, получим:

$$[i, \nu_i + \tau - 1] = [i, \mu_{ij} + \xi] \rho [j, \mu_{ji} + \xi].$$

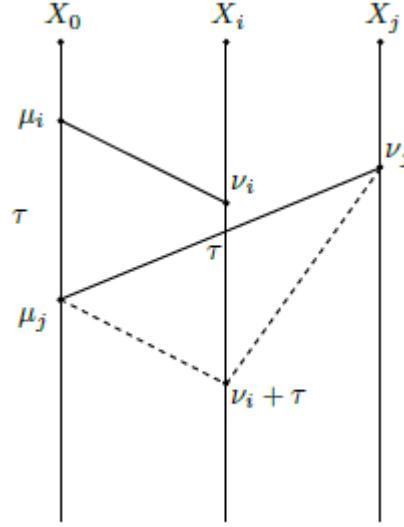


Рис. 1: Леммы 3,4

Отсюда $[i, \nu_i + \tau] \rho [j, \mu_{ji} + \xi + 1]$. Но $[i, \nu_i + \tau] \rho [j, \nu_j]$. Так как $\delta_j = 0$, то $\nu_j = \mu_{ji} + \xi + 1$. Следовательно,

$$[0, \mu_i + \tau - 1] \rho [i, \nu_i + \tau - 1] \rho [j, \mu_{ji} + \xi] = [j, \nu_j - 1],$$

а это противоречит минимальности ν_j . Таким образом, $\mu_{ij} = \nu_i + \tau = \nu_i + \mu_j - \mu_i$.

По лемме 2 $[i, \mu_{ij}] \rho [j, \mu_{ji}]$. Следовательно,

$$[j, \mu_{ji}] \rho [i, \mu_{ij}] = [i, \nu_i + \tau] \rho [0, \mu_i + \tau] = [0, \mu_j] \rho [j, \nu_j],$$

т.е. $[j, \mu_{ji}] \rho [j, \nu_j]$. Так как $\delta_j = 0$, то $\mu_{ji} = \nu_j$, а значит, выполнено (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Пусть теперь $\mu_i = \mu_j$. Имеем: $[i, \nu_i] \rho [0, \mu_i] = [0, \mu_j] \rho [j, \nu_j]$. Отсюда ввиду минимальности μ_{ij} и μ_{ji} следует, что $\nu_i \geq \mu_{ij}$ и $\nu_j \geq \mu_{ji}$. Поэтому $\nu_i = \mu_{ij} + \tau$ при некотором $\tau \geq 0$. Далее получаем:

$$[j, \nu_j] \rho [i, \nu_i] = [i, \mu_{ij} + \tau] \rho [j, \mu_{ji} + \tau].$$

Так как $\delta_j = 0$, то $\nu_j = \mu_{ji} + \tau$. Следовательно, $\nu_j - \mu_{ji} = \tau = \nu_i - \mu_{ij}$, что доказывает утверждение (iii). $\square$

Мы всё ещё предполагаем, что K – σ -класс, для которого $\delta_i = 0$. Для ненулевых элементов $i \neq j$ из K таких, что $\mu_i = \mu_j$, положим $\varepsilon_{ij} = \nu_i - \mu_{ij}$. По лемме 3 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \geq 0$. Отметим ещё одно неравенство, которое является непосредственным следствием определения параметров ε :

$$\varepsilon_{ij} \leq \min\{\nu_i, \nu_j\}. \quad (7)$$

Следующая лемма описывает отношения $\rho \cap (X_i \times X_j)$ при известных значениях параметров μ, ν, ε .

ЛЕММА 4. Пусть K – σ -класс, для которого $\delta_i = 0$. Тогда для $i, j \in K \setminus \{0\}$ и $s, t \in \mathbb{N}$

$$[i, s] \rho [j, t] \Leftrightarrow \begin{cases} s - (\nu_i + \mu_j - \mu_i) = t - \nu_j \geq 0 \text{ при } \mu_i > \mu_j, \\ s - \nu_i = t - (\nu_j + \mu_i) - \mu_j \geq 0 \text{ при } \mu_i < \mu_j, \\ s - \nu_i = t - \nu_j \geq -\varepsilon_{ij} \text{ при } \mu_i = \mu_j. \end{cases} \quad (8)$$

Кроме того,

$$[0, s] \rho [i, t] \Leftrightarrow s - \mu_i = t - \nu_i \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при $i \neq j$

$$[i, s] \rho [j, t] \Leftrightarrow s - \mu_{ij} = t - \mu_{ji} \geq 0.$$

Отсюда с учётом леммы 3 получается первая эквивалентность. Вторая эквивалентность следует из формул (5), (6). $\square$

Следующая лемма отмечает важные свойства параметра ε .

ЛЕММА 5. Пусть i, j, k – различные элементы из $K \setminus \{0\}$ и $\mu_i = \mu_j = \mu_k$. Тогда

$$|\{\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{jk}, \varepsilon_{ik}\}| \leq 2 \quad (10)$$

и

$$\varepsilon_{ik} \geq \min\{\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{jk}\}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим: $a = \varepsilon_{ij}$, $b = \varepsilon_{jk}$, $c = \varepsilon_{ik}$. Докажем вначале неравенство (11). Предположим, что оно не выполняется. Тогда $c < \min\{a, b\}$. Отсюда $a, b \geq c + 1$. Так как $c + 1 \leq a$, то по лемме 4 $[i, \nu_i - c - 1] \rho [j, \nu_j - c - 1]$ и $[j, \nu_j - c - 1] \rho [k, \nu_k - c - 1]$. Ввиду транзитивности отношения ρ получаем: $[i, \nu_i - c - 1] \rho [k, \nu_k - c - 1]$. Отсюда снова по лемме 4 $(\nu_i - c - 1) - \nu_i = (\nu_k - c - 1) - \nu_k \geq -c$, что является противоречием.

Таким образом, неравенство (11) доказано. Неравенство (10) состоит в том, что числа a, b, c не могут быть различными. Оно следует из (11), так как, если a, b, c различны и, скажем, $a < b < c$, то это будет противоречить уже доказанному неравенству $a \geq \min\{b, c\}$. $\square$

Лемму 5 можно образно переформулировать следующим образом: “треугольники” со “сторонами” a, b, c все равнобедренные, причём “основание” не меньше “боковой стороны”. При этом неравенство треугольника может не выполняться.

Нам удобно будет множество I рассматривать как граф, вершины которого i, j соединены ребром в том и только том случае, если между i и j имеется связь, т.е. $(i, j) \in \sigma$. При этом каждый σ -класс будет являться полным подграфом этого графа и в то же время компонентой связности.

Пусть K – σ -класс, для которого $\delta_i = 0$ при $i \in K$. Напишем на каждом ребре (i, j) число ε_{ij} . Эти числа должны удовлетворять неравенствам (10), (11). Пример правильного распределения надписей на рёбрах показан на рисунке 2. Правда, на этом рисунке не указаны значения ν_i , поэтому мы не можем гарантировать выполнение неравенства (7).

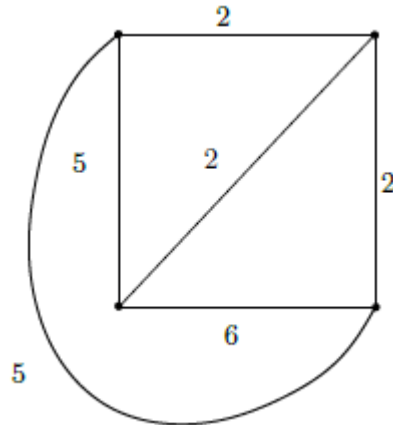


Рис. 2: Параметры ε

ЛЕММА 6. Если между i и j имеет место связь I-го типа и $\delta_i > 0$, то $m \leq \kappa_i$, $n \leq \kappa_j$, $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ и для любых s, t

$$[i, s] \rho [j, t] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{либо } s \geq \kappa_i, t \geq \kappa_j \text{ и } s - t \equiv m - n \pmod{\delta}, \\ \text{либо } s \geq m, t \geq n \text{ и } s - t = m - n. \end{cases} \quad (12)$$

(Здесь $\delta = \delta_i = \delta_j$ – см. лемму 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m > \kappa_i$. Тогда найдётся такое $t \geq 0$, что $\kappa_i + t\delta \geq m$. Следовательно, $\kappa_i + t\delta = m + u$ при некотором $u \geq 0$. Теперь получаем:

$$[i, \kappa_i] \rho [i, \kappa_i + t\delta] = [i, m + u] \rho [j, n + u],$$

что противоречит минимальности числа m . Итак, $m \leq \kappa_i$. Аналогично доказывается, что $n \leq \kappa_j$.

Равенство $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ докажем методом “от противного”. Пусть, например, $\kappa_i - m > \kappa_j - n$. Так как $[i, m] \rho [j, n]$, то

$$[i, m + \kappa_j - n] \rho [j, n + \kappa_j - n] = [j, \kappa_j] \rho [j, \kappa_j + \delta] \rho [i, m + \kappa_j - n + \delta].$$

Так как $m + \kappa_j - n < \kappa_i$, то мы получаем противоречие с определением числа κ_i . Тем самым равенство $\kappa_i - m = \kappa_j - n$ можно считать доказанным. Осталось доказать эквивалентность (12).

($\Rightarrow$). Пусть $[i, s] \rho [j, t]$. По определению параметров m и n имеем: $s \geq m$, $t \geq n$. Если $s \geq \kappa_i$, то

$$[j, t] \rho [i, s] \rho [i, s + \delta] \rho [j, t + \delta],$$

поэтому $t \geq \kappa_j$. Ввиду симметрии имеем:

$$s \geq \kappa_i \Leftrightarrow t \geq \kappa_j. \quad (13)$$

Далее получаем:

$$[j, t] \rho [i, s] \rho [i, m + (s - m)] \rho [j, n + (s - m)],$$

откуда $t \equiv n + s - m \pmod{\delta}$, а значит, $s - t \equiv m - n \pmod{\delta}$.

Рассмотрим вначале случай, когда $s < \kappa_i$ (тем не менее, по ранее доказанному $s \geq m$). Ввиду (13) $t < \kappa_j$. Предположим, что $s - m \neq t - n$, и приведём это предположение к противоречию. Имеем:

$$[j, t] \rho [i, s] = [i, m + (s - m)] \rho [j, n + (s - m)].$$

Так как $t \neq n + s - m$, то $t \geq \kappa_j$, что противоречит ранее установленному.

($\Leftarrow$). Проверим вначале, что $[i, \kappa_i] \rho [j, \kappa_j]$. Действительно,

$$[i, \kappa_i] = [i, m + (\kappa_i - m)] \rho [j, n + (\kappa_i - m)] = [j, n + (\kappa_j - n)] = [j, \kappa_j].$$

Пусть $s \geq \kappa_i$, $t \geq \kappa_j$ и $s - t \equiv m - n \pmod{\delta}$. Так как $\kappa_i - \kappa_j = m - n$, то $s - \kappa_i \equiv t - \kappa_j \pmod{\delta}$. Без ограничения общности можно считать, что $s - \kappa_i \geq t - \kappa_j$. Тогда $s - \kappa_i = t - \kappa_j + r\delta$ при некотором $r \geq 0$. Отсюда получаем:

$$[i, s] \rho [i, \kappa_i + (s - \kappa_i)] \rho [j, \kappa_j + (s - \kappa_i)] = [j, t + r\delta] \rho [j, t].$$

Пусть $s \geq m$, $t \geq n$ и $s - t = m - n$. Тогда

$$[i, s] \rho [i, m + (t - n)] \rho [j, n + (t - n)] = [j, t].$$

Лемма доказана. $\square$

Перейдём теперь к рассмотрению связей II-го типа. Параметры m, n, p, q определены формулами (2) и (3). Для связей II-го типа обязательно $\delta_i > 0$, $([i, m], [j, n]) \notin \rho$, $p > m$ и $q > n$.

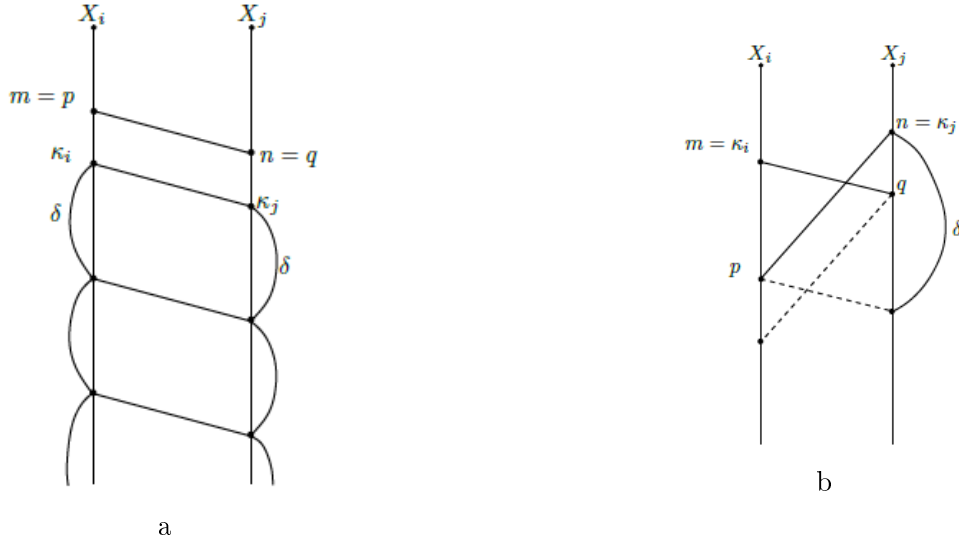


Рис. 3: Типы связи: (а) связь I-го типа; (б) связь II-го типа

ЛЕММА 7. Если между X_i и X_j имеет место связь II-го типа, то $m = \kappa_i$ и $n = \kappa_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p > m$ и $q > n$, то $p + q > m + n$. Далее, так как $[i, m] \rho [j, q]$, то $[i, m + (p - m)] \rho [j, q + (p - m)]$. То есть $[i, p] \rho [j, p + q - m]$. Но $[i, p] \rho [j, m]$, поэтому $[j, p + q - m] \rho [j, n]$. Так как $p + q - m > n$, то $n \geq \kappa_j$ и $\delta_j > 0$. Аналогично доказывается, что $m \geq \kappa_i$. По лемме 1 $\delta_i = \delta_j$. Положим $\delta = \delta_i = \delta_j$.

Докажем невозможность строгих неравенств $m > \kappa_i$, $n > \kappa_j$. Предположим, что $m > \kappa_i$, и приведём это предположение к противоречию. Найдём такое $r > 0$, что $\kappa_i + r\delta \geq m$. Затем найдём $t \geq 0$, для которого $\kappa_i + r\delta = m + t$. Имеем: $[i, \kappa_i] \rho [i, \kappa_i + r\delta] = [i, m + t] \rho [j, q + t]$, при этом $\kappa_i < m$, а это противоречит минимальности числа m . Таким образом, $m = \kappa_i$. Аналогично доказывается, что $n = \kappa_j$. $\square$

ЛЕММА 8. В условиях леммы 7 $(p + q) - (m + n) = \delta$, где $\delta = \delta_i = \delta_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p > m$ и $q > n$, то $p + q > m + n$. Имеем:

$$[j, n] \rho [i, p] = [i, m] a^{p-m} \rho [j, q] a^{p-m} = [j, q + p - m].$$

Так как $q + p - m > n$, то $\delta > 0$ и $(p + q) - (m + n) = r\delta$ при некотором $r > 0$.

Докажем, что $p - m, q - n < \delta$. Понятно, что достаточно доказать первое неравенство. Предположим, что $p - m \geq \delta$. Тогда $p - \delta \geq m$. По лемме 7 $m = \kappa_i$, поэтому $[i, p - \delta] \rho [i, p]$. Отсюда получаем, что $[i, p - \delta] \rho [j, n]$, а это противоречит минимальности числа p .

Итак, $p - m, q - n < \delta$. Отсюда $(p + q) - (m + n) < 2\delta$. Но $(p + q) - (m + n) = r\delta$. Следовательно, $r = 1$, а значит, $(p + q) - (m + n) = \delta$. $\square$

Следующая лемма описывает отношение $\rho \cap (X_i \times X_j)$ в случае наличия между i и j связи II-го типа.

ЛЕММА 9. Пусть $\rho \in \text{Con } X$ осуществляет между X_i и X_j ($i \neq j$) связь II-го типа, параметры m, n, p, q определяются формулами (2) и (3). Тогда $m = \kappa_i$, $n = \kappa_j$, $\delta_i = \delta_j > 0$ (положим $\delta = \delta_i = \delta_j$), $\delta = (p + q) - (m + n)$ и для любых s, t

$$[i, s] \rho [j, t] \Leftrightarrow s \geq m, t \geq n \text{ и } t - s \equiv q - m \pmod{\delta}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $m = \kappa_i$, $n = \kappa_j$, $\delta_i = \delta_j$ следуют из лемм 7 и 1, неравенство $\delta > 0$ – из того, что связь II-го типа, а равенство $\delta = p + q - m - n$ – из леммы 8. Осталось доказать эквивалентность (14).

($\Rightarrow$). Пусть $[i, s] \rho [j, t]$. Из соотношений (2), (3) следует, что $s \geq m$, $t \geq n$. Имеем: $[i, s] = [i, m + (s - m)] \rho [j, q + (s - m)]$. Следовательно, $[j, t] \rho [j, q + s - m]$. Отсюда получаем, что $t \equiv q + s - m \pmod{\delta}$.

($\Leftarrow$). Пусть $s \geq m$, $t \geq n$ и $t - s \equiv q - m \pmod{\delta}$. Имеем: $t = s + q - m + r\delta$ при некотором $r \in \mathbb{Z}$.

Предположим вначале, что $r \geq 0$. Тогда будем иметь:

$$[j, t] = [j, s + q - m + r\delta] \rho [i, s + m - m + r\delta] \rho [i, s].$$

Пусть теперь $r < 0$. Тогда $-r > 0$, и мы получаем:

$$[j, t] = [j, s + q - m + r\delta] \rho [j, s + q - m + r\delta + (-r)\delta] = [j, q + (s - m)] \rho [i, m + (s - m)] = [i, s].$$

□

ЛЕММА 10. Пусть i, j, k – различные элементы из I . Если между i и j , а также между j и k связь I-го типа, то между i и k также связь I-го типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы. Если $\delta_i = 0$, то по лемме 1 также $\delta_j = \delta_k = 0$, поэтому связь между i и k может быть только I-го типа. Пусть теперь $\delta_i > 0$. Тогда по лемме 6 $[i, \kappa_i] \rho [j, \kappa_j]$ и $[j, \kappa_j] \rho [k, \kappa_k]$. Ввиду транзитивности отношения ρ получаем, что $[i, \kappa_i] \rho [k, \kappa_k]$, а значит, между i и k связь I-го типа. □

Для дальнейшего исследования конгруэнций свободного унара $X = \coprod_{i \in I} X_i$, нам надо найти ограничения на параметры $\kappa_i, \delta_i, m, n, p, q$. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае наличия между X_i и X_j связи I-го типа $[i, \kappa_i] \rho [j, \kappa_j]$, а для связи II-го типа с $\delta_i > 0$ имеет место соотношение $([i, \kappa_i], [j, \kappa_j]) \notin \rho$. Далее, для связи I-го типа при $\delta_i > 0$ введём ещё некоторые параметры, аналогичные введённым ранее в случае $\delta_i = 0$. А именно, положим $\mu_{ij} = m$, $\mu_{ji} = n$, $\varepsilon_{ij} = \kappa_i - m = \kappa_j - n$ (последнее равенство имеет место ввиду леммы 6). Очевидно, параметр ε симметричный, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Кроме того,

$$\varepsilon_{ij} \leq \min\{\kappa_i, \kappa_j\}. \quad (15)$$

Следующая лемма аналогична лемме 5, доказанной ранее в случае $\delta > 0$.

ЛЕММА 11. Пусть i, j, k – различные элементы из I и пусть связи между i, j, k I-го типа. Положим $a = \varepsilon_{ij}$, $b = \varepsilon_{jk}$, $c = \varepsilon_{ik}$. Тогда среди чисел a, b, c найдутся два одинаковых, а третье будет не меньше этих двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \leq b$. Имеем: $[i, \kappa_i - a] \rho [j, \kappa_j - a]$ и $[j, \kappa_j - b] \rho [k, \kappa_k - b]$. Так как $a \leq b$, то $[i, \kappa_j - a] \rho [j, \kappa_j - a] = [j, \kappa_j - b + (b - a)] \rho [k, \kappa_k - b + (b - a)] = [k, \kappa_k - a]$, поэтому $c \geq a$. Таким образом, доказано, что $c \geq \min\{a, b\}$, т.е. неравенство (11). Неравенство (10) следует из (11), как было показано при доказательстве леммы 5. □

Для связей II-го типа утверждение, аналогичное лемме 10, неверно. А именно, если i и j , а также j и k имеют связь II-го типа, то i и k могут иметь связь как I-го, так и II-го типа. Действительно, пусть

$$p = \min\{t \mid [j, \kappa_j] \rho [i, t]\}, \quad q = \min\{t \mid [i, \kappa_i] \rho [j, t],$$

$$u = \min\{t \mid [k, \kappa_k] \rho [j, t]\}, \quad v = \min\{t \mid [j, \kappa_j] \rho [k, t].$$

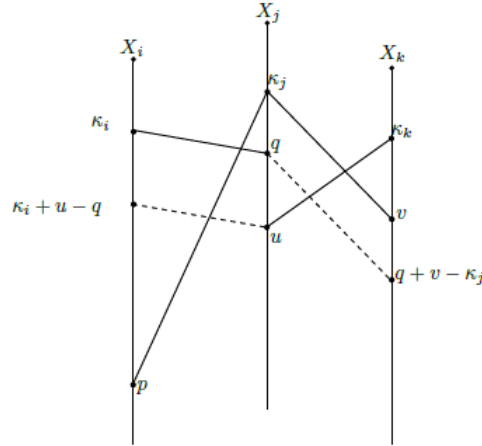


Рис. 4: Две связи II-го типа

По лемме 1 $\delta_i = \delta_j = \delta_k$, а значит, учитывая лемму 8, будет иметь место равенство $p + q - \kappa_i - \kappa_j = u + v - \kappa_j - \kappa_k$. Если $q = u$, то $[i, \kappa_i] \rho [j, q] \rho [k, \kappa_k]$, а это означает, что между i и k связь I-го типа. В случае $q \neq u$ между i и k связь II-го типа.

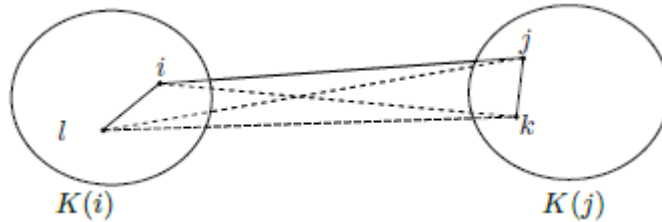
Пусть K – какой-либо σ -класс и $i \in K$. Положим

$$K(i) = \{j \in I \mid \text{между } i \text{ и } j \text{ связь I-го типа}\}. \quad (16)$$

Условимся считать, что если i таково, что связи между i и любым $j \in K \setminus \{i\}$ лишь II-го типа, то $K(i) = \{i\}$. Тогда K будет являться объединением попарно не пересекающихся множеств $K(i)$:

$$K = \cup \{K(i_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}. \quad (17)$$

Следующая лемма позволяет утверждать, что если между i и j связь II-го типа, а между j и k I-го, то отношения $\rho \cap (X_i \times X_j)$ и $\rho \cap (X_j \times X_k)$ однозначно определяют отношение $\rho \cap (X_i \times X_k)$.

Рис. 5: Однозначность $\rho \cap (X_l \times X_k)$

ЛЕММА 12. Если между X_i и X_j связь II-го типа, а между X_j и X_k I-го, то между X_i и X_k связь II-го типа. Пусть $\mu_i = \min\{t \mid [i, t] \rho [j, \kappa_j]\}$, $\mu_j = \min\{t \mid [j, t] \rho [i, \kappa_i]\}$, $\mu_k = \mu_j + \kappa_k - \kappa_j$. Тогда

$$\rho \cap ((X_i \times X_k) = \{([i, s], [i, t]) \mid s \geq \kappa_i, t \geq \kappa_k \text{ и } s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \pmod{\delta}\}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по лемме 1 $\delta_i = \delta_j = \delta_k$. Положим $\delta = \delta_i$. Так как имеется связь II-го типа, то $\delta > 0$. Тот факт, что между X_i и X_j связь II-го типа, следует из леммы 10. Пусть $[i, s] \rho [k, t]$. Так как между X_i и X_k связь II-го типа, то $s \geq \kappa_i$, $t \geq \kappa_k$. Далее получаем:

$$[k, t] \rho [i, s] = [i, \kappa_i + (s - \kappa_i)] \rho [j, \mu_j + s(-\kappa_i)] \rho [k, \mu_k + s - \kappa_i].$$

Следовательно, $\mu_k + s - \kappa_i \equiv t \pmod{\delta}$. Таким образом, $s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \pmod{\delta}$.

Пусть теперь $s \geq \kappa_i$, $t \geq \kappa_k$ таковы, что $s - \kappa_i \equiv t - \mu_k \pmod{\delta}$. Тогда $s - \kappa_i = t - \mu_k + r\delta$ при некотором $r \in \mathbb{Z}$.

Если $r \geq 0$, то

$$[i, s] = [i, \kappa_i + (s - \kappa_i)] \rho [j, \mu_j + s - \kappa_i] \rho [k, \mu_k + s - \kappa_i] = [k, \mu_k + (t - \mu_k + r\delta)] = [k, t + r\delta] \rho [k, t].$$

Если $r < 0$, то $t = (s - \kappa_i) + \mu_k + (-r)\delta$, и мы получим: $t \geq \mu_k$, а значит,

$$[k, t] = [k, \mu_k + (s - \kappa_i) + (-r)\delta] \rho [k, \mu_k + s - \kappa_i] \rho [j, \mu_j + s(-\kappa_i)] \rho [i, \kappa_i + s - \kappa_i] = [i, s].$$

□

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о строении произвольной конгруэнции свободного унара. В теореме описан процесс построения произвольной конгруэнции свободного унара. Этот процесс зависит от набора целых неотрицательных параметров, выбираемых в пределах определённых ограничений произвольным образом.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая конгруэнция ρ свободного унара $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i = [i, \mathbb{N}]$, может быть получена следующим образом:*

1. *выбираем произвольное отношение эквивалентности σ на множестве индексов I ;*
2. *для каждого σ -класса K берём любое число $\delta \in \mathbb{N}$ и полагаем $\delta_i = \delta$ для всех $i \in K$;*
3. *пусть K – σ -класс, в котором $\delta = 0$; тогда:*
 - *полагаем $[i, s] \rho [i, t] \Leftrightarrow s = t$;*
 - *выбираем произвольным образом элемент из K – пусть он обозначен символом 0 ;*
 - *выбираем произвольным образом $\mu_i, \nu_i \in K \setminus \{0\}$;*
 - *для различных элементов $i, j \in K \setminus \{0\}$ выбираем любые элементы ε_{ij} , удовлетворяющим условиям (7) и (11);*
 - *ρ -эквивалентность элементов $[0, s]$ и $[i, t]$ для $i \in K \setminus \{0\}$ определяется по формуле (9);*
 - *ρ -эквивалентность элементов $[i, s]$ и $[j, t]$ при $i, j \in K \setminus \{0\}$, $i \neq j$ определяется по формуле (8);*
4. *пусть K – σ -класс, в котором $\delta > 0$; тогда:*
 - *выбираем произвольным образом $\kappa_i \in \mathbb{N}$ для каждого $i \in K$;*
 - *для $i \in K$ и $s, t \in \mathbb{N}$ полагаем $[i, s] \rho [i, t] \Leftrightarrow (s, t) \in \rho(\kappa_i, \delta_i)$;*
 - *разбиваем K на непересекающиеся подмножества $K(i_\gamma)$ – см. формулу (17) (внутри одного $K(i_\gamma)$ будут связи I-го типа, а между разными $K(i_\gamma)$ – II-го;*
 - *для каждой пары различных элементов $i, j \in K(i_\gamma)$ выбираем числа $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие неравенствам (15) и (11);*
 - *для каждой пары различных элементов $i, j \in K(i_\gamma)$ ρ -эквивалентность элементов $[i, s]$ и $[j, t]$ определяются по формуле (12) с $m = \kappa_i - \varepsilon_{ij}$, $n = \kappa_j - \varepsilon_{ij}$; если $\delta_i = 1$, то ввиду лемм 7 и 8 между i и j связь II-го типа невозможна, поэтому $K = K(i_\gamma)$, а конгруэнция ρ_K уже построена в п. 4.2) и 4.5);*
 - *строим $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_{i_\eta})$ для представителей классов $K(i_\gamma)$;*

- после того, как в п. 4.6) построено $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_{i_\eta})$, по формуле (18) строим $\rho \cap (X_{i_\xi} \times X_j)$ для $j \in K(i_\eta)$, а затем $\rho \cap (X_i \times X_j)$ для $i \in K(i_\xi)$ по формуле, аналогичной формуле (18);
5. после того, как в п. 1)-4) будут построены отношения ρ_K , конгруэнция ρ будет получаться по формуле (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. N.Y. – Berlin W. de Gruyter, 2000, xvii + 529 pp.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М., Высш. школа, 1994, 191 с.
3. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B., 2000, “Acts over completely 0-simple semigroups” // Acta Cybernetica, Vol. 14, iss. 4, pp. 523 – 531.
4. Ohemke R. H., 1974, “Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups” // Pacif. J. Math., Vol. 54, iss. 2, pp. 143 – 164.
5. Халиуллина А. Р., 2013, “Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей” // Чебышевский сборник, Том 14, Выпуск 3, с. 142 – 146.
6. Халиуллина А. Р., 2013, “Конгруэнции полигонов над группами” // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, Том 13, Выпуск 4(2), с. 133 – 137.
7. Егорова Д. П., 1978, “Структура конгруэнций унарной алгебры” // Межвуз. научн. сборник “Упорядоченные множества и решётки”, Выпуск 5, с. 11 – 44.

REFERENCES

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., 2000, Monoids, acts and categories. N.Y. – Berlin W. de Gruyter, xvii + 529 pp.
2. Plotkin B., I., Gringlaz L., Ya., Gvaramiya A., A., 1994, Elements of the algebraic theory of automata. M., Higher School, 191 pp.
3. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B., 2000, “Acts over completely 0-simple semigroups” // Acta Cybernetica, Vol. 14, Iss. 4, pp. 523 – 531.
4. Ohemke R. H., 1974, “Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups” // Pacif. J. Math., Vol. 54, Iss. 2, pp. 143 – 164.
5. Khaliullina A., R., 2013, ‘Congruences of polygons over semigroups of right zeros’ // Chebyshevskii Sbornik, Vol. 14, Iss. 3, pp. 142–146.
6. Khaliullina A., R., 2013, “Congruences of polygons over groups” // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science, Vol. 13, Iss. 4(2), pp. 133 – 137.
7. Egorova D. P., 1978, “The structure of congruences of unary algebra” // Inter-university. scientific. collection “Ordered Sets and lattices”, Iss. 5, pp. 11 – 44.

Получено: 07.02.2023

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-27-39

**Нелинейный метод угловых пограничных функций
в задачах с кубическими нелинейностями**

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предполагается, что в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической. Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций, который предполагает выполнение следующих шагов:

- 1) разбиение области на части;
- 2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
- 3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
- 4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

В настоящей работе удалось построить барьерные функции, пригодные сразу во всей области. Вид барьерных функций определяются с помощью погранслойных функций, являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с учетом необходимых свойств искомых решений. В результате построено полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обоснована его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 27–39.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-27-39

**Nonlinear method of angular boundary functions
in problems with cubic nonlinearities**

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

In the rectangle $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ we consider an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

It is assumed that at the corner points of the rectangle the function F with respect to the variable u is cubic. To construct the asymptotics of the solution to the problem, the nonlinear method of angular boundary functions is used, which involves the following steps:

- 1) splitting the area into parts;
- 2) construction in each subdomain of lower and upper solutions of the problem;
- 3) continuous joining of the lower and upper solutions on the common boundaries of the subdomains;
- 4) subsequent smoothing of piecewise continuous lower and upper solutions.

In the present work, we succeeded in constructing barrier functions suitable for the entire region at once. The form of barrier functions is determined using boundary-layer functions that are solutions of ordinary differential equations, as well as taking into account the necessary properties of the desired solutions. As a result, a complete asymptotic expansion of the solution for $\varepsilon \rightarrow 0$ is constructed and its uniformity in a closed rectangle is justified.

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2023, "Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 27–39.

1. Введение

Исследования сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений в областях с негладкими границами привели к созданию метода угловых пограничных функций. Сначала в 1972 году В. Ф. Бутузов рассмотрел разностные уравнения (см. [1]), для решения которых потребовалось введение углового пограничного слоя и угловых пограничных функций. В 1978 году метод был успешно распространен на сингулярно возмущенные параболические задачи (см. [2]).

Впоследствии В. Ф. Бутузовым и его учениками с помощью этого метода были исследованы многочисленные прикладные задачи. Однако, при рассмотрении нелинейных уравнений ставились краевые условия второго рода (задача Неймана), вследствие чего не учитывалась исходная нелинейность задачи и для построения угловых пограничных функций получались линейные параболические задачи, решение которых не вызывало трудностей.

В теории и практике применения дифференциальных уравнений в частных производных основной интерес представляют задачи с краевыми условиями первого рода (задача Дирихле). При рассмотрении таких задач в областях с угловыми точками границы угловой погранслои определяется из нелинейных задач, решение которых представляет основную проблему. К таким задачам в 1991 году одному из авторов удалось применить метод верхних и нижних решений. Используя погранслойные функции, получающиеся как решения обыкновенных дифференциальных уравнений, были построены нижние и верхние решения для нелинейных уравнений в частных производных, определяющих угловые пограничные функции (см. [3]). В первых работах рассматривались простейшие квадратичные нелинейности. Впоследствии был сделан переход к нелинейностям общего вида, а для построения угловых пограничных функций был предложен способ, предполагающий следующие шаги:

1) разбиение области на части; 2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи; 3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей; 4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Так появился нелинейный метод угловых пограничных функций. На основании последних исследований (см. [4–11]) стало возможным завершить формирование этого метода и оформить его в виде законченной теории, имея в виду дальнейшее применение этого метода к многочисленным прикладным задачам.

Для обоснования построенной асимптотики решения вместо применявшегося в первых работах способа впоследствии был использован универсальный метод дифференциальных неравенств, предложенный Н. Н. Нефедовым (см. [12]).

В настоящей работе с помощью нелинейного метода угловых пограничных функций решается задача с кубическими нелинейностями в угловых точках границы.

2. Постановка задачи

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (4)$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t - параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удастся. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

3. Алгоритм решения задачи

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (5)$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [13]) и мы приведем ее схематично. В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (6):

$$F(u, x, t, \varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики $\bar{u}$ строится в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальными и граничными условиями. Погранслоиные функции Π , Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}.$$

– растянутые переменные.

С целью устранения невязок с начальными и граничными условиями вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi, \tau, \varepsilon)$ и $P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon)$, нахождение которых доставляет основные трудности при решении поставленной задачи. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi, \tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}_+^2$ плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) - F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad (7)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (8)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0, \tau), \quad Q_k = Q_k(\xi, 0), \quad P_k = P_k(\xi, \tau).$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области $\mathbb{R}_+^2$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) P_k + h_k, \quad (10)$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \quad (11)$$

$$P_k(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (13)$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0, \dots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Если число $\varphi(0, 0) - \bar{u}_0(0, 0) = 0$, то решением задачи для $\Pi_0(x, \tau)$ при $x = 0$ будет функция $\Pi_0(0, \tau) \equiv 0$, решением задачи для $Q_0(\xi, t)$ при $t = 0$ будет функция $Q_0(\xi, 0) \equiv 0$. Решением задачи (7)–(9) будет функция $P_0(\xi, \tau) \equiv 0$, а коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ в задачах (10)–(12) будет постоянным и положительным:

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) = F'(\bar{u}_0) > 0.$$

В этом случае решения задач (10)–(12) выписываются в явном виде и для них получаются экспоненциальные оценки вида (13).

Если число $\varphi(0, 0) - \bar{u}_0(0, 0) \neq 0$, то, вообще говоря, не известно имеет ли задача (7)–(9) решение и удовлетворяет ли решение в случае существования экспоненциальной оценке вида (13). Кроме этого, в задачах (10)–(12) коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ может в зависимости от вида функции F и величины $\varphi(0, 0)$ принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Даже в случае разрешимости задач (7)–(9) и (10)–(12) доказательство того, что задача (1)–(3) имеет решение, все равно остается проблемой. Это связано с тем, что, не зная явного вида функции $P_0(\xi, \tau)$, мы не можем знать явного вида коэффициента $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$, который может оказаться как положительным, так и отрицательным. Это обстоятельство, вообще говоря, не позволяет обосновать построенную асимптотику решения.

Таким образом, в результате реализации метода угловых погранфункций для исследования задачи (1)–(3) мы перешли к задачам (7)–(9) и (10)–(12). Дальнейшие исследования предполагают разрешение, по крайней мере, трех основных проблем:

1) Имеет ли задача (7)–(9) решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (13)?

2) Если задача (7)–(9) имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке вида (13), то имеют ли задачи (10)–(12) решения, удовлетворяющие подобным оценкам?

3) Если задачи (7)–(9) и (10)–(12) разрешимы, т. е. если ряд (5) может быть построен, то имеет ли задача (1)–(3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$?

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Для доказательства существования решения задачи (7)–(9) используется метод верхних и нижних решений (см. [14–16]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе } \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leq Z \leq Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

Для удобства введем обозначения

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Тогда задача (7)–(9) примет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области } \mathbb{R}_+^2, \tag{14}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{15}$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty. \tag{16}$$

4. Основные результаты

Будем предполагать, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0).$$

В работе [9] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) > 0.$$

Если граничные значения $\varphi(k) > \bar{u}_0$, то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Заметим, что в условиях теоремы 1 функция $F(u)$ на промежутке $u > \bar{u}_0$ возрастает и выпукла вниз.

Теперь рассмотрим случай, когда в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

В этом случае функция $F(u)$ при $u > \bar{u}_0$ сначала выпукла вверх, в точке $u = 0$ имеет перегиб и далее становится выпуклой вниз. В отличие от предыдущего, когда предполагалось, что $\bar{u}_0 > 0$, "старая" техника не работает. В работе [10] для верхнего решения удалось получить достаточно оптимальный результат, учитывающий влияние точки перегиба.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ находится в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0, \tag{17}$$

то функция

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}$$

является верхним решением задачи (14)–(16).

Для нижнего решения был получен сравнительно слабый результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ находится в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq 0, 88\bar{u}_0 < 0,$$

то функция

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}$$

является нижним решением задачи (14)–(16).

В результате последних исследований было построено нижнее решение в виде одной барьерной функции, которая учитывает влияние точки перегиба в той же мере, что и верхний барьер.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то функция

$$Z_-(\xi, \tau) = -C \exp(-k(\xi + \tau)),$$

где C и k – некоторые положительные числа, является нижним решением задачи (14)–(16).

Доказательство. Сначала нужно доказать неравенство

$$L(Z_-) = (a^2k + 1)kZ_- - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_-) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \geq 0. \quad (18)$$

Для рассматриваемой функции $F(u)$ имеем

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_0 + u) &= u^3 + 3\bar{u}_0u^2 + 3\bar{u}_0^2u, \\ L(Z_-) &= (a^2k + 1)kZ_- - (\Pi_0 + Q_0 + Z_-)^3 - 3\bar{u}_0(\Pi_0 + Q_0 + Z_-)^2 - 3\bar{u}_0^2(\Pi_0 + Q_0 + Z_-) + \\ &\quad + \Pi_0^3 + 3\bar{u}_0\Pi_0^2 + 3\bar{u}_0^2\Pi_0 + Q_0^3 + 3\bar{u}_0Q_0^2 + 3\bar{u}_0^2Q_0 = \\ &= (a^2k + 1)kZ_- - ((\Pi_0 + Q_0 + Z_-)^3 - \Pi_0^3 - Q_0^3) - \\ &\quad - 3\bar{u}_0((\Pi_0 + Q_0 + Z_-)^2 - \Pi_0^2 - Q_0^2) - 3\bar{u}_0^2((\Pi_0 + Q_0 + Z_-) - \Pi_0 - Q_0) = \\ &= (a^2k + 1)kZ_- - (3\Pi_0^2Q_0 + 3\Pi_0Q_0^2 + 3(\Pi_0 + Q_0)^2Z_- + 3(\Pi_0 + Q_0)Z_-^2 + Z_-^3) - \\ &\quad - 3\bar{u}_0((2\Pi_0Q_0 + 2(\Pi_0 + Q_0)Z_- + Z_-^2) - 3\bar{u}_0^2Z_-) = \\ &= [a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0) - 3(\Pi_0 + Q_0 + \bar{u}_0)Z_- - Z_-^2] Z_- - \\ &\quad - 3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0). \end{aligned}$$

Так как $\Pi_0, Q_0 \in (0, \varphi - \bar{u}_0]$, то $\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0 \in (2\bar{u}_0, 2\varphi]$, где $\varphi < 0$. Поэтому

$$-3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0) > 0.$$

Чтобы удовлетворить неравенству (18), в выражении для $L(Z_-)$ достаточно иметь

$$a^2k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0) - 3(\Pi_0 + Q_0 + \bar{u}_0)Z_- - Z_-^2 < 0.$$

Здесь

$$\Pi_0 + Q_0 + \bar{u}_0 \in (\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)] \quad \text{и} \quad \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0) < 0$$

в силу условия (17). Поэтому

$$\Pi_0 + Q_0 + \bar{u}_0 < 0 \quad \text{и} \quad -3(\Pi_0 + Q_0 + \bar{u}_0)Z_- - Z_-^2 < 0,$$

однако последнее выражение стремится к нулю при $\xi + \tau \rightarrow \infty$.

Рассмотрим функцию

$$h(s) = -3s(s + 2\bar{u}_0), \quad \text{где } s = \Pi_0 + Q_0 \in (0, 2(\varphi - \bar{u}_0)].$$

Парабола $h(s)$ имеет ветви, направленные вниз, пересекает ось абсцисс в точках 0 и $-2\bar{u}_0$, вершина находится в точке с координатами $(-\bar{u}_0, 3\bar{u}_0^2)$. Так как $\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0$, то $0 < 2(\varphi - \bar{u}_0) < -\bar{u}_0$. Поэтому

$$h(2(\varphi - \bar{u}_0)) < h(-\bar{u}_0) = 3\bar{u}_0^2.$$

За счет выбора достаточно малого положительного числа k можно добиться отрицательности выражения

$$\begin{aligned} a^2 k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 3(\Pi_0 + Q_0)(\Pi_0 + Q_0 + 2\bar{u}_0) &\leq a^2 k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 + h(2(\varphi - \bar{u}_0)) = \\ &= a^2 k^2 + k - 3\bar{u}_0^2 - 12(\varphi - \bar{u}_0)\varphi. \end{aligned}$$

Для этого нужно взять k из промежутка

$$0 < k < \frac{-1 + \sqrt{1 + 12a^2(\bar{u}_0^2 + 4(\varphi - \bar{u}_0)\varphi)}}{2a^2}. \quad (19)$$

При таком условии $L(Z_-) > 0$ внутри области $\mathbb{R}_+^2$. Кроме этого для нижнего решения должны выполняться неравенства

$$Z_-(0, \tau) = -C \exp(-k\tau) \leq -\Pi_0(0, \tau), \quad (20)$$

$$Z_-(\xi, 0) = -C \exp(-k\xi) \leq -Q_0(\xi, 0), \quad (21)$$

$$Z_-(\xi, \tau) = -C \exp(-k(\xi + \tau)) \leq Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}. \quad (22)$$

Воспользуемся оценками

$$0 < \Pi_0(0, \tau) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-k_1 \tau),$$

$$0 < Q_0(\xi, 0) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-k_2 \xi),$$

где $k_{1,2}$ – некоторые положительные числа. Для выполнения (20)–(22) достаточно взять

$$C \geq \varphi - \bar{u}_0, \quad 0 < k \leq \min(k_1, k_2).$$

С учетом (19) получаем окончательные условия выбора C и k :

$$C \geq \varphi - \bar{u}_0, \quad 0 < k < \min \left(k_1, k_2, \frac{-1 + \sqrt{1 + 12a^2(\bar{u}_0^2 + 4(\varphi - \bar{u}_0)\varphi)}}{2a^2} \right). \quad (23)$$

Это завершает доказательство теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то задача (7)–(9) имеет решение $P_0(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (13).

Доказательство. Барьерные функции для $P_0(\xi, \tau)$ имеют вид

$$-C \exp(-k(\xi + \tau)) \leq P_0(\xi, \tau) \leq -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}$$

и удовлетворяют оценкам вида (13). Значит, оценке того же вида удовлетворяет и $P_0(\xi, \tau)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0.$$

Если граничное значение $\varphi = \varphi(0)$ удовлетворяет условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

то задачи (10)–(12) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (13).

Доказательство. Имеем соотношение

$$\Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} = (\varphi - \bar{u}_0) \left(1 - \left(1 - \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0} \right) \left(1 - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} \right) \right),$$

которое показывает, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0} \in (\bar{u}_0; \varphi].$$

Поэтому

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0 \leq \bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0} \leq \varphi.$$

Для $u \leq \varphi$ производная $F'(u) \geq F'(\varphi) > 0$, поэтому коэффициенты в задачах (10)–(12)

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geq F'(\varphi) > 0,$$

что гарантирует разрешимость этих задач с экспоненциальной оценкой убывания. Теорема доказана.

Функции $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, определяются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным при дополнительном условии (17).

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ удовлетворяют условию (17):

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k , Q_k , Q_k^* , P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующих теорем в [4–10].

Замечание. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [3–11] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 12. - № 3. 1972. - С. 582-597. (English transl.: Butuzov V.F. Asymptotic Properties of the Solution of a Finite-Difference Equation with Small Steps in a Rectangular Region // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1972. Vol. 12. № 3. pp. 14-34.)
2. Бутузов В.Ф., Нестеров А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. - С. 49-56.
3. Денисов И.В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991. - С. 37.
4. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.57. - № 2. 2017. - С. 255-274 (English transl.: Denisov I.V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. № 2. pp. 253-271.)
5. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.58. № 4. 2018. - С. 575-585. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58. № 4. pp. 562-571.)
6. Денисов И.В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. Т. X. Вып. 2 (30). - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2009. - С. 79-108.
7. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.59. № 1. 2019. - С. 102-117. (English transl.: Denisov I.V., Denisov A.I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59. № 1. pp. 96-111.)
8. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.59. № 9. 2019. - С. 1581-1590. (English transl.: Denisov I.V., Denisov A.I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59. № 9. pp. 1518-1527.)
9. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.61. № 2. 2021. - С. 256-267. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic

- Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. № 2. pp. 242–253.)
10. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. № 11. 2021. - С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. № 11. pp. 1855-1863.)
 11. Денисов А.И., Денисов И.В. Математические модели процессов горения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 185, ВИНТИ РАН, М., 2020. - С. 50–57.
 12. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных. // Дифференц. уравнения. Т.31. № 4. 1995. - С. 719–723. (English transl.: Nefedov N.N. The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations // Differential Equations. 1995. Vol. 31. № 4. pp. 668–671.)
 13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
 14. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, № 2. P. 125 - 146.
 15. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979 - 1000.
 16. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. – XIII. P. 1 - 29.

REFERENCES

1. Butuzov V.F., 1972, “Asymptotic Properties of the Solution of a Finite-Difference Equation with Small Steps in a Rectangular Region” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 12. № 3. pp. 14-34.
2. Butuzov V.F., Nesterov A.V., 1978, “On one singularly perturbed equation of parabolic type” // Bulletin of the Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics. № . 2. S. 49-56.
3. Denisov I.V., 1991, “On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle” // Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles. scientific. tr. - Bishkek: Ilim. p. 37.
4. Denisov I.V., 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 57. No. 2. pp. 253-271.
5. Denisov I.V., 2018, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity” // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 58. No. 4. Pp. 562-571.

6. Denisov I.V., 2009, “On some classes of functions” // *Chebyshevskii Sbornik*. Т. X. 2 (30). - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 79-108.
7. Denisov A.I., Denisov I.V., 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities” // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 59. No. 1. pp. 96-111.
8. Denisov A.I., Denisov I.V., 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities” // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 59. No. 9. Pp. 1518–1527.
9. Denisov I.V., 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities” // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 61. № 2. pp. 242–253.
10. Denisov I.V., 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points” // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 61. № 11. pp. 1855-1863.
11. Denisov A.I., Denisov I.V., 2020, “Mathematical models of combustion processes” // *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, 185, VINITI RAN, Moscow - P. 50–57.
12. Nefedov N.N., 1995, “The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations” // *Differential Equations*. . Vol. 31. № 4. pp. 668–671.
13. Vasilyeva A.B., Butuzov V.F., 1990, “Asymptotic methods in the theory of singular perturbations” - M.: Higher school.
14. Amann H., 1971, “On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems” // *Indiana Univ. Math. J.* Vol.21, № 2. P. 125 - 146.
15. Sattinger D.H., 1972, “Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems” // *Indiana Univ. Math. J.* V. 21. № 11. P. 979 - 1000.
16. Amann H., 1978, “Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe” / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. – XIII. P. 1 - 29.

Получено: 28.01.2023

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 510.53, 512.54.05

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-40-49

Проблема разрешимости позитивной теории произвольной группы алгоритмически неразрешима¹

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина

Дурнев Валерий Георгиевич — Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (г. Ярославль).*e-mail: durnev@uniyar.ac.ru***Зеткина Алена Игоревна** — Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (г. Ярославль); Воронежский государственный университет (г. Воронеж).*e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru***Аннотация**

В статье доказано, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольному конечному заданию группы определить, разрешима ли ее позитивная теория. Указанное групповое свойство не является марковским, поэтому к нему не применима фундаментальная теорема Адяна – Рабина.

Ключевые слова: позитивная формула, позитивная теория группы, позитивная теория класса групп, алгоритмическая разрешимость, алгоритмическая неразрешимость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина. Проблема разрешимости позитивной теории произвольной группы алгоритмически неразрешима // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 40–49.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 510.53, 512.54.05

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-40-49

The problem of solvability of a positive theory of an arbitrary group is algorithmically unsolvable

V. G. Durnev, A. I. Zetkina

Durnev Valeriy Georgievich — Yaroslavl State University (Yaroslavl).*e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru***Zetkina Alena Igorevna** — Yaroslavl State University (Yaroslavl); Voroneg State University (Voroneg).*e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru***Abstract**

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19 - 52 - 26006).

In paper proved that it is impossible to build an algorithm that allows you to determine from an arbitrary finite task of the group whether it is solvable her positive theory. The specified group property is not Markov, so the fundamental Adyan-Rabin theorem does not apply to it.

Keywords: positive formula, positive group theory, positive group class theory, algorithmic solvability, algorithmic insolubility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Durnev, A. I. Zetkina, 2023, "The problem of solvability of a positive theory of an arbitrary group is algorithmically unsolvable", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 40–49.

100-летию со дня рождения
М. Н. Добровольского посвящается

1. Проблема распознавания группового свойства α

По произвольному конечному заданию группы образующими и определяющими соотношениями определить, обладает ли эта группа свойством α .

Напомним, что групповое свойство α называется *инвариантным*, если из того, что для группы G выполнено свойство α , а группа H изоморфна группе G следует, что и для группы H выполнено свойство α . Инвариантное групповое свойство α называется *марковским*, если существует конечно определенная группа G_α^+ , для которой выполнено свойство α и существует конечно определенная группа G_α^- , которая не вложима ни в какую конечно определенную группу, для которой выполнено свойство α . Можно привести очень много интересных примеров марковских свойств. Например, " G - единичная группа", " G - конечная группа", " G - периодическая группа", " G - циклическая группа", " G - абелева группа", " G - нильпотентная группа", " G - разрешимая группа", "на группе G - выполняется нетривиальное тождество", " G - простая группа", " G - финитно аппроксимируемая группа", "в группе G - разрешима проблема равенства", " G - свободная группа", " G - группа без кручения", "группа G $\exists$ -эквивалентна свободной неабелевой группе", "группа G $\forall$ -эквивалентна свободной неабелевой группе", "группа G элементарно эквивалентна свободной неабелевой группе" и т.д. Поэтому особый интерес представляет **фундаментальная теорема С.И. Адяна** [1], [2] – **М.О. Рабина** [3].

ТЕОРЕМА 1 (Адян – Рабин). *Проблема распознавания любого марковского группового свойства алгоритмически неразрешима.*

2. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания разрешимости позитивной теории произвольной группы

Существуют интересные примеры немарковских свойств, как алгоритмически разрешимых, так и алгоритмически неразрешимых. Например, немарковскими являются свойства " G совпадает со своим коммутантом", " G хопфова". Первое свойство алгоритмически разрешимо, а второе – алгоритмически неразрешимо: в работе [4] D.J. Collings доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания хопфовости для конечно определенных групп, а в работах [5], [6] и [7] C.F. Miller III и P.E. Schupp доказали, что любая конечно определенная группа вложима в некоторую хопфову конечно определенную группу, значит свойство групп "Быть хопфовой группой" не является марковским.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элементарная теория с константами $Th_G(G)$ группы G – это множество всех замкнутых (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) \Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^k ((\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \& (\bigwedge_{t \in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}$ – слова в алфавите переменных и констант $\{x_1, \dots, x_n\} \cup G$,

A_i и B_i – множества (возможно пустые), а $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\forall$ или $\exists$,

истинных на группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элементарная теория без констант $Th(G)$ группы G – это множество всех замкнутых (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) \Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^k ((\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \& (\bigwedge_{t \in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}$ – слова в алфавите переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$,

A_i и B_i – множества (возможно пустые), а $Q_1, \dots, Q_n$ – кванторы $\forall$ или $\exists$,

истинных на группе G .

При этом $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ называется кванторной приставкой формулы Φ , $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ – тип кванторной приставки, а Ψ – бескванторной частью формулы Φ .

Если зафиксировать тип кванторной приставки $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n)$ рассматриваемых формул Φ не накладывая при этом никаких ограничений на их бескванторную часть Ψ , то получим понятие элементарной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_G(G)$ -теории группы G (с константами)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула Φ называется позитивной, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т.е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^k (\bigwedge_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Позитивной теорией с константами $Th_G^+(G)$ группы G называется подмножество ее элементарной теории с константами $Th_G(G)$, состоящее из всех замкнутых позитивных формул Φ (истинных на группе G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Позитивной теорией без констант $Th^+(G)$ группы G называется подмножество ее элементарной теории без констант $Th(G)$, состоящее из всех замкнутых позитивных формул Φ (истинных на группе G).

Если зафиксировать тип кванторной приставки $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ рассматриваемых позитивных формул Φ из $Th_G^+(G)$ не накладывая при этом никаких ограничений на их позитивную бескванторную часть Ψ , то получим понятие позитивной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_G^+(G)$ -теории с константами группы G .

Аналогичным образом определяется понятие позитивной $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G)$ -теории без констант группы G .

Если элементарные теории без констант групп G и H совпадают ($Th(G) = Th(H)$), то группы G и H называются элементарно эквивалентными или элементарно неотличимыми.

Если элементарные $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -теории без констант групп G и H совпадают ($Q_1 Q_2 \dots Q_n Th(G) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th(H)$), то группы G и H называются элементарно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -эквивалентными или элементарно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -неотличимыми.

Если *позитивные теории без констант* групп G и H совпадают ($Th^+(G) = Th(H)^+$), то группы G и H называются *позитивно эквивалентными* или *позитивно неотличимыми*.

Если *позитивные $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -теории без констант* групп G и H совпадают ($Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(H)$), то группы G и H называются *позитивно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -эквивалентными* или *позитивно $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ -неотличимыми*.

Если группа H является подгруппой группы G ($H \leq G$), то можно естественным образом определить равенства $Th_H(H) = Th_H(G)$, $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H(H) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H(G)$, $Th_H^+(H) = Th_H^+(G)$ и $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H^+(H) = Q_1 Q_2 \dots Q_n Th_H^+(G)$.

Ю.И. Мерзляков в работе [8] установил, в частности, *позитивную эквивалентность (позитивную неотличимость) любых двух свободных нециклических групп*. Более того, он доказал, что для любых $2 \leq n \leq m$ выполняется равенство $Th_{F_n}^+(F_n) = Th_{F_n}^+(F_m)$. Г.С. Сасердот в работе [9] частично усилил результат Ю.И. Мерзлякова – он доказал, что если A и B – неединичные группы и порядок одной из них больше 2, то их свободное произведение $A * B$ позитивно эквивалентно свободной группе F_2 ($Th^+(A * B) = Th^+(F_2)$).

Н.А. Перязев в работе [10] получил критерии позитивной неотличимости алгебраических систем и на этой основе в работе [11] доказал, что для любых двух свободных моноидов M_n и M_m (свободных полугрупп с единицей) рангов n и m соответственно при $2 \leq n \leq m$ выполняется равенство $Th_{M_{n-2}}^+(M_n) = Th_{M_{n-2}}^+(M_m)$.

В.Н. Ремесленников в работе [12] исследовал $\exists$ -свободные группы, т.е. группы $\exists$ -теории без констант которых совпадают с $\exists$ -теорией без констант свободной нециклической группы (свободной группы F_2), и установил, что для конечно порожденных групп это понятие равносильно понятию ω -аппроксимируемости свободными группами.

Так как групповое свойство “группа G является $\exists$ -свободной” – марковское, то по фундаментальной теореме С.И. Адяна – М.О. Рабина проблема его распознавания алгоритмически неразрешима, т.е. невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольному конечно-му заданию группы образующими и определяющими соотношениями определить, является ли эта группа $\exists$ -свободной, т.е. совпадает ли ее $\exists$ -теория без констант с $\exists$ -теорией без констант свободной нециклической группы F_2 .

Нас будут интересовать немарковские свойства групп: “*позитивная теория без констант $Th^+(G)$ группы G алгоритмически разрешима*”, *позитивная $Q_1 Q_2 \dots Q_n Th^+(G)$ -теория без констант группы G алгоритмически разрешима*.

Эти свойства не являются марковскими, так как по теореме Г.С. Сасердота [9] для любой группы G группа $G * F_2$, как и любая группа, имеющая среди гомоморфных образов группу вида $A * B$, где A и B – неединичные группы и по крайней мере одна из них содержит не менее трех элементов, позитивно эквивалентна свободной нециклической группе. Значит любая конечно определенная группа вложима в конечно определенную группу, позитивная теория которой совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы, а значит, как доказал Г.С. Маканин в работе [13] алгоритмически разрешима.

ТЕОРЕМА 2. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе G определить, разрешима ли ее позитивная теория.*

ТЕОРЕМА 3. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе G определить, разрешима ли ее позитивная $\forall^2 \exists^m$ -теория.*

Обозначим через $F_2(\mathfrak{N}_2)$ свободную нильпотентную группу ранга 2 степени нильпотентности 2. Как свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_2$ нильпотентных групп степени нильпотентности ≤ 2 она имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid [[x, y], z] = 1 \rangle\rangle.$$

Для нас особую важность будет иметь тот факт, что группа $F_2(\mathfrak{N}_2)$ является *конечно определенной* с заданием

$$\langle \langle a, b \mid [[a, b], a] = 1, [[a, b], b] = 1 \rangle \rangle,$$

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор элементов a и b .

ЛЕММА 1. *Существует такое n , что позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ ($\forall^2\exists^n Th^+(F_2(\mathfrak{N}_2))$) алгоритмически неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным следствием **фундаментального результата** М. Дэвиса – Дж. Робинсон – П. Путнама – Ю.В. Матиясевича [14] является следующее утверждение:

по произвольному рекурсивно перечислимому множеству U натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_U(x_1)$ вида

$$(\exists x_2 \dots x_p) \Psi, \text{ где } \Psi = \big\&_{i=1}^m \varphi_i$$

и каждая из формул φ_i имеет один из следующих видов:

$$x_i + x_j = x_t, \quad x_i \cdot x_j = x_t, \quad x_i = x_t, \quad x_i = c_t,$$

где c_t – целое число, что для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U(n)$ истинна на кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \models \Phi_U(n)$).

А.И. Мальцев в работе [15] ввел предикат

$$R(x_1, x_2, x_3) = (\exists z_1 z_2) \Psi, \text{ где}$$

$$\Psi = \left(\big\&_{i=1}^2 [a_i, z_i] = x_i \& [z_1, a_2] = 1 \& [z_2, a_1] = 1 \& [z_1, z_2] = x_3 \right)$$

и доказал, что для произвольных целых чисел t, s и r :

формула $R(c^t, c^s, c^r)$, где $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1$ – коммутатор элементов a_1 и a_2 , истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ тогда и только тогда, когда $r = ts$.

Приведем некоторые хорошо известные факты о группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$. Ее центр совпадает с коммутантом и является бесконечной циклической группой, порожденной, например, коммутатором $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1$. Для любых трех элементов u, v и w группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ выполняются равенства $[uv, w] = [u, w][v, w]$ и $[w, uv] = [w, u][w, v]$. Для любых целых чисел n и m выполняются равенства

$$[a_2^n, a_1^m] = [a_2, a_1]^{nm} = [a_2^{nm}, a_1] = [a_2, a_1^{nm}] = [a_1, a_2]^{-nm} = [a_1^{-nm}, a_2] = [a_1, a_2^{-nm}].$$

Поэтому для произвольного элемента g группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедливы эквивалентности

$$\begin{aligned} g \text{ степень элемента } c &\iff g \text{ принадлежит коммутанту группы } F_2(\mathfrak{N}_2) &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)g = [u, a_1] &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)g = [u, a_2] &\iff \\ &\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } (\exists u)(\exists v)g = [u, v] &\iff \\ &g \text{ принадлежит центру группы } F_2(\mathfrak{N}_2) &\iff \end{aligned}$$

$$\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } \big\&_{i=1}^2 [x, a_i] = 1.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}(x)$, например, формулу $\bigwedge_{i=1}^2 [x, a_i] = 1$ или формулу $(\exists u)(\exists v)x = [u, v]$. Тогда для произвольного элемента g группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедлива эквивалентность

$$g \text{ степень элемента } c \iff \text{ на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \text{ истинна формула } \mathbb{Z}(g).$$

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества U натуральных чисел преобразуем формулу $\Phi_U(x_1)$, относящуюся к кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$, в формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$, относящуюся к группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$, полагая

$$\Phi_U^{(1)}(x_1) = (\exists x_2 \dots x_p)(\Psi_1, \& \bigwedge_{i=2}^p \mathbb{Z}(x_i)),$$

где Ψ_1 получается из Ψ заменой каждой подформулы φ вида $x_t + x_s = x_r$ на $x_t x_s = x_r$, вида $x_t x_s = x_r$ на $R(x_t, x_s, x_r)$, вида $x_t = m_s$ на $x_t = c^{m_s}$. Подформулы вида $x_t = x_s$ не меняются.

Тогда для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U^{(1)}(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U^{(1)}(c^n)).$$

Приведем формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$ к предваренной нормальной форме, заменим x_1 на x и переименуем переменные, получим формулу $\Phi_U^{(2)}(x)$ вида

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right)$$

такую, что для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U^{(2)}(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U^{(2)}(c^n)).$$

Полагаем

$$\Phi_U(x) = (\forall z_1 z_2)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1, z_2) = 1 \right).$$

Тогда для произвольного натурального числа n справедлива эквивалентность:

$$n \in U \text{ тогда и только тогда, когда формула } \Phi_U(c^n) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_2) \\ (F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U(c^n)).$$

Взяв в качестве множества U рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, получим, что при некотором n алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2 \exists^n$ -теория группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$. $\square$

Так как справедливы эквивалентности

$$\begin{aligned} \text{формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) &\iff \\ \text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_{c+1}) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^2 [w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2), a_j] = 1 \right) & \\ \text{формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1 \right) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) &\iff \\ \text{при любом } p \geq 2 \text{ на группе } F_p(\mathfrak{N}_c) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, \right. & \\ \left. x_n, a_1, a_2) = 1 \right), & \end{aligned}$$

то по индукции легко получим, что при некотором n при любых $p \geq 2$ и $c \geq 2$ алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2 \exists^n$ -теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$.

Заметим, что попытки дальнейшего усиления доказанных утверждений наталкиваются на некоторые препятствия.

Так как формула вида

$$(\forall z_1)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1) = 1 \right)$$

истинна на группе $F_m(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на бесконечной циклической группе $F_1 = \langle \langle a_1 \rangle \rangle$ истинна формула

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1) = 1 \right),$$

то при любом n , при любых p и с позитивная $\forall\exists^n$ -теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$ алгоритмически разрешима.

Так как формула вида

$$(\forall z_1) \dots (\forall z_p)(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p) = 1 \right)$$

истинна на группе $F_p(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на этой группе истинна формула

$$(\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i=1}^m w_i(x, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p) = 1 \right),$$

то проблема истинности на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ для формул вида

$$(\forall z_1)(\forall z_2)(\exists x_1 \dots x_n) w(x, x_1, \dots, x_n, z_1, z_2) = 1$$

сводится к вопросу об истинности на этой группе формул вида

$$(\exists x_1 \dots x_n) w(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = 1,$$

т.е. к вопросу о разрешимости в этой группе для систем из одного уравнения. Последняя проблема алгоритмически разрешима, так как из однозначной представимости элементов группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ в виде $a_1^u a_2^v c^z$, где u, v и z – целые числа, следует возможность свести эту проблему к вопросу о существовании целочисленного решения у системы из двух линейных и одного квадратичного уравнений с целыми коэффициентами. А последний вопрос алгоритмически разрешим.

Г.С. Маканин [13] используя работу Ю.И. Мерзлякова [8] доказал разрешимость позитивной теории (с константами) свободной группы любого ранга и класса всех групп (без констант).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. теоремы. Воспользуемся конструкцией Ч. Миллера [5]. Пусть группа G имеет конечное задание образующими элементами и определяющими соотношениями

$$G = \langle \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle,$$

а w – произвольное слово в ее алфавите. Следуя работе [5] Ч. Миллера обозначим через G_w конечно определенную группу со следующим заданием

$$\begin{aligned} G_w = \langle \langle a_1, \dots, a_n a, b, c \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1, a^{-1}ba = (bc)^{-1}c(bc), \\ (ba^2)^{-1}a(ba^2) = (bc^2)^{-1}c(bc^2), a^{-3}[w, b]a^3 = c^{-3}bc^3, \\ a^{-(3+i)}a_i ba^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)} (i = 1, 2, \dots, n) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

где a, b и c – новые буквы.

Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Группа G_w порождается элементами b и ca^{-1} .
- 2) Если $w = 1$ в группе G , то G_w – единичная группа.
- 3) Если $w \neq 1$ в группе G , то группа G является подгруппой группы G_w .

Группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание, содержащее 4 образующих элемента и $(m+2)$ определяющих соотношения.

Возьмем в качестве исходной группы G группу В.В. Борисова с неразрешимой проблемой равенства с 12 определяющими соотношениями [16], тогда группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание вида

$$\langle\langle a, b \mid R_1 = 1, \dots, R_{14} = 1 \rangle\rangle.$$

Существует такое n , что

- 1) Если $w = 1$ в группе G , то *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2) = F_2(\mathfrak{N}_2)$ алгоритмически неразрешима.*

3) Если $w \neq 1$ в группе G , то *по теореме Г.С. Сасердота [9] позитивная теория группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы, а значит по теореме Г.С. Маканина [13] алгоритмически разрешима.*

Установлены следующие эквивалентности

$w = 1$ в группе G тогда и только тогда, когда *позитивная теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ неразрешима,*

существует такое натуральное число n , что

$w = 1$ в группе G тогда и только тогда, когда *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ неразрешима.* Это завершает доказательство теорем. $\square$

3. Заключение

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость немарковского свойства *позитивная теория без констант группы G алгоритмически разрешима*, а также существование такого натурального числа n , для которого алгоритмически неразрешимо немарковское свойство *позитивная $\forall^2\exists^n$ -теория без констант группы G алгоритмически разрешима*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адян С. И. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 533–535.
2. Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 231–298.
3. Rabin M. O. Recursive unsolvability of group theoretic problems // Ann. of Math. 1958. Vol. 67, № 1. P. 172–194.
4. Collings D. J. On recognizing Hopf groups // Arh. Math. 1969. Vol. 20. P. 235–240.
5. Miller C. F. III. Decision problems for groups – survey and reflections // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 1992. Vol. 23. P. 1–59.
6. Miller C. F. III, Schupp P. E. Embeddings into Hopfian groups // Journal Algebra, 1971. Vol. 17. P. 171–176.

7. Miller C. F. III. On group-theoretic decision problems and their classification // *Ann. of Math. Studies*. 1971. Vol. 68. Princeton University Press.
8. Мерзляков Ю. И. Позитивные формулы на свободных группах. // *Алгебра и логика*. 1966. Т. 5, вып. 4. С. 25-42.
9. Sacerdote G. S. Almost all free products of groups have the same positive theory // *Journal Algebra*. 1973. Vol. 27, № 3. P. 475-485.
10. Перязев Н. А. Позитивная неотличимость алгебраических систем и полнота позитивных теорий // *Матем. заметки*. 1985. Т. 38, № 2. С. 208-212.
11. Перязев Н. А. Позитивные теории свободных моноидов // *Алгебра и логика*. 1993. Т. 32, № 2. С. 148- 159.
12. Ремеслеников В. Н. $\exists$ -свободные группы // *Сиб. матем. журнал*. 1989. Т. 30, № 6. С. 193-197.
13. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // *Изв. АН СССР. Серия матем.* 1984. № 2. С. 35-749.
14. Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // *Докл. АН СССР*. 1970. Т. 130, № 3. С. 495-498.
15. Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами // *Матем. сб.* 1960. Т. 50, № 2. С. 257-266.
16. Борисов В. В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // *Матем. заметки*. 1969. Т. 6, вып. 5. С. 521-532.

REFERENCES

1. Adyan, S. I. 1955, "Algorithmic intractable problems of recognizing some properties of groups", *Dokl. USSR ACADEMY OF SCIENCES*, vol. 103, no. 4, pp. 533-535.
2. Adyan, S. I. 1957, "Insolubility of some algorithmic problems of group theory", *Works of MMO*, vol. 6. pp. 231-298.
3. Rabin M. O. 1958, "Recursive unsolvability of group theoretic problems", *Ann. of Math.*, vol. 67, no. 1, pp. 172-194.
4. Collings D. J. 1992, "On recognizing Hopf groups", *Arh. Math.*, vol. 20, pp. 235-240.
5. Miller C. F. III. 1992, "Decision problems for groups – survey and reflections", *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, vol. 23, pp. 1-59.
6. Miller C. F. III & Schupp P.E. 1971, "Embeddings into Hopfian groups", *Journal Algebra*, vol. 17, pp. 171-176.
7. Miller C. F. III. 1966, "On group-theoretic decision problems and their classification", *Ann. of Math. Studies*, vol. 68. Princeton University Press.
8. Merzlyakov Yu. I. 1966, "Positive formulas on free groups", *Algebra and logic*, vol. 5, issue 4. pp. 25-42.

9. Sacerdote G. S. 1973, "Almost all free products of groups have the same positive theory", *Journal Algebra*, vol. 27, no. 3, pp. 475-485.
10. Peryazev N. A. 1985, "Positive indistinguishability of algebraic systems and completeness of positive theories", *Mathem. notes*, vol. 38, no. 2, pp. 208-212.
11. Peryazev N. A. 1993, "Positive theories of free monoids", *Algebra and logic*, vol. 32, no. 2, pp. 148-159.
12. Remeslenikov V. N. 1989, " $\exists$ -free groups", *Sib. mate. magazine*, vol. 30, no. 6, pp. 193-197.
13. Makanin G. S. 1984, "Solvability of universal and positive free theories groups", *Isv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Matem series*, no. 2, pp. 35-749.
14. Matiyasevich Yu. V. 1970, "Diophancy of enumerated sets", *Dokl. USSR ACADEMY OF SCIENCES*, vol. 130, no. 3, pp. 495-498.
15. Maltsev A. I. 1960, "About one correspondence between rings and groups", *Mathem. Sat.*, vol. 50, no. 2, pp. 257-266.
16. Borisov V. V., 1969, "Simple examples of groups with an unsolvable identity problem" // *Mathem. notes*. 1969. Vol. 6, issue 5, pp. 521-532.
Borisov V. V. 1969, "Simple examples of groups with an intractable problem identities", *Mathem. notes*, vol. 6, no. 5, pp. 521-532.

Получено: 09.01.2023

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68

**Регуляризованная асимптотика решения сингулярно
возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа
Шредингера при наличии сильной точки поворота у
предельного оператора¹**

А. Г. Елисеев, П.В. Кириченко

Елисеев Александр Георгиевич — доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: yeliseevag@mpei.ru

Кириченко Павел Владимирович — Национальный исследовательский университет «МЭИ». (г. Москва).

e-mail: kirichenkov@mpei.ru

Аннотация

В предложенной работе выполнено построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной неоднородной смешанной задачи на полуоси, возникающей при квазиклассическом переходе в уравнении Шредингера в координатном представлении. Выбранный в работе профиль потенциальной энергии приводит к особенности в спектре предельного оператора в виде сильной точки поворота. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром С.А. Ломова и А.Г. Елисеева, указано каким образом и из каких соображений следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для поставленной задачи, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

А. Г. Елисеев, П.В. Кириченко. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии сильной точки поворота у предельного оператора // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 50–68.

¹Результаты Елисеева А. Г. были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.955.8

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68

Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an equation of Schrodinger type in the presence of a strong turning point for the limit operator

A. G. Eliseev, P. V. Kirichenko

Eliseev Alexander Georgievich — doctor of physical and mathematical science, associate professor, National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (Moscow).*e-mail: yeliseevag@mpei.ru***Kirichenko Pavel Vladimirovich** — National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (Moscow).*e-mail: kirichenkovp@mpei.ru***Abstract**

In the proposed work we construct a regularized asymptotics for the solution of a singularly perturbed inhomogeneous mixed problem on the half-axis arising from a semiclassical transition in the Schrodinger equation in the coordinate representation. The potential energy profile chosen in the paper leads to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form strong the turning point. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum by S.A. Lomov and A.G. Eliseev, it is indicated how and from what considerations regularizing functions and additional regularizing operators should be introduced, the formalism of the regularization method for the problem posed is described in detail, and justification of this algorithm and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. G. Eliseev, P. V. Kirichenko, 2023, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an equation of Schrodinger type in the presence of a strong turning point for the limit operator”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 50–68.

1. Введение

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого по признанию самого автора в монографии [3] были заложены в конце пятидесятих, начале шестидесятих годов прошлого века в цикле работ [4]–[7]. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении последнего метода, связана с поиском и описанием так называемых регуляризирующих функций, которые содержат в себе все сингулярности решаемой задачи, выделяя которые, можно

оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности, установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра (см. [3], Глава 2, §1). При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [8]–[10]). В работах посвященных сингулярно возмущенным задачам некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

1) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;

2) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;

3) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис собственных векторов теряет гладкость.

Приведем здесь ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. работы [9, 11, 12], по слабой точке поворота — [13, 14, 15], сильной точке поворота посвящена статья [16].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье-Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной². Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [17], §6), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [17], Гл. 7). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда. Несмотря на то что физических квантовомеханических явлений, описываемых неоднородным уравнением Шредингера, нам при изучении обширной литературы обнаружить не удалось, считаем целесообразным поставить и решать предложенную более общую задачу, потому как, во-первых, более общее всегда можно свести к частному, а, во-вторых, представленные нами построения могут быть легко обобщены на, например, задачи для уравнений параболического типа, где неоднородные уравнения уже имеют вполне конкретный физический смысл.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию смешанной задачи для нестационарного и неоднородного уравнения Шредингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \rightarrow 0$ представляют собой развитие идей работы [16], где рассмотрена задача Коши для параболического уравнения с сильной точкой поворота. В дальнейшем везде в ра-

²Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

боте будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу на полуоси для нестационарного уравнения Шредингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x, t)$

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu = h(x, t), & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \psi(t), \quad \psi(0) = f(0), & 0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где выполнены условия:

- 1) $\forall k \ h^{(k)}(x, t) \in L_1 \cap C^\infty(0, +\infty) \times [0, T]$;
- 2) $\forall k \ f^{(k)}(x) \in L_1 \cap C^\infty(0, +\infty) \times [0, T]$;
- 3) $\psi(t)$ интегрируема по Риману на $[0, T]$.

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, работу [18]), и соответствующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x, t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим) и описать пограничный слой обусловленный точкой $x = 0$.

3. Формализм метода регуляризации

3.1. Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы

Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [19]. Итак, осуществляя подстановку $u(x, t) = v(x, t) \cdot e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x \right) v + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $v(x, t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x, t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x, \quad \varphi(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x, t)$ обусловлен нежеланием того, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x, t)$ содержало сингулярную зависимость от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x, t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [20], Гл. 5, §4, с. 268–272). Обозначив $p = \partial \varphi / \partial t$ и $q = \partial \varphi / \partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = dr, \\ \text{Н.У.: } t = 0, \quad x = s, \quad \varphi = 0, \quad q = 0, \quad p = s. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = -r^2 + s, \quad \varphi = sr - \frac{2}{3}r^3.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x, t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x, t) = t \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right). \quad (5)$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. **Приложение 1**). Выпишем здесь только окончательный результат:

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - \xi))^2}{4\varepsilon t} \right). \quad (6)$$

Построение указанного регуляризирующего оператора тесно связано с решением исходной задачи (1) при $-\infty < x < \infty$ с правой частью $h(x, t) = i \cdot \varepsilon$ и однородным начальным условием. Обозначим это решение $\sigma(x, t)$ и, опираясь на фундаментальное решение (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \Phi(x - \xi, t - \tau) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp \left(i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \cdot \left(x - \xi - \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) + i \frac{(x - \xi - \frac{(t-\tau)^2}{3})^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right). \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим внутренний интеграл по ξ через I_0 , а

$t - \tau \equiv \alpha$. После замены $s = x - \xi$ отдельно для I_0 получим

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp\left(\frac{i\alpha}{\varepsilon} \cdot \left(s - \frac{\alpha^2}{3}\right) + i\frac{(s - \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{-i\alpha^3}{12\varepsilon}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp\left(\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha}\right). \end{aligned}$$

Теперь выделим в показателе экспоненты подынтегрального выражения полный квадрат

$$\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} = \frac{i}{4\varepsilon\alpha}(s^2 + 2\alpha^2 s + \alpha^4 - \alpha^4) = \frac{i}{4\varepsilon\alpha}((s + \alpha)^2 - \alpha^4) = \frac{i(s + \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} - \frac{i\alpha^3}{4\varepsilon},$$

и, сделав замену $z = (s + \alpha^2)/(2\sqrt{\varepsilon\alpha})$, выписываем результат для I_0 :

$$I_0 = \exp\left(\frac{-i\alpha^3}{3\varepsilon}\right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

Получившийся интеграл вычислен в **Приложении 1**, его значение равно $\sqrt{\pi/2}(1 + i)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, для искомого $\sigma(x, t)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \frac{1 - i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \cdot \exp\left(-i\frac{(t - \tau)x}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{(t - \tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i) = \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-i\frac{(t - \tau)}{\varepsilon}\left(x + \frac{(t - \tau)^2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Полученный результат позволяет определить тот самый дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, основная задача которого — вложить правую часть уравнения задачи (1) в образ предельного оператора, в следующем виде:

$$\hat{\sigma}(\cdot) = \int_0^t d\tau(\cdot) \exp\left(-\frac{i\varphi(x, t - \tau)}{\varepsilon}\right),$$

где функция $\varphi(x, t)$ определена в (5). При этом действие этого оператора на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(f(t)) &= \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \exp\left(-i\frac{(t - \tau)}{\varepsilon}\left(x + \frac{(t - \tau)^2}{3}\right)\right) \equiv \\ &\equiv f(t) * \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon} \cdot \left(x + \frac{t^2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

А основным свойством, которое устанавливается непосредственной подстановкой, является следующее:

$$L_\varepsilon \hat{\sigma}(f(t)) = i\varepsilon f(t), \quad \text{где } L_\varepsilon \equiv i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x. \quad (7)$$

Очевидно также, что это свойство является прямым следствием того, из каких соображений была найдена функция $\sigma(x, t)$, порождающая дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(\cdot)$, т.е. того факта, что $L_\varepsilon \sigma(x, t) = i\varepsilon$.

Осталось выделить сингулярную зависимость от ε , описывающую пограничный слой при $x = 0$. В основе построения соответствующего сингулярного оператора лежит решение исходной задачи для однородного уравнения с однородным начальным условием, где в качестве граничного условия выбрана функция "единичного скачка" (функция Хевисайда) $\theta(t)$. Указанное решение $\chi(x, t)$ может быть получено с помощью преобразования Лапласа или интегрального преобразования Фурье (последняя возможность реализована в **Приложении 2**) и имеет вид:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t - \tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2}. \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет ввести по аналогии с оператором $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ регуляризирующий оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ в следующем виде:

$$\hat{\chi}(\cdot) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau(\cdot) \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t - \tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2},$$

тогда его действие на функцию $f(t)$ запишется опять же как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t - \tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2} \equiv \\ &\equiv f(t) * \left(\frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{t^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{it^3}{3\varepsilon} + \frac{it}{4\varepsilon} \left(t - \frac{x}{t} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Последний результат приведём к более простому виду, сделав замену $z = x / \left(2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)} \right)$. После несложных преобразований получим:

$$\hat{\chi}(f(t)) = (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2}. \quad (9)$$

В таком виде нетрудно явным вычислением установить основные свойства введенного дополнительного сингулярного оператора:

$$L_\varepsilon \hat{\chi}(f(t)) = 0, \quad \hat{\chi}(f(t)) \Big|_{x=0} = f(t) \quad (10)$$

Опять же эти свойства становятся очевидными, если учесть из каких соображений был построен оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$.

3.2. Построение регуляризованного асимптотического ряда

Построенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ позволяют рассчитывать, что оставшаяся часть решения можно искать в виде степенных рядов по ε . Вид, в котором будем искать решение исходной задачи (1), поясняет последнюю фразу:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} [\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t))] \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k, \quad (11)$$

здесь начало суммирования с $k = -1$ во втором ряде обусловлено свойством (7) и необходимостью регуляризации правой части $h(x, t)$ задачи (1) на нулевом шаге по ε .

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (7), (10), подставим (11) в задачу (1). При этом получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & e^{-i\varphi/\varepsilon} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{v}_k \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k'' \varepsilon^{k+2} - 2it \sum_{k=0}^{\infty} v_k' \varepsilon^{k+1} \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} z_{k-1} \cdot \varepsilon^k + \\ & + i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\omega}_k \cdot \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k'' \cdot \varepsilon^{k+2} - x \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \cdot \varepsilon^k = h(x, t), \\ & \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k = f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(0, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^t d\tau \cdot z_k(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} \right) \cdot \varepsilon^k + \\ & + \sum_{k=-1}^{\infty} y_k(t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(0, t) \cdot \varepsilon^k = \psi(t), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, $\omega_k = \omega_k(x, t)$, а $z_k = z_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (12) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{k-1}(t) + i\dot{\omega}_{k-1}(x, t) + \omega_{k-2}''(x, t) - x \cdot \omega_k(x, t) = \delta_0^k \cdot h(x, t), \\ & i\dot{v}_k(x, t) + v_{k-1}''(x, t) - 2itv_k'(x, t) = 0, \\ & v_k(x, 0) + \omega_k(x, 0) = \delta_0^k \cdot f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} v_{k-1}(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_{k-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + \\ & + y_{k-1}(t) + \omega_{k-1}(0, t) = \delta_1^k \cdot \psi(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Отметим, что при отрицательных индексах у функций $v_k(x, t)$ и $\omega_k(x, t)$ их необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (11)).

Для начала рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге (т.е. при $k = 0$ в (13)):

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{-1}(t) - x \cdot \omega_0(x, t) = h(x, t), \\ & i\dot{v}_0(x, t) - 2itv_0'(x, t) = 0, \\ & v_0(x, 0) + \omega_0(x, 0) = f(x), \\ & \int_0^t d\tau \cdot z_{-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + y_{-1}(t) = 0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Для разрешимости первого уравнения из системы (14) достаточно положить

$$z_{-1}(t) \equiv -ih(0, t). \quad (15)$$

Тогда для $\omega_0(x, t)$ получим гладкое решение:

$$\omega_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t)}{-x}, \quad (16)$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x, t)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad v_0(x, 0) = \frac{h(x, 0) - h(0, 0)}{x} + f(x).$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x, t) = f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2}. \quad (17)$$

Выражение для $z_{-1}(t)$ в (15) и граничное условие в системе (14) позволяют выписать соотношение для $y_{-1}(t)$:

$$y_{-1}(t) = i \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau). \quad (18)$$

Здесь отметим, что функция $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче с $k = 1$ в (13):

$$\begin{cases} i z_0(t) + i \dot{\omega}_0(x, t) - x \cdot \omega_1(x, t) = 0, \\ i \dot{v}_1(x, t) + v_0''(x, t) - 2itv_1'(x, t) = 0, \\ v_1(x, 0) + \omega_1(x, 0) = 0, \\ e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot v_0(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_0(\tau) \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} + y_0(t) + \omega_0(0, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя $\omega_0(x, t)$ из (16) в первое уравнение этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$z_0(t) \equiv -ih_1(0, t), \quad \text{где} \quad h_1(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \quad (20)$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $\omega_1(x, t)$ также получим гладкое решение

$$\omega_1(x, t) = \frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{-x},$$

а для $v_1(x, t)$ из (20) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = f_1(x + t^2), \quad v_1(x, 0) = \frac{h_1(x, 0) - h_1(0, 0)}{x},$$

здесь введено обозначение:

$$f_1(x + t^2) \equiv i \cdot v_0''(x, t) = i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2} \right).$$

Выпишем здесь только окончательное решение последней задачи, опуская подробности:

$$v_1(x, t) = t \cdot f_1(x + t^2) + \frac{h_1(x + t^2, 0) - h_1(0, 0)}{x + t^2}$$

Осталось подставить $\omega_0(x, t)$ из (16), $v_0(x, t)$ из (17) и $z_0(t)$ из (20) в граничные условия системы (19), что приводит к возможности определить $y_0(t)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} y_0(t) = \psi(t) - e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + \\ + i \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h_1(0, \tau). \end{aligned} \quad (21)$$

Ещё раз обратим внимание читателя на то, что полностью определить все слагаемые перед ε^1 в ряде (11) удастся только на следующем итерационном шаге — осталось найти $z_1(t)$ и $y_1(t)$. Последнее можно сделать, рассмотрев условия разрешимости первого уравнения в системе (13) при $k = 2$. В результате будем иметь:

$$z_1(t) \equiv -ih_2(0, t),$$

$$\text{где } h_2(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right),$$

а функция $h_1(x, t)$ определена в (20).

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (13), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), (18), (20) и (21), выпишем главный член асимптотики:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\hat{\sigma}(z_{-1}(t)) + \hat{\chi}(y_{-1}(t)) \right) + \hat{\sigma}(z_0(t)) + \hat{\chi}(y_0(t)) + e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_0(x, t) + \omega_0(x, t) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[-i \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + (1+i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \right. \\ &\cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 - \frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau) \left. \right] + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + \\ &+ (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2} \left[\psi(t - x^2/(4\varepsilon z^2)) - e^{-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^3}{3\varepsilon}} \cdot \right. \\ &\cdot \left(f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right)^2 + \frac{h\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}, 0\right) - h(0, 0)}{\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right)^2} \right) + \frac{h\left(x, t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - h\left(0, t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right)}{x} \Big|_{x=0} - \\ &- \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \left. \right] + \\ &+ e^{-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}} \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2} \right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x}. \end{aligned}$$

Для практического использования можно учесть полученную в лемме 1 оценку (см. **Приложение 3**). Тогда формула главного члена упрощается:

$$\begin{aligned} u_{\text{гл.}} &= \frac{i}{\varepsilon} \left[- \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)(x+(t-\tau)^2/3)}{\varepsilon}} + \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0, \tau) \cdot \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}} \right) \right] + \\ &+ \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot e^{-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right)} + \\ &+ \left[\psi(t) - e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \Big|_{x=0} - \right. \\ &- \left. \int_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \right] \cdot \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}} \right) + \\ &+ e^{-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}} \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2} \right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} + \underline{O} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x} \right). \end{aligned}$$

4. Оценка остаточного члена

Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (13) для $0 \leq k \leq n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} \cdot R_n(x, t, \varepsilon). \quad (22)$$

Подставим (22) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1} , для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x \cdot R_n = -H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad R_n(0, t, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $H(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_n''(x, t) \cdot \varepsilon + x \cdot \omega_{n+1}(x, t) + \varepsilon \cdot \omega_n''(x, t)$ при $x > 0$, $0 < t \leq T$. Определим эту функцию тождественным нулём при $x \leq 0$. Тогда, используя фундаментальное решение (6), для $R_n(x, t, \varepsilon)$ в (23) получим:

$$R_n = -\frac{1-i}{2i\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)}{\varepsilon} \left(\xi + (t-\tau)^2/3 \right) + i \frac{(x-\xi-(t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} \cdot H(\xi, \tau, \varepsilon).$$

Выделив во внутреннем интеграле полный квадрат в показателе экспоненты, сделаем замену переменной интегрирования ξ на:

$$y = \frac{\xi - x + (t - \tau)}{2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)}} - i\sqrt{\frac{(t - \tau)^3}{\varepsilon}}.$$

Тогда последнее выражение для остаточного члена перепишется в виде:

$$R_n = \frac{i+1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}(x-(t-\tau))} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{iy^2} \cdot H(y, \tau, \varepsilon).$$

Теперь, учитывая условия 1) и 2) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n+1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot |H(y, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{T \cdot M}{\varepsilon \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для } (x, t) \in (\mathbf{R} \times [0, T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде:

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon \cdot R_{n+1},$$

Тогда окончательно получим

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + \varepsilon \cdot \frac{C}{\varepsilon} \leq C.$$

Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Об оценке остатка (асимптотическая сходимость).*

Пусть дана смешанная задача (1) и выполнены условия 1), 2). Тогда верна оценка

$$\left\| u(x, t, \varepsilon) - e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k \right\|_{C(\mathbf{R}^{(+)} \times [0, T])} \leq \mathbb{C} \cdot \varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $v_k(x, t)$, $z_k(t)$, $y_k(t)$, $\omega_k(x, t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq k \leq n+1$.

5. Приложение 1

Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - x_0).$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x, t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для образа Фурье искомого решения $\tilde{U}(\lambda, t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла. В пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\varepsilon \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot \tilde{U}, \quad \tilde{U}(\lambda, 0) = e^{-i\lambda x_0}. \quad (24)$$

Задача (24) — задача для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Опуская достаточно громоздкие выкладки, выпишем здесь только её решение:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \exp \left(-i\varepsilon t \lambda^2 - i(x_0 + t^2)\lambda - ix_0 t/\varepsilon - it^3/(3\varepsilon) \right).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \tilde{U}(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \exp \left(i\lambda(x - x_0 - t^2) - i\varepsilon t \lambda^2 \right) \end{aligned}$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты и сделаем замену:

$$z = \sqrt{\varepsilon t} \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right).$$

В результате получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2}.$$

Оставшийся интеграл может быть легко вычислен различными способами (например, методами теории вычетов) или сведён к известным значениям для интегралов Френеля $\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \sqrt{\pi/8}$. Окончательно для фундаментального решения будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\epsilon t}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\left(x_0 + \frac{t^2}{3}\right) + i\frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\epsilon t}\right),$$

что с точностью до переобозначений совпадает с (6).

6. Приложение 2

Поставим задачу для поиска решения $\chi(x, t)$, позволяющее выписывать интегральное соотношение для решения однородного уравнения задачи (1) с произвольным граничным условием $\psi(t)$. Имеем:

$$i\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \theta(t),$$

здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда и при $t > 0$ $\theta(t) = 1$. Доопределим неизвестную функцию $u(x, t)$ при $x < 0$ тождественным нулём и при аналогичных **Приложении 1** предположениях перейдём к задаче Коши в пространстве образов Фурье:

$$i\epsilon \frac{\partial F}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \epsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\epsilon^2 \lambda, \quad F(\lambda, 0) = 0, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$F(\lambda, t) = \int_0^\infty dx \cdot e^{-i\lambda x} u(x, t).$$

Запишем характеристическую систему для квазилинейного уравнения в задаче (25):

$$\frac{dt}{i\epsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{dF}{\epsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\epsilon^2 \lambda}.$$

Система первых интегралов для нее имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda + \frac{t}{\epsilon} = C_1, \\ F \cdot e^{-i\epsilon^2 \lambda^3/3} - \epsilon^2 \int_\lambda^\infty dq \cdot q \cdot e^{-i\epsilon^2 q^3/3} = C_2. \end{cases}$$

Теперь уже несложно, учитывая начальное условие в (25), получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda, t) = \epsilon^2 \int_\lambda^{\lambda+t/\epsilon} dq \cdot q \cdot e^{\epsilon^2(\lambda^3 - q^3)/3}.$$

Замена переменной $\lambda - q = (s - t)/\epsilon$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению:

$$F(\lambda, t) = \epsilon \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\epsilon} \right) \cdot \exp\left(-\frac{i(t-s)^3}{3\epsilon} - i\epsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\epsilon} \right) \right).$$

Осталось осуществить обратное преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи. Будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot F(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) + i\lambda x \right). \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и выделим во внутреннем интеграле по λ полный квадрат, после чего произведем замену

$$\mu = \lambda + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right).$$

После описанных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^t ds \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \left(\mu + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \right) \cdot \exp(-i\varepsilon(t-s)\mu^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим внутренний интеграл $I_0(x, t-s)$ и вычислим его отдельно:

$$I_0(x, t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2}.$$

В силу того, что в обратном преобразовании Фурье интеграл понимается в смысле главного значения, первое слагаемое в последнем соотношении равно нулю из-за нечетности подынтегральной функции. А второе слагаемое легко свести к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi/2} \cdot (1-i)$, о вычислении которого было сказано в **Приложении 1**. В результате для I_0 получим:

$$I_0(x, t-s) = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (26), будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{4\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right).$$

Осталось учесть известное свойство интегралов Фурье о сходимости в точке разрыва к полусумме левого и правого пределов разлагаемой в этот интеграл функции. Учитывая этот факт, последнее соотношение в точке $x = 0$, $t = 0$ будет давать $(\theta(0-0) + \theta(0+0))/2 = 1/2$, а для получения с помощью $u(x, t)$ решение поставленной задачи с произвольным краевым условием требуется 1. Поэтому последнее соотношение необходимо умножить на два. Окончательно получаем $(\chi(x, t) \equiv 2 \cdot u(x, t))$:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right),$$

что с точностью до переобозначения переменной интегрирования совпадает с (8).

7. Приложение 3

ЛЕММА 1. Для соотношения (9), описывающего действие оператора $\hat{\chi}(\cdot)$ на функцию $f(t)$, справедлива оценка

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \quad \text{при } x \in [\delta, +\infty), \text{ где } \delta > 0, t \in [0, T]$$

Если для функции $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}$ ввести обозначение $\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right)$,

то можно последнее соотношение переписать в виде

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2} = \\ & = f(t) \cdot \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t)\right] e^{iz^2} + \\ & + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1\right] e^{iz^2} + \\ & + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} - 1}\right] e^{iz^2}. \end{aligned}$$

Оценим три последних слагаемых, учитывая неравенство $0 \leq \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \leq t \leq T$. Будем иметь при $x \in [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} 1. & \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t)\right] \cdot e^{iz^2} = \frac{(f(t) - f(0))\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + \underline{O}\left(\frac{\varepsilon t}{x^2}\right) = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right); \\ 2. & \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1\right] e^{iz^2} = \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} e^{iz^2} = \\ & = \frac{x^3}{16\varepsilon^2} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{1}{z^4} e^{iz^2} = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty); \\ 3. & \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[e^{-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} - 1}\right] e^{iz^2} = \\ & = f(0) \left(1 + \frac{t}{16x}\right) \left(e^{-i\left(\frac{t^3}{12\varepsilon} + \frac{xt}{2\varepsilon}\right)} - 1\right) \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + \underline{O}\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right) = \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right), \quad \delta > 0, \quad x \in [\delta, +\infty). \end{aligned}$$

Складывая все три оценки, получим

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

8. Заключение

Как уже было отмечено во введении, основной проблемой метода регуляризации С.А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения Шредингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота регуляризация, как выяснилось, состоит из трёх частей: 1) описание пограничного слоя обусловленного точкой $t = 0$; 2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора; 3) описание пограничного слоя обусловленного точкой $x = 0$. В основном тексте статьи описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований. Продолжением этих исследований является обобщение предложенного в статье подхода для построения асимптотического ряда на другие задачи математической физики с подобного рода спектральными особенностями у предельного оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации: учебное пособие. — М.: Издательский дом МЭИ, 2012.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во Московского университета, 2011.
3. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
4. Ломов С. А. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр // Тр. МЭИ, 1962, Вып. 42, С. 99–144.
5. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // Докл. АН СССР, 1963, Том 148, № 3, С. 516–519.
6. Ломов С. А. О модельном уравнении Лайтхилла // Сб. науч. трудов МО СССР, 1964, № 54, С. 74–83.
7. Ломов С. А. Регуляризация сингулярных возмущений // Докл. научно-техн. конф. МЭИ, секция матем. М., 1965, С. 129–133.
8. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Укр. мат. журн., 1984, Т. 36, № 2, С. 172–180.

9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Математический сборник, 1986, Т. 131, № 173, С. 544–557.
10. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимский математический журнал, 2018, Т. 10, № 2, С. 3–12.
11. Елисеев А. Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота. // Дифф. урав. и процессы управл., 2019, № 3, С. 63–73.
12. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота // Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 2, С. 15–32.
13. Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Математические заметки СВФУ, 2020, № 3, С. 3–15.
14. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 1, с. 55–67.
15. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии "слабой" точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, № 6, С. 733–746.
16. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Дифф. урав. и процессы управл., 2022, № 3, с. 46–58.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008.
18. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров // УМН, 1971, т. 26, № 2(158), С. 101–114.
19. Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétés à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1837, p. 16–35.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

REFERENCES

1. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. 2012, “Course of higher mathematics. Singularly perturbed equations and the regularization method: a study guide” [Kurs vysshey matematiki. Singulyarno vozmushchennyye uravneniya i metod regulyarizatsii: uchebnoye posobiye], *Moscow: National Research University MPEI*. (In Russ.)

2. Lomov S. A., Lomov I. S. 2011, “Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer” [Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya], *Moscow: Moscow State University*. (In Russ.)
3. Lomov S. A. 1992, “Introduction to the General Theory of Singular Perturbations (Translations of Mathematical Monographs)”, *New York: Amer. Math. Soc.*
4. Lomov S. A. 1962, “Asymptotic behavior of solutions to second-order ordinary differential equations containing a small parameter” [Asimptoticheskoye povedeniye resheniy obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy vtorogo poryadka, sodержashchikh malyy parametr], *Moscow: Trudi MPEI*, issue 42, P. 99–144. (In Russ.)
5. Lomov S. A. 1963, “Power series boundary layer in problems involving a small parameter”, *Sov. Math. Dokl.*, issue 4, P. 125–129.
6. Lomov S. A. 1964, “On the Lighthill Model Equation” [O model’nom uravnenii Laytkhilla], *Sb. nauch. trudov MO SSSR*, No 54, P. 74–83. (In Russ.)
7. Lomov S. A. 1965, “Regularization of singular perturbations” [Regulyarizatsiya singulyarnykh vozmushcheniy], *Moscow: Dokl. nauchno-tekhn. konf. MPEI, sektsiya matem.*, P. 129–133. (In Russ.)
8. Lomov S. A., Safonov V. F. 1984, “Regularizations and asymptotic solutions for singularly perturbed problems with point singularities of the spectrum of the limit operator” [Regulyarizatsii i asimptoticheskiye resheniya dlya singulyarno vozmushchennykh zadach s tochechnymi osobennostyami spektra predel’nogo operatora], *Ukr. mat. zhurn.*, Vol. 36, No 2, P. 172–180. (In Russ.)
9. Eliseev A. G., Lomov S. A. 1988, “The theory of singular perturbations in the case of spectral singularities of a limit operator”, *Math. USSR-Sb.*, Vol. 59, No 2, P. 541–555.
10. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. 2018, “Regularized asymptotics of solutions to integro-differential partial differential equations with rapidly varying kernels”, *Ufa Math. J.*, Vol. 10, No 2, P. 3–13.
11. Eliseev A. G., Ratnikova T. A. 2019, “Singularly perturbed cauchy problem in the presence of the rational simple pivot point of the limit operator”, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravleniya*, No 3, P. 63–73.
12. Eliseev A. G. 2020, “Regularized solution of a singularly perturbed cauchy problem in the presence of irrational simple turning point”, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravleniya*, No 2, P. 15–32.
13. Eliseev P. V. 2020, “A singularly perturbed cauchy problem for a parabolic equation in the presence of the “weak” turning point of the limit operator”, *Mathematical Notes of NEFU*, Vol. 57, No 3, P. 3–15.
14. Eliseev A. G., Eliseev P. V. 2020, “Regularized asymptotics of solution a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of the «weak» turning point at the limit operator”, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravleniya*, No 1, P. 55–67.
15. Eliseev A. G., Eliseev P. V. 2022, “Singularly Perturbed Cauchy Problem in Which the Limit Operator has Multiple Spectrum and a Weak First-Order Turning Point”, *Differential Equations*, Vol. 58, No 6, P. 727–740.

16. Eliseev A. G. 2022, “Example of Solution of a Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Parabolic Equation in the Presence of strong Turning Point”, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravleniya*, No 3, P. 46–58.
17. Landau L. D., Lifshitz E. M. 2008, “Course of theoretical physics, Vol. 3, Quantum mechanics (non-relativistic theory)” [Kurs teoreticheskoy fiziki, T. 3, Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya)], *Moscow: Fizmatlit.* (In Russ.)
18. Arnol'd V. I. 1971, “On matrices depending on parameters”, *Russian Math. Surveys*, Vol. 26, No 2, P. 29–43.
19. Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1837, p. 16–35.
20. Elsgolts L. E. 1969, “Differential Equations and Variational Calculus” [Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye], *Moscow: Nauka.* (In Russ.)

Получено: 13.12.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-69-88

Первый класс Appel'rota псевдоевклидовой системы
Ковалевской¹

В. А. Кибкало

Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Аннотация

Для интегрируемого псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской изучены свойства системы при нулевом уровне дополнительного первого интеграла Ковалевской. Класс движений классического волчка при том же условии называют также первым классом Appel'rota или классом Делоне. Описан класс гомеоморфности каждого слоя, классы послойной гомеоморфности слоения в окрестности бифуркационного слоя (аналог 2-атома Фоменко) и на всем двумерном пересечении уровня $K = 0$ и симплектического листа скобки Пуассона. Показано наличие некомпактных одномерных слоев Лиувилля, не критических перестроек компактных и некомпактных слоев в данной интегрируемой системе. Также изучен вопрос невырожденности (по Ботту) всех точек уровня $K = 0$ и доказано, что критическое множество псевдоевклидова аналога совпадает с таковым для классического волчка.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, бифуркационная диаграмма, особенность, топологические инварианты.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

В. А. Кибкало. Первый класс Appel'rota псевдоевклидовой системы Ковалевской // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 69–88.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-69-88

First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system

V. A. Kibkalo

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 20-31-90114).

Abstract

In paper, properties of an integrable pseudo-Euclidean analogue of the Kovalevskaya top are studied for the zero level of the additional first Kovalevskaya integral. The class of motions of a classical top under the same condition is also called the first Appelrot class or the Delaunay class. We describe the homeomorphism class of each fiber, the fiberwise homeomorphism classes of the foliation in a neighborhood of each bifurcation fiber (i.e. analogues of Fomenko 2-atoms) and on the two-dimensional intersection of the level $K = 0$ and each nondegenerate symplectic leaf of the Poisson bracket. It is proved that non-compact one-dimensional Liouville fibers, non-critical bifurcations of compact and non-compact fibers appear in this integrable system. The non-degeneracy problem (in the Bott sense) for all points of the $K = 0$ level is also studied, and it is proved that the critical sets of the of classical Kovalevskaya top and its pseudo-Euclidean analogue coincides.

Keywords: Hamiltonian system, integrability, rigid body dynamics, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, bifurcation diagram, singularity, topological invariant.

Bibliography: 37 titles.

For citation:

V. A. Kibkalo, 2023, "First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 69–88.

1. Введение

Системы динамики и математической физики в пространствах, метрика которого отличается от евклидовой, активно исследовались как классиками, так и в недавних работах исследователей. В сборнике [1] приведен цикл работ, иллюстрирующих различные направления исследований.

В недавней работе А.В. Борисова и И.С. Мамаева [2] было рассмотрено преобразование на $\mathbb{C}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, линейное над $\mathbb{C}$, позволяющее сопоставить многим классическим вещественным интегрируемым системам динамики новые системы, также интегрируемые и вещественные. При этом меняются знаки некоторых структурных констант скобки Ли–Пуассона, и алгебра Ли $e(3)$ группы движений евклидова $\mathbb{R}^3$ переходит в алгебру Ли $e(2, 1)$ группы движений пространства R_1^3 с псевдоевклидовым скалярным произведением. Напомним, что системы классической механики могут задаваться уравнениями Эйлера на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$ для гладкой функции H .

В настоящей работе изучается аналог волчка Ковалевской, заданный уравнениями Эйлера на алгебре Ли $e(2, 1)$. Функция $H_{ps} = H$ псевдоевклидова аналога получена из гамильтониана Ковалевской H_0 под действием преобразования из [2]. При этом сохраняется как интегрируемость такой вещественной системы, так и формула для дополнительного интеграла K , открытого ранее С.В. Ковалевской для классического волчка [3]. Разделение переменных, аналогичное Кёттеру, для новой задачи в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ было построено С.В. Соколовым [4].

Г.Г. Аппельрот [5] исследовал особые режимы движения классического волчка Ковалевской, соответствующие наличию кратных корней у полинома Φ , участвующего в разделении переменных системы. Полином Φ является произведением двух линейных сомножителей и одного кубического полинома, чьи коэффициенты зависят от значений a, b, h, k первых интегралов системы. К первому классу был отнесен случай равенства двух линейных сомножителей, когда дополнительный интеграл K равен нулю. Отметим, что в работе Н.Б. Делоне [6] была приведена геометрическая интерпретация такого движения.

Анализ фазовой топологии такого волчка, во многом мотивированный пионерской работой С.Смейла [7], был проведен М.П.Харламовым, см. [8]. Было показано, что образ множества точек, где градиенты первых интегралов зависимы, действительно содержится в гиперповерхностях пространства значений этих функций, на которых многочлен разделения переменных имеет кратные корни. Кроме того, также были явно описаны классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля системы.

Общий топологический подход к исследованию конечномерных интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [9, 10, 11] и монографию А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [12]. Предположим, что уровень энергии $Q^3 = Q_h^3 : H = h$ является компактным и неособым, т.е. не содержит положений равновесия гамильтонова векторного поля функции H , а все критические точки отображения момента в нем невырождены по Ботту (что обобщает понятие морсовости критической точки функции). Для изученных ранее систем почти все уровни энергии H удовлетворяют этим условиям [12].

Такие системы с двумя степенями свободы, ограниченные на неособые уровни энергии Q^3 , классифицируются с точностью до послойной гомеоморфности в терминах *инварианта Фоменко–Цишанга*, называемого также *молекулой*. Этот инвариант является графом — одномерной базой слоения Лиувилля на данном Q^3 . Его ребра соответствуют семействам регулярных слоев, а вершины — их бифуркациям. В силу компактности Q^3 и гладкости первых интегралов, прообраз бифуркационного значения интеграла содержит критические точки (по предположению, невырожденные). Класс послойной гомеоморфности малой инвариантной окрестности связного слоя (содержащего критические точки) называют атомом или 3-атомом. Каждой вершине графа-инварианта сопоставляется 3-атом, а всем ребрам и некоторым связным подграфам приписываются числовые метки (задаваемые склейкой 3-атомов по их граничным торам).

Данная теория была применена к различным системам механики [13, 14, 15, 16, 17], задачам математической физики [18, 19, 20] и аналогам известных интегрируемых систем в случае алгебр Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$ [21, 22], в числе которых — аналоги классического волчка Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, открытые И.В.Комаровым в [23] и изученные с топологической точки зрения в работах [24, 25, 26, 27].

Отметим, что построенная классификация существенно использует компактность слоев слоения Лиувилля, неособого уровня энергии целиком и полноту потоков гамильтоновых полей первых интегралов. Тогда каждая бифуркация слоев имеет особый слой с критическими точками. Это позволяет эффективно находить и описывать бифуркации систем из приложений.

Расширение этой классификации на некоторый подкласс систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля и их некритические бифуркации, а также неполные потоки, весьма интересен. Весьма подробный обзор известных результатов и изученных примеров таких систем был недавно сделан А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеевым [28]. Отдельно отметим работу Е.А.Кудрявцевой [29] об аналоге теоремы Лиувилля для системы с неполными потоками с особенностями определенных типов. Некомпактные слои возникали в работе Д.В.Новикова [22, 30] при изучении системы Соколова на алгебрах $so(3, 1)$ и $e(3)$. В недавних работах С.С.Николаенко [31] и [32] была построена классификация особенностей систем с одной и двумя степенями свободы соответственно, удовлетворяющих определенным условиям. Фактически, на указанные классы систем и особенностей (имеющих некомпактные слои и включающее некритические бифуркации) было построено обобщение классификации теоремы Фоменко 2-атомов и 3-атомов Фоменко. Ранее в работе [33] им же была изучена топология и динамика “некомпактного” аналога известного интегрируемого случая Горячева. В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко удалось промоделировать некоторые некомпактные аналоги атомов Фоменко интегрируемыми топологическими бильярдами на неограниченных столах [34]. Интересные

эффекты, связанные с некомпактностью, также возникли при рассмотрении бильярда на эллиптическом столе с метрикой Минковского и упругим потенциалом [35].

Одним из примеров таких систем является псевдоевклидов аналог волчка Ковалевской. Ранее автором был доказан [36] критерий компактности совместного уровня четырех первых интегралов этой системы при условии, что интеграл площадей не равен нулю. Иными словами, система содержит перестройки компактных слоев в некомпактные.

В настоящей работе описано слоение Лиувилля этой системы на множестве $K = 0$. А именно, для каждой пары $(a, b) \neq (0, 0)$ значений геометрического интеграла и интеграла площадей, задающих неособый симплектический лист $M_{a,b}^4$, указана база (одномерный граф) слоения функции H на множестве точек $K = 0$ в $M_{a,b}^4$, классы гомеоморфности слоев в прообразе его вершин и точек его ребер. В системе обнаружены некомпактные слои и перестройки компактного слоя в некомпактный, причем без дополнительного падения ранга отображения момента (с одного до нуля). Для всех точек (ранг отображения момента при условии $K = 0$ равен либо 1, либо 0) указанных поверхностей исследован вопрос невырожденности.

1.1. Псевдоевклидов аналог волчка Ковалевской и его свойства

Скобки Пуассона и алгебры Ли. Рассмотрим семейство P скобок Ли–Пуассона с параметром $\varkappa \in \mathbb{R}$ на пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k.$$

При $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$, $\varkappa > 0$ эти скобки соответствуют алгебрам Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Система уравнений Эйлера

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}$$

задает динамическую систему на двойственном пространстве к соответствующей алгебре Ли. Для каждой гладкой функции H правые части этих уравнений образуют гамильтоново векторное поле — косой градиент $\text{sgrad } H$.

Обозначим через g скалярное произведение $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим вещественно-линейный изоморфизм Φ пространства $\mathbb{C}^6$:

$$\tilde{J}_j = \frac{\sigma}{i} J_j, \quad \tilde{x}_j = \frac{\sigma}{i} x_j, \quad \text{для } j = 1, 2, \quad \tilde{J}_3 = J_3, \quad \tilde{x}_3 = x_3.$$

В новых координатах $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{x}_3$ линейные скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ из пучка P имеют те же структурные константы, что и в исходных координатах $J_1, \dots, x_3$, исключая домножаемые на σ константы для $\{J_1, J_2\}, \{J_1, x_2\}, \{x_2, J_1\}$ при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$ и $\{x_1, x_2\}$ при $\varkappa \neq 0$:

$$\{\tilde{J}_1, \tilde{J}_2\} = \sigma \tilde{J}_3 = \sigma J_3 = \sigma \{J_1, J_2\}.$$

Далее считаем, что скобка $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ для произвольного $\sigma \neq 0$ задана на том же пространстве $\mathbb{R}^6$, что и исходная скобка $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_1$. Функции Казимира f_1 и f_2 скобки $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ зависят от σ и $\varkappa$:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \sigma x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + \sigma J_3^2) = a, \quad (1)$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + \sigma x_3 J_3 = b. \quad (2)$$

При $\varkappa = 0$, $\sigma = 1$ они совпадают с геометрическим интегралом и интегралом площадей из классической механики. Псевдоевклидовы аналоги систем механики отвечают случаю $\varkappa = 0$, $\sigma = -1$ и задаются на алгебре Ли $e(2, 1)$. Отметим, что присутствие символа σ в формулах ниже означает их выполнение для всех $\sigma \in \mathbb{R}$.

Совместный уровень $M_{a,b}^4 = \{p \in \mathbb{R}^6 | f_1(p) = a, f_2(p) = b\}$ является четырехмерным симплектическим листом скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ при $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$, если $\sigma = 1$. Если

же $\sigma = -1$, то гладкими четырехмерными поверхностями будут все поверхности уровня (будем называть их *неособыми* $M_{a,b}^4$) за исключением уровня $M_{0,0}^4$, содержащего все точки вида $(J_1, J_2, J_3, 0, 0, 0)$.

Следующие семейства гамильтонианов H_σ и интегралов $K_\varkappa$ находятся в инволюции $\{H_\sigma, K_\varkappa\}_\sigma = 0$ при всех значениях $\varkappa, \sigma$:

$$H_\sigma = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 2\sigma J_3^2) + c_1 x_1, \quad (3)$$

$$K_\varkappa = \frac{1}{4}(J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + \frac{1}{4}(2J_1 J_2 - 2c_1 x_2)^2. \quad (4)$$

При $\varkappa = 0$ получим интеграл С.В.Ковалевской $K = K_0$, а при $\sigma \neq 0$ — гамильтонианы классического волчка Ковалевской H_1 и его псевдоевклидова аналога H_{ps} :

$$H_{ps} = \frac{1}{2}J_1^2 + \frac{1}{2}J_2^2 - \sigma J_3^2 + c_1 x_1. \quad (5)$$

В случае $\varkappa = 0$ растяжение координат позволяет привести систему на поверхности $M_{a,b}^4$ к системе на поверхности $M_{\text{sgn } a, \tilde{b}}^4$ для подходящего $\tilde{b} \geq 0$ с условием послойной гомеоморфности слоений Лиувилля. В евклидовом случае это влекло $a = 1$ для всех неособых $M_{a,b}^4$, а в псевдоевклидовом влечет наличие ровно трех существенно различных случаев: $a = -1, a = 1$ и $a = 0, b = 1$. Можно считать, что $c_1 = 1$, или что $c_1 > 0$.

Критическое множество псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При произвольном $\varkappa \in \mathbb{R}$ критическое множество системы Ковалевской $\{\cdot, \cdot\}, H_1, K$ и ее псевдоевклидова аналога $\{\cdot, \cdot\}_\sigma, H_\sigma, K$ совпадают в $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, причем с сохранением ранга критических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что отличие между скобками Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ и $\{\cdot, \cdot\}$ состоит в умножении на σ структурных констант для $\{J_1, J_2\}, \{J_1, x_2\}, \{J_2, x_1\}$ и $\{x_1, x_2\}$.

1. Для всех $F \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$, в том числе для интеграла K , имеем $\{J_3, F\}_\sigma = \{J_3, F\}$ и $\{x_3, F\}_\sigma = \{x_3, F\}$. Поскольку $H_\sigma = H_1 + f(J_3)$, то $\{J_3, H_\sigma\}_\sigma = \{J_3, H_1\}$, и то же самое верно для x_3 .

2. Из переменных J_1, J_2, x_1, x_2 разберем случай J_1 , другие аналогичны.

$$\{J_1, K\}_\sigma = \{J_1, J_2\}_\sigma \frac{\partial K}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\}_\sigma \frac{\partial K}{\partial J_3} + \dots = \sigma \cdot \{J_1, J_2\} \frac{\partial K}{\partial J_2} + 0 + \dots = \sigma \{J_1, K\}.$$

$$\{J_1, H_\sigma\}_\sigma = \{J_1, J_2\}_\sigma \frac{\partial H_\sigma}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\}_\sigma \frac{\partial H_\sigma}{\partial J_3} = \sigma \{J_1, J_2\} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial J_2} + \{J_1, J_3\} \cdot \sigma \frac{\partial H_1}{\partial J_3} = \sigma \{J_1, H_1\}.$$

В последнем равенстве коэффициент σ в одном из слагаемых возникает как структурная константа скобки $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$, а в другом — как коэффициент при J_3^2 в полиноме H_σ . Утверждение доказано. $\square$

Отсюда для псевдоевклидова аналога системы Ковалевской (при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$) верно представление критического множества в виде объединения шести семейств критических точек, полученное в работе [24] И.К. Козловым для семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Одно из этих семейств в точности совпадает с множеством точек, где при $\varkappa = 0$ верно $K_\varkappa = K = 0$:

$$x_1 = \frac{J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \quad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}. \quad (6)$$

Множество точек ранга ноль при $\varkappa \in \mathbb{R}$ представимо как объединение трех множеств:

$$1. (J_1, J_2, 0, \varkappa c_1, 0, 0) \quad 2. (J_1, 0, 0, x_1, 0, 0) \quad 3. \left(J_1, 0, J_3, \frac{J_1^2 + \varkappa c_1^2}{2c_1}, 0, \frac{J_1 J_3}{c_1} \right). \quad (7)$$

В случае $\varkappa = 0$ все положения равновесия системы на неособых $M_{a,b}^4$ принадлежат второй и третьей серии: в точках первой серии заведомо $f_1 = 0, f_2 = 0$, т.е. они лежат на особом уровне $M_{0,0}^4$. В точках третьей серии $K = 0$, а в точках второй серии это верно лишь для ее пересечения с третьей: $x_1 = J_1^2/2c_1$.

Гамильтоновы поля sgrad_σ и sgrad функций H_σ, H_1 и K для скобок $\{\cdot, \cdot\}_\sigma$ и $\{\cdot, \cdot\}$ связаны так:

$$\text{sgrad}_\sigma H_\sigma = X \cdot \text{sgrad} H_1, \quad \text{sgrad}_\sigma K = X \cdot \text{sgrad} K, \quad X = \text{diag}(\sigma, \sigma, 1, \sigma, \sigma, 1).$$

Отсюда несложно исследовать невырожденность этих точек, следуя [24], где это было сделано для семейства Ковалевской на пучке $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Для каждого из шести семейств точек ранга 1 аннулирующая комбинация $\mu_1 \text{sgrad}_\sigma H_\sigma + \mu_2 \text{sgrad}_\sigma K = 0$ задана теми же коэффициентами как в [24]. Пара ненулевых собственных значений λ линеаризации этой комбинации дает ответ о боттовости (невырожденности) особенности и ее типе.

Здесь и далее примем $\varkappa = 0$. Тогда для точек уровня $K = 0$ имеем

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1; \quad \lambda^\pm = \pm 2i\sigma(-J_3(J_1^2 + J_2^2) + 2c_1 J_1 x_3).$$

При вычислении координат критических точек для псевдо-евклидова случая примем $\sigma = -1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *На неособых орбитах $M_{a,b}^4$ псевдоевклидова волчка Ковалевской произвольная критическая точка ранга 1, принадлежащая уровню $K = 0$, вырождена, если и только если $a \cdot h = b^2$. Все невырожденные точки имеют эллиптический тип, являясь точками нестрогого минимума функции K в симплектическом листе $M_{a,b}^4$ или на изоэнергетической поверхности Q_h^3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda^\pm \neq 0$, то из их принадлежности мнимой оси имеем эллиптический тип соответствующей критической точки. Для функции K в $M_{a,b}^4$ все они являются точками минимума (нестрогого, вообще говоря). Если же $\lambda^\pm = 0$, то либо $J_1 = J_2 = 0$, либо

$$J_3 = \frac{2c_1 J_1 x_3}{J_1^2 + J_2^2}.$$

1. В первом случае из (6) имеем $h = -J_3^2, b = -x_3 J_3, a = -x_3^2$. Отсюда $ah = b^2$, причем $a < 0$, если орбита $M_{a,b}^4$ неособая (в случае $a = 0$ имеем $b = 0$).

2. Во втором случае, подставив формулы для x_1, x_2, J_3 , получим $ha = b^2$:

$$h = J_1^2 - J_3^2 = a \cdot \frac{4c_1^2 J_1^2}{(J_1^2 + J_2^2)^2}, \quad b = J_1 \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} - \frac{2c_1 x_3^2}{J_1^2 + J_2^2} \right) = a \cdot \frac{2c_1 J_1}{J_1^2 + J_2^2}.$$

Тем самым, каждая тройка J_1, J_2, x_3 , для которой $ah = b^2$ и каждое из уравнений имеет решение, соответствует вырожденной точке системы. Тогда при $a \neq 0$ полный прообраз точки $h = b^2/a, k = 0$ состоит из вырожденных точек или пуст. В случае $a = 0$ имеем $b = h = 0$, т.е. $M_{a,b}$ является особым. $\square$

В точках ранга ноль, принадлежащих семейству 3 из (7), ненулевые собственные значения линеаризации гамильтонова векторного поля $\text{sgrad}_\sigma H_\sigma$ равны

$$\lambda_1^\pm = \pm i \cdot 2\sigma J_3, \quad \lambda_2^\pm = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sigma(J_1^2 - 2\sigma J_3^2)}$$

Одна пара является мнимой, а тип другой зависит от σ , J_1 и J_3 : при $\sigma = 1$ ее тип может, вообще говоря, быть как вещественным, так и мнимым (знак $J_1^2 - 2J_3^2$ может меняться). В случае $\sigma = -1$ имеем $J_1^2 - 2\sigma J_3^2 \geq 0$. Случаи $J_1^2 = 2J_3^2$ или $J_3 = 0$ соответствуют вырождениям, а иначе все четыре собственных значения будут мнимыми. Иными словами, все невырожденные точки ранга 0 псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской имеют тип центр-центр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В системе псевдоевклидова волчка Ковалевской в ограничении на двумерную поверхность $K = 0$ в симплектическом листе $M_{a,b}^4$ для $f_1 = a, f_2 = b$ имеется в точности

- две невырожденные точки максимума функции H (имеющих тип центр-центр во всем $M_{a,b}^4$) при $a > 0, |b| > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ и одна вырожденная точка $J_1 = \operatorname{sgn} b \sqrt{2c_1}a^{1/4}, x_1 = J_1^2/2c_1, x_2 = x_3 = J_2 = J_3 = 0$ при $|b| = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$.
- две невырожденные точки максимума функции H (тип центр-центр в $M_{a,b}^4$) при $a = 0, b \neq 0$.
- четыре невырожденные точки максимума функции H (тип центр-центр в $M_{a,b}^4$) при $a < 0, b \neq 0$ и четыре вырожденные точки максимума функции H при $b = 0$ (им соответствуют вырожденные точки ранга 0 в $M_{a,0}^4$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Вырождения точек ранга 0 соответствуют двум случаям: $J_3 = 0$ или $a = b = 0$. В первом случае $a = J_1^4/4c_1^2, b = J_1^3/2c_1, h = J_1^2$. Иными словами, при $J_1 \neq 0$ имеем $a > 0, b = \pm \sqrt{2c_1}a^{3/4} \neq 0, h = b^2/a = 2c_1\sqrt{a} > 0$.

Пусть $b = \frac{J_1}{2c_1}(J_1^2 + \sigma 2J_3^2) = 0$, тогда при $\sigma = -1$ имеем либо $J_1 = 0, a = 0$, либо $J_1 = \pm \sqrt{2}J_3$. Тогда $4ac_1^2 = -J_3^4, h = J_3^2 = \sqrt{-ac_1^2} > 0$, т.е. каждому $a < 0$ при $b = 0$ соответствует четыре вырожденные точки $J_3 = \pm \sqrt{2c_1}(-a)^{1/4}, J_1 = \pm \sqrt{2}J_3$.

2. Количество точек ранга 0 определим, выразив $J_3^2 = J_1^2/4 - ac_1^2/J_1^2$ из $f_1 = a$, поскольку случай $J_1 = 0$ разобран выше. Подставим в уравнения $f_2 = b, H = h$:

$$b = \frac{J_1^3}{4c_1} + \frac{ac_1}{J_1}, \quad h = \frac{3J_1^2}{4} + \frac{ac_1^2}{J_1^2}. \quad (8)$$

Эти соотношения при $a > 0$ задают бифуркационную кривую классического волчка Ковалевской $b(t), h(t)$ на плоскости Obh , соответствующей т.н. карусельному движению волчка — нулям $k = 0$ параметрической бифуркационной кривой (9) на плоскости значений отображения момента $(H, K) = (h, k)$:

$$h(t) = \frac{b^2c_1^2}{2t^2} + t, \quad k(z) = ac_1^2 - \frac{b^2c_1^2}{t} + \frac{b^4c_1^4}{4t^4}. \quad (9)$$

Параметр t с точностью до постоянного множителя имеет здесь смысл угловой скорости [14].

При $a > 0$ расположение кривой $b(t), h(t)$ на плоскости Obk относительно других кривых устроено так же, как в классическом волчке Ковалевской. Кроме того несложно проверить, что при $a \cdot h > b^2$ система уравнений $f_1 = a, f_2 = b, H = h$ не имеет решений среди точек ранга 0, в которых $K = 0$. Иными словами, при $a > 0, b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ имеем одну вырожденную точку ранга 0, при больших b имеем две точки (для каждого из знаков J_3), а при $|b| < \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ — ни одной.

3. Если $a = 0$, то $\delta J_1^2/2c_1 = x_3 = J_1J_3/c_1$. Поскольку $J_1 \neq 0$ в силу $b \neq 0$, то $J_1 = \delta \cdot 2J_3$. Отсюда получаем $h = 3J_3^2$ и $c_1b = 2\delta J_3^3$. Иными словами, для выбранного $\delta = \pm 1$ значение J_3 определено однозначно. Получили две критические точки ранга 0, обе имеющие тип центр-центр.

4. Если $a < 0$ и $b \neq 0$ (считаем, что $b > 0$), то выразим J_3^2 через J_1 из $f_2 = b$ и подставим в $f_1 = a$:

$$J_3^2 = J_1^2/2 - bc_1/J_1, \quad P(J_1) = J_1^4 - 4bc_1J_1 + 4ac_1^2 = 0.$$

Последнее уравнение задает многочлен четвертой степени с одним вещественным экстремумом $J_1^{ext} = c_1^{1/3}b^{1/3} > 0$ и отрицательным значением $4ac_1^2$ в точке $J_1 = 0$, ветви которого направлены вверх. Он имеет в точности два корня, притом разных знаков. Решение $J_3^-(J_1^-)$ для отрицательного корня J_1^- заведомо существует. Это дает нам две точки ранга ноль с данными $J_1^- < 0, \pm J_3^- \neq 0$ и $x_1 = (J_1^-)^2/2c_1 > 0, x_3 = J_1^- J_3^-/c_1, J_2 = x_2 = 0$. Значения f_1, f_2, h в них совпадают.

Для положительного корня J_1^+ требуется проверить, что правая часть неотрицательна. При $J_1 > 0$ она имеет единственный корень $J_1 = 2^{1/3}b^{1/3}c_1^{1/3}$: производная строго положительна, а предел при $J_1 \rightarrow +0$ есть $-\infty$. Подставив его во второе уравнение, получим $2^{4/3}b^{4/3}c_1^{4/3} - 4 \cdot 2^{1/3}b^{4/3}c_1^{4/3} + 4ac_1^2 < 0$. Поскольку при $J_1 > b^{1/3}c_1^{1/3}$ правая часть второго уравнения строго возрастает, и в точке $2^{1/3}b^{1/3}c_1^{1/3}$ (корне первого уравнения) она отрицательна, то в корне $J_1^+ > 0$ правая часть первого положительна при всех $b > 0$. Это дает нам еще одну пару точек ранга 0 с координатами $J_1^+ > 0, \pm J_3^+ \neq 0, x_1 = (J_1^+)^2/2c_1 > 0, x_3 = J_1^+ J_3^+/c_1, J_2 = x_2 = 0$ и одинаковыми значениями $f_1 = a, f_2 = b, H = h$. Утверждение доказано. $\square$

2. Слоение Лиувилля на нулевом уровне интеграла Ковалевской

Слоение Лиувилля на подмножестве $K = 0$ псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской опишем, стратифицировав плоскость значений отображения $(f_2, H) = (b, h)$. Каждый страт состоит из точек, прообразы окрестностей которых послойно гомеоморфны. Точки (b, h) из двумерных стратов назовем регулярными, а остальные — бифуркационными. Объединение последних называют бифуркационной диаграммой Σ_{bh} отображения (f_2, H) . Отметим, что система обладает и компактными, и некомпактными слоями. Также, помимо особенностей с критическими точками, найдены некритические бифуркации. В прообразе их бифуркационного значения отсутствуют критические точки.

Проверка невырожденности критических точек также позволяет определить типы локальных и полулокальных невырожденных особенностей с данным особым значением с точки зрения всего M^4 и неособого уровня энергии $Q^3 = h$. Все они являются эллиптическими, и потому устройство окрестности слоя полностью определяется типом особых точек: это минимальные 3-атомы A (произведение окружности и 2-атома A — расслоенной окрестности точки минимума в диске D^2) и особенности центр-центр (произведения двух 2-атомов A).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{bh}^{sgn a}$ отображения (f_2, H) псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской в ограничении на уровень $K = 0$ интеграла Ковалевской и $f_1 = a$ при $a \neq 0$ содержится в объединении трех кривых: оси $h = 0$, параболы $h = b^2/a$ и параметрической кривой $b(t) = t^3/4c_1 + ac_1/t, h(t) = 3t^2/4 + ac_1^2/t^2$. В случае $a = 0, b \neq 0$ это прямая $h = 0$ и кривая $h(b) = 3(bc_1/2)^{2/3}$.*

Дуги этих кривых, входящие в бифуркационную диаграмму $\Sigma_{bh}^{sgn a}$, изображены на рис.1 сплошными линиями. Не вошедшие в нее дуги отмечены курсивными линиями (штрихопунктирные линии прокомментированы ниже). Бифуркационная диаграмма является 1-остовом следующей стратификации плоскости Obh .

ТЕОРЕМА 1. *Стратификация плоскости значений (b, h) отображения (f_2, H) интеграла площадей и гамильтониана H при разных знаках $f_1 = a$ (т.е. в случае $a < 0, b \in \mathbb{R}$, в случае $a > 0, b \in \mathbb{R}$ и в случае $a = 0, b \neq 0$) изображена на рис.1 сплошными линиями:*

- страты состоят из точек с одинаковым устройством слоения Лиувилля в прообразе окрестности данной точки, для каждого из них на рис.1 указан класс гомеоморфности его прообраза (если он состоит из вырожденных в M^4 точек, то обведен окружностью),
- 0-остов пуст при $a = 0$ (уровень $b = 0$ исключен), состоит из точек $b = 0, h = 0$ и $b = 0, h = c_1\sqrt{-a}$ при $a < 0$, точек $b = 0, h = 0$ и $b = \pm\sqrt{2c_1}a^{3/4}, h = b^2/a$.
- 1-остов является объединением дуг кривых из утверждения 4, перечисленных в таблице 1 и обозначенных $e_i^{\text{sgn } a}$, а также симметричных им при $b \rightarrow -b$,
- бифуркации на типичных уровнях $f_1 = a, f_2 = b, K = 0$ являются 2-атомами A , минимальной или максимальной окружностью этой 2-поверхности, кольцом $I^1 \times S^1$ с одной внутренней окружностью, из которой выкололи точку.

страт	e_0^-	e_1^-	e_2^-	e_3^-	e_3^-	e_4^-
уровень	$4S^1$	$2pt$	$2pt$	$2\mathbb{R} \sqcup 2S^1$	$2\mathbb{R}$	$2S^1$
кривая	$b = 0$	$b(t), h(t)$	$b(t), h(t)$	$h = 0, b < b(t_0):$ $h(t_0) = 0$	$h = 0, b > b(t_0):$ $h(t_0) = 0$	$h = b^2/a$

страт	e_1^0	e_2^0	e_0^+	e_1^+	e_2^+	e_3^+
уровень	$2pt$	$2pt$	$2S^1$	$2pt$	S^1	$2\mathbb{R}$
кривая	$h = 3 \cdot 2^{-2/3} c_1^{2/3} b^{2/3}$	$h = h_0$	$b = 0$	$b(t), h(t)$	$h = b^2/a$	$h = 0$

Таблица 1: Одномерные страты бифуркационных диаграмм на плоскости Obh для неособых $M_{a,b}^4$, т.е. $(a, b) \neq (0, 0)$. Верхний индекс $e_i^{\text{sgn } a}$ отвечает знаку $f_1 = a$. Указан класс гомеоморфности прообраза любой точки 1-страта и кривая на плоскости Obh , содержащая этот страт.

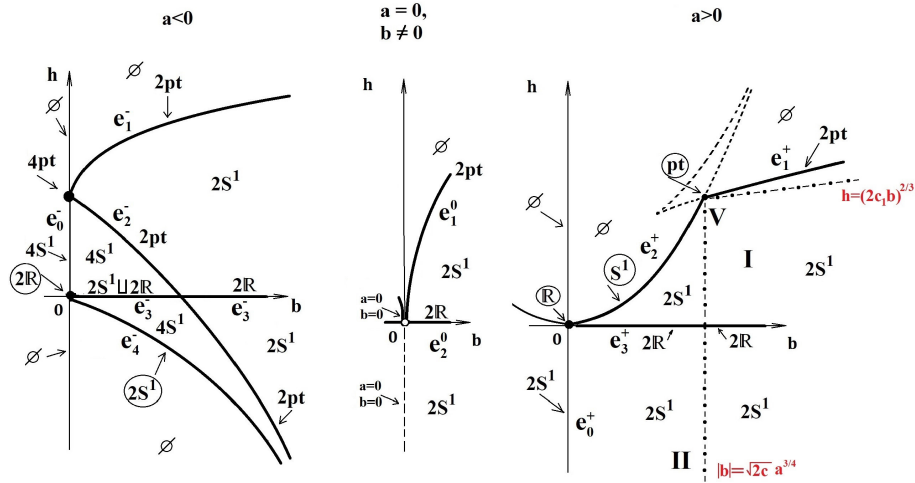


Рис. 1: Бифуркационные диаграммы псевдоевклидова волчка Ковалевской при $k = 0$: плоскость Obh при $a < 0$ или $a > 0$, полуплоскости Obh с $b \neq 0$ при $a = 0$. Для каждого страта (двумерные, ограниченные сплошными линиями), а также одномерных и нульмерных указан класс гомеоморфности совместного уровня четырех интегралов. Обведены окружностями уровни, состоящие из вырожденных точек ранга 0 (совпадает со слоем) или ранга 1 (слои, гомеоморфные $\mathbb{R}$ или S^1).

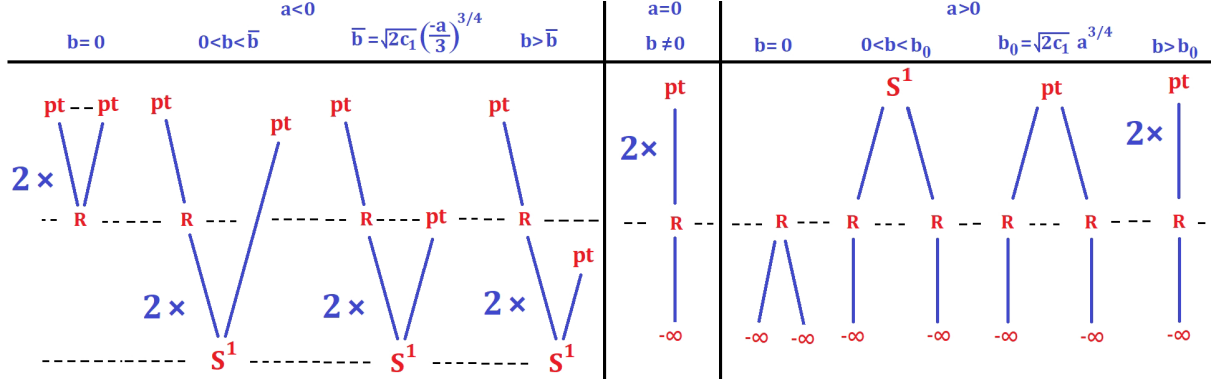


Рис. 2: Слоение функции H на уровне $K = 0$ в $M_{a,b}^4$ в зависимости от b и a , исключая $a = 0, b = 0$.

2.1. Слоения в случае $a = 0$

1. Пусть $a = 0$, тогда $x_3 = \delta(J_1^2 + J_2^2)/2c_1$, где $\delta = \pm 1$. В вычислениях примем $\delta = 1$: ответ для другого знака δ получается изменением знака у J_1 .

Подставим формулу для x_3 при $\delta = 1$ в уравнение $J_1(J_1^2 + J_2^2)/2c_1 = b + x_3J_3$:

$$J_3 = J_1 - \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2}.$$

Функция $J_3(J_1, J_2)$ определена на плоскости OJ_1J_2 без нуля — случай $J_1 = J_2 = 0$ мы не рассматриваем, т.к. тогда $a = b = 0$, и множество $M_{a,b}^4$ не является гладкой поверхностью. Выразим H через J_1, J_2 :

$$H = \frac{4bc_1(J_1^3 + J_1J_2^2 - c_1b)}{(J_1^2 + J_2^2)^2}.$$

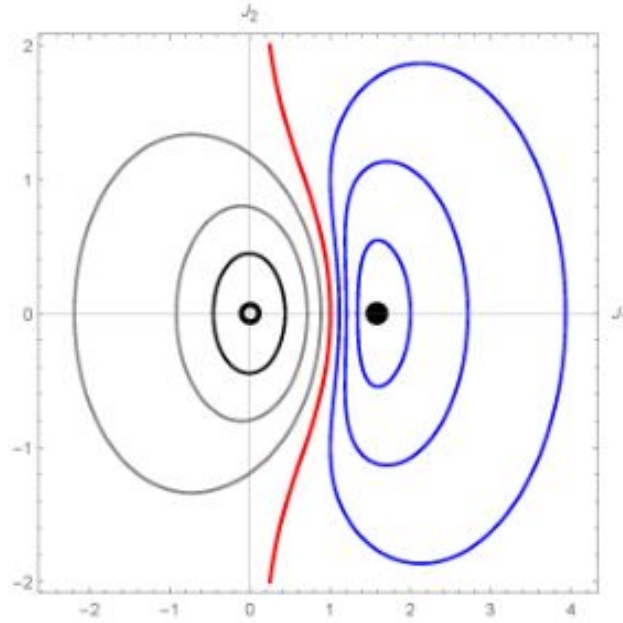
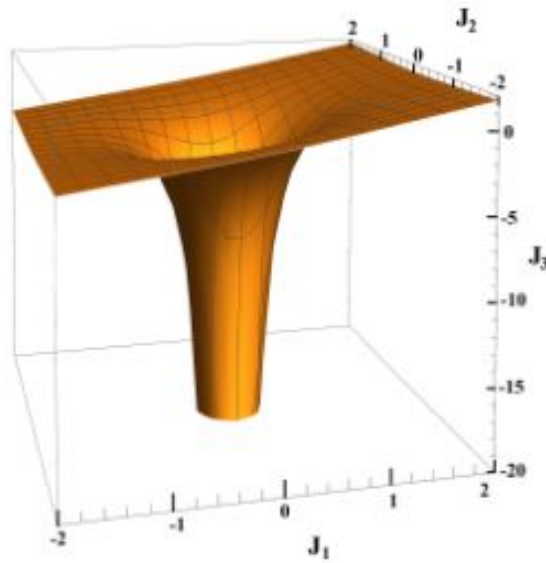
Из критерия компактности [36] следует (он применим, поскольку $b \neq 0$), что все уровни $H = h$ кроме $h = 0$ будут компактны и ограничены. Критические точки такого слоения легко находятся: это точка $J_1 = \sqrt[3]{4bc_1}, J_2 = 0$. Она является невырожденным максимумом H и соответствует точке центр-центр. Остальные компактные слои гомеоморфны окружностям.

2. Уровень $h = 0$ задается условием $0 = J_1^2 - J_3^2$:

$$0 = \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2} \left(2J_1 - \frac{2c_1b}{J_1^2 + J_2^2} \right).$$

Правая часть получаемого уравнения $J_2^2 = c_1b/J_1 - J_1^2$ при $J_1 < 0$ не имеет корней, а при $J_1 > 0$ строго монотонна, причем ее предел $\lim_{J_1 \rightarrow +0} J_2^2 = +\infty$. Без ограничения общности $b > 0$, и все решения лежат на гладкой кривой в полуплоскости $J_1 > 0$, симметричной относительно оси OJ_1 и имеющей асимптоту OJ_2 . Производная правой части отрицательна, т.е. $J_2 = 0$ при единственном значении J_1 . Полученная кривая разбивает плоскость OJ_1J_2 без двух точек (нуля и точки максимума) на два кольца, каждое из которых расслоено на окружности.

На рис. 3 и 4 приведем при $b = 1$ вид графика $J_3(J_1, J_2)$ и слоение функции H на плоскости OJ_1J_2 без нуля для случая $a = 0$.

Рис. 3: Случай $a = 0, b = 1$: слоение функции H на плоскости OJ_1J_2 без нуляРис. 4: Случай $a = 0, b = 1$: график $J_3(J_1, J_2)$ в пространстве $OJ_1J_2J_3$

2.2. Случай $a < 0$

1. При $a < 0, k = 0$ координата $x_3 = \delta \sqrt{-ac_1^2 + (J_1^2 + J_2^2)^2}$ отлична от нуля и отделена от него по модулю величиной $\delta \sqrt{-a}$, где δ есть знак x_3 . Тогда из уравнения $f_2 = b$ получим формулу для $J_3(J_1, J_2)$, определенную на всем $\mathbb{R}^2(J_1, J_2)$, и подставим ее в уравнение $H = h$:

$$H = \frac{-4b^2c_1^2 - 4ac_1^2J_1^2 + 4c_1bJ_1(J_1^2 + J_2^2)}{(J_1^2 + J_2^2)^2 - 4ac_1^2}.$$

Данная функция ограничена при фиксированных $c_1, a < 0, b \neq 0$ (что легко видеть в полярных координатах $J_1 = r \cos \varphi, J_2 = r \sin \varphi$). Она также не зависит от δ , т.к. $\delta^2 = 1$.

Изучим уровни этой функции на плоскости J_1, J_2 — проекция связной компоненты W на плоскость J_1, J_2 является биекцией и сохраняет слоение.

2. Согласно критерию компактности, доказанному автором ранее в [36] в случае $b \neq 0$, все слои при $a \in \mathbb{R}, k = 0, b \neq 0, h \neq 0$ являются компактными или пустыми. Тем самым, при $b \neq 0$ (далее считаем, что $b > 0$) достаточно найти критическое множество функции $H(J_1, J_2)$, изучить типы этих точек и описать уровень $H = 0$. Случай $b = 0$ изучим отдельно.

Критическое множество задается системой равенств нулю двух частных производных H по J_1, J_2 . Разложив их на множители, имеем

$$(2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2))(4ac_1^2 - 4bc_1J_1 + J_1^4 - J_2^4) = 0,$$

$$J_2(2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2))(2bc_1 - J_1(J_1^2 + J_2^2)) = 0.$$

Множество критических точек задается объединением трех множеств (1),(2),(3):

$$(1): 2ac_1J_1 - b(J_1^2 + J_2^2) = 0,$$

$$(2): J_2 = 0 \text{ и } J_1 \text{ есть корень многочлена } P(J_1) = J_1^4 - 4bc_1J_1 + 4ac_1^2,$$

$$(3): 2bc_1 - J_1(J_1^2 + J_2^2) = 0, \quad 4ac_1^2 - 4bc_1J_1 + J_1^4 - J_2^4 = 0$$

Первое множество (1) является окружностью с центром в точке $(ac_1/b, 0)$ и радиусом $|a|c_1/b$. В ее точках матрица d^2H имеет собственные значения 0 и $(-2b^2)/(-b^2 + aJ_1^2)$. Поскольку $a < 0$, то данное значение положительно: имеем нестрогий минимум функции H . В точках этой окружности функция H равна b^2/a .

Второе множество (2) состоит из двух точек $(J_1^+, 0)$ и $(J_1^-, 0)$. Это следует из наличия ровно одного минимума $J_1 = (bc_1)^{1/3}$ у производной $4J_1^3 - 4bc_1$ данного многочлена. При этом $P(0) = 4ac_1^2 < 0$, а $P(b^{1/3}c_1^{1/3}) = -3b^{4/3}c_1^{4/3} + 4ac_1^2 < 0$. Отсюда один корень $J_1^+ > b^{1/3}c_1^{1/3}$, а другой $J_1^- < 0$. С учетом $P(J_1^\pm) = 0$, матрица d^2H , умноженная на куб знаменателя H , становится диагональной. Знаки ее двух элементов совпадают со знаками $(4ac_1 - 3bJ_1)(2ac_1 - bJ_1)^2$ и $(2ac_1 - bJ_1)^3$. Корни этих многочленов $J_1 = 4ac_1/3b$ и $J_1 = 2ac_1/b$ отрицательны, многочлен P в них больше нуля, т.е. они лежат левее отрицательного корня J_1^- многочлена P . Следовательно, для всех $b > 0$ это точки невырожденных максимумов.

Третье множество (3) пусто: выразим из первого уравнения J_2^2 (имеем $J_1 \neq 0$, т.к. $b \neq 0$) и подставим во второе. Получим уравнение $c_1^2(a - 4b^2/J_1^2) = 0$, левая часть которого строго отрицательна.

3. Точки (J_1, J_2) , в которых $H = 0$, задаются уравнением $J_2^2 = bc_1/J_1 + ac_1J_1/b - J_1^2$. Обозначим $Q(J_1) = bc_1 + ac_1J_1^2/b - J_1^3$. Многочлен Q имеет минимум и максимум при $J_1 = 2ac_1/3b < 0$ и $J_1 = 0$ соответственно. При $b = \bar{b} = \sqrt{2}c_1(-a/3)^{3/4}$ точка минимума является корнем, при $b > \bar{b}$ в ней $Q(J_1) > 0$, а при $0 < b < \bar{b}$ в ней $Q(J_1) < 0$. Поскольку многочлен Q получен умножением правой части уравнения на J_1 , то при $0 < b < \bar{b}$ имеем отрезок точек $J_1 < 0$, таких что в них $J_2^2 \geq 0$. При $b > \bar{b}$ в полуплоскости $J_1 \leq 0$ нет точек уровня $H = 0$, а при $b = \bar{b}$ имеется ровно одна точка, в которой $J_2 = 0$. В полуплоскости $J_1 > 0$ уровень $H = 0$ состоит из точек кривой $J_2(J_1)$, симметричной относительно $J_2 = 0$ и имеющей асимптоту $J_1 = 0$.

Согласно критерию компактности, компактны все (кроме, возможно, слоев уровня $h = 0$) слои функции H на множестве $K = 0$ в $M_{a,b}^4$ для $a < 0$ и различных $b \neq 0$. Результат изображен на рисунке 2.

4. Случай $a < 0, b = 0$ существенно проще. Поскольку $x_3 \neq 0$, то $J_3 = (J_1x_1 + J_2x_2)/x_3$. Подставив выражения для x_1, x_2 , получим что при фиксированном $\text{sgn}x_3 = \delta$ функция $J_3(J_1, J_2)$ определена на всей плоскости.

На множестве $K = 0$ имеем $H = J_1^- J_3^2 = \frac{4ac_1^2 J_1^2}{4ac_1^2 - (J_1^2 + J_2^2)^2}$. Числитель и знаменатель не положительны, причем последний отделен от нуля. Критическое множество функции H на

плоскости J_1, J_2 состоит из прямой $J_1 = 0$ (которая совпадает с множеством уровня $H = 0$) и пары точек $(\pm\sqrt{2c_1}(-a)^{1/4}, 0)$, задаваемых системой уравнений $J_2 = 0$ и $4ac_1^2 + J_1^4 - J_2^4 = 0$. Две эти точки являются невырожденными максимумами (в них матрица d^2H равна $\text{diag}(-2, -1)$), а точки $J_1 = 0$ — нестрогими минимумами: матрица d^2H в них диагональна, один из диагональных элементов равен нулю, а другой равен $8ac_1^2/(4ac_1^2 - J_2^4)$, т.е. положителен из $a < 0$. Полученное слоение на множестве $K = 0$ орбиты $M_{a,0}^4$ также изобразим на рис. 2.

2.3. Случай $a > 0$

1. Будем считать, что $b \geq 0$ в силу наличия у системы симметрии. Подставим выражения для x_1 и x_2 через J_1, J_2 в уравнения $f_1 = a, H = h$, и обозначим $x = x_3^2 + a, J = J_3^2 + a$, получим

$$J_1^2 = h + J_3^2 =: J, \quad \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} \right)^2 = a + x_3^2 =: x.$$

Уравнение $f_2 = b$ перепишем и затем возведем в квадрат:

$$(b + x_3 J_3)^2 = J_1^2 \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{2c_1} \right)^2.$$

Подставив выражения для J_1^2 и дроби, получим

$$x_3^2 J_3^2 + 2b(b + x_3 J_3) - b^2 = x_3^2 J_3^2 + h x_3^2 + a J_3^2 + ah.$$

Подставим вместо $b + x_3 J_3$ его выражение через корни из J и x : $\delta\sqrt{J}\sqrt{x}$. Здесь δ — знак J_1 , определяемый исходным уравнением $f_2 = b$ (поскольку $J_1^2 + J_2^2$ неотрицателен, и $a > 0$, то знак перед его знаком опустим). Перенеся $-b^2$ направо и возведя в квадрат, получим квадратичку по переменным x, J

$$a^2 J^2 + 2(ah - 2b^2)Jx + h^2 x^2 + 2a(b^2 J - ah)J + 2h(b^2 h - ah^2)x + (b^2 - ah)^2 = 0.$$

Инварианты квадратички (след tr и определитель det квадратичной части, определитель расширенной матрицы Det) равны

$$tr = a^2 + h^2 > 0, \quad det = 4b^2(ah - b^2), \quad Det = -4b^6(ah - b^2)^2.$$

Квадрика вырождается в двух случаях: при $b = 0$ и при $ah = b^2$. В обоих этих случаях $tr > 0, det = Det = 0$, т.е. имеем пару совпадающих прямых. Иначе имеем гиперболу при $h < b^2/a$ (тогда $det < 0$ и $Det \neq 0$) или эллипс при $h > b^2/a$ (тогда $det > 0, tr > 0$ и $Det < 0$).

2. Опишем возможное расположение полученной квадратички.

ЛЕММА 1. *Общие точки квадратички и каждой из прямых $J = 0, J = h, x = 0, x = a$ являются двойными (точками касания, если квадратичка невырождена) и имеют координаты:*

$$J = 0, hx = -b^2 + ah, \quad J = h, hx = b^2, \quad J = b^2/a, x = 0, \quad J = h - b^2/a, x = a.$$

3. Заметим, что все точки множества $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = 0$ проецируются на эту квадратичку. Сформулируем три условия на точку квадратички, при нарушении которых система заведомо не имеет вещественных решений:

- $J_1^2 \geq 0$: $J \leq 0$ при $h \geq 0$ и $J \geq h$ при $h > 0$,
- $(J_1^2 + J_2^2)/4c_1^2 \geq 0$: $x \geq a$,

- $(J_1^2 + J_2^2)/2c_1 \geq J_1^2/2c_1 : \sqrt{x} \geq h/2c_1$, т.е. $x \geq J^2/4c_1^2$.

Первые два условия задают прямые, параллельные осям OJ, Ox , а третье — параболу с вершиной в нуле. Назовем их *граничными* кривыми. На рис. 5 изобразим эти кривые и квадрику на плоскости OJx при разных b, h . На нем закрашено замкнутое множество, где выполнены все три условия. Назовем это множество и его пересечение с квадрикой *допустимыми* множеством и дугой, как и каждую точку допустимой дуги квадрики.

Тем самым, квадрика-эллипс ($h > b^2/a$, рис. 5h) и пара прямых ($b = 0, h > 0$ или $h = b^2/a, b > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$, рис. 5g) не содержат допустимых точек. Гипербола не содержит таких точек, если $h(t) < h < b^2/a$ для $b = b(t)$ на нижней ветви параметрической кривой $b(t), h(t)$. В случае $h = b^2/a, b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ такая точка одна: $x = a, J = h$.

4. В прообразе допустимой точки квадрики, лежащей на граничной кривой, хотя бы одна из четырех координат J_1, J_2, J_3, x_3 равна нулю. В случае параболы имеем $J_2 = x_2 = 0, x_1 = J_1^2/2c_1$. На прямой $x = a > 0$ имеем $x_3 = 0$. На прямой $J = 0$ при $h < 0$ имеем $J_1 = 0, |J_3| = \sqrt{|h|} > 0$. На прямой $J = h$ при $h > 0$ имеем $J_3 = 0, |J_1| = \sqrt{h} > 0$.

Точки касания квадрики с осями OJ, Ox и прямой $J = h > 0$ на рис. 5 отмечены черным, если они принадлежат допустимому множеству, или выколоты, если не принадлежат. В полуплоскости $b \geq 0$ возникает две дополнительные кривые, при которых точка касания квадрики и одной из граничных кривых пересекает и еще одну граничную кривую. Это прямая $b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ при $h < b^2/a$ (касается прямой $x = a$ и пересекает параболу) и кривая $h = (2c_1b)^{2/3}$ при $b > \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ (касание прямой $J = h$ и пересекает параболу). На рис. 1 они изображены штриховкой и делят двумерные страты на части (для точек которых квадрики изображены на рис. 5a, b, c при $h > 0$ и на рис. 5).

5. Тем самым, в допустимых точках, не лежащих на граничных кривых, все четыре переменные отличны от нуля. Это гарантирует сохранение их знаков вдоль кривой $\gamma(s) = (h(s), b(s), J(s), x(s))$, где J, x не выходят на границу допустимой области, а $h(s), b(s)$ всегда лежат в образе отображения момента при данном a . Тем самым, если четверка ненулевых знаков (s_1, s_2, s_3, t_3) координат J_1, J_2, J_3, x_3 дает решение системы $f_1 = a, f_2 = b, H = h$ в прообразе некоторой допустимой точки квадрики, то и в прообразе остальных допустимых точек квадрик (при различных b, h) имеется непрерывная ветвь данного корня. Отметим также, что четверки $(s_1, +, s_3, t_3)$ и $(s_1, -, s_3, t_3)$ являются решениями одновременно.

Явно проверим, какие тройки знаков s_1, s_3, t_3 дают решения в прообразе пробных точек с “удобными” координатами для трех дуг, на которые допустимая дуга квадрики с рис. 5a) делится черными точками касания. То же самое сделаем для компоненты $x > (ah - b^2)/h$ допустимой дуги в случае с рис. 5f). Обозначим их цифрами 1-4 и выберем пробные точки: случай $a = 1, b = 1, h = 1/2$ для рис. 5a) и точки с координатой $J = 3/4, J = 5/4$, случай $a = 1, b = 1, h = -1 : J = 1/2$ и больший из двух корней $x(J)$.

Как оказалось, решениям для этих случаев соответствуют следующие эволюции знаков для двумерных стратов и дуги e_3^+ , на которой $h = 0$:

$$\text{рис.1a : } \quad 1 : (+, +, +) \quad 2 : (+, -, +), \quad 3 : (+ - -);$$

$$\text{рис.1a : } \quad 1 : (+, -, -) \quad 2 : (+, +, -), \quad 3 : (+ + +);$$

$$\text{рис.1f : } \quad 4 : (-, -, +) \quad 2 : (+, -, +), \quad 3 : (+ - -);$$

$$\text{рис.1f : } \quad 4 : (-, +, -) \quad 2 : (+, +, -), \quad 3 : (+ + +).$$

При $h \neq 0$ допустимая дуга заканчивается двумя точками, в которых $J_2 = 0$, при $h = 0$ такая точка ровно одна. На кривых $b = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ и $h = (2bc_1)^{2/3}$ в одной из точек касания становятся нулевыми сразу два знака: J_2 и J_1 либо x_3 . Это не приводит к бифуркации прообраза соответствующей точки квадрики. Если $b > 0, h = 0$, то допустимая дуга неограничена. Это влечет гомеоморфность уровня не двум окружностям $2S^1$, но двум интервалам $2\mathbb{R}$.

6. В особом случае $b = 0, h = 0$ имеем $J_1 = J_3 = 0$ для всей допустимой дуги (луча $J = 0, x \geq a$), а в вершине дополнительно $x_3 = 0$. Для J_2 верно $J_2^2 = \sqrt{x_3^2 + a} > 0$, т.е. уровень гомеоморфен $2\mathbb{R}$ (отметим, что все эти точки являются вырожденными точками ранга 1, в отличие от остальных точек из прообраза $h = 0$).

В случае $b = 0, h < 0$ имеем компактную допустимую дугу — отрезок, соединяющий точку $(0, a)$ и точку граничной параболы. В прообразе точки $J = 0, x = a$ имеем $J_1 = x_3 = 0$, а знак J_3 постоянен на всей связной компоненте прообраза ($J = \sqrt{J_3^2 + h}$ для $h < 0$). По аналогии, имеем прообраз, гомеоморфный $2S^1$, т.е. данные такие значения отображения (f_2, H) не являются бифуркационными на множестве $K = 0$.

В случае $h = b^2/a, 0 < b < \sqrt{2c_1}a^{3/4}$ аналогично получим, что прообраз связан и гомеоморфен S^1 : в прообразе точки $J = h, x = a$ имеем $J_3 = x_3 = 0$, а знак J_1 однозначно определен из знака b . Они состоят из вырожденных точек ранга 1. В пределе $h \rightarrow +0$ вырожденная окружность перестраивается в два интервала путем разрыва в двух точках (при $b \leq 0$ имеем то же самое).

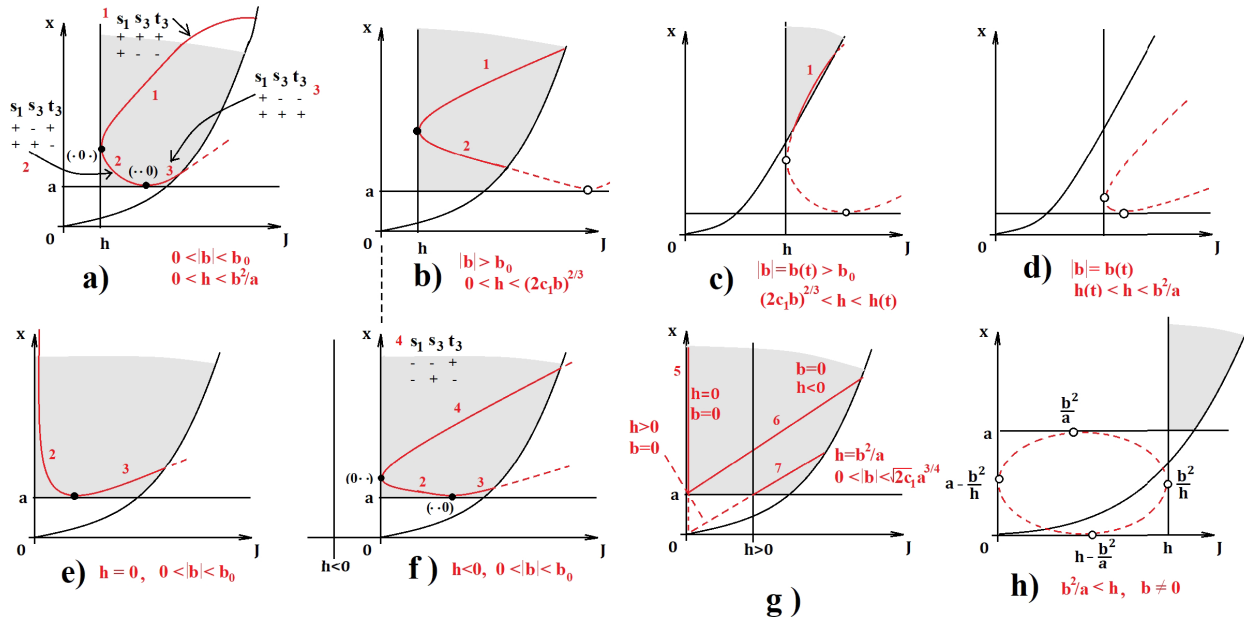


Рис. 5: Квадрика (красная линия) и граничные кривые при разных b, h в случае $a > 0$, черные точки — их точки касания. Закрашенная область и сплошная линия — допустимые множество плоскости OJx и дуга квадрики (пунктирная линия — дополнение до последней). Значение $b_0 = \sqrt{2c_1}a^{3/4}$, кривая $b(t) > 0, h(t)$ — нижняя ветвь кривой (8). Для случаев а, f указаны наборы знаков s_1, s_3, t_3 переменных J_1, J_3, x_3 , дающие решения исходной задачи $f_1 = a, f_2 = b, H = h$.

3. Заключение

Полученные результаты позволяют описать топологию слоения Лиувилля псевдоевклидовой системы Ковалевской в окрестности точек уровня $k = 0$, являющихся невырожденными точками ранга 1 и составляющими вместе слой слоения. Для изучения слоения системы при ненулевых k может быть полезно как отдельное изучение особенностей данной системы, так и адаптация метода булевых функций, развитого М.П.Харламовым [37], к псевдоевклидову случаю, когда уровень геометрического интеграла $f_1 = a$ есть обобщенный гиперboloид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Классическая динамика в неевклидовых пространствах — Москва, Ижевск: РХД, 2004.
2. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. of Math. Phys.* 2016. Vol. 23, № 4. P. 431-454.
3. Kowalewski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*. 1889. Vol. 12, P. 177-232.
4. Соколов С. В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // *Труды МАИ*. 2018. Т. 100, С. 1-13.
5. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные гироскопы // *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки*. — М., 1940.
6. Делоне Н. Б. К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской // *Матем. сб.* 1892. Т. 16, № 2. С. 346-351.
7. Smale S. Topology and Mechanics: 1 // *Invent. Math.* 1970. Vol. 10, № 4. P. 305-331.
8. Харламов М. П. *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета 1988.
9. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1986. Т. 50, № 6. С. 1276-1307.
10. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54, № 3. С. 546-575.
11. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // *УМН*. 1990. Т. 45, № 2. С. 49-77.
12. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
13. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations, *AMS*, Vol. 4. P. 67-146. (1991)
14. Bolsinov A. T., Richter P., Fomenko A. T. The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top // *Sb. Math.* 2000. Vol. 191, № 2. P. 151-188.
15. Morozov P. V. The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case // *Sb. Math.* 2002. Vol. 193, № 10. P. 1507-1533.
16. Morozov P. V. Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations // *Sb. Math.* 2004. Vol. 195, № 3. P. 369-412.
17. Logacheva N. S. Classification of nondegenerate equilibria and degenerate 1-dimensional orbits of the Kovalevskaya-Yehia integrable system // *Sb. Math.* 2012. Vol. 203, № 1. P. 28-59.

18. Maslov V. P., Shafarevich A. I. Fomenko invariants in the asymptotic theory of the Navier–Stokes equations // J. Math. Sci. 2017. Vol. 225, № 4. 666-680.
19. Ramodanov S. M., Sokolov S. V. Dynamics of a Circular Cylinder and Two Point Vortices in a Perfect Fluid // Regul. Chaotic Dyn. 2021. Vol. 26, № 6. P. 675-691.
20. Palshin G. P. On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics // Theor. Math. Phys. 2022. Vol. 212, № 1. P. 972-983. <https://doi.org/10.1134/S0040577922070078>
21. Haghighatdoost G., Oshemkov A. A. The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Sb. Math. 2009. Vol. 200, № 6. 899-921.
22. Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 8. 41-66.
23. Komarov I. V. Kowalewski basis for the hydrogen atom // Theoret. and Math. Phys. 1981. Vol. 47, № 1. P. 320-324. <https://doi.org/10.1007/BF01017022>
24. Kozlov I. K. The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Sb. Math. 2014. Vol. 205, № 4. P. 532-572.
25. Kibkalo V. A. Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, № 9. P. 1396-1399.
26. Kibkalo V. A. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Sb. Math. 2019. Vol. 210, № 5. P. 625-662.
27. Kibkalo V. A.: Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ // Topol. and Appl. 2020, Vol. 275, № 107028. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.107028>
28. Fedoseev D. A., Fomenko A. T. Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. Math. Sc. 2020. Vol. 248. P. 810-827.
29. Кудрявцева Е. А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // ДАН. 2012. Т. 445, № 4. С. 383-385.
30. Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{e}(3)$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 127-160.
31. Николаенко С. С. Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 8. С. 68-101.
32. Николаенко С. С. Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 185-197.
33. Nikolaenko S. S. Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case // Lobachevskii J. Math., 2017. Vol. 38. С. 1050-1060.
34. Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 4. С. 20-67.
35. Ведюшкина В. В., Скворцов А. И. Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуксовским потенциалом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2022. № 1. С. 8-19.

36. Kibkalo V. A. Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // Moscow Univ. Math. Bull., 2020. Vol. 75, № 6. P. 263-267.
37. Харламов М. Р. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010. Т. 6, № 4. С. 769-805.

REFERENCES

1. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2004, Classical dynamics in non-Euclidean spaces — Moscow, Izhevsk: R.Ch.D. (in Russian)
2. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2016, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, *Rus. J. of Math. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 431-454.
3. Kowalewski, S. 1889, “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Mathematica*, vol. 12, pp. 177-232.
4. Sokolov, S. V. 2018, “The integrable case of Kovalevskaya in a non-Euclidean space: separation of variables”, *Trydi MAI*, vol. 100, pp. 1-13.
5. Appelrot, G. G. 1940, “Ne vpolne simmetrichnye tyazhelye giroskopy”, *Dvizhenie tverdogo tela vokrug nepodvizhnoi tochki*, — Izd-vo AN SSSR, M.-L., pp. 61-157.
6. Delaunay, N. B. 1892, “Zur Frage von der geometrischen Deutung der Integrale von S. Kowalevski bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkte”, *Sb. Math.*, vol. 16, no. 2, pp. 346-351.
7. Smale, S. 1970, “Topology and Mechanics: I”, *Invent. Math.*, vol. 10, no. 4, pp. 305-331.
8. Kharlamov, M. P. 1988, *Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics*, LSU Publ., Leningrad, 200 pp.
9. Fomenko, A. T. 1987, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629-658.
10. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1991, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567-596.
11. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59-94.
12. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification*, Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
13. Oshemkov, A. A. 1991, “Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations”, *AMS*, vol. 4. pp. 67-146.
14. Bolsinov, A. T., Richter, P. & Fomenko, A. T. 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151-188.
15. Morozov, P. V. 2002, “The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 10, pp. 1507-1533.

16. Morozov, P. V. 2004, "Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations", *Sb. Math.*, vol. 195, no. 3, pp. 369-412.
17. Logacheva, N. S. 2012, "Classification of nondegenerate equilibria and degenerate 1-dimensional orbits of the Kovalevskaya-Yehia integrable system", *Sb. Math.*, vol. 203, no. 1, pp. 28-59.
18. Maslov V. P. & Shafarevich, A. I. 2017, "Fomenko invariants in the asymptotic theory of the Navier-Stokes equations", *J. Math. Sci.*, vol. 225, no. 4, pp. 666-680.
19. Ramodanov S. M. & Sokolov, S. V. 2021, "Dynamics of a Circular Cylinder and Two Point Vortices in a Perfect Fluid", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 26, no. 6, pp. 675-691.
20. Palshin, G. P. 2022, "On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics", *Theor. Math. Phys.*, vol. 212, no. 1, pp. 972-983. <https://doi.org/10.1134/S0040577922070078>
21. Haghighatdoost, G. & Oshemkov, A. A. 2009, "The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 6, pp. 899-921
22. Novikov, D. V. 2014, "Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ ", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 8, pp. 1107-1132.
23. Kozlov, I. K. 2014, "The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ", *Sbornik: Mathematics*, vol. 205, no. 4, pp. 532-572.
24. Kibkalo, V. A. 2018, "Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 39, no. 9, pp. 1396-1399.
25. Kibkalo, V. A. 2019, "Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ", *Sb. Math.*, vol. 210, no. 5, pp. 625-662.
26. Kibkalo, V. A. 2020, "Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ ", *Topol. and Appl.*, vol. 275, no. 107028.
27. Komarov, I. V. 1981, "Kowalewski basis for the hydrogen atom", *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 47, no. 1, pp. 320-324. <https://doi.org/10.1007/BF01017022>
28. Fedoseev, D. A. & Fomenko, A. T. 2020, "Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems", *J. Math. Sci.*, vol. 248, pp. 810-827.
29. Kudryavtseva, E. A. 2012, "An analogue of the Liouville theorem for integrable Hamiltonian systems with incomplete flows", *Doklady Mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 527-529.
30. Novikov, D. V. 2011, "Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{e}(3)$ ", *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 749-781.
31. Nikolaenko, S. S. 2020, "Topological classification of Hamiltonian systems on two-dimensional noncompact manifolds", *Sb. Math.*, vol. 211, no. 8, pp. 1127-1158.
32. Nikolaenko, S. S. 2021, "Topological classification of non-compact 3-atoms with a circle action", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 185-197.
33. Nikolaenko, S. S. 2017, "Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, pp. 1050-1060.
34. Vedyushkina (Fokicheva), V. V. & Fomenko, A. T. 2017, "Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems", *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688-733.

- 35. Vedyushkina, V. V. & Skvortsov, A. I. 2022, "Topology of integrable billiard in an ellipse on the Minkowski plane with the Hooke potential", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, vol. 77, no. 1, pp. 8-19.
- 36. Kibkalo, V. A. 2020, "Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 75, no. 6, pp. 263-267.
- 37. Kharlamov, M. P. 2010, "Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and application to classical systems", *Nelin. Dinam.*, vol. 6, no. 4, pp. 769-805.

Получено: 30.01.23

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-89-103

Применение мегастабильной системы с 2- D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи

О. И. Кузнецова

Кузнецова Оксана Игоревна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: oxty4893@mail.ru

Аннотация

Многие реальные динамические системы характеризуются наличием множества сосуществующих аттракторов. Это свойство систем называется мультистабильностью. В мультистабильных системах может произойти внезапный переход к нежелательным или неизвестным аттракторам. Такой переход может привести к катастрофическим событиям. Оказалось, что мультистабильность также связана с возникновением непредсказуемых аттракторов, которые называются скрытыми аттракторами. Одной из определяющих причин изучения мультистабильных хаотических систем с различными характеристиками является широкий спектр их потенциальных инженерных приложений – синхронизация приемника и передатчика, маскировка и восстановление сообщений, фильтрация шумов, восстановление информационных сигналов, а также разработка алгоритмов кодирования декодирования, позволяющих представить произвольное цифровое сообщение через символическую динамику хаотической системы.

В статье предложена не только математическая модель схемы безопасной коммуникации, основанная на адаптивной синхронизации между парой идентичных мегастабильных систем с 2- D полосой скрытых хаотических аттракторов, но и ее численное моделирование с использованием среды MATLAB & Simulink. Использование синхронизации в системах связи имеет фундаментальное значение, поскольку она заставляет системы одновременно производить одинаковые выходные данные и, в свою очередь, приводит к точному восстановлению информационных сигналов. Между тем, на стороне получателя информация может быть успешно восстановлена с помощью адаптивной техники. Представленный метод является устойчивым по отношению к различным уровням аддитивного белого гауссова шума. Схема, используемая для синхронизации, позволила преодолеть известные трудности, представленные в работах ряда специалистов, возникающие в задаче синхронизации в случае мультиустойчивости и сосуществования скрытых колебаний, при неправильном выборе формы управляющего сигнала.

Численное моделирование проводится для проверки осуществимости предложенной синхронизации и повышения производительности метода шифрования с точки зрения гистограммы, устойчивости к шуму и визуальной незаметности. В качестве тестовых примеров рассматриваются три типа замаскированных сообщений (текст, изображение в градациях серого и аудиосигнал).

Ключевые слова: динамические системы, хаос, скрытые аттракторы, счетное число сосуществующих аттракторов, безопасная связь.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

О. И. Кузнецова. Применение мегастабильной системы с 2- D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 89–103.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-89-103

Application of megastable system with 2- D strip of hidden chaotic attractors to secure communications

O. I. Kuznetsova

Kuznetsova Oksana Igorevna — postgraduate student, Tula State University (Tula).*e-mail: oxy4893@mail.ru***Abstract**

Many real dynamical systems are characterized by the presence of a coexisting attractors set. This property of systems is called multistability. In multistable systems, a sudden transition to unwanted or unknown attractors can occur. Such a transition can lead to catastrophic events. It turned out that multistability is also associated with the emergence of unpredictable attractors, which are called hidden attractors. One of the defining reasons for studying multistable chaotic systems with different characteristics is a wide range of their potential engineering applications - synchronization of the receiver and transmitter, masking and recovery of messages, noise filtering, recovery of information signals, as well as the development of decoding and coding algorithms that allow you to present an arbitrary digital message through the symbolic dynamics of a chaotic system.

This paper proposes not only a mathematical model of a secure communication scheme based on adaptive synchronization between a pair of identical megastable systems with a 2- D band of hidden chaotic attractors, but also its numerical simulation using the MATLAB & Simulink environment. The use of synchronization in communication systems is of fundamental importance, since it forces systems to simultaneously output the same output data and, in turn, leads to accurate restoration of information signals. Meanwhile, on the receiver side, information can be successfully recovered using adaptive technology. The presented method is stable with respect to various levels of additive white Gaussian noise. The scheme used for synchronization made it possible to overcome the well-known difficulties presented in the works of a number of specialists that arise in the problem of synchronizing in the case of multistability and coexistence of hidden oscillations, with the wrong choice of the form of the control signal.

Numerical simulations are given to verify the feasibility of proposed synchronization and better performance of image encryption technique in terms of histogram, robustness to noise and visual imperceptibility. Three types of masked messages (text, grayscale image and audio signal) are considered as test examples.

Keywords: dynamical systems, chaos, hidden attractors, countable number of coexisting attractors, secure communications.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

O. I. Kuznetsova, 2023, "Application of megastable system with 2- D strip of hidden chaotic attractors to secure communications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 89–103.

1. Введение

Мультистабильность - широко распространенное явление в реальном физическом мире. Ее можно наблюдать, например, в динамических моделях газового лазера [1], биологических

систем [2], волоконных лазеров [3], нейронных сетей [4], полупроводниковых суперрешеток [5]. Мультистабильность динамической системы, содержащей хаотические аттракторы, может создать угрозу в практических инженерных приложениях, ввиду нетривиальной локализуемости в фазовом пространстве и непредсказуемости динамики системы. Это связано с тем, что в зависимости от выбора начальных условий такая система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением. После того как были найдены теоретические решения проблем борьбы с хаосом и Пекора и Кэрролл предложили эффективный метод синхронизации двух одинаковых хаотических систем [6], были разработаны различные типы и стратегии синхронизации хаотических систем, включая полную синхронизацию [7–9], синхронизацию с запаздыванием [10–12], кластерную синхронизацию [14], адаптивную синхронизацию [15–17]. Использование синхронизации в системах связи имеет фундаментальное значение, поскольку она заставляет системы одновременно производить одинаковые выходные данные и, в свою очередь, приводит к точному восстановлению информационных сигналов [18; 19]. С тех пор многие исследователи обратились к задачам использования хаоса в технических системах. В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются, в частности, в шифровании изображений [20–22] и безопасной связи [23]. В данном случае роль “секретного ключа” играет определенный выбор начальных условий.

С быстрым ростом Интернета и беспроводных сетей информационная безопасность становится все более важной. В частности, шифрование изображений вызывает все больший интерес из-за того, что большая часть данных изображений должна быть конфиденциальной между отправляющей стороной и принимающей стороной, например, некоторые военные изображения, архитектурные чертежи, медицинские изображения и так далее. Не менее важно, уметь шифровать текст, аудиосигнал или видеосигнал. За последние несколько десятилетий в литературе было предложено множество алгоритмов шифрования, основанных на различных принципах [24–26]. Среди них методы шифрования на основе хаоса пользуются популярностью для практического применения, поскольку эти методы обеспечивают хорошее сочетание скорости, высокой безопасности, высокой чувствительности, сложности. При этом использование мультистабильных моделей в схемах синхронизации может привести к более сложному поведению используемой системы, что, в свою очередь, может быть существенно для различных приложений, включая безопасную связь и разработку криптосистем, а также усложнению задач дешифрования для взломщиков.

2. Метод адаптивной синхронизации для общего класса хаотических вещественных моделей

В работе [17] предложена схема адаптивной синхронизации, которая в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)A + H(x)B, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор нелинейной функции, $G(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – линейная матрица-функция, $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – нелинейная матрица-функция, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)^T$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_m) \in \mathbb{R}^m$ – постоянные векторы параметров модели, которые ассоциируются с линейными и нелинейными членами, соответственно.

Ряд хорошо известных хаотических систем, таких как схема Чуа, гиперхаотическая система Лю, обобщенная система Лоренца, имеют вид уравнения (1).

Пусть ведущая и ведомая системы имеют следующую форму:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)A + H(x)B, \quad (2)$$

$$\dot{y} = F(y) + G(y)\hat{A} + H(y)\hat{B} + \theta(x, y). \quad (3)$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния, $A, B \in \mathbb{R}^m$ – постоянные векторы параметров ведущей системы, $\hat{A}, \hat{B}$ – неопределенные постоянные векторы параметров ведомой системы, $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор функции управления ведомой системой (3). Ошибка модуляции параметров $\hat{A}, \hat{B}$ определяются следующим образом: $e_A = \hat{A} - A, e_B = \hat{B} - B$. Состояния ошибки могут быть выражены следующим образом:

$$e(t) = y(t) - x(t). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ведущая система (2) и ведомая система (3) реализуют адаптивную синхронизацию, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Следуя идеям из [11; 12], выведем векторную функцию управления для достижения синхронизации между системами (2) и (3).

ТЕОРЕМА 1. [17] Адаптивная синхронизация между ведущей системой (2) и ведомой системой (3) будет достигнута если функция вектора управления построена в следующей форме:

$$\theta(x, y) = [F(x) - F(y)]A + G(x) - G(y) + [H(x) - H(y)]B - K_1 e - K_2 e_A - K_3 e_B \quad (5)$$

Здесь $K_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1n})$, $K_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2n})$, $K_3 = \text{diag}(k_{31}, k_{32}, \dots, k_{3n})$ – положительно определенные вещественные диагональные матрицы, а обновление параметров модуляции выбирается в соответствии со следующими уравнениями:

$$\dot{e}_A = \dot{\hat{A}} = -(F(y))^T e + K_2 e, \quad (6)$$

$$\dot{e}_B = \dot{\hat{B}} = -(H(y))^T e + K_3 e. \quad (7)$$

3. Адаптивная синхронизация для мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов

В данном подразделе применим схему для достижения адаптивной синхронизации из [17] между двумя идентичными хаотическими системами из [27]. Ведущая и ведомая системы с индексами d и r соответственно могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \text{tg } y_d \\ \dot{y}_d = -x_d - \arctg(|50z_d| - 10) \text{tg } y_d, \\ \dot{z}_d = (\text{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}) \text{sign } z_d \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \text{tg } y_r + \theta_1 \\ \dot{y}_r = -x_r - \arctg(|50z_r| - 10) \text{tg } y_r + \theta_2, \\ \dot{z}_r = (\text{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}) \text{sign } z_r + \theta_3 \end{cases} \quad (9)$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ – вектор-функция управления.

Запишем ведущую систему (8) в виде (2):

$$x = (x_d, y_d, z_d)^T, A = (1, 0, 0)^T, B = (0, 0, a)^T, F(x) = \begin{pmatrix} \text{tg } y_d, \\ -x_d - \arctg(|50z_d| - 10) \text{tg } y_d, \\ (\text{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}) \text{sign } z_d \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\text{sign } z_d}{1+x_d^8} \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно записать ведомую систему (9) в виде (3):

$$x = (x_r, y_r, z_r)^T, A = (1, 0, 0)^T, B = (0, 0, \hat{a})^T, \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T,$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} y_r, \\ -x_r - \operatorname{arctg}(|50z_r| - 10) \operatorname{tg} y_r, \\ (\operatorname{tg}^4 y_r - \frac{a}{1+x_r^8}) \operatorname{sign} z_r \end{pmatrix}, G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\operatorname{sign} z_r}{1+x_r^8} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Векторы ошибок, соответствующие состояниям и модуляции параметров, выражаются следующим образом:

$$e = (e_1, e_2, e_3)^T, \quad (12)$$

$$e_A = (e_{A_1}, e_{A_2}, e_{A_3})^T, \quad (13)$$

$$e_B = (e_{B_1}, e_{B_2}, e_{B_3})^T. \quad (14)$$

По теореме 1, мы получаем следующие функции управления (5):

$$\theta = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} y_d, -\operatorname{tg} y_r + \varphi_1 \\ -x_d - \operatorname{arctg}(|50z_d| - 10) \operatorname{tg} y_d + x_r + \operatorname{arctg}(|50z_r| - 10) \operatorname{tg} y_r + \varphi_2 \\ (\operatorname{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}) \operatorname{sign} z_d - (\operatorname{tg}^4 y_r - \frac{a}{1+x_r^8}) \operatorname{sign} z_r + \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\varphi_1 = -k_{11}e_1 - k_{21}e_{A_1} - k_{31}e_{B_1}$, $\varphi_2 = -k_{12}e_2 - k_{22}e_{A_2} - k_{32}e_{B_2}$, $\varphi_3 = -k_{13}e_3 - k_{23}e_{A_3} - k_{33}e_{B_3}$.

Как показано в [27], при $a = 2$ система (8) не имеет состояний равновесия и обладает 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов, представленной на рисунке 1. Ведущая система (8) и ведомая система (9) с управлением (15) решаются численно.

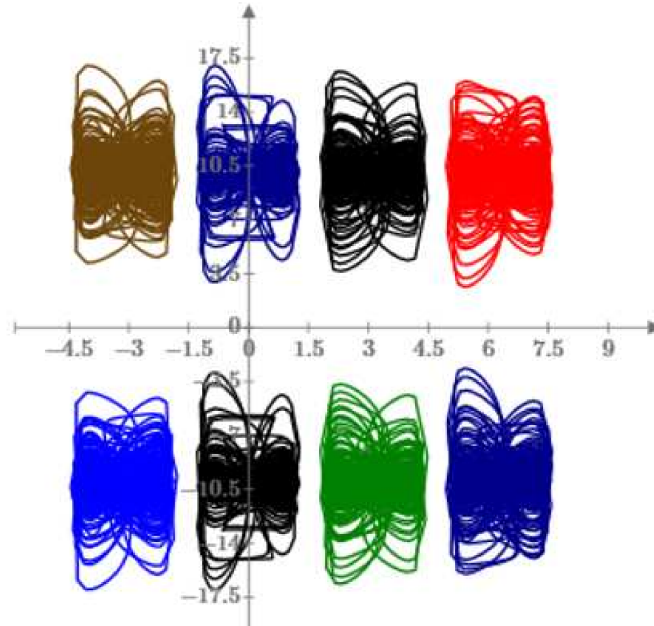


Рис. 1: Скрытый аттрактор системы (2)-(3).

4. Приложение для систем защищенной коммуникации

В данном разделе описана безопасная стратегия связи, основанная на адаптивной синхронизации хаотических систем (8) и (9). Схема построена таким образом, чтобы разделить

сообщение и распределить его между двумя каналами, что повышает безопасность системы связи и усложняет задачу дешифровки злоумышленниками. Некоторый бит информационного сигнала вводится в параметры модуляции и передается по одному из двух каналов; тем временем другой бит вводится в состояния передатчика и передается по второму каналу. На стороне приемника сообщение может быть точно извлечено с помощью адаптивных методов и функции дешифрования. Предложенная схема надежна к различным масштабам аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ), что будет продемонстрировано ниже. На рисунке. 2 изображена предложенная схема. Схема включает следующие компоненты:

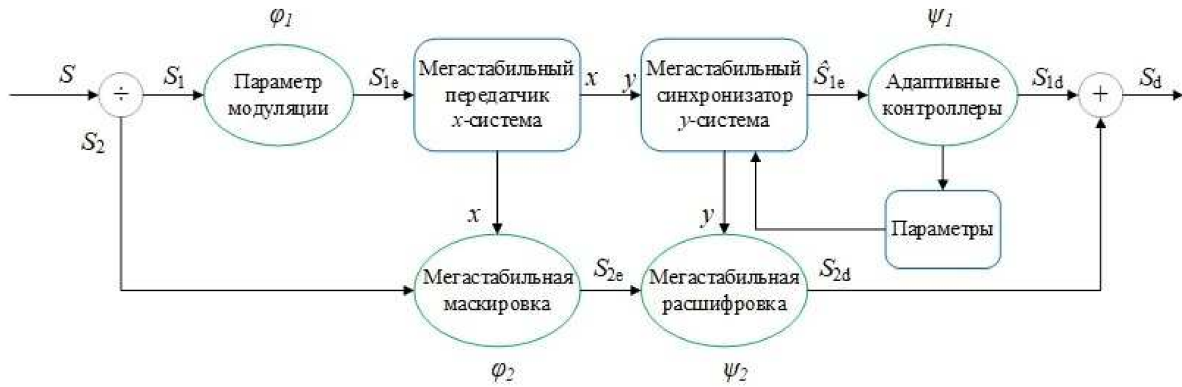


Рис. 2: Скрытый аттрактор системы (2)-(3).

– Системы передатчика и приемника: мегастабильная система с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов из [27], которая генерирует переменные состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$ для передатчика и $y(t) \in \mathbb{R}^n$ для приемника.

– Блок разделения: информационное сообщение $S(t)$ делится на два вектора битов S_1 и S_2 , чтобы распределить его по двум каналам.

– Блок модуляции параметров: первая часть сообщения $S_1(t)$ модулируется непрерывной инвертируемой функцией φ_1 в параметры передатчика.

– Мегастабильный хаотический маскирующий блок: вторая часть сообщения $S_2(t)$ шифруется путем введения в нелинейную функцию $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая для $x \in \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет ассоциированную нелинейную функцию $\psi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая непрерывна для $x \in \mathbb{R}^n$, такую, что $\psi_2(x, \varphi_2(x, S_2)) = S_2$. Шифрующая функция φ_2 строится на основе хаотических состояний. В результате генерируется сигнал $S_{2e}(t)$, который несет часть сообщения.

– Каналы: хаотические состояния, которые содержат параметры модуляции и зашифрованную информационную часть S_{2e} , передаются по двум каналам.

– Блок синхронизации: на стороне приемника реализован блок синхронизации для получения сигналов состояния хаоса и предоставления необходимой информации для расшифровки.

– Блок адаптивных контроллеров: на стороне приемника строятся адаптивные контроллеры для отслеживания параметров системы передатчика. После синхронизации функция расшифровки ψ_1 может быть использована для восстановления первой части переданного сообщения S_{1d} .

– Блок мегастабильного хаотического дешифрования: маскированная информация $S_{2e}(t)$ декодируется функцией $S_{2d}(t) = \psi_2(y(t), S_{1e}(t))$.

– Блок сбора: объединив два информационных сигнала S_{1d} и S_{2d} , получаем полное расшифрованное сообщение S_d .

5. Однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для шифрования звукового сигнала

Первый тип сообщения $S(t)$ - это аудиосигнал, который находится в интервале $[0, 33]$. Для преобразования этого звукового сообщения в вектор цифр используется инструмент MATLAB "double". Пусть $S = [s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$, согласно предложенной схеме, этот вектор цифр разбивается на два вектора $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_m]$ и $S_2 = [s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$. Первый вектор S_1 вводится в параметры передатчика со следующим параметром функции модуляции:

$$S_{1e} = \varphi_1([A, B], S_1) = \frac{S_1}{10d} + a, \quad (16)$$

где $d = \max(S(j)) - \min(S(j)), j = 1, 2, \dots, n, a = 2$.

Для второй части сообщения, S_2 вставляется в хаотические состояния передатчика с помощью следующей функции:

$$S_{2e} = \varphi_2(x, S_2) = x^2 + (1 + x^2)S_2. \quad (17)$$

Приемник может расшифровать сообщение с помощью следующих функций:

$$S_{1d} = \psi_1([\hat{A}, \hat{B}], \hat{S}_{1e}) = 10(\hat{S}_{1e} - \hat{a})d, \quad (18)$$

где $\hat{a} = 0$

$$S_{2d} = \psi_2(y, \hat{S}_{2e}) = \frac{S_{2e} - y^2}{1 + y^2}. \quad (19)$$

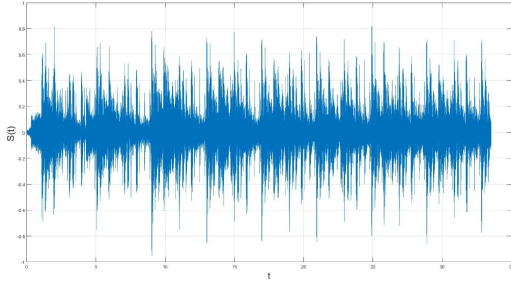


Рис. 3: Исходный сигнал $S(t)$.

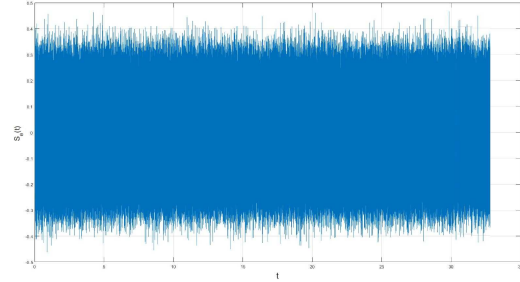


Рис. 4: Зашифрованный сигнал $S_e(t)$.

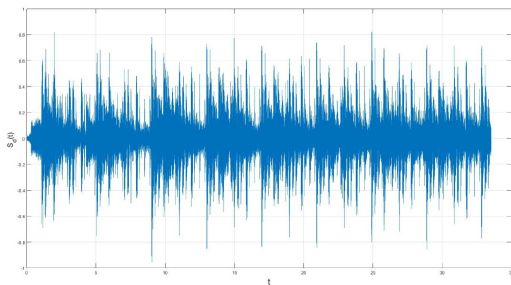


Рис. 5: Расшифрованный сигнал $S_d(t)$.

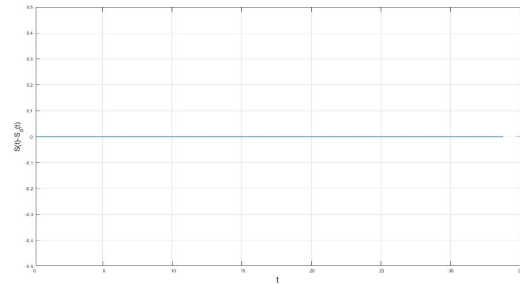


Рис. 6: Ошибка дешифрования $S(t) - S_d(t)$.

Собрав S_{1d} и S_{2d} , получим весь расшифрованный информационный сигнал S_d . Используя инструмент MATLAB "char", приемник может преобразовать этот вектор цифр обратно в текст. Предположим, что мы хотим передать сообщение, являющееся звуковым сигналом, как показано на рисунке 3. Шифрованное сообщение показано на рисунке 4, и видно, что оно надежно зашифровано. Расшифрованное сообщение показано на рисунке 5. Ошибка $S(t) - S_d(t)$ между переданным звуковым сигналом и восстановленным сигналом показана на рисунке 6. Из рисунка 6 можно наблюдать, что исходный волновой сигнал точно восстановлен.

6. Однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для шифрования обычного текста

Теперь рассмотрим второе сообщение $S(t)$, представленное в виде обычного текста, который может содержать буквы алфавита, символы, цифры и пробелы. Предположим, что мы хотим передать небольшую часть текста, как показано на рисунке 7. Шифрованное сообщение показано на рисунке 8, и видно, что оно надежно зашифровано. Расшифрованное сообщение показано на рисунке 9, и оно идентично оригинальному содержанию. Логика шифрования текста, аналогична рассмотренному выше примеру, функции шифрования и дешифрования выбираются аналогично как и для случая хаотической маскировки звукового сигнала.

Для того, чтобы прочесть зашифрованную информацию, принимающей стороне необходимы ключ и дешифратор (устройство, реализующее алгоритм расшифровывания). Идея шифрования состоит в том, что злоумышленник, перехватив зашифрованные данные и не имея к ним ключа, не может ни прочесть, ни изменить передаваемую информацию. Кроме того, в современных криптосистемах (с открытым ключом) для шифрования, расшифрования данных могут использоваться разные ключи. Однако, с развитием криптоанализа, появились методики, позволяющие дешифровать закрытый текст без ключа. Они основаны на математическом анализе переданных данных.

Рис. 7: Оригинальный текст.

```
sFOE7tiTOu6e74iOMt3EyfSNZbV07ky2h2yCZDqv/7Pq3k+F8vIplGE2GyF6SkBiGBGXu7IE/h
xhIDRA9lZLaARivzta/8ycBOM1M3UBZ7L8PpT54ck4TmnISLVFMPp5AvNdtwntiaaLT3WmJ
eqZntqziZJyWYSVH3Ec1L6Yr5u/HffHmKyz0vRmO+xoDOKd2AxSLT3E7M1BsesSpFI3xCc98
zP9kSql6tU8+eM4edyN0/g+53VSdjYlfG1OSpfZAYmv6Nr7+0ozeovvfWafJbfuHM5+XPX+E
tdlbAJ8XlgsFyX23OHEvqbcHt3KyjbKmyddlyGMaa6AO5lVS/9buKNZfgayY8GZTBOj4EAJeR
nvjN8OzxmQ8uQ7EAwVV+QHjW8julqfVkpF7yqTvtUfK2+kCJC/8opDjKRVEVJsS/0cLiRy4yN
XwgCUO3mAvIIKcJK4tAjM7xfSxKrZGleAuJfIsZozgiu9GUtIU3oCporR+keHw/tH4RNVBh0e
ygE2AOMDq2cbjcgSxVsMOBXYl29lo3zVcTISsf48WhetWRTAtJnwOoosSqaWtnfJjm4FDrg
qPSVaNx7+uhIDw7FI7tpplCX9YjGpDY=
```

Рис. 8: Зашифрованный текст.

Для того, чтобы прочитать зашифрованную информацию, принимающей стороне необходимы ключ и дешифратор (устройство, реализующее алгоритм расшифровывания). Идея шифрования состоит в том, что злоумышленник, перехватив зашифрованные данные и не имея к ним ключа, не может ни прочитать, ни изменить передаваемую информацию. Кроме того, в современных криптосистемах (с открытым ключом) для шифрования, расшифрования данных могут использоваться разные ключи. Однако, с развитием криптоанализа, появились методики, позволяющие дешифровать закрытый текст без ключа. Они основаны на математическом анализе переданных данных.

Рис. 9: Расшифрованный текст.

7. Однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для изображения в градациях серого

Следующее сообщение $S(t)$ является изображением в градации серого (City.tif) размером 256×256 . Это изображение может быть преобразовано в матрицу пикселей размером $m \times n$ следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где s_{kl} обозначает значение изображения в пикселе в позиции (k, l) , где $k = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, n$. Матрица пикселей преобразуется в одномерный вектор целых чисел от 0 до 255. Пусть $S = [s_{11}, s_{21}, \dots, s_{m1}, s_{12}, s_{22}, \dots, s_{m2}, s_{1n}, s_{2n}, \dots, s_{mn}] = [s_1, s_2, \dots, s_{mn}]$. Последний вектор делится на два вектора $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_k]$ и $S_2 = [s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{mn}]$. Первый вектор вводится в параметры передающей системы, а второй - в ее хаотические состояния. Для модуляции параметров, хаотической маскировки и расшифровки используются те же функции, что и в рассмотренных выше примерах с шифрованием звукового сигнала и текста. Переданные и восстановленные серые изображения показаны на рисунках 10 и 12. Гистограммы, показывающие распределения интенсивностей для оригинального и расшифрованного изображений, приведены на рисунках 13 и 15, соответственно. На рисунках 11 и 14 показаны зашифрованное изображение и его гистограмма. Сравнивая рисунки 12 и 15 с рисунками 10 и 13 соответственно, видно, что расшифрованное изображение идентично оригинальному.



Рис. 10: Оригинальное изображение.

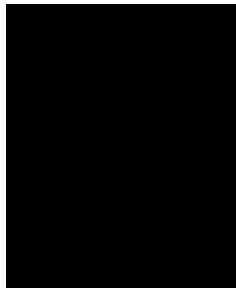


Рис. 11: Зашифрованное изображение.



Рис. 12: Расшифрованное изображение.

Чтобы продемонстрировать надежность стратегии безопасной связи для шифрования изображений добавляется аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) с различными масштабами

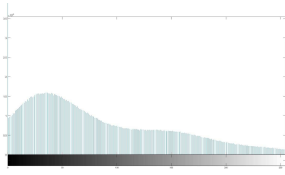


Рис. 13: Гистограмма оригинального изображения.

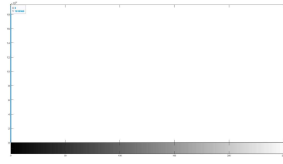


Рис. 14: Гистограмма зашифрованного изображения.

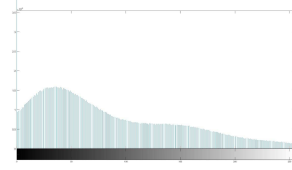


Рис. 15: Гистограмма расшифрованного изображения.

[28]. Оригинальные изображения с шумом представлены на рисунках 16-18, зашифрованные изображения аналогичны рисунку 11, расшифрованные изображения представлены на рисунках 19-21. Для измерения качества восстановленного изображения используются следующие тесты: пиковое отношение сигнал/шум (PSNR) и индекс структурного сходства изображения (SSIM) [30]. Как видно из таблицы 1, изображения точно расшифрованы.



Рис. 16: Оригинальное изображение с шумом 0.05.



Рис. 17: Оригинальное изображение с шумом 0.2.



Рис. 18: Оригинальное изображение с шумом 0.5.



Рис. 19: Расшифрованное изображение с шумом 0.05.



Рис. 20: Расшифрованное изображение с шумом 0.2.



Рис. 21: Расшифрованное изображение с шумом 0.5.

8. Анализ отношения пикового уровня сигнала к шуму

Для анализа распределения пикселей восстановленного сообщения по отношению к оригинальному применяется пиковое отношение сигнал/шум (PSNR). PSNR можно определить следующим образом [13; 29]:

$$PSNR(S, S_d) = 10 \lg \frac{255^2}{MSE(S, S_d)}, \quad (21)$$

где MSE - среднеквадратичная ошибка, которая определяется следующим образом:

$$MSE(S, S_d) = \frac{1}{m \times n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (s_d(k, l) - s(k, l))^2. \quad (22)$$

Здесь S и S_d означают оригинальное и восстановленное изображение, соответственно. Отметим, что высокое значение PSNR означает близкое сходство между расшифрованным сообщением и оригиналом.

9. Индекс структурного сходства изображения

Второй тест, используемый для измерения и анализа сходства между оригиналом и найденным изображением - это индекс структурного сходства изображения (SSIM), определяемый в следующей форме [30]:

$$SSIM(S, S_d) = \frac{(2\mu_S\mu_{S_d} + C_1)(2\sigma_{SS_d} + C_2)}{(\mu_S^2 + \mu_{S_d}^2 + C_1)(\sigma_S^2 + \sigma_{S_d}^2 + C_2)} \quad (23)$$

где μ_S и μ_{S_d} - среднее значение яркости оригинального изображения S и расшифрованного изображения S_d , соответственно, σ_S и σ_{S_d} - стандартные вариации S и S_d , соответственно, σ_{SS_d} - ковариация между S и S_d , C_1 и C_2 - небольшие фиксированные положительные константы, чтобы знаменатель не был равен нулю. Оценка SSIM всегда находится в диапазоне $[-1, 1]$, и самая сильная оценка 1 реализуется, если $S = S_d$.

Серое изображение	PSNR	SSIM
City АБГШ 0.05	99.99999999985574	0.99999999993749
City АБГШ 0.2	98.343454354614656	0.99999999845454
City АБГШ 0.5	96.712344545296567	0.99999995675675

Таблица 1: Оценка PSNR и SSIM для изображения в градации серого

10. Заключение

Хаотические системы играют важную роль в системах защищенной связи из-за их сложного поведения и чувствительности к начальным условиям. В литературе предложено множество схем хаотических (гиперхаотических) защищенных систем связи. В этой работе применена схема защищенной коммуникации, основанная на адаптивной синхронизации между парой идентичных мегастабильных систем с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов. Схема предназначена для разделения сообщения и распределения его между двумя независимыми каналами связи, что приводит к повышению уровня защищенности предложенной схемы и усложняет задачу дешифровки злоумышленником. Информационный битовый поток поступает в шифратор, где разделяется на два шифрованных потока, первый вводится в параметры модуляции и передается по одному из двух каналов связи, а второй вводится в состояния передатчика и передается по второму каналу. На стороне приемника сообщение может быть точно извлечено с помощью адаптивных методов и функции дешифрования. В случае, если передаваемое по каналу связи сообщение $S(t)$, является видеосигналом для его маскировки используется симбиоз техник, описанных в разделах 5 и 7 [28]. Исходный видеосигнал разделяется на аудиосигнал и последовательность картинок. Далее каждому кадру сопоставляется звуковая дорожка, длительность которой варьируется сменой кадров в видео ряде. После чего отдельно шифруется последовательность кадров-изображений и соответствующих им звуковых сигналов. После дешифрования происходит "склейка", последовательности изображений и наложение соответствующих им звуковых сигналов. В результате получается видео файл, аналогичный оригинальному. Предложенная схема надежна к различным масштабам аддитивного белого гауссовского шума.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arecchi F. T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49(17):1217.
2. Laurent M., Kellershohn N. Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems // *Trends Biochem Sci.* 1999. Vol. 24(11). P. 418–422.
3. Komarov A., Leblond H., Sanchez F. Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers // *Phys. Rev. A.* 2005. Vol. 71(5):053809.
4. Zeng Z., Huang T., Zheng W. Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function // *IEEE Trans Neural Netw.* 2010. Vol. 21(8). P. 1371–1377.
5. Ying L., Huang D., Lai Y. C. Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93(6):062204.
6. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems // *Physical review letters.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821–824.
7. Shoreh A. A.-H., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Tavazoei M. S. Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional Order complex-valued systems with application to secure communications // 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). IEEE. 2021. P. 62–67
8. Tavazoei M. S., Haeri M. Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2008. Vol. 387, № 1. P. 57–70.
9. Zhang H., Ma X.-K. Synchronization of uncertain chaotic systems with parameters perturbation via active control // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2004. Vol. 21, № 1. P. 39–47.
10. Shoreh A. A.-H., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques // 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO). IEEE. 2020. P. 11–16.
11. Du H., Zeng Q., Lu N. A general method for modified function projective lag synchronization in chaotic systems // *Physics Letters A.* 2010. Vol. 374, № 13/14. P. 1493–1496.
12. Mahmoud G. M., Mahmoud E. E. Lag synchronization of hyperchaotic complex nonlinear systems // *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 67, № 2. P. 1613–1622.
13. Tang Z., Park J. H., Feng J. Novel approaches to pin cluster synchronization on complex dynamical networks in Lur'e forms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018. Vol. 57. P. 422–438.
14. Mahmoud G. M., Farghaly A. A., Abed-Elhameed T. M., Darwish M. M. Adaptive dual synchronization of chaotic (hyperchaotic) complex systems with uncertain parameters and its application in image encryption // *Acta Phys. Pol. B.* 2018. Vol. 49, № 11. P. 1923–1939.
15. He H., Tu J., Xiong P. Lr-synchronization and adaptive synchronization of a class of chaotic Lurie systems under perturbations // *Journal of the Franklin Institute.* 2011. Vol. 348, № 9. P. 2257–2269.

16. Xu Y., Zhou W., Sun W. Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems with adaptive scaling function // Journal of the Franklin Institute. 2011. Vol. 348, № 9. P. 2406—2416.
17. Shoreh A.-H., Kuznetsov N., Mokaev T. New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. DOI:10.1016/j.physa.2021.126466.
18. Kolumban G., Kennedy M. P., Chua L. O. The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications // IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications. 1997. Vol. 44, № 10. P. 927—936.
19. Kolumban G., Kennedy M. P., Chua L. O. The role of synchronization in digital communications using chaos. II. Chaotic modulation and chaotic synchronization // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1998. Vol. 45, № 11. P. 1129—1140.
20. Guan Z. H., Huang F., Guan W. Chaos-based image encryption algorithm // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 346, №1-3. P. 153-157.
21. Gao T., Chen Z. A new image encryption algorithm based on hyper-chaos // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, №4. P. 394-400.
22. Xie E. Y., Li C., Yu S, Lü J. On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme // Signal processing. 2017. Vol.132. P. 150-154.
23. Wang S., Kuang J., Li J., Luo Y., Lu H., Hu G. Chaos-based secure communications in a large community // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 66, Art. no. 065202R.
24. Chen G. R., Mao Y. B., Chui C. K. A symmetric image encryption scheme based on 3D chaotic cat maps // Chaos Solitons & Fractals. 2004. Vol. 21, №3. P. 749—761.
25. Pareek N. K., Patidar V., Sud, K. K. Image Encryption Using Chaotic Logistic Map // Image and Vision Computing. 2006. Vol. 24. P. 926-934.
26. Yen J.-I., Guo J.-C. Efficient hierarchical chaotic image encryption algorithm and its VLSI realisation // IEE Proc - Vision, Image, Sign Proc. 2000. Vol. 147, № 2. P. 167-175.
27. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, Вып. 4. С. 360—368.
28. Кузнецова О. И. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022666310. 30.08.22. 1 с.
29. Wang Z., Bovik A. C., Sheikh H. R., Simoncelli E. P. . Image quality assessment: from error visibility to structural similarity // IEEE transactions on image processing. 2004. Vol. 13, № 4. P. 600—612.
30. Wang Z., Bovik A. C. A universal image quality index // IEEE signal processing letters. 2002. Vol. 9, № 3. P. 81—84.

REFERENCES

1. Arecchi, F. T., Meucci, R., Puccioni, G. & Tredicce, J. 1982, "Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49(17):1217.
2. Laurent, M. & Kellershohn, N. 1999, "Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems", *Trends Biochem Sci.*, vol. 24(11), pp. 418–422.
3. Komarov, A., Leblond, H. & Sanchez, F. 2005, "Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers", *Phys. Rev. A.*, vol. 71(5):053809.
4. Zeng, Z., Huang, T. & Zheng, W. 2010, "Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function", *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21(8), pp. 1371–1377
5. Ying, L., Huang, D. & Lai, Y. C. 2016, "Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices", *Phys. Rev. E.*, vol. 93(6):062204.
6. Pecora, L. M. & Carroll, T. L. 1990, "Synchronization in chaotic systems", *Physical review letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821-824.
7. Shoreh, A. A.-H., Kuznetsov, N. V., Mokaev, T. N. & Tavazoei, M. S. 2021, "Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional Order complex-valued systems with application to secure communications", *2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus)*. IEEE, pp. 62–67
8. Tavazoei, M. S. & Haeri, M. 2008, "Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387, no. 1, pp. 57–70.
9. Zhang, H. & Ma, X.-K. 2004, "Synchronization of uncertain chaotic systems with parameters perturbation via active control", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 21, no. 1, pp. 39–47.
10. Shoreh, A. A.-H., Kuznetsov, N. V. & Mokaev, T. N. 2020, "Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques", *2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO)*. IEEE, pp. 11–16.
11. Du, H., Zeng Q. & Lu, N. 2010, "A general method for modified function projective lag synchronization in chaotic systems", *Physics Letters A.*, vol. 374, no. 13/14, pp. 1493–1496.
12. Mahmoud, G. M. & Mahmoud, E. E. 2012, "Lag synchronization of hyperchaotic complex nonlinear systems", *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 2, pp. 1613–1622.
13. Tang, Z., Park, J. H. & Feng, J. 2018, "Novel approaches to pin cluster synchronization on complex dynamical networks in Lur'e forms", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 57, pp. 422–438.
14. Mahmoud, G. M. Farghaly, A. A., Abed-Elhameed, T. M. & Darwish, M. M. 2018, "Adaptive dual synchronization of chaotic (hyperchaotic) complex systems with uncertain parameters and its application in image encryption", *Acta Phys. Pol. B.*, vol. 49, no. 11, pp. 1923-1939.
15. He, H., Tu, J. & Xiong, P. 2011, "Lr-synchronization and adaptive synchronization of a class of chaotic Lurie systems under perturbations", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 9, pp. 2257–2269.

16. Xu, Y., Zhou, W. & Sun, W. 2011, "Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems with adaptive scaling function", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 9, pp. 2406–2416.
17. Shoreh, A.-H., Kuznetsov, N. & Mokaev, T. 2021, "New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, DOI:10.1016/j.physa.2021.126466.
18. Kolumban, G., Kennedy, M. P. & Chua, L. O. 1997, "The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications", *IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications*, vol. 44, no. 10, pp. 927–936.
19. Kolumban, G., Kennedy, M. P. & Chua, L. O. 1998, "The role of synchronization in digital communications using chaos. II. Chaotic modulation and chaotic synchronization", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, no. 11, pp. 1129–1140.
20. Guan, Z. H., Huang, F. & Guan, W. 2005, "Chaos-based image encryption algorithm", *Phys. Lett. A.*, vol. 346, no. 1-3, pp.153-157.
21. Gao, T. & Chen, Z. 2008, "A new image encryption algorithm based on hyper-chaos", *Phys. Lett. A.*, vol. 372, no. 4, pp. 394-400.
22. Xie, E. Y., Li, C., Yu, S. & Lü, J. 2017, "On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme", *Signal processing*, vol.132, pp.150-154.
23. Wang, S., Kuang, J., Li, J., Luo, Y., Lu, H. & Hu, G. 2012, "Chaos-based secure communications in a large community", *Phys. Rev. E.*, vol. 66, Art. no. 065202R.
24. Chen, G. R., Mao, Y. B. & Chui, C. K. 2004, "A symmetric image encryption scheme based on 3D chaotic cat maps", *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 21, no. 3. pp. 749–761.
25. Pareek, N.K., Patidar, V. & Sud, K. K. 2006, "Image Encryption Using Chaotic Logistic Map", *Image and Vision Computing*, vol. 24, pp. 926-934.
26. Yen, J.-I. & Guo, J.-C. 2000, "Efficient hierarchical chaotic image encryption algorithm and its VLSI realisation", *IEE Proc - Vision, Image, Sign Proc*, vol. 147, no. 2, pp. 167-175.
27. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2021, "New megastable system with 2-D strip of hidden attractors and analytical solutions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 360-368.
28. Kuznetsova, O. I., TSU, 2022, "Programma dlya shifrovaniya informatsii s ispolzovaniem megastabilnoy sistemy s 2-D polosoy skrytyh attractorov", *Svidetelstvo o gosudarstvennoy registracii programmy dlya EVM no. 2022666310*, 1 p.
29. Wang, Z., Bovik, A. C. Sheikh, H. R. & Simoncelli, E. P. 2004, "Image quality assessment: from error visibility to structural similarity", *IEEE transactions on image processing*, vol. 13, no. 4, pp. 600–612.
30. Wang, Z. & Bovik, A. C. 2002, "A universal image quality index", *IEEE signal processing letters*, vol. 9, no. 3, pp. 81–84.

Получено: 02.11.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.957

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113

**Частично-изоспектральные операторы Штурма — Лиувилля
на конечном отрезке**

О. Э. Мирзаев

Мирзаев Олим Эркинович — аспирант, Самаркандский государственный университет
(г. Самарканд).

e-mail: olim-mirzaev@mail.ru

Аннотация

В статье предлагается алгоритм построения изоспектральных и частично-изоспектральных краевых задач Штурма — Лиувилля на конечном отрезке.

Ключевые слова: Задача Штурма — Лиувилля, собственные значения, нормирующие константы, спектральные данные, обратная спектральная задача, интегральное уравнение, частично-изоспектральные операторы.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

О. Э. Мирзаев. Частично-изоспектральные операторы Штурма — Лиувилля на конечном отрезке // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 104–113.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.957

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113

**Partially-isospectral Sturm–Liouville boundary value problems
on the finite segment**

O. E. Mirzaev

Mirzaev Olim Erkinovich — postgraduate student, Samarkand State University (Samarkand).

e-mail: olim-mirzaev@mail.ru

Abstract

In paper, an algorithm is proposed for constructing isospectral and partially-isospectral Sturm–Liouville boundary value problems on the finite segment.

Keywords: Sturm–Liouville problem, eigenvalues, normalizing constants, spectral data, inverse spectral problem, integral equation, partially-isospectral operators.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

O. E. Mirzaev, 2023, “Partially-isospectral Sturm–Liouville boundary value problems on the finite segment”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 104–113.

1. Введение

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач Штурма — Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах Е.Исаксона, Р.Макина, В.Долберга, Е.Трубовица (см.[4]-[7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Краевые задачи Штурма — Лиувилля

$$L^0 y \equiv -y'' + q_0(x)y = \lambda y, y'(0) - h_0 y(0) = 0, y'(\pi) + H_0 y(\pi) = 0 \quad (1)$$

и

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (2)$$

называются изоспектральными, если они имеют одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L) = \sigma(L^0) = \{\lambda_n^0, n \geq 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Краевые задачи (1) и (2) называются частично-изоспектральными, если их собственные значения удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \neq \lambda_n^0 \text{ при } n = \overline{0, n_0 - 1}; \lambda_n = \lambda_n^0 \text{ при } n = \overline{n_0, \infty},$$

где $n_0 \in \mathbb{N}$ некоторое натуральное число.

Здесь $q_0(x), q(x) \in C[0, \pi]$ - действительные непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$, h_0, h и H_0, H конечные действительные числа.

В настоящее время имеются разные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования (т.е. метод Гельфанда-Левитана), метод спектральных отображений, метод эталонных моделей и другие (см.[8]-[17]). В.А.Марченко показал, что оператор Штурма — Лиувилля на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, т.е. по спектральной функции. И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном были найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач Штурма — Лиувилля по их спектральным функциям. При построении изоспектральных и частично-изоспектральных краевых задач Штурма — Лиувилля с заданным спектром $\sigma(L) = \{\lambda_n, n \geq 0\}$ нами использован метод Гелфанда-Левитана. Этот метод основан на восстановлении потенциала и краевых условий по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Основным результатом работы является алгоритм, восстановления семейства краевых задач Штурма — Лиувилля $L = L(q(x), h, H)$, спектры которых удовлетворяют условиям: $\sigma(L) = \{\lambda_0 = a^2, a \in (-1; 1), \lambda_n = n^2, n \geq 1\}$, а также $\sigma(L) = \{\lambda_0 = -a^2, a \in \mathbb{R}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}$.

2. Некоторые сведения об обратной спектральной задаче

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(q(x), h, H)y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad (3)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (4)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (5)$$

где $q(x) \in C[0, \pi]$, λ - спектральный параметр.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h. \quad (6)$$

Хорошо известно [3], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (3), (6) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой функцией по λ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \quad (7)$$

$$K(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \quad (8)$$

Очевидно, что $\varphi(x, \lambda)$ при любом λ удовлетворяет граничному условию (4). Поэтому собственные значения λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ задачи (3)-(5) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0, \quad (9)$$

а соответствующая собственная функция $\varphi(x, \lambda_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx. \quad (10)$$

Числа α_n называются нормировочными числами краевой задачи (3)-(5). Набор чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (3)-(5).

ТЕОРЕМА 2.1. ([3], [9]). Для спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ задачи (3)-(5) справедливы равенства

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n\pi} + \frac{\gamma_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_n}{n}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\} \in l_2 \quad (11)$$

$$c = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (12)$$

Хорошо известно, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для произвольных функций $f(x) \in L^2(0, \pi)$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^\pi f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \right) \varphi(x, \lambda_n). \quad (13)$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(t, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} = \delta(t - x), \quad (14)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $q(x) \equiv 0$, $h = 0$, $H = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} = \delta(t - x), \quad (15)$$

где

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 2.2. ([1]). Потенциал $q(x)$ и коэффициенты h , H краевой задачи (3)-(5) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$.

ЛЕММА 2.1. ([2]). Имеет место тождество

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n}t = 0, \quad 0 < t < x. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 2.3.([2]). Ядро $K(x, t)$ оператора преобразования (7) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s)F(s, t)ds = 0, \quad (0 < t < x), \quad (18)$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t - \frac{1}{\alpha_n^0} \cos nx \cos nt \right\}. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 2.4.([2]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ была спектральным данным некоторой краевой задачи вида (3)-(5) с потенциалом $q(x) \in L^2(0, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (11), (12).

Пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (11). Построим функции $F(x, t)$ по формуле (19) и рассмотрим семейство интегральных уравнений (18) относительно $K(x, t)$.

ТЕОРЕМА 2.5.([2], [9]). При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ интегральное уравнение (18) имеет единственное решение $K(x, t) \equiv K_x(t)$.

Решая уравнение (18), находим $K(x, t)$. Далее определим функцию $\varphi(x, \lambda)$ по формуле (7). Тогда функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad (0 < x < \pi), \quad (20)$$

и начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = K(0, 0) = -F(0, 0) = h, \quad (21)$$

где

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (22)$$

$$H = c - h - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(t)dt. \quad (23)$$

3. Алгоритм восстановления частично-изоспектральных краевых задач

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, является спектральным данным краевой задачи (3)-(5). Тогда последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющий условиям

$$\lambda_0 = a^2, a \in (-1; 1), \lambda_n = n^2, n \geq 1, \alpha_0 = \pi, \alpha_n = \frac{\pi}{2}, n \geq 1 \quad (24)$$

тоже является спектральным данным. Кроме того существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) = L(a)$ вида (3)-(5) с коэффициентами

$$q(x) = q(x, a) \in L^2(0, \pi), h = h(a), H = H(a) \quad (25)$$

собственные значения которых равны $\lambda_0 = a^2, a \in (-1; 1), \lambda_n = n^2, n \geq 1$, т.е.

$$\sigma(L(a)) = \{\lambda_0 = a^2, a \in (-1; 1), \lambda_n = n^2, n \geq 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенная равенствами (24), удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) = L(a)$ вида (3)-(5) с коэффициентами (25) и спектром (24).

Теперь находим коэффициенты (25). Для этого определим $F(x, t)$ по формулам (19) и (24)

$$F(x, t) = \frac{\cos ax \cos at}{\pi} - \frac{1}{\pi}. \quad (26)$$

Затем, подставляя (26) в интегральное уравнение (18), получим

$$K(x, t) = -F(x, t) - \int_0^x K(x, s)F(s, t)ds = -\frac{\cos at}{\pi}\varphi(x, a) + \frac{1}{\pi}\varphi(x, 0), \quad (27)$$

где

$$\varphi(x, \lambda_0) \equiv \varphi(x, a) = \cos ax + \int_0^x K(x, s) \cos as ds \quad (28)$$

$$\varphi(x, 0) = 1 + \int_0^x K(x, s) ds. \quad (29)$$

Далее, учитывая формулы (21), находим

$$h = h(a) = -F(0, 0) = 0. \quad (30)$$

Подставляя выражение (27) в формулы (28) (29), имеем

$$\varphi(x, a) = \cos ax - \frac{\varphi(x, a)}{\pi} \int_0^x \cos^2 as ds + \frac{\varphi(x, 0)}{\pi} \int_0^x \cos as ds, \quad (31)$$

$$\varphi(x, 0) = 1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \int_0^x \cos as ds + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) \int_0^x ds \quad (32)$$

и

$$\varphi(x, a) = \frac{(1 - \frac{x}{\pi}) \cos ax + \frac{\sin ax}{a\pi}}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}}, \quad (33)$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax) - \frac{\sin ax \cos ax}{a\pi}}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}}. \quad (34)$$

Дифференцируя (31) и (32) по x , получим

$$\varphi'(x, a) = -a \sin ax - \frac{\varphi'(x, a)}{2\pi} (x + \frac{1}{2a} \sin 2ax) - \frac{\varphi(x, a)}{2\pi} (1 + \cos 2ax) + \frac{\varphi'(x, 0)}{a\pi} \sin ax + \frac{\varphi(x, 0)}{\pi} \cos ax, \quad (35)$$

$$\varphi'(x, 0) = 1 - \frac{1}{a\pi} \varphi'(x, a) \sin ax - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \cos ax + \frac{1}{\pi} \varphi'(x, 0) x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) \quad (36)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi'(x, a) = & \frac{(1 - \frac{x}{\pi})(-a \sin ax - \frac{\varphi(x, a)}{2\pi}(1 + \cos 2ax) + \frac{\varphi(x, 0)}{\pi} \cos ax)}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}} + \\ & + \frac{\frac{\sin ax}{a\pi}(1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \cos ax + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0))}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x, 0) = & \frac{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \cos ax + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0))}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}} - \\ & - \frac{\frac{\sin ax}{a\pi}(-a \sin ax - \frac{\varphi(x, a)}{2\pi}(1 + \cos 2ax) + \frac{\varphi(x, 0)}{\pi} \cos ax)}{(1 + \frac{1}{2\pi}(x + \frac{1}{2a} \sin 2ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{\sin^2 ax}{a^2 \pi^2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Наконец, в вышеуказанных формулах (33), (34), (37) и (38), полагая $x = \pi$, получим

$$\varphi(\pi, a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}, \varphi'(\pi, a) = \frac{a\pi(1 - \operatorname{actga}\pi + \frac{6a^2\pi - a \sin 2a\pi}{4 \sin^2 a\pi})}{\sin a\pi}. \quad (39)$$

Из второго граничного условия (5), получим

$$H(a) = -1 + \operatorname{actga}\pi - \frac{6a^2\pi - a \sin 2a\pi}{4 \sin^2 a\pi}. \quad (40)$$

Далее, учитывая формулы (22), (33), (34), (37), находим

$$\begin{aligned} q(x) = q(x, a) &= 2K'(x, x) = \frac{2}{\pi}(\varphi(x, 0) - \cos ax \cdot \varphi(x, a))' = \\ &= \frac{2}{\pi}(\varphi'(x, 0) + a \sin ax \cdot \varphi(x, a) - \cos ax \cdot \varphi'(x, a)). \end{aligned} \quad (41)$$

Легко показать, что в пределе при $a \rightarrow 0$, мы получаем краевые задачи Неймана, т.е.

$$H = \lim_{a \rightarrow 0} H(a) = 0, h = 0, q(x) = \lim_{a \rightarrow 0} q(x, a) = 0.$$

В частности, при $a = -\frac{7}{10}, a = \frac{3}{10}, a = \frac{1}{2}, a = \frac{4}{5}$ краевая задача $L(-7/10), L(3/10), L(1/2), L(4/5)$ вида (3)-(5) с коэффициентами $q(x) = q(x, -\frac{7}{10}), q(x) = q(x, \frac{3}{10}), q(x) = q(x, \frac{1}{2}), q(x) = q(x, \frac{4}{5}), H = H(-\frac{7}{10}), H = H(\frac{3}{10}), H = H(\frac{1}{2}), H = H(\frac{4}{5}), h = h(-\frac{7}{10}), h = h(\frac{3}{10}), h = h(\frac{1}{2}), h = h(\frac{4}{5})$ соответственно, являются частично-изоспектральными, т.к.

$$\begin{aligned} \sigma(L(-7/10)) &= \{\lambda_0 = \frac{49}{100}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}, \sigma(L(3/10)) = \{\lambda_0 = \frac{9}{100}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}. \\ \sigma(L(1/2)) &= \{\lambda_0 = \frac{1}{4}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}, \sigma(L(4/5)) = \{\lambda_0 = \frac{16}{25}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, является спектральным данным краевой задачи (3)-(5). Тогда последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющий условиям

$$\lambda_0 = -a^2, a \in (-\infty; \infty), \lambda_n = n^2, n \geq 1; \alpha_0 = \pi, \alpha_n = \frac{\pi}{2}, n \geq 1 \quad (42)$$

тоже является спектральным данным. Кроме того существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) \equiv L_1(a)$ вида (3)-(5) с коэффициентами

$$q(x) = q(x, a) \in L^2(0, \pi), h = h(a), H = H(a) \quad (43)$$

собственные значения которых равны $\lambda_0 = -a^2, a \in (-\infty; \infty), \lambda_n = n^2, n \geq 1$, т.е.

$$\sigma(L_1(a)) = \{\lambda_0 = -a^2, a \in (-\infty; \infty), \lambda_n = n^2, n \geq 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенная равенствами (42), удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) \equiv L_1(a)$ вида (3)-(5) с коэффициентами (43) и спектром (42).

Теперь находим коэффициенты (43). Для этого определим $F(x, t)$ по формулам (19) и (42)

$$F(x, t) = \frac{\operatorname{ch} ax \operatorname{chat}}{\pi} - \frac{1}{\pi}. \quad (44)$$

Затем, подставляя (44) в интегральное уравнение (18), получим

$$K(x, t) = \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) - \frac{1}{\pi} \operatorname{chat} \cdot \varphi(x, a), \quad (45)$$

где

$$\varphi(x, 0) = 1 + \int_0^x K(x, s)ds, \quad (46)$$

$$\varphi(x, a) = cha x + \int_0^x K(x, s)chas ds. \quad (47)$$

Далее, учитывая формулы (21), находим

$$h \equiv h(a) = -F(0, 0) = 0, \quad (48)$$

Подставляя выражение (45) в формулы (46) и (47), имеем

$$\varphi(x, a) = cha x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) \int_0^x chas ds - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \int_0^x ch^2 as ds, \quad (49)$$

$$\varphi(x, 0) = 1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) \int_0^x chas ds + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) \int_0^x ds, \quad (50)$$

и

$$\varphi(x, a) = \frac{(1 - \frac{x}{\pi})cha x + \frac{sha x}{a\pi}}{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{sh^2 ax}{a^2 \pi^2}}, \quad (51)$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax) - \frac{cha x sha x}{a\pi}}{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{sh^2 ax}{a^2 \pi^2}}. \quad (52)$$

Дифференцируя (49) и (50) по x , получим

$$\varphi'(x, a) = a sha x + \frac{1}{\pi} \varphi'(x, 0) \int_0^x chas ds + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) cha x - \frac{1}{\pi} \varphi'(x, a) \int_0^x ch^2 as ds - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) ch^2 ax, \quad (53)$$

$$\varphi'(x, 0) = 1 - \frac{1}{a\pi} \varphi'(x, a) sha x - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) cha x + \frac{x}{\pi} \varphi'(x, 0) + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) \quad (54)$$

и

$$\varphi'(x, a) = \frac{(1 - \frac{x}{\pi})(a sha x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) cha x - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) ch^2 ax) + \frac{sha x}{a\pi}(1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) cha x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0))}{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{sh^2 ax}{a^2 \pi^2}}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x, 0) = & \frac{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) cha x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0))}{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{sh^2 ax}{a^2 \pi^2}} - \\ & - \frac{\frac{sha x}{a\pi}(a sha x + \frac{1}{\pi} \varphi(x, 0) cha x - \frac{1}{\pi} \varphi(x, a) ch^2 ax)}{(1 + \frac{1}{2a\pi}(cha x sha x + ax))(1 - \frac{x}{\pi}) + \frac{sh^2 ax}{a^2 \pi^2}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Наконец, в вышеуказанных формулах (51), (52) и (55) полагая $x = \pi$, получим

$$\varphi(\pi, a) = \frac{a\pi}{sha \pi}, \quad (57)$$

$$\varphi(\pi, 0) = \frac{3a^2 \pi^2 - a\pi cha \pi sha \pi}{2sh^2 a \pi}, \quad (58)$$

$$\varphi'(\pi, a) = \frac{a\pi(1 - \frac{acha \pi}{sha \pi} + \frac{3a^2 \pi - a cha \pi sha \pi}{2sh^2 a \pi})}{sha \pi}. \quad (59)$$

Из второго граничного условия (5), получим

$$H(a) = -\frac{\varphi'(\pi, a)}{\varphi(\pi, a)} = -1 + \frac{acha \pi}{sha \pi} - \frac{3a^2 \pi - a cha \pi sha \pi}{2sh^2 a \pi}. \quad (60)$$

Далее, учитывая формулы (22), (51), (52), (55) и (56) находим

$$q(x) \equiv q(x, a) = 2K'(x, x) = \frac{2}{\pi} (\varphi'(x, 0) - a \operatorname{sh} a x \cdot \varphi(x, a) - c \operatorname{ch} a x \cdot \varphi'(x, a)). \quad (61)$$

Легко показать, что в пределе при $a \rightarrow 0$, получим краевую задачу Неймана, т.е.

$$H = \lim_{a \rightarrow 0} H(a) = 0, \quad h = h(a) = 0, \quad q(x) = \lim_{a \rightarrow 0} q(x, a) = 0.$$

В частности, например краевые задачи $L_1(1/5)$, $L_1(1/2)$, $L_1(4/5)$ вида (3)-(5) с коэффициентами $q(x) = q(x, 1/5)$, $q(x) = q(x, 1/2)$, $q(x) = q(x, 4/5)$, $h = h(1/5)$, $h = h(1/2)$, $h = h(4/5)$, $H = H(1/5)$, $H = H(1/2)$, $H = H(4/5)$ соответственно, являются частично-изоспектральными, т.к.

$$\sigma(L_1(\frac{1}{5})) = \{\lambda_0 = -\frac{1}{25}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}, \quad \sigma(L_1(\frac{1}{2})) = \{\lambda_0 = -\frac{1}{4}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\},$$

$$\sigma(L_1(\frac{4}{5})) = \{\lambda_0 = -\frac{16}{25}, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}.$$

Таким образом, методом обратной задачи можно построить семейства частично-изоспектральных краевых задач Штурма — Лиувилля $L(a)$ и $L_1(a)$, собственные значения которых совпадают соответственно с заданными числами: $\sigma(L(a)) = \{\lambda_0 = a^2, a \in (-1, 1), \lambda_n = n^2, n \geq 1\}$ и $\sigma(L_1(a)) = \{\lambda_0 = -a^2, a \in R, \lambda_n = n^2, n \geq 1\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. // Труды ММО, 1952, т. 1, с. 327-420.
2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, № 4, с. 309-360.
3. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
4. Isaacson E. L., Trubowitz E. The inverse Sturm–Liouville problem I. // Comm. Pure Appl. Math, 1983, v. 36, p. 767-783.
5. Isaacson E. L., McKean H. P., Trubowitz E. The inverse Sturm–Liouville problem II. // Comm. Pure Appl. Math. 1984, v. 37, p. 1-11.
6. Dahlberg B. E., Trubowitz E. The inverse Sturm–Liouville problem III. // Comm. Pure Appl. Math, 1984, v. 37, p. 255-267.
7. Poschel J., Trubowitz E. Inverse spectral theory. // Academic Press, New York, 1987.
8. Савчук А. М., Шкаликов А. А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма — Лиувилля. // Тр. МИАИ, 2008, Т. 260., с. 227-247.
9. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007, 284 с.
10. Jodeit M., Levitan B. M. The isospectrality problem for the classical Sturm–Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997, v. 2, № 2, p. 297-318.
11. Ashrafyan Y. A., Harutyunyan T. N. Inverse Sturm–Liouville problems with fixed boundary conditions. // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, № 27, p. 1-8.

12. Алимов Ш. А. О работах А. Н. Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма — Лиувилля. // УМН, 6(192), 1976, стр. 84-88.
13. Амбарцумян В. А. Über eine Frage Eigenwerttheorie. // Zeitschr. für Physik, 53, 1929, pp. 690-695
14. Мирзаев О. Э., Хасанов А. Б. О семейства изоспектральных краевых задач Штурма — Лиувилля. // Уфимский математический журнал, 12(2), 2020, стр. 28-34.
15. Мирзаев О. Э., Муродов Ф. М. Изоспектральные операторы Штурма — Лиувилля на конечном отрезке. // Научный вестник СамГУ, 2020, № 3(121), 50-55.
16. Мирзаев О. Э. Изоспектральные операторы Штурма — Лиувилля на конечном отрезке. // Научный вестник СамГУ, 2020, № 5(123), 60-64.
17. Namig J. Guliyev. Essentially isospectral transformations and their applications. // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -) (2020) 199:1621–1648. <https://doi.org/10.1007/s10231-019-00934-w>

REFERENCES

1. Marchenko, V. A. 1952, “Some problems in the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order I”, *Tr. MMO, 1, GITTL, M.-L.* 327-420
2. Gelfand, I. M., Levitan B. M. 1951, “On the determination of a differential equation from its spectral function”, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.* 15 :4 , 309-360
3. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1988, “Sturm–Liouville and Dirac operators”, *Nauka. Moscow. [Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1990).]*
4. Isaacson E. L., Trubowitz E. 1983, “The inverse Sturm–Liouville problem I”, *Comm. Pure Appl. Math.* v. 36, p. 767-783.
5. Isaacson E. L., McKean H. P., Trubowitz E. 1984, “The inverse Sturm–Liouville problem II”, *Comm. Pure Appl. Math.* v. 37, p. 1-11.
6. Dahlberg B. E., Trubowitz E. 1984, “The inverse Sturm–Liouville problem III”, *Comm. Pure Appl. Math.* v. 37, p. 255-267.
7. Poschel J., Trubowitz E. 1987, “Inverse spectral theory”, *Academic Press. New York.*
8. Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A. 2008, “On the properties of maps connected with inverse Sturm–Liouville problems”, *Trudy MIAN.* 260 , 227-247 . [*Proc. Steklov Inst. Math.* 260 , 218-237 (2008).]
9. Yurko, V. A. 2007, “Introduction into the theory of inverse spectral problems”, *Fizmatlit. Moscow.*
10. Jodeit M., Levitan B. M. 1997, “The isospectrality problem for the classical Sturm–Liouville equation”, *Advances in differential equations.* v. 2, № 2, p. 297-318.
11. Ashrafyan Y. A., Harutyunyan T. N. 2015, “Inverse Sturm–Liouville problems with fixed boundary conditions”, *Electronic Journal of differential equations.* (2015), v. № 27, p. 1-8.
12. Alimov, Sh. A. 1976, “The work of A. N. Tikhonov on inverse problems for the Sturm–Liouville equation”, *UMH.* 31:6(192) (1976), 84-88. [*Russian Math. Surveys,* 31:6 87-92]

13. Ambarzumjan W. A. 1929, “On a Problem of the Theory of Eigenvalues”, *Zeitschr, für Physik.* 53, pp.690-695
14. Mirzaev, O. E., Khasanov A. B. 2020, “On families of isospectral Sturm–Liouville boundary value problems”, *Ufa Mathematical Journal.* Vol. 12. № . 2 P. 28-34
15. Mirzaev O. E., Murodov F. M. 2020, “Isospectral Sturm–Liouville operators on the finite segment”, *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University.* № 3(121), 50-55.
16. Mirzaev O. E. 2020, “Isospectral Sturm–Liouville operators on the finite segment”, *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University.* № 5(123), 60-64.
17. Namig J. Guliyev. 2020, “Essentially isospectral transformations and their applications”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* (1923 -) 199:1621–1648. <https://doi.org/10.1007/s10231-019-00934-w>.

Получено: 21.12.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-114-126

**Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели
вещественного расширения плоскости Лобачевского**

В. И. Паньженский, А. О. Растрепина

Паньженский Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, профессор, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Растрепина Анастасия Олеговна — магистрант, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: n.rastrepina@mail.ru

Аннотация

Доказано, что на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ существует левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) , риманова метрика которой отлична от метрики прямого произведения. Ограничение метрики g на контактное распределение является метрикой плоскости Лобачевского и вместе с вполне неголономным контактным распределением определяет на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ субриманову структуру. Найденная почти контактная метрическая структура является нормальной и, следовательно, сасакиевой. Группа Ли автоморфизмов этой структуры имеет максимальную размерность. Найден базисные векторные поля её алгебры Ли. Кроме связности Леви-Чивита ∇ рассматривается контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением, которая, как и связность Леви-Чивита, также инварианта относительно группы автоморфизмов. Структурные тензоры η, ξ, φ, g , тензор кручения $\tilde{S}$ и тензор кривизны $\tilde{R}$ данной связности ковариантно постоянны. Тензор кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{\nabla}$ обладает необходимыми свойствами, позволяющими ввести понятие секционной кривизны. Установлено, что секционная кривизна $\tilde{k}$ принадлежит числовому отрезку $[-2, 0]$. Используя поле ортонормированных реперов, адаптированных к контактному распределению, найдены коэффициенты усечённой связности и дифференциальные уравнения её геодезических. Доказано, что контактные геодезические связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ совпадают с геодезическими усечённой связности, т.е. обе связности согласованы с контактным распределением. Это означает, что через каждую точку в каждом контактном направлении проходит единственная контактная геодезическая.

Ключевые слова: левоинвариантная сасакиева структура, контактная метрическая связность, контактные геодезические, секционная кривизна.

Библиография: 21 названия.

Для цитирования:

В. И. Паньженский, А. О. Растрепина. Левоинвариантная сасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 114–126.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-114-126

The left-invariant Sasakian structure on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane

V. I. Pan'zhenskii, A. O. Rastrepina

Pan'zhenskii Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, Penza State University (Penza).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Rastrepina Anastasia Olegovna — undergraduate student, Penza State University (Penza).

e-mail: n.rastrepina@mail.ru

Abstract

It has been proved that there is left-invariant contact metric structure (η, ξ, φ, g) whose Riemannian metric is different from the metric of the direct product on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The restriction of the metric g to the contact distribution is the metric of the Lobachevsky plane and, together with a completely nonholonomic contact distribution, defines a sub-Riemann structure on $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The found almost contact metric structure is normal and therefore Sasakian. The lie group of automorphisms of this structure has maximum dimension. The basis vector fields of its Lie algebra are found. In addition to the Levi-Civita connection ∇ , we consider a contact metric connection $\tilde{\nabla}$ with skew-symmetric torsion, which, like the Levi-Civita connection, is also invariant under the automorphism group. The structure tensors η, ξ, φ, g , the torsion tensor $\tilde{S}$ and the curvature tensor $\tilde{R}$ of a given connection are covariantly constant. The curvature tensor $\tilde{R}$ of the connection $\tilde{\nabla}$ has the necessary properties to introduce the concept of sectional curvature. It is established that the sectional curvature $\tilde{k}$ belongs to the numerical segment $[-2, 0]$. Using the field of orthonormal frames adapted to the contact distribution, the coefficients of the truncated connection and the differential equations of its geodesics are found. It has been proved that the contact geodesics of the connections ∇ and $\tilde{\nabla}$ coincide with the geodesics of truncated connection, that is, both connections are compatible with the contact distribution. This means that there is only one contact geodesic through each point in each contact direction.

Keywords: left-invariant Sasakian structure, contact metric connection, contact geodesics, sectional curvature.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. I. Pan'zhenskii, A. O. Rastrepina, 2023, "The left-invariant Sasakian structure on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 114–126.

1. Введение

В настоящее время достаточно интенсивно изучаются контактные, почти контактные, параконтактные метрические структуры на нечётномерных многообразиях различных размерностей, при этом особый интерес представляют левоинвариантные структуры на группах Ли, структуры, инвариантные относительно групп изометрий, а также связности, согласованные с данной структурой [1] – [16].

Контактной структурой на гладком многообразии M нечётной размерности $2n + 1$ называется дифференциальная 1-форма η , удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \quad (1)$$

Многообразие M , наделённое контактной структурой, называется контактным многообразием. Условие (1) означает, что 2-форма $d\eta$ имеет ранг $2n$. Контактная форма η определяет на M $2n$ -мерное вполне неголономное распределение $H = \ker \eta$, которое называется контактным, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вертикальным.

Контактной метрической структурой на контактном многообразии M называется четвёрка тензорных полей (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – характеристическое векторное поле, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на M , g – риманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий [17]

$$\varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi, \quad (2)$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (3)$$

$$d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y). \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} 1) \eta(\xi) = 1, \quad 2) d\eta(X, \xi) = 0, \quad 3) \varphi(\xi) = 0, \quad 4) \eta \circ \varphi = 0, \\ 5) g(X, \xi) = \eta(X), \quad 6) g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \quad (5)$$

Контактная метрическая структура называется k -контактной, если векторное поле ξ является киллинговым. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой, т.е. должно выполняться следующее равенство

$$[\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0, \quad (6)$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса эндоморфизма φ [17]. Сасакиева структура необходимо является k -контактной.

Диффеоморфизм f $(2n + 1)$ -мерного многообразия называется автоморфизмом контактной метрической структуры, если все определяющие её тензоры инвариантны относительно f . В работе [18] доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов контактной метрической структуры равна $(n + 1)^2$. Если M группы Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные метрические структуры.

2. Контактная метрическая структура на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Рассмотрим множество $\mathbb{G}$, элементами (точками) которого являются матрицы следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где x, y, z – действительные числа: $x, y, z \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Множество $\mathbb{G}$ является группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой Ли полной линейной группы $GL(3, \mathbb{R})$.

Умножая слева (7) на произвольную матрицу из группы $\mathbb{G}$, заключаем, что левые сдвиги на $\mathbb{G}$ определяются следующими формулами

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = z + c \quad (y > 0, b > 0). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по параметрам a, b, c , находим левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$ – базис алгебры Ли группы Ли $\mathbb{G}$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad (9)$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$ – естественный базис гладких векторных полей на $\mathbb{G}$. Нетрудно установить, что риманова метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2 \quad (10)$$

левоинвариантна и является метрикой прямого произведения на вещественном расширении плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Таким образом, группа $\mathbb{G}$ с левоинвариантной метрикой (10) естественным образом отождествляется с $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, и, следовательно, является групповой моделью вещественного расширения плоскости Лобачевского.

Все левоинвариантные дифференциальные 1-формы можно найти, интегрируя уравнения инвариантности

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0$$

(производная Ли от формы η вдоль левоинвариантных векторных полей X_α (9) ($\alpha = 1, 2, 3$) должна обращаться в нуль: $L_{X_\alpha} \eta = 0$). В результате получим следующее семейство дифференциальных 1-форм

$$\eta = \frac{c_1}{y} dx + \frac{c_2}{y} dy + c_3 dz, \quad (11)$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные. Так как $d\eta = \frac{c_1}{y^2} dx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = \frac{c_1 c_3}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz$, то при $c_1 \cdot c_3 \neq 0$ найденные формы являются контактными. Нетрудно убедиться, что среди этих форм нет таких, которые бы вместе с римановой метрикой (10) определяли контактную метрическую структуру [8].

Однако на $\mathbb{G}$ имеется естественная левоинвариантная контактная метрическая структура с метрикой, отличной от римановой метрики прямого произведения. Действительно, среди левоинвариантных 1-форм выделим форму

$$\eta = \frac{1}{y} dx + dz. \quad (12)$$

Эту форму можно получить, сдвинув форму Дарбу $ydx + dz$ из единицы группы в произвольную точку. В этом случае условия $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(X, \xi) = 0$ определяют однозначно характеристическое векторное поле

$$\xi = \partial_3. \quad (13)$$

Все левоинвариантные эндоморфизмы можно найти, решая уравнения инвариантности φ относительно левоинвариантных векторных полей (9)

$$X_\alpha^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X_\alpha^p \varphi_p^i - \partial_p X_\alpha^i \varphi_j^p = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^{3\frac{1}{y}} & c_2^{3\frac{1}{y}} & c_3^3 \end{pmatrix},$$

где c_j^i – произвольные постоянные. Из условия $\varphi(\xi) = 0$ следует, что $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$, а из $\eta \circ \varphi = 0$ находим, что $c_1^3 = -c_1^1$, $c_2^3 = -c_2^1$. Требование (2) накладывает на постоянные c_j^i следующие условия

$$\begin{aligned}(c_1^1)^2 + c_2^1 c_1^2 &= -1, & c_1^1 c_2^1 + c_2^1 c_2^2 &= 0, \\ c_1^2 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 &= 0, & c_1^2 c_2^1 + (c_2^2)^2 &= -1,\end{aligned}$$

откуда следует, что эндоморфизм

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

вместе с η и ξ определяет на $\mathbb{G}$ левоинвариантную контактную метрическую структуру, риманова метрика которой, как следует из условия 6) в равенствах (5), имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \left(\frac{1}{y} dx + dz \right)^2. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что условия (2), (3), (4) определения контактной метрической структуры выполняются тождественно. Заметим, что ограничение метрики (15) на контактное распределение является метрикой плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре на евклидовой полуплоскости и вместе с вполне неголономным контактным распределением определяет на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ субриманову структуру.

Так как характеристическое векторное поле $\xi = \partial_3$ является левоинвариантным, то $L_\xi g = 0$, т.е. мы имеем k -контактную метрическую структуру. Более того, эта структура является сасакиевой, поскольку условие нормальности (6), которое в координатах имеет следующий вид

$$\varphi_j^p \partial_p \varphi_k^i - \varphi_k^p \partial_p \varphi_j^i + \varphi_p^i \partial_j \varphi_k^p - \varphi_p^i \partial_k \varphi_j^p + d\eta_{jk} \xi^i = 0,$$

выполняется тождественно. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *На групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского существует левоинвариантная сасакиева структура (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – характеристическое векторное поле, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на M и g – риманова метрика имеют вид (12), (13), (14) и (15) соответственно.*

Векторное поле $X = X^p \partial_p$ называется инфинитезимальным автоморфизмом контактной метрической структуры, если однопараметрическая группа диффеоморфизмов $f_t = \exp tX$, порождённая полем X , является группой автоморфизмов структуры. Это означает, что производная Ли вдоль X от η, ξ, φ и g обращается в нуль

$$L_X \eta = 0, \quad L_X \xi = 0, \quad L_X \varphi = 0, \quad L_X g = 0.$$

В координатах мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p = 0,$$

$$X^p \partial_p \xi^i - \partial_p X^i \xi^p = 0,$$

$$X^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X^p \varphi_p^i - \partial_p X^i \varphi_j^p = 0,$$

$$X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} = 0.$$

После несложных алгебраических преобразований для сасакиевой структуры (12), (13), (14), (15) эта система примет следующий вид

$$\begin{aligned}\partial_3 X^1 &= 0, \quad \partial_3 X^2 = 0, \quad \partial_3 X^3 = 0, \quad \partial_1 X^3 = 0, \quad y\partial_1 X^1 = X^2, \\ y\partial_2 X^2 &= X^2, \quad \partial_1 X^2 + \partial_2 X^1 = 0, \quad \partial_2 X^1 + y\partial_2 X^3 = 0.\end{aligned}$$

Интегрируя данную систему, находим её общее решение

$$X^1 = \frac{1}{2}b_4(x^2 - y^2) + b_2x + b_1, \quad X^2 = b_4xy + b_2y, \quad X^3 = b_4y + b_3.$$

Постоянным b_1, b_2, b_3, b_4 соответствуют следующие базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_1 + xy\partial_2 + y\partial_3. \quad (16)$$

Первые три векторных поля являются левоинвариантными полями и, следовательно, определяют подгруппу параллельных переносов, а векторное поле X_4 является оператором вращения, который порождает стационарную подгруппу, и мы имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Группа Ли инфинитезимальных автоморфизмов сасакиевой структуры (12), (13), (14) и (15) имеет максимальную размерность. Базисные векторные поля её алгебры имеют вид (16).*

3. Левоинвариантная кососимметрическая связность, согласованная с контактным распределением

Пусть M – гладкое многообразие, H – распределение на M . Линейную связность назовём согласованной с распределением H , если через каждую точку $p \in M$ в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8].

Пусть g – риманова метрика на M , ∇ – связность Леви-Чивита. Ортогональная проекция $\tilde{\nabla}$ связности ∇ на распределение H является линейной связностью на H и называется усечённой связностью [19], [20].

На вещественном расширении плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ с контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g) имеем две естественные связности – связность Леви-Чивита $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ – метрическая связность ($\nabla g = 0$) без кручения и контактную метрическую связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k)$ ($\tilde{\nabla}g = 0, \tilde{\nabla}\eta = 0$) с кососимметрическим кручением. Эта связность определяется следующей формулой [16]

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

Так же как и связность Леви-Чивита ∇ , контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно группы автоморфизмов сасакиевой структуры. Для контактной формы (12) форма кручения $S = d\eta \wedge \eta$ имеет вид

$$S = \frac{1}{y^2}dx \wedge dy \wedge dz.$$

Коэффициенты связности Леви-Чивита ∇ метрики (15) образуют следующие матрицы

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2y} & 0 \\ -\frac{3}{2y} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ \frac{1}{y^2} & 0 & \frac{1}{2y} \\ 0 & \frac{1}{2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $\tilde{S}(\tilde{S}_{ij}^k = S_{ijp}g^{pk})$ связности $\tilde{\nabla}$ имеет следующие компоненты

$$\tilde{S}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ -\frac{2}{y^2} & 0 & -\frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}\tilde{S}_{ij}^k,$$

то

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{y} & 0 \\ -\frac{1}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что в связности $\tilde{\nabla}$ все структурные тензоры сасакиевой структуры, а также тензор кручения и тензор кривизны, ковариантно постоянны:

$$\tilde{\nabla}\eta = 0, \quad \tilde{\nabla}\xi = 0, \quad \tilde{\nabla}\varphi = 0, \quad \tilde{\nabla}g = 0, \quad \tilde{\nabla}\tilde{S} = 0, \quad \tilde{\nabla}\tilde{R} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Секционная кривизна контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ изменяется в пределах числового отрезка $[-2; 0]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя ковариантные компоненты тензора кривизны $\tilde{R}$, находим, что

$$\tilde{R}_{1212} = -\tilde{R}_{2112} = -\tilde{R}_{1221} = \frac{2}{y^4},$$

остальные компоненты равны нулю. Поэтому, как и в римановой геометрии, мы можем ввести понятие секционной кривизны – кривизны в данной точке p данном двумерном направлении σ . Если u и v – два линейно независимых касательных вектора в точке p , принадлежащих σ , то

$$\tilde{k}_p(\sigma) = \frac{g(\tilde{R}(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

В числителе данной формулы имеем

$$R_{ijkl}u^i v^j v^k u^l = -\frac{2}{y^4}(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2.$$

Вектор u возьмём в пересечении площадки σ с контактной площадкой H : $u \in \sigma \cap H$, а вектор v перпендикулярно вектору u , тогда

$$g(u, v) = 0, \quad g(u, u) = \frac{u^{12} + u^{22}}{y^2}, \quad g(v, v) = \frac{v^{12} + v^{22}}{y^2} + \left(\frac{1}{y}v^1 + v^3\right)^2$$

и

$$\tilde{k}_p(\sigma) = -\frac{2(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2}{(u^{12} + u^{22})(v^{12} + v^{22} + (v^1 + yv^3)^2)} \leq 0.$$

Так как векторы u и v перпендикулярны и $u \in H$, то

$$u^1 v^1 + u^2 v^2 = 0.$$

Возводя это равенство в квадрат, находим, что

$$(u^1 v^2 - u^2 v^1)^2 = (u^{12} + u^{22})(v^{12} + v^{22}),$$

поэтому

$$\tilde{k}_p(\sigma) = -\frac{2(u^{12} + u^{22})(v^{12} + v^{22})}{(u^{12} + u^{22})(v^{12} + v^{22}) + (u^{12} + u^{22})(v^1 + yv^3)^2} \leq -2,$$

т.е. $-2 \leq \tilde{k} \leq 0$. Если σ содержит V , то в качестве вектора v можно взять вектор $\xi(0, 0, 1)$, и тогда $\tilde{k} = 0$. Если σ содержит H , то $v^1 + yv^3 = 0$ и $\tilde{k} = -2$. $\square$

Замечание. Известно [17], что риманова кривизна k -контактного метрического многообразия в направлении, содержащем характеристический вектор ξ , равна 1. Поскольку сасакиева структура на $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ является k -контактной, а кривизна в контактном направлении с метрикой Пуанкаре равна -1 , то в силу непрерывности мы можем заключить, что риманова секционная кривизна принадлежит числовому отрезку $[-1; 1]$. Таким образом, наличие кручения у связности $\tilde{\nabla}$ сдвигает интервал изменения секционной кривизны на одну единицу в отрицательном направлении.

ТЕОРЕМА 4. *Связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ согласованы с контактным распределением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данного утверждения достаточно убедиться, что геодезические усечённой связности $\tilde{\nabla}$ являются контактными геодезическими связности ∇ и, следовательно, $\tilde{\nabla}$, поскольку они имеют одни и те же геодезические.

Рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, e_i\}$, адаптированных к контактной структуре

$$e_1 = y\partial_1 - \partial_3, \quad e_2 = y\partial_2, \quad e_3 = \partial_3.$$

Первые два поля e_1 и e_2 лежат в контактном распределении $H : \eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $e_3 = \xi \in V$. Разложения коммутаторов векторных полей e_i

$$[e_i, e_j] = \Omega_{ij}^k e_k,$$

где коэффициенты Ω_{ij}^k определяют объект неголономности, являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$. Для рассматриваемого поля реперов имеем следующие уравнения

$$[e_1, e_2] = -(e_1 + e_3), \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

поэтому $\Omega_{12}^1 = -\Omega_{21}^1 = \Omega_{12}^3 = -\Omega_{21}^3 = -1$. Для связности Леви-Чивита имеем следующую вычислительную формулу [21]

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])\}.$$

Пусть γ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивита в ортонормированном репере $\{p, e_i\} : \nabla_{e_i} e_j = \gamma_{ij}^k e_k$. Полагая $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j, Z = Z^k e_k$, находим, что

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}^k + \delta^{ks} \Omega_{si}^l \delta_{jl} + \delta^{ks} \Omega_{sj}^l \delta_{il}),$$

откуда

$$\gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для усечённой связности $\bar{\nabla} : \bar{\nabla}_{e_i} e_j = \bar{\gamma}_{ij}^k e_k$ ($i, j, k = 1, 2$), где $\bar{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k$, т.е.

$$\bar{\gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Горизонтальная (контактная) кривая $\gamma(\dot{\gamma} \in H)$

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

где s – естественный параметр, называется геодезической усечённой связности $\bar{\nabla}$, если $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\dot{\gamma}$ – поле касательных векторов кривой γ . Найдём сначала уравнения параллельного векторного поля v вдоль кривой $\gamma : \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v = 0$. Имеем следующие разложения векторных полей $\dot{\gamma}$ и v по естественному базису $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ и неголономному $\{e_1, e_2\}$

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_1 + \dot{y}\partial_2 + \dot{z}\partial_3 = u^1e_1 + u^2e_2,$$

$$v = v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 = w^1e_1 + w^2e_2.$$

Так как $e_1 = y\partial_1 - \partial_3$, $e_2 = y\partial_2$, то

$$u^1 = \frac{1}{y}\dot{x}, \quad u^2 = \frac{1}{y}\dot{y}, \quad w^1 = \frac{1}{y}v^1, \quad w^2 = \frac{1}{y}v^2.$$

Условия горизонтальности векторных полей $\dot{\gamma}$ и v имеют вид

$$\dot{z} = -\frac{1}{y}\dot{x}, \quad v^3 = -\frac{1}{y}v^1.$$

Теперь распишем уравнения параллельного переноса, заменяя неголономные координаты естественными и учитывая, что

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v &= \bar{\nabla}_{u^i e_i} w^j e_j = u^i e_i (w^j) e_j + u^i w^j \bar{\nabla}_{e_i} e_j = u^1 e_1 (w^1) e_1 + u^1 e_1 (w^2) e_2 + \\ &+ u^2 e_2 (w^1) e_1 + u^2 e_2 (w^2) e_2 + u^1 w^1 e_2 - u^1 w^2 e_1 = \frac{1}{y} \dot{x} [y \partial_1 (\frac{1}{y} v^1) - \partial_3 (\frac{1}{y} v^1)] (y \partial_1 - \partial_3) + \\ &+ \frac{1}{y} \dot{x} [y \partial_1 (\frac{1}{y} v^2) - \partial_3 (\frac{1}{y} v^2)] y \partial_2 + \frac{1}{y} \dot{y} [y \partial_2 (\frac{1}{y} v^1)] (y \partial_1 - \partial_3) + \frac{1}{y} \dot{y} [y \partial_2 (\frac{1}{y} v^2)] y \partial_2 + \\ &+ \frac{1}{y} \dot{x} v^1 \partial_2 - \frac{1}{y} \dot{x} \frac{1}{y} v^2 (y \partial_1 - \partial_3) = \{(\dot{x} \partial_1 v^1 + \dot{y} \partial_2 v^1 + \dot{z} \partial_3 v^1) - \frac{1}{y} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2)\} \partial_1 + \\ &+ \{(\dot{x} \partial_1 v^2 + \dot{y} \partial_2 v^2 + \dot{z} \partial_3 v^2) + \frac{1}{y} (\dot{x} v^1 - \dot{y} v^2)\} \partial_2 + \\ &+ \{-\frac{1}{y} (\dot{x} \partial_1 v^1 + \dot{y} \partial_2 v^1 + \dot{z} \partial_3 v^1) + \frac{1}{y^2} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2)\} \partial_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующие уравнения параллельного переноса вектора v вдоль кривой γ

$$\frac{dv^1}{ds} - \frac{1}{y} (\dot{y} v^1 + \dot{x} v^2) = 0, \quad \frac{dv^2}{ds} + \frac{1}{y} (\dot{x} v^1 - \dot{y} v^2) = 0, \quad v^3 + \frac{1}{y} v^1 = 0.$$

Полагая $v = \dot{\gamma}$, получим дифференциальные уравнения геодезических усечённой связности $\bar{\nabla}$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Дифференцируя последнее уравнение – условие горизонтальности векторного поля $\dot{\gamma}$, находим

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{y} \frac{d^2 x}{ds^2} = 0$$

или, учитывая первое уравнение,

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0.$$

Таким образом, функции $x(s), y(s), z(s)$, определяющие геодезические усечённой связности $\bar{\nabla}$, являются решением следующей системы

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0. \quad (17)$$

Связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ имеют одни и те же геодезические, а их дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{3}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{2}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{2}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для контактных геодезических должно выполняться условие горизонтальности

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Подставляя вместо $\frac{dz}{ds}$ в уравнения (18) $-\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}$, получаем уравнение геодезических (17) усечённой связности $\bar{\nabla}$, а это означает, что геодезические усечённой связности $\bar{\nabla}$ совпадают с контактными геодезическими связностями ∇ и $\tilde{\nabla}$, т.е. связность Леви-Чивита ∇ и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ согласованы с контактным распределением H . $\square$

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского обнаружена левоинвариантная контактная метрическая структура. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли группы Ли автоморфизмов данной структуры. Кроме связности Леви-Чивита рассмотрена контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением. Дана оценка её секционной кривизны. Доказано, что контактные геодезические этих связностей совпадают с геодезическими усечённой связности, которая является ортогональной проекцией связности Леви-Чивита на контактное распределение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N -связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 258–264.
2. Галаев С. В. ∇_N -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 70. С. 5–15.
3. Банару М. Б. О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 719–723.
4. Банару М. Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4 -многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. Т. 1. С. 67–70.

5. Смоленцев Н. К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 62. С. 27–37.
6. Смоленцев Н. К., Шагабудинова И. Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 69. С. 37–52.
7. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, № 1. С. 77–90.
8. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Контактная и почти контактная структуры на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, № 3–4. С. 291–303.
9. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестн. Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. № 75. С. 38–51.
10. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. V. 69. P. 60–73.
11. Calvaruso G., Martín-Molina V. Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923–). 2015. V. 194. P. 1359–1380.
12. Calvaruso G., Perrone A. Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. V. 69. P. 97–108.
13. Calvaruso G., Perrone A. Five-dimensional paracontact Lie algebras // Diff. Geom. and its Appl. 2016. V. 45. P. 115–129.
14. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26, № 5. P. 544–552.
15. Славолюбова Я. В. Контактные метрические структуры на нечетномерных единичных сферах // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. № 6 (32). С. 46–54.
16. Паньженский В. И., Климова Т. Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. 2018. № 11. С. 51–59.
17. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics (V. 509). – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. – 148 p.
18. Tanno S. The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1969. V. 21, № 1. P. 21–38.
19. Вершик А. М., Фадеев Л. Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. – Л.: Издательство ЛГУ, 1975. С. 129–141.
20. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динам. сист.–7. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1987. Т. 16. С. 5–85.
21. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бураго; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. – М.: Мир, 1971. – 343 с.

REFERENCES

1. Galaev, S. V. 2015, “Almost contact metric spaces with N -connection”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika (Izvestiya of Saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics)*, vol. 15, no. 3, pp. 258–264. doi: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
2. Galaev, S. V. 2021, “ ∇_N -Einstein almost contact metric manifolds”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 70, pp. 5–15. doi: 10.17223/19988621/70/1.
3. Banaru, M. B. 2014, “On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kahlerian manifolds”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 4, pp. 585–588. doi: 10.1134/S0037446614040016.
4. Banaru, M. B. 2018, “The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4 -manifolds”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 73, no. 1, pp. 38–40. doi: 10.3103/S0027132218010072.
5. Smolentsev, N. K. 2019, “Left-invariant para-sasakian structures on Lie groups”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 62, pp. 27v37. doi: 10.17223/19988621/62/3.
6. Smolentsev, N. K. & Shagabudinova, I. Y. 2021, “On Parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 69, pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/69/4.
7. Pan'zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2020, “The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold”, *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90.
8. Pan'zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2021, “Contact and almost contact structures on the real extension of the Lobachevsky plane”, *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 163, no. 3–4, pp. 291–303. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. Pan'zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2022, “Left-invariant para-sasakian structure on the Heisenberg group”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 75, pp. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4.
10. Calvaruso, G. 2013, “Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures”, *Journal of Geometry and Physics*, vol. 69, pp. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.
11. Calvaruso, G. & Martín-Molina, V. 2015, “Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, vol. 194, pp. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4.
12. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2014, “Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups”, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 69, pp. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z.
13. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2016, “Five-dimensional paracontact Lie algebras”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 45, pp. 115–129. doi: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001.

14. Diatta, A. 2008, “Left invariant contact structures on Lie groups”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 26, no. 5, pp. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
15. Slavolyubova, Ya. V. 2014, “Contact metric structures on odd-dimensional unit spheres”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 6 (32), pp. 46–54.
16. Panzhenskii, V. I. & Klimova, T. R. 2018, “The contact metric connection on the Heisenberg group”, *Russian Mathematics*, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051.
17. Blair, D. E. 1976, “Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture notes in mathematics (Vol. 509)”, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.
18. Tanno, S. 1969, “The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds”, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. doi: 10.2748/tmj/1178243031.
19. Vershik, A. M. & Faddeev, L. D. 1975, “Lagranzheva mexanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]”, *Problemy teoreticheskoy fiziki*, Leningrad: Izd. LGU, pp. 129–141.
20. Vershik, A. M. & Gershkovich, V. Ya. 1987, “Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems”, *Dinamicheskie sistemy – 7. Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*, vol. 16, pp. 5–85.
21. Gromoll, D., Klingenberg, W. & Meyer W. 1971, “Rimanova geometriya v tselom [Riemannian geometry as a whole]”, Moscow: Mir, 343 p.

Получено: 27.12.22

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.547.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-127-138

**Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля
четных канонических произведений¹**

А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: ayropov.msu@yandex.ru

Шерстюков Владимир Борисович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: sherub73@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются целые функции, являющиеся четными каноническими произведениями нулевого рода, все корни которых расположены на действительной оси. Изучается вопрос об оценке снизу минимума модуля таких функций на окружности через некоторую отрицательную степень максимума модуля на той же окружности, когда радиус окружности пробегает отрезки с постоянным отношением концов. В 2002 году А. М. Гайсин, исправляя ошибочные рассуждения М. А. Евграфова из книги «Асимптотические оценки и целые функции», доказал, что для каждой функции рассматриваемого класса существует последовательность окружностей, радиусы которых стремятся к бесконечности, отношение последующего радиуса к предыдущему меньше 4, и эти окружности таковы, что на каждой из них минимум модуля функции превосходит -20 -ю степень максимума ее модуля. Этот результат усилен нами в трех направлениях. Во-первых, показатель -20 заменен на -2 . Во-вторых, мы доказали, что радиусы окружностей, на которых минимум модуля функции превосходит -2 -ю степень максимума ее модуля, встречаются на каждом интервале, отношение концов которого равно 3. В-третьих, мы выяснили, что обсуждаемое неравенство верно для функций изучаемого класса «в среднем». Последнее означает, что если взять логарифм произведения минимума модуля функции на окружности на квадрат максимума ее модуля, разделить на куб радиуса и проинтегрировать по всем радиусам, принадлежащим произвольному отрезку с отношением концов, равным 3, то получится положительная величина.

Ключевые слова: каноническое произведение, минимум модуля, максимум модуля.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков. Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля четных канонических произведений // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 127–138.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00545) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.547.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-127-138

Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products

A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov

Popov Anton Yur'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: aypopov.msu@yandex.ru

Sherstyukov Vladimir Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: sherub73@gmail.com

Abstract

We consider entire functions that are even canonical products of zero genus, all roots of which are located on the real axis. We study the question of lower bound the minimum modulus of such functions on the circle in terms of some negative power of the maximum modulus on the same circle, when the radius of the circle runs through segments with a constant ratio of ends. In 2002 A. M. Gaisin, correcting the erroneous reasoning of M. A. Evgrafov from the book «Asymptotic estimates and entire functions», proved that for each function of the class under consideration there exists a sequence of circles, whose radii tend to infinity, the ratio of the subsequent radius to the previous one is less than 4, and these circles are such that on each of them the minimum modulus of the function exceeds the -20 -th power of the maximum of its modulus. This result is strengthened by us in three directions. First, the exponent -20 has been replaced by -2 . Secondly, we proved that the radii of the circles on which the minimum modulus of the function exceeds the -2 -th power maximum of its modulus occur on every interval whose end ratio is 3. Thirdly, we found out that the discussed inequality is true for the functions of the class under study «on average». The latter means that if we take the logarithm of the product of the minimum modulus of a function on a circle and the square of its maximum modulus, divide by the cube of the radius and integrate over all radii belonging to an arbitrary segment with an end ratio of 3, it will be a positive value.

Keywords: canonical product, minimum modulus, maximum modulus.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov 2023, "Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 127–138.

1. Введение

В статье рассматриваются четные канонические произведения

$$L(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\mu_n^2}\right), \quad w \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

корни которых $\{\pm \mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ лежат на действительной оси, и последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условию

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_n \leq \mu_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} < +\infty. \quad (2)$$

Ввиду (2) произведение (1) равномерно сходится на любом компакте в $\mathbb{C}$ и, следовательно, является целой функцией. Для любой целой функции f рассмотрим величины

$$m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \quad M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

В силу положительности чисел μ_n для произведений (1) имеем

$$m(L; r) = |L(r)|, \quad M(L; r) = L(ir) \quad \forall r > 0. \quad (3)$$

В [1; § 2, лемма 2] А. М. Гайсин доказал следующее утверждение.

Для произвольной функции (1), корни которой удовлетворяют условию (2), существует возрастающая и стремящаяся к $+\infty$ последовательность r_n , такая, что

$$1) \ r_n < r_{n+1} < 4r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2) \ m(L; r_n) > M^{-20}(L; r_n).$$

С помощью этой леммы Гайсин оценил поведение специального бесконечного произведения. Это помогло ему решить восходящую к [2] проблему По́йа о нахождении условий на последовательность перемен знака коэффициентов вещественного степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, гарантирующих наличие последовательности $x_n \rightarrow +\infty$, в которой для суммы f степенного ряда верна эквивалентность

$$\ln |f(x_n)| \sim \ln M(f; x_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Однако задачи оптимальных оценок минимума модуля на окружностях для целых функций через степени их максимума модуля (или мажоранты максимума модуля) имеют самостоятельный интерес и давно изучаются специалистами (см., например, [3]–[8]). Одним из центральных результатов теории является знаменитая $\cos(\pi\rho)$ -теорема, согласно которой для произвольной отличной от тождественной константы целой функции f порядка $\rho \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность положительных чисел $r_n \rightarrow +\infty$, что выполняется неравенство

$$m(f; r_n) > (M(f; r_n))^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon}.$$

Подчеркнем, что в этом утверждении нет ограничений на величину r_{n+1}/r_n . Принципиально иные результаты получаются при требовании наличия соответствующей оценки на любом отрезке с постоянным отношением его концов. Исследования в этом направлении почти не проводились. Известное нам исключение, помимо статьи [1] (см. также комментарий после теоремы 1 в разделе 2), составляет лишь работа А. О. Гельфонда [6]. Восполнение указанного пробела начато публикациями последнего времени [9]–[11]. За дополнительными историческими подробностями отсылаем к [11].

Вернемся к основной линии. Мы усилили цитированный результат Гайсина в трех направлениях. Во-первых, показатель -20 в оценке минимума модуля через степень максимума заменен на -2 . Во-вторых, уменьшена верхняя граница для r_{n+1}/r_n , и, в третьих, доказано, что произведение $m(L; r) M^2(L; r)$ в определенном смысле превосходит 1 «в среднем» на любом отрезке, отношение концов которого равно 3.

2. Оценка минимума модуля в среднем

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию (2), L — функция, заданная формулой (1). Тогда при любом $R > 0$ выполнено неравенство

$$\int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^2(L; r))}{r^3} dr > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1), (3) при каждом $r > 0$ имеем

$$\ln(m(L; r) M^2(L; r)) = \ln|L(r)| + 2 \ln L(ir) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{r^2}{\mu_n^2} \right| + 2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{\mu_n^2} \right) \right). \quad (5)$$

Умножим обе части тождества (5) на r^{-3} и проинтегрируем по отрезку $[R, 3R]$ с фиксированным $R > 0$. Возможность почленного интегрирования ряда обосновывается стандартным образом (см., например, [11; § 3, доказательство леммы 3.1]). Получим равенство

$$J(R) \equiv \int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^2(L; r))}{r^3} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R^{3R} \frac{\ln \left| 1 - \frac{r^2}{\mu_n^2} \right| + 2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{\mu_n^2} \right)}{r^3} dr.$$

Сделав в n -ом интеграле замену переменной $\mu_n^{-2} r^2 = t$ и обозначив $\mu_n^{-2} = c_n$, придем к следующему представлению интеграла $J(R)$:

$$J(R) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{c_n R^2}^{9c_n R^2} \frac{\ln|1-t| + 2 \ln(1+t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(c_n R^2),$$

где

$$\Phi(x) \equiv \int_x^{9x} \frac{\ln|1-t| + 2 \ln(1+t)}{t^2} dt = \int_x^{9x} \frac{\ln|1-t^2| + \ln(1+t)}{t^2} dt, \quad x > 0.$$

Поскольку (см. (2)) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, а функция Φ ограничена² на $(0, +\infty)$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(c_n R^2)$ является абсолютно сходящимся, каково бы ни было значение $R > 0$.

Итак, для доказательства заявленного неравенства (4) осталось проверить положительность $\Phi(x)$ при любом $x > 0$.

При $x \geq 1$ положительной является даже функция $F(x) \equiv \int_x^{9x} t^{-2} \ln(t^2 - 1) dt$ (очевидно, меньшая $\Phi(x)$). Действительно, на луче $(\sqrt{2}, +\infty)$ положительность $F(x)$ следует из положительности $\ln(t^2 - 1)$ на том же луче, а на отрезке $[1, \sqrt{2}]$ функция $F(x)$ возрастает (это

²Ниже доказана положительность функции Φ . Ее ограниченность сверху (например, числом $\ln(3+\sqrt{8})+\ln 9$) следует из соотношений

$$\int_x^{9x} t^{-2} \ln(1+t) dt < \int_x^{9x} t^{-1} dt = \ln 9, \quad \min_{x>0} \int_0^x t^{-2} \ln|1-t^2| dt = \int_0^{\sqrt{2}} t^{-2} \ln|1-t^2| dt = -\ln(3+\sqrt{8}).$$

непосредственно проверяется дифференцированием) и, следовательно,

$$F(x) \geq F(1) = \int_1^9 \frac{\ln(t^2 - 1)}{t^2} dt > \int_1^3 \frac{\ln(t^2 - 1)}{t^2} dt = 0.$$

Положительность функции Φ на полуинтервале $(0, 1/9]$ доказывается так. Ввиду неравенств

$$\ln(1 - t^2) < 0, \quad \ln(1 + t) > t - t^2/2 \quad \forall t \in (0, 1)$$

имеем

$$\Phi(x) > \int_0^1 \frac{\ln(1 - t^2)}{t^2} dt + \int_x^{9x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) dt = \ln \frac{9}{4} - 4x \geq \ln \frac{9}{4} - \frac{4}{9} > 0.3.$$

Сложнее доказать положительность $\Phi(x)$ на интервале $(1/9, 1)$. Сперва покажем, что производная $\Phi'(x)$ имеет на этом интервале единственный корень — обозначим его x_0 — причем

$$\Phi'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (1/9, x_0), \quad \Phi'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (x_0, 1). \quad (6)$$

Вместе с непрерывностью функции Φ на отрезке $[1/9, 1]$ это даст равенство

$$\min \{ \Phi(x) \mid 1/9 \leq x \leq 1 \} = \Phi(x_0). \quad (7)$$

Имеем

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(81x^2 - 1) + \ln(9x + 1)}{9x^2} - \frac{\ln(1 - x^2) + \ln(1 + x)}{x^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(x) \equiv x^2 \Phi'(x) = \frac{1}{9} (\ln(81x^2 - 1) + \ln(9x + 1)) - \ln(1 - x^2) - \ln(1 + x).$$

Она возрастает на интервале $(1/9, 1)$, поскольку

$$\Phi_1'(x) = \frac{18x}{81x^2 - 1} + \frac{1}{9x + 1} + \frac{2x}{1 - x^2} - \frac{1}{1 + x} = \frac{8x((5x - 1)^2 + 2x^2 + 2)}{(81x^2 - 1)(1 - x^2)} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{9}, 1 \right).$$

А так как $\lim_{x \rightarrow 1/9+} \Phi_1(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} \Phi_1(x) = +\infty$, то

$$\exists x_0 \in (1/9, 1) : \Phi_1(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (1/9, x_0), \quad \Phi_1(x_0) = 0, \quad \Phi_1(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (x_0, 1). \quad (8)$$

Из (8) следует (6), и равенство (7) доказано. Точно найти x_0 мы не можем, но непосредственным вычислением эта точка локализуется (тривиальные, но довольно громоздкие выкладки мы опускаем):

$$\Phi_1\left(\frac{1}{7}\right) < 0, \quad \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} < x_0 < \frac{1}{6}. \quad (9)$$

Точно так же убеждаемся в справедливости неравенства

$$\Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{1}{100}. \quad (10)$$

Вычислим, а потом оценим снизу значение $\Phi(1/6)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) &= \int_{1/6}^{3/2} \frac{\ln|1-t^2| + \ln(1+t)}{t^2} dt = \int_{1/6}^{3/2} \ln|1-t^2| d\left(1-\frac{1}{t}\right) + \int_{1/6}^{3/2} \ln(1+t) d\left(-\frac{1}{t}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{t}\right) \ln|1-t^2| \Big|_{1/6}^{3/2} - \int_{1/6}^{3/2} \left(1-\frac{1}{t}\right) \frac{2t}{t^2-1} dt + \frac{\ln(1+t)}{t} \Big|_{1/6}^{3/2} + \int_{1/6}^{3/2} \frac{dt}{t(1+t)} = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} + 5 \ln \frac{35}{36} + 6 \ln \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \ln \frac{5}{2} + \ln 9 - 3 \ln \frac{15}{7} > 0.13.\end{aligned}$$

Отсюда и из (9), (10), учитывая возрастание функции Φ_1 , получаем оценку

$$\begin{aligned}\Phi(x_0) &= \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \int_{x_0}^{1/6} \Phi'(x) dx = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \int_{x_0}^{1/6} \frac{\Phi_1(x)}{x^2} dx > \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) \int_{x_0}^{1/6} \frac{dx}{x^2} > \\ &> \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) \int_{1/7}^{1/6} \frac{dx}{x^2} = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{6}\right) > 0.12,\end{aligned}$$

которая вместе с (7) демонстрирует положительность функции Φ на отрезке $[1/9, 1]$. Положительность функции Φ на луче $(0, +\infty)$ обоснована, и доказательство теоремы завершено. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы для любого $R > 0$ найдется точка $r \in (R, 3R)$, в которой выполняется неравенство

$$m(L; r) > M^{-2}(L; r). \quad (11)$$

В частности, найдется такая последовательность $r_n \rightarrow +\infty$, что

$$m(L; r_n) > M^{-2}(L; r_n), \quad r_1 \in (1, 3), \quad r_n + \frac{1}{3} < r_{n+1} < 3r_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заслуживает внимания следующее обстоятельство. Если ознакомиться с содержанием параграфа 3.5 книги [12], не воспринимая его критически, то может показаться, что следствие 1 является лишь небольшим уточнением (в весьма частном случае) давно известного результата. Пр процитируем утверждение, приведенное на стр. 236 книги [12].

Пусть F — целая функция, отличная от тождественного нуля, $\lambda > 1$ — некоторая постоянная. Тогда существует последовательность положительных чисел r_n , удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty, \quad r_n < r_{n+1} < \lambda r_n, \quad (12)$$

и такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m(F, r_n)}{\ln M(F, r_n)} \geq -\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \quad (13)$$

Взяв $\lambda = 3$, получим существование такой последовательности $r_n \rightarrow +\infty$, что

$$r_n < r_{n+1} < 3r_n, \quad m(F, r_n) > M^{-2-\varepsilon_n}(F, r_n), \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (14)$$

Тем самым (с точностью до бесконечно малой в показателе) следствие 1 якобы давно известно и причем не только для произведений (1), но и для всех целых функций.

Однако это утверждение М. А. Евграфова неверно! У. Хэйман [13] предъявил целую функцию φ бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(\varphi, r)}{\ln M(\varphi, r)} = -\infty,$$

а значит оценки вида (13), (14) (на всем классе целых функций, как у Евграфова) нельзя получить ни на какой последовательности $r_n \rightarrow +\infty$, а уж тем более на последовательностях, удовлетворяющих ограничению (12). Результаты работы [13] показывают, что цитированное утверждение Евграфова не выполняется также для некоторых целых функций достаточно большого конечного порядка.

А. М. Гайсин, доказывая свою лемму о минимуме модуля канонических произведений (1), пользовался методом Евграфова, изложенным в [12; гл. III], но исправлял допущенные в [12] ошибки. В результате для значения $\lambda = 4$ применительно к функциям (1) Гайсин сумел получить показатель -20 . Наш метод доказательства теоремы 1 совершенно иной; мы применяли его в [11] для оценки минимума модуля канонических произведений $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n)$ через отрицательную степень максимума на отрезках с отношением концов, близким к 1.

Укажем еще, что в работе [11; следствие 1.1] оценка вида (11) с худшим показателем -3 доказана при выборе «коротких» промежутков $(R, 3R/2)$. Заметим, что ценой значительного усложнения выкладок, доказав положительность функции

$$\int_x^{9x} \frac{\ln |1-t| + 1.91 \ln(1+t)}{t^2} dt$$

на луче $(0, +\infty)$ (ее минимум приближенно равен 0.0007), мы выведем неравенство

$$\int_R^{3R} \frac{\ln(m(L; r) M^{1.91}(L; r))}{r^3} dr > 0 \quad \forall R > 0$$

и, как следствие, соотношение

$$\forall R > 0 \quad \exists r \in (R, 3R) : \quad m(L; r) > M^{-1.91}(L; r).$$

Однако дальнейшее снижение постоянной 1.91 в показателе в рамках применяемых методов наталкивается на значительные трудности. Так, компьютерный расчет показывает, что минимальное значение, принимаемое функцией

$$\int_x^{9x} \frac{\ln |1-t| + 1.9 \ln(1+t)}{t^2} dt$$

на луче $(0, +\infty)$, будет отрицательным. Впрочем, мы выяснили (см. теорему 2), что значительного снижения (например, до 1.14) показатель 1.91 уже не допускает.

3. Примеры целых функций с малым минимумом модуля на окружностях, лежащих в специальной последовательности круговых колец

Раздел посвящен обоснованию следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $\lim_{m \rightarrow \infty} (R_m/R_{m+1}) = 0$. Тогда произведение

$$L(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} \quad (15)$$

является целой функцией экспоненциального типа, для которой выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{8/7}(L; r)\right) = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [14; гл. I, § 11], принадлежность произведения (1) классу целых функций экспоненциального типа равносильна конечности верхнего предела

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n}, \quad (17)$$

причем экспоненциальный тип $\sigma(L)$ функции L удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{2D}{e} \leq \sigma(L) \leq \pi D$$

(см. [15; гл. II, § 4.4]). В данном случае последовательность $\{\mu_n\}$ выглядит так (напомним, что R_m — натуральные числа):

$$\mu_k = \sqrt{7} R_1 \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq R_1, \quad \mu_k = \sqrt{7} R_\nu \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{\nu-1} R_j + 1 \leq k \leq \sum_{j=1}^{\nu} R_j, \quad \nu \geq 2. \quad (18)$$

Вычисляя верхний предел (17), воспользовавшись формулами (18), мы видим, что он равен пределу

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7} R_\nu} \sum_{j=1}^{\nu} R_j \right) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Здесь была использована первая из двух асимптотических оценок

$$\sum_{j=1}^{\nu-1} R_j = o(R_\nu), \quad \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{R_j} = o\left(\frac{1}{R_\nu}\right), \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (19)$$

справедливых в силу равенства $\lim_{m \rightarrow \infty} (R_m/R_{m+1}) = 0$.

Перед доказательством предельного соотношения (16) заметим, что в произведении

$$L(ir) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m}$$

сомножитель с номером $m = n$ на отрезке $R_n \leq r \leq 3R_n$ является доминирующим: остальные сомножители существенного вклада в величину $L(ir)$ не вносят. Действительно, неравенство $1 + u < e^u$ ($\forall u > 0$) для всех $R_n \leq r \leq 3R_n$ дает

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} \leq \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} < \exp\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{9R_n^2}{7R_m}\right),$$

откуда согласно (19) имеем

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Далее, неравенство $\ln(1+u) < 2u^{1/4}$ ($\forall u > 0$) для тех же $R_n \leq r \leq 3R_n$ дает

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} &\leq \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp\left(\sum_{m=1}^{n-1} R_m \ln\left(1 + \frac{9R_n^2}{7R_m^2}\right)\right) < \\ &< \exp\left(2 \sum_{m=1}^{n-1} \left(R_m \sqrt[4]{\frac{9}{7}} \left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{1/2}\right)\right) < \exp\left(3 \sum_{m=1}^{n-1} (R_n R_m)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Так как $\{\sqrt{R_m}\}$ также является быстро растущей последовательностью в том смысле, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{R_m} / \sqrt{R_{m+1}} = 0$, то $\sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{R_m} = o(\sqrt{R_n})$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{R_m} = \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Теперь докажем (16). Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} m(L; r) M^{8/7}(L; r) &= |L(r)| L^{8/7}(ir) = \prod_{m=1}^{\infty} \left|1 - \frac{r^2}{7R_m^2}\right|^{R_m} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{8R_m/7} < \\ &< \prod_{m=1, m \neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{7R_m^2}\right)^{15R_m/7} \left|1 - \frac{r^2}{7R_n^2}\right|^{R_n} \left(1 + \frac{r^2}{7R_n^2}\right)^{8R_n/7}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (20), (21) выводим асимптотическую оценку

$$\max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{8/7}(L; r)\right) \leq A^{R_n} \exp(o(R_n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

где

$$A \equiv \max\{g(t) \mid 1 \leq t \leq 9\}, \quad g(t) \equiv |1 - t/7| (1 + t/7)^{8/7} = |1 - t^2/49| (1 + t/7)^{1/7}.$$

Из (22) видно, что для вывода (16) осталось проверить справедливость неравенства $A < 1$. Легко видеть, что $g(7) = 0$, и на луче $[7, +\infty)$ функция $g(t) = (t^2/49 - 1)(t/7 + 1)^{1/7}$ возрастает. На отрезке $[1, 7]$ функция g убывает, поскольку при $1 < t < 7$ имеем

$$g_1(t) \equiv \ln g(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{49}\right) + \frac{1}{7} \ln\left(1 + \frac{t}{7}\right), \quad g'_1(t) = \frac{1}{7} \frac{1}{t+7} - \frac{2t}{49-t^2} = \frac{1 - (15/7)t}{49-t^2} < 0.$$

Отсюда следует равенство $A = \max(g(1), g(9))$, а так как оба числа $g(1)$ и $g(9)$ меньше 1, то этим доказательство теоремы завершено. $\square$

За счет усложнения конструкции примера можно построить функцию L экспоненциального типа и вида (1), для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{R_n \leq r \leq 3R_n} \left(m(L; r) M^{7/6}(L; r)\right) = 0.$$

Но построить аналогичный пример, в котором вместо показателя $7/6$ стоял бы показатель 1.2 , мы уже не можем.

Таким образом, оптимальный показатель в задаче оценки минимума модуля четного произведения (1) с действительными корнями через некоторую отрицательную степень максимума модуля этого произведения при обязательном требовании осуществить оценку в какой-либо точке отрезка с отношением концов, равным 3, лежит между $-191/100$ и $-7/6$.

4. Заключение

Подведем итоги проделанного исследования. Для произвольного четного канонического произведения нулевого рода с действительными корнями мы рассмотрели задачу оценки минимума модуля на окружности через степень максимума модуля на той же окружности. При этом требовалось дополнительное условие: радиус окружности, дающий в неравенстве

$$m(L; r) \geq M^{-p}(L; r) \quad (23)$$

оптимальный показатель p , ищется на отрезке с данным отношением концов (в нашей работе это отношение равно 3). Показано, что при условии $r \in [R, 3R]$ для произвольной функции (1), корни которой удовлетворяют условию (2), оценка (23) будет выполнена, если взять $p = 2$.

Для доказательства этого утверждения авторами предложен метод, который в данной задаче можно считать новым (хотя он и перекликается с методом Вимана, примененным в [4] при доказательстве $\cos(\pi\rho)$ -теоремы). Возможности нашего метода еще предстоит исследовать. В действительности он дает в (23) показатель, меньший 2. Точнее, мы выяснили, что оценка (23) справедлива, если существуют такие положительные числа p, s , для которых при любом $x > 0$ верно неравенство

$$\int_x^{9x} \frac{\ln|1-t| + p \ln(1+t)}{t^s} dt > 0. \quad (24)$$

Взяв $s = 2$, мы привели доказательство для $p = 2$ и отметили в статье, что при таком показателе s (тогда интеграл в (24) вычисляется в элементарных функциях) неравенство (24) выполняется и для $p = 1.91$. Отметим определенную свободу выбора подходящих значений параметров p, s в (24) и роль компьютерного эксперимента в подобных вопросах.

В дальнейшем мы собираемся рассмотреть и другие значения отношения концов отрезка, на котором выбирается оптимальный для поставленной задачи радиус окружности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин А. М. Решение проблемы Поля // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 6. — С. 39–60.
2. Polya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Mathem. Zeitschrift. 1929. Vol 29. Iss. 1. — P. 549–640.
3. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 1913. Vol. 5. — P. 117–257.
4. Wiman A. Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null // Math. Ann. 1915. Vol. 76. P. 197–211.
5. Cartwright M. L. On the minimum modulus of integral functions // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934. Vol. 30. — P. 412–420.
6. Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. — С. 42–67.
7. Hayman W. K. Subharmonic Functions. Vol. 2. — London, New York: Academic Press, 1989 — xxv+p. 285–875.

8. Hayman W.K., Lingham E.F. Research Problems in Function Theory (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics, Springer, 2019 — viii+284 pp.
9. Попов А.Ю. Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции // Челяб. физ.-матем. журнал. 2019. Т. 4. № 2. — С. 155–164.
10. Попов А.Ю. Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности // Труды МИАН. 2022. Т. 319. — С. 223–250.
11. Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек // Уфимский матем. журнал. 2022. Т. 14. № 4. — С. 80–99.
12. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
13. Hayman W.K. The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. No. 3. — P. 469–512.
14. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.
15. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976. — 536 с.

REFERENCES

1. Gaisin A.M., 2002, “Solution of the Polya problem”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 6, pp. 825–845.
2. Polya G., 1929, “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”, *Mathem. Zeitschrift*, vol. 29, iss. 1, pp. 549–640.
3. Valiron G., 1913, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulier”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. 5, pp. 117–257.
4. Wiman A., 1915, “Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null”, *Math. Ann.*, vol. 76, pp. 197–211.
5. Cartwright M.L., 1934, “On the minimum modulus of integral functions”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 30, pp. 412–420.
6. Gel’fond A.O., 1951, “Linear differential equations of infinite order with constant coefficients and asymptotic periods of entire functions”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 38, pp. 42–67.
7. Hayman W.K. Subharmonic Functions. Vol. 2. — London, New York: Academic Press, 1989 — XXV, p. 285–875.
8. Hayman W.K., Lingham E.F. Research Problems in Function Theory (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics, Springer, 2019 — VIII , 284 pp.
9. Popov A.Yu., 2019, “New lower bound for the modulus of an analytic function”, *Chelyabinsk Physical and Math. J.*, vol. 4, iss. 2, pp. 155–164.
10. Popov A.Yu., 2022, “A lower estimate for the minimum modulus of an analytic function on a circle in terms of the negative power of its norm on a larger circle”, *Proc. Steklov Inst. Math.* (forthcoming paper).

11. Popov A.Yu. and Sherstyukov V.B., 2022, "Lower bound for minimum of modulus of entire function of genus zero with positive roots in terms of degree of maximal modulus at frequent sequence of points", *Ufa Math. J.*, vol. 14, no. 3, pp. 76-95.
12. Evgrafov M. A., 1979, Asymptotic estimates and entire functions. Nauka, Moscow, 320 pp.
13. Hayman W. K., 1952, "The minimum modulus of large integral functions", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 2, no. 3, pp. 469-512.
14. Levin B. Ja., 1964, Distribution of zeros of entire functions. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., Vol. VII, 493 pp.
15. Leont'ev A. F., 1976, "Exponential series". Nauka, Moscow, 536 pp.

Получено: 26.01.23

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.48

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-139-181

О симметриях трехмерных алгебраических цепных дробей¹

И. А. Тлюстангелов

Тлюстангелов Ибрагим Асланович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: ibragim-tls@yandex.ru

Аннотация

В данной работе подробно доказывается критерий наличия у алгебраической цепной дроби собственной палиндромической симметрии в размерности 4. Также мы приводим новое доказательство критерия наличия собственной циклической палиндромической симметрии в размерности 4. В качестве многомерного обобщения цепных дробей рассматриваются полиэдры Клейна.

Ключевые слова: полиэдры Клейна, алгебраические решетки.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

И. А. Тлюстангелов. О симметриях трехмерных алгебраических цепных дробей // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 139–181.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511.48

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-139-181

On symmetries of 3-dimensional algebraic continued fractions

I. A. Tlyustangelov

Tlyustangelov Ibragim Aslanovich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: ibragim-tls@yandex.ru

Abstract

In this paper we prove in detail a criterion for an algebraic continued fraction to have a proper palindromic symmetry in dimension 4. We also present a new proof of the criterion for an algebraic continued fraction to have a proper cyclic palindromic symmetry in dimension 4. As a multidimensional generalization of continued fractions, we consider Klein polyhedra.

Keywords: Klein polyhedra, algebraic lattices.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

I. A. Tlyustangelov, 2023, “On symmetries of 3-dimensional algebraic continued fractions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 139–181.

¹Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00079.

1. Введение

Обыкновенная цепная дробь действительного числа имеет весьма изящную геометрическую интерпретацию, позволяющую перейти от классического случая к многомерному (см. [1] и, например, [2], [3], [4], [5]). Для описания такого обобщения рассмотрим $l_1, \dots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$ -наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплицальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \dots, l_n).$$

Симплицальный конус с вершиной в начале координат $\vec{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\vec{0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \dots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = \text{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\vec{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$ называются соответственно полиэдром Клейна и парусом Клейна, соответствующими конусу C . Объединение же всех 2^n парусов

$$\mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(l_1, \dots, l_n)} \partial(\mathcal{K}(C))$$

называется $(n-1)$ -мерной цепной дробью.

Особенный интерес представляет так называемый алгебраический случай. Напомним, что оператор из $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*. Справедливо следующее утверждение о связи гиперболических операторов с алгебраическими числами в случае произвольного n (подробности см., например, в [6])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \dots, n$, где $\sigma_1 = \text{id}$, $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A .

В случае $n = 2$ предложение 1 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями (см., например, [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $l_1, \dots, l_n$ — собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$ -мерная цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n)$ называется алгебраической. Мы будем также говорить, что эта дробь ассоциирована с оператором A и писать $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$ -мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n)$ множество

$$\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A)) = \left\{ G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid G(\mathcal{CF}(A)) = \mathcal{CF}(A) \right\}.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ однозначно определена перестановка σ_G , такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

И обратно, если для $G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G , что выполняются соотношения (1), то $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$.

Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах (см. [8]) существует изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$ подгруппа группы $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ (см., например, [6]). Относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$ -мерным тором (см. [2]). Для каждого элемента G , принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G = \text{id}$. Однако, в $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G , для которых $\sigma_G \neq \text{id}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ такой, что $\sigma_G = \text{id}$, будем называть симметрией Дирихле дроби $\mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть палиндромической симметрией дроби $\mathcal{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрий цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть палиндромичной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Симметрия $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ называется циклической, если σ_G — циклическая перестановка.

Очевидно, что все циклические симметрии цепной дроби $\mathcal{CF}(A)$ являются палиндромическими симметриями этой цепной дроби.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Палиндромическая симметрия $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ называется собственной, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathcal{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$, не являющаяся собственной, называется несобственной.

Для $n = 2$, то есть для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа [9], Лежандра [10], Перрона [11] и Крайтчика [12]. В работе [7] дано геометрическое доказательство этого критерия. При этом приходится рассматривать как собственные, так и несобственные симметрии. Критерий палиндромичности цепной дроби для $n = 3$ был получен в работе [6]. Стоит отметить, что при $n = 3$ любая палиндромичная цепная дробь обладает собственной циклической симметрией. Для $n = 4$ существует критерий наличия собственной палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби, схема доказательства которого описана в работе [13]. Данная работа посвящена полному доказательству этого критерия. Основной результат работы [14] — доказательство критерия существования собственной циклической палиндромической симметрии у трехмерной алгебраической цепной дроби. В данной работе с помощью полученных результатов мы по-новому доказываем этот критерий.

2. Критерии палиндромичности

Здесь и далее обозначение $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$ для векторов из $\mathbb{R}^n$ означает существование такого оператора $X \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такого ненулевого $\mu \in \mathbb{R}$, что $X\vec{v}_1 = \mu\vec{v}_2$. Упомянутый критерий палиндромичности для $n = 2$ выглядит следующим образом:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2)$ имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряжённым ω' , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega) : \quad \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0;$
- (б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega) : \quad \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1.$

В размерности $n = 3$ критерий палиндромичности имеет следующую формулировку:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3)$ имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряжёнными ω' и ω'' , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega') : \quad \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0;$
- (б) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega') : \quad \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1.$

При выполнении утверждения (а) или (б) кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ будет нормальным.

Критерий существования собственной палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби в размерности $n = 4$ формулируется следующим образом:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — все вложения поля K в $\mathbb{R}$ (см. предположение 1). Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если (с точностью до перестановки индексов) выполняется

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \quad \sigma_3^2 = \sigma_1 = \text{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω и ψ степени 4, принадлежащие полю K , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (1) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') : \quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$
- (2) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') : \quad \psi + \psi' = 1 - (\omega + \omega');$
- (3) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') : \quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$
- (4) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2}) : \quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$
- (5) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2}) : \quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$
- (6) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'+1}{2}) : \quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$
- (7) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'+1}{2}) : \quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$
- (8) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2}) : \quad \psi + \psi' = 1 - \frac{\omega+\omega'}{2};$
- (9) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega+\omega'}{2}) : \quad \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega+\omega'}{2};$
- (10) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \frac{\omega'-\omega}{4}) : \quad \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega+\omega'}{2},$

где $\omega' = \sigma_3(\omega), \psi' = \sigma_3(\psi)$.

Наконец, в размерности $n = 4$ критерий существования собственной циклической палиндромической симметрии у алгебраической цепной дроби имеет следующий вид:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если K — циклическое расширение Галуа степени 4, группа Галуа которого порождается вложением σ , и существует такое алгебраическое число $\omega \in K$ степени 4, что выполнено хотя бы одно из семи условий (1) - (7) теоремы 3 для $\psi = \sigma_2(\omega)$.

Следующее утверждение, доказанное в работе [6], показывает, что, в отличие от случаев $n = 2$ и $n = 3$, не всякая цепная дробь, обладающая собственными симметриями, обладает собственными циклическими симметриями:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют такие вещественные числа α, β, γ , что подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$, вполне вещественное расширение $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ поля $\mathbb{Q}$ не является нормальным и $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ — цепная дробь, обладающая собственными симметриями, но не обладающая собственными циклическими симметриями.*

Любопытно, что теорема 4 не следует непосредственно из теоремы 3. В связи с этим возникает естественный вопрос.

Верно ли, что существует такая палиндромичная алгебраическая цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, для которой поле K является циклическим расширением Галуа и у которой не существует собственных циклических палиндромических симметрий?

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру: в параграфе 3 мы анализируем то, как у собственных симметрий трехмерных цепных дробей устроены собственные подпространства и перестановки из соотношения (1); в параграфе 4 мы изучаем геометрию трехмерных цепных дробей, обладающих собственными симметриями, в том числе циклическими; в параграфе 5 мы устанавливаем связь между определенными классами цепных дробей и матрицами их собственных симметрий; наконец, параграф 6 посвящен доказательству теорем 3 и 4.

3. Собственные симметрии и собственные подпространства

Если задана дробь $\mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n) = \mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\vec{l}_1 = (1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1). Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\vec{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1(= \text{id}), \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. Заметим, что верна следующая

ЛЕММА 1. *Пусть $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ и $\mathcal{CF}(A) = \mathcal{CF}(l_1, \dots, l_n)$. Пусть $G \neq \pm I_n$ и $G(\vec{l}_1) = \lambda \vec{l}_1$. Тогда $\lambda \notin \mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. Поскольку $G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $G \neq \pm I_n$, то $\text{rank}(G - \lambda I_n) > 0$. Так как $(G - \lambda I_n)(\vec{l}_1) = \vec{0}$, то какие-то числа из набора $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ выражаются через оставшиеся числа этого набора в виде некоторой линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. В силу предложения 1 получаем противоречие. $\square$

Отныне будем считать, что $n = 4$, то есть будем рассматривать трехмерные цепные дроби. Напомним также, что для каждого $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{CF}(A))$ соотношением (1) определена перестановка σ_G .

ЛЕММА 2. *Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, ассоциированной с (гиперболическим) оператором A . Тогда существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1, 2)(3, 4)$ или $\sigma_G = (1, 2, 3, 4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\sigma_G = \text{id}$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $\mathcal{CF}(A)$.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , для которой $\sigma_G = (1)(2, 3, 4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\chi_G(x) = (x - \mu_1)(x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4) = x^4 - \mu_1x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4x \pm 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, μ_1 — целое число, и при этом μ_1 — корень уравнения $\chi_G(x) = 0$, то есть $\mu_1 = \pm 1$. Стало быть, l_1 — собственное подпространство оператора G , соответствующее собственному значению $\mu_1 = \pm 1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора A .

Теперь предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1)(2)(3, 4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G , коэффициенты которого целочисленны, имеет вид

$$\begin{aligned} & (x - \mu_1)(x - \mu_2)(x^2 - \mu_3\mu_4) = \\ & = x^4 - (\mu_1 + \mu_2)x^3 + (\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4)x^2 + (\mu_1 + \mu_2)\mu_3\mu_4x - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned}$$

Так как $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{Z}$, то $\mu_3\mu_4 \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют такие взаимно-простые целые числа $p \geq 1$ и $q \geq 1$, что $|\mu_3\mu_4| = \frac{p}{q}$, $|\mu_1\mu_2| = \frac{q}{p}$, а значит,

$$|\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4| = \frac{\pm p^2 \pm q^2}{pq}.$$

Итак, p^2 делится на q и q^2 делится на p , то есть $p = q = 1$ и $\mu_3\mu_4 = \pm 1$. Таким образом, матрица оператора G^2 в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 следует, что $G^2 = I_4$, то есть $\mu_1 = \pm 1$. Вновь применяя лемму 1, получаем, что $G = \pm I_4$, чего не может быть.

Таким образом, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1, 2)(3, 4)$ или $\sigma_G = (1, 2, 3, 4)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $G' = G^2$, если $\text{ord}(\sigma_G) = 4$, и $G' = G$, если $\text{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда G' — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{G'}) = 2$.

Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , в силу леммы 2 можно рассмотреть такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

или вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (2). В работе [14] доказывается следующая

ЛЕММА 3. Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (2). Тогда G является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\vec{l}_1, \varepsilon_2\vec{l}_2, \varepsilon_3\vec{l}_3, \varepsilon_4\vec{l}_4) = (\mu_2\varepsilon_1\vec{l}_2, \mu_3\varepsilon_2\vec{l}_3, \mu_4\varepsilon_3\vec{l}_4, \mu_1\varepsilon_4\vec{l}_1),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1 \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} > 0, \mu_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0, \mu_3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} > 0, \mu_4 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 > 0$, а значит, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_2 \dots \mu_n = 1$, то оператор G имеет собственное направление, которое соответствует собственному значению 1 и лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, \dots, l_n)$. $\square$

Для палиндромических симметрий вида (3) справедливо аналогичное утверждение:

ЛЕММА 4. Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (3). Тогда G является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\vec{l}_1, \varepsilon_2\vec{l}_2, \varepsilon_3\vec{l}_3, \varepsilon_4\vec{l}_4) = (\mu_3\varepsilon_1\vec{l}_3, \mu_4\varepsilon_2\vec{l}_4, \mu_1\varepsilon_3\vec{l}_1, \mu_2\varepsilon_4\vec{l}_2),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0, \mu_2 \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} > 0, \mu_3 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} > 0, \mu_4 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_3 > 0$ и $\mu_2\mu_4 > 0$. Так как у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе, то у оператора G существует одномерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1. Теперь, поскольку характеристический многочлен оператора G имеет вид $(x^2 - \mu_1\mu_3)(x^2 - \mu_2\mu_4)$, то $\mu_1\mu_3 = 1$ или $\mu_2\mu_4 = 1$. Тогда $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$, то, опять же, характеристический многочлен оператора G имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1$. Стало быть, у оператора G существует целочисленный собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Этот вектор лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, поскольку цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ является алгебраической. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда G является собственной симметрией в том и только том случае, если G' (см. следствие 1) является собственной симметрией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G является собственной симметрией $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, то, очевидно, оператор G' также является собственной симметрией цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Обратно, предположим, что G' — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Случай $\text{ord}(\sigma_G) = 2$, то есть $G' = G$, очевиден. Если $\text{ord}(\sigma_G) = 4$, то, изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , можно считать, что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (3). Тогда матрица оператора $G' = G^2$ в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\mu_1 \\ \mu_3\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4\mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ в силу леммы 4, а значит, G — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в силу леммы 3. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть G — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $\text{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда существуют такие одномерные рациональные подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 , что $Gl_+^1 = l_+^1$, $Gl_+^2 = l_+^2$, $Gl_-^1 = l_-^1$, $Gl_-^2 = l_-^2$ и $l_+^1 + l_+^2 + l_-^1 + l_-^2 = \mathbb{R}^4$. При этом подпространства l_+^1 и l_+^2 соответствуют собственному значению 1, а подпространства l_-^1 и l_-^2 соответствуют собственному значению -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , в силу леммы 4 можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1 и μ_2 , что матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, то у оператора G есть двумерное инвариантное подпространство L_+ , соответствующее собственному значению 1 и двумерное инвариантное подпространство L_- , соответствующее собственному значению -1 . Покажем рациональность подпространств L_+ и L_- , из чего будет следовать утверждение леммы.

Поскольку подпространство L_+ совпадает с решением системы линейных уравнений

$$(G - I_4)\vec{x} = \vec{0},$$

то фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений имеет размерность 2. Рассмотрев в качестве значений свободных переменных наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$, мы определим два линейно-независимых рациональных решения данной системы, из чего следует рациональность L_+ . Рациональность подпространства L_- доказывается аналогичным способом. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть G — собственная циклическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда собственные значения оператора G равны 1, -1 , i и $-i$. Более того, собственные подпространства l_+ (соответствующее собственному значению 1), l_- (соответствующее собственному значению -1) и L (соответствующее собственным значениям i и $-i$) являются рациональными. В частности, подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств и для любого $\vec{v} \in L$ верно, что $G^2(\vec{v}) = -\vec{v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , можно считать, что в силу леммы 3 существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$,

что $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ и матрица оператора G в базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ имеет вид (2). Так как $\chi_G(x) = x^4 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, то собственные значения оператора G равны 1, -1 , i и $-i$, а значит, у G есть ровно два одномерных собственных подпространства и двумерное инвариантное подпространство, которое не содержит собственных для G одномерных подпространств. Обозначим через l_+ рациональное одномерное собственное подпространство оператора G , соответствующее собственному значению 1, через l_- — рациональное одномерное собственное подпространство оператора G , соответствующее собственному значению -1 , а через L — двумерное инвариантное подпространство, соответствующее собственным значениям i и $-i$. Покажем рациональность подпространства L .

Поскольку $l_- + l_+ + L = \mathbb{R}^4$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ существуют такие единственные векторы $\vec{p}(\vec{v}, l_-) \in l_-$, $\vec{p}(\vec{v}, l_+) \in l_+$ и $\vec{p}(\vec{v}, L) \in L$, что выполняется равенство

$$\vec{v} = \vec{p}(\vec{v}, l_-) + \vec{p}(\vec{v}, l_+) + \vec{p}(\vec{v}, L).$$

Заметим, что $\vec{p}(G^2(\vec{v}), L) = \vec{p}(-\vec{v}, L)$, $\vec{p}(G^2(\vec{v}), l_-) = \vec{p}(\vec{v}, l_-)$ и $\vec{p}(G^2(\vec{v}), l_+) = \vec{p}(\vec{v}, l_+)$ для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$. Таким образом, для любой точки $\vec{z} \in \mathbb{Z}^4 \setminus (l_+ + l_-)$ ненулевые целочисленные векторы $\vec{z} - G^2(\vec{z})$ и $G(\vec{z}) - G^3(\vec{z})$ лежат в двумерном подпространстве L . Эти два целочисленных вектора неколлинеарны, поскольку $G(\vec{z}) - G^3(\vec{z}) = G(\vec{z} - G^2(\vec{z}))$ и подпространство L не содержит собственных для оператора G одномерных подпространств. Итак, мы показали, что подпространство L рационально. $\square$

4. Геометрия собственных симметрий

ЛЕММА 7. Пусть G — собственная симметрия дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $F = G'$ (см. следствие 1) — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 2). Тогда существуют $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что

$$F(\vec{z}_1) = \vec{z}_3, F(\vec{z}_2) = \vec{z}_4, F(\vec{z}_3) = \vec{z}_1, F(\vec{z}_4) = \vec{z}_2$$

и выполняется хотя бы одно из следующих одиннадцати утверждений:

- (1) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (2) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (3) векторы $\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (4) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (5) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (6) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (7) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (8) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (9) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (10) векторы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;
- (11) векторы $\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть плоскость *рациональной*, если множество содержащихся в нем целых точек является (аффинной) решеткой ранга, равного размерности этой плоскости.

Рассмотрим для собственной симметрии F подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 из леммы 5 и положим $S = l_+^2 + l_-^1 + l_-^2$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\vec{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+^1 , а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\vec{p}$ и параллельные l_+^2 и $L_- = l_-^1 + l_-^2$ соответственно. При этом $F(l) = l$, $F(\pi) = \pi$ и $F(\vec{p}) = \vec{p}$.

Плоскость π разделяет гиперплоскость S_1 на два множества S_1^+ и S_1^- . Пусть Q и R — рациональные плоскости ближайшие к π , параллельные π и не совпадающие с π , принадлежащие множествам S_1^+ и S_1^- соответственно. Отметим, что, вообще говоря, расстояния от π до Q и от π до R не обязательно равны. Положим $\bar{p}^Q = Q \cap l$ и $\bar{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры.

Для начала предположим, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ — такая пара точек решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\vec{v}_1 \in Q, \vec{v}_2 \in R$, векторы $\vec{v}_1 - \bar{p}^Q$ и $\vec{v}_2 - \bar{p}^R$ неколлинеарны. Тогда можно построить точки

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 &= F(\vec{v}_1) \in \mathbb{Z}^4 \cap Q, & \vec{v}_4 &= F(\vec{v}_2) \in \mathbb{Z}^4 \cap R, \\ \vec{v}_1^R &= \vec{v}_1 + (\bar{p}^R - \bar{p}^Q), & \vec{v}_3^R &= \vec{v}_3 + (\bar{p}^R - \bar{p}^Q), \\ \vec{v}_2^Q &= \vec{v}_2 + (\bar{p}^Q - \bar{p}^R), & \vec{v}_4^Q &= \vec{v}_4 + (\bar{p}^Q - \bar{p}^R), \\ \vec{v}_1^\pi &= \vec{v}_1 + (\bar{p} - \bar{p}^Q), & \vec{v}_3^\pi &= \vec{v}_3 + (\bar{p} - \bar{p}^Q), \\ \vec{v}_2^\pi &= \vec{v}_2 + (\bar{p} - \bar{p}^R), & \vec{v}_4^\pi &= \vec{v}_4 + (\bar{p} - \bar{p}^R). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотренные точки определяют тройку параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, где

$$\begin{aligned} \Delta^\pi &= \text{conv}(\vec{v}_1^\pi, \vec{v}_2^\pi, \vec{v}_3^\pi, \vec{v}_4^\pi) \subset \pi, \\ \Delta^Q &= \text{conv}(\vec{v}_1, \vec{v}_2^Q, \vec{v}_3, \vec{v}_4^Q) \subset Q, & \Delta^R &= \text{conv}(\vec{v}_1^R, \vec{v}_2, \vec{v}_3^R, \vec{v}_4) \subset R. \end{aligned} \quad (5)$$

Возьмем произвольную целочисленную точку $\vec{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Тогда существует такая целочисленная точка $\vec{v}_{1,2} \in R \setminus l$, что вектор $\vec{v}_{1,1} - \bar{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{1,2} - \bar{p}^R$.

Теперь предположим, мы построили такую пару точек $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\vec{v}_{j,1} \in Q, \vec{v}_{j,2} \in R$, векторы $\vec{v}_{j,1} - \bar{p}^Q$ и $\vec{v}_{j,2} - \bar{p}^R$ неколлинеарны. Положив $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$, определим с помощью 4 точки $\vec{v}_{j,3} = \vec{v}_3, \vec{v}_{j,4} = \vec{v}_4, \vec{v}_{j,1}^R = \vec{v}_1^R, \vec{v}_{j,3}^R = \vec{v}_3^R, \vec{v}_{j,2}^Q = \vec{v}_2^Q, \vec{v}_{j,4}^Q = \vec{v}_4^Q, \vec{v}_{j,1}^\pi = \vec{v}_1^\pi, \vec{v}_{j,2}^\pi = \vec{v}_2^\pi, \vec{v}_{j,3}^\pi = \vec{v}_3^\pi, \vec{v}_{j,4}^\pi = \vec{v}_4^\pi$. Также, с помощью 5 определим параллелограммы $\Delta_j^\pi = \Delta^\pi, \Delta_j^Q = \Delta^Q, \Delta_j^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\bar{p}_{j,1}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,1}^R + \bar{p}^R), \bar{p}_{j,3}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,3}^R + \bar{p}^R), \bar{p}_{j,2}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,2}^Q + \bar{p}^Q)$ и $\bar{p}_{j,4}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j,4}^Q + \bar{p}^Q)$.

Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\bar{p}^Q, \bar{p}^R, \bar{p}_{j,1}^R, \bar{p}_{j,3}^R, \bar{p}_{j,2}^Q, \bar{p}_{j,4}^Q$ и не с какой из вершин параллелограммов Δ_j^Q и Δ_j^R , при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения общности, в Δ_j^Q), то обозначим ее через $\vec{v}$. Иначе будем называть пару точек $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ *допустимой парой для оператора G и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$* .

Предположим, что вектор $\vec{v} - \bar{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{j,2} - \bar{p}^R$. Тогда положим $\vec{v}_{j+1,1} = \vec{v}, \vec{v}_{j+1,2} = \vec{v}_{j,2}$.

Теперь предположим, что вектор $\vec{v} - \bar{p}^Q$ коллинеарен вектору $\vec{v}_{j,2} - \bar{p}^R$. Заметим, что $\vec{v} - F(\vec{v}) = 2(\vec{v} - \bar{p}^Q)$, а значит, $|\vec{v} - F(\vec{v})| < |\vec{v}_{j,4} - \vec{v}_{j,2}|$ и векторы $\pm(\vec{v} - F(\vec{v}))$ не совпадают ни с каким из векторов $\vec{v}_{j,4} - \vec{v}_{j,2}$ и $\bar{p}^R - \vec{v}_{j,2} = \bar{p}_{j,4}^Q - \bar{p}_{j,2}^Q$. Таким образом, либо точка $\vec{v}_{j,2} + (\vec{v} - F(\vec{v}))$, либо точка $\vec{v}_{j,2} - (\vec{v} - F(\vec{v}))$ лежит в параллелограмме Δ_j^R и не совпадает с точками $\bar{p}^R, \bar{p}_{j,1}^R, \bar{p}_{j,3}^R$ и не с какой из вершин параллелограмма Δ_j^R . Обозначим эту точку через $\vec{v}_{j+1,2}$ и положим $\vec{v}_{j+1,1} = \vec{v}_{j,1}$. Заметим, что вектор $\vec{v}_{j+1,1} - \bar{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\vec{v}_{j+1,2} - \bar{p}^R$.

Последовательность пар $(\vec{v}_{j,1}, \vec{v}_{j,2})$ конечна, так как, по построению

$$\Delta_j^\pi \subset \Delta_{j+1}^\pi, \quad \Delta_j^Q \subset \Delta_{j+1}^Q, \quad \Delta_j^R \subset \Delta_{j+1}^R.$$

Пусть $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = (\vec{v}_{k,1}, \vec{v}_{k,2})$ — последний элемент такой последовательности, то есть $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ — допустимая пара для оператора G и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Положив $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, определим с помощью 4 точки $\bar{z}_3 = \vec{v}_3, \bar{z}_4 = \vec{v}_4, \bar{z}_1^R = \vec{v}_1^R, \bar{z}_3^R = \vec{v}_3^R, \bar{z}_2^Q = \vec{v}_2^Q, \bar{z}_4^Q = \vec{v}_4^Q$,

$\vec{z}_1^\pi = \vec{v}_1^\pi$, $\vec{z}_2^\pi = \vec{v}_2^\pi$, $\vec{z}_3^\pi = \vec{v}_3^\pi$, $\vec{z}_4^\pi = \vec{v}_4^\pi$. Также, с помощью 5 определим параллелограммы $\Delta_k^\pi = \Delta^\pi$, $\Delta_k^Q = \Delta^Q$, $\Delta_k^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\vec{p}_1^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_1^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_3^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_3^R + \vec{p}^R)$, $\vec{p}_2^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_2^Q + \vec{p}^Q)$ и $\vec{p}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_4^Q + \vec{p}^Q)$.

Покажем, что множество $(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств (с точностью до перенумерации точек $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$)

$$\begin{aligned} & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2, \vec{z}_4\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}^Q, \vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4\}, \\ & \{\vec{p}, \vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}, \\ & \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R\}. \end{aligned}$$

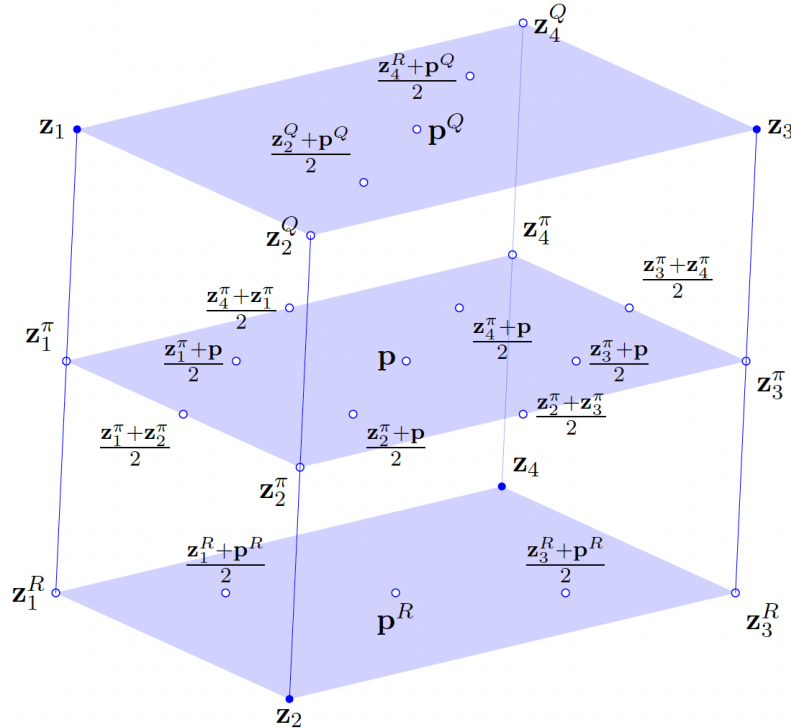


Рис. 1: Возможное расположение точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в параллелограммах из построенной тройки $(\Delta_k^\pi, \Delta_k^Q, \Delta_k^R)$

Рассмотрим параллелограмм Δ_k^Q . Поскольку $F(\vec{p}_2^Q) = \vec{p}_4^Q$, $F(\vec{p}_4^Q) = \vec{p}_2^Q$, $F(\vec{z}_2^Q) = \vec{z}_4^Q$ и $F(\vec{z}_4^Q) = \vec{z}_2^Q$, то $\vec{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \vec{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \vec{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$. Заметим, что если $\vec{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, то точки $\vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q$ не принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$ в силу способа построения параллелограмма Δ_k^R . Таким образом, множество $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}, \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}_2^Q, \vec{p}_4^Q\}.$$

Аналогично, множество $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}, \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

А) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}$. Если $\vec{z}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{z}_2^Q = \vec{z}_1 + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\vec{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q = \vec{z}_1 + (\vec{p}_3^R - \vec{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно два подслучая:

А.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

А.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π . Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Будем считать, без ограничения общности, что существует точка $\vec{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая в параллелограмме $\text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{z}_4^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\vec{w} = \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}$ невозможен, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\text{conv}(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_2)) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_2)\}$, то в параллелограмме $\text{conv}(\vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi))$ должна существовать точка $\vec{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\vec{y}$ лежит в параллелограмме $\text{conv}(\vec{z}_2^\pi, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_1^\pi + (\vec{z}_1^\pi - \vec{z}_4^\pi), \vec{z}_2^\pi + (\vec{z}_2^\pi - \vec{z}_3^\pi))$. Но тогда $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\vec{z}_3 + (\vec{z}_3 - \vec{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

А.1.б) (будет соответствовать утверждению (2)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2, \vec{z}_4\},$$

набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (2).

А.2) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

А.2.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π . Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\vec{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\text{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{p}^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Если $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\vec{z}_4^Q = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\vec{w} = \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}$ невозможен, а значит, случай $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$ невозможен. Теперь рассмотрим случай $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$. Если $\vec{w} \notin \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}\}$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \notin \{\vec{z}_1, \vec{z}_3\}$, чего не может быть. По доказанному выше, случаи $\vec{w} = \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}$ и $\vec{w} = \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}$ также невозможны, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\text{conv}(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{p}^R)) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{p}^R)\}$, то в параллелограмме

$\text{conv}(\bar{z}_3^\pi, \bar{z}_4^\pi, \bar{z}_1^\pi + (\bar{z}_1^\pi - \bar{z}_4^\pi), \bar{z}_2^\pi + (\bar{z}_2^\pi - \bar{z}_3^\pi))$ должна существовать точка $\vec{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\vec{y}$ лежит в параллелограмме $\text{conv}(\bar{z}_2^\pi, \bar{z}_1^\pi, \bar{z}_1^\pi + (\bar{z}_1^\pi - \bar{z}_4^\pi), \bar{z}_2^\pi + (\bar{z}_2^\pi - \bar{z}_3^\pi))$. Но тогда $\bar{z}_3 + (\bar{z}_3 - \vec{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\bar{z}_3 + (\bar{z}_3 - \vec{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

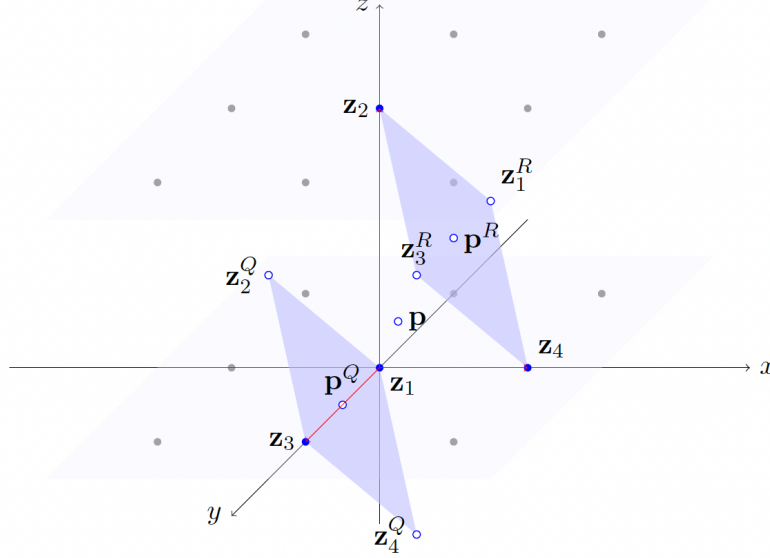


Рис. 2: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **A.1.6** леммы 7

A.2.6) (будет соответствовать утверждению (8)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{p}^R\},$$

набор векторов $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{p}^R = \frac{1}{2}(\bar{z}_2 + \bar{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (8).

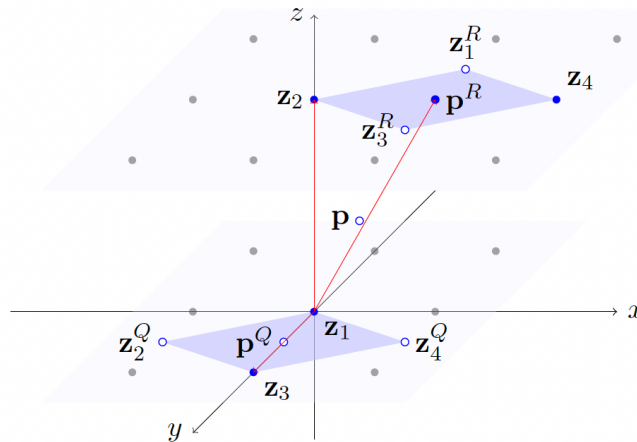


Рис. 3: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **A.2.6** леммы 7

Б) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2^Q, \bar{z}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **A**. Если $\bar{p}^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\bar{p}^Q = \bar{z}_2^Q + (\bar{p}^R - \bar{z}_2) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\bar{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\bar{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\bar{p}^Q = \bar{z}_1 + (\bar{p}_3^R - \bar{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Б.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Б.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π . Поскольку $\text{conv}(\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_3^R)) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_3 + (\vec{z}_4 - \vec{z}_3^R)\}$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\vec{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что $\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$. Предположим, что это не так. Можно считать, что либо

$$\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}),$$

либо

$$\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}).$$

Если $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$, чего не может быть. Если $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_2^\pi, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2})$, то $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_2) \notin \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Б.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (7)) Пусть $\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. При этом, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_1^\pi = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (7).

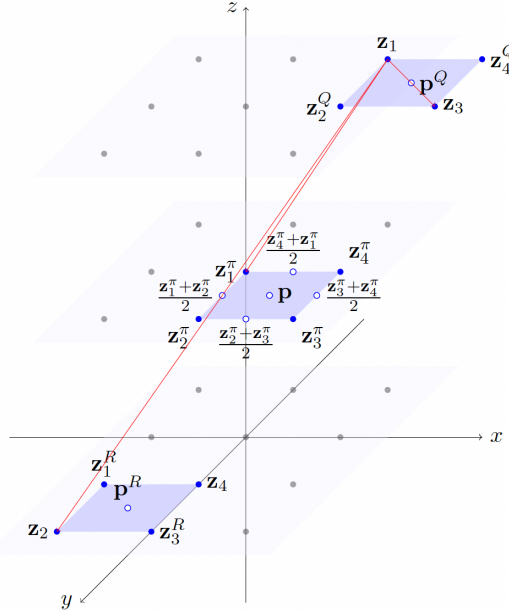


Рис. 4: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.1** леммы 7

Б.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (1)) Пусть $\vec{w} = \vec{p}$. В силу доказательства случая **Б.1.а.1** никакая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (1).

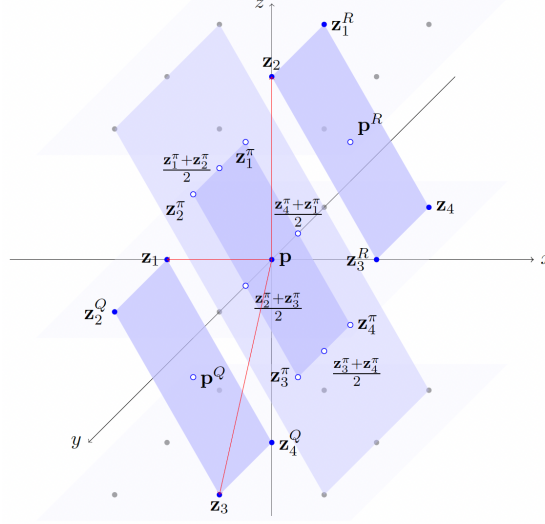


Рис. 5: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.2** леммы 7

Б.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (11)) Пусть $\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случаев **Б.1.а.1** и **Б.1.а.2** никакая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi) = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (11).

Б.1.б) (будет соответствовать утверждению (6)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4\},$$

набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (6).

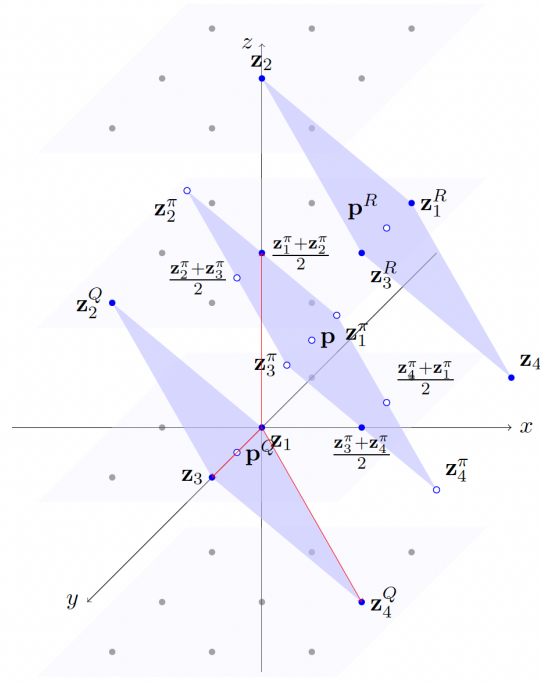


Рис. 6: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.3** леммы 7

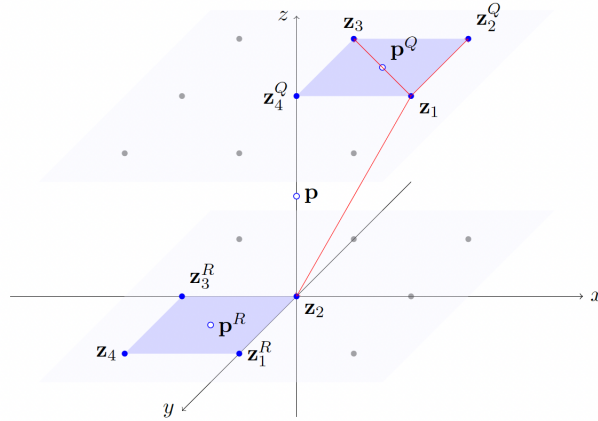


Рис. 7: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.6** леммы 7

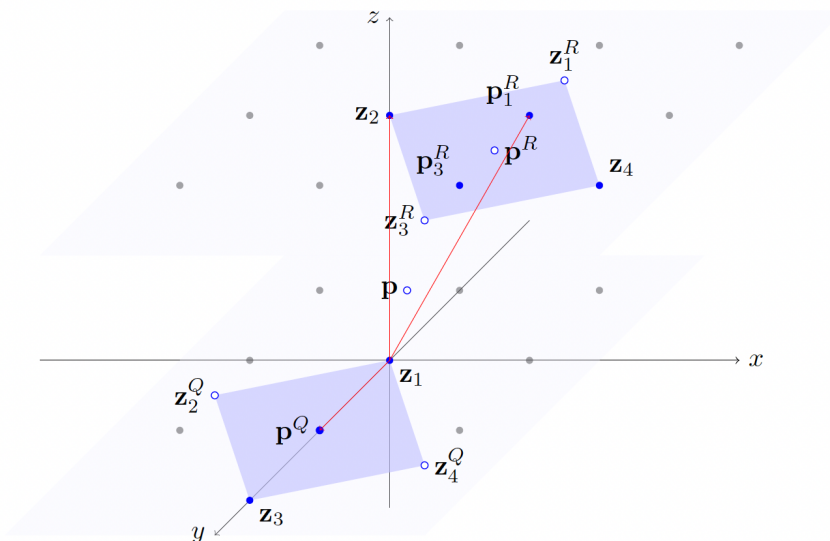
В) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{p}^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **А.2**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{z}_1^R, \bar{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Если $\bar{p}^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\bar{z}_2^Q = \bar{p}^Q + (\bar{z}_2 - \bar{p}^R) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

В.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{p}_1^R, \bar{p}_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

В.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π . Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\bar{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\text{conv}(\bar{z}_1^\pi, \frac{\bar{z}_1^\pi + \bar{z}_2^\pi}{2}, \bar{p}, \frac{\bar{z}_4^\pi + \bar{z}_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\text{conv}(\bar{z}_2^\pi, \frac{\bar{z}_2^\pi + \bar{z}_3^\pi}{2}, \bar{p}, \frac{\bar{z}_1^\pi + \bar{z}_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\bar{w} \in \text{conv}(\bar{z}_1^\pi, \frac{\bar{z}_1^\pi + \bar{z}_2^\pi}{2}, \bar{p}, \frac{\bar{z}_4^\pi + \bar{z}_1^\pi}{2})$. Если $\bar{w} \notin \{\frac{\bar{z}_1^\pi + \bar{z}_2^\pi}{2}, \frac{\bar{z}_4^\pi + \bar{z}_1^\pi}{2}, \frac{3\bar{z}_1^\pi + \bar{p}}{4}, \frac{\bar{z}_1^\pi + 3\bar{p}}{4}\}$, то $\bar{w} + (\bar{w} - \bar{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\bar{w} + (\bar{w} - \bar{z}_1) \notin$

В.1.6 (будет соответствовать утверждению (9)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \vec{p}_1^R = \vec{p}^R + (\frac{1}{2}(\vec{p}^Q + \vec{z}_3) - \vec{z}_3) = \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4) + (\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) + \vec{z}_3) - \vec{z}_3) = \frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (9).



Г) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2^Q, \bar{z}_4^Q, \bar{p}^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **A**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{z}_1^R, \bar{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **B**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **B**. При этом $\bar{z}_1^R = \bar{z}_2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2^Q) \in \mathbb{Z}^4$. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Г.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\bar{z}_2, \bar{z}_4, \bar{z}_1^R, \bar{z}_3^R, \bar{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Г.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π . Поскольку $\{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2^Q, \bar{z}_4^Q\} \subset \Delta_k^Q$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка

решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\vec{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что

$$\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}.$$

Предположим, что это не так. Можно считать, что $\vec{w} \in \text{conv}(\vec{z}_1^\pi, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \vec{p}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2})$. Тогда $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\vec{w} + (\vec{w} - \vec{z}_1) \notin \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Г.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (3)) Предположим, что

$$\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества

$$\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$$

принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. При этом, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества

$$\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2} = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2} = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (3).

Г.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (4)) Предположим, что

$$\vec{w} \in \{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества $\{\vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случая **Г.1.а.1** никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{p}, \vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi\}$$

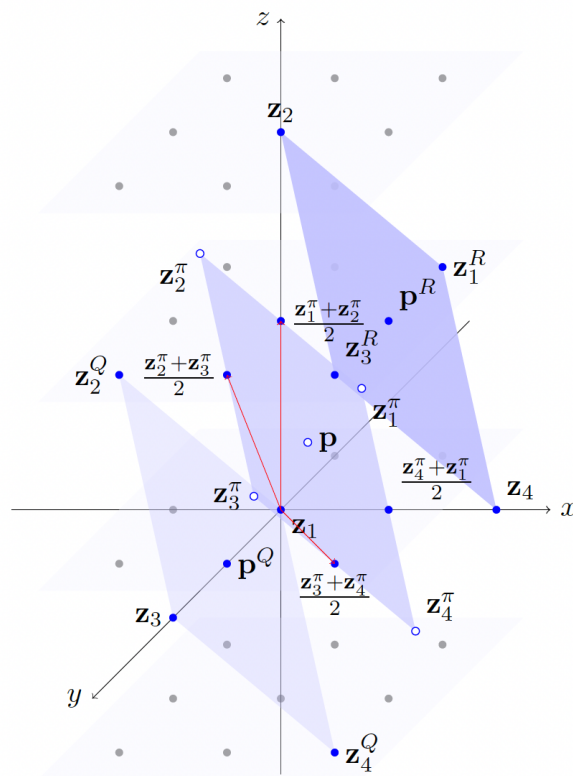
и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3)$, $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (4).

Г.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (10)) Предположим, что $\vec{w} \in \{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}\}$. В силу доказательства случаев **Г.1.а.1** и **Г.1.а.2** никакая из точек множества

$$\{\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{z}_4^\pi}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{z}_1^\pi}{2}, \vec{z}_1^\pi, \vec{z}_2^\pi, \vec{z}_3^\pi, \vec{z}_4^\pi, \vec{p}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_4^Q, \vec{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_4^\pi + \vec{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}^Q, \vec{p}^R, \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}, \frac{\vec{z}_3^\pi + \vec{p}}{2}\}$$



и, так как плоскости Q и R равноудалены от π , набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{\vec{z}_1 + \vec{p}}{2} = \frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{4}\vec{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (10).

Г.1.6 (будет соответствовать утверждению (5)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

набор векторов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (5).

Д) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{p}_2^Q, \vec{p}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **В.1**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_1^R, \vec{z}_3^R, \vec{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Г**. Осталось заметить, что если точки $\vec{p}_1^R$ и $\vec{p}_3^R$ принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$, то $\vec{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Значит случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{p}_1^R, \vec{p}_3^R\}$ также невозможен, что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 8. Пусть G — собственная циклическая симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда существуют $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что

$$G(\vec{z}_1) = \vec{z}_2, G(\vec{z}_2) = \vec{z}_3, G(\vec{z}_3) = \vec{z}_4, G(\vec{z}_4) = \vec{z}_1$$

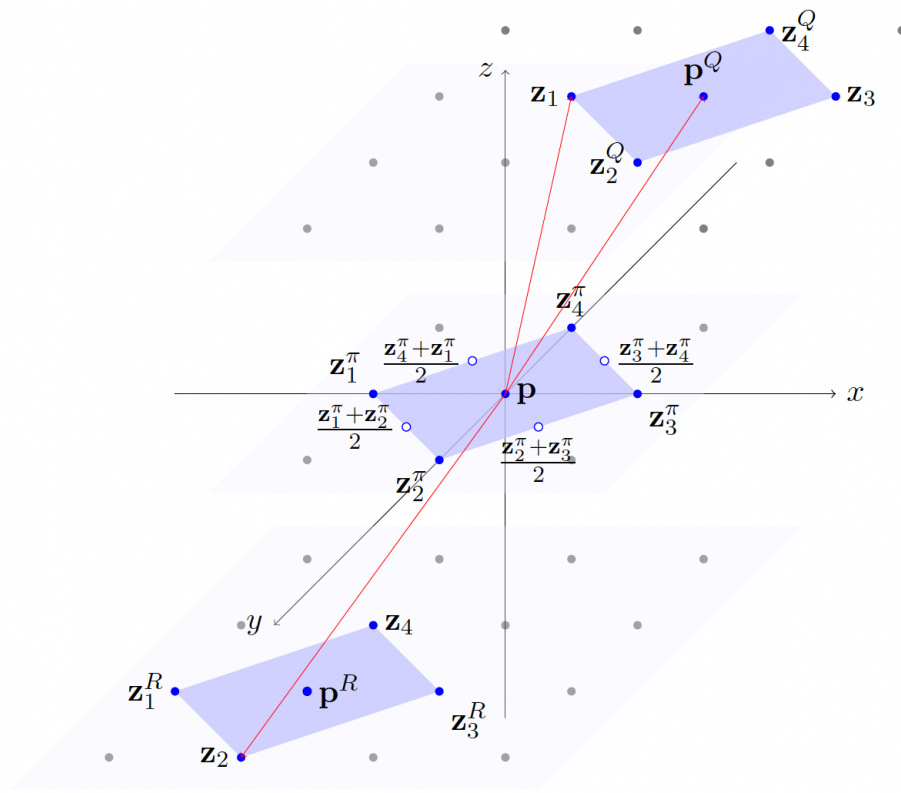


Рис. 10: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.2** леммы 7

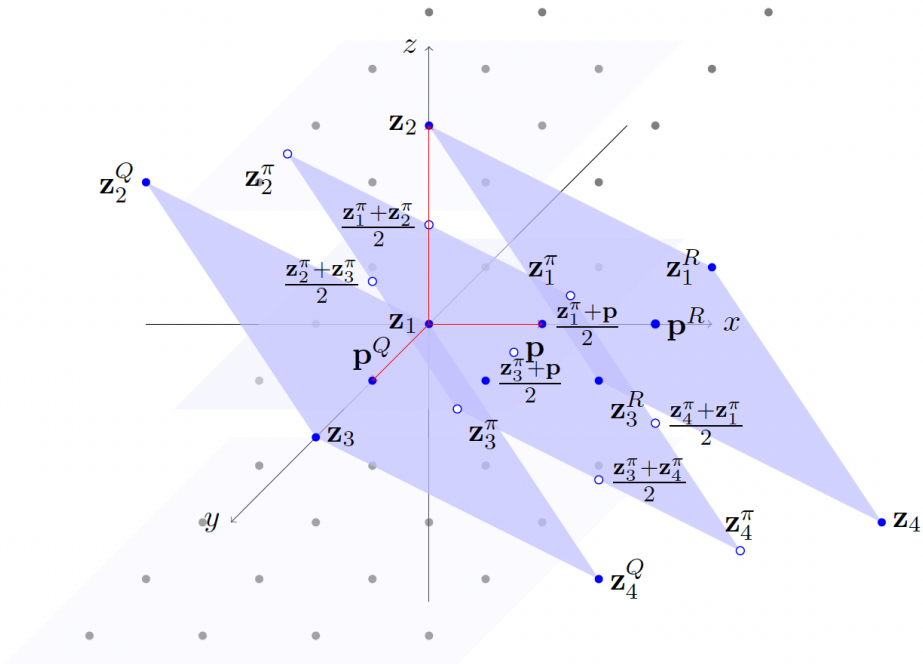
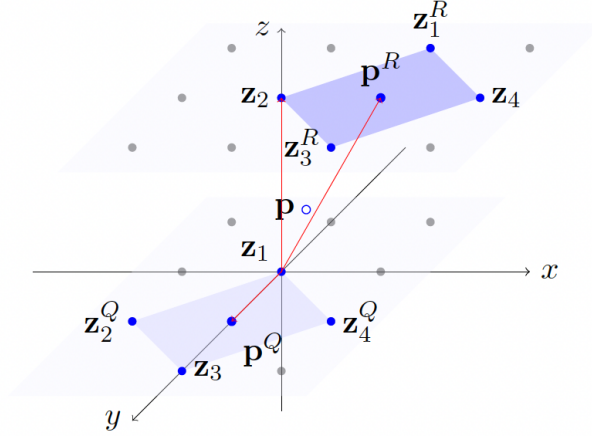


Рис. 11: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.3** леммы 7

и выполняется хотя бы одно из семи утверждений:

- (1) утверждение (4) леммы 7;

Рис. 12: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.6** леммы 7

- (2) утверждение (8) леммы 7;
- (3) утверждение (7) леммы 7;
- (4) утверждение (3) леммы 7;
- (5) утверждение (10) леммы 7;
- (6) утверждение (5) леммы 7;
- (7) утверждение (1) леммы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подпространства l_+ , l_- и L из леммы 6 и положим $S = l_- + L$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\vec{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+ , а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\vec{p}$ и параллельные l_- и L соответственно. Тогда, $G(\vec{p}) = \vec{p}$, $G(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in l$ и $G^2(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in \pi$ в силу леммы 6.

Поскольку подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств, то для произвольной точки $\vec{v} \in \pi \setminus l$ четырехугольник $\text{conv}(\vec{v}, G(\vec{v}), G^2(\vec{v}), G^3(\vec{v}))$ является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{v} + G^2(\vec{v})) = \frac{1}{2}(G(\vec{v}) + G^3(\vec{v}))$.

Обозначим через Q рациональную плоскость ближайшую к π , лежащую в гиперплоскости S_1 , параллельную π и не совпадающую с π . Поскольку $G(\vec{v} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{v}$ для любого вектора $\vec{v} \in l$, то $R = G(Q)$ и Q — рациональные плоскости ближайшие к π и равноудаленные от нее, лежащие в гиперплоскости S_1 по разные стороны от π , параллельные π и не совпадающие с π . Положим $\vec{p}^Q = Q \cap l$ и $\vec{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры. Возьмем произвольную целочисленную точку $\vec{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Введем обозначения $\vec{v}_{1,2} = G(\vec{v}_{1,1})$, $\vec{v}_{1,3} = G^2(\vec{v}_{1,1})$, $\vec{v}_{1,4} = G^3(\vec{v}_{1,1})$. Пусть точки $\vec{v}_{1,1}^\pi, \vec{v}_{1,2}^\pi, \vec{v}_{1,3}^\pi, \vec{v}_{1,4}^\pi$ — проекции параллельные l на плоскость π точек $\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{1,2}, \vec{v}_{1,3}, \vec{v}_{1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\vec{v}_{1,1}^R$ и $\vec{v}_{1,3}^R$ — проекции параллельные l на плоскость R точек $\vec{v}_{1,1}$ и $\vec{v}_{1,3}$, а через $\vec{v}_{1,2}^Q$ и $\vec{v}_{1,4}^Q$ — проекции параллельные l на плоскость Q точек $\vec{v}_{1,2}$ и $\vec{v}_{1,4}$. По доказанному выше множество $\Delta_1^\pi = \text{conv}(\vec{v}_{1,1}^\pi, \vec{v}_{1,2}^\pi, \vec{v}_{1,3}^\pi, \vec{v}_{1,4}^\pi)$ является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,2} + \vec{v}_{1,3} + \vec{v}_{1,4})$. Таким образом, множества $\Delta_1^Q = \text{conv}(\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{1,2}^Q, \vec{v}_{1,3}, \vec{v}_{1,4}^Q)$ и $\Delta_1^R = \text{conv}(\vec{v}_{1,1}^R, \vec{v}_{1,2}, \vec{v}_{1,3}^R, \vec{v}_{1,4})$ также являются параллелограммами. Заметим, что $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,3})$ и $\vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{1,2} + \vec{v}_{1,4})$.

Предположим, мы построили параллелограммы Δ_j^π, Δ_j^Q и Δ_j^R . Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\vec{p}^Q, \vec{p}^R$ и ни с какой из вершин параллелограммов Δ_j^Q и Δ_j^R , при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения

общности, внутри Δ_j^Q), то обозначим её через $\vec{v}_{j+1,1}$. Введем обозначения $\vec{v}_{j+1,2} = G(\vec{v}_{j+1,1})$, $\vec{v}_{j+1,3} = G^2(\vec{v}_{j+1,1})$, $\vec{v}_{j+1,4} = G^3(\vec{v}_{j+1,1})$. Пусть точки $\vec{v}_{j+1,1}^\pi, \vec{v}_{j+1,2}^\pi, \vec{v}_{j+1,3}^\pi, \vec{v}_{j+1,4}^\pi$ — проекции параллельные l на плоскость π точек $\vec{v}_{j+1,1}, \vec{v}_{j+1,2}, \vec{v}_{j+1,3}, \vec{v}_{j+1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\vec{v}_{j+1,1}^R$ и $\vec{v}_{j+1,3}^R$ — проекции параллельные l на плоскость R точек $\vec{v}_{j+1,1}$ и $\vec{v}_{j+1,3}$, а через $\vec{v}_{j+1,2}^Q$ и $\vec{v}_{j+1,4}^Q$ — проекции параллельные l на плоскость Q точек $\vec{v}_{j+1,2}$ и $\vec{v}_{j+1,4}$. Определим параллелограммы

$$\Delta_{j+1}^\pi = \text{conv}(\vec{v}_{j+1,1}^\pi, \vec{v}_{j+1,2}^\pi, \vec{v}_{j+1,3}^\pi, \vec{v}_{j+1,4}^\pi),$$

$$\Delta_{j+1}^Q = \text{conv}(\vec{v}_{j+1,1}, \vec{v}_{j+1,2}^Q, \vec{v}_{j+1,3}, \vec{v}_{j+1,4}^Q),$$

$$\Delta_{j+1}^R = \text{conv}(\vec{v}_{j+1,1}^R, \vec{v}_{j+1,2}, \vec{v}_{j+1,3}^R, \vec{v}_{j+1,4}).$$

При этом $\vec{p} = \frac{1}{4}(\vec{v}_{j+1,1} + \vec{v}_{j+1,2} + \vec{v}_{j+1,3} + \vec{v}_{j+1,4})$, $\vec{p}^Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j+1,1} + \vec{v}_{j+1,3})$ и $\vec{p}^R = \frac{1}{2}(\vec{v}_{j+1,2} + \vec{v}_{j+1,4})$.

Последовательность троек $(\Delta_j^\pi, \Delta_j^Q, \Delta_j^R)$ конечна. Пусть $(\Delta_k^\pi, \Delta_k^Q, \Delta_k^R)$ — последний её элемент. Положим $\vec{z}_1 = \vec{v}_{k,1}$, $\vec{z}_2 = \vec{v}_{k,2}$, $\vec{z}_3 = \vec{v}_{k,3}$, $\vec{z}_4 = \vec{v}_{k,4}$, $\vec{z}_1^\pi = \vec{v}_{k,1}^\pi$, $\vec{z}_2^\pi = \vec{v}_{k,2}^\pi$, $\vec{z}_3^\pi = \vec{v}_{k,3}^\pi$, $\vec{z}_4^\pi = \vec{v}_{k,4}^\pi$, $\vec{z}_1^R = \vec{v}_{k,1}^R$, $\vec{z}_3^R = \vec{v}_{k,3}^R$, $\vec{z}_2^Q = \vec{v}_{k,2}^Q$, $\vec{z}_4^Q = \vec{v}_{k,4}^Q$.

Обозначим через $\hat{l}^1$ и $\hat{l}^2$ такие одномерные рациональные подпространства, что $\hat{l}^1 + \hat{l}^2 = L$. Заметим, что подпространства $l_+^1 = l_+$, $l_+^2 = l_-$, $l_-^1 = \hat{l}^1$, $l_-^2 = \hat{l}^2$ удовлетворяют условиям леммы 5 для оператора G^2 . Таким образом, пара точек $(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ является допустимой (см. доказательство леммы 7) для оператора G^2 и цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, поскольку

$$(\Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 \subset \{\vec{z}_1, \vec{z}_2^Q, \vec{z}_3, \vec{z}_4^Q, \vec{z}_1^R, \vec{z}_2, \vec{z}_3^R, \vec{z}_4, \vec{p}_Q, \vec{p}_R\}.$$

Из этого следует, что должно выполняться хотя бы одно из одиннадцати утверждений (1) - (11) леммы 7.

Заметим, что случай **A.2.6** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\vec{p}^R) = \vec{p}^Q$, а значит, $\vec{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **B.1.a.3** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{z}_2^\pi}{2}) = \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{z}_3^\pi}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **B.1.b** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}_1^R + \vec{p}_R}{2}) = \frac{\vec{z}_2^Q + \vec{p}_Q}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}_2^Q + \vec{p}_Q}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **G.1.a.3** из доказательства леммы 7 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) = \frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2}$, а значит, $\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2} \in \mathbb{Z}^4$ и $\frac{\vec{z}_1 + \vec{z}_2^Q}{2} = \vec{z}_1 + (\frac{\vec{z}_2^\pi + \vec{p}}{2} - \frac{\vec{z}_1^\pi + \vec{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Итак, мы показали, что должно выполняться хотя бы одно из семи утверждений (4), (8), (7), (3), (10), (5), (1) из формулировки леммы 7.

□

5. Матрицы собственных симметрий

Напомним, что если задана дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) = \mathcal{CF}(A) \in \mathfrak{A}_3$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\vec{l}_1 = (1, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\vec{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma))$, где $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. То есть, если через $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4)$ обозначить матрицу со столбцами $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$, получим

$$(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) & \sigma_4(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) & \sigma_4(\beta) \\ \gamma & \sigma_2(\gamma) & \sigma_3(\gamma) & \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \quad \sigma_3^2 = \text{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3.$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, 10$ определим $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ как класс дробей из $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$, удовлетворяющих паре соотношений $\mathfrak{R}_i$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1: & \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_2: & \beta + \sigma_3(\beta) = 1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_3: & \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_4: & \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_5: & \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_6: & \beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2}; \\ \mathfrak{R}_7: & \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2}; \\ \mathfrak{R}_8: & \beta + \sigma_3(\beta) = 1 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_9: & \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_{10}: & \beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \quad \gamma = \frac{\sigma_3(\alpha) - \alpha}{4}. \end{aligned}$$

Покажем, что все дроби из классов $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \dots, 10$. Положим $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \dots, \widetilde{G}_{10}$ равными соответственно матрицам

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Тогда цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ в том и только в том случае, если $\widetilde{G}_i$ — её собственная симметрия и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_i}) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 оператор $G \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_G) = 2$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\mu_3\vec{l}_3, \mu_4\vec{l}_4, \mu_1\vec{l}_1, \mu_2\vec{l}_2)$ и $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(-(\alpha + \sigma_3(\alpha))) = -(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_1\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_1\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_1\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_1\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_1(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_1$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_1}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_1$ — собственная симметрия

$\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_1}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_1 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)) = -\sigma_3(\beta) - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_1 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) = \sigma_2(-\beta - (\alpha + \gamma)) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))) = 1 - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_2 \vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 1 - \beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \alpha \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_2 \vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_2 \vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 - \sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_2 \vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 1 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_2(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_2$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_2}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_2$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_2}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_2 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 - \beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(1) - (\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)) = -\sigma_3(\beta) + 1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_2 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) = \sigma_2(1 - \beta - (\alpha + \gamma)) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))) = 2 - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_3\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_3\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_3\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_3\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_3(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_3$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_3}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_3$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_3}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_3\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 2 - \beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(2) - (\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)) = -\sigma_3(\beta) + 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_3\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) = \sigma_2(2 - \beta - (\alpha + \gamma)) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))) = -(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_4\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_4\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_4\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_4\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_4(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_4$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_4}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_4$ — собственная симметрия

$\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_4}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_4 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ -\beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = -2\gamma = -(\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_4 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ -\sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = -\sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(-\beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_4$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_5$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha) + \alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))) = 2 - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_5 \vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_5 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_5 \vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_5 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_5(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_5$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_5}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_5$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_5}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_5 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ 2 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - 2\gamma = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = \sigma_3(2) - \sigma_3(\beta) - 2\sigma_3(\gamma) = 2 - \sigma_3(\beta) - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_5 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(2 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_5$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_6$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(-(\alpha + \sigma_3(\alpha))) = -(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_6\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_6\vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_6\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha + 1) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_6\vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + 1) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_6(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_6$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_6}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_6$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_6}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_6\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 1 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) - 1 = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) - 1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - 2\gamma = -(\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(1) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 1 - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_6\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha - 1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(1 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_6$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_7$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))) = 2 - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_7\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_7\vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha) + 1) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_7\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha + 1) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_7\vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - (\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + 1) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_7(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_7$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_7}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_7$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_7}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_7 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 3 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) - 1 = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) - 1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 3 - 2\gamma = 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(3) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 3 - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_7 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 3 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha - 1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 3 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(3 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_7$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_8$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha) + \alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(1 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = 1 - \frac{\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_8 \vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 1 - \beta - \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_8 \vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_8 \vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 - \sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, & \widetilde{G}_8 \vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 1 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_8(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_8$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_8}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_8$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_8}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_8 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ 1 - \beta - \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - \gamma = 1 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(1) - \sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 1 - \gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_8 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - \sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1 - \sigma_2(\beta) - \sigma_2(\gamma) = \sigma_2(1 - \beta - \gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_8$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_9$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = 2 - \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_9\vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_9\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{G}_9\vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_9\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{G}_9(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_9$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_9}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_9$ — собственная симметрия $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_9}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_9\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ 2 - \beta - \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \gamma = 2 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(2) - \sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 2 - \gamma = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_9\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - \sigma_2(\gamma) = \sigma_2(2 - \beta - \gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_9$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_{10}$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)-\sigma_2(\alpha)}{4}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}) = \frac{\alpha-\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}) = \frac{\sigma_2(\alpha)-\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(2 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = 2 - \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G}_{10}\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \frac{1}{2}(\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\alpha - \sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_{10}\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2(\alpha) - \sigma_2\sigma_3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G}_{10}\vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sigma_3(\alpha) - \alpha) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G}_{10}\vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \frac{1}{2}(\sigma_2\sigma_3(\alpha) - \sigma_2(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G}_{10}(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Следовательно, $\widetilde{G}_{10}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_{10}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G}_{10}$ — собственная симметрия $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{\widetilde{G}_{10}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3 , что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G}_{10}\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 4\gamma \\ 2 - \beta - (\alpha + 2\gamma) \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\sigma_3(\alpha) - \alpha}{4}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 4\sigma_3(\gamma) + \sigma_3(\alpha) = -4\gamma + \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(-\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + 2\gamma) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(2) - \sigma_3(\alpha + 2\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2} = \beta$. Существует такое μ_4 , что

$$\widetilde{G}_{10}\vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) + 4\sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma)) \\ -\sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\alpha + 4\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(-\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma)) = \sigma_2(2 - \beta - (\alpha + 2\gamma)) = \sigma_2(2 - \beta - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

□

Мы будем обозначать через $\mathfrak{A}'_3$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых поле K из предложения 1 — вполне вещественное циклическое расширение Галуа. Пусть σ — образующая группы Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбирали такую нумерацию прямых l_1, l_2, l_3, l_4 , что если через $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4)$ обозначить матрицу со столбцами $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$, то

$$(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma(\alpha) & \sigma^2(\alpha) & \sigma^3(\alpha) \\ \beta & \sigma(\beta) & \sigma^2(\beta) & \sigma^3(\beta) \\ \gamma & \sigma(\gamma) & \sigma^2(\gamma) & \sigma^3(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, 7$ определим $\mathbf{CF}'_i$ как класс дробей из $\mathfrak{A}'_3$, удовлетворяющих тройке соотношений $\mathfrak{Q}_i$, где

$$\mathfrak{Q}_1: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \text{Tr}(\alpha) = 0;$$

$$\mathfrak{Q}_2: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \text{Tr}(\alpha) = 1;$$

$$\mathfrak{Q}_3: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \text{Tr}(\alpha) = 2;$$

$$\mathfrak{Q}_4: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha + \sigma^2(\alpha)}{2}, \text{Tr}(\alpha) = 0;$$

$$\mathfrak{Q}_5: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha + \sigma^2(\alpha)}{2}, \text{Tr}(\alpha) = 2;$$

$$\mathfrak{Q}_6: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha + \sigma^2(\alpha) + 1}{2}, \text{Tr}(\alpha) = 0;$$

$$\mathfrak{Q}_7: \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha + \sigma^2(\alpha) + 1}{2}, \text{Tr}(\alpha) = 2.$$

Покажем, что все дроби из классов $\mathbf{CF}'_i$, палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \dots, 7$. Положим $G'_1, G'_2, \dots, G'_7$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 10. Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогда цепная дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\mathbf{CF}'_i$ в том и только в том случае, если G'_i — её собственная циклическая симметрия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 оператор $G \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной циклической симметрией дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\mu_2 \vec{l}_2, \mu_3 \vec{l}_3, \mu_4 \vec{l}_4, \mu_1 \vec{l}_1)$ и $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = 1$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_1$. Тогда

$$G'_1 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ -\alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_1 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ -\sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G'_1 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ -\sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G'_1 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ -\sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_1(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_1 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_1 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_1 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $-\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_1 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_1 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_1$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_2$. Тогда

$$G'_2 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ 1 - \alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_2 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ 1 - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G'_2 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ 1 - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G'_2 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ 1 - \sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_2(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_2 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_2 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_2 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_2 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 1 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = 1 - \beta - \gamma - (1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_2 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 1 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 1 - \beta - \gamma - (1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 1$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_2$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_3$. Тогда

$$G'_3 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ 2 - \alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_3 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ 2 - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G'_3 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ 2 - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G'_3 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ 2 - \sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_3(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_3 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_3 — собственная циклическая

симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_3 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ 2 - \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $2 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_3 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 2 - \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 2 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = 2 - \beta - \gamma - (2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_3 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 2 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2 - \beta - \gamma - (2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_3$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_4$. Тогда

$$\begin{aligned} G'_4 \vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ -\frac{1}{2}(\alpha + \sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, & G'_4 \vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ -\frac{1}{2}(\sigma(\alpha) + \sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ G'_4 \vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ -\frac{1}{2}(\sigma^2(\alpha) + \alpha) \end{pmatrix}, & G'_4 \vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ -\frac{1}{2}(\sigma^3(\alpha) + \sigma(\alpha)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $G'_4(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_4 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратное, предположим, что G'_4 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_4 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -\alpha + 2\gamma \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_4 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ -\beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2} = \gamma$, $\sigma_3(\alpha) = -\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(-\gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_4 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta - 2\gamma \\ \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = -\beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha) + \sigma_2(2\gamma) = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2\gamma - \sigma_2(\beta) = \sigma_2(-2\gamma - \beta) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = -\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_4$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_5$. Тогда

$$\begin{aligned} G'_5 \vec{l}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1}{2}(2 - \alpha - \sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, & G'_5 \vec{l}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1}{2}(2 - \sigma(\alpha) - \sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix}, \\ G'_5 \vec{l}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1}{2}(2 - \sigma^2(\alpha) - \alpha) \end{pmatrix}, & G'_5 \vec{l}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1}{2}(2 - \sigma^3(\alpha) - \sigma(\alpha)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть $G'_5(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_5 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_5 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_5 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -\alpha + 2\gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1 - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_5 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ 2 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2} = \gamma$, $\sigma_3(\alpha) = -\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 2 - \beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(1 - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_5 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \beta - 2\gamma \\ \alpha \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 2 - \beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha) + \sigma_2(2\gamma) = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2\gamma - \sigma_2(\beta) = \sigma_2(2 - 2\gamma - \beta) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 1 - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_5$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_6$. Тогда

$$G'_6 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad G'_6 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1 - \sigma(\alpha) - \sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$G'_6 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1}{2}(1 - \sigma^2(\alpha) - \alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_6 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1}{2}(1 - \sigma^3(\alpha) - \sigma(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_6(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_6 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_6 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_6 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1 - \alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1 - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_6 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 1 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2} = \gamma$, $\sigma_3(\alpha) = -1 - \alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 1 - \beta - 2\gamma = -1 - \beta + (2 - 2\gamma) = \sigma_2(-1 - \alpha + 2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(1 - \gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_6 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \beta - 2\gamma \\ \alpha \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 1 - \beta - 2\gamma = -1 - \beta + (2 - 2\gamma) = \sigma_2(-1 - \alpha + 2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 1 - (-1 - \alpha + 2\gamma) - (2 - 2\gamma) = \sigma_2(1 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 1 - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_6$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_7$. Тогда

$$G'_7 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3 - \alpha - \sigma^2(\alpha)) \end{pmatrix}, \quad G'_7 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3 - \sigma(\alpha) - \sigma^3(\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$G'_7 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1}{2}(3 - \sigma^2(\alpha) - \alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_7 \vec{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1}{2}(3 - \sigma^3(\alpha) - \sigma(\alpha)) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_7(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4) = (\vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4, \vec{l}_1)$. Следовательно, G'_7 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_7 — собственная циклическая

симметрия цепной дроби $\mathcal{F}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2 , что с точностью до перестановки индексов

$$G'_7 \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 2 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1 - \alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $2 - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3 , что

$$G'_7 \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 3 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2} = \gamma$, $\sigma_3(\alpha) = -1 - \alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 3 - \beta - 2\gamma = -1 - \beta + (4 - 2\gamma) = \sigma_2(-1 - \alpha + 2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(2 - \gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4 , что

$$G'_7 \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 - \beta - 2\gamma \\ \alpha \\ 2 - \gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 3 - \beta - 2\gamma = -1 - \beta + (4 - 2\gamma) = \sigma_2(-1 - \alpha + 2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 3 - (-\alpha + 2\gamma - 1) - (4 - 2\gamma) = \sigma_2(3 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 2 - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\text{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_7$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$. $\square$

6. Доказательство теорем 3 и 4

Обозначим для каждого $i = 1, \dots, 10$ через $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ образ $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ при действии группы $\text{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\widetilde{\mathbf{CF}}_i = \left\{ \mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3 \mid \exists X \in \text{GL}_4(\mathbb{Z}) : X(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_i \right\}.$$

Также обозначим для каждого $i = 1, \dots, 7$ через $\overline{\mathbf{CF}}'_i$ образ $\mathbf{CF}'_i$ при действии группы $\text{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}}'_i = \left\{ \mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}'_3 \mid \exists X \in \text{GL}_4(\mathbb{Z}) : X(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_i \right\}.$$

ЛЕММА 11. Для дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ выполняется условие (i) теоремы 3 и $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

ЛЕММА 12. Для дроби $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ выполняется условие (i) теоремы 4 и $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}'_3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\overline{\mathbf{CF}}'_i$, где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство леммы 11 и леммы 12] Для любого $X \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1} . При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору. Остаётся воспользоваться определением эквивалентности из параграфа 1. $\square$

Теорему 3 при помощи леммы 11 можно переформулировать следующим образом: *дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.*

Аналогично, теорему 4 при помощи леммы 12 можно переформулировать следующим образом: *дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов $\widetilde{\mathbf{CF}}'_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 3] Если $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит какому-то $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 9 она имеет собственную симметрию G , ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G . Положим $F = G'$ и рассмотрим точки $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ из леммы 7. Обозначим также через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (11) леммы 7.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Тогда $X_1(\vec{z}_4) = X_1(4 \cdot \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $X_1 G X_1^{-1} = \widetilde{G}_1$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_1 G X_1^{-1}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_1(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_2 G X_2^{-1} = \widetilde{G}_2$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_2 G X_2^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_2(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_3 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_3(\vec{z}_2) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4$, $X_3(\vec{z}_3) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_3(\vec{z}_4) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $X_3 G X_3^{-1} = \widetilde{G}_3$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_3 G X_3^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = \\ (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_3(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_4 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Тогда $X_4(\vec{z}_3) = X_4(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $X_4(\vec{z}_4) = X_4(4 \cdot \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1} = \widetilde{G}_4$, так как по лемме 7

$$X_4GX_4^{-1}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4) =$$

$$(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_4(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_5 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_5(\vec{z}_3) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_5(\vec{z}_4) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4) - \vec{z}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4$ и $X_5GX_5^{-1} = \widetilde{G}_5$, так как по лемме 7

$$X_5GX_5^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4) =$$

$$(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_5(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)) =$$

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_6(\vec{z}_4) = X_6(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2) - \vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ и $X_6GX_6^{-1} = \widetilde{G}_6$, так как по лемме 7

$$X_6GX_6^{-1}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) =$$

$$(\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Стало быть, $X_6(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)) =$$

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_7(\vec{z}_4) = X_7(4(\frac{3\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 + \vec{z}_4}{4}) - 3\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ и $X_7GX_7^{-1} = \widetilde{G}_7$, так как по лемме 7

$$X_7GX_7^{-1}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3) =$$

$$(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3).$$

Стало быть, $X_7(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$.

Пусть выполняется утверждение (8) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_8 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_8(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_8(\vec{z}_4) = X_8(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4) - \vec{z}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4$ и $X_8GX_8^{-1} = \widetilde{G}_8$, так как по лемме 7

$$X_8GX_8^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4) =$$

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_8(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$.

Пусть выполняется утверждение (9) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_9 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_9(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_9(\vec{z}_3) = X_9(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_9(\vec{z}_4) = X_9(2 \cdot (\frac{1}{4}\vec{z}_1 + \frac{1}{2}\vec{z}_2 - \frac{1}{4}\vec{z}_3 + \frac{1}{2}\vec{z}_4) - \frac{1}{2}\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \frac{1}{2}\vec{z}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ и $X_9GX_9^{-1} = \widetilde{G}_9$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_9GX_9^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4) = \\ (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_9(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_9$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_9$.

Пусть выполняется утверждение (10) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_{10} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{10}(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{4}\vec{z}_4) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_{10}(\vec{z}_3) = X_{10}(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_{10}(\vec{z}_4) = X_{10}(4 \cdot (\frac{1}{2}\vec{z}_1 + \frac{1}{4}\vec{z}_2 + \frac{1}{4}\vec{z}_4) - 2\vec{z}_1 - \vec{z}_2) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_4$ и $X_{10}GX_{10}^{-1} = \widetilde{G}_{10}$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_{10}GX_{10}^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_4) = \\ (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_{10}(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$.

Пусть выполняется утверждение (11) леммы 7. Рассмотрим такой оператор $X_{11} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{11}(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4).$$

Тогда $X_{11}(\vec{z}_2) = X_{11}(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4$, $X_{11}(\vec{z}_4) = X_{11}(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $X_{11}GX_{11}^{-1} = \widetilde{G}_2$, так как по лемме 7

$$\begin{aligned} X_{11}GX_{11}^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_{11}(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 4] Если $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит какому-то $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 10 она имеет собственную циклическую симметрию G , ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной циклической симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную циклическую симметрию G с неподвижной точкой на некотором парусе $\partial(\mathcal{K}(C)) \in \mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Рассмотрим точки $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ из леммы 8. Обозначим также через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (7) леммы 8.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Тогда $X_1(\vec{z}_4) = X_1(4 \cdot \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $X_1GX_1^{-1} = G'_1$, так как по лемме 8

$$X_1GX_1^{-1}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Стало быть, $X_1(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_1$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_1}$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_2GX_2^{-1} = G'_2$, так как по лемме 8

$$X_2GX_2^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1).$$

Стало быть, $X_2(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_2$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_2}$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_3 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3(\vec{z}_1, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_3(\vec{z}_2) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4$, $X_3(\vec{z}_3) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_3(\vec{z}_4) = X_3(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $X_3GX_3^{-1} = G'_3$, так как по лемме 8

$$X_3GX_3^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_1).$$

Стало быть, $X_3(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_3$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_3}$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_4 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Тогда $X_4(\vec{z}_3) = X_4(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $X_4(\vec{z}_4) = X_4(4 \cdot \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4) - \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1} = G'_4$, так как по лемме 8

$$X_4GX_4^{-1}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_4(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_4$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_4}$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_5 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3), \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Тогда $X_5(\vec{z}_3) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3) - \vec{z}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $X_5(\vec{z}_4) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_2 + \vec{z}_4) - \vec{z}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4$ и $X_5GX_5^{-1} = G'_5$, так как по лемме 8

$$X_5GX_5^{-1}(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1).$$

Стало быть, $X_5(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_5$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_5}$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2)) = \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_6(\vec{z}_4) = X_6(2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_2) - \vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ и $X_6 G X_6^{-1} = G'_6$, так как по лемме 8

$$X_6 G X_6^{-1}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_6(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_6$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_6}$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 8. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \frac{1}{2}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + \frac{1}{4}(\vec{z}_1 + \vec{z}_4 - \vec{z}_3 - \vec{z}_2)) = \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

Тогда $X_7(\vec{z}_4) = X_7(4(\frac{3\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 + \vec{z}_4}{4}) - 3\vec{z}_1 - \vec{z}_2 + \vec{z}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ и $X_7 G X_7^{-1} = G'_7$, так как по лемме 8

$$X_7 G X_7^{-1}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \\ (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4).$$

Стало быть, $X_7(\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}'_7$, то есть $\mathcal{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_7}$. $\square$

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность О. Н. Герману за многочисленные обсуждения результатов и интерес к настоящей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss., Göttingen. 1895. Vol. 1895. P. 357–359.
2. Коркина Е. И. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Особенности гладких отображений с дополнительными структурами, Сборник статей, Тр. МИАН, Наука, Физматлит, М. 1995. Т. 209, С. 143–166
3. Герман О. Н. Паруса и норменные минимумы решеток // Матем. сб. 2005. Т 196, вып. 3, С. 31–60
4. German O. N. Klein polyhedra and lattices with positive norm minima // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2007. Vol. 19. P. 157–190.
5. Karpenkov O. N. Geometry of Continued Fractions // Algorithms and Computation in Mathematics. Springer-Verlag. 2013. Vol. 26.
6. Герман О. Н., Тлюстангелов И. А. Симметрии двумерной цепной дроби // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, вып. 4, С. 53–68.

7. German O. N., Tlyustangelov I. A. Palindromes and periodic continued fractions // *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*. 2016. Vol. 6, №2–3. P. 354–373.
8. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел // Наука 1964.
9. Galois É. Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques // *Ann. Math. Pures Appl.* [Ann. Gergonne]. 1828. Vol. 19. P. 294–301.
10. Legendre A. M. Théorie des nombres. (3 ed.) // Firmin Didot Frères, Libraires, Paris. 1830.
11. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.) // B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 1954.
12. Kraitchik M. Théorie des nombres. Tome II // Analyse indéterminée du second degré et factorisation, Gauthier-Villars, Paris. 1926.
13. Тлюстангелов И. А. Собственные симметрии трехмерных цепных дробей // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 506, вып. 1, С. 73–82.
14. Тлюстангелов И. А. Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей // Матем. сб. 2022. Т. 213, вып. 9, С. 138–166.

REFERENCES

1. Klein, F. 1895, “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Nachr. Ges. Wiss.*, Gottingen, vol. 1895, no. 3, pp. 357–359.
2. Korkina, E. I. 1995, “Two-dimensional continued fractions. The simplest examples”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 209, pp. 124–144.
3. German, O. N. 2005, “Sails and norm minima of lattices”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 196, no. 3, pp. 31–60.
4. German, O. N. 2007, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 19, pp. 157–190.
5. Karpenkov, O. N. 2013, “Geometry of Continued Fractions”, *Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer-Verlag, vol. 26.
6. German, O. N., Tlyustangelov, I. A. 2021, “Symmetries of a two-dimensional continued fraction”, *Izv. Math*, vol. 85, no. 4, pp. 666–680.
7. German, O. N., Tlyustangelov, I. A. 2016, “Palindromes and periodic continued fractions”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, vol. 6, no. 2–3, pp. 233–252.
8. Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R. 1966, “Number theory”, *Pure Appl. Math.*, Academic Press, New York–London, vol. 20.
9. Galois, É. 1828, “Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques”, *Ann. Math. Pures Appl.* [Ann. Gergonne], vol. 19, pp. 294–301.
10. Legendre, A. M. 1830, “Théorie des nombres. (3 ed.)”, *Firmin Didot Frères, Libraires*, Paris.
11. Perron, O. 1954, “Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.)”, *B. G. Teubner Verlagsgesellschaft*, Stuttgart.

-
12. Kraitchik, M. 1926, “Théorie des nombres. Tome II”, *Analyse indéterminée du second degré et factorisation*, Gauthier-Villars, Paris.
 13. Tlyustangelov, I. A. 2022, “Proper symmetries of 3-dimensional continued fractions”, *Doklady Mathematics*, vol. 506, no. 1, pp. 73-82.
 14. Tlyustangelov, I. A. 2022, “Proper cyclic symmetries of multidimensional continued fractions”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 9, pp. 138-166.

Получено: 14.09.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-182-193

**О наилучшем полиномиальном приближении функций
в пространстве Харди $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$**

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет (Таджикистан, г. Душанбе).

e-mail: shabozov@mail.ru

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич — доктор физико-математических наук, доцент, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни (Таджикистан, г. Душанбе).

e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

Аннотация

В работе найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением аналитических в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, $R \geq 1$ функций и усредненным модулем непрерывности угловых граничных значений производных m -го порядка. Для класса $W_{q,R}^{(m)}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, у которых производные m -го порядка $f^{(m)}$ принадлежат пространству Харди $H_{q,R}$ и удовлетворяют условию $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1$, вычислены точные значения верхних граней наилучших приближений. Кроме того, для класса $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$, состоящих из всех функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, для которых при любом $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k > m$ усредненные модули непрерывности граничных значений производной m -го порядка $f^{(m)}$, мажорируемые в системе точек $\{\pi/k\}_{k \in \mathbb{N}}$ заданной функцией Φ , удовлетворяют условию

$$\int_0^{\pi/k} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt \leq \Phi(\pi/k),$$

вычислены точные значения колмогоровских и бернштейновских n -поперечников в норме пространства H_q ($1 \leq q \leq \infty$).

Полученные результаты обобщают некоторые результаты Л.В.Тайкова на классах аналитических функций в круге радиуса $R \geq 1$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, пространство Харди, модуль непрерывности, мажорирующая функция, n -поперечники.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов. О наилучшем полиномиальном приближении функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 182–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-182-193

**On the best polynomial approximation of functions
in the Hardy space $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$**

M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tajik National University (Tajikistan, Dushanbe).

e-mail: shabozov@mail.ru

Yusupov Gulzorkhon Amirshoevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Tajik State S.Aini Pedagogical University (Tajikistan, Dushanbe).

e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

Abstract

Exact inequalities are found between the best polynomial approximation of functions analytics in the disk $U_R := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, $R \geq 1$ and the averaged modulus of continuity angular boundary values of the m th order derivatives. For the class $W_{q,R}^{(m)}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) of functions $f \in H_{q,R}^{(m)}$ whose m -order derivatives $f^{(m)}$ belong to the Hardy space $H_{q,R}$ and satisfy the condition $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1$, the exact values of the upper bounds of the best approximations are calculated. Moreover, for the class $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$, consisting of all functions $f \in H_{q,R}^{(m)}$, for which any $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k > m$ the averaged moduli of continuity of the boundary values of the m th order derivative $f^{(m)}$, dominated in the system of points $\{\pi/k\}_{k \in \mathbb{N}}$ by the given function Φ , satisfy the condition

$$\int_0^{\pi/k} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt \leq \Phi(\pi/k),$$

the exact values of the Kolmogorov and Bernstein n -widths are calculated in the norm of the space H_q ($1 \leq q \leq \infty$).

The results obtained generalize some results of L.V.Taikov on classes of analytic functions in a circle of radius $R \geq 1$.

Keywords: the best approximation, Hardy space, modulus of continuity, majorizing function, n -widths.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, 2023, "On the best polynomial approximation of functions in the Hardy space $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 182–193.

1. Введение

Вычислению точных значений различных n -поперечников классов аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах посвящено достаточно много работ (см, например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]). Следует отметить, что

первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n -поперечников в пространстве Харди H_q ($1 \leq q \leq \infty$), принадлежат В.М.Тихомирову [1] ($q = \infty$) и Л.В.Тайкову [2] ($1 \leq q < \infty$). Ранее в работе К.И.Бабенко [3] был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге, пригодный для оценок поперечников сверху и использованный в [1] и [2], а также во многих других работах. В дальнейшем эта тематика развивалась как в работах Л.В.Тайкова [4, 5, 6], так и, например, в работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Целью данной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений колмогоровских и бернштейновских n -поперечников классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geq 1$.

Введем нужные нам для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ — множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при $0 < \rho < R$ положим

$$M_q(f, \rho) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\rho e^{it})|, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

Норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, где

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup} \{|f(Re^{it})| : 0 \leq t < 2\pi\}, & q = \infty. \end{cases} \quad (1)$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1$, $H_q = H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n . Равенством

$$E_{n-1}(f)_{q,R} := \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{q,R} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

определим наилучшее приближение функций $f \in H_{q,R}$ элементами множества $\mathcal{P}_{n-1}$ в пространстве $H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$).

Производную m -го порядка функций $f \in A(U_R)$ определим как обычно

$$f^{(m)}(z) := d^m f(z)/dz^m = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} z^{k-m}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{k,m} := k(k-1) \dots (k-m+1), \quad k \geq m, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,0} = 1, \quad \alpha_{k,1} = k.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $R \geq 1$ при любом $1 \leq q \leq +\infty$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}, \quad (3)$$

и знак равенства в (3) достигается для функции $f_0(z) = z^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, рассмотрим только те функции $f \in A(U_R)$, у которых m -я производная $f^{(m)} \in H_{q,R}$. Пусть $P_{n-m-1}(f^{(m)}, z)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{(m)}$ в метрике $H_{q,R}$.

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R} = \left\| f^{(m)}(z) - P_{n-m-1}(f^{(m)}, z) \right\|_{q,R}.$$

Угловые граничные значения

$$Q(z) := Q(f^{(m)}, z) = f^{(m)}(z) - P_{n-m-1}(f^{(m)}, z), \quad |z| \leq R$$

будем обозначать через $Q(Re^{it})$. Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$, повторив схему рассуждений работы [2], легко доказать равенство

$$\begin{aligned} f(z) - P_{n-1}(z) &= \\ &= \frac{z^m}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-m} Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,m}} + 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,m}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $P_{n-1}(z) := P_{n-1}(f, z)$ — некоторый полином из $\mathcal{P}_{n-1}$, линейно зависящий от функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$. Полагая в (1) $z = e^{it}$, $\zeta = Re^{i\theta}$, запишем его в виде

$$\begin{aligned} f(e^{it}) - P_{n-1}(e^{it}) &= \\ &= \frac{e^{imt}}{2\pi R^{n-m}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)(t-\theta)} Q(Re^{i\theta}) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(t-\theta)}{R^k \alpha_{n+k,m}} \right\} d\theta = \\ &= \frac{e^{imt}}{2\pi R^{n-m}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\tau} Q(Re^{i(t-\tau)}) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\tau}{R^k \alpha_{n+k,m}} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что числовая последовательность $\left\{ \frac{1}{R^k \alpha_{n+k,m}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ является выпуклой вниз и её общий член стремится к нулю (см., например, [12, гл. VIII, с.252-253]). Но тогда в силу теоремы 1.5 [20, с.294] функция

$$\Phi_R(\tau) := \frac{1}{\alpha_{n,m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\tau}{R^k \alpha_{n+k,m}}$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, причём

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_R(t) dt = \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \quad (6)$$

Из (5) сразу следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_q &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - P_{n-1}(e^{it})|^q dt \right\}^{1/q} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{imt}}{2\pi R^{n-m}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\tau} Q(Re^{i(t-\tau)}) \Phi_R(\tau) d\tau \right|^q dt \right\}^{1/q}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского к правой части неравенства (7), с учётом (6), имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_q &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi R^{n-m}} \int_0^{2\pi} |Q(Re^{i(t-\tau)})| \cdot |\Phi_R(\tau)| d\tau \right)^q dt \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \frac{1}{R^{n-m}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_R(\tau)| d\tau \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q} = \\ &= \frac{1}{R^{n-m} \cdot \alpha_{n,m}} \|Q(R \cdot)\|_q = \frac{1}{R^{n-m} \alpha_{n,m}} \|Q\|_{q,R}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $\|Q\|_{q,R} = E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}$, то из (8) окончательно получаем

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}} E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}$$

и неравенство (3) доказано. Для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R}$ простые вычисления дают

$$E_{n-m-1}(f_0^{(m)})_{q,R} = R^{n-m} \alpha_{n,m}, \quad E_{n-1}(f_0)_q = 1,$$

пользуясь которыми имеем

$$\frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}} E_{n-m-1}(f_0^{(m)})_{q,R} = 1 = E_{n-1}(f_0)_q,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(m)}} \frac{E_{n-1}(f)_q}{E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}} = \frac{1}{R^{n-m} \alpha_{n,m}}.$$

Через $W^{(m)}H_{q,R}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $W^{(0)}H_{q,R} \equiv H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) обозначим множество функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, у которых $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n > m$ при любых $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(W^{(m)}H_{q,R}) = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(m)}H_{q,R} \right\} = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любых функций $f \in W^{(m)}H_{q,R}$ величина наилучшего приближения производной $f^{(m)}$

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R} \leq \|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1,$$

то из неравенства (3) сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (9)

$$E_{n-1}(W^{(m)}H_{q,R}) \leq \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \quad (10)$$

С другой стороны, например, для функции

$$g(z) = \frac{z^n}{R^{n-m}\alpha_{n,m}}, \quad n > m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

имеем

$$g^{(m)}(z) = \frac{z^{n-m}}{R^{n-m}}, \quad \|g^{(m)}\|_{q,R} = 1,$$

т.е. функция $g \in W^{(m)}H_{q,R}$, и так как

$$E_{n-1}(g)_q = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}},$$

то запишем оценку снизу указанной величины

$$E_{n-1}(W^{(m)}H_{q,R}) \geq E_{n-1}(g)_q = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}. \quad (11)$$

Требуемое равенство (9) является следствием сопоставления неравенств (10) и (11). Теорема 2 доказана.

2. Основной результат

Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ модуль непрерывности первого порядка производной $f^{(m)}$ определим равенством

$$\omega(f^{(m)}, t)_{q,R} := \sup_{|h| \leq t} \|f^{(m)}(Re^{i(\tau+h)}) - f^{(m)}(Re^{i\tau})\|_q.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n > m$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$. Тогда для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \int_0^{\pi/(n-m)} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt, \quad (12)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R}^{(m)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 работы [6] следует, что для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-m-1}(f)_{q,R} \leq \frac{n-m}{4\alpha_{n,m}} \int_0^{\pi/(n-m)} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt. \quad (13)$$

Полагая в (13) $m = 0$, $f^{(0)} = f$ и учитывая, что $\alpha_{n,0} = 1$, имеем

$$E_{n-1}(f)_{q,R} \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f, t)_{q,R} dt.$$

Заменив в полученном неравенстве число n на $n - m$ и функцию f на производную $f^{(m)}$, запишем

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R} \leq \frac{n-m}{4} \int_0^{\pi/(n-m)} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt. \quad (14)$$

Учитывая неравенство (14), из (3) окончательно получаем

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \int_0^{\pi/(n-m)} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt,$$

и неравенство (12) доказано. Точность неравенства (12) на функцию $f_0(z) = z^n$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 3 доказана.

3. Точные значения n -поперечников классов функций $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$

($m \in \mathbb{Z}_+$, $W_{q,R}^{(0)}(\Phi) \equiv W_{q,R}(\Phi)$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) в пространстве H_q

Прежде чем излагать другие результаты, напомним нужные нам далее необходимые понятия и определения. Пусть S — единичный шар в H_q ; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из H_q ; $\mathcal{L}_n \subset H_q$ — n -мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; H_q) = \sup \left\{ \sup \left\{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset H_q \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; H_q) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}_n \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}_n \subset H_q \right\}$$

называют соответственно *бернштейнтовым* и *колмогоровским n -поперечниками* множества $\mathfrak{M}$ в H_q . Указанные n -поперечники монотонны по n и связаны неравенством (см., напр., [21]):

$$b_n(\mathfrak{M}, H_q) \leq d_n(\mathfrak{M}, H_q). \quad (15)$$

Пусть функция $\Phi(u)$ определена, неотрицательна, выпукла вниз на отрезке $[0, \pi]$, $\lim_{u \rightarrow 0+} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$ и для любых $\lambda \in [0, 1]$ и $t \in (0, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \leq \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \leq \frac{\lambda}{\pi/2 - (\pi/2 - 1)\lambda}. \quad (16)$$

Класс $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ состоит из всех функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, для которых при любых $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k > m$ выполняется условие

$$\int_0^{\pi/k} \omega(f^{(m)}, t)_{q,R} dt \leq \Phi(\pi/k).$$

Отметим, что в работе [22] показано, что среди всех функций $\Phi(t) := t^{1+\alpha}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, только одна функция со значением $\alpha = \pi/2 - 1$ удовлетворяет ограничению (16).

Сформулируем наш основной результат в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $R \geq 1, 1 \leq q \leq \infty, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (16). Тогда справедливы равенства

$$b_n(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q) = d_n(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q) = \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению класса $W_{q,R}^{(m)}H_{q,R}$, из неравенства (12) имеем

$$\begin{aligned} d_n(W_{q,R}^{(m)}(\Phi); H_q) &\leq \sup \left\{ E_{n-1}(f)_q : f \in W_{q,R}^{(m)}H_{q,R} \right\} \leq \\ &\leq \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

и оценка сверху колмогоровского n -поперечника в пространстве H_q получена.

Докажем оценку снизу бернштейновского n -поперечника, записанного в левой части неравенства (15). Для этого воспользуемся подпространством $\mathcal{P}_n$ алгебраических полиномов степени не выше n . Известно (см. [12, гл. VIII, §2]), что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ выполнено неравенство

$$\|p_n^{(m)}\|_{q,R} \leq R^{n-m}\alpha_{n,m}\|p_n\|_q, \quad (19)$$

где $n \geq m, m \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$. Рассмотрим следующий шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_q \leq \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \right\}.$$

Обозначим

$$\delta_n(x) := \begin{cases} 2 \sin \frac{nx}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi/n, \\ 2, & \text{если } x > \pi/n. \end{cases}$$

Из неравенства

$$\|p_n(ze^{ix}) - p_n(z)\|_{q,R} \leq \delta_n(x) \cdot \|p_n\|_{q,R},$$

которое следует из одного результата работы [5], для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ с учетом (19) имеем

$$\omega(p_n^{(m)}, x)_{q,R} \leq \delta_{n-m}(x) \|p_n^{(m)}\|_{q,R} \leq \delta_{n-m}(x) R^{n-m} \alpha_{n,m} \|p_n\|_{q,R}, \quad x \geq 0. \quad (20)$$

Покажем теперь, что шар $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$. Для этого рассмотрим два случая: $k \geq n-m$ и $k < n-m$. Пусть, сначала, $k \geq n-m$. Тогда для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$, в силу (20) можно записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/k} \omega(p_n^{(m)}, t)_{q,R} dt &\leq R^{n-m} \alpha_{n,m} \|p_n\|_q \int_0^{\pi/k} \delta_{n-m}(t) dt \leq \\ &\leq \left\{ 4R^{n-m} \alpha_{n,m} (n-m)^{-1} \right\} \left\{ 1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{n-m}{k} \right\} \|p_n\|_q \leq \\ &\leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n-m}{k} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

В правой части (18), полагая

$$t = \frac{\pi}{n-m}, \quad \lambda = \frac{n-m}{k}, \quad \lambda t = \frac{\pi}{k}$$

и учитывая левую часть неравенства (16), получаем

$$\int_0^{\pi/k} \omega(p_n^{(m)}, t)_{q,R} dt \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \Phi(t) \leq \Phi(\lambda t) = \Phi\left(\frac{\pi}{k}\right). \quad (22)$$

Пусть теперь $k < n - m$. Снова воспользовавшись неравенством (20) для любого $p_n \in S_{n+1}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/k} \omega(p_n^{(m)}, t)_{q,R} dt &\leq R^{n-m} \alpha_{n,m} \|p_n\|_q \int_0^{\pi/k} \delta_{n-m}(t) dt \leq \\ &\leq \frac{n-m}{4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \left\{ \int_0^{\pi/(n-m)} \left(2 \sin \frac{(n-m)t}{2}\right) dt + \int_{\pi/(n-m)}^{\pi/k} 2 dt \right\} = \\ &= \frac{n-m}{4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \left\{ \frac{4}{n-m} + 2 \left(\frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{n-m} \right) \right\} = \\ &= \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{n-m}{k} - 1 \right) \right\} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \end{aligned}$$

Если положить теперь $\pi(n-m)^{-1} = \lambda t$, $\frac{k}{n-m} = \lambda$, $\pi k^{-1} = t$, то опять, согласно правой части условия (16), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/k} \omega(p_n^{(m)}, t)_{q,R} dt &\leq \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{n-m}{k} - 1 \right) \right\} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) = \\ &= \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right\} \Phi(\lambda t) \leq \Phi(t) = \Phi(\pi/k). \end{aligned} \quad (23)$$

Включение шара $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ следует из неравенств (22) и (23). Но тогда, согласно определению бернштейновского n -поперечника, запишем

$$b_n(W_{q,R}^{(m)}(\Phi), H_q) \geq b_n(S_{n+1}, H_q) = \frac{n-m}{4R^{n-m} \alpha_{n,m}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \quad (24)$$

Сопоставив неравенств (3) и (24), получим требуемые равенства (17), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

4. Заключение

В пространстве Харди найдено точное неравенство между наилучшим приближением $E_{n-1}(f)_q$ аналитических в единичном круге функций $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$) и наилучшим приближением $E_{n-m-1}(f^{(m)})_{q,R}$ производной m -го порядка $f^{(m)} \in H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) аналитических в круге радиуса $R \geq 1$. Вычислены значения бернштейновского и колмогоровского n -поперечников некоторых классов функций, задаваемых усреднённым значением модулей непрерывности первого порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.
2. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.
3. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.
4. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.
5. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.
6. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. № 2. С. 77–85.
7. Двейрин М.З. Поперечники и ϵ -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. Т. 23. С. 32–46.
8. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Наукова думка. Киев. 1983. С. 63–73.
9. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 197–198.
10. Farkov Yu.A. n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // Journal of complexity. 1996. Vol. 12. № 1. PP. 58–79.
11. Fisher S.D., Stessin M.I. The n -width of the unit ball of H^q // Journal of Approx. Theory. 1991. Vol. 67. № 3. PP. 347–356.
12. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.
13. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I // Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42. № 7. С. 873–881.
14. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II // Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42. № 8. С. 1019–1026.
15. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 5. С. 665–669.
16. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журнал. 2004. Т. 56. № 9. С. 1155–1171.
17. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 796–800.

18. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т.382. № 6. С.747–749.
19. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сборник. 2010. Т.201. № 8. С.3–22.
20. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т.1. 615 с.
21. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М. Изд-во МГУ. 1976. 325 с.
22. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. 1977. Т.22. № 4. С.535–542.

REFERENCES

1. Tikhomirov V.M. 1960, “Widths of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 15, no 3, pp. 81–120.
2. Taikov L.V. 1967, “On the best average approximation of some classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 1, no 2, pp. 155–162.
3. Babenko K.I. 1958, “On the best approximations of a class of analytic functions”, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.*, vol. 22, no 5, pp. 631–640.
4. Taikov L.V. 1977, “Widths of some classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 22, no 2, pp. 285–295.
5. Ainullov N., Taikov L.V. 1986, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, vol. 40, no 3, pp. 699–705.
6. Taikov L.V. 1976, “Some exact inequalities in the theory of approximation of functions”, *Analysis Mathematica.*, no 2, pp. 77–85.
7. Dveyrin M.Z. 1975, “Widths and ε -entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function theory, functional analysis and their applications*, no 23, pp. 32–46.
8. Dveyrin M.Z., Chebanenko I.V. 1983, “On polynomial approximation in the weighted Banach spaces of analytic functions”, *Mapping theory and approximation of functions*. Kiev: Nukova dumka, pp. 62–73.
9. Farkov Yu.A. 1990, “Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in $\mathbb{C}^n$ ”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, no 5(275), pp. 197–198.
10. Farkov Yu.A. 1996, “ n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions”, *Journal of complexity.*, vol. 12, no 1, pp. 58–79.
11. Fisher S.D., Stessin M.I. 1991, “The n -width of the unit ball of H^q ”, *Journal of Approx. Theory.*, vol. 67, no 3, pp. 347–356.
12. Pinkus A. 1985, “ n -Widths in Approximation Theory”, Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 252 p.
13. Vakarchuk S.B. 1990, “On the widths of certain classes of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukr. Matem. Journal*, vol. 42, no 7, pp. 873–881.

14. Vakarchuk S.B. 1990, "On the widths of certain classes of functions analytic in the unit disc. II", *Ukr. Matem. Journal*, vol. 42, no 8, pp. 1019–1026.
15. Vakarchuk S.B. 2002, "Exact values of the widths of classes of functions analytic in the circle and the best linear methods of approximation", *Math. Notes*, vol. 72, no 5, pp. 665–669.
16. Vakarchuk S.B. 2004, "On some extremal problems in the theory of approximations in the complex plane", *Ukr. Matem. Journal*, vol. 56, no 9, pp. 1155–1171.
17. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh. 2000, "Widths of some classes of analytic functions in the Hardy space H_2 ", *Math. Notes*, vol. 68, no 5, pp. 796–800.
18. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. 2002, "Best approximation and values of widths of some classes of analytic functions", *Dokl. RAN*, vol. 383, no 2, pp. 171–174.
19. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh. "2010, "The widths of classes of analytic functions in a disc", *Mat. Sbornik*, vol. 201, no 8, pp. 3–22.
20. Sigmund A. 1965, "Trigonometric series", *Moscow: Mir*, vol. 1, 615 p.
21. Tikhomirov V. M. 1976, "Some problems of theory of approximation", *Moscow: MSU*, 304 p.
22. Taikov L.V. 1977, "Best approximations of differentiable functions in the metric of the space L_2 ", *Math. Notes*, vol. 22, no 4, pp. 535–542.

Получено: 23.11.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.956

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-194-202

Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре для одного класса многомерных гиперболических уравнений

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич — доктор физико-математических наук, профессор, ГНС, Институт математики и математического моделирования МОН РК (Казахстан, г. Алматы).
e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация

Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений хорошо изучены, а их многомерные аналоги, насколько известно автору, исследованы мало. Это связано с тем, что в случае трех и более независимых переменных возникают трудности принципиального характера, так как весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений, применяемый для двумерных задач, здесь не может быть использован из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Теория многомерных сферических функций, напротив, достаточно и полно изучена. Эти функции имеют важное приложение в математической и теоретической физике, и в теории многомерных сингулярных уравнений. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных гиперболических уравнений рассматривается спектральная задача Пуанкаре. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: многомерное гиперболическое уравнение, спектральная задача Пуанкаре, цилиндрическая область, разрешимость, критерия.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

С. А. Алдашев. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 194–202.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.956

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-194-202

A criterion for the unique solvability of the spectral Poincare problem for a class of multidimensional hyperbolic equations

S. A. Aldashev

Aldashev Serik Aimurzaevich — doctor of physics and mathematics, professor, MSW, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK (Kazakhstan, Almaty).

e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract

Two-dimensional spectral problems for hyperbolic equations are well studied, and their multidimensional analogs, as far as the author knows, have been little studied. This is due to the fact that in the case of three or more independent variables there are difficulties of a fundamental nature, since the very attractive and convenient method of singular integral equations used for two-dimensional problems cannot be used here due to the absence of any complete theory of multidimensional singular integral equations. The theory of multidimensional spherical functions, on the contrary, has been adequately and fully studied. These functions have an important application in mathematical and theoretical physics, and in the theory of multidimensional singular equations. In the cylindrical domain of Euclidean space for a class of multidimensional hyperbolic equations, the Poincaré spectral problem is considered. The solution is sought as an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems are proved. The conditions for the unique solvability of the problem, which significantly depend on the height of the cylinder, are obtained.

Keywords: multidimensional hyperbolic equation, Poincaré spectral problem, cylindrical domain, solvability, criteria.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

S. A. Aldashev, 2023, “A criterion for the unique solvability of the spectral Poincaré problem for a class of multidimensional hyperbolic equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 194–202.

1. Постановка задачи и результат.

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач [1, 2].

Пусть Ω_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α , обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области Ω_α рассмотрим многомерные гиперболические уравнения со спектральным действительным параметром γ

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = \gamma u, \quad (1)$$

$$L^*v \equiv \Delta_x v - u_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - bv + dv = \gamma v, \quad (1^*)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$, а $d(x, t) = c - \sum_{i=1}^m a_i x_i - b_t$.

В качестве многомерной спектральной задачи Пуанкаре рассмотрим следующую задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α из класса $C^1(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\alpha} = 0, \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad u_t|_{S_0} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$ — пространства Соболева.

Имеет место [(3)]

ЛЕММА 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

ЛЕММА 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, $\tilde{d}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , обозначим коэффициенты ряда (3), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $d(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega}_\alpha)$, $b(r, \theta, 0) = 0$, $\forall (r, \theta) \in S_0$, $l \geq m+1$, $i = 1, \dots, m$.

Тогда справедлива

Теорема 1. 1) Если $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$, то задача 1 имеет только нулевое решение; 2) При $\gamma > -\mu_{s,n}^2$, задача 1 имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\cos \alpha \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Отметим, что при $a_i(x, t) = b(x, t) = c(x, t) = 0$, $i = 1, \dots, m$ эта теорема получена в [4].

2. Разрешимость задачи 1.

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t)u_{x_i} + b(r, \theta, t)u_t + c(r, \theta, t)u = \gamma u, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}_n^k$ получим ([5, 6])

$$\begin{aligned} \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 - \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \\ + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k \} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = \gamma \rho_1^k \bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \\ n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \right. \\ \left. + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k - \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1 , а уравнение (10) - от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ — решение системы (8) - (10), то оно является и решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$, получим

$$L u_n^k \equiv \bar{u}_{nrr}^k - u_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} u_n^k = \gamma u_n^k + f_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$u_n^k(r, \alpha) = 0, \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad u_{nt}^k(r, 0) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t).$$

Решение задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (15)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (13), (14), с учетом (16), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (17)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (18)$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (19)$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad T_{st}(0) = 0. \quad (20)$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является ([7])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1, \quad (21)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде ([7])

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} \sqrt{|\mu|} t + c_{2s} \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|} t + \frac{\operatorname{ch} \sqrt{|\mu|} t}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|} \xi d\xi - \\ - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{|\mu|} t}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^t a_{ns}^k \operatorname{ch} \xi \sqrt{|\mu|} \xi d\xi, \quad \mu < 0, \\ c_{1s} + c_{2s} t - \int_0^t a_{ns}^k(\xi) (t - \xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{1s} \cos \sqrt{\mu} t + c_{2s} \sin \sqrt{\mu} t + \frac{\cos \sqrt{\mu} t}{\sqrt{\mu}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin \sqrt{\mu} \xi d\xi - \\ - \frac{\sin \sqrt{\mu} t}{\sqrt{\mu}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos \sqrt{\mu} \xi d\xi, \quad \mu > 0, \end{cases} \quad (22)$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив которого условию (20) будем иметь

$$0 = \begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} \alpha \sqrt{|\mu|} + \frac{\operatorname{ch} \alpha \sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|} \xi d\xi - \frac{\operatorname{sh} \alpha \sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \sqrt{|\mu|} \xi d\xi, \quad \mu < 0, \\ c_{1s} - \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) (\alpha - \xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{1s} \cos \alpha \sqrt{\mu} + \frac{\cos \alpha \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \sin \sqrt{\mu} \xi d\xi - \frac{\sin \alpha \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \cos \sqrt{\mu} \xi d\xi, \quad \mu > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя (21) в (16) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r). \quad (24)$$

Ряд (24)- разложения в ряд Фурье-Бесселя ([8]),если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (25)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21), (22), (23) найдем решение задачи (13), (14)

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (26)$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (25).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $u_n^k(r, t)$ из (26), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области Ω_{α} , имеет место

$$\int_H \rho(\theta) (L - \gamma) u dH = 0. \quad (27)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r) \rho(\theta) T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ — плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_{\alpha})$ ([9]).

Отсюда и из (27), следует, что

$$\int_{\Omega_{\alpha}} f(r, \theta, t) (L - \gamma) u d\Omega_{\alpha} = 0$$

и

$$Lu = \gamma u, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_{\alpha}.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (28)$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется из (22).

Из (4), (23) следует, что $c_{1s} = 0$, при $\mu \leq 0$ и для $\mu > 0$ $c_{1s} = 0$, если выполняется условие (4). Следовательно, из (25), (22), (26) следует, что $T_{s,n}(t) = 0$ и $u_n^k(r, t) = a_{ns}^k(t) = 0$, $s = 1, 2, \dots$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Далее, из (28) в свою очередь получим $u = 0$ в Ω_{α} .

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение задачи 1 будем искать в виде (6), то приходим к краевой задаче (13), (14).

В силу (22), (23) ее решением является функция

$$u_n^k(r, t) = \sqrt{r} \left[\cos t \sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2} + \frac{\cos t \sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2}}{\sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2}} \int_0^t a_{nl}(\xi) \sin \xi \sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\sin t \sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2}}{\sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2}} \int_0^t a_{nl}(\xi) \cos \xi \sqrt{\gamma + \mu_{l,n}^2} d\xi \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r).$$

Следовательно, нетривиальные решения задачи 1 записываются в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta). \quad (29)$$

Учитывая формулу ([8]) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, а также оценки ([10, 3])

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (30)$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в [11], можно доказать, что если $p > \frac{3m}{2}$, то функция (29) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Разрешимость задачи 1 установлено.

3. Единственность решения задачи 1.

Сначала построим решение краевой задачи для уравнения 1* с данными

$$v|_{S_\alpha \cup \Gamma_\alpha} = 0, \quad v_t|_{S_0} = \nu(r, \theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

где $\bar{\nu}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0, 1]) \cap C^1((0, 1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0, 1))$ [9]. Решение задачи (1*), (31) будем искать в виде (6), где функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ удовлетворяют систему уравнений (8)-(10), где $\tilde{a}_{in}^k, a_{in}^k, \tilde{b}_n^k$ заменены на $-\tilde{a}_{in}^k, -a_{in}^k, -\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k, i = 1, \dots, m, k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$.

Далее, из краевого условия (31), в силу (6), получим

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{v}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)-(10) представимо в виде (11).

Далее, задача (11), (32), решается, аналогично, как решалась задача (13), (14) из п.2.

Таким образом, решение (1*), (31) в виде ряда (28) построено, которая в силу (30), как показано в [11], принадлежит классу $C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов L, L^* ([12])

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) - u_t \cos(N^\perp, t), \quad Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N^\perp, x_i) - b \cos(N^\perp, t),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$, по формуле Грина имеем

$$\int_{\Omega_\alpha} (vLu - uL^*v) d\Omega_\alpha = \int_{\partial\Omega_\alpha} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} M + uvQ \right) \right] ds, \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^m \cos(N^\perp, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos(N^\perp, t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad M^2 = \sum_{i=1}^m \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t).$$

Из (33), принимая во внимание граничные условия (2) и условия (31) получим

$$\int_{S_0} \nu(r, \theta) u(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (34)$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\nu_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ ([9]), то из (34) получаем, что $u(r, \theta, 0) = 0$, $\forall (r, \theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x, t) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ для уравнения (1) ([12]) будем иметь $u(x, t) = 0$, $\forall (x, t) \in \Omega_\alpha$.

Таким образом, единственность решения задачи 1 показана.

Теорема 1 доказана полностью.

В заключении отметим, что при $\gamma = 0$ теорема 1 согласуется с результатами работ [11, 13, 14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа, М.: Изд. АН СССР, 1959 - 164с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука, 2006 - 287 с.
3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.
4. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения // Материалы I Международной конференции молодых ученых ("Матем. моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики"), Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011-с.35-39.
5. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994 - 170с.
6. Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения, 1998, т.34, №1 - с.64-68.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965 - 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974 - 295 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 - 543 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966 - 724с.
11. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Журнал "Вычислительной и прикладной математик КНУ им. Т.Шевченко, Киев, 2013, № 4(14)-с.68-76.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.4, г.2, М.: Наука, 1981-550с.
13. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения // Современная математика и ее приложения. Уравнения с частными производными, 2010, т.67-с. 28-32.

14. Aldashev S.A. The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher - dimensional wave equation // *Journal of Mathematical sciences*, 2011, vol.173, № 2-p.150-154.

REFERENCES

1. Bitsadze A. V., 1959, "Equations of mixed type" // *Academy of Sciences USSR*, M.: Pub. 164 p.
2. Nakhushev A. M., 2006, "Tasks with an offset for an equation in private derivatives" // *Moscow: Science* 287 p.
3. Mikhlin S. G., 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations" *Moscow: Fizmatgiz*, 254 p.
4. Aldashev S. A., 2011, "Criterion for unique solvability the Poincar? spectral problem in a cylindrical domain for of the multidimensional wave equation" // *Proceedings of the I International Conference of Mol. Scientists* ("Mat. Simulation of fractal processes, related problems of analysis and informatics"), Nalchik: Scientific Research Institute PMA KBNC RAS, pp.35–39.
5. Aldashev S. A., 1994, "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations" // *Almaty: Gylym*, 170 p.
6. Aldashev S. A., 1998, "On Darboux problems for one class multidimensional hyperbolic equations" // *Differ. the equations*, Vol. 34, № 1 - pp. 64–68.
7. Kamke E., 1965, *Handbook of ordinary differential equations*, M.: Science, 703 p.
8. Bateman G., Erdei A., 1974, *Higher Transcendental Functions*, V. 2, M.: Science, 295 p.
9. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., 1976, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, M.: Science, 543 p.
10. Tikhonov A. N., Samara A. A., 1966, *Equations mathematical physics*, M.: Science, 724 p.
11. Aldashev S. A., 2013, "The correctness of the Poincare problem in cylindrical domain for many -dimensional hyperbolic equations with the wave operator" // *Journal "Computational and Applied Mathematician"*, KNU. T. Shevchenko, Kiev, № . 4 (14), pp.68–76.
12. Smirnov V. I., 1981, *The course of higher mathematics*, Vol.4, r.2, M.: Science, 550 p.
13. Aldashev S. A., 2010, "The correctness of the Poincar problem in cylindrical domain for a multi-dimensional wave equation" // *Modern mathematics and its applications. Equations with quotients Derivatives*, Vol.67, pp. 28–32.
14. Aldashev S. A., 2011, "The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher - dimensional wave equation" // *Journal of Mathematical sciences*, Vol.173, № 2, pp. 150–154.

Получено: 23.12.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 512

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-203-212

Когомологии де Рама алгебры полиномиальных функций
на симплициальном комплексе¹

И. С. Басков

Басков Игорь Сергеевич — Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: baskovigor@pdmi.ras.ru

Аннотация

Мы рассматриваем алгебру $A^0(X)$ полиномиальных функций на симплициальном комплексе X , которая является компонентой степени 0 введенной Сулливаном dg-алгебры $A^\bullet(X)$ полиномиальных форм. Все рассматриваемые алгебры над произвольным полем k характеристики 0.

Нашей целью является вычисление когомологий де Рама алгебры $A^0(X)$, то есть когомологий универсальной dg-алгебры $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$. Имеется канонический морфизм dg-алгебр $P : \Omega_{A^0(X)}^\bullet \rightarrow A^\bullet(X)$. Мы доказываем, что морфизм P является квазиизоморфизмом. Таким образом, когомологии де Рама алгебры $A^0(X)$ канонически изоморфны когомологиям симплициального комплекса X с коэффициентами в поле k . Более того, для $k = \mathbb{Q}$, dg-алгебра $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$ служит моделью симплициального комплекса X в смысле рациональной теории гомотопий. Наш результат показывает, что для алгебры $A^0(X)$ верно утверждение теоремы сравнения Гротендика (доказанной им для гладких алгебр).

Для доказательства мы рассматриваем резольвенты Чеха, ассоциированные с покрытием симплициального комплекса звездами вершин.

Ранее Кан — Миллер доказали, что морфизм P сюръективен, а также описали его ядро. Другое описание ядра дали Сулливан и Феликс — Джессап — Паран.

Ключевые слова: когомологии де Рама алгебры, универсальная dg-алгебра, алгебра полиномиальных функций, dg-алгебра полиномиальных форм, рациональная теория гомотопий.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

И. С. Басков. Когомологии де Рама алгебры полиномиальных функций на симплициальном комплексе // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 203–212.

¹ Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение NN 075-15-2019-1620 от 08.11.2019 и 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 512

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-203-212

The de Rham cohomology of the algebra of polynomial functions on a simplicial complex

I. S. Baskov

Baskov Igor Sergeevich — Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: baskovigor@pdmi.ras.ru

Abstract

We consider the algebra $A^0(X)$ of polynomial functions on a simplicial complex X . The algebra $A^0(X)$ is the 0th component of Sullivan's dg-algebra $A^\bullet(X)$ of polynomial forms on X . All algebras are over an arbitrary field k of characteristic 0.

Our main interest lies in computing the de Rham cohomology of the algebra $A^0(X)$, that is, the cohomology of the universal dg-algebra $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$. There is a canonical morphism of dg-algebras $P : \Omega_{A^0(X)}^\bullet \rightarrow A^\bullet(X)$. We prove that P is a quasi-isomorphism. Therefore, the de Rham cohomology of the algebra $A^0(X)$ is canonically isomorphic to the cohomology of the simplicial complex X with coefficients in k . Moreover, for $k = \mathbb{Q}$ the dg-algebra $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$ is a model of the simplicial complex X in the sense of rational homotopy theory. Our result shows that for the algebra $A^0(X)$ the statement of Grothendieck's comparison theorem holds (proved by him for smooth algebras).

In order to prove the statement we consider Čech resolution associated to the cover of the simplicial complex by the stars of the vertices.

Earlier, Kan–Miller proved that the morphism P is surjective and gave a description of its kernel. Another description of the kernel was given by Sullivan and Félix–Jessup–Parent.

Keywords: algebraic de Rham cohomology, universal dg-algebra, algebra of polynomial functions, dg-algebra of polynomial forms, rational homotopy theory.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

I. S. Baskov, 2023 “The de Rham cohomology of the algebra of polynomial functions on a simplicial complex”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 203–212.

1. Introduction

All algebras and dg-algebras are commutative over a field k of characteristic 0. In [15, Section 7] Sullivan introduces the dg-algebra $A^\bullet(X)$ of *polynomial forms* on a simplicial complex X . The algebra $A^0(X)$ of the degree zero elements of $A^\bullet(X)$ is the algebra of *polynomial functions* on X . The cohomology of the dg-algebra $A^\bullet(X)$ is isomorphic to $H^\bullet(X, k)$. One can ask what natural dg-algebras are weakly equivalent to $A^\bullet(X)$. One such candidate is the universal dg-algebra $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$ on the algebra $A^0(X)$ of polynomial functions on X . There is a canonical morphism of dg-algebras $P : \Omega_{A^0(X)}^\bullet \rightarrow A^\bullet(X)$.

The main result is Theorem 1, where we prove that P is a quasi-isomorphism.

In [12] the authors prove that the morphism P is surjective and give a description of its kernel. In [7] and [14, Appendix G(i)] another description of the kernel is given. In [8, Example 3.8], Gómez

establishes that the morphism P is *not* a quasi-isomorphism, which contradicts our main result, Theorem 1. We were able to correct the erroneous computation of Gómez in Remark 4.

Grothendieck proved that for a smooth $\mathbb{C}$ -algebra A the cohomology groups of the algebraic de Rham complex $\Omega_A^\bullet$ are isomorphic to the cohomology groups of the space $\text{Spec } A$ with complex analytic topology, see [10, Theorem 1]. The algebra $A^0(X)$ is not smooth in general and the result of Grothendieck does not hold for general algebras, see [1, Example 4.4].

The result of this paper can be used in order to give another proof of the similar result for the algebra of piecewise polynomial functions on a polyhedron, which is known due to [2, Theorem 51].

Acknowledgement

I would like to thank Dr. Semën Podkorytov for his immense help, fruitful discussions and the idea to consider Čech resolution in order to prove the result. I am grateful to the St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences for their financial assistance.

2. Simplicial complexes

DEFINITION 1. We call a set X of finite non-empty subsets of a finite set E a *simplicial complex* if for every $v \in E$ we have $\{v\} \in X$ and for every $s \in X$ and every non-empty subset $s' \subset s$ we have $s' \in X$. We denote by $V(X)$ the set E and call its elements *vertices* of X . The sets $s \in X$ of cardinality $m + 1$ are called *m -simplices*. A *simplicial complex* Y is a *subcomplex* of X if for every $s \in Y$ we have $s \in X$.

We denote by $T_p(X)$ the set of all sequences $u = (u_0, \dots, u_p)$ of vertices of X for $p \geq -1$. We denote by $\partial_i u$ the sequence $(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p)$. For a vertex v we denote by $v * u$ the sequence $(v, u_0, \dots, u_p)$. The symmetric group Σ_{p+1} acts on $T_p(X)$.

Consider a sequence of vertices $u \in T_p(X)$. We denote by $\text{St}u$ the *star* of u , that is the smallest subcomplex of X containing all the simplices containing the vertices u_i . If $p = -1$, we have $\text{St}u = X$. If the sequence u spans a simplex in X , then $\text{St}u$ is the star of this simplex. If $p \geq 0$ and the sequence u does not span a simplex, we have $\text{St}u = \emptyset$. For a subcomplex Y of X we denote by $\text{St}_Y u$ the smallest subcomplex of Y containing all the simplices containing the vertices u_i . If $u \notin T_p(Y)$ then $\text{St}_Y u = \emptyset$.

3. Sullivan's dg-algebra of polynomial forms

For a simplicial complex X we define the dg-algebra $A^\bullet(X)$ following Sullivan, see [15, Section 7], [5], [11], [9]. For an m -simplex a consider the dg-algebra

$$A^\bullet(a) := \frac{\Lambda(t_v, dt_v \mid \deg(t_v) = 0, \deg(dt_v) = 1, v \in a)}{(\sum_{v \in a} t_v - 1, \sum_{v \in a} dt_v)}$$

with the differential $t_v \mapsto dt_v$ for $v \in a$.

For a simplex b such that $b \subset a$ one has a natural morphism of dg-algebras

$$|_b : A^\bullet(a) \rightarrow A^\bullet(b), \quad t_v \mapsto \begin{cases} 0, & v \notin b, \\ t_v, & v \in b. \end{cases}$$

Then an element $\omega = (\omega_a)_{a \in X}$ of $A^\bullet(X)$ is a collection of elements $\omega_a \in A^\bullet(a)$ such that for two simplices $b \subset a$ one has $\omega_a|_b = \omega_b$.

We call the algebra $A^0(X)$ the *algebra of polynomial functions* on X . This algebra has another description as a quotient of a Stanley-Reisner algebra, see [3].

An inclusion of simplicial complexes $Y \subset X$ gives rise to the restriction morphism of dg-algebras

$$|_Y : A^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(Y).$$

LEMMA 1. *The above restriction morphism is surjective.*

PROOF. This fact is quite nontrivial, see [15, Section 7].

□

We introduce the double graded vector space $\mathcal{D}^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ as follows. For $p \leq -2$ set $\mathcal{D}^{p,q} = 0$ and for $p \geq -1$, we define $\mathcal{D}^{p,q}$ as the subspace of

$$\prod_{u \in T_p(X)} A^q(\text{St}u)$$

consisting of families of forms $\omega_u \in A^q(\text{St}u)$, such that for any $\sigma \in \Sigma_{p+1}$ we have

$$\omega_{\sigma u} = (\text{sgn } \sigma) \omega_u.$$

We define the linear map

$$\delta : \mathcal{D}^{p,q} \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q}.$$

For $p \geq -1$ and for

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{D}^{p,q}$$

we set the value of $\delta\omega$ on $s \in T_{p+1}(X)$ as

$$(\delta\omega)_s = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i s} |_{\text{St} s}.$$

The differential d on $A^\bullet(\text{St}u)$ gives rise to a differential d on $\mathcal{D}^{p,\bullet}$ for each p .

PROPOSITION 1. *The map δ is a differential on $\mathcal{D}^{\bullet,q}$ for each $q \in \mathbb{Z}$. Moreover, the double graded vector space $\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}$ together with δ and d forms a double complex in the sense that $d\delta = \delta d$.*

PROPOSITION 2. *The complex*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{-1,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{0,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{1,q} \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & & & \\ & & A^q(X) & & & & \end{array}$$

is exact.

PROOF. The proof is similar to that of Proposition 4 below and relies on Lemma 1. In this case one can use the partition of unity t_v , $v \in V(X)$, instead of ρ_v , $v \in V(X)$. □

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & \Omega_A^\bullet \\
 & \searrow f & \downarrow F \\
 & & E^\bullet
 \end{array}$$

4. The dg-algebra of de Rham forms

To a k -algebra A one associates the commutative dg-algebra $\Omega_A^\bullet$ ([13, Theorem 3.2]) with $\Omega_A^0 = A$. It has the following universal property: for any dg-algebra $E^\bullet$ and any algebra homomorphism $f : A \rightarrow E^0$ there exists a unique morphism of dg-algebras $F : \Omega_A^\bullet \rightarrow E^\bullet$ such that $F|_A = f$:

The elements of Ω_A^q are called algebraic q -forms. The dg-algebra $\Omega_A^\bullet$ is covariant in the algebra A . We will simply write $\Omega^\bullet(X)$ for the dg-algebra $\Omega_{A^0(X)}^\bullet$.

Inclusion of simplicial complexes $Y \subset X$ gives rise to the restriction morphism of dg-algebras

$$|_Y : \Omega^\bullet(X) \rightarrow \Omega^\bullet(Y).$$

LEMMA 2. Suppose A and B are k -algebras and $\varphi : A \rightarrow B$ is a surjective homomorphism of algebras. Then the induced morphism $\Omega_\varphi : \Omega_A^\bullet \rightarrow \Omega_B^\bullet$ is surjective and its kernel is the ideal of $\Omega_A^\bullet$ generated by $\text{Ker } \varphi$ and $d(\text{Ker } \varphi)$.

From this and Lemma 1 it follows that for an inclusion of simplicial complexes $Y \subset X$ the restriction morphism $|_Y : \Omega^\bullet(X) \rightarrow \Omega^\bullet(Y)$ is surjective.

PROOF. See [2, Lemma 6]. $\square$

Let us introduce the following elements t_v of $A^0(X)$. For a vertex $v \in V(X)$ and an m -simplex $a \in X$ set $(t_v)_a = 0$ if $v \notin a$ and $(t_v)_a = t_v \in A^0(a)$ if $v \in a$.

LEMMA 3. Take a simplicial complex X and a subcomplex $Y \subset X$. Suppose $\omega \in \Omega^q(Y)$ is such that $\omega|_{\text{St}_Y(v)} = 0$ for a vertex $v \in V(X)$. Then $t_v^2|_Y \omega = 0$.

PROOF. First, if $v \notin V(Y)$, then $t_v|_Y = 0$ and the claim follows.

Assume $v \in V(Y)$. By Lemma 1 and Lemma 2, the form ω lies in the dg-ideal I of $\Omega^\bullet(X)$ generated by the elements $m \in A^0(X)$ with the restriction to $\text{St}_Y(v)$ being zero, therefore $t_v|_Y m = 0$. It is enough to consider the cases $\omega = m$ and $\omega = dm$. We have $t_v^2|_Y m = 0$ and $t_v^2|_Y dm = t_v|_Y d(t_v|_Y m) - t_v|_Y m dt_v|_Y = 0$. $\square$

We introduce the double graded vector space $\mathcal{C}^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ as follows. For $p \leq -2$ set $\mathcal{C}^{p,q} = 0$ and for $p \geq -1$, we define $\mathcal{C}^{p,q}$ as the subspace of

$$\prod_{u \in T_p(X)} \Omega^q(\text{St}_u)$$

consisting of families of forms $\omega_u \in \Omega^q(\text{St}_u)$, such that for any $\sigma \in \Sigma_{p+1}$ we have

$$\omega_{\sigma u} = (\text{sgn } \sigma) \omega_u.$$

We define the linear map

$$\delta : \mathcal{C}^{p,q} \rightarrow \mathcal{C}^{p+1,q}.$$

For $p \geq -1$ and for

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{C}^{p,q}$$

we set the value of $\delta\omega$ on $s \in T_{p+1}(X)$ as

$$(\delta\omega)_s = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i s}|_{\text{St}_s}.$$

The differential d on $\Omega^\bullet(\text{St}u)$ gives rise to a differential d on $\mathcal{C}^{p,\bullet}$ for each p .

PROPOSITION 3. *The map δ is a differential on $\mathcal{C}^{\bullet,q}$ for each $q \in \mathbb{Z}$. Moreover, the double graded vector space $\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}$ together with δ and d forms a double complex in the sense that $d\delta = \delta d$.*

LEMMA 4. *There exist elements $p_v \in A^0(X)$, $v \in V(X)$, such that*

$$\sum_{v \in V(X)} p_v t_v^2 = 1.$$

PROOF. In $A^0(X)$ we have the equality

$$\sum_{v \in V(X)} t_v = 1.$$

Raise both the sides to a big enough power and obtain the needed equality. $\square$

We put $\rho_v = p_v t_v^2$.

For an inclusion of simplicial complexes $Y \subset X$ we choose a linear map, the distinguished “extension”,

$$[-] : \Omega^q(Y) \rightarrow \Omega^q(X),$$

such that $[\omega]|_Y = \omega$. Such an extension exists by Lemma 1 applied to $A^0(X)$ and Lemma 2.

LEMMA 5. *For an inclusion of simplicial complexes $Y \subset X$ and a form $\omega \in \Omega^q(Y)$ we have*

$$\sum_{v \in V(X)} \rho_v [\omega|_{\text{St}_Y(v)}]|_Y = \omega.$$

PROOF. As $\sum_v \rho_v = 1$ in $A^0(X)$ we have

$$\sum_{v \in V(X)} \rho_v [\omega|_{\text{St}_Y(v)}]|_Y - \omega = \sum_{v \in V(X)} \rho_v|_Y ([\omega|_{\text{St}_Y(v)}]|_Y - \omega).$$

We have

$$([\omega|_{\text{St}_Y(v)}]|_Y - \omega)|_{\text{St}_Y(v)} = \omega|_{\text{St}_Y(v)} - \omega|_{\text{St}_Y(v)} = 0.$$

Hence, by Lemma 3 we have $\rho_v|_Y ([\omega|_{\text{St}_Y(v)}]|_Y - \omega) = 0$. $\square$

PROPOSITION 4. *The complex*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{-1,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{0,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{1,q} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \Omega^q(X) & & & & \end{array}$$

is exact.

The proof follows the proof of [4, Proposition 8.5].

PROOF. First, notice that

$$\text{St}v * u = \text{St}_{\text{St}u}(v).$$

For $u \in T_p(X)$ and $\omega \in \Omega^q(\text{St}u)$ by Lemma 5 we have

$$\sum_{v \in V(X)} \rho_v [\omega|_{\text{St}v * u}]|_{\text{St}u} = \omega. \tag{1}$$

For $\omega \in \Omega^q(Z)$, where Z is a subcomplex of X such that $\text{Stv} * u \subset Z$, by Lemma 3, we have

$$\rho_v([\omega] - [\omega|_{\text{Stv}*u}])|_{\text{Stu}} = 0. \quad (2)$$

We construct a cochain homotopy

$$K : \mathcal{C}^{p,q} \rightarrow \mathcal{C}^{p-1,q}.$$

For $p \geq 0$ and $\omega \in \mathcal{C}^{p,q}$ and $w \in T_{p-1}(X)$ put

$$(K\omega)_w := \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_{v*w}]|_{\text{Stw}}.$$

By Lemma 3 this map does not depend on the choice of the distinguished extension.

Let us check that $\delta K + K\delta = 1$. For $p \geq -1$ and

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{C}^{p,q} \subset \prod_{u \in T_p(X)} \Omega^q(\text{Stu}),$$

where $\omega_u \in \Omega^q(\text{Stu})$, we have

$$(\delta K\omega)_u = \sum_{i=0}^p (-1)^i (K\omega)_{\partial_i u}|_{\text{Stu}} = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_{v*\partial_i u}]|_{\text{Stu}},$$

and

$$\begin{aligned} (K\delta\omega)_u &= \sum_{v \in V(X)} \rho_v[(\delta\omega)_{v*u}]|_{\text{Stu}} = \\ &= \sum_{v \in V(X)} \rho_v\left[\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i(v*u)}|_{\text{Stv}*u}\right]|_{\text{Stu}} = \\ &= \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_u|_{\text{Stv}*u}]|_{\text{Stu}} + \sum_{v \in V(X)} \rho_v\left[\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i(v*u)}|_{\text{Stv}*u}\right]|_{\text{Stu}} \stackrel{\text{by (1)}}{=} \\ &= \omega_u - \sum_{v \in V(X)} \rho_v\left[\sum_{i=0}^p (-1)^i \omega_{v*\partial_i u}|_{\text{Stv}*u}\right]|_{\text{Stu}} \\ &= \omega_u - \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_{v*\partial_i u}|_{\text{Stv}*u}]|_{\text{Stu}}. \end{aligned}$$

Hence,

$$((\delta K + K\delta)\omega)_u = \omega_u + \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v([\omega_{v*\partial_i u}] - [\omega_{v*\partial_i u}|_{\text{Stv}*u}])|_{\text{Stu}} \stackrel{\text{by (2)}}{=} \omega_u.$$

□

5. The morphism $P : \Omega^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X)$

For a simplicial complex X , by the universal property of $\Omega^\bullet(X)$, there is a canonical morphism dg-algebras

$$P : \Omega^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X),$$

which is the identity in degree 0.

We denote by $k[0]$ the complex with the 0th term k and the others zero. An element of k gives rise to a constant function in $A^0(X)$, hence, there are morphisms of complexes $\epsilon : k[0] \rightarrow \Omega^\bullet(X)$ and $\bar{\epsilon} : k[0] \rightarrow A^\bullet(X)$ such that $\bar{\epsilon} = P \circ \epsilon$.

PROPOSITION 5. *For a sequence $u \in T_p(X)$, $p \geq 0$, the commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} k[0] & \xrightarrow{\epsilon} & \Omega^\bullet(\text{St } u) \\ & \searrow \bar{\epsilon} & \downarrow P \\ & & A^\bullet(\text{St } u) \end{array}$$

consists of quasi-isomorphisms.

PROOF. The map ϵ is a quasi-isomorphism by [2, Corollary 47]. The map $\bar{\epsilon}$ is a quasi-isomorphism by [6, Theorem 10.9]. Hence, the morphism P is a quasi-isomorphism. $\square$

THEOREM 1. *The natural map*

$$P : \Omega^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X)$$

is a quasi-isomorphism.

PROOF. The morphism P on stars gives rise to the maps $\pi_p : \mathcal{C}^{p,\bullet} \rightarrow \mathcal{D}^{p,\bullet}$ for each $p \geq 0$. We have the following commutative diagram of non-negative complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^\bullet(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{0,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{1,\bullet} \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \downarrow P & & \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 \\ 0 & \longrightarrow & A^\bullet(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{0,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{1,\bullet} \xrightarrow{\delta} \dots \end{array}$$

The vertical arrows π_p , $p \geq 0$ are quasi-isomorphisms by Proposition 5. The first row is exact by Proposition 4. The second row is exact by Proposition 2.

Hence, the map P is also a quasi-isomorphism. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *As was said in the introduction, the paper [8] suggests that Theorem 1 is false. Namely, in [8, Example 3.8], one considers the simplicial complex X corresponding to the boundary of a triangle on the vertices 1, 2, 3. The dg-algebra $\Omega^\bullet(X)$ is generated by the elements t_1, t_2, t_3 modulo the dg-ideal generated by $t_1 + t_2 + t_3 - 1$ and $t_1 t_2 t_3$. Next, the author considers the form $t_1^2 t_2^2 dt_3$ and claims that this form is not zero. However, this form is zero, which can be seen as follows: applying the differential d to the equality $t_1 t_2 t_3 = 0$ we get*

$$t_2 t_3 dt_1 + t_1 t_3 dt_2 + t_1 t_2 dt_3 = 0.$$

Next, we multiply this equality by $t_1 t_2$ and get

$$0 = t_1^2 t_2^2 dt_1 + t_1^2 t_2 t_3 dt_2 + t_1^2 t_2^2 dt_3 = t_1^2 t_2^2 dt_3.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arapura, Donu and Kang, Su-Jeong, Kähler–de Rham cohomology and Chern classes // *Communications in Algebra* 2011. Vol. 39, № 4. P. 1153-1167.
2. Baskov, I., The de Rham cohomology of soft function algebras // preprint 2022, <https://arxiv.org/abs/2208.11431>.
3. Billera, Louis J., The algebra of continuous piecewise polynomials // *Advances in Mathematics* 1989. Vol. 76, № 2. P. 170-183.
4. Bott, Raoul and Tu, Loring W., *Differential forms in algebraic topology* // Springer 1982.
5. Bousfield, Aldridge Knight and Gugenheim, Victor K.A.M., On PL De Rham theory and rational homotopy type // *Memoirs American Mathematical Soc.* 1976. Vol. 179.
6. Félix, Yves and Halperin, Stephen and Thomas, Jean-Claude, *Rational homotopy theory* // Springer 2012.
7. Félix, Yves and Jessup, Barry and Parent, Paul-Eugène, The combinatorial model for the Sullivan functor on simplicial sets // *Journal of Pure and Applied Algebra* 2009. Vol. 213, № 2. P. 231-240.
8. Gómez, Francisco, Simplicial types and polynomial algebras // *Archivum Mathematicum* 2002. Vol. 38, № 1. P. 27-36.
9. Griffiths, Phillip and Morgan, John, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* // Birkhäuser 1981.
10. Grothendieck, Alexander, On the de Rham cohomology of algebraic varieties // *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 1966. Vol. 29, № 1. P. 95-103.
11. Hess, Kathryn, *Rational Homotopy Theory* // *Interactions between Homotopy Theory and Algebra: Summer School on Interactions Between Homotopy Theory and Algebra*, University of Chicago, July 26-August 6, 2004, Chicago, Illinois. – 2007. – P. 175-202.
12. Kan, Daniel M. and Miller, Edward Y., Sullivan’s de Rham complex is definable in terms of its 0-forms // *Proceedings of the American Mathematical Society* 1976. Vol. 57, № 2. P. 337–339.
13. Kunz, Ernst, *Kähler differentials* // 1986, Friedr. Vieweg & Sohn.
14. Sullivan, Dennis, *Differential forms and the topology of manifolds* // *Manifolds Tokyo* 1973. P. 37-49.
15. Sullivan, Dennis, Infinitesimal computations in topology // *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 1977. Vol. 47, P. 269–331.

REFERENCES

1. Arapura, Donu and Kang, Su-Jeong, 2011, “Kähler–de Rham cohomology and Chern classes” // *Communications in Algebra*. Vol. 39, № 4. pp. 1153–1167.
2. Baskov, I., 2022, “The de Rham cohomology of soft function algebras” // preprint, <https://arxiv.org/abs/2208.11431>.

3. Billera, Louis J., 1989, “The algebra of continuous piecewise polynomials” // *Advances in Mathematics*. Vol. 76, № 2. pp. 170–183.
4. Bott, Raoul and Tu, Loring W., 1982, “Differential forms in algebraic topology” // *Springer*.
5. Bousfield, Aldridge Knight and Gugenheim, Victor K.A.M., 1976, “On PL De Rham theory and rational homotopy type” // *Memoirs American Mathematical Soc.* Vol. 179.
6. Félix, Yves and Halperin, Stephen and Thomas, Jean-Claude, 2012, “Rational homotopy theory” // *Springer*.
7. Félix, Yves and Jessup, Barry and Parent, Paul-Eugène, 2009, “The combinatorial model for the Sullivan functor on simplicial sets” // *Journal of Pure and Applied Algebra*. Vol. 213, № 2. pp. 231–240.
8. Gómez, Francisco, 2002, “Simplicial types and polynomial algebras” // *Archivum Mathematicum*. Vol. 38, № 1. pp. 27–36.
9. Griffiths, Phillip and Morgan, John, 1981, “Rational Homotopy Theory and Differential Forms” // *Birkhäuser*.
10. Grothendieck, Alexander, 1966, “On the de Rham cohomology of algebraic varieties” // *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. Vol. 29, № 1. pp. 95–103.
11. Hess, Kathryn, 2007, “Rational Homotopy Theory” // *Interactions between Homotopy Theory and Algebra: Summer School on Interactions Between Homotopy Theory and Algebra, University of Chicago*, July 26-August 6, 2004, Chicago, Illinois. – pp. 175–202.
12. Kan, Daniel M. and Miller, Edward Y., 1976, “Sullivan’s de Rham complex is definable in terms of its 0-forms” // *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 57, № 2. pp. 337–339.
13. Kunz, Ernst, 1986, “Kähler differentials” // Friedr. Vieweg & Sohn.
14. Sullivan, Dennis, 1973, “Differential forms and the topology of manifolds” // *Manifolds Tokyo*. pp. 37–49.
15. Sullivan, Dennis, 1977, “Infinitesimal computations in topology” // *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. Vol. 47, pp. 269–331.

Получено: 20.01.2023

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-213-218

О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина¹

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Российская таможенная академия (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

*e-mail: vnbezu@rambler.ru***Аннотация**

В работе решена проблема вхождения в группе Артина с древесной структурой.

Ключевые слова: группы Артина, проблема равенства слов, проблема сопряженности слов, проблема вхождения.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 213–218.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-213-218

**On the solvability of the occurrence problem
in a certain class of Artin groups**

V.N. Bezverkhniy, N. B. Bezverkhnyaya

Bezverkhniy Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Russian Customs Academy (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Bezverkhnyaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 19-41-710002 p-a

Abstract

The paper solves the problem of entering into the Artin group with a woody structure.

Keywords: Artin groups.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

V.N. Bezverkhniy, N. B. Bezverkhnyaya, 2023, "On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 213–218.

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп являются проблемы равенства и сопряженности слов, неразрешимость которых в классе конечноопределенных групп была доказана П.С. Новиковым [1].

Поэтому возникла задача изучения основных проблем теории групп в определенных классах групп. При решении этих проблем возникают более общие проблемы, одной из которых является проблема вхождения.

Впервые проблему вхождения рассмотрел и доказал ее разрешимость в классе свободных групп Нильсен. [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой ее конечноопределенной подгруппы H , $H < G$, и любого элемента g , $g \in G$, установить принадлежит ли g подгруппе H .

Очевидно, что из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует разрешимость проблемы равенства слов, а из неразрешимости проблемы равенства слов следует неразрешимость проблемы вхождения.

Целью данной статьи является рассмотрение разрешимости проблемы вхождения в группах Артина.

Группа Артина имеет следующее копредставление:

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}; i \neq j; i, j \in \overline{1, n} \rangle \quad (1)$$

где m_{ij} - элементы симметрической матрицы Кокстера M , $m_{ij} \in M$, $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}}$ - слово длины m_{ij} состоящее из чередующихся букв σ_i, σ_j : $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots$

Каждой конечноопределенной группе Артина G можно поставить в соответствие конечный граф Γ , между вершинами v_i которого и множеством образующих группы σ_i ; $i, j \in \overline{1, n}$ установлено взаимно-однозначное соответствие, то есть каждой вершине v_i графа Γ соответствует образующий σ_i группы G . Причем, если вершины v_i, v_j соединены ребром, то данному ребру соответствует число Кокстера m_{ij} , если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре (v_i, v_j) соответствует ∞ .

Построенный граф называется графом Кокстера группы Артина G , имеющей копредставление (1).

Каждой группе Артина соответствует группа Кокстера, имеющая копредставление:

$$\overline{G} = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \sigma_i^2; i \neq j; i, j \in \overline{1, n} \rangle \quad (2)$$

Если группа $\overline{G}$ конечна, то группа G называется группой Артина конечного типа.

Заметим, что группы Артина конечного типа содержат группы кос.

В классе групп Артина конечного типа в [10] и [11] была доказана неразрешимость проблемы вхождения.

Представляет интерес определить класс групп Артина, в котором разрешима проблема вхождения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Группа G называется группой Артина с древесной структурой, если граф Γ , соответствующий G , есть дерево-граф. [5].*

Отметим, что в группах Артина с древесной структурой элементы матрицы Кокстера m_{ij} принимают значения: $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$.

ТЕОРЕМА 1. [6]. *В группе Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

ТЕОРЕМА 2. *В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

При доказательстве используются следующие понятия:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 группы G выписать образующие пересечения этих подгрупп.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 группы G и произвольного слова $w \in G$, установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Из определения группы Артина с древесной структурой следует, что данная группа является древесным произведением двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам, порожденных образующими объединяемых групп.

Основным понятием при решении проблемы вхождения в данном классе групп, является понятие специального множества, определенного в [12] и [14] для свободных конструкций групп и являющееся аналогом нильсеновского множества в свободных группах.

ТЕОРЕМА 3. [12]. *Пусть группа*

$$G = \left\langle \prod_{i=1}^n *G_i; ; relG_1, relG_2, \dots, relG_n, \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2 \right\rangle \quad (3)$$

является древесным произведением групп $G_s, s = \overline{1, n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ с помощью конструктивного изоморфизма $\varphi_{ij} : \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}$, где $i \in I_1, j \in I_2, |I_1| < \infty, |I_2| < \infty$. Тогда если объединяемые подгруппы $U_{ij}, U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2$, обладают свойством максимальности, и в сомножителях G_i разрешимы:

1. *Проблема вхождения;*
2. *Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой U_{ij} ;*
3. *Проблема пересечения класса смежности любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с объединяемой подгруппой U_{ij} ;*

то в группе разрешима проблема вхождения.

ТЕОРЕМА 4. *В любой двупорожденной группе Артина*

$$G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle \quad (4)$$

где $m_{ab} \in \{2, 3, \dots, n, \dots, \infty\}$ разрешимы:

1. Проблема вхождения;
2. Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$;
3. Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$.

При доказательстве данной теоремы 2 и 4, используются следующие утверждения:

ЛЕММА 1. [4], [10]. Группа Артина (4) при $m_{ab} = 2k + 1$ изоморфна группе

$$\langle x, y; ; x^{2k+1} = y^2 \rangle \quad (5)$$

Доказательство теоремы вхождения в группе с копредставлением (5) следует

ТЕОРЕМА 5. [14]. В группе $G = F_m *_C F_n$, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп F_m, F_n , с циклическим объединением, алгоритмически разрешима проблема вхождения.

ЛЕММА 2. [4], [10]. Группа Артина $G_{ab} = \langle a, b; ; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$ при $m_{ab} = 2k$ изоморфна группе

$$\langle x, t; ; t^{-1}x^k t = t^k \rangle \quad (6)$$

Разрешимость проблемы вхождения в группе (6) непосредственно следует из

ТЕОРЕМА 6. [13]. Пусть группа

$$G^* = \langle G, t; ; \text{rel } G, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1) \rangle \quad (7)$$

есть HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} группы G и конструктивного изоморфизма $\varphi : \varphi(U_1) = U_{-1}$; причем U_1, U_{-1} обладают свойством максимальнойности. Тогда если в группе G разрешимы:

1. Проблема вхождения;
2. Проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$;
3. Проблема пересечения смежного класса любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$.

тогда в G^* разрешима проблема вхождения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. // Труды МИАН СССР, 1955, 44. С.1-144.
2. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. 1983, Vd 72, p. 201-220.
3. Appel K. One Artin groups and Coxeter groups of large type/Contemp. Math. 1984, V.33, P.50-78.

4. Безверхний. В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 26-61.
5. Безверхний. В. Н. О группах Артина и Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Тезисы V международ. конф. Тула, 2003, С. 33-34.
6. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1, С. 67-82.
7. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина. // Фундаментальная и прикладная математика 2019 г. Т. 22, № 4, С. 9-27.
8. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М. Мир, 1980.
9. Безверхний. В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. // Фундаментальная и прикладная математика 1999 г. Т. 5, Вып. 1, С. 1-38.
10. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. ТХХVI. № 5, 1985, С. 27-42.
11. Маканина Т. А. Проблема вхождения для групп кос $B(n+1)$ при $n+1 \geq 5$. //Мат. заметки, 1981. Т.29, № 1. С. 31-33.
12. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986. С. 3-21.
13. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN- групп. //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981. С. 20-62.
14. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. //Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, ТГПИ. 1972. С. 3-86.

REFERENCES

1. Novikov P. S., 1955, "On algorithmic unsolvability of the word identity problem in group theory". // *Proceedings of the MIAN USSR*, 44. pp. 1–144.
2. Appel K., Schupp P., 1983, "Artin groups and infinite Coxeter groups" // *Invent. Math.*, Vd 72, pp. 201–220.
3. Appel K., 1984, "One Artin groups and Coxeter groups of large type" // *Contemp. Math.*, V.33, pp. 50–78.
4. Bezverkhny. V. N., 1986, "Solution of the word conjugacy problem in Artin and Coxeter groups of large type" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Inter. universities. collection of scientific tr.* Tula, pp. 26–61.
5. Bezverkhny. V. N., 2003, "On Artin and Coxeter groups with a woody structure" // *Algebra and number theory. Theses V international. conf.* Tula, pp. 33–34.

6. Bezverkhny V. N., Karpova O. Yu., 2006, "The problem of equality and conjugacy of words in Artin groups with a tree structure" // *News of TulSU. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, Vol.12, Iss. 1, pp. 67–82.
7. Bezverkhny V. N., Bezverkhny N. B., 2019, Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups. // *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 22, No. 4, pp. 9–27.
8. Lyndon R., Shupp P., 1980, "Combinatorial theory of groups" // M. Mir.
9. Bezverkhny V.N., 1999, "Solution of the problem of generalized conjugacy of words in Artin groups of large type" // *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 5, Iss. 1, pp. 1–38.
10. Bezverkhny V.N., 1985, "The unsolvability of the problem of occurrence in Artin groups of finite type" // *Sib. Mat. zhur.* TXXVI. № 5, pp. 27–42.
11. Makanina T.A., 1981, "The problem of occurrence for groups of braids $B(n+1)$ at $n+1 \geq 5$ " // *Math. notes*, Vol. 29, № 1. pp. 31–33.
12. Bezverkhny V.N., 1986 "Solution of the problem of occurrence in some classes of groups with one defining relation" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Intercollegiate collection of scientific papers*. Tula, pp. 3–21.
13. Bezverkhny V.N., 1981, "Solution of the problem of occurrence in the class of HNN-groups" // *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Intercollegiate collection of scientific papers*. Tula, pp. 20–62.
14. Bezverkhny V.N., 1972, "The solution of the problem of occurrence for one class of groups" // *Questions of the theory of groups and semigroups*. Tula, TSPI. pp. 3–86.

Получено: 15.04.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511,513,82

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-219-227

**Окрестность Вороного главной совершенной формы
от пяти переменных**

О. Х. Гуломов

Гуломов Отабек Худайбердиевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Узбекистан, г. Ташкент).

e-mail: otabek10@mail.ru

Аннотация

Вороной получил для совершенных форм три результата. Во-первых, он доказал, что форма, отвечающая плотнейшей упаковке, является совершенной. Во-вторых, он установил, что совершенных форм от данного числа переменных конечное число. И самое главное, в-третьих, Вороной предложил метод нахождения всех совершенных форм. Этот метод опирается на так называемый совершенный полиэдр, весьма сложный многомерный многогранник, введенный Вороным. В принципе, найдя методом Вороного все совершенные формы, можно вычислить плотности для конечного числа соответствующих упаковок и выделить те, которые отвечают максимальному значению. Классической задачи Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметические минимумы положительных квадратичных форм. Они появились и в работах С.Л.Соболева и Х.М. Шадиметова в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул. В настоящей работы предлагается усовершенствованные алгоритма Вороного для вычисления окрестности Вороного совершенной формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислена окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных.

Ключевые слова: плотнейшей упаковке, совершенных форм, алгоритм Вороного, многомерный многогранник.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

О. Х. Гуломов. Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 219–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511,513,82

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-219-227

The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables

O. Kh. Gulomov

Gulomov Otabek Hudaiberdievich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Uzbekistan, Tashkent).

e-mail: otabek10@mail.ru

Abstract

Voronoi obtained three results for perfect forms. First, he proved that the form corresponding to the closest packing is perfect. Secondly, he established that there are a finite number of perfect forms from a given number of variables. And most importantly, thirdly, Voronoi proposed a method for finding all perfect forms. This method relies on the so-called perfect polyhedron, a highly complex multidimensional polyhedron introduced by Voronoi. In principle, having found all perfect forms by the Voronoi method, one can calculate the densities for a finite number of corresponding packings and single out those that correspond to the maximum value. The classical Voronoi problem of finding perfect forms, closely related to Hermite's well-known problem of arithmetic minima of positive quadratic forms. They also appeared in the works of S.L. Sobolev and Kh.M. Shadimetov in connection with the construction of lattice optimal cubature formulas. In this paper, we propose an improved Voronoi algorithm for calculating the Voronoi neighborhood of a perfect form in many variables, and using this algorithm, the Voronoi neighborhood of the main perfect form in five variables is calculated.

Keywords: densest packing, perfect forms, Voronoi algorithm, multidimensional polyhedron.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

O. Kh. Gulomov, 2023, "The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 219–227.

1. Введение

Геометрический исследования, относящиеся к теории чисел и алгебре, естественно можно разделить на 1) теорию положительных квадратичных форм, 2) теорию неопределенных квадратичных форм и обобщений алгоритма непрерывных дробей и 3) геометрию теории Галуа.

Параллелоэдром называется выпуклый многогранник P , допускающий разбиение грань-в-грань $T(P)$ аффинного пространства своими транслятами (параллельными копиями). Термин параллелоэдр был введен в 1885 году российским кристаллографом Е. С. Федоровым. Параллелоэдры привлекли внимание таких замечательных математиков конца XIX начала XX века, как Г. Минковский и Г. Ф. Вороной, которые и считаются основоположниками теории параллелоэдров в математике.

В 1908 году Г. Ф. Вороной сформулировал гипотезу о том, что для всякого параллелоэдра можно указать такую евклидову метрику, в которой он будет ячейкой разбиения Вороного (эквивалентные термины: мозаики Вороного, разбиения Дирихле, разбиения Дирихле–Вороного) для некоторой решетки. Для параллелоэдров Вороного (параллелоэдров, являющихся областью Вороного для некоторой решетки) разработана глубокая теория. Фундамент этой теории заложил сам Вороной, разработавший метод непрерывного параметра алгоритм, позволяющий классифицировать все параллелоэдры Вороного данной размерности.

Теория параллелоэдров Вороного и тесно связанная с ней геометрия положительно определенных квадратичных форм изучались в работах Г. Ф. Вороного, Б. Н. Делоне, С. С. Рышкова, Е. П. Барановского, Р. Эрдала, С.Ш. Шухбаева, М. Дютура, А. Шюрманна, Ф. Валлентина и др.

Задача о наименее плотных решетчатых покрытиях состоит отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n , которая дает наименьшее значение плотности $\theta_n(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространстве E^n . Из однозначные соответствие между решеткой Γ_n и совершенной квадратичной формой, это проблемы сводиться к изучения главной совершенных форм. К настоящей работы вычисляется окрестности Вороного от пяти переменных с помощью усовершенствованные алгоритма Вороного.

Классической задачи Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметические минимумы положительных квадратичных форм. Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики [6–14]. Они появились и в работах С.Л.Соболева [15] в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул.

2. Проблема Эрмита. Предельные формы Коркина-Золотарева

Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

положительно-определенная квадратичная форма от n переменных, $n \geq 2$, с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, \dots, n)$, матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ и определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$. Форму f можно интерпретировать точкой $f = (a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{n-1n})$ в $N = \frac{n(n+1)}{2}$ - мерном евклидовом пространстве E^N . Множество всех положительно-определенная квадратичная форма в E^N образует конус положительности K^N .

Пусть f – положительно-определенная квадратичная форма вида (1). Точная нижняя граница

$$m = m(f) = \inf_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f(x) \quad (2)$$

взятая по всем целым точкам $x \neq 0$, называется арифметическим минимумом формы f . Эта точная нижняя граница достигается, ибо множество $f(x) \leq c$ ограничено для любого $c > 0$.

Пусть

$$\pm m_k = \pm(m_{1k}, \dots, m_{nk}) \quad (k = 1, \dots, s; \quad s = s(f)) \quad (3)$$

все представления минимума $m(f) = f(\pm m_1) = \dots = f(\pm m_s)$. Отсюда, в частности, следует, что $m(f) > 0$. Так как тело $f(x) = m(f)$ строго выпукло, то $1 \leq s \leq 2^n - 1$.

Ввиду того, что $m(\lambda f) = \lambda m(f)$, $\lambda > 0$, естественно рассматривать нормированный арифметический минимум

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}.$$

Теперь $\mu(\lambda f) = \mu(f)$. Арифметический минимум $m(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на конусе положительности K^N . Нормированный арифметический минимум $\mu(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на эквидискриминантной поверхности $\{f : d(f) = 1\} \subset K^N$, то есть на множестве положительно-определенная квадратичная форма определителя, равного 1.

Две положительно-определенная квадратичная форма $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными, $f_1 \sim f_2$), если существует целочисленная унимодулярная подстановка $x = yU$, переводящая форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$. В частности, в случае $f_1 = f_2 = f$ U называется целочисленным автоморфизмом формы f т.е. $fU = f$.

Говорят, что положительно-определенная квадратичная форма f – предельная (экстремальная) форма Коркина-Золотарева, если f есть точка локального максимума функции $\mu(f)$, то есть если существует такая окрестность $v_f \in \{f : d(f) = 1\}$ точки f , что $\mu(f') \leq \mu(f)$, если $f' \in v_f$.

Известно, что число различных классов предельных форм от n переменных конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных предельных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Эрмита – арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

3. Проблема Вороного отыскания совершенных форм.

Отметим одно важное свойство предельных форм: представления (3) арифметических минимума (2) предельной формы f определяют форму однозначно. На основе этого свойства Вороным создана теория совершенных форм.

Говорят, что положительно-определенная квадратичная форма f является совершенной формой Вороного, если системой линейных уравнений

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, \dots, s) \quad (4)$$

коэффициенты $a_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ формы f определяются однозначно. Из этого определения следует, что для того, чтобы форма f была совершенной, необходимо чтобы $s \geq N$.

Таким образом, из вышеупомянутого свойства предельной формы и определения совершенной формы следует, что всякая предельная форма является совершенной. Обратное не верно. Начиная с $n = 6$, существуют совершенные, но не предельные формы.

Известно, что число различных классов совершенных форм от n

переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных совершенных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Вороного – отыскание совершенных форм. Теперь ясно, что из постановок этих проблем (Эрмита, Вороного) следует, что проблема Эрмита содержится в проблеме Вороного, другими словами, проблема Эрмита сводится к проблеме Вороного.

4. Окрестность Вороного.

Согласно теории Вороного, каждой совершенной форме f вида (1) ставится в соответствие область $V^N(f) \subset \bar{K}^N$ – мерная бесконечная пирамида с конечным числом $N - 1$ – мерных граней и с вершиной в начале координат (совершенный гоноэдр) – совокупность всех

неотрицательных квадратичных форм, представимых в виде:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq k \leq s} \rho_k \lambda_k^2(x_1, \dots, x_n) \quad ,$$

где $\bar{K}^N$ - замыкание конуса K^N , $\rho_k \geq 0, \lambda_k = \lambda_k(x) = \lambda_k(x_1, \dots, x_n) = m_{1k}x_1 + \dots + m_{nk}x_n, k = 1, \dots, s$.

В пространстве E^N область $V^N(f)$ есть множество решений некоторой системы однородных неравенств с неизвестными a_{ij} :

$$\Psi_k(a_{ij}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} a_{ij} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, \sigma).$$

Тогда по алгоритму Вороного совершенные формы $f_k(x)$, смежные с совершенной формой f , строятся следующим образом:

$$f_k(x) = f(x) + r_k \Psi_k(x) \quad (k = 1, \dots, \sigma) \quad (5),$$

где

$$r_k = \min_{x \in Z^n | \{0\} : \Psi_k(x) < 0} \left\{ \frac{f(x) - m}{[-\Psi_k(x)]} \right\} \quad (6),$$

$$\Psi_k(x) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} x_i x_j \quad (7).$$

Выделив из совокупности $\{f, f_1, \dots, f_\sigma\}$ неэквивалентные относительно группы $G(n; Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1, \dots, x_n$), мы получаем окрестность Вороного $\{f, f_1, \dots, f_r\}$ совершенной формы f относительно $G(n; Z)$, или просто окрестность Вороного, которую обозначают $VN(f; G)$ или $VN(f)$.

Группа $Aut(\varphi_0^5)$ представляется в виде объединения смежных классов по симметрической группе 5- степени S_5 : $Aut(\varphi_0^5) = \bigcup_{i=0}^5 g_i S_5$, где g_i - матрица, получающаяся из единичной матрицы заменой ее i - строки на строку $(-1, -1, -1, -1, -1)$.

Основным результатом этой работе является следующее предложение.

ТЕОРЕМА. *Окрестность Вороного совершенной формы*

$$\varphi_0^5 = \varphi_0^5(x) = \varphi_0^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 +$$

$$+ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5.$$

состоит только из одной совершенной формы φ_1^5 , т.е. $VN(\varphi_0^5) = \{\varphi_1^5\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Арифметический минимум совершенной формы φ_0^5 равен 1. Представления минимума суть следующие:

$$(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1);$$

$$(1, -1, 0, 0, 0); (1, 0, -1, 0, 0); (1, 0, 0, -1, 0); (1, 0, 0, 0, -1); (0, 1, -1, 0, 0);$$

$$(0, 1, 0, -1, 0); (0, 1, 0, 0, -1); (0, 0, 1, -1, 0); (0, 0, 1, 0, -1); (0, 0, 0, 1, -1).$$

Область Вороного $V^{15}(\varphi_0^5)$ совершенной формы φ_0^5 состоит из совокупности квадратичных форм представимых в виде:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 5} a_{ij} x_i x_j = \rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2 + \rho_3 x_3^2 + \rho_4 x_4^2 + \rho_5 x_5^2 + \rho_6 (x_1 - x_2)^2 + \rho_7 (x_1 - x_3)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +\rho_8 (x_1 - x_4)^2 + \rho_9 (x_1 - x_5)^2 + \rho_{10} (x_2 - x_3)^2 + \rho_{11} (x_2 - x_4)^2 + \\
& +\rho_{12} (x_2 - x_5)^2 + \rho_{13} (x_3 - x_4)^2 + \rho_{14} (x_3 - x_5)^2 + \rho_{15} (x_4 - x_5)^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из равенства (5) приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $x_i x_j$ получаем следующую систему уравнений с неизвестными $\rho_1, \dots, \rho_{15}$:

$$\begin{aligned}
\rho_1 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8 + \rho_9 &= a_{11}, \\
\rho_2 + \rho_6 + \rho_{10} + \rho_{11} + \rho_{12} &= a_{22}, \\
\rho_3 + \rho_7 + \rho_{10} + \rho_{13} + \rho_{14} &= a_{33}, \\
\rho_4 + \rho_8 + \rho_{11} + \rho_{13} + \rho_{15} &= a_{44}, \\
\rho_5 + \rho_9 + \rho_{12} + \rho_{14} + \rho_{15} &= a_{55}, \\
\rho_6 &= -a_{12}, \\
\rho_7 &= -a_{13}, \\
\rho_8 &= -a_{14}, \\
\rho_9 &= -a_{15}, \\
\rho_{10} &= -a_{23}, \\
\rho_{11} &= -a_{24}, \\
\rho_{12} &= -a_{25}, \\
\rho_{13} &= -a_{34}, \\
\rho_{14} &= -a_{35}, \\
\rho_{15} &= -a_{45},
\end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) имеет единственное решение $s = N = 15$:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
\rho_2 &= a_{22} + a_{12} + a_{23} + a_{24} + a_{25}, \\
\rho_3 &= a_{33} + a_{13} + a_{23} + a_{34} + a_{35}, \\
\rho_4 &= a_{44} + a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{45}, \\
\rho_5 &= a_{55} + a_{15} + a_{25} + a_{35} + a_{45}, \\
\rho_6 &= -a_{12}, \\
\rho_7 &= -a_{13}, \\
\rho_8 &= -a_{14}, \\
\rho_9 &= -a_{15}, \\
\rho_{10} &= -a_{23}, \\
\rho_{11} &= -a_{24}, \\
\rho_{12} &= -a_{25}, \\
\rho_{13} &= -a_{34}, \\
\rho_{14} &= -a_{35},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\rho_{15} = -a_{45},$$

15 равенств в (10) полностью определяют все 14- мерные грани области $V^{15}(\varphi_0^5)$. Следовательно, здесь формы $\Psi_l(x)$ из равенства (7) будут иметь вид

$$\Psi_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5,$$

$$\Psi_2 = x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5,$$

$$\Psi_3 = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_3x_5,$$

$$\Psi_4 = x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_4x_5,$$

$$\Psi_5 = x_5^2 + x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_4x_5,$$

$$\Psi_6 = -x_1x_2,$$

$$\Psi_7 = -x_1x_3,$$

$$\Psi_8 = -x_1x_4,$$

$$\Psi_9 = -x_1x_5,$$

$$\Psi_{10} = -x_2x_3,$$

$$\Psi_{11} = -x_2x_4,$$

$$\Psi_{12} = -x_2x_5,$$

$$\Psi_{13} = -x_3x_4,$$

$$\Psi_{14} = -x_3x_5,$$

$$\Psi_{15} = -x_4x_5.$$

Используя группу $Aut(\varphi_0^5)$ непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$\Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \quad (x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_2; x_2 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_2; x_2 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_2;),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{11} \quad (x_3 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_3), \Psi_{10} \sim \Psi_{12} \quad (x_3 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_3),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{13} \quad (x_2 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_2), \Psi_{10} \sim \Psi_{14} \quad (x_2 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_2),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{15} \quad (x_2 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_3),$$

$$\Psi_{10} \sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}, \Psi_6 \sim \Psi_{10} \quad (x_1 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1).$$

Следовательно, $\Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \sim \Psi_{10} \sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}$. Далее $\Psi_1 \sim \Psi_2 \sim \Psi_3 \sim \Psi_4 \sim \Psi_5 \quad (x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1; x_1 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1;) (x_1 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_1)$.

Поэтому, достаточно рассмотреть $\Psi_1 = x_1(x_1 + \dots + x_5)$, $\Psi_6 = -x_1x_2$. Сравнивая Ψ_1 и Ψ_6 убеждаемся в том, что подстановка $x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow -x_1 - \dots - x_5, x_i \rightarrow x_i (i = 3, 4, 5)$ преобразует Ψ_6 в Ψ_1 , т.е. $\Psi_1 \sim \Psi_6$.

Таким образом, $\Psi_1 \sim \Psi_2 \sim \Psi_3 \sim \Psi_4 \sim \Psi_5 \sim \Psi_6 \sim \Psi_7 \sim \Psi_8 \sim \Psi_9 \sim \Psi_{10} \sim$

$\sim \Psi_{11} \sim \Psi_{12} \sim \Psi_{13} \sim \Psi_{14} \sim \Psi_{15}$. Следовательно, совершенной форма φ_0^5 имеет только одну смежную форму $f_6 = \varphi_0^5 + r_6(-x_1x_2)$, где

$r_6 = \min_{(x_1, \dots, x_5) \in Z^5 / \{0\}; x_1x_2 < 0} \frac{\varphi_0^5 - 1}{(-x_1x_2)}$ и этот min достигается в точке $x^0 = (1, -1, -1, 0, 0)$, т.е. $r_6 = \frac{\varphi_0^5(1, -1, -1, 0, 0) - 1}{1} = 2 - 1 = 1$. Отсюда имеем $f_6 = \varphi_0^5 - x_1x_2 = \varphi_1^5$, поэтому $VN(\varphi_0^5) = \{\varphi_1^5\}$. Теорема полностью доказана.

Результаты, приведенные известны из работ [1,2,3,4,5]. Здесь они получены другим путем, но с меньшим объемом вычислений.

5. Заключение

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.F. Voronoi. Some properties of positive quadratic forms. Own. cit., Vol. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev-1952, p. 171-238.
2. E.S. Barnes. The complete enumeration of perfect snare forms. Phil. Trans. Rog. Soc. London, A-249,-1957, pp. 461–506.
3. Gulomov O.Kh., Shodiev S.Yu. Calculation of perfect forms in four variables using the advanced Voronoi algorithm. Chebyshevskii sbornik, Math-Net.Ru. 2012.-№ 2-2, pp. 59–63.
4. Ryshkov S.S. Basic extremal problems of the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 1970.171 p.
5. Anzin M.M. The density of a lattice covering for $n = 11$ and $n = 14$, Uspekhi Mat. Nauk, 2002, Volume 57, Issue 2, 187–188
6. Gulomov O.Kh. Algorithms for constructing a perfect gonohedron based on the duality principle from the theory of linear inequalities. Uzbek mathematical journal. 2001. No. 2. p.31-36.
7. Gulomov O.Kh., Shodiev S.Yu. Calculation of perfect forms from four variables using the improved Voronoi algorithm. //Chebyshevskii sbornik, 2014.-№ 2-2,59-63 Math-Net.Ru
8. Gulomov O., Shodiyev S. About necessary and sufficient condition for strong stationarity of the positive quadratic form. In.Math. Forum, 2014.T9, № 6, pp. 267-272
9. Gulomov O., Shodiyev S. On an Algorithm for Finding Integer Points on Perfect Ellipsoids. AIP Conference Proceedings 2365, 050001(2021). 050001-1-050001-6.
10. Gulomov, O.Kh., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh., Turaev, F.Zh.
Quadratic forms related to the voronoi domain faces of the second perfect form in seven variables. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms [this link is disabled](#), 2021, 28, C. 15–23
11. J. Martinet. Perfect lattices in Euclidean spaces. Springer, 2003 MR1957723 (2003m:11099).
12. C. Soule. Perfect forms and the Vandiver conjecture. J. Reine Angew. Math. 517 (1999) 209-221. MR1728540 (2000d:11102).
13. Dutour Sikiric M., Vallentin F., Schürmann A. Classification of eight-dimensional perfect forms. Electronic Research Inducement's of the AMS. 2007. 13, pp. 21–32.
14. Dutour Sikiric M., Schürmann A., Vallentin F. Complexity and algorithms for computing Voronoi cells of lattices, Math. Comp. 2009. 78, pp. 1713–1731.
15. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Moscow: Nauka, 1974.808 p.

REFERENCES

1. G. F. Voronoi, 1952, “Some properties of positive quadratic forms” // Own. cit., Vol. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev, pp. 171–238.

2. E. S. Barnes, 1957, The complete enumeration of perfect snare forms. Phil. Trans. Rog. Soc. London, A-249, 1957, pp. 461–506.
3. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, 2012, “Calculation of perfect forms in four variables using the advanced Voronoi algorithm”. Chebyshevskii sbornik, Math-Net.Ru.-№ 2-2, p. 59–63.
4. S. S. Ryshkov, 1970, Basic extremal problems of the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 1970.171 p.
5. M. M. Anzin, 2002, “The density of a lattice covering for $n = 11$ and $n = 14$ ”, Uspekhi Mat. Nauk, Volume 57, Issue 2, pp. 187–188.
6. O. Kh. Gulomov, “Algorithms for constructing a perfect gonohedron based on the duality principle from the theory of linear inequalities”. Uzbek mathematical journal. 2001. No. 2. pp. 31–36.
7. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, “Calculation of perfect forms from four variables using the improved Voronoi algorithm” // Chebyshevskii sbornik, 2014.-№ 2-2, pp. 59–63 Math-Net.Ru.
8. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, “About necessary and sufficient condition for strong stationarity of the positive quadratic form” In.Math. Forum, 2014.T9, № 6, pp. 267–272.
9. O. Kh. Gulomov, S. Yu. Shodiev, “On an Algorithm for Finding Integer Points on Perfect Ellipsoids”. AIP Conference Proceedings 2365, 050001(2021). 050001-1-050001-6.
10. O. Kh. Gulomov, B. A.Khudayarov, K. Sh. Ruzmetov, F. Zh. Turaev, 2021, Quadratic forms related to the voronoi domain faces of the second perfect form in seven variables. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms this link is disabled, 28, pp. 15–23.
11. J. Martinet. Perfect lattices in Euclidean spaces. Springer, 2003, MR1957723 (2003m:11099).
12. C. Soule. Perfect forms and the Vandiver conjecture. J. Reine Angew. Math. 517 (1999) pp. 209–221. MR1728540 (200d:11102).
13. Dutour Sikiric M., Vallentin F., Schürmann A. Classification of eight-dimensional perfect forms. Electronic Research Inducement’s of the AMS. 2007. 13, pp. 21–32.
14. Dutour Sikiric M., Schürmann A., Vallentin F. Complexity and algorithms for computing Voronoi cells of lattices, Math. Comp. 2009. 78, pp. 1713–1731.
15. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Moscow: Nauka, 1974. 808 p.

Получено: 15.03.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 517.56

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-228-236

**О преобразованиях Бушмана — Эрдейи и Мелера — Фока,
связанных с группой $SO_0(3, 1)$**

И. А. Шилин

Шилин Илья Анатольевич — Национальный исследовательский университет «МЭИ»;
Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: ilyashilin@li.ru***Аннотация**

С помощью функционала, определенного на паре согласованных пространств представления связной подгруппы собственной группы Лоренца, вычислены формула преобразования Бушмана — Эрдейи функции, кратной функции Лежандра, и формула преобразования Мелера-Фока функции Лежандра обратного аргумента. Также выведено обобщение одной известной формулы для преобразования Мелера-Фока.

Ключевые слова: преобразование Бушмана — Эрдейи, преобразование Мелера-Фока, функция Лежандра.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

И. А. Шилин. О преобразованиях Бушмана — Эрдейи и Мелера — Фока, связанных с группой $SO_0(3, 1)$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 228–236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 517.56

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-228-236

**On Buschman–Erdelyi and Mehler–Fock transforms
related to the group $SO_0(3, 1)$**

I. A. Shilin

Shilin Ilya Anatol'evich — National Research University “MPEI”; Moscow Pedagogical State University (Moscow).

*e-mail: ilyashilin@li.ru***Abstract**

By using a functional defined on a pair of the assorted representation spaces of the connected subgroup of the proper Lorentz group, a formula for the Buschman–Erdelyi transform of the Legendre function (up to a factor) is derived. Also a formula for the Mehler–Fock transform of the Legendre function of an inverse argument is obtained. Moreover, a generalization of one known formula for the Mehler–Fock transform is derived.

Keywords: Buschman–Erdelyi transform, Mehler–Fock transform, Legendre function.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. A. Shilin, 2023, “On Buschman — Erdelyi and Mehler — Fock transforms, related to the group $SO_0(3, 1)$ ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 228–236.

1. Введение

В работе [13] с помощью функционала $\mathcal{B}$, определенного на паре пространств представления связной подгруппы собственной группы Лоренца, мы получили новые интегральные соотношения между функцией Макдональда и мультиндексным аналогом (гиперфункцией) бесселевой модифицированной функции первого рода $I_\mu(x)$. Полученные результаты можно понимать как значения введенных нами гиперпреобразований Ганкеля–Клиффорда (то есть преобразований, ядром которого является гиперфункция). В настоящем дополнении к работе [13] показано, как с частными значениями функционала $\mathcal{B}$ связаны преобразования Бушмана — Эрдейи и Мелера–Фока. В работе используются функции

$$f_{I_1}(x) = x_1^{\sigma-|q_1|} (x_3 + \mathbf{i} x_2 \operatorname{sign} q_1)^{|q_1|} C_{p_1-|q_1|}^{|q_1|+\frac{1}{2}} \left(\frac{x_4}{x_1} \right)$$

и

$$f_{(I_2, \pm)}(x) = (x_4)_{\pm}^{\sigma-|q_2|} (x_2^2 + x_3^2)^{-|q_2|/2} (x_3 + \mathbf{i} x_2)^{|q_2|} P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}^{-|q_2|} \left(\frac{x_1}{x_4} \right),$$

из которых состоят базисы $B_1 = \{f_{I_1} \mid I_1 = (p_1, q_1), q_2 \in \mathbb{Z}, p_1 > |q_1|\}$ и $B_2 = \{f_{(I_2, \pm)} \mid I_2 = (p_2, q_2) \in \mathbb{R}^2\}$ пространства представления, заданного в [13].

2. Значение функционала $\mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \operatorname{id})$

ТЕОРЕМА 1. При $\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \operatorname{id}) &= \frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1} \sqrt{\pi} \delta_{q_1, -q_2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1\right)}{\Gamma(p_1 - \sigma) \Gamma(1 + p_1 - |q_1|) \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right)} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma - \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times \\ &\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{|q_1|-p_1}{2}, \frac{1+|q_1|-p_1}{2}, \frac{1+\sigma-p_1}{2}, 1 - \frac{\sigma+p_1}{2} \\ \frac{1}{2} - p_1, \frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2}, \frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2} \end{matrix} \middle| 4 \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \operatorname{id}) &= F_2(f_{I_1}, f_{(I_2, +)}^*) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{i}(q_1+q_2)\beta} d\beta \times \\ &\times \int_0^{+\infty} P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}^{-|q_2|} (\cosh \alpha) C_{p_1-|q_1|}^{|q_1|+1/2} (\operatorname{sech} \alpha) \cosh^{\sigma-|q_1|} \alpha \sinh^{|q_1|+1} \alpha d\alpha = \\ &= 2\pi \delta_{q_1, -q_2} \int_1^{+\infty} t^{\sigma-|q_1|} (t^2 - 1)^{|q_1|/2} P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}^{-|q_1|}(t) C_{p_1-|q_1|}^{|q_1|+1/2}(t^{-1}) dt. \quad (1) \end{aligned}$$

Записывая $C_{p_1-|q_1|}^{|q_1|+1/2}(\operatorname{sech} \alpha)$ явно в виде многочлена по формуле [2, формула 123]

$$C_n^\nu(x) = [\Gamma(x)]^{-1} \sum_{j=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^j \Gamma(n + \nu - j)}{j! (n - 2j)!} (2x)^{n-2j},$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \text{id}) &= 2\pi \delta_{q_1, -q_2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right) \right]^{-1} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{E((p_1-|q_1|)/2)} \frac{(-1)^j \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1 - j\right)}{j! (p_1 - |q_1| - 2j)!} \int_1^{+\infty} t^{\sigma+2j-p_1} (t^2 - 1)^{|q_1|/2} P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}^{-|q_1|}(t) dt. \end{aligned}$$

Получившийся интеграл можно вычислить по формуле [3, 2.17.2.9]

$$\int_a^{+\infty} t^{\theta-1} (t^2 - a^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{2^{\mu-\theta-1} a^{\theta-\mu} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu-\theta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\theta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\theta)},$$

в которой $a > 0$, $\Re(\mu) < 1$, $\Re(\theta) < 1 + \Re(\mu + \nu)$ и $\Re(\theta) < \Re(\mu - \nu)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \text{id}) &= \frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1} \sqrt{\pi} \delta_{q_1, -q_2}}{\Gamma(|q_1| + 1/2)} \sum_{j=0}^{E((p_1-|q_1|)/2)} (-1)^j 2^{-2j} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1 - j\right) \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma+\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right) \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma-\mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right)}{j! (p_1 - |q_1| - 2j)! \Gamma(p_1 - 2j - \sigma)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Но ввиду формулы [3, стр. 759] $\Gamma(z - k) = \frac{(-1)^k \Gamma(z)}{(1-z)_k}$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1 - j\right) &= \frac{(-1)^j \Gamma(1/2 + p_1)}{(1/2 - p_1)_j}, \\ \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma \pm \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4} - j\right) &= \frac{(-1)^j \Gamma\left(\frac{p_1-|q_1|-\sigma \pm \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1 \mp \mathbf{i}p_2}{2}\right)_j}, \end{aligned}$$

а в силу формулы [3, стр. 759]

$$\Gamma(z - 2k) = 2^{-2k} \Gamma(z) \left[\left(\frac{1-z}{2}\right)_k \left(\frac{2-z}{2}\right)_k \right]$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1 - 2j - \sigma) &= \frac{2^{-2j} \Gamma(p_1 - \sigma)}{\left(\frac{1+\sigma-p_1}{2}\right)_j \left(1 - \frac{\sigma+p_1}{2}\right)_j}, \\ (p_1 - |q_1| - 2j)! &= \Gamma(1 + p_1 - |q_1| - 2j) = \frac{2^{-2j} \Gamma(1 + p_1 - |q_1|)}{\left(\frac{|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+|q_1|-p_1}{2}\right)_j}. \end{aligned}$$

Поэтому (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma, I_1, (I_2, +), \text{id}) &= \frac{2^{p_1-|q_1|-\sigma-1} \sqrt{\pi} \delta_{q_1, -q_2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1\right)}{\Gamma(p_1 - \sigma) \Gamma(1 + p_1 - |q_1|) \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right)} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma - \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{E((p_1-|q_1|)/2)} \frac{2^{2j} \left(\frac{|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+|q_1|-p_1}{2}\right)_j \left(\frac{1+\sigma-p_1}{2}\right)_j \left(1 - \frac{\sigma+p_1}{2}\right)_j}{j! \left(\frac{1}{2} - p_1\right)_j \left(\frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1+\mathbf{i}p_2}{2}\right)_j \left(\frac{5}{4} + \frac{\sigma+|q_1|-p_1-\mathbf{i}p_2}{2}\right)_j}. \quad (3) \end{aligned}$$

Замечая, что для $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$, такого, что $\varepsilon \equiv p_1 - |q_1| \pmod{2}$,

$$\left(\frac{\varepsilon + |q_1| - p_1}{2} \right)_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geq p_1 - |q_1|,$$

мы видим, что сумма в формуле (3) является $E((p_1 - |q_1|)/2)$ -ой частичной суммой обобщенного гипергеометрического ${}_4F_3$ -ряда, все члены которого, начиная с номера $p_1 - |q_1|$, равны нулю. Таким образом, она является суммой этого ряда, то есть в (3) символ $\sum_{j=0}^{E((p_1 - |q_1|)/2)}$ можно

заменить символом $\sum_{j=0}^{+\infty}$ и воспользоваться определением

$${}_nF_m \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \dots (a_n)_j}{(b_1)_j \dots (b_m)_j} \frac{z^j}{j!}$$

обобщенного гипергеометрического ряда, сумма которого является значением ${}_nF_m$ -функции на области сходимости этого ряда. $\square$

3. Об одной из формул для преобразования Бушмана — Эрдейи

Выведем следствие из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. При $\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} t^\sigma P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}^{-|q_1|}(t) P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}) dt &= \frac{(-1)^{|q_1|} 2^{p_1-\sigma-2} \Gamma(p_1 + 1/2)}{\pi \Gamma(p_1 - \sigma) \Gamma(1 + p_1 - |q_1|)} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma - \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times \\ &\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{|q_1| - p_1}{2}, \frac{1 + |q_1| - p_1}{2}, \frac{1 + \sigma - p_1}{2}, 1 - \frac{\sigma + p_1}{2} \\ \frac{1}{2} - p_1, \frac{5}{4} + \frac{\sigma + |q_1| - p_1 + \mathbf{i}p_2}{2}, \frac{5}{4} + \frac{\sigma + |q_1| - p_1 - \mathbf{i}p_2}{2} \end{matrix} \middle| 4 \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим многочлен Гегенбауэра в последнем интеграле формулы (1) через функцию Лежандра по формуле [1, 8.936.2]:

$$C_{p_1 - |q_1|}^{|q_1| + 1/2}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|} (2t)^{|q_1|} |q_1|!}{(2|q_1|)! (t^2 - 1)^{|q_1|/2}} P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}).$$

Учитывая, что $2^{|q_1|} |q_1| = (2|q_1|)!!$ и $\frac{(2|q_1|)!!}{(2|q_1|)!} = \frac{1}{(2|q_1| - 1)!!}$, получаем

$$C_{p_1 - |q_1|}^{|q_1| + 1/2}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|} t^{|q_1|}}{(2|q_1| - 1)!! (t^2 - 1)^{|q_1|/2}} P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}).$$

Но [3, стр. 759] $(2|q_1| - 1)!! = \frac{2^{|q_1|} \Gamma(|q_1| + 1/2)}{\sqrt{\pi}}$, поэтому

$$C_{p_1 - |q_1|}^{|q_1| + 1/2}(t^{-1}) = \frac{(-1)^{|q_1|} \sqrt{\pi} t^{|q_1|}}{2^{|q_1|} \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1|\right) (t^2 - 1)^{|q_1|/2}} P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}), \quad (4)$$

а значит, формулу (1) можно переписать в виде

$$\mathcal{D}(\sigma, I_1, (I_2, +), \text{id}) = \frac{2^{1-|q_1|} (-1)^{|q_1|} \pi^{3/2} \delta_{q_1, -q_2}}{\Gamma(|q_1| + 1/2)} \int_1^{+\infty} t^\sigma P_{-1/2+ip_2}^{-|q_1|}(t) P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}) dt. \quad (5)$$

Остается сравнить (5) и теорему 1. $\square$

Интегральные преобразования, ядром которых является функция Лежандра первого рода от «обратного» аргумента, неявно были использованы впервые в статье [9] при изучении уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\nu}{y} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

Систематическое изучение таких преобразований было начато в работах Р. Г. Бушмана [8] и А. Эрдейи [10], поэтому эти преобразования получили название преобразований Бушмана — Эрдейи. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{+,x}^{\mu,\nu}(f) &= \int_0^x P_\mu^\nu(xt^{-1}) (x^2 - t^2)^{-\nu/2} f(t) dt, \\ \mathbf{B}_{-,x}^{\mu,\nu}(f) &= \int_x^{+\infty} P_\mu^\nu(xt^{-1}) (t^2 - x^2)^{-\nu/2} f(t) dt \end{aligned}$$

и помимо уравнения (6) используются и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений: например, С. М. Ситником [5] установлено, что эти операторы сплетают оператор Бесселя $\mathbf{b}_\theta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\theta+1}{x} \frac{d}{dx}$ и вторую производную: $\mathbf{B}_{\pm,s}^{\mu,\nu} \mathbf{b}_\theta = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{B}_{\pm,s}^{\mu,\nu}$. В теореме 2 фактически вычислено преобразование $\mathbf{B}_{-,1}^{p_1,|q_1|}$ функции $t^{-\sigma} (t^2 - 1)^{|q_1|/2} P_{-1/2+ip_2}^{-|q_1|}(t)$.

4. Ядро преобразования Бушмана — Эрдейи как значение преобразования Бушмана — Эрдейи

Интегральное преобразование

$$\mathbf{I}_\mu(f) = F(t) = \int_0^{+\infty} f(s) P_{-\frac{1}{2}+is}^\mu(t) ds$$

($t > 1$) и обратное к нему преобразование [12, 15]

$$\mathbf{I}_\mu^{-1}(F) = f(s) = \pi^{-1} \sinh(\pi s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + is\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - is\right) \int_1^{+\infty} F(t) P_{-\frac{1}{2}+is}^\mu(t) dt$$

являются обобщениями введенных Ф. Мелером [11] прямого и В. Фоком [6] обратного интегральных преобразований (ядром которых являлась функция $P_{-\frac{1}{2}+is}^\mu(t)$) и потому называется обобщенным преобразованием Мелера–Фока. Оно является одним из наиболее известных индексных интегральных преобразований [16], к числу которых относятся преобразование Конторовича–Лебедева, Вимпа, Крума, Лебедева, Тичмарша и др.

Представим один из множителей $P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})$ ядер $(t^2 - 1)_\pm^{|q_1|/2} P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})$ преобразований Бушмана — Эрдейи $\mathbf{B}_{\pm,x}^{p_1,|q_1|}$ в виде прямого преобразования Мелера–Фока.

ТЕОРЕМА 3. При $\Re(\sigma) < -\frac{1}{2}$ выполняется равенство $P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1}) = \mathbf{I}_{-|q_1|}(F)$, где

$$\begin{aligned} F(p_2) = & (-1)^{|q_1|} 2^{p_1-\sigma-2} \pi^{-2} t^{-\sigma} p_2 \sinh(\pi p_2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + p_1\right) \times \\ & \times \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{p_1 - |q_1| - \sigma - \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \times \\ & \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1| + \mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1| - \mathbf{i}p_2\right) [\Gamma(p_1 - \sigma) \Gamma(1 + p_1 - |q_1|)]^{-1} \times \\ & \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{|q_1| - p_1}{2}, \frac{1 + |q_1| - p_1}{2}, \frac{1 + \sigma - p_1}{2}, 1 - \frac{\sigma + p_1}{2} \\ \frac{1}{2} - p_1, \frac{5}{4} + \frac{\sigma + |q_1| - p_1 + \mathbf{i}p_2}{2}, \frac{5}{4} + \frac{\sigma + |q_1| - p_1 - \mathbf{i}p_2}{2} \end{matrix} \middle| 4 \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножив обе части теоремы 2 на

$$\pi^{-1} p_2 \sinh(\pi p_2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1| + \mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + |q_1| - \mathbf{i}p_2\right),$$

получаем, что

$$\mathbf{I}_{-|q_1|}^{-1}(t^\sigma P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})) = F(p_2).$$

Тогда функцию $t^\sigma P_{p_1}^{|q_1|}(t^{-1})$ можно представить в виде $\mathbf{I}_{-|q_1|}$ -преобразования правой части. $\square$

4.1. Связь с формулой [3, 2.17.27.9]

Рассмотрим теорему 3 в простейшем случае $I_1 = \bar{0}$. Учитывая, что

$$P_0^0(t^{-1}) = 1 \quad \text{и} \quad {}_4F_3(0, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3; 4) = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 \left(p_2 \sinh(\pi p_2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}p_2\right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma\left(\frac{\mathbf{i}p_2 - \sigma}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{\sigma + \mathbf{i}p_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \right) = 2^{\sigma+2} \pi^{3/2} t^\sigma \Gamma(-\sigma). \end{aligned}$$

Вводя новый параметр $\nu = -\frac{2\sigma+1}{4}$ и записывая преобразование $\mathbf{I}_0$ в явном виде, получаем

$$\int_0^{+\infty} p_2 \sinh(\pi p_2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}p_2\right) \Gamma\left(\nu + \frac{\mathbf{i}p_2}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{\mathbf{i}p_2}{2}\right) P_{-1/2+\mathbf{i}p_2}(t) dp_2,$$

где $\Re(\nu) > 0$. Эта формула, полученная из теоретико-групповых соображений и являющаяся частным случаем теоремы 3, совпадает с частным случаем известной формулы [3, 2.17.27.9]

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} s \sinh(\pi s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + \mathbf{i}s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \mathbf{i}s\right) \times \\ \times \Gamma\left(\nu + \frac{\mathbf{i}s}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{\mathbf{i}s}{2}\right) P_{-1/2+\mathbf{i}s}^\mu(c) ds = \\ = 2^{3/2-2\nu} \pi^{3/2} c^{\mu-2\nu-1/2} (c^2 - 1)^{-\mu/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\nu - \mu\right) \end{aligned}$$

($\Re(\mu) \leq \frac{1}{2}$ и $\Re(\nu) \geq 0$), получающимся при $\mu = 0$.

5. Заключение

Функционал $\mathcal{B}$ и его аналог $\mathcal{A}$, заданный [7, 14] для группы $SO_0(2, 1)$, позволяет унифицировать вычисление матричных элементов операторов перехода между базисами и операторов представления в «прямом» и «смешанном» базисах. Из связи между матрицами операторов представления в различных базисах получаются континуальные теоремы сложения для $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$, которые при выражении значений этих функционалов через специальные функции приводят к новым формулам для интегральных преобразований, представлений и соотношений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
2. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Из-во иностр. лит-ры, 1963.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
5. Ситник С. М. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения // Научные ведомости БелГУ. Серия «Математика. Физика». 2015. Т. 39, № 11. С. 60–76.
6. Фок В. А. О представлении произвольной функции интегралом, включающим функции Лежандра с комплексным индексом // Доклады Академии Наук СССР. 1943. Т. 39, № 7. С. 279–283.
7. Шилин И. А., Чой Дж. Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1 // Ж. вычисл. мат. и матем. физики. 2022. Т. 62, №9. С. 131–140.
8. Buschman R. G. An inversion integral for a Legendre transformation // American Math. Monthly. 1962. V. 69, № 4. P. 288–289.
9. Copson E. T. On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Rational Mech. Analysis. 1957. V. 1. P. 349–356.
10. Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // J. SIAM. 1964. V. 12, № 1. P. 15–30.
11. Mehler F. G. Ueber eine mit den Kugel- und cylinderfunctionen verwandte function und ihre anwendung in der theorie elektricitatsvertheilung // Math. Annalen. 1881. V. 18, № 2. P. 161–194.
12. Rosenthal P. On an inversion theorem for the general Mehler-Fock transform pair // Pacific J. Math. 1974. V. 52, № 2. P. 539–545.
13. Shilin I. A., Choi J. On some relations between hyper Bessel-Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Hankel-Clifford integrals transforms. Int. Transforms. Spec. Func. 2023. doi.org/10.1080/10652469.2023.2191320.

14. Shilin I. A., Choi J. Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2, 1)$, addition theorems and Bessel–Clifford functions // *J. Analysis*. 2023. Vol. 31. № 2. pp. 719–732.
15. Sneddon I. N. *The Use of Integral Transforms*. N. Y.: McGraw-Hill, 1972.
16. Yakubovich S. B. *Index transforms*. Singapore: World Scientific, 1996.

REFERENCES

1. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M., 2007, *Tables of integrals, series, and products*, Academic Press, Amsterdam.
2. Kratzer, A. & Franz W., 1960, *Transzendente Functionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.
3. Pridnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I., 1986, *Integrals and Series. Vol. 3: More Special Functions*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam.
4. Pridnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I., 1986, *Integrals and Series. Vol. 2: Special Functions*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam.
5. Sitnik, S. M. 2015, “Operators of Buschman–Erdelyi transforms, their classification, basic properties, and applications”, *Sci. Notes Belgorod State Univ., Series “Mathematics. Physics”*, vol. 39, no. 11, pp. 60–76. (In Russian.)
6. Fock, V. A., 1943, “On the representation of an arbitrary function by an integral involving Legendre’s function with a complex index”, *Doklady Math.*, vol. 39, no. 7, pp. 279–283.
7. Shilin, I. A. & Choi J., 2022, “Method of continual addition theorems and integral relations between the Coulomb functions and the Appell function F_1 ”, *Comp. Math. & Mathem. Phys.*, vol. 62, no. 9, pp. 1486–1495.
8. Buschman, R. G., 1962, “An inversion integral for a Legendre transformation”, *American Math. Monthly*, vol. 69, no. 4, pp. 288–289.
9. Copson, E. T., 1957, “On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type”, *Rational Mech. Analysis*, vol. 1, pp. 349–356.
10. Erdelyi, A. 1964, “An integral equation involving Legendre functions”, *J. SIAM*, vol. 12, no. 1, pp. 15–30.
11. Mehler, F. G., 1881, “Ueber eine mit den Kugel- und cylinderfunctionen verwandte function und ihre anwendung in der theorie elektricitatsvertheilung”, *Math. Annalen*, vol. 18, no. 2, pp. 161–194.
12. Rosenthal, P., 1974, “On an inversion theorem for the general Mehler–Fock transform pair”, *Pacific J. Math.*, vol. 52, no. 2, pp. 539–545.
13. Shilin, I. A. & Choi J., 2023, “On some relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Hankel–Clifford integrals transforms”. *Int. Transforms. Spec. Func.* doi.org/10.1080/10652469.2023.2191320.
14. Shilin, I. A. & Choi J., 2023, “Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2, 1)$, addition theorems and Bessel–Clifford functions”, *J. Analysis*, Vol. 31. № 2. pp. 719–732.

15. Sneddon, I. N., 1972, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York.
16. Yakubovich, S. B., 1996, *Index transforms*, World Scientific, Singapore.

Получено: 31.08.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-237-242

О множестве исключений в произведении множеств натуральных чисел с асимптотической плотностью 1

Ю. Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).

e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В статье изучается следующая задача. Пусть имеется два подмножества множества натуральных чисел, которые мы обозначим как A и B . Пусть дополнительно известно также, что асимптотическая плотность этих множеств A, B равна 1. Мы определяем множество натуральных чисел, которые являются представимыми в виде произведения этих множеств AB , то есть такие элементы ab , где $a \in A, b \in B$. Мы изучаем свойства этого подмножества произведений во множестве всех натуральных чисел. Авторы S. Bettin, D. Koukoulopoulos и C. Sanna в статье [1] доказали помимо всего прочего, что плотность множества AB также равна 1. Более того была выведена количественная версия этого утверждения, а именно получена оценка на множество $\mathbb{N} \setminus AB$, которое мы обозначим через $\overline{AB}$. А именно, этими авторами в случае когда известны количественные верхние оценки на $\overline{A} \cap [1, x] = \alpha(x)x, \overline{B} \cap [1, x] = \beta(x)x, \alpha(x), \beta(x) = O(1/(\log x)^a), x \rightarrow \infty$ выведена и верхняя оценка на множество $\overline{AB} \cap [1, x]$. В данной работе мы изучаем случай когда α, β стремятся к нулю медленнее чем в вышеуказанном случае и несколько уточняем верхнюю оценку на множество $\overline{AB} \cap [1, x]$. В настоящей статье мы рассматриваем случай $\alpha(x), \beta(x) = O\left(\frac{1}{(\log \log x)^a}\right)$ при некотором фиксированном $a > 1$. Мы заимствуем подходы, аргументы и схему доказательства из упомянутой работы трех авторов S. Bettin, D. Koukoulopoulos и C. Sanna[1].

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, гладкие числа, произведение.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

Ю. Н. Штейников. О множестве исключений в произведении множеств натуральных чисел с асимптотической плотностью 1 // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 237–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-237-242

On the set of exceptions in the product of sets of natural numbers with asymptotic density 1

Yu. N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolaevich — Federal Research Center “Research Institute of System Research of the Russian Academy of Sciences” (Moscow).

e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

The article examines the following problem. Let there be two subsets of the set of natural numbers, which we denote as A and B . Let it also be additionally known that the asymptotic density of these sets A, B is 1. We define the set of natural numbers that are representable as the product of these sets AB , that is, such elements ab , where $a \in A, b \in B$. We study the properties of this subset of products in the set of all natural numbers. The authors S. Bettin, D. Koukoulopoulos and C. Sanna in the article [1] proved, among other things, that the density of the set AB is also equal to 1. Moreover, a quantitative version of this statement was derived, namely, an estimate was obtained for the set $\mathbb{N} \setminus AB$, which we will denote by $\overline{AB}$. Namely, by these authors, in the case when quantitative upper bounds are known for $\overline{A} \cap [1, x] = \alpha(x)x, \overline{B} \cap [1, x] = \beta(x)x, \alpha(x), \beta(x) = O(1/(\log x)^a), x \rightarrow \infty$ the upper bound on the set $\overline{AB} \cap [1, x]$ is also derived. In this paper, we study the case when α, β tend to zero slower than in the above case and somewhat refine the upper bound on the set $\overline{AB} \cap [1, x]$. In this paper we consider the case of $\alpha(x), \beta(x) = O\left(\frac{1}{(\log \log x)^a}\right)$ for some fixed $a > 1$. We borrow approaches, arguments and proof scheme from the mentioned work of three authors S. Bettin, D. Koukoulopoulos and C. Sanna[1].

Keywords: integer numbers, density, smooth numbers, product.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

Yu. N. Shteinikov 2023, “On the set of exceptions in the product of sets of natural numbers with asymptotic density 1”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 237–242.

1. Введение

Пусть множества A, B являются какими-то подмножествами натуральных чисел. Множество AB называется произведением множеств A и B , и определяется как

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Исследование и изучения размера произведения двух множеств имеет давнюю историю. Известная проблема о таблице умножения, давно поставленная П. Эрдешем [3], [4] задает вопрос о размере множества M_n являющегося множеством $n \times n$, то есть множество $\{1, \dots, n\}^2$. П. Эрдеш установил что $M_n = o(n^2)$. К.Форд [6] установил точный порядок роста величины M_n , см. также работы Тененбаума[5] и Д. Коукоулопуоса [7].

Изучение же величины $(A \cap [1, x])^2$ для произвольных множеств было проведено Х. Силлеруело, С. Рамана и О. Рамаре [2]. В статье начаты изучения данного вопроса для таких множеств как сдвинутые простые числа, суммы двух квадратов и случайные множества.

Рассмотрим теперь случай бесконечных множеств. Стандартным образом определим понятие плотности множества

$$d(A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, x]|}{x},$$

и через $\bar{A}$ обозначим дополнение множества A .

Хегувари, Хеннекарт и Пач рассмотрели аналогичную задачу, но для бесконечных множеств натуральных чисел и поставили такие вопросы.

Вопрос 1. Верно ли что если $d(A) = 1$, то $d(A^2) = 1$?

Вопрос 2. Верно ли что $\inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=\alpha} d(A^2) = 0$ для любого $\alpha \in [0, 1)$ или хотя бы для $\alpha \in [0, \alpha_0)$ для некоторого $\alpha_0 \in (0, 1)$?

В статье [1] были даны ответы на эти вопросы и соответственно доказана такая теорема.

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$\begin{cases} \inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=1} d(A^2) = 1 \\ \alpha \in [0, 1) \inf_{A \subset \mathbb{N}: d(A)=\alpha} d(A^2) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

Следуя аргументам, предложенным в этой статье [1], эти авторы получили количественную версию этого утверждения. А именно, если

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log x)^{-a}$$

для некоторого фиксированного $0 < a < 1$, то

$$|\{n \leq x : n \in \overline{AB}\}| \ll x(\log x)^{-\frac{a^2}{1+a} + o(1)}.$$

Мы же рассматриваем случай

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log \log x)^{-a}. \quad (2)$$

Основываясь на аргументах и технике предложенной в статье [1] мы даем аналогичные оценки в вышеописанном случае. Главный результат данной статьи это вывести такую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $a > 1$ - некоторое фиксированное число. Если*

$$|\{n \leq x : n \in \bar{A}\}|, |\{n \leq x : n \in \bar{B}\}| \ll x(\log_2 x)^{-a}. \quad (3)$$

то

$$|\{n \leq x : n \in \overline{AB}\}| \ll \frac{x \log_4 x}{\log_5 x (\log_3 x)^a}.$$

Здесь всюду через $\log_k$ обозначает k -ый повторный логарифм числа x .

2. Предварительные результаты

Нам понадобится ряд вспомогательных определений и некоторых результатов. Здесь мы тоже следуем понятиям, предложенным в статье [1]. Для целого n , пусть $P^-(n)$ и $P^+(n)$ обозначают наименьший и наибольший простой множитель числа n с допущением $P^-(1) = \infty, P^+(1) = 1$. Если $P^+(n) \leq y$ мы называем число n y -гладким. Введем по определению

$$\psi(x, y) = \{n \leq x, P^+(n) \leq y\}, \phi(x, y) = \{n \leq x, P^-(n) \geq y\}. \quad (4)$$

Известны следующие результаты.

ЛЕММА 2. Для $1 < y \leq x$ справедливо $|\phi(x, y)| \ll x/\log y$.

ЛЕММА 3. Пусть $2 \leq y \leq x, v = \frac{\log x}{\log y}$ и $\epsilon > 0$ – произвольное фиксированное и $v \leq y^{1-\epsilon}$. Тогда справедлива формула

$$|\psi(x, y)| = xv^{-(1+o(1))v}, v \rightarrow \infty.$$

Каждое натуральное число n представим в виде $n = n_1 n_2$, где $P^+(n_1) \leq y, P^-(n_2) \geq y$. Пусть $N(x, y, z)$ обозначает множество $n \leq x$ таких, что $n_1 > z$.

В статье [1] была выведена верхняя оценка для множества чисел (для широкой области определения параметров), у которых гладкая часть большая. Ниже мы докажем чуть более точную оценку.

Эта лемма является продолжением соответствующего результата в [8], см. также [9].

ЛЕММА 4. Пусть $y \leq z \leq x$, параметр u определяется равенством $u = \frac{\log z}{\log y}$. Пусть также $\epsilon > 0$ произвольное фиксированное и имеет место $\frac{\log x}{\log y} \leq y^{1-\epsilon}$. Тогда справедлива оценка

$$|N(x, y, z)| \leq x \exp\{-(1+o(1))u \log u\}, u \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Доказательство ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем, что $|N(x, y, z)| = \sum_{z \leq n_1 \leq x, P^+(n_1) \leq y} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)|$. Последнюю же сумму разобьем на 2 части.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)| + \sum_{\frac{x}{y} \leq n_1 \leq x} 1.$$

Последнее слагаемое оцениваем сверху как множество всех y -гладких чисел, не превосходящих x , то есть величиной $|\psi(x, y)| \leq x \exp\{(1+o(1))u \log u\}$.

Разберемся с 1-ой суммой.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} |\phi(\frac{x}{n_1}, y)| \leq \frac{x}{\log y} \sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} \frac{1}{n_1}.$$

Разберемся с последней суммой, применив преобразование Абеля.

$$\sum_{z \leq n_1 \leq \frac{x}{y}} \frac{1}{n_1} \ll \frac{|\psi(x/y, y)| - |\psi(z, y)|}{x/y} + \int_z^{x/y} \frac{|\psi(t, y)| - |\psi(z, y)|}{t^2} dt$$

Делаем замену переменной в интеграле $t \rightarrow h : t = y^h$. Интеграл преобразуется к виду

$$\log y \int_u^{\frac{\log x}{\log y}} \frac{|\psi(y^h, y)| - |\psi(y^u, y)|}{y^h} dh$$

Подставляя оценки из Леммы 3 мы получаем нужное нам утверждение. Лемма доказана. $\square$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1 идет по той же схеме доказательства из статьи [1]. Введем параметр $u = u(x) > 1, y = y(x) < x, z = y^u$. Как и раньше представим $n = n_1 n_2$, где n_1 - y -гладкая часть числа n , n_2 - оставшаяся. Рассмотрим множество $N = \{n \leq x : n_1 \leq y^u\}$. По Лемме 4 имеем, что

$$|[1, x] \setminus N| \leq x \exp\{-(1+o(1))u \log u\}, u \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть теперь $n \in N$. $n = n_1 n_2$. Если $n \in \overline{AB}$, то либо $n_1 \in \overline{A}$ либо $n_2 \in \overline{B}$. Значит множество количество элементов из $N \cap \overline{AB}$ не превосходит $S_1 + S_2$, где

$$S_1 = |\{n \in N : n_1 \in \overline{A}\}|, S_2 = |\{n \in N : n_2 \in \overline{B}\}|.$$

Оценим сначала S_1 .

$$S_1 \leq \sum_{m \leq z, m \in \overline{A}} |\phi(x/m, y)| \ll \frac{x}{\log y} \sum_{m \leq z, m \in \overline{A}} 1/m \ll \frac{ux}{(\log \log y)^a}.$$

Оценим теперь S_2 . Сперва обозначим $\overline{B}(t) = |\overline{B} \cap [1, t]|$.

$$S_2 \leq \sum_{d: d \leq z, P^+(d) \leq y} \overline{B}(x/d) \leq \frac{x}{(\log \log x)^a} \log y.$$

Соберем все оценки воедино и выберем оптимальные параметры. Положим,

$$u = [10a \log_4 x / \log_5 x], \log Y = \frac{u^2 (\log_2 x)^a}{(\log_3 x)^a}.$$

Подставляя эти параметры получаем утверждение нашей теоремы.

4. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [1] – [9] и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bettin, S., Koukoulopoulos, D., Sanna, C. A note on the natural density of product sets // Bull. Lond. Math. Soc. 2021. Vol. 53, №. 5, P. 1407-1413.
2. Cilleruelo, D. S. Ramana, and O. Ramare, Quotient and product sets of thin subsets of the positive integers, Proc. Steklov Inst. Math. 296 (2017), no. 1, P. 52–64.
3. Erdos, P. Some remarks on number theory // Riveon Lematematika. 1955. Vol. 9, P. 45-48.
4. Erdos, P. An asymptotic inequality in the theory of numbers // Vestnik Leningrad. Univ. 1960. Vol. 15, №. 13, P. 41–49.
5. Tenenbaum, G. Un probleme de probabilite conditionnelle en arithmetique // Acta Arith. 1987. Vol. 49, №. 2, P. 165–187.
6. Ford, K. The distribution of integers with a divisor in a given interval // Ann. of Math.(2) 2008. Vol. 168, №. 2, P. 367–433.
7. Koukoulopoulos, D. On the number of integers in a generalized multiplication table // J. Reine Angew. Math. Vol. 689, (2014), P. 33–99.
8. Banks, William D., Shparlinski I. Integers with a large smooth divisor // Electronic journal of combinatorial number theory. 2007. 7. №1, Paper A17, 11 p.
9. Ю. Н. Штейников. “О распределении элементов полугрупп натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2012, 13:3 , С. 91–99.

REFERENCES

1. Bettin S., Koukoulopoulos D., Sanna C. “A note on the natural density of product sets” *Bull. Lond. Math. Soc.* vol. 53, no. 5, pp. 1407-1413.
2. Cilleruelo, D. S. Ramana, and O. Ramare, “Quotient and product sets of thin subsets of the positive integers” *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 296 , no. 1, pp. 52–64.
3. Erdos, P. “Some remarks on number theory” // *Riveon Lematematika*. 1955. vol. 9, pp. 45-48.
4. Erdos, P. “An asymptotic inequality in the theory of numbers” *Vestnik Leningrad. Univ.* 1960. Vol. 15, №. 13, pp. 41–49.
5. Tenenbaum, G. “Un probleme de probabilite conditionnelle en arithmetique” *Acta Arith.* 1987. Vol. 49, №. 2, pp. 165–187.
6. Ford, K. “The distribution of integers with a divisor in a given interval” *Ann. of Math.(2)* 2008. Vol. 168, №. 2, pp. 367–433.
7. Koukoulopoulos, D. “On the number of integers in a generalized multiplication table” *J. Reine Angew. Math. Vol.* vol. 689, pp. 33–99.
8. Banks, William D., Shparlinski I. “Integers with a large smooth divisor” *Electronic journal of combinatorial number theory* vol. 7, no. 1, Paper A17, 11 p.
9. Shteinikov Y,N. “On the distribution of elements semigroups of natural numbers” *Chebyshevskii Sb.* vol 13, no. 3 , pp. 91–99.

Получено: 17.10.22

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-243-252

Эмпирическая математическая модель динамики изменения коэффициента трения полимерного композиционного материала по стали 20X13 в вакууме при ионной бомбардировке¹

А. Д. Бреки, А. О. Поздняков, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, В. А. Яхимович,
Е. Б. Седакова, А. Я. Башкарев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева

Бреки Александр Джалюльевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Поздняков Алексей Олегович — кандидат физико-математических наук, Институт проблем машиноведения РАН; Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: ao.pozd@mail.ioffe.ru

Чулкин Сергей Георгиевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Москалец Артём Анатольевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

Яхимович Валерий Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: valera_spb@inbox.ru

Седакова Елена Борисовна — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Башкарев Альберт Яковлевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: bashkarev@spbstu.ru

Тарасенко Елена Александровна — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: taraselen@mail.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: «Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии» № 22-19-00178.

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В статье приведена новая эмпирическая математическая модель динамики изменения коэффициента трения полимера по стали в вакууме при ионной бомбардировке, содержащая ряд новых триботехнических характеристик, которые позволяют более детально охарактеризовать фрикционное взаимодействие. Показана справедливость разработанной математической модели для описания трения материала АМАН по стали при переменном комплексе внешних условий.

Ключевые слова: математическая модель, трение, математическая модель, трение, самосмазывающийся материал, ионная бомбардировка, фрикционное взаимодействие, вакуум.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

А. Д. Бреки, А. О. Поздняков, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, В. А. Яхимович, Е. Б. Седакова, А. Я. Башкарев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Эмпирическая математическая модель динамики изменения коэффициента трения полимерного композиционного материала по стали 20Х13 в вакууме при ионной бомбардировке // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 243–252.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-243-252

Empirical mathematical model of the dynamics of change in the coefficient of friction of a polymer composite material on steel 20X13 in vacuum during ion bombardment²

A. D. Breki, A. O. Pozdnyakov, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, V. A. Yakhimovich,
E. B. Sedakova, A. Ya. Bashkarev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva

Breki Alexander Dzhalyulevich — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Pozdnyakov Aleksey Olegovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS; Ioffe Institute of the RAS (St. Petersburg).

e-mail: ao.pozd@mail.ioffe.ru

Chulkin Sergey Georgievich — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

²The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation for the priority area of activity of the Russian Science Foundation "Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by individual scientific groups to the scientific project: «Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium steam turbine blades and their operation under conditions of drop impact erosion» № 22-19-00178.

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Moskalets Artem Anatolyevich — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

Yakhimovich Valery Alexandrovich — postgraduate student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: valera_spb@inbox.ru

Sedakova Elena Borisovna — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Bashkarev Albert Yakovlevich — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: bashkarev@spbstu.ru

Tarasenko Elena Aleksandrovna — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg)

e-mail: taraselen@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The article presents a new empirical mathematical model of the dynamics of change in the coefficient of friction of a polymer on steel in a vacuum during ion bombardment, which contains a number of new tribological characteristics that allow a more detailed characterization of the frictional interaction. The validity of the developed mathematical model for describing the friction of the AMAN material on steel under a variable set of external conditions is shown.

Keywords: mathematical model, friction, mathematical model, friction, self-lubricating material, ion bombardment, frictional interaction, vacuum.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

A. D. Breki, O. A. V. A. Pozdnyakov, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, Yakhimovich, E. B. Sedakova, A. Ya. Bashkarev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, 2023, "Empirical mathematical model of the dynamics of change in the coefficient of friction of a polymer composite material on steel 20X13 in vacuum during ion bombardment", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 243–252.

1. Введение

Пластики типа АМАН представляют собой многокомпонентные системы, в которых в качестве связующего использованы полимеры, а в качестве наполнителя в их состав входят твёрдые смазки со слоистой структурой [1, 6].

В работе [1]: «Проанализированы недостатки применения жидких и пластичных смазочных материалов в шарнирных соединениях лесных манипуляторов. Рассмотрена возможность применения неметаллических антифрикционных материалов, которые интенсифицируют эффект избирательного переноса. Определены основные требования, которые должны предъявляться к антифрикционным материалам данных узлов трения. В качестве смазочного материала предлагается использовать самосмазывающиеся антифрикционные пластики типа АМАН.

Дана краткая характеристика пластиков и возможности их работы в шарнирных соединениях технологического оборудования лесозаготовительных и лесохозяйственных машин». В работе [1] отмечается, что: «существует несколько классов перспективных антифрикционных материалов, которые возможно использовать в шарнирных соединениях, например, лесных манипуляторов. К ним относятся полимеры (полиамиды, полиформальдегиды, полиуретаны и т.д.), антифрикционные пластики типа АМАН (ЭСТЕРАН, ТЕСАН, ВИЛАН), материалы на основе древесины, ленточные (слоистые) материалы, углеграфитные материалы, металлокерамические материалы». В источнике [1]: «Для изготовления антифрикционной втулки из всех рассмотренных типов и классов антифрикционных материалов после сравнения их физических, химических и физико-механических свойств были выбраны самосмазывающиеся антифрикционные пластики типа АМАН. Такой выбор предопределяет то, что они имеют достаточно высокий предел прочности (80-100 МПа) [2]», низкий коэффициент трения по стали [8], бензо- и маслостойки, вибропрочны, не боятся влаги. Эти пластики значительно дешевле и менее дефицитны, чем цветные сплавы [3]».

В работе [4]: «рассматривается возможность использовать в качестве антифрикционного материала в подшипниках скольжения шарнирных узлов жесткого сцепного устройства самосмазывающиеся антифрикционные пластики типа АМАН. Для этого проводится анализ величины температуры трения, возникающей при их работе». Известно [4], что: «На железнодорожном транспорте широкое распространение получил такой вид автосцепки, как шарнирный узел жесткого сцепного устройства. В их конструкцию входят шарнирные соединения, которые являются слабым местом [5]. Важным фактором, который объяснял бы низкую износостойкость трущихся поверхностей, является несовершенство их смазки. В случае смазывания этих узлов трения под действием давления происходит выдавливание смазки, что, как следствие, приводит к быстрому износу узлов трения, а также дополнительным вибрациям, ударам, повышению нагрузки на рабочий узел, и, как следствие, преждевременному выходу детали из строя. Для того, чтобы исключить эти недостатки предлагается использовать в качестве антифрикционного материала в подшипниках скольжения шарнирных узлов жесткого сцепного устройства самосмазывающиеся антифрикционные пластики типа АМАН».

В настоящее время АМАНы ещё не достаточно массово используются для создания узлов трения. При этом давно известны их хорошие антифрикционные и противоизносные свойства. Коэффициент трения в паре АМАН-сталь изменяется во времени по сложным зависимостям, для которых в настоящее время ещё не создано соответствующих математических моделей, в том числе для условий вакуума и ионной бомбардировки. В связи с этим, в границах данной работы, предлагается новая математическая модель, описывающая закономерности влияния вакуума и ионной бомбардировки на трение скольжения материала АМАН по стали 20Х13.

2. Основной текст статьи

В работах [9, 10] предложена следующая математическая модель, которая была использована для описания динамики изменения силы трения (во времени):

$$F_f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta F_{fi}}{1 + \exp(-\Psi_{ti} \cdot (t - t_{\Omega i}))}, \quad (1)$$

где ΔF_{fi} — приращение силы трения от одного стационарного значения к другому при i -м переходном процессе; Ψ_{ti} — резкость фрикционного перехода (по времени) от одного режима трения к другому при i -м переходном процессе; $t_{\Omega i}$ — критическое значение времени при i -м переходном процессе; n — количество переходных процессов. Для описания более сложных переходных процессов в числителе (1) будет стоять $\Delta F_{fi}(t) \neq const$ некоторая функция времени.

Анализ данных работы [7] позволил предположить, что зависимость коэффициента трения от времени при трении АМАН по стали как на воздухе, так и в вакууме в условиях ионной бомбардировки, может быть представлена в виде (2):

$$f_{LA} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta f_{LAi}}{1 + \exp(-\Psi_{ti} \cdot (t - t_{\Omega i}))}, \quad (2)$$

где Δf_{LAi} — приращение классического коэффициента трения (Леонардо да Винчи-Амонтона) от одного стационарного значения к другому при i -м переходном процессе (классический коэффициент трения обычно обозначают просто буквой f).

В работе [7] Акишиным А.И., Троянской Г.И., Исаевым Л.Н., Сергеевой Л.М., Андреевой М.Г., Марченко Е.А., Алексеевым Н.М. получены зависимости коэффициента трения в паре АМАН — сталь 20Х13 от времени на воздухе и в вакууме при ионной бомбардировке. Условия испытаний: скольжение колодки из стали 2Х13 по ролику из АМАН со скоростью 1,2 м/с, при нагрузке 10Н, продолжительность испытания 10 ч. Образцы: цилиндр из материала АМАН; колодка из стали 20Х13. Исследование влияния ионной бомбардировки при энергии молекулярных ионов водорода $E = 3\text{кэВ}$ и плотности потока 108 ионов/см²с на коэффициент трения авторы производили на стандартной масс-спектрометрической установке типа МС-3.

Авторами [7] установлены зависимости коэффициента трения от времени в графическом виде, однако не было найдено их аналитического представления.

В данной работе реализована точная оцифровка графиков из работы [7] и осуществлена аппроксимация выявленных точек с использованием предложенной формулы (2).

На рисунке 1 показаны точки, полученные при оцифровке графика [7] для трения материала АМАН по стали 20Х13 без облучения, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

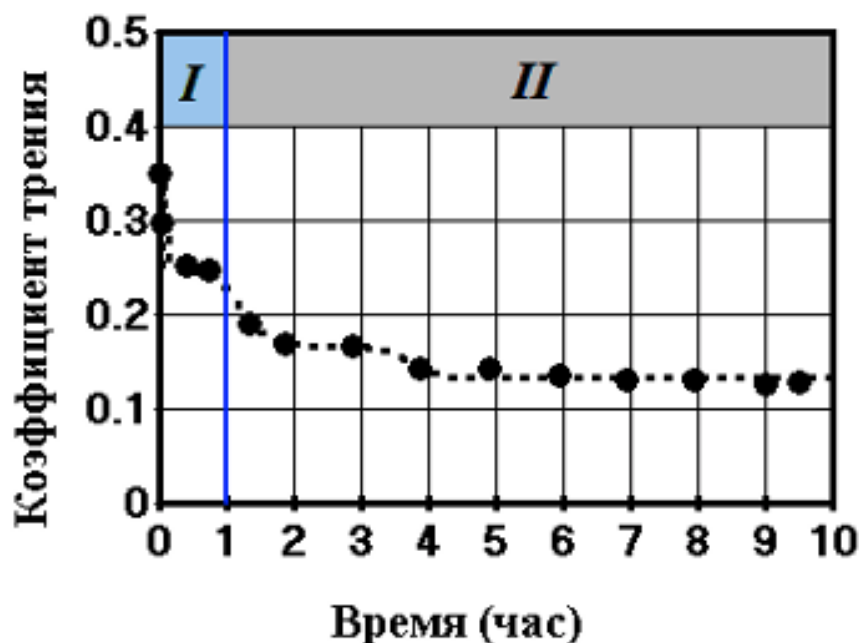


Рис. 1: Зависимости коэффициента трения от времени для трения материала АМАН по стали 20Х13 без облучения: I — на воздухе; II — в вакууме

Аналитически, зависимость коэффициента трения от времени для трения материала АМАН по стали 20Х13 без облучения (рис. 1) выражается формулой:

$$f_{LA} = \frac{0,35}{1 + \exp(-139t)} - \frac{0,1}{1 + \exp(-50(t - 0,1))} - \frac{0,083}{1 + \exp(-5(t - 1,2))} - \frac{0,034}{1 + \exp(-5(t - 3,7))}. \quad (3)$$

Исследование функции (3) показывает, что максимальное значение коэффициента трения составляет 0,34 и достигается в среде воздуха в момент времени приблизительно 2,3 мин, после чего он начинает снижаться в течение 1 часа на воздухе и продолжает уменьшаться в вакууме в продолжении 9 часов. Интегрирование (3) по всему интервалу от 0 до 10 часов и деление полученного результата на длину данного интервала времени даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,156.

На рисунке 2 показаны точки, полученные при оцифровке графика [7] для трения материала АМАН по стали 20Х13 с облучением, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

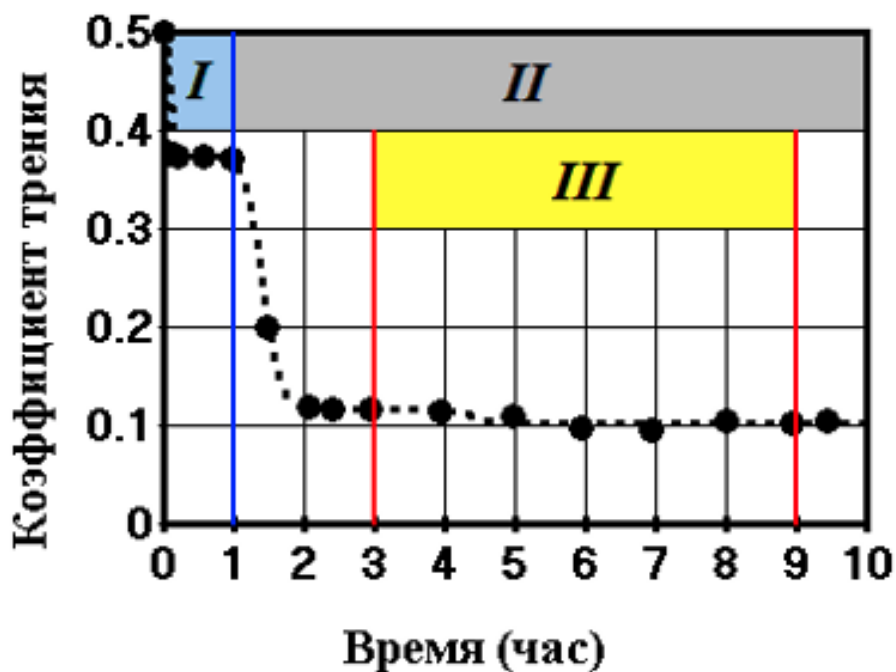


Рис. 2: Зависимости коэффициента трения от времени для трения материала АМАН по стали 20Х13 с облучением: I – на воздухе; II – в вакууме, III – с облучением

Аналитически, зависимость коэффициента трения от времени для трения материала АМАН по стали 20Х13 с облучением (рис. 2) выражается формулой:

$$f_{LA} = \frac{0,5}{1 + \exp(-130t)} - \frac{0,125}{1 + \exp(-50(t - 0,1))} - \frac{0,259}{1 + \exp(-8(t - 1,4))} - \frac{0,0129}{1 + \exp(-8(t - 4,4))}. \quad (4)$$

Исследование функции (4) показывает, что максимальное значение коэффициента трения составляет 0,49 и достигается в среде воздуха в момент времени приблизительно 2,46 мин, после чего он начинает снижаться в течение 1 часа на воздухе и продолжает уменьшаться в вакууме в продолжении 9 часов, в том числе в условиях ионной бомбардировки. Интегрирование (4) по всему интервалу от 0 до 10 часов и деление полученного результата на длину данного интервала времени даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,146.

Интегрирование (3) по интервалу от 3 до 9 часов (вакуум) и деление полученного результата на длину данного интервала времени даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,14. Интегрирование (4) по интервалу от 3 до 9 часов (вакуум с ионной бомбардировкой) и деление полученного результата на длину данного интервала времени даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,106. Полученные данные очень хорошо согласуются со средними значениями коэффициента трения, полученными в работе [7].

Зависимости интенсивности изменения коэффициента трения во времени без облучения и с облучением в вакууме показаны на рисунке 3, 4.

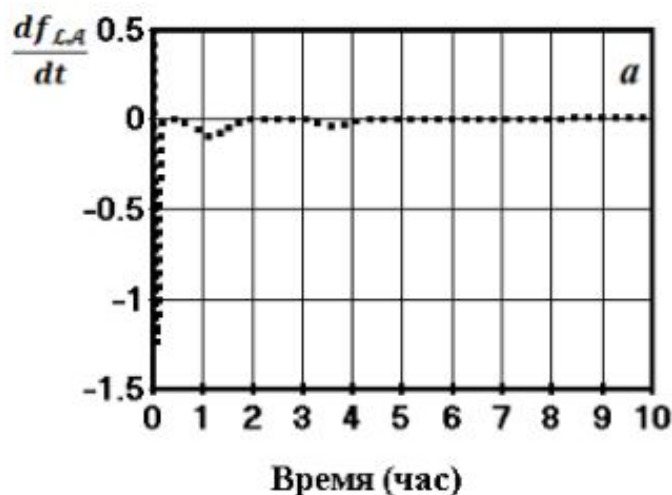


Рис. 3: Зависимости интенсивности изменения коэффициента трения во времени без облучения

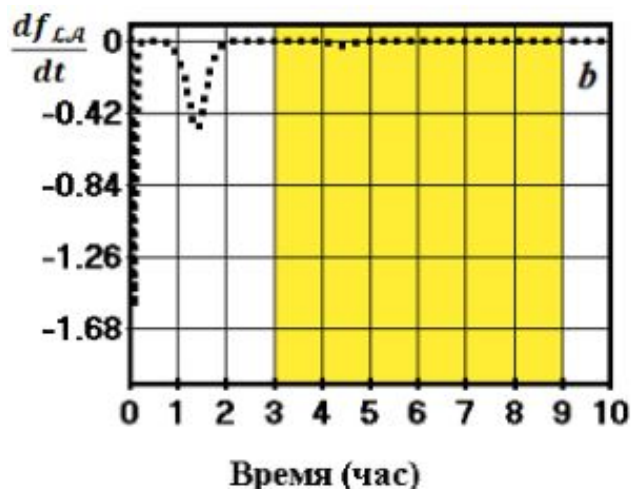


Рис. 4: Зависимости интенсивности изменения коэффициента трения во времени с облучением в вакууме

Максимумы и минимумы функций, графики которых показаны на рисунках 3, 4, приведены в таблице.

	Без облучения		С облучением	
	t, ч	$\frac{df_{LA}}{dt}, \text{ ч}^{-1}$	t, ч	$\frac{df_{LA}}{dt}, \text{ ч}^{-1}$
min	0.10001	-1.25164	0.10001	-1.56242
max	0.28787	-0.00467	0.32995	$-4.6 \cdot 10^{-4}$
min	1.2	-0.10375	1.4	-0.518
max	2.53997	-0.00102	3.08748	$-1 \cdot 10^{-5}$
min	3.69999	-0.0425	4.4	-0.0258

Из приведённых графиков и таблицы видно, что в обоих случаях имеют место быть скачкообразные изменения интенсивности коэффициента трения, вместе с тем, на интервале времени соответствующем ионной бомбардировке интенсивности изменения коэффициента трения близка либо равна нулю.

Таким образом, ионная бомбардировка не обуславливает колебания коэффициента трения при изменении состояния фрикционного контакта. Вместе с тем, облучение способствует снижению коэффициента трения на 24%, что может быть связано с рекристаллизацией, радиационным наклёпом, сшиванием цепи молекул и т.д. [7].

3. Заключение

В результате проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

1. Проведённый анализ экспериментальных результатов показывает справедливость предложенной формулы (2), описывающей зависимость коэффициента трения от времени при фрикционном взаимодействии материала АМАН со сталью в воздушной среде, вакууме и при ионной бомбардировке.
2. В разработанной математической модели введён ряд новых триботехнических характеристик, которые позволяют более детально охарактеризовать фрикционное взаимодействие в системе «АМАН-сталь».
3. Предложенная модель описывает изменение коэффициента трения при целенаправленном изменении внешних условий воздействия на пару трения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серебрянский А.И. Обоснование выбора антифрикционных материалов для узлов трения технологического оборудования лесозаготовительных машин / А. И. Серебрянский // Вестник Московского государственного университета леса - Лесной вестник. 2006. № 3. С. 107-108.
2. Трение, изнашивание и смазка: справочник / Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина. Т.1. М.: Машиностроение, 1978. 400 с.
3. Башкарев А.Я. Пластмассы в строительных и землеройных машинах / А.Я. Башкарев и др. – Л.: Машиностроение, 1981. 191 с.
4. Богатырева Ж.И. Оценка температуры трения подшипников скольжения / Ж. И. Богатырева // Транспорт: наука, образование, производство. Воронеж, 2020. С. 218-221.

5. Шевченко В.П. Восстановление шарнирных соединений лесосечных машин электродуговой металлизацией. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Химки, 1986. 20 с.
6. Серебрянский А.И. Методика и результаты исследований температуры трения в шарнирах лесных манипуляторов / А.И. Серебрянский, В.В. Абрамов, Д.А. Канищев // Лесотехнический журнал. 2014. Т. 4. № 1(13). С. 189-194. DOI 10.12737/3368.
7. Акишин А.И., Трояновская Г.И., Исаев Л.Н., Сергеева Л.М., Андреева М.Г., Марченко Е.А., Алексеев Н.М. Поведение пар трения и некоторых самосмазывающихся материалов в вакууме при ионной бомбардировке / Теория трения и износа // Акад. наук СССР. Науч. совет по трению и смазкам. М.: Наука, 1965. С. 285-289.
8. Decarburization and the Influence of Laser Cutting on Steel Structure / N.N. Sergeev, I.V. Minaev, A.E. Gvozdev [et al.] // Steel in Translation. 2018. Vol. 48. No 5. P. 313-319. DOI 10.3103/S096709121805008X.
9. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.
10. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: автореферат дис. ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого]. - Санкт-Петербург, 2021. 43 с.

REFERENCES

1. Serebryansky A.I., 2006, «*Substantiation of the choice of antifriction materials for friction units of technological equipment of logging machines*», Bulletin of the Moscow State Forest University – Forest Bulletin, № 3. pp. 107-108.
2. *Friction, wear and lubrication: a handbook* / Ed. I.V. Kragelsky and V.V. Alice. T.1. M.: Mashinostroenie, 1978., 400 p. Demkin N.B., Ryzhov E.V., 1981, Surface quality and contact of machine parts. M.: Mashinostroenie, 224 p.
3. Bashkarev A.Ya. *Plastics in construction and earth-moving machines*. L.: Mashinostroenie, 1981. 191 p.
4. Bogatyreva Zh.I. 2020, «Evaluation of the friction temperature of plain bearings», *Transport: science, education, production*. Voronezh. pp. 218-221.
5. Shevchenko V.P. Restoration of hinged joints of logging machines by electric arc plating. Abstract diss. ...cand. tech. Sciences. Khimki, 1986. 20 p.
6. Serebryansky A.I., Abramov V.V., Kanishchev D.A. 2014, «Methods and results of research of friction temperature in the hinges of forest manipulators», *Forestry journal*. V.4. № 1(13). pp. 189-194. DOI 10.12737/3368.
7. Akishin A.I., Troyanovskaya G.I., Isaev L.N., Sergeeva L.M., Andreeva M.G., Marchenko E.A., Alekseev N.M. 1965, «*Behavior of friction pairs and some self-lubricating materials in vacuum under ion bombardment*», *Theory of friction and wear* // Acad. sciences of the USSR. Scientific advice on friction and lubrication. M.: Nauka, pp. 285-289.

8. Sergeev N.N., Minaev I.V., Gvozdev A.E. 2018, «Decarburization and the Influence of Laser Cutting on Steel Structure», *Steel in Translation*, Vol.48. № 5. pp. 313-319. DOI 10.3103/S096709121805008X.
9. Breki A.D. 2021, *Tribological characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: dissertation . . . Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Breki Alexander Dzhalevich; [Place of defense: FGAOU VO «St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great»]. St. Petersburg., 2021, 378 p.
10. Breki A.D. 2021, *Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: Abstract of the thesis. . . Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulyevich Breki; [Place of defense: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University]. St. Petersburg., 2021, 43 p.

Получено: 23.12.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 539.219.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-253-263

**Концентрация напряжений в слоистой плоскости с
эллиптическим вырезом¹**

В. И. Горбачев, В. В. Некрасов

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vigorby@mail.ru

Некрасов Всеволод Валерьевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vsevolod.nekrasov@math.msu.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о концентрации напряжений в упругой слоистой плоскости с эллиптическим вырезом. Явление исследуется с помощью понятия тензора концентрации напряжений. Изучаются два уровня концентрации: из-за слоистости и из-за выреза. Отдельно приведены формулы для компонент тензора концентрации напряжений в случае бесконечной слоистой плоскости (первый уровень), а также в случае однородной анизотропной плоскости с эллиптическим вырезом (второй уровень). Тензор концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом представляется как произведение тензоров концентрации на первом и втором уровнях. Приведены приближенные формулы для компонент тензора концентрации. Подробно рассмотрен случай совпадения ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия. В этом случае вычислены коэффициенты концентрации в характерных точках, приведены графики зависимости этих коэффициентов от отношения модулей упругости слоев. Кроме того, проведено численное решение задачи с помощью пакета конечно-элементного анализа. Полученные аналитические и численные результаты согласуются с хорошей точностью.

Ключевые слова: механика деформируемого твердого тела, слоистый композит, концентрация напряжений.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. И. Горбачев, В. В. Некрасов. Концентрация напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим вырезом // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 253–263.

¹Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 539.219.2

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-253-263

Stress concentration in a layered plane with an elliptical cutout

V. I. Gorbachev, V. V. Nekrasov

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vigorby@mail.ru

Nekrasov Vsevolod Valeryevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vsevolod.nekrasov@math.msu.ru

Abstract

The article deals with the problem of stress concentration in an elastic layered plane with an elliptical cutout. The phenomenon is investigated using the concept of stress concentration tensor. Two levels of concentration are studied: because of the layering and because of the cutout. Formulas for the stress concentration tensor components are given separately in the case of an infinite layered plane (first level), as well as in the case of a homogeneous anisotropic plane with an elliptical cutout (second level). Stress concentration tensor in a layered plane with It is represented as a product of concentration tensors at the first and second levels. Approximate formulas for the components of the concentration tensor are given. The case of the coincidence of the orientation of the layers and the main axes of the elliptical hole is considered in detail. In this case, the concentration coefficients at characteristic points are calculated, graphs of the dependence of these coefficients on the ratio of the elastic modulus of the layers are given. In addition, a numerical solution of the problem was carried out using a finite element analysis package. The obtained analytical and numerical results are consistent with good accuracy.

Keywords: mechanics of deformable solids, layered composite, stress concentration.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. I. Gorbachev, V. V. Nekrasov, 2023, “Stress concentration in a layered plane with an elliptical cutout”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 253–263.

1. Введение

Широкое применение композиционных материалов (КМ) побуждает к поиску расчетных методик, способных без дорогостоящих затрат на эксперимент прогнозировать поведение композита в составе конструкции, оценивать его прочность. Детальное многоуровневое исследование КМ дает глубинное понимание поведения конструкции из композитов, что позволяет избежать возможных ошибок при проектировании изделий из подобных элементов, создавать конструкции, отвечающие требованиям по прочности и надежности.

При таком исследовании необходимо рассматривать концентрацию напряжений — явление возникновения повышенных местных напряжений в областях резких изменений формы упругого тела, в области вырезов и инородных включений. Концентрация напряжений может существенно влиять на прочность конструкции, особенно при циклических нагрузках [1]. Необходимо точно знать, каковы напряжения в областях концентрации, чтобы иметь возможность судить о возможности разрушения материала.

Классическим примером концентрации напряжений является задача Кирша [2] о равномерном растяжении широкой полосы из однородного изотропного упругого материала с малым отверстием посередине. Такая ситуация часто встречается в технике (например, болтовые, заклепочные соединения и др.).

Для анизотропного материала эта задача была решена Лехницким [3]. Задача о растяжении перекрестно армированной пластины, содержащей круговое отверстие, изучалась Работновым [4].

Большой вклад в изучение явления концентрации напряжений внесли многие российские и иностранные ученые: [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] и многие другие.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечная слоистая упругая плоскость, в которой вырезано эллиптическое отверстие (Рис. 1). Расположим оси декартовой системы координат Ox_1x_2 вдоль главных осей эллиптического отверстия. Пусть δ — угол между слоями и осью x_1 .

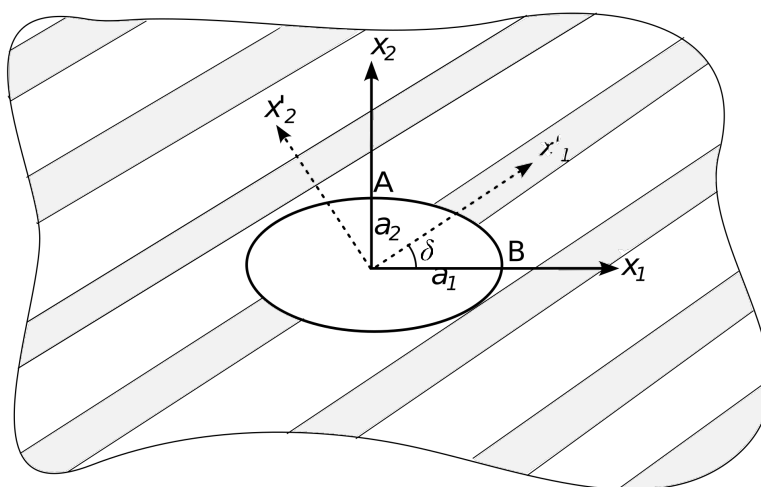


Рис. 1: Слоистая плоскость с эллиптическим вырезом

В рассматриваемой задаче концентрация напряжений происходит от двух причин, а именно из-за отверстия и из-за слоистости плоскости. Поэтому явление концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом целесообразно рассмотреть на двух уровнях.

3. Концентрация напряжений из-за слоистости

Первый уровень — концентрация из-за слоистости. Такой выбор первого уровня связан с тем обстоятельством, что при удалении от отверстия напряжение будет определяться только тензором концентрации напряжений слоистой плоскости, т.е.

$$\underline{\sigma} \rightarrow \underline{A}^{(1)} \underline{\tau}^{(1)} \text{ при } r = \sqrt{x_I x_I} \rightarrow \infty. \quad (1)$$

где $\underline{\tau}^{(1)}$ — напряжения в теле сравнения на первом уровне. В качестве тела сравнения на втором уровне естественно выбрать однородную анизотропную плоскость с отверстием. Причем свойства материала однородной анизотропной плоскости являются эффективными свойствами слоистого композита, т.е. в координатах $x'_1x'_2$ (Рис. 1) они определяются по формулам для

компонент тензора эффективных податливостей бесконечной слоистой плоскости [14]

$$H_{IJKL} = \langle J_{IJKL} \rangle - \left\langle \frac{J_{IJ11}J_{11KL}}{J_{1111}} \right\rangle + \frac{\langle J_{IJ11}/J_{1111} \rangle \langle J_{11KL}/J_{1111} \rangle}{\langle 1/J_{1111} \rangle}, \quad (2)$$

где $J_{IJKL}(x'_2)$ — компоненты тензора податливости в случае плоской задачи теории упругости. Большие индексы принимают значения 1, 2. Знак $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по переменной x'_2 .

Тензор $\tilde{A}^{(1)}$, входящий в формулу (1), является тензором концентрации напряжений в слоистом композите. Компоненты этого тензора в координатах $x'_1x'_2$ для бесконечной слоистой плоскости со слоями, перпендикулярными x'_2 , $A_{MNPQ}^{\text{Сл}}$ были вычислены в работе [15]:

$$A_{MNPQ}^{\text{Сл}}(x'_2) = \Delta_{MNPQ} - \Delta_{MN11} \frac{J_{11PQ}(x'_2)}{J_{1111}(x'_2)} + \Delta_{IJ11} \frac{\langle J_{11KL}/J_{1111} \rangle}{J_{1111}(x'_2) \langle 1/J_{1111} \rangle}. \quad (3)$$

Если слои изотропны, тогда [13]

$$J_{MNPQ}(x'_2) = \gamma(x'_2)\delta_{MN}\delta_{PQ} + q(x'_2)\Delta_{MNPQ}. \quad (4)$$

Здесь $q(x'_2) = [1 + \nu(x'_2)]/E(x'_2)$, $\gamma(x'_2) = -\nu(x'_2)/E(x'_2)$ при плоском напряженном состоянии, и $\gamma(x'_2) = -\nu(x'_2) \cdot [1 + \nu(x'_2)]/E(x'_2)$ при плоской деформации.

В координатах x_1x_2 , повернутых относительно координат $x'_1x'_2$ на угол δ против часовой стрелки компоненты тензора $\tilde{A}^{(1)}$ будут иметь вид

$$A_{IJKL}^{(1)} = l_{IM}l_{JN}l_{PK}l_{QL}A_{MNPQ}^{\text{Сл}}, \quad (5)$$

где l_{IJ} — компоненты матрицы перехода от координат $x'_1x'_2$ к координатам x_1x_2

$$(l_{IJ}) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

4. Концентрация напряжений из-за отверстия

На втором уровне концентрация напряжений в однородной анизотропной плоскости связана с наличием эллиптического выреза. Телом сравнения на втором уровне является та же самая плоскость, только без отверстия, следовательно

$$\tilde{\tau}^{(1)} = \tilde{A}^{(2)}\tilde{\tau}^{(2)}. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{A}^{(2)}$ — тензор концентрации напряжений в анизотропной плоскости с эллиптическим вырезом. Компоненты этого тензора определяются по формуле, полученной ранее В.И. Горбачевым в [17] с использованием методов ТФКП:

$$\begin{aligned} A_{IJKL}^{(2)} &= \Delta_{IJKL} + \\ &+ (-1)^{I+J} \operatorname{Re} \frac{a_1(\Delta_{12KL} + \mu_2\Delta_{22KL}) - ia_2(\Delta_{11KL} + \mu_2\Delta_{12KL})}{(\mu_1 - \mu_2)(a_1 + i\mu_1a_2)} \mu_1^{4-I-J} f_1(z_1) \\ &+ (-1)^{I+J} \operatorname{Re} \frac{a_1(\Delta_{12KL} + \mu_1\Delta_{22KL}) - ia_2(\Delta_{11KL} + \mu_1\Delta_{12KL})}{(\mu_1 - \mu_2)(a_1 + i\mu_2a_2)} \mu_2^{4-I-J} f_2(z_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Поясним подробнее обозначения: a_1, a_2 — большая и малая полуоси эллипса соответственно,

$$\mu_K = \alpha_K + i\beta_K, \quad z_K = x_1 + \mu_K x_2, \quad f_K(z_K) = 1 - \frac{z_K}{\sqrt{z_K^2 - (a_1^2 + \mu_K^2 a_2^2)}} \quad (9)$$

$$\alpha_K = \frac{(\lambda_K^2 - 1) \sin \delta \cos \delta}{\cos^2 \delta + \lambda_K^2 \sin^2 \delta}, \quad \beta_K = \frac{\lambda_K}{\cos^2 \delta + \lambda_K^2 \sin^2 \delta} \quad (10)$$

$$\lambda_K = \sqrt{\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} - (-1)^K \sqrt{D}} \quad D = \left(\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} \right)^2 - \frac{H'_{2222}}{H'_{1111}} \quad (11)$$

В формулу (8) входят параметры μ_1, μ_2 , которые определяются через параметры α_K, β_K по формулам (9). Эти параметры выражаются по формулам (10) через угол δ между главной осью анизотропии x'_1 и координатной осью x_1 , а также через величины λ_K . Величины λ_K , в свою очередь, выражаются по формулам (11) через компоненты тензора эффективной податливости в главных осях анизотропии $x'_1 x'_2$.

В нашем случае компоненты тензора эффективной податливости в осях $x'_1 x'_2$ будут определяться через податливости слоев по формулам (2). Если слои изотропны, т.е. компоненты $J_{IJKL}(x'_2)$ представляются в виде (4), тогда [15]

$$\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} = \left\langle \frac{\gamma + \langle q \rangle}{\gamma + q} \right\rangle, \quad (12)$$

$$D = \left(\frac{H'_{1122} + 2H'_{1212}}{H'_{1111}} \right)^2 - \frac{H'_{2222}}{H'_{1111}} = \left\langle \frac{1}{\gamma + q} \right\rangle \left\langle \frac{(q - \langle q \rangle)^2}{\gamma + q} \right\rangle \quad (13)$$

При этом коэффициенты λ_K (11) будут определяться по следующей формуле

$$\lambda_K = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\gamma + q} \right\rangle - (-1)^K \sqrt{D}} \quad (14)$$

Рассмотрим подробнее формулу (8) для случая совпадения главных осей анизотропии и осей эллипсоидального выреза. Т.к. при этом $\delta = 0$, то, согласно (10), $\alpha_K = 0, \beta_K = \lambda_K$. Отсюда и из (9) найдем чисто мнимые μ_1, μ_2 : $\mu_K = i\lambda_K, \bar{\mu}_K = -i\lambda_K$. Учитывая, что в этом случае из (9) $z_K = x_1 + i\lambda_K x_2$, представим функции $f_K(z_K)$ из (8)-(9) в виде

$$f_K(z_K) = 1 - \frac{x_1 + i\lambda_K x_2}{\sqrt{x_1^2 - a_1^2 - \lambda_K^2(x_2^2 - a_2^2) + 2i\lambda_K x_1 x_2}} \quad (15)$$

Отсюда видно, что функции $f_K(z_K)$ при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ будут действительными функциями

$$f_K(z_K) \Big|_{x_1=0} = 1 - \frac{\lambda_K x_2}{\sqrt{a_1^2 + \lambda_K^2(x_2^2 - a_2^2)}}, \quad f_K(z_K) \Big|_{x_2=0} = 1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a_1^2 + \lambda_K^2 a_2^2}} \quad (16)$$

В частности, из (8) для рассматриваемого случая вычислим следующие величины компонент тензора концентрации напряжений в характерных точках А и В (см. Рис. 1)

$$A_{1111}^{(2)}(0, a_2) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{a_2}{a_1}, \quad A_{2211}(a_1, 0) = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (17)$$

Эти значения компонент тензора концентрации в точности совпадают с коэффициентами концентрации напряжений в растягиваемой вдоль x_1 анизотропной пластинке с эллипсоидальным отверстием, вычисленными С.Г. Лехницким в 1936 г [3].

5. Приближенные выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистой плоскости с отверстием

Найдем далее приближенные выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистой плоскости с эллиптическим отверстием. В соответствии с методикой, предложенной в [17], этот тензор равен произведению тензоров концентрации на первом и втором уровнях. Кратко сформулируем положения теории, подробно описанной в [17]: это произведение представляет собой первый член асимптотического разложения по малому геометрическому параметру α , равному отношению периода ячейки к характерному размеру концентратора. Оно дает основной вклад в напряжение в теле с концентраторами различной природы. Такой подход использовался в работе [16] для вычисления концентрации напряжений в упругих телах с множественными концентраторами, где с его помощью были получены результаты, хорошо согласующиеся с известными решениями. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_{IJKL} &\approx A_{IJST}^{(1)} A_{STKL}^{(2)} = A_{MNPQ}^{C\pi} l_{IM} l_{JN} l_{PS} l_{QT} A_{STKL}^{(2)} = \\ &= (\Delta_{MNPQ} + \Delta_{MN11} Q_{PQ}) l_{IM} l_{JN} l_{PS} l_{QT} A_{STKL}^{(2)} = A_{IJKL}^{(2)} + l_{I1} l_{J1} l_{P1} l_{Q1} Q_{PQ} A_{STKL}^{(2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где через Q_{IJ} обозначена величина

$$Q_{IJ} = \frac{\langle J_{11IJ}/J_{1111} \rangle}{J_{1111}(x'_2) < 1/J_{1111} \rangle} - \frac{J_{11IJ}(x'_2)}{J_{1111}(x'_2)} \quad (19)$$

а коэффициенты $A_{IJKL}^{(2)}(x_1, x_2)$ определяются по формуле (8).

Пусть слои изотропны, т.е. компоненты $J_{IJKL}(x'_2)$ представляются в виде (4), тогда отличны от нуля только $Q_{11}(x'_2)$ и $Q_{22}(x'_2)$

$$Q_{11} = \frac{1}{(\gamma + q) < 1/(\gamma + q) \rangle} - 1, \quad Q_{22} = \frac{\langle \gamma/(\gamma + q) \rangle}{(\gamma + q) < 1/(\gamma + q) \rangle} - \frac{\gamma}{\gamma + q} \quad (20)$$

Пользуясь формулой (18), распишем более подробно выражения для компонент тензора концентрации

$$\begin{aligned} A_{11KL} &\approx A_{11KL}^{(2)} + Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \cos^2 \delta + \\ &\quad + Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \cos^2 \delta, \\ A_{22KL} &\approx A_{22KL}^{(2)} + Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin^2 \delta + \\ &\quad + Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin^2 \delta, \\ A_{12KL} &\approx A_{12KL}^{(2)} + \frac{1}{2} Q_{11} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \sin^2 \delta - A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin 2\delta + \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_{22} \cdot (A_{11KL}^{(2)} \sin^2 \delta + A_{22KL}^{(2)} \cos^2 \delta + A_{12KL}^{(2)} \sin 2\delta) \sin 2\delta \end{aligned} \quad (21)$$

6. Случай одинаковой ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия

Особенно простой вид приобретают формулы (21) при $\delta = 0$, т.е. в том случае, когда слои и главные оси эллиптического отверстия одинаково ориентированы. В этой ситуации системы координат x_1, x_2 и x'_1, x'_2 совпадают, $l_{IJ} = \delta_{IJ}$, и формула (18) принимает вид

$$A_{IJKL}(x_1, x_2) \approx A_{IJKL}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ11} Q_{MN}(x_2) A_{MNKL}^{(2)}(x_1, x_2) \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} A_{11KL} &\approx A_{11KL}^{(2)} + Q_{MN}A_{MNKL}^{(2)}, \\ A_{22KL} &\approx A_{22KL}^{(2)}, \quad A_{12KL} \approx A_{12KL}^{(2)} \end{aligned} \quad (23)$$

Найденный здесь тензор концентрации напряжений позволяет дать приближенные выражения для напряжений в окрестности эллипсоидального выреза в слоистой плоскости при заданном постоянном тензоре напряжений в теле сравнения, в качестве которого берется однородная анизотропная плоскость с эффективными свойствами без отверстия

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJKL}(x_1, x_2)\tau_{KL} \quad (24)$$

Пусть, например, рассматривается растяжение вдоль слоев, т.е. $\tau_{11} = p$, $\tau_{22} = \tau_{12} = 0$. В этом случае

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJ11}(x_1, x_2)p = [A_{IJ11}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ11}Q_{MN}(x_2)A_{MN11}^{(2)}(x_1, x_2)]p \quad (25)$$

Если слои изотропны, тогда из формулы (25), а также из формул (20) и (17) найдем значения тангенциальных напряжений в характерных точках А и В (см. Рис. 1) контура отверстия

$$\sigma_{11}(0, a_2) \approx K_A \cdot p, \quad \sigma_{22}(a_1, 0) \approx K_B \cdot p \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K_A &= [1 + Q_{11}(a_2)]A_{1111}^{(2)}(0, a_2) = \frac{1 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_2/a_1}{[\gamma(a_2) + q(a_2)] < 1/\gamma + q >}, \\ K_B &= A_{2211}^{(2)}(a_1, 0) = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned} \quad (27)$$

При растяжении поперек слоев $\tau_{22} = p$, $\tau_{11} = \tau_{12} = 0$ получаем

$$\sigma_{IJ} \approx A_{IJ22}(x_1, x_2)p = [A_{IJ22}^{(2)}(x_1, x_2) + \Delta_{IJ22}Q_{MN}(x_2)A_{MN22}^{(2)}(x_1, x_2)]p \quad (28)$$

Тангенциальные напряжения в точках А и В будут равны

$$\sigma_{11}(0, a_2) \approx K'_A \cdot p, \quad \sigma_{22}(a_1, 0) \approx K'_B \cdot p \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} K'_A &= [1 + Q_{11}(a_2)]A_{1122}^{(2)}(0, a_2) = -\frac{1}{[\gamma(a_2) + q(a_2)] < 1/\gamma + q >} \cdot \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \\ K'_B &= A_{2211}^{(2)}(a_1, 0) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_2/a_1 \end{aligned} \quad (30)$$

Из формул (27) и (30) видно, что коэффициенты концентрации K_B и K'_B будут такими же, как и для однородной анизотропной плоскости, а коэффициенты K_A и K'_A зависят от того, какому из слоев принадлежит точка А.

В таблице 1 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений для случая слоистой пластины, составленной из двухслойных пакетов периодичности с вырезанным в ней круговым отверстием. Ширина слоев предполагается одинаковой. Коэффициенты Пуассона материалов слоев также приняты одинаковыми $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, а отношение модулей Юнга изменяются в пределах $0 < \eta = E_1/E_2 \leq 1$.

На рисунке 2 представлены графики зависимости коэффициентов концентрации от отношения модулей Юнга слоев $0 < \eta = E_1/E_2 \leq 1$. Кривые K_B , $K_A^{[1]}$ и $K_A^{[2]}$ соответствуют случаю растяжения вдоль слоев периодически неоднородной пластины с круглым отверстием. При этом кривая $K_A^{[1]}$ соответствует случаю, когда точка А принадлежит первому $E_1 < E_2$ слою, а кривая $K_A^{[2]}$ — случаю, когда точка А принадлежит второму, более жесткому, слою. Кривые

E_1/E_2	0,01	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
l_1	8,084	2,617	1,897	1,405	1,285	1,197	1,078
l_2	0,597	0,644	0,693	0,781	0,822	0,86	0,933
K_B	-0,207	-0,593	-0,761	-0,911	-0,947	-0,971	-0,994
$K_A^{[1]}$	0,192	0,775	1,197	1,821	2,071	2,293	2,676
$K_A^{[2]}$	19,17	7,747	5,983	4,551	4,143	3,821	3,346
K'_B	9,681	4,261	3,59	3,186	3,107	3,057	3,011
$K_A'^{[1]}$	-0,004	-0,108	-0,254	-0,521	-0,631	-0,728	-0,884
$K_A'^{[2]}$	-0,409	-1,078	-1,268	-1,301	-1,263	-1,214	-1,104

Таблица 1: Значения коэффициентов концентрации напряжений.

K'_B , $K_A'^{[1]}$ и $K_A'^{[2]}$ построены для случая растяжения этой же пластинки поперек слоев. При $\eta = E_1/E_2 \approx 0.3$ в случае растяжения вдоль слоев в точке А контура слой растянуты, причем в более жестком втором слое растягивающие напряжения примерно в 5 раз превышают напряжения вдали от отверстия. Если же пластинка растягивается поперек слоев, то в точке А будут действовать сжимающие напряжения, и в более жестком слое они примерно в 1,3 раза превышают приложенную на бесконечности нагрузку.

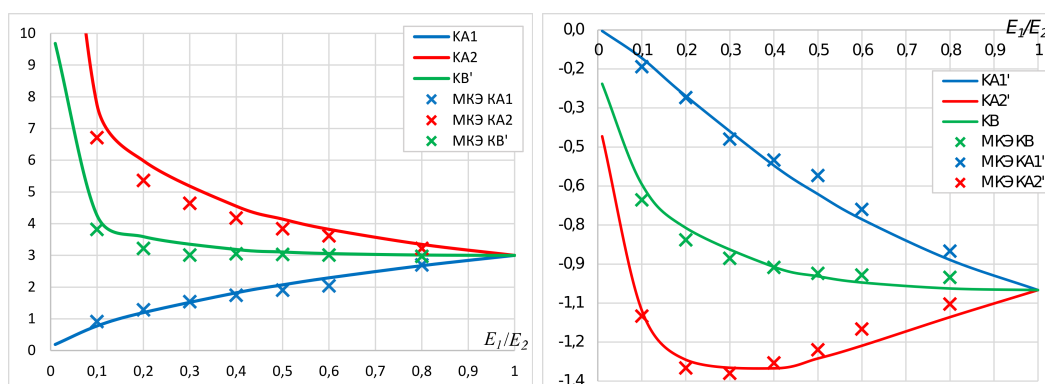


Рис. 2: Зависимость коэффициентов концентрации в характерных точках от отношения модулей упругости $0 < E_1/E_2 \leq 1$. Сплошные линии построены по полученным приближенным аналитическим формулам. Крестиком представлены результаты численного решения методом конечных элементов.

7. Численное решение задачи

Для сравнения с приближенными аналитическими результатами было проведено конечно-элементное моделирование задачи в пакете Simcenter Femap with Nastran: создана геометрическая модель пластины с круговым отверстием, проведено разбиение пластины на слои, соответствующие разным материалам (см. Рис. (3)), построена сетка пластинчатых элементов, поставлены требуемые граничные условия.

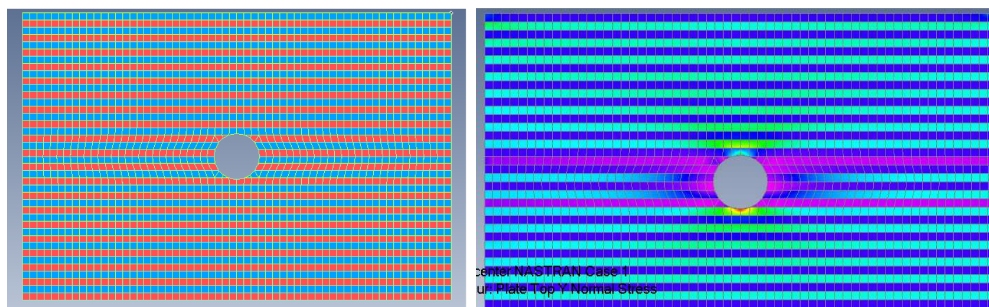


Рис. 3: Конечно-элементная модель решаемой задачи и один из результатов расчета: поле напряжений σ_{11} для случая растяжения вдоль слоев.

По результатам расчета анализировались поля напряжений и вычислялись коэффициенты концентрации в характерных точках. Они представлены на рисунке 2 и хорошо согласуются с кривыми, которые построены по полученным в работе приближенным аналитическим формулам.

Отметим ещё раз, что формула (24) для напряжений в слоистой плоскости с эллипсоидальным отверстием является приближенной. Правая часть этой формулы представляет из себя первый член разложения точных напряжений по степеням малого параметра $\alpha = l/\Delta \ll 1$, где l — размер ячейки периодичности слоистой плоскости, а Δ — характерный размер эллипса.

8. Заключение

Рассмотрена задача о концентрации напряжений в упругой слоистой плоскости с эллиптическим вырезом. Изучались два уровня концентрации: из-за слоистости и из-за выреза. Тензор концентрации напряжений в слоистой плоскости с вырезом получен как произведение тензоров концентрации на первом и втором уровнях. В случае совпадения ориентации слоев и главных осей эллиптического отверстия вычислены коэффициенты концентрации в характерных точках, приведены графики зависимости этих коэффициентов от отношения модулей упругости слоев. Кроме того, проведено численное решение задачи с помощью пакета конечно-элементного анализа. Полученные аналитические и численные результаты согласуются с хорошей точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов // М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Kirsch E. G. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. — 1898. — Т. 42. — С. 797-807.
3. Лехницкий С. Г. Концентрация напряжений вблизи эллиптического и кругового отверстия в растягиваемой анизотропной пластинке // Вестн. инж. и техн. № 5. 1936.
4. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения // М.: Наука, 1987.
5. Нейбер Г. Концентрация напряжений // М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости // М.: Наука, 1966. 708 с.

7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий // Киев, Наукова думка, 1968. 888 с.
8. Савин Г.Н., Тульчий В.И. Справочник по концентрации напряжений // Киев, Вища школа, 1976, 412 с.
9. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями // Киев - Донецк, Вища школа, 1976, 200 с.
10. Кишкин Б.П. Конструкционная прочность материалов // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976, 184 с.
11. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах // М.: Наука, 1993, 224 с.
12. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах конструкций // М.: Наука, 1996, 240 с.
13. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. - М.: Изд-во МГУ, 1976.
14. Горбачев В.И., Победра Б.Е. Об упругом равновесии неоднородных полос // Известия АН СССР, МТТ, № 5, 1979.
15. Горбачев В.И. Операторы концентрации напряжений и деформаций в упругих телах // В сб. Расчеты на прочность. -М.: Машиностроение, № 30, 1989.
16. Горбачев В. И., Гаделев Р. Р. Концентрация напряжений в упругих телах с множественными концентраторами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2014. — № 6. — С. 45–50
17. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости: дис. доктора физико-математических наук : 01.02.04 / МГУ им. М. В. Ломоносова. - Москва, 1991.

REFERENCES

1. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov // М.: Nauka, 1979. 560 p.
2. Kirsch E. G. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1898. – Т. 42. – 797-807 pp.
3. Lekhnickij S. G. Koncentraciya napryazhenij vblizi ellipticheskogo i krugovogo otverstiya v rastyagivaemoj anizotropnoj plastinke // Vestn. inzh. i tekhn. № 5. 1936.
4. Rabotnov YU. N. Vvedenie v mekhaniku razrusheniya // М.: Nauka, 1987.
5. Nejber G. Koncentraciya napryazhenij // М.-Л.: OGIZ, 1947.
6. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti // М.: Nauka, 1966. 708 p.
7. Savin G.N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij // Kiev, Naukova dumka, 1968. 888 p.
8. Savin G.N., Tul'chij V.I. Spravochnik po koncentracii napryazhenij // Kiev, Vishcha shkola, 1976, 412 p.

9. Kosmodamianskij A.S. Napryazhennoe sostoyanie anizotropnyh sred s otverstiyami i polostyami // Kiev - Doneck, Vishcha shkola, 1976, 200 P.
10. Kishkin B.P. Konstrukcionnaya prochnost' materialov // M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1976, 184 p.
11. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. Tonkie koncentratory napryazhenij v uprugih telah // M.: Nauka, 1993, 224 p.
12. Mavlyutov R.R. Koncentraciya napryazhenij v elementah konstrukcij // M.: Nauka, 1996, 240 p.
13. Lomakin V.A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. - M.: Izd-vo MGU, 1976.
14. Gorbachev V.I., Pobedrya B.E. Ob uprugom ravnovesii neodnorodnyh polos // Izvestiya AN SSSR, MTT, № 5, 1979.
15. Gorbachev V.I. Operatory koncentracii napryazhenij i deformacij v uprugih telah // V sb. Raschety na prochnost'. -M.: Mashinostroenie, № 30, 1989.
16. Gorbachev V. I., Gadelev R. R. Koncentraciya napryazhenij v uprugih telah s mnozhestvennymi koncentratorami // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. — 2014. — № 6. — 45--50 pp.
17. Gorbachev V.I. Variant metoda osredneniya dlya resheniya kraevykh zadach neodnorodnoj uprugosti: dis. doktora fiziko-matematicheskikh nauk : 01.02.04 / MGU im. M. V. Lomonosova. - Moskva, 1991.

Получено: 31.08.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-264-275

XVIII век. У истоков регулярного математического просвещения в России. «Полный курс чистой математики» Ефима Дмитриевича Войтяховского

Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина

Ласковая Татьяна Алексеевна — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: talaskovy@mail.ru

Рыбников Константин Константинович — кандидат физико-математических наук, ООО «Полиэдр» (г. Москва).

e-mail: kkrybnikov@mail.ru

Чернобровина Ольга Константиновна — Мытищинский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана; МБОУ СОШ № 10 с углубленным изучением отдельных предметов городского округа Щелково (г. Фрязино).

e-mail: talaskovy@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена истории математического образования в России во второй половине XVIII века. Основной темой исследования авторов является анализ содержания четырехтомного «Теоретического и практического курса чистой математики» Е. Д. Войтяховского, и его места в российском математическом просвещении. Этот труд интересен тем, что в нем автор предпринял попытку создания наиболее полного учебника, в котором отводилась особая роль целостности теории и практики. Несмотря на то, что этот учебник в первую очередь предназначался для военных училищ, в нем были изложены основные понятия и формулировки общей математики как науки, а также изложены решения большого количества прикладных задач. Наряду с учебниками Л. Ф. Магницкого, С. Я. Румовского, М. Е. Головина, «Курс чистой математики» Е. Д. Войтяховского стал отправной точкой и идеальной методической площадкой для формирования последующих курсов математики. Благодаря этим работам был создан учебный базис для серьезного математического образования, по существу, объединивший опыт создания всех учебников XVIII века.

Ключевые слова: Войтяховский Е.Д., «Курс чистой математики», история, математическое образование, архивные рукописи.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина. XVIII век. У истоков регулярного математического просвещения в России. «Полный курс чистой математики» Ефима Дмитриевича Войтяховского // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 264–275.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-264-275

XVIII century. At the origins of regular mathematical education in Russia. «The complete course of pure Mathematics» by Yefim Dmitrievich Voityakhovsky

T. A. Laskovaya, K. K. Rybnikov, O. K. Chernobrovina

Laskovaya Tatyana Alexeevna — Bauman Moscow State Technical University (Moscow).*e-mail: talaskovy@mail.ru***Rybnikov Konstantin Konstantinovich** — candidate of physical and mathematical sciences, LLC «Polyhedron» (Moscow).*e-mail: kkrybnikov@mail.ru***Chernobrovina Olga Konstantinovna** — Bauman Moscow State Technical University (Mytishchi branch); MOE SOSH № 10 with In-depth Study of Individual Subjects of the Shchelkovo City District (Fryazino).*e-mail: talaskovy@mail.ru***Abstract**

The article focuses on the history of mathematical education in Russia in the second half of the 18th century. The authors' main research topic is the analysis of the four-volume "Theoretical and Practical Course of Pure Mathematics" by E.D. Voityakhovsky and its place in Russian mathematical education. This book is interesting because the author attempted to create the most comprehensive textbook, in which the integrity of theory and practice played a special role. Although this textbook was primarily intended for military schools, it presented the basic concepts and formulations of general mathematics as a science, as well as solutions to a large number of applied problems. Along with the textbooks by L.F. Magnitsky, S.Ya. Rumovsky, M.E. Golovin, Voityakhovsky's "Course of Pure Mathematics" became a starting point and an ideal methodological platform for the formation of subsequent mathematics courses. Thanks to these works, an educational basis was created for serious mathematical education, essentially combining the experience of creating all the textbooks of the 18th century.

Keywords: Voityakhovsky E.D., "Course of Pure Mathematics", history, mathematical education, archival manuscripts.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

T. A. Laskovaya, K. K. Rybnikov, O. K. Chernobrovina, 2023, "XVIII century. At the origins of regular mathematical education in Russia. «The complete course of pure Mathematics» by Yefim Dmitrievich Voityakhovsky", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 264–275.

«Российская общая беда – плохая память. Мы не помним, и поэтому постепенно теряем то, что делает нас великой страной».

Дм. Лихачев.

«Зная прошлое своих предков, мы не можем не любить России».

Вал. Пикуль.

1. Основной текст статьи

Вряд ли имя Ефима Дмитриевича Войтяховского (1752-1822) что-либо скажет большинству математиков, даже касающихся в своих исследованиях вопросов отечественного просвещения. И тем не менее его учебник «Теоретический и практический курс чистой математики, содержащий в себе Арифметику, Геометрию, Тригонометрию с практикой и описанием пропорционального циркуля или Сектора, Алгебру с высшими степенями, Криволинейную геометрию с теорией и практикой искусства бросания бомб» почти полвека оставался одним из наиболее популярных руководств в России [3].

Первое издание этого четырёхтомного учебника появилось в 1787 году, когда автору исполнилось 35 лет, а последнее, четвёртое, в 1807 году, через двадцать лет.

В 2022 году исполнилось 200 лет со дня смерти автора этой книги. Удивительно, но даже сейчас, с позиции современного преподавателя, следует отметить необыкновенно полное изложение всей программы элементарной математики. В этой статье авторы попытались ответить на ряд исторических вопросов.

Кто же такой автор этого капитального труда и какое место занимает он и его работы в истории раннего российского математического образования? И, наконец, почему он стал объектом исследования авторов этой статьи?

Волей случая в их руки попал «Полный курс чистой математики в пользу и употребление юношества и упражняющихся в математике» Ефима Войтяховского артиллерии штык-юнкера и партикулярного учителя математики, как он сам себя не без некоторого эпатажа обозначил на титульном листе своей книги. Нужно ли говорить о том, какие чувства испытывает историк математики, когда осторожно перелистывает страницы учебника екатерининской эпохи?

Отправной точкой регулярного математического образования в России, видимо, следует признать начало XVIII века, когда в отечественном просвещении появилась такая мощная фигура как Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739). Биография этого человека чем-то напоминает историю жизни Михаила Васильевича Ломоносова. Уроженец города Осташков Тверской губернии, незаконно рождённый ребёнок, формально усыновлённый дьячком одной из церквей, он с рыбным обозом направился в Московский Иосифо-Волоколамский монастырь, где был оставлен чтецом. Впрочем, версий о происхождении и начале жизненного пути Леонтия Магницкого предостаточно.

По одной из версий он был усыновлен не дьячком, а крестьянином, юные годы вынужден был заниматься крестьянской работой, что, вообще-то, маловероятно. По другой версии его дядя был настоятель Нило-Столбенской обители на Селигере Нектарий, не оставивший забот о племяннике.

Несмотря на то, что он был настоящим самоучкой, уровень образования позволил ему не только получить полноценные знания математики того времени, но и научиться переводить и читать голландские, немецкие и итальянские книги. Разумеется, в Московской Славяно-Греко-Латинской академии, где он стал учиться, математику никак не преподавали, но Леонтий Филиппович настолько стал выделяться среди её воспитанников, что получил приглашение учиться, а затем преподавать в только что открытой Математико-Навигацкой школе, где кстати, он затем стал первым русским преподавателем, а потом и возглавил её. Пётр Первый называл его в шутку «магнитом, притягивающим знания» и пожаловал ему новую фамилию. Так Леонтий Теляшин стал Магницким.

Известно, что первый учебник по математике император поручил написать именно Магницкому. Книга «Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведённая, и воедино собрана, и на две части разделённая» [6] была написана за два года и напечатана в 1703 году рекордным по тем временам тиражом 2400 экземпляров.

«Арифметика» Магницкого стала основным учебником в Матемамико-Навигацкой школе, а затем в Морской академии в Санкт-Петербурге. Магницкий оказался первым, кто ввел из-

вестные и общепринятые в настоящее время термины: миллион, биллион, триллион, квадриллион, а также – множитель, делитель, произведение и извлечение корня. Именно об «Арифметике» Магницкого М.В. Ломоносов сказал, что эта книга стала «вратами его учёности».

Серьёзными предпосылками создания учебника Магницкого стали математические учебные пособия голландских математиков. Эти книги по поручению Петра I из Амстердама доставил негоциант Ян Тессинг. Перевод этих книг и подготовку их к изданию в России, правда, ничтожным тиражом, осуществил священник И. Копиевский. В 1699 году им был осуществлен выпуск на русском языке книги «Краткое и полезное руководство во арифметику, или в обучение и познание всякого счёту, в сочтении всяких вещей». В книге рассматривались действия над целыми числами и дробями, а также приводились сведения по определению мер, весов и проведению денежных расчетов. В 1703 году в России были изданы таблицы значений основных тригонометрических функций, а также таблицы логарифмов. Петр I высоко оценил знания Магницкого. По его указанию в 1707 году тот руководил сооружением Тверской крепости.

В книге Магницкого указываются возможные алгебраические приложения для практики, геометрические задачи, а также используются тригонометрические таблицы и вычисления. К этому следует добавить начальные сведения по астрономии, геодезии и навигации.

Более двух десятилетий учебник Магницкого оставался почти единственным пособием на русском языке для изучения математики и применения ее на практике.

В качестве последователей Магницкого следует упомянуть Степана Яковлевича Румовского (1734-1812) и Михаила Евсеевича Головина (1756-1790).

Свою научную карьеру Степан Румовский начинал с гимназии при Московском университете, первый набор которой курировал М.В. Ломоносов. Как и все гимназисты этого набора, происхождения он был незнатного. Родился он в селе Старый Погост Тверской губернии. В дальнейшем увлекался астрономией. С 1767 года стал членом Петербургской Академии наук, а с 1800 года по 1803 год был её вице-президентом. С 1803 года по 1812 год был попечителем Казанского учебного округа. Как организатор российского просвещения стал известен как создатель трехступенчатой системы школ: начальных, городских и средних.

Широкую известность С. Я. Румовский завоевал в научном мире как квалифицированный переводчик и комментатор научных трудов Леонарда Эйлера. В 1756 году он начал свою педагогическую деятельность в Петербургской академии наук, в качестве преподавателя математики. Он справедливо полагал, что одним из препятствий для развития наук в России является отсутствие учебной литературы на родном языке. Чтобы восполнить этот недостаток, Румовский взялся за составление учебного пособия по математике на русском языке для студентов академического университета.

В 1760 году была издана книга «Сокращённая математики, часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии» [10]. Видимо сам автор планировал продолжение этого учебного курса, так как назвал эту книгу частью I. От других пособий по математике учебник Румовского выгодно отличали «доступность и простота изложения, более совершенная по сравнению с предыдущими учебниками терминология, включение новейших математических исследований, в частности исследований Эйлера»¹.

Среди учебников по математике в XVIII веке следует отметить также книги по геометрии Михаила Евсеевича Головина (1756 – 1790), племянника М.В. Ломоносова, родившегося в селе Матигоры Архангельской губернии.

По рекомендации дяди, в юные годы Головин был зачислен в гимназию при Петербургской Академии наук, а затем стал студентом Академии. Изучал математику под руководством Леонарда Эйлера. Был назначен адъюнктом Академии. Хорошее знание французского языка позволило Головину, наряду с Румовским, стать одним из лучших переводчиков Эйлера,

¹Павлова Г. Е. Степан Яковлевич Румовский (1734 – 1812). – М.: Наука, 1979. – с. 46

вклад которого в российское просвещение и науку трудно переоценить. В частности, Головин осуществил в 1778 году перевод книги Эйлера «Морская наука», подготовленный для учащихся морских школ, где излагаемые основы кораблестроения и кораблевождения опирались на технику расчетов, аппарат которых излагался в базовых пособиях Л. Эйлера «Руководство к арифметике» (нем изд. 1738-40, русский перевод 1740, 1760) и «Универсальная арифметика» (1768-1769).

Последние годы своей жизни Головин работал в Петербургском главном народном училище, в комиссии училищ и учительской семинарии. Был введен в комиссию Министерства народного просвещения по работе училищ. В 1786 году был избран Почетным членом Петербургской Академии наук. По поручению комиссии он написал и издал несколько книг по арифметике и геометрии: «Руководство к арифметике для употребления в народных училищах» (ч.1-1783, ч.2-1786), «Краткое руководство к геометрии для народных училищ» (1786) и «Плоская и сферическая геометрия с алгебраическими доказательствами» (1789). Эти учебники долгое время были единственными руководствами для начальных училищ в нашей стране.

Однако, даже на фоне достаточно интенсивного процесса становления системы математического образования в XVIII веке, четырёхтомный учебник Ефима Дмитриевича Войтяховского замечен, и более того, явно претендует на роль наиболее полного и многогранного педагогического труда. Представленный автором труд охватывает практически все разделы, так называемой, элементарной математики (том I — Арифметика, том II — Геометрия, том III — Тригонометрия и её приложения, том IV — Алгебра, включая дополнительный раздел «Теория и искусство бросания бомб»).

Немного о самом Войтяховском. Больших связей в высшем свете он не имел. Не особо знатный витебский шляхтич, не преуспевавший в чинах, он мог рассчитывать только на свои знания. Кстати, чин штык-юнкера, который он с гордостью носил, просуществовал в русской армии относительно недолго. Он был введен в артиллерию Петром I во время Северной войны как аналог такого же низшего офицерского чина в шведской армии. Позднее чин штык-юнкера сохранился как условный в юнкерских училищах, подобно званию вице-сержанта в советских суворовских училищах.

Как ученый Войтяховский также не был известен, с Академией Наук не сотрудничал. Однако, как преподаватель достиг значительной известности. Преподавал в артиллерийском и инженерном шляхетских кадетских корпусах и даже занимал профессорскую кафедру. Считался одним из лучших частных (или как тогда говорили — партикулярных) учителей. Одно время руководил своей частной школой в Москве.

Среди его учеников были известные будущие полководцы: граф Николай Михайлович Каменский, граф Александр Иванович Кутайсов, легендарный генерал Алексей Петрович Ермолов.

Популярность Войтяховского в значительной степени была обусловлена его учебным курсом, содержащим практически основы точных расчетов при артиллерийской стрельбе, и принципов фортификации, а также тем, что каким-то образом он оказался известен при дворе. По одной версии он преподавал математику великим князьям Александру Павловичу (будущему императору Александру I) и Константину Павловичу. Кстати, именно им он посвятил свой «Курс чистой математики». По другой версии, его представил вступившему на престол императору Павлу Первому его коллега по шляхетским кадетским корпусам Николай Васильевич Верещагин (1744-1807), который и преподавал математику великим князьям, используя книгу Войтяховского.

Ясно одно: книгу эту император оценил достаточно высоко, равно как и её автора. Этой, в общем-то, объективной оценке не помешали некоторые «политические обстоятельства». «Курс чистой математики» был издан впервые в екатерининские времена задолго до воцарения императора Павла. Разумеется, Войтяховский счел необходимым сказать в своей книге хвалебные слова об императрице Екатерине II.

«Премудрая и Чадолубивая Матерь отечества Всеавгустейшая наша Монархиня, облекая Россию извне славою и крепостию, внутрь же преобразуя сердца и умы своего народа, между прочими спасительными установлениями начертала новый, удобнейший и кратчайший способ к просвещению умов юных, и тем оживила ревность и усердие упражняющихся в учении».

Сама книга имеет обращение к внукам императрицы - «их императорским высочествам благоверным князьям российским Александру Павловичу и Константину Павловичу», которым автор с «достождолжным благоговением приносит к стопам» свой труд, надеясь на то, что они «удостоят своего воззрения» его сочинение, «возбуждающее прилежность в юношах, пользе которых оно посвящено», которые будучи, «оживотворенные Высочайшей милостью», возбудят в авторе «новое рвение к продолжению подобных упражнений».

Заметим, что автор избегает упоминания об их отце, будущем императоре Павле Первом, который был подвергнут полуопале-полунемилости своей венценосной матери. Впрочем, до коронации Павла I оставалось почти 10 лет, по истечении которых оказалось, что новый император высоко оценивает знания и труды Войтяховского, не принимая во внимание каких-либо домыслов.

Войтяховский был буквально обласкан императором, от которого неоднократно получал в дар золотые табакерки и перстни с драгоценными камнями. Такие подарки котиrowались при дворе наравне со знаками отличия. Он получил также в дар значительные лесные угодья на границе Болховского и Козельского уездов (так называемую Дубинскую засеку или, как говорили тогда, лесную дачу). Эти земли удачно примыкали к селу Кудиново, купленному Войтяховским в 1802 году. В честь императора он называет систему хуторов и деревень на этих землях именем Павлодар. Хозяином он был рачительным и умелым. Соседей он поразил устройством в своем доме и хозяйственных постройках водопровода с чистой водой.

После смерти императора Павла I он практически постоянно жил в своем имении. Здесь он продолжал давать уроки детям соседей – помещиков. Об этом свидетельствуют воспоминания Николая Гавриловича Лёвшина (1788-1845) – будущего героя Отечественной войны 1812 года. С 1840 года Лёвшин писал тетради («Домашний Памятник»), в которых изложил характерные черты жизни дворян своего времени, генеалогию своего рода. «Домашний Памятник» был издан в ежемесячном историческом журнале «Русская Старина», в 1873 и 1876 годах по тетрадям, доставленным в редакцию сыном Н. Г. Левшина [10].

В своих записках Лёвшин необыкновенно живо описывает и своего учителя, и своё состояние на его уроках. В отличие от своего брата Петра, больших успехов он достигнуть не смог. Он вспоминает свое состояние страха перед уроком, поскольку Войтяховский учителем был строгим и часто повышал голос, распекая нерадивого ученика. Внешний вид учителя автор описывает так: «Ефим Дмитриевич одевался по старинному в немецкие разноцветные кафтаны, со стеклянными и бронзовыми пуговицами, напудрен, с буклями и длинной косой; перстень бриллиантовый на пальце, жалованная табакерка в глазетовом жилете и часы жалованные, с бриллиантовыми брелоками; шуба и шапка соболья, верх бархатный»² Конечно, это были подарки самого императора, которые он получал после того, как царственные юноши выдерживали экзамен по математике!

Как часто такие случайные воспоминания, воспроизведённые на бумаге и поэтому оставшиеся нам как свидетельство былой жизни, обеспечивают долгую память об исторических персонажах, о которых, быть может, все впоследствии забыли бы. Такими оказались и воспоминания Николая Лёвшина. Он же упомянул о семейной драме старого учителя. Единственный сын Ефима Дмитриевича доставлял ему немало огорчений, ибо был пустым человеком, бездельником и мотом. В семидесятилетнем возрасте Войтяховский скончался. Благодаря тому же Николаю Лёвшину мы знаем, что похоронен он был на кладбище села Луново Болховского уезда, что находится на северо-западе Орловской губернии недалеко от границы соседней

²Лёвшин Н. Г. Домашний памятник... 1788—1804 // Русская старина. — 1873. — Т. 8, № 12. — С. 841

Калужской. После его смерти случилось то, чего старик так опасался при жизни. Сын быстро распродал по частям легендарный Павлодар, окончив жизнь практически в нищете. Часть имения купил отец Алексея Апухтина. Известно, что поэт был дружен с Петром Ильичом Чайковским, посещавшим друга в его имении.

Осталась ли память о штык-юнкере артиллерии Ефиме Дмитриевиче Войтяховском?

Николай Лёвшин горестно пишет: «Исчезло все, как большей частью все исчезает, как дым: о Войтяховском все забыли, а его «Курс чистой математики» оставлен; редко кто о нем что знает. Имение его разошлось по рукам наследников, - не осталось ничего теперь и помянуть некому!»³. Горькие слова. Однако, именно эти слова привела на памятной табличке, прикрепленной к кресту, воздвигнутому на его могиле, орловский исследователь-краевед Валентина Михайловна Афоничева.

Так ли это? Вернёмся к анализу книги Войтяховского.

В части первой «Курса чистой математики» Войтяховский счел необходимым сделать то, что современные авторы, пытаясь избежать перегрузки школьников, не считают обязательным включать в свои учебники, что, разумеется, имеет свою разумную подоплеку.

Так, например, исходный раздел «О математике вообще» начинается с определения математики как науки: «Математика есть наука о величинах или количествах, показывающая правила, как из известных количеств находить другие нам еще неизвестные».

Далее идут понятия «смешанной» и «чистой» математики, величины или количества, а также математического порядка.

Интересны и другие формулировки:

«Понятие или идея есть всякое воображение или помышление о всякой вещи», «Определение есть такое предложение, которое через ясное и полное понятие так ограничивает вещь, что оную всегда от прочих различить можно».

В таком же духе даются понятия аксиомы, задачи, леммы, положения, доказательства.

Следующий раздел «О арифметике и счислении» также начинается определением арифметики: «Арифметика есть наука о числах, и о правилах способных к решению разных случающихся в обществе задач». Далее подробно описываются действия над целыми числами и дробями, методы решения задач с пропорциями, арифметические и геометрические прогрессии.

Особое внимание автор уделил таблицам измерений весов, линейных размеров и объемов в разных странах, указывая соответствия между ними.

Простые арифметические задачи Войтяховский приводит в качестве примеров, сопровождая их решениями. В этих решениях он избегает составления систем уравнений. Типичным примером является следующая задача.

«Некто принял к себе слугу на месяц с таким условием, чтобы за каждый рабочий день давать ему 20 копеек, а за нерабочий день вычитать у работника по 10 копеек; но по прошествии месяца слуга получил только 2 руб. 50 коп. Спрашивается число рабочих и нерабочих дней в месяце». (стр. 229 – 300 [1]).

Казалось бы, вводя неизвестные x и y как число рабочих и соответственно нерабочих дней, составим систему

$$\begin{cases} 20 \cdot x - 10 \cdot y = 250 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

и легко решаем задачу. Однако, автор решает задачу, как сейчас бы выразились, «по действиям». Кстати, решениями задачи не являются целые числа ($x = 18\frac{1}{3}$, $y = 11\frac{2}{3}$).

В разделе «Прогрессии» Войтяховский приводит знаменитую задачу Зенона об Ахиллесе и черепахе.

³Лёвшин Н. Г. Домашний памятник... 1788—1804 // Русская старина. — 1873. — Т. 8, № 12. — С. 842

Уравнения и системы уравнений Войтяховский использует для решения задач только в последнем томе своего сочинения «Алгебра».

Задачи, где анализируются совместные ресурсы, Войтяховский предлагает решать, используя представленные в условии пропорции, называя такой подход «Тройным складным правилом».

Современному ученику весьма трудно понять его рекомендации и определения: «Правило складное или товарищества есть способ, с помощью которого данное число разделяется на части, другим данным числам пропорциональное.

Примечание. Правило складное состоит в простом тройном правиле столько раз повторенном, сколько тех разделов учинить случится, как то из нижеследующих примеров видно».

Вот некоторые из этих примеров.

«Трое сложились торговать вместе, первый из них в торг положил 1400 рублей, второй 1500 рублей, третий 1600 рублей, коими в некоторое время приторговали 5000 рублей; спрашивается, сколько каждому из сей суммы получить должно?»

Решение автора.

1. Определяется общая сумма начальных вкладов (в рублях):

$$1400 + 1500 + 1600 = 4500.$$

2. Положим x – барыш первого купца, y – барыш второго купца, z – барыш третьего купца;
3. Далее используются простые пропорции:

$$\frac{4500}{5000} = \frac{1400}{x}, \quad \frac{4500}{5000} = \frac{1500}{y}, \quad \frac{4500}{5000} = \frac{1600}{z}$$

Отсюда

$$x = 1555\frac{5}{9}, \quad y = 1666\frac{6}{9}, \quad z = 1777\frac{7}{9}$$

$x + y + z = 5000$ руб. – общая прибыль.

Интересно, что задачи на совместную работу Войтяховский также решает только с помощью пропорций. Такова следующая задача (также из раздела «Тройное складное правило»).

Содержание задачи таково:

«Когда один человек М сработал некую вещь в 16 дней, а с товарищем В сделали такое же дело в $7\frac{1}{2}$ дней; то в какое время оное дело сделать может один человек В?»

Рекомендации автора:

«Для решения сея задачи следует прежде узнать, какую часть той вещи человек М в $7\frac{1}{2}$ дней сделает, потом вычтя оную из единицы, останется часть вещи, которую человек В в $7\frac{1}{2}$ дней сделать может? а напоследок поступиай как следует:

дни вещи

$$16 : 1 = 7\frac{1}{2} : \frac{15}{32} \quad \text{такую часть сделал в } 7\frac{1}{2} \text{ дней человек М;}$$

$$\frac{32}{32} - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \quad \text{такую часть сделает человек В в } 7\frac{1}{2} \text{ дней;}$$

$$\frac{17}{32} : 7\frac{1}{2} = \frac{32}{14\frac{2}{7}} \quad \text{дни в такое время человек В эту вещь сделать может.}$$

Таким образом, используются две пропорции:

$$\frac{16}{1} = \frac{7\frac{1}{2}}{x},$$

где x – часть, которую сделал в $7\frac{1}{2}$ дней человек М, и

$$\frac{\frac{17}{32}}{7\frac{1}{2}} = \frac{\frac{32}{14\frac{2}{7}}}{y},$$

где y – время, в которое сделать вещь может человек В.

Современные нам методические рекомендации исходят из того, что мы можем определить часть работы, которую могут сделать в один день первый человек М и человек В и двое вместе.

В самом деле, если В делает всю вещь за x дней, а, как известно из условия М делает все за 16 дней, то за один день они вместе выполняют

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{16}\right) - \text{часть работы.}$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{16}\right) \cdot 7\frac{1}{2} = 1.$$

Решая это уравнение, находим $x = 14\frac{2}{7}$ дней.

II и III тома «Курса чистой математики» посвящены основам геометрии и прикладной тригонометрии. Второй том «Курса чистой математики» называется «Геометрия». Как и в других томах, вначале дано определение геометрии, как науки: «Геометрия есть наука о свойствах величин, имеющих пространство или протяжение в длину, ширину, высоту или глубину, и о измерении их». Интересно привести названия разделов курса: деление и сложение плоскостей (речь идет о построении равновеликих фигур), о составлении поверхностей тел из бумаги, об измерении толстоты тел (объема – в современном понимании), о сложении тел, о вычитании тел, и др. В этот же том вошли задачи с окружностями и эллипсами, причем, интересно заметить, что автор включил сюда задачу о построении эллипса: «По данным двум осям АВ и СD начертить эллипс посредством шнура». Обращает на себя внимание и то, что курс стереометрии рассматривается как прикладное направление в практических исследованиях.

Третий том носит название «Тригонометрия с практикою и описанием циркуля или сектора».

Интересно, что автор сразу в разделе «О прямолинейной Тригонометрии вообще, и о свойствах линий, в ней употребляемых» (§ 1 том III) сразу приводит определение, ясно показывающее методическое место тригонометрии в планиметрии: «Тригонометрия есть часть Геометрии, показывающая правила, как по трем каким-нибудь данным частям, из двух углов и трех боков треугольника, находить прочие неизвестные его части».

Большое внимание уделяется задачам измерения высоты объектов:

1. § 98. Задача. Найти высоту башни, к которой подойти можно;
2. § 102. Задача. Найти высоту неприступной башни, стоящей перпендикулярно на униженном горизонте, с наклонной плоскости.
3. § 105. Задача. Найти высоту неприступной башни посредством зеркала.
4. § 109. Сочинить план положения болота или озера и вычислить сколько в нем десятин.

В этом томе автор, наряду с решением ряда практических задач, приводит принципы работы с астролябией и останавливается особо на нахождении географических координат (широты и долготы) объекта. Так, например, есть разделы «О действиях производимых на поле цепью, кольями и астролябией», «О геодезии или межевании вообще . . . с кратким описанием свойств магнита и компасных стрелок».

Наибольшее значение автор придает курсу алгебры, целиком сосредоточенной в четвертом томе «Алгебра». Это следует прежде всего из предисловия к этому тому. Войтяховский цитирует профессора Румовского, одного из своих знаменитых предшественников: «Происхождение Алгебры не можно лучше представить, как ежели Арифметику и Геометрию сравнить с

двумя реками, из коих каждая, сначала имея особенное течение, напоследок соединившись составили одну, пространством, стремлением и глубиной несравненно прежних превосходящую.

Никакая из Математических наук не приносит столько чести разуму человеческому, как Алгебра; поелику мы ясно видим, что Механика, Астрономия, и все части смешанной Математики, совершенством обязаны сей науке».

Верный своей манере автор сопровождает определениями все используемые им понятия, включая определение исследуемого предмета. Свое определение предмета Алгебры он приводит в начале IV тома:

«Алгебра или общая арифметика есть наука, по известным величинам, изображая их азбучными буквами, сыскивать неизвестные количества ... Всякая буква означать может все возможные числа, на примере буква d может значить 5, 12, 174 и прочая; так же принимается и вместо $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ и проч.».

Содержание курса алгебры в значительной степени напоминает современный школьный курс. Основные алгебраические преобразования, уравнения первой степени, прогрессии арифметические и геометрические, квадратичные уравнения, уравнения третьей и четвертой степени, автор так же приводит некоторые соображения, связанные с приближенным решением уравнений.

Анализируя возможности решения уравнений 3-й и 4-й степеней, Войтяховский приводит известные формулы Джероламо Кардано (1501-1576) и Ферро дель Сципиона (1465-1526). (В написании Войтяховского «Сципион Феррей»).

При этом он не упоминает о споре Кардано и Тартальи об авторстве этих формул.

Прошло более ста лет. При формировании учебного курса алгебры для мужских и женских гимназий, а также реальных училищ, так называемые формулы Кардано для решения уравнений 3-й и 4-й степеней, исчезли из учебников средней школы (см., например, популярный курс элементарной алгебры А. Киселева, кстати рекомендованный и для духовных семинарий, и для кадетских корпусов [4]).

В то же время А. Киселев приводит (без доказательств) следующие утверждения:

- Всякое алгебраическое уравнение имеет вещественный или мнимый корень (теорема Коши);
- Алгебраическое уравнение имеет столько корней, вещественных или мнимых, сколько единиц в показателе его степени.

В учебнике А. Киселева также упоминаются возможности снижения порядка уравнения при знании корня (или корней) уравнения. Такая же схема излагается в учебниках советского периода. В то же время у Войтяховского и его последователей, включая А. Киселева, нет упоминания о том, что уравнения 5-й и выше степеней неразрешимы в радикалах.

Остановимся в заключение на оценке «Курса чистой математики» Ефима Дмитриевича Войтяховского и его места в российском математическом просвещении.

Был создан учебный базис для серьезного математического образования, по существу объединивший опыт создания всех учебников XVIII века. При этом автор ясно видел свою педагогическую задачу в сохранении целостности теории и практики. Об этом он говорит прямо в «Предисловии к читателю»: «Хотя математических книг довольно число уже издано на российском языке: но как в некоторых из них видим мы одну только теорию без всякого принадлежащего к ней употребления, а в иных содержатся практические правила без оснований, и изъясняются одними только примерами; то часто случается, что молодые люди, не усиливая привычкою к тому рассуждения, и обучив на основании оных книг одну только теорию, с немалым трудом приступают к решению и самых легчайших задач; а другие затвердя одни только примеры, и несколько приуча себя без всякого доказательства к решению оных, вступают иногда в такие споры, о основании коих сами слабое понятие имеют».

В книге Войтяховского были изложены основные понятия и формулировки общей математики как науки, включая исходные понятия «для постигающих её».

«Курс чистой математики» стал отправной точкой и идеальной методической площадкой для формирования последующих курсов математики.

Конечно, нельзя не заметить чисто стилистические особенности изложения математических курсов XVIII и XIX веков, что объясняется не только меняющейся во времени логикой рассуждений, но и чисто языковой трансформацией, условно сравнимой, быть может, с переходом от архаизмов языка Тредиаковского, Ломоносова и Сумарокова к поэтической речи Жуковского и Пушкина.

К началу XX столетия сложились стабильные курсы алгебры и геометрии, появились отдельно изданные сборники задач (см. напр. [1], [8]). Среди них наибольшую популярность имел задачник Н.А. Шапошникова и Н.Н. Вальцова, сочетавший задачи различной степени сложности. Решебник к этому задачнику широко использовался гимназистами. Упоминание об этом можно найти даже в известном романе Льва Кассиля «Конduit и Швамбрания» при описании импровизированной олимпиады.

Если сопоставлять далее объем математических программ книги Войтяховского с учебниками начала XX века, а впоследствии советского периода, то надо признать, что его курс несколько богаче в прикладном отношении, хотя при этом не включает в себя ряд тем (например, «Теорему Безу» и «Бином Ньютона»), которые входили в программу реальных училищ [2] и школ советского периода до «реформы А.Н. Колмогорова».

Что же касается памяти о математике Ефиме Дмитриевиче Войтяховском, то его имя избежало полного забвения, хотя мы думаем, что вряд ли кто-либо из историков математического просвещения его помнит. Скорее справедливы строки Константина Случевского:

«Те почтенные люди прошли,
Что касались былого со страхом,
Те, что письма отцов берегли,
Не пускали их памяти прахом».

Однако, штык-юнкер артиллерии Ефим Дмитриевич Войтяховский сам себе поставил памятник – свою книгу, которая уже никогда не исчезнет в реке Истории, подобной мифической Лете, а живые воспоминания его ученика Николая Лёвшина навсегда вдохнули душу в этот памятник.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баграмов А. Полные решения и подробные объяснения всех без исключения алгебраических задач сборника Н. А. Шапошникова и Н. Н. Вальцова. Одесса: книгоиздательство М. С. Козмана – 1905.
2. Блюмберг Я. Дополнительные статьи алгебры. Курс VII (дополнительного) класса Реальных училищ. – Митава: Типография И. Ф. Штеффенгагена и сына – 1901.
3. Ефим Войтяховский. Теоретический и практический курс чистой математики, содержащий в себе Арифметику, Геометрию, Тригонометрию с практикою и описанием пропорционального циркуля или Сектора, Алгебру с высшими степенями, Криволинейную геометрию с теорией и практикой искусства бросания бомб. – Москва, Печатано в вольной типографии у Хр. Клаудия, 1787.
4. Киселев А. Элементарная алгебра, изд. 14-е, - Москва, Печатня С.П. Яковлева – 1903 год.

5. Лёвшин Н. Г. Домашний памятник 1788—1804 // Русская старина. — 1873. — Т. 8, № 12. — С. 839-842.
6. Магницкий Л. Ф. Арифметика. — М., 1703 — 669с.
7. Павлова Г. Е. Степан Яковлевич Румовский (1734 — 1812). — М.: Наука, 1979. — 200 с.
8. Пржевальский Е. Собрание алгебраических задач. Москва: Типография Г. Лиснера и Д. Собко — 1901 год.
9. Прудников В.Е. Русские педагоги — математики XVIII — XIX веков. М.: - 1956. — 640 с.
10. Румовский С.Я. Сокращения математики, часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии. — СПб.: Императорская академия наук, 1760. — 462с.

REFERENCES

1. Bagramov A. Complete solutions and detailed explanations of all algebraic problems without exception in the collection of N. A. Shaposhnikov and N. N. Valtsov. Odessa: the publishing house of M. S. Kozman — 1905.
2. Blumberg Ya. Additional algebra articles. The course of the VII (additional) class of Real schools. — Mitava: Printing house of I. F. Steffen and son — 1901.
3. Yefim Voityakhovsky. Theoretical and practical course of pure mathematics, containing Arithmetic, Geometry, Trigonometry with practice and description of proportional compasses or Sectors, Algebra with higher degrees, Curved geometry with theory and practice of the art of throwing bombs. — Moscow, Printed in the free printing house at Hr. Claudia, 1787.
4. Kiselev A. Elementary Algebra, ed. 14-th, - Moscow, Printing House of S.P. Yakovlev — 1903.
5. Levshin N. G., 1873, “Home monument 1788—1804” // Russian antiquity. — Vol. 8, № 12. — pp. 839-842.
6. Magnitsky L. F. Arithmetic. — М., 1703 — 669 p.
7. Pavlova G. E. Stepan Yakovlevich Rumovsky (1734-1812). — Moscow: Nauka, 1979. — 200 p.
8. Przhevalsky E. Collection of algebraic problems. Moscow: Printing house of G. Lissner and D. Sobko — 1901.
9. Prudnikov V.E. Russian teachers — mathematicians of the XVIII - XIX centuries. М.: - 1956. — 640 p.
10. Rumovsky S.Ya. Abbreviations of mathematics, part one, containing the initial foundations of arithmetic, geometry and trigonometry. — St. Petersburg: Imperial Academy of Sciences, 1760. — 462 p.

Получено: 16.01.2023

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 37.01

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-276-293

**Методика обучения основам искусственного интеллекта в
школьном курсе информатики**

*Статья посвящается памяти известного ученого, доктора педагогических наук,
профессора Альберта Рубеновича Есаяна*

М. С. Мирзоев, А. И. Нижников

Мирзоев Махмашариф Сайфович — доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Sharifmir64@gmail.com

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается методический подход к изучению элементов системы искусственного интеллекта в школьном курсе информатики. Это тема имеет актуальный характер в современном мире. В статье приведены структура и содержание интеллектуальных систем и технологий как нового раздела общеобразовательного курса информатики. ИИ раскрывается в различных значениях, в том числе, подробно описывается ИИ как предмет, и как инструмент обучения. Формирование цифровых навыков учащихся происходит через создание и использование интеллектуальных алгоритмов. Также рассматривается использование технологий виртуальной и дополненной реальности в учебном процессе. Особое внимание уделяется применению технологии дополненной реальности на таких платформах как Argin и Metaverse Studio. Процесс обучения элементам ИИ в школьном курсе информатики рассматривается вариативно, соответствуя направлению профильной подготовки учащихся. Система задач с различным уровнем сложности используется как средство для развития цифровых навыков. Предлагается трехуровневая сложность заданий, где учащиеся в зависимости от уровня подготовленности выбирают подходящее им задание. В статье приведены примерные задания с решениями для профильного класса IT-направления. Они приведены из области экспертной системы, системы анализа баз данных, моделирования, а также задания поиска подходящего участка земли, удовлетворяющего требуемым условиям на платформе геоинформационных систем. В работе отмечено, что в школьный курс информатики необходимо включить отдельный раздел, посвященный интеллектуальной технологии и системы, модернизировать критерии достижения образовательных результатов в обучении информатике, соответствующим профильной подготовке и внести новые критерии эффективности обучения.

Ключевые слова: система, технология, искусственный интеллект, структура, содержание, обучение, общеобразовательная школа.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

М. С. Мирзоев, А. И. Нижников. Методика обучения основам искусственного интеллекта в школьном курсе информатики // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 276–293.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 37.01

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-276-293

Methodology of teaching the basics of artificial intelligence in the school course of computer science

The article is dedicated to the memory of the famous scientist, doctor of pedagogical sciences, Professor Albert Rubenovich Yesayan

M. S. Mirzoev, A. I. Nizhnikov

Mirzoev Makhmasharif Saifovich — doctor of pedagogical sciences, professor, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: Sharifmir64@gmail.com

Nizhnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, professor, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru

Abstract

In paper discusses a methodical approach to the study of the elements of the artificial intelligence system in the school course of informatics. This topic is relevant in today's world. The article presents the structure and content of intelligent systems and technologies as a new section of the general education course in informatics. AI is explored in various ways, including a detailed description of AI as a subject and as a learning tool. The formation of students' digital skills occurs through the creation and use of intelligent algorithms. The use of virtual and augmented reality technologies in the educational process is also considered. Particular attention is paid to the use of augmented reality technology on platforms such as Argin and Metaverse Studio. The process of teaching the elements of AI in the school course of computer science is considered variably, corresponding to the direction of the profile training of students. A system of tasks with different levels of difficulty is used as a means to develop digital skills. A three-level complexity of tasks is proposed, where students, depending on the level of preparedness, choose the task that suits them. The article provides sample tasks with solutions for the profile class of the IT direction. They are given from the field of an expert system, a database analysis system, modeling, as well as a search task for a suitable piece of land that meets the required conditions on a geographic information systems platform. The paper notes that in the school course of computer science it is necessary to include a separate section on intellectual technology and systems, to modernize the criteria for achieving educational results in teaching computer science, corresponding to profile training, and to introduce new criteria for the effectiveness of training.

Keywords: system, technology, artificial intelligence, structure, content, education, secondary school.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

M. S. Mirzoev, A. I. Nizhnikov, 2023, "Methodology of teaching the basics of artificial intelligence in the school course of computer science", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 276–293.

1. Введение

Искусственный интеллект (ИИ) представляет собой информационно-технологическую систему, разработанную для того, чтобы заменить человека в труднодоступных местах, сложно решаемых и сверхопасных ситуациях [7, 8, 9, 11].

Использование ИИ в различных сферах жизнедеятельности положительно влияет на развитие экономической и социальной сфер общества, так как упрощаются производственные процессы, сокращаются издержки производства, работа специалиста заменяется интеллектуальными системами. Например, на многих станциях метро г. Москвы на смену кассирам пришли терминалы, созданные на основы интеллектуальных алгоритмов. Роботизация и применение систем ИИ в промышленности, производстве и во многих других сферах является ярким примером проникновения новейших цифровых технологий и искусственного интеллекта в современную жизнь человека.

Основными темами раздела ИИ на уровне среднего общего образования являются: Этапы развития ИИ; основные понятия и задачи, решаемые технологиями ИИ; приоритетные направления исследований в области ИИ; инженерия знаний; базы знаний и модели представления знаний; основы машинного обучения; современные технологии анализа данных и глубокое машинное обучение; алгоритмы распознавания образов, речи и текста; алгоритмы ИИ на языке программирования Python; практическое создание классификаторов; искусственные нейронные сети; интеллектуальные алгоритмы и их реализация; параметры нейронных сетей; обучение нейронных сетей с помощью алгоритма «поощрения-наказания»; технологии виртуальной и дополнительной реальности (моделирование информационных процессов, протекающих в физических, биологических, химических предметных областях; имитационное моделирование) и т.д.

2. Основной текст статьи

Обучение основам искусственного интеллекта в системе школьного образования можно рассматривать в нескольких значениях:

1. Как предмет обучения;
2. Как инструмент обучения;
3. Как результат современной науки.

В данной статье рассмотрим первые два из перечисленных аспектов.

1. Основы ИИ как предмет обучения.

Предметная область создания ИИ развивается достаточно быстро и в рамках учебного курса информатики невозможно рассмотреть все аспекты этого процесса. Рассмотрим обучение основы ИИ в плоскости его программного обеспечения (ПО), где составляющими являются интеллектуальные алгоритмы.

Искусственный интеллект (ИИ) в узком смысле это компьютерная программа, которая имитирует поведение человека, изучая различные модели данных и процессов. К основным функциям программного обеспечения ИИ относятся: машинное обучение; распознавание речи и голоса; виртуальный помощник и т. д.

Задача учителя информатики – формировать у учащихся представление о разновидностях программного обеспечения ИИ и на примере некоторых из них (платформы Искусственного Интеллекта, Chatbots, ПО для глубокого обучения, ПО для машинного обучения), развивать цифровые навыки [13, 14, 16] в области создания интеллектуальных алгоритмов и их реализации.

ПО «Платформы ИИ» – обеспечивает разработку интеллектуальных приложений на основе встроенных алгоритмов.

ПО «Chatbots» – компьютерная программа, которая интерактивно имитирует человеческую речь и позволяет общаться с цифровыми устройствами как с людьми.

ПО «Глубокое обучение» включает распознавание речи, распознавание изображений и т.д.

ПО «Машинное обучение» – это программа, которая позволит компьютеру учиться с помощью данных.

Важность машинного обучения на основе искусственных нейронных сетей на уроках информатики реализует метапредметный аспект курса на новом качественном уровне (связь информатики с такими предметами как математика, физика, биология, химия, география, иностранные языки и др.). Из всех перечисленных областей наук, в большей степени метапредметный аспект информатики реализован в математических и физических науках. Особенно отметим работы ученых Есеяна А.Р., Добровольского Н.М., Чубарикова В.Н и др., где рассматриваются такие фундаментальные математические понятия как алгоритм, сложность, вычисления в обучении информатике, а также применение пакета прикладных программ в обучении математике [3, 4, 5, 6, 17].

Также, отметим, что машинное обучение и искусственные нейронные сети обладают высоким потенциалом для их применения в задачах защиты информации – как за счет повышения эффективности существующих методов, так и путем создания на основе искусственных нейронных сетей новых методов анализа информации.

На уроках информатики необходимо на примерах показать прототипы разных интеллектуальных систем (умный дом, умная школа, умный город и т.д.), которые будут мотивировать учащихся создавать подобные проекты. Учащимся можно предложить выполнение таких несложных проектов как умные системы, выполняющие такие задачи как распознавание речи, образов; классификация объектов по классам; сбор данных из различных информационных систем; извлечение знаний из распределенных данных в сетях; применение различных алгоритмов к данным, чтобы получить их в нужной нам форме и др.

Изучение и проектирование автоматизированных производственных процессов с использованием ИИ является важной и актуальной задачей ИТ-образования в школе. Важное значение в обучении алгоритму создания ИИ в курсе информатики имеет рассмотрение вопросов проектирования автономных роботизированных устройств для обеспечения организации процессов само оптимизации, планирования работ в производстве, использования алгоритмов ИИ для принятия решений в сжатые сроки и т.д.

2. ИИ как инструмент обучения в большей степени используется в электронном обучении. Электронная форма обучения, как расширение традиционной формы учебного процесса, влечет за собой применение аппарата искусственного интеллекта. Сбалансированное внедрение традиционных цифровых технологий и аппарата искусственного интеллекта в учебный процесс делают обучение информатике более эффективным. Алгоритм создания ИИ является быстро развивающейся областью информатики и находится на начальном этапе внедрения.

Основные виды применения алгоритмов искусственного интеллекта в обучении информатике:

1. *Персонализированное обучение* предполагает, что методика обучения информатике выстраивается в соответствии с уровнем подготовки и потребностями каждого обучающегося.

2. *Адаптивное обучение* предполагает, что с помощью ИИ можно отслеживать зону ближайшего развития каждого обучающегося. А также, при необходимости, корректировать учебный материал, либо информировать учителя об учебном материале, который обучающемуся трудно понять. Примером такой интеллектуальной платформы является Stepik, позволяющая учителю при создании онлайн курсов использовать возможности адаптивных технологий с применением алгоритмов искусственного интеллекта. Другой интеллектуальной платформой, где реализуются элементы адаптивных технологий является logiclike. В этой платформе осо-

бое внимание уделяется разработке интеллектуальных алгоритмов для развития логического мышления учащихся.

3. *Универсальный доступ* предполагает, что каждый обучающийся имеет доступ к учебной информации предпочтительным образом. т.е. интеллектуальная программа позволяет пользователям произвести на своем компьютере операции взаимодействия одного приложения с другими приложениями. Примерами таких программ являются: плагин для Microsoft PowerPoint, который создает субтитры в реальном времени, отображая их под презентацией – Presentation Translator. А также применить Azure Cognitive Services – облачные службы ИИ, которые позволяют педагогам создавать программы с творческим интеллектом. В случае, когда необходимо демонстрировать субтитры на нескольких языках одновременно, можно воспользоваться функцией Live Presentation в PowerPoint Office 365. С помощью Live Presentations обучающиеся могут просматривать презентации на своих собственных устройствах и читать субтитры на предпочитаемом ими языке.

4. *Автоматизация*. Программные платформы на основе алгоритмов ИИ предлагают наличие автоматизированных виртуальных наставников для отслеживания успеваемости обучающихся, предоставления мгновенной обратной связи. Развитие технологий искусственного интеллекта на данный момент позволяет создавать и использовать виртуальных помощников (чат-ботов) для взаимодействия учащихся и учителя: для повторения материала, для персонализации обучения, для поиска информации, для облегчения административного взаимодействия и т.д.

Чат-боты без образовательной интенциональности решают задачи административного характера (руководство обучающимися и персональная помощь) и характера поддержки (ответы на часто задаваемые вопросы).

Чат-боты с образовательной интенциональностью предназначены для содействия обучению. Чат-боты данного типа можно разделить на два вида:

- Чат-боты, обеспечивающие основу для процесса обучения. Чат-боты этого вида адаптируют, выбирают и упорядочивают содержание учебного материала в соответствии с индивидуальными потребностями обучающегося и его темпом работы, помогают процессам рефлексии и метапознания и обеспечивают учебную мотивацию;
- Чат-боты, способствующие приобретению и отработке навыков учащимися. Чат-боты этого вида представляют собой программу, формулирующую вопрос, на который обучающийся дает ответ. Ответ автоматически оценивается чат-ботом, который дает обучающемуся немедленную обратную связь.

Чат-боты с образовательной интенциональностью являются обучающими агентами, которые работают в качестве учебного компаньона, обеспечивая диалог, сотрудничество и рефлексии. Они обеспечивают социально-конструктивистский сценарий преподавания и обучения.

И наоборот, боты без образовательной интенциональности основаны на бихевиористском и когнитивистском подходах к обучению, где присутствуют стимул-реакция.

В качестве ассистентов преподавателей боты позволяют решать часть задач и могут возложить на себя множество ролей.

FAQ-бот (консультант) — это чат-бот с четко определенным набором ответов на предсказуемый набор вопросов, который позволяет снять нагрузку с преподавателей и администрации образовательной организации. В качестве примера можно привести SnatchBot – это умный помощник, который настроен так, чтобы отвечать на многие распространенные вопросы учащихся относительно модулей курса, планов занятий, заданий и сроков их выполнения. SnatchBot способен отслеживать прогресс в обучении каждого учащегося и предоставлять индивидуальную обратную связь каждому учащемуся относительно его успеваемости. По-

средством машинного обучения бот может анализировать учебные потребности обучающихся и рекомендовать учебный контент, чтобы улучшить прогресс обучаемого в обучении.

LMS-бот – это дополнительный преподаватель в процессе обучения, которое происходит на платформе LMS (Learning Management System – система управления обучением). Поддержки одного преподавателя становится недостаточно, когда речь идет об «образовании без барьеров». Именно в этом случае LMS-бот содействует процессу обучения и доступен для удовлетворения потребностей пользователя в тот момент, когда возникает такая потребность. LMS-бот может отражать текущие курсы конкретного пользователя, демонстрировать оценки и другие достижения, показывать предстоящие события и их сроки, историю пользователя, сколько курсов им было пройдено и т. д. Пример подобного бота - Paradiso LMS GURU Chatbot, основанный на искусственном интеллекте, который внедрен в систему управления обучением Paradiso. Бот решает практически мгновенно все вопросы, связанные с работой платформы LMS.

Бот-наставник. Боты такого вида напоминают, побуждают и предоставляют обучающимся подсказки к заданиям и тем самым частично решают проблему нелюбви к обучению. Например, обучающий чат-бот Differ, созданный в Норвегии, повышает вовлеченность в учебный процесс обучающихся и их производительность. Он отправляет обучающимся полезные статьи и приглашает их поучаствовать в дискуссиях.

Бот-репетитор. Это подход, при котором бот ведет себя как учитель, задавая вопросы и обеспечивая поддержку и обратную связь. В этом плане стоит использовать мировые практики во внедрении ИИ в учебном процессе, например, Thirdspace Learning – одна из крупнейших онлайн-платформ по обучению математике в Великобритании [15]. Через чат-платформу, использующую возможности машинного обучения, оцениваются способности учащегося и для него создается полностью персонализированная учебная программа. Каждому обучающемуся назначается онлайн-репетитор, который общается с подопечным и оценивает его успехи в режиме реального времени. Наиболее интересными являются предсказательные способности чат-бота, поскольку он анализирует результаты обучения каждого учащегося. Например, если ученик неправильно понимает задание или учитель упускает что-то важное, чат-бот может определить проблемы и предупредить учителя до того, как проблема начнет усугубляться.

Бот-ментор. Задача бота может заключаться не в том, чтобы просто отвечать на вопросы, а в том, чтобы наставлять обучающего, предоставляя советы о том, как самостоятельно найти информацию, чтобы решить ту или иную проблему. AutoMentor от Roger Schank – одна из таких систем, где бот знает контекст и предоставляет не только ответы на часто задаваемые вопросы, но и советы.

Бот-симулятор используется для изучения учащимися сложных процессов, проведения экспериментов, практикумов. Практическая работа часто отсутствует в образовании, где почти всегда все усилия учащихся направлены на приобретение знаний, а не на отработку умений и навыков. Легко понять, почему: практическая работа – это тяжело и занимает много времени.

Бот-практик – это бот, который берет на себя роль собеседника, клиента, пациента или любого другого человека и позволяет обучающимся практиковать навыки ухода за пациентом, оказания поддержки другу и другие навыки общения. Также боты этого типа могут принимать на себя роль экзаменаторов, помогающих учащимся подготовиться к сдаче ЕГЭ по учебным предметам.

Чат-боты имеют отличный потенциал в образовании на любой его ступени. Их нужно проектировать, обучать, тестировать и улучшать, что является непростой задачей, но их эффективность в снижении рабочей нагрузки учителей и администраторов очевидна.

Направления использования искусственного интеллекта в системе школьного образования не ограничиваются только рассмотренными выше чат-ботами. Интеграция искусственного интеллекта в обучение открывает множество возможностей, и одна из них – технология виртуальной и дополненной реальности.

Виртуальная (VR) и дополненная (AR) реальности – это передовые технологии. Основная цель технологий расширить возможности физического мира.

Виртуальная реальность – это компьютерная симуляция реальной жизни. Она погружает пользователей, заставляя их почувствовать, что они находятся в смоделированной реальности.

Дополненная реальность накладывает созданные на компьютере элементы поверх существующей реальности, чтобы сделать ее более значимой благодаря возможности взаимодействия с ней.

Различие между ними – виртуальная, означает погружение в мир, который не существует, а дополненная означает добавление чего-то виртуального в физическом мире.

Обе эти технологии имеют ряд преимуществ применительно к учебному процессу, а именно:

Высокая вовлеченность обучающихся. Благодаря комбинации учебной и творческой составляющих, приложения AR и VR помогают удерживать внимание и интерес учащихся, как при ознакомлении с новым материалом, так и в процессе его закрепления.

Эффективный процесс обучения. AR и VR в образовании способствует достижению высоких результатов обучения посредством визуализации и погружения. Особенностью технологий является то, что они способствуют расширению представления о происходящих процессах в реальном мире.

Применимо к любому уровню образования. AR и VR не ограничены одной возрастной группой или уровнем образования и могут одинаково хорошо использоваться на всех уровнях образования.

В системе школьного образования практикуется процесс создания обучающих игр с элементами дополненной реальности на платформах Argin и Metaverse Studio. Сервис Argin – русскоязычный. Он позволяет накладывать на изображение дополненную реальность в виде фотографий, слайд-шоу, видео, аудио, текста или 3D-объектов. Чтобы другие пользователи смогли ее увидеть, им необходимо установить на смартфон приложение Argin. Metaverse Studio – виртуальное пространство, которое позволяет создавать интерактивные приложения с элементами дополненной реальности. Metaverse – бесплатная платформа, без каких-либо ограничений. Она объединяет веб-сайт (<https://studio.gometa.io/>) для создания приложений AR с приложением для их отображения. Пользователи платформы создают приложения, используя конструктор сцен, где они настраивают его работу, основываясь на методе дерева решений. Каждая сцена может включать вопросы, указания, ссылки, видео, опросы и т.д. После того, как приложение создано, необходимо его опубликовать в Telegram, LMS, поделиться ссылкой или QR-кодом. После публикации любой, у кого есть приложение Metaverse (доступное для Android и iOS), сможет просмотреть его. Самый простой способ – отсканировать QR-код.

Также отметим, что на уроках информатики особое внимание необходимо уделять использованию различных интеллектуальных конструкторов, устройств управления роботами, поддерживающими современные языки программирования и др., организовывать групповые формы обучения [10].

Процесс обучения основам ИИ в курсе информатики позволяет:

- с большей точностью гарантировать результаты обучения элементам ИИ и на качественном уровне организовать учебный процесс;
- на научной основе производить анализ и синтез различных конструкций учебных, интеллектуальных, производных интеллектуальных систем (ИС);
- совокупно решать образовательные и социальные проблемы технологии создания и использования ИС на практике;
- создавать благоприятные условия для саморазвития личности;

- оптимально использовать имеющиеся в распоряжении информационные, сетевые и технические ресурсы;
- выбирать современные интеллектуальные платформы для решения учебных и творческих задач.

Процесс эффективного обучения элементам ИИ в школьном курсе информатики выстраивается соответственно направлению профильной подготовки учащихся и достигается алгоритмическим подходом [1, 12].

Главным средством достижения эффективного результата обучения основам ИИ в курсе информатики является система задач из области интеллектуальные алгоритмы и их реализации с различной степенью сложности. Количество заданий в них и соответствующие оценки этих заданий могут быть различными. Как правило, индивидуальные работы по каждой теме содержат от одной до пяти задач, каждая из которых представлена в трех вариантах в зависимости от уровня сложности.

Задания первого (познавательного) уровня оцениваются наименьшим количеством баллов. Они предполагают реализацию знаний и умений по известным алгоритмам работы интеллектуальных устройств, роботов на практике и умение внедрять готовые логические модели знаний и экспертные системы.

Задания второго (репродуктивного) уровня оцениваются выше и соответствуют самостоятельному выполнению заданий при отсутствии готового алгоритма. Они требуют от учащихся готовности на основе обобщения и систематизации к переносу знаний и способов деятельности в измененную или незнакомую ситуацию, т. е. поиска решения и составления алгоритма для достижения поставленной цели с помощью интеллектуального робота, моделирования знаний на языке Пролог или Python.

Задачи третьего (творческого) уровня оцениваются наибольшим количеством баллов и предполагают нестандартные, оригинальные решения, готовность к самостоятельной деятельности. При этом учащиеся приобретают начальный практический опыт в будущей профессиональной сфере, где применяются интеллектуальные алгоритмы.

Учащиеся сами выбирают, из какой группы решать ту или иную задачу. При этом они заранее могут определить, какое максимально возможное количество баллов они смогут набрать за эту работу.

Ниже приведены примерные задания всех трех уровней для учащихся профильных IT классов.

Пример 1. Создать запрос, который выведет для каждого отдела организации номер сотрудника с минимальной зарплатой (таблица Zarp(worker_id, department, wages)).

Например, есть таблица Zarp:

worker_id	department	wages
1	QA	5000
2	QA	4500
3	Logistics	3000

В результате нужно получить следующее:

worker_id	department	wages
1	QA	5
3	Logistics	3

```
SELECT worker_id, department, wages FROM Zarp AS t1
```

WHERE t1.value = (SELECT MIN(wages) FROM Zarp AS t2 WHERE t1. department = t2. department);

Пример 2. В списке символов S1, S2, ..., Sn найти самое короткое слово, если разделителем между словами является один или несколько пробелов и удалить его.

Код программы на языке Prolog (Учащимся предлагается самостоятельно написать код на языке Python).

DOMAINS

list = char*.

PREDICATES

nondeterm внутренний_минимум(list, integer, integer)
nondeterm минимум(list, integer)

CLAUSES

внутренний_минимум ([], 10, 10).
внутренний_минимум ([Z | X], Минимум, 0) :- Z = ' ',
внутренний_минимум (X, Минимум, _), !.
внутренний_минимум ([_ | X], Минимум, ВремДлина) :-
внутренний_минимум (X, Минимум, СтарДлина),
ВремДлина = СтарДлина - 1, ВремДлина > Минимум, !.
внутренний_минимум ([_ | X], ВремДлина, ВремДлина) :-
внутренний_минимум (X, _, СтарДлина),
ВремДлина = СтарДлина - 1.
минимум (Список, Минимум) :- внутренний_минимум (Список, Минимум).

GOAL

минимум(['с', 'т', 'р', 'о', 'к', 'а', ' ', ' ', 'п', 'р', 'о', 'в', 'е', 'р',
'к', 'и', ' ', 'т', 'е', 'с', 'т'], М).

Пример 3. Учащиеся проходят тестирование ЕГЭ по информатике. Максимум ученик может набрать 100 баллов, минимум 0 (отказался от тестирования). Какую оценку поставит компьютер, если за решение теста и набор менее 40 баллов, студент получает оценку “неудовлетворительно”, от 40 до 60 – оценку “удовлетворительно”, от 60 до 85 – “хорошо”, более 85 баллов – оценка “отлично”.

qwerty(X):- X<40, write(2); X>=40, X<60, write(3); X>=60, X<85, write(4);
X>85, write(5).

main:-

process,
halt.

process:-

qwerty(95).

:- main.

Пример 4. Требуется найти участок продаваемой земли, подходящий для размещения “Центра развития интеллекта личности”, расположенный на заданном удалении от дорог и имеющий заданную стоимость.

Даны: карта района (разбитая на участки) с указанием стоимости каждого участка; топографическая карта местности; минимальное расстояние до железных и автодорог 200 м; максимальное расстояние до ж/д станций 500 м; цена участка до 20 млн.руб.

В результате получим визуальное представление найденных участков на карте местности.
Алгоритм решения:

- 1) поиск на электронной карте (ЭК) географических информационных систем (ГИС) объектов, представляющих железные дороги;
- 2) поиск на ЭК объектов, представляющих крупные автомобильные дороги;
- 3) построение вокруг найденных дорог буферной зоны радиусом 200 метров;
- 4) поиск среди объектов ЭК тех продаваемых участков земли, которые не имеют общих точек в построенных буферных зонах;
- 5) поиск железнодорожных станций на ЭК;
- 6) построение вокруг станций буферной зоны радиусом 500 метров;
- 7) поиск среди выбранных тех участков, которые имеют общие точки с буферной зоной вокруг станций и обладают стоимостью до 20 млн.руб.

В результате будут отобраны объекты, удовлетворяющие приведенным в условии требованиям.

Согласно алгоритму, для решения этой задачи необходимо использовать функции ГИС для поиска объектов, построения буферных зон и визуального отображения найденных объектов.

Код программы решения задачи на языке XML:

```
<Model>
<Definitions>
<Variable name=<<код_железных_дорог>> type=<<long>> value=<<1>>/>
<Variable name=<<железные_дороги>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<буфер_вокруг_железных_дорог>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<код_автодорог>> type=<<long>> value=<<2>>/>
<Variable name=<<автодороги>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<буфер_вокруг_автодорог>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<общий_буфер>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<код_железнодорожных_станций>> type=<<long>> value=<<2>>/>
<Variable name=<<железнодорожные_станции>> type=<<object>>/>
<Variable name=<<код_территории_МПДД>> type=<<long>> value=<<2>>/>
<Variable name=<<свободные_территории>> type=<<object>> value=<<<</>
<Variable name=<<подходящие_территории>> type=<<object>> value=<<<</>
<Variable name=<<цвет_подходящей_территории>> type=<<long>> value=<<AAFF0000>>/>
<Variable name=<<расстояние>> type=<<double>> value=<<0.0>>/>
<Parameter name=<<минимальное_расстояние_до_дорог>> type=<<double>> value=<<200>>
description=<<минимальное расстояние до дорог>>/>
<Parameter name=<<максимальное_расстояние_до_станций>> type=<<double>>
value=<<3000>>
description=<<максимальное расстояние до железнодорожных станций>>/>
</Definitions>
<Commands>
<!-- Отбор объектов, представляющих железные дороги -->
<ObjectsSearch return=<<железные_дороги>>
Classifier=<<@классификатор.cls>>
UseCode=<<@true>>
ObjectCode=<<код_железных_дорог>>
LookSubtree=<<@true>>/>
<!-- Построение вокруг железных дорог буферной зоны -->
<BufferZone
Objects=<<железные_дороги>> Radius=<<минимальное_расстояние_до_дорог>>
```

```

Accuracy=<<@8>> return=<<буфер_вокруг_железных_дорог>>/>
<!-- Отбор объектов, представляющих автодороги -->
<ObjectsSearch return=<<автодороги>> Classifier=<<@классификатор.cls>>
UseCode=<<@true>>
ObjectCode=<<код_автодорог>>
LookSubtree=<<@true>>/>
<!-- Построение вокруг железных дорог буферной зоны -->
<BufferZone Objects=<<автодороги>> Radius=<<минимальное_расстояние_до_дорог>>
Accuracy=<<@8>> return=<<буфер_вокруг_автодорог>>/>
<!-- Объединение построенных буферных зон в одну -->
<Union fObjects=<<буфер_вокруг_железных_дорог>>
sObjects=<<буфер_вокруг_автодорог>> return=<<общий_буфер>>/>
<!-- Отбор свободных территорией, не имеющих общих точек с построенной
буферной зоной -->
<ObjectsSearch return=<<свободные территории>> Classifier=
=<<@классификатор.cls>>
UseCode=<<@true>> ObjectCode=<<код_свободных_участков>> LookSubtree=<<@true>>
Objects=<<общий_буфер>> TopolRelations=<<disjoint>>/>
<!-- Отбор объектов, представляющих железнодорожные станции -->
<ObjectsSearch return=<<железнодорожные_станции>> Classifier=
=<<@классификатор.cls>>
UseCode=<<@true>> ObjectCode=<<код_железнодорожных_станций>> LookSubtree=
=<<@true>>/>
<!-- Отбор среди найденных участков тех, которые удалены от железнодорожных
станций не более чем на максимальное расстояние -->
<foreach container=<<свободные_участки>>
element=<<участок>>>
<!-- Вычисление расстояния от участка до железнодорожных станций -->
<Distance fObjects=<<железнодорожные_станции>> sObjects=<<участок>>
return=<<расстояние>>/>
<if test=<<расстояние lt максимальное_расстояние_до_станций>> >
<then>
<!-- Добавление участка к подходящим -->
<append what=<<участок>> to=<<подходящие_участки>>/>
</then>
</if>
</foreach>
<!-- Выделение выбранных участков указанным цветом -->
<show objects=<<подходящие_участки>>
color=<<цвет_подходящих_участков>>/>
</Commands>
</Model>

```

Пример 5. Написать код программы, где с помощью экспертной системы определяются планеты «Солнечной системы».

Решение. Код программы на языке Prolog. (Учащимся предлагается самостоятельно написать код программы на языке Python).

```
:- dynamic yes/1, no/1.
```

```
/* База знаний. */
/* Размещение в резидентной БД информации из утверждений БЗ ЭС */
    assert_database:-
        rule(Rulute_number,Category,Type_of_breed,Conditions),
        assertz(d_rule(Rule_number,Category,Type_of_breed,Conditions)),fail.

    assert_database:-
        cond(Cond_number,Condition),
        assertz(d_cond(Cond_number,Condition)),fail.

    assert_database:-!.

/* Условия для различных планет.*/
    cond(1, 'обычная планета').
    cond(2, 'планета-гигант').
    cond(3, 'вращается в необычном направлении').
    cond(4, 'имеет голубой цвет').
    cond(5, 'находится близко к поясу астероидов').

/* Данные о типах планет */
    topic('обычная').
    topic('планета-гигант').

/* Данные о конкретных планетах */
    rule(1, 'планета', 'обычная', [1]).
    rule(2, 'планета', 'планета-гигант', [2]).
    rule(3, 'обычная', 'Венера', [3]).
    rule(4, 'обычная', 'Земля', [4]).
    rule(5, 'обычная', 'Марс', [5]).
    rule(6, 'обычная', 'Меркурий', []).
    rule(7, 'планета-гигант', 'Уран', [3]).
    rule(8, 'планета-гигант', 'Нептун', [4]).
    rule(9, 'планета-гигант', 'Юпитер', [5]).
    rule(10, 'планета-гигант', 'Сатурн', []).

/* Система пользовательского интерфейса */
main:-
    assert_database,
    do_expert_job.

do_expert_job:-
    do_consulting,
    halt.

do_consulting:-
    go([], 'планета'),!.

do_consulting:-
    write('Такой планеты в Солнечной системе нет.
    Поищите в других системах'), nl,
```

```

clear.

/* Выдача подсказки */
info:-
    write('База данных содержит информацию о планетах Солнечной системы:'), nl,
    topic(X), format('\t~w~n',[X]).

/* Запрос и получение ответов yes и no от пользователя */
ask_question(Breed_cond,Text):-
    format('Вопрос: ~a?~n',[Text]),
    write('1 - да, '),nl,
    write('2 - нет'),nl,
    readloop(Response),
    do_answer(Breed_cond,Response).

/* Проверка корректности ввода */
readloop(Response):-
    %read(Response),
    read_string(user_input, '\n', '\r',_,Str),
    atom_number(Str, Response),
    legal_response(Response),!.

legal_response(Response):-Response=1.
legal_response(Response):-Response=2.

/* Предикаты ЕЯ-интерфейса */
/* Принадлежность элемента списку */
member(Head,[Head|_]):-!.
member(Elem,[_|T]):-
    member(Elem,T).

/* Механизм вывода */

/* Начальное правило механизма вывода */
go(_,Mygoal):-
    not(rule(_,Mygoal,_,_)),!,
    format('Искомая планета: ~a.~n',[Mygoal]).

go(History,Mygoal):-
    rule(Rule_number,Mygoal,Type_of_breed,Conditions),
    check(Rule_number,History,Conditions),
    go([Rule_number|History],Type_of_breed).

/* Сопоставление входных данных пользователя со списками атрибутов
отдельных языков программирования */
check(Rule_number,History,[Breed_cond|Rest_breed_cond_list]):-
    yes(Breed_cond),!,
    check(Rule_number,History,Rest_breed_cond_list).

check(_,_,[Breed_cond|_]):-

```

```
no(Breed_cond),!,fail.

check(Rule_number,History,[Breed_cond|Rest_breed_cond_list]):-
    cond(Breed_cond,Text),
    ask_question(Breed_cond,Text),
    check(Rule_number,History,Rest_breed_cond_list).

check(_,_,[]).

do_answer(Cond_number,1):-!,
    assertz(yes(Cond_number)).

do_answer(Cond_number,2):-!,
    assertz(no(Cond_number)),fail.

/* Исключение данных из базы знаний после завершения цикла
    ‘‘Распознавание-действие’’ */
erase:-retract(_),fail.
erase.

/* Уничтожение в базе данных всех ответов yes (да) и no (нет) */
clear:-retract(yes(_)),retract(no(_)),retract(goes(_,_)),fail,!.
clear.

:- main.
/* Система пользовательского интерфейса */
do_expert_job:-
    do_consulting,
    halt.

do_consulting:-
    os_is(X),!,
    format(‘‘Искомая планета: ~a.~n’’,[X]),
    clear.

do_consulting:-
    write(‘‘Такой планеты в Солнечной системе нет.
    Поищите в других системах.’’),nl,
    clear.

ask(X,Y):-
    format(‘‘Вопрос : ~a ~a?~n’’,[X,Y]),
    write(‘‘1 - да,’’),nl,
    write(‘‘2 - нет’’),nl,
    readloop(Reply),
    remember(X,Y,Reply).

/* Проверка корректности ввода */
readloop(Response):-
    %read(Response),
```

```
read_string(user_input, ‘\n’, ‘\r’,_,Str),  
atom_number(Str, Response),  
legal_response(Response),!.  
  
legal_response(Response):-Response=1.  
legal_response(Response):-Response=2.  
  
:- do_expert_job.
```

В результате усиления содержательной линии школьного курса информатики включением раздела интеллектуальные системы и технологии по соответствующим профилям подготовки, можно улучшить результаты образовательного процесса, в частности, повысить уровень учебных достижений учащихся, их творческого развития.

3. Заключение

На основе вышеизложенного, результаты освоения образовательной программы среднего общего образования должны отражать:

- включение в содержательную линию школьного курса информатики программы среднего общего образования раздела “Интеллектуальные системы и технологии”;
- модернизацию критериев достижения образовательных результатов (личностного, предметного и метапредметного) соответствующих профилей и введение технологичности результатов обучения как важного фактора современного образования;
- развитие цифровых навыков, в том числе умение составлять и реализовывать интеллектуальные алгоритмы;
- формирование основ извлечения знаний из распределенных данных и принятие оптимального решения в сложных ситуациях;
- формирование общеучебной и специальной (соответствующему профилю подготовки) компетенции;
- проведение рефлексии на основе полученных знаний.

Таким образом, изучение элементов ИИ в курсе информатики, как отдельного раздела, в большой степени востребовано в освоении научных основ различных умных технологий (интеллектуальных, производственных, стационарных), интеллектуальных систем, подлежащих формализации в различных предметных областях, а также приобретение навыков управления ими на практике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. GIStechniK. Всё о ГИС и их применении: сайт. – URL: <http://www.gistechnik.ru/programmy-gis> (дата обращения: 27.01.2023).
2. Third Space Learning. – Популярныe ресурсы по алгебре, геометрии: сайт. – URL: <https://thirdspacelearning.com/gcse-maths> (дата обращения: 27.01.2023).
3. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Творческая лаборатория Mathematica. Ч1. Уч. пос. Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2006.

4. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Сергеев А. Н. Mathcad в обучении информатике и математике. Уч. пос. Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2009.
5. Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra (часть 1). Уч. пос. Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017.
6. Есаян А. Р., Добровольский Н. М. Пользовательские рекурсивные функции в Maxima // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 432–446. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-437-451.
7. Искусственный интеллект в образовании: проблемы и возможности для устойчивого развития // Аналитика. РОСКОНГРЕСС. 2019. – URL: <https://roscongress.org/materials/iskusstvennyy-intellekt-v-obrazovanii-problemy-ivozmozhnosti-dlya-ustoychivogo-razvitiya/> (дата обращения 30.01.2023).
8. Искусственный интеллект в образовании: перспективы применения в России // РБК Тренды. 2021. – URL: <https://trends.rbc.ru/trends/education/5d6beaea9a7947a1c1fe9152> (дата обращения 30.01.2023).
9. Коровникова Н. А. Искусственный интеллект в образовательном пространстве: проблемы и перспективы // Социальные новации и социальные науки. 2021, № 2. С. 98–113.
10. Мирзоев М. С., Шапкина В. В., Тагоев З. З. “Методические подходы к модернизации школьного курса информатики”, // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе» в 2 томах, Москва, МПГУ, 4-5 декабря 2018 г. / Под ред. М. В. Егуповой, Л. И. Боженковой. Калуга, Издательство АКФ “Политоп”, – 2018. – Том 1. С. 160-163.
11. Лавренев А. Н. Искусственный интеллект в современной информационной образовательной среде // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе: материалы международной научно-практической интернет-конференции / под ред. Л. Л. Босовой, Д. И. Павлова. – Москва: Московский педагогический университет, 2019. – С. 660–665. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41517683> (дата обращения 31.01.2023).
12. Мирзоев М. С., Нижников А. И. и др. Организация различных видов деятельности учащихся при обучении математике и информатике: Монография / И. М. Смирнова, В. Г. Маняхина, П. С. Макарова, М. С. Мирзоев, А. И. Нижников. М.: Прометей, 2022.
13. Мирзоев М. С., Ягелло А. А. Развитие креативности студентов в обучении основам искусственного интеллекта // Педагогическая информатика. – 2022. – № 2. – С. 127-135.
14. О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413. (Зарегистрирован 12.09.2022 № 70034). – URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008> (дата обращения: 27.01.2023).
15. Общественно-профессиональное обсуждение и внешняя экспертиза проекта ПООП по учебному предмету “Информатика”, для среднего общего образования // URL: <https://infdiscussion.itmo.ru/p/poop-soo/124> (дата обращения: 27.01.2023).

16. Семакин И. Г., Ясницкий Л. Н. О возможностях преподавания искусственного интеллекта» в общеобразовательной школе. – URL: <https://lbz.ru/metodist/lections/12/files/about.pdf> (дата обращения: 27.01.2023).
17. Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Информатика, компьютер, сложность вычислений // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 1. С. 520–536. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536.

REFERENCES

1. GISTechniK. All about GIS and their applications. Available at: <http://gistechinik.ru/programmy-gis/> (accessed 27 January 2023).
2. Third Space Learning. Available at: <https://thirdspacelearning.com/gcse-maths> (accessed 27 January 2023).
3. Esayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M. 2006. *Tvorcheskaya laboratoriya Matematika* [Mathematica Creative Laboratory.] Uch. settlement. Izd-vo TGPU im. L. N. Tolstogo. Tula. 272 p.
4. Esayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M. 2009. *Mathcad v obuchenii informatike i matematike*. [Mathcad in teaching computer science and mathematics] Uch. pos. Izd-vo TGPU im. L. N. Tolstogo. Tula. 363 p.
5. Esayan A. R., Dobrovolsky N. M., Sedova E. A., Yakushin A. V. 2017, *Dinamicheskaya matematicheskaya obrazovatel'naya sreda GeoGebra*. [Dynamic mathematical educational environment GeoGebra.] Uch. pos. Izd-vo TGPU im. L. N. Tolstogo. Tula. 417 p.
6. Esayan A. R., Dobrovolsky N. M. 2018, “User recursive functions in Maxima”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. pp. 431–445. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-437-451.
7. Iskusstvennyy intellekt v obrazovanii: problemy i vozmozhnosti dlya ustoychivogo razvitiya (2019) [Artificial intelligence in education: problems and opportunities for sustainable development] *Analitika. ROSKONGRESS*, Available at: <https://roscongress.org/materials/iskusstvennyy-intellekt-v-obrazovanii-problemy-ivozmozhnosti-dlya-ustoychivogo-razvitiya/> (accessed 30 January 2023).
8. Iskusstvennyy intellekt v obrazovanii: perspektivy primeneniya v Rossii (2021) [Artificial intelligence in education: prospects for application in Russia] *RBK Trendy* Available at: <https://trends.rbc.ru/trends/education/5d6beaea9a7947a1c1fe9152> (accessed 30 January 2023).
9. Korovnikova N. A. 2021, “Artificial intelligence in the modern educational space: problems and prospects”, *Sotsial'nyye novatsii i sotsial'nyye nauki*, Vol. 2, no 4. pp. 98–113.
10. Mirzoev M. S., Shapkina V. M., Tagoev Z. “Metodicheskiye podkhody k modernizatsii shkol'nogo kursa informatiki”, [Methodological approaches to the modernization of the school course of informatics]. *Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii “Aktual'nyye problemy obucheniya matematike i informatike v shkole i vuze”*, Moscow, MSGU, 2018.
11. Lavrenov A. N. “Iskusstvennyy intellekt v sovremennoy informatsionnoy obrazovatel'noy srede”, [Artificial intelligence in the modern information educational environment], *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy internet-konferentsii “Aktual'nyye problemy metodiki obucheniya informatike i matematike v sovremennoy shkole”*, [Mat. of the int. sci. and pract.

- conf. "Actual problems of teaching methods for informatics and mathematics in the modern school", Moscow, 2019. – pp. 660–665. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41517683> (accessed 30 January 2023).
12. Smirnova I.M., Manyakhin V.G., Makarova P.S., Mirzoev M.S., Nizhnikov A.I. 2022. *Organization of various activities of students in teaching mathematics and informatics*. Prometheus, M., 208 p.
 13. Mirzoev M.S., Yagello A.A. 2022, "Development of students' creativity in teaching the basics of artificial intelligence", *Pedagogical informatics*, no. 2, pp. 127-135.
 14. On amendments to the federal state educational standard of secondary general education, approved by order of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation of May 17, 2012 No. 413. (Registered on September 12, 2022 No. 70034). Available at: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008> (accessed 27 January 2023).
 15. Public-professional discussion and external expertise of the PEP project on the subject "Informatics", for secondary general education. Available at: <https://infdiscussion.itmo.ru/p/poop-soo/124> (accessed 27 January 2023).
 16. Semakin I.G., Yasnitsky L.N. On the possibilities of teaching "artificial intelligence", in a secondary school. Available at: <https://lbz.ru/metodist/lections/12/files/about.pdf> (accessed 27 January 2023).
 17. Chubarikov V.N., Dobrovol'skii N.N., Rebrova I.Yu., Dobrovol'skii N.M. 2021, "Computer science, computer, computational complexity", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 22, no 1. pp. 520-536. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536>.

Получено: 29.01.23

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 532.5.031, 626.131.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-294-303

Кавитационное обтекание клина при наличии расположенного в его вершине точечного стока

С. Л. Толоконников, А. А. Спасова

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Спасова Анна Алексеевна — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: anya_spasova@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о симметричном стационарном кавитационном обтекании клина безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости при наличии точечного стока заданной интенсивности, расположенного в вершине клина.

Для схематизации течения в кормовой части каверны использована схема Эфроса с возвратной струйкой, уходящей на второй лист римановой поверхности.

Точное решение задачи построено отображением областей изменения комплексного потенциала и комплексной скорости течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного.

Проведен полный параметрический анализ задачи. Для широкого набора значений числа кавитации, безразмерного расхода стока и угла раствора клина найдены форма и размеры кавитационной полости, а также значения коэффициента сопротивления.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, кавитационное обтекание, клин, точечный сток.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

С. Л. Толоконников, А. А. Спасова. Кавитационное обтекание клина при наличии расположенного

в его вершине точечного стока // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 294–303.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 532.5.031, 626.131.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-294-303

On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges

S. L. Tolokonnikov, A. A. Spasova

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tolsl@mail.ru

Spasova Anna Alekseevna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: anya_spasova@mail.ru

Abstract

In the article the problem of a symmetric stationary cavitation flow around a wedge by an infinite flow of ideal incompressible weightless fluid in the presence of a given intensity point effluent located at the top of the wedge is considered.

To schematize the flow in the aft part of the cavity the Efros scheme with a return stream going to the second sheet of the Riemannian surface is used.

The exact solution of the problem is constructed by displaying the areas of change complex potential and complex flow velocity per area change of the auxiliary parametric variable.

A complete parametric analysis of the problem has been carried out.

For a wide range values of the cavitation number, dimensionless flow rate and angle wedge solution, the shape and dimensions of the cavitation cavity are found, and See also the values of the drag coefficient.

The shape and dimensions of the cavitation cavity and also the values of the resistance coefficient are found for a wide range of cavitation number values, dimensionless consumption of effluent and opening angle of the wedge.

Keywords: incompressible fluid, cavitation flow, wedge, point effluent.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

S. L. Tolokonnikov, A. A. Spasova, 2023, “On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 294–303.

1. Введение

Для улучшения аэродинамических характеристик обтекаемых тел широко используются системы активного управления потоком, к которым относятся, в частности, устройства отбора внешнего потока или выдува струй, что способствует устранению отрыва пограничного слоя, увеличению подъемной силы крыловых профилей и пр. Обширная библиография, посвященная указанной тематике, содержится в монографиях [1 – 3].

В значительном числе работ при теоретическом описании устройства управления потоком заменяются точечными или распределенными особенностями, расположенными на поверхности обтекаемого тела — стоком в случае отбора или источником в случае выдува [1, 2].

Интерес к задачам о кавитационном обтекании тел при наличии на поверхности тела или в потоке точечного источника связан в первую очередь с идеей акад. Л.И. Седова о возможном существенном снижении силы сопротивления при подаче из тела струи жидкости, направленной против потока [4, 5]. Так, например, в [5] показано, что при обтекании по схеме Кирхгофа сопротивление уменьшается в 2 раза по сравнению с сопротивлением тела без выдува струи, но с тем же асимптотическим законом расширения каверны.

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости был исследован ряд задач о стационарных плоских и осесимметричных течениях с точечными источниками. В работе [6] было установлено, что замена встречной струи источником дает хорошее приближение для определения силовых характеристик и формы свободных границ течения. Решение задачи о кавитационном обтекании плоской пластинки с источником представлено в [7]. В работе [8] изучена задача о кавитационном обтекании клина при наличии источника на клине или в потоке. Исследованы силовые характеристики, указаны условия, при которых возможно появление тяги. Обтекание ограниченным потоком клина с источником в вершине рассмотрено в [9]. Работа [10] посвящена исследованию влияния гидродинамических особенностей на величину силы и асимптотический закон расширения осесимметричных полутел конечного сопротивления. В [11, 12] рассмотрены плоская и осесимметричная задачи о кавитационном обтекании тел при наличии источника на теле или в потоке. Для случая малых значений числа кавитации получены универсальные, не зависящие от формы тела соотношения между силой сопротивления, длиной и миделем каверны, числом кавитации и мощностью источника. В работе [13] решена задача о кавитационном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток, по схеме Кирхгофа, соответствующей нулевому значению числа кавитации.

В настоящей статье рассмотрена задача о симметричном стационарном кавитационном обтекании клина при наличии в его вершине точечного стока заданной интенсивности. Жидкость полагается идеальной, несжимаемой, невесомой. Течение является плоскопараллельным, установившимся, потенциальным. Рассмотрен случай положительных значений числа кавитации. Для замыкания каверны используется схема Эфроса.

2. Постановка задачи

Схема верхней половины рассматриваемого симметричного течения показана на рис. 1, а. Здесь отрезок KE – щека клина длиной l . Угол раствора клина равен $2\pi\alpha$. Скорость и давление в бесконечно удаленной точке D безграничного потока, взаимодействующего с клином, равны v_∞ и p_∞ соответственно.

На свободной линии тока EF , являющейся верхней границей кавитационной полости, давление и модуль скорости постоянны и равны p_0 и v_0 соответственно. Для замыкания кавитационной полости используется схема Эфроса с возвратной струей, уходящей на второй лист римановой поверхности [14]. Точка F отвечает бесконечно удаленной точке возвратной струи.

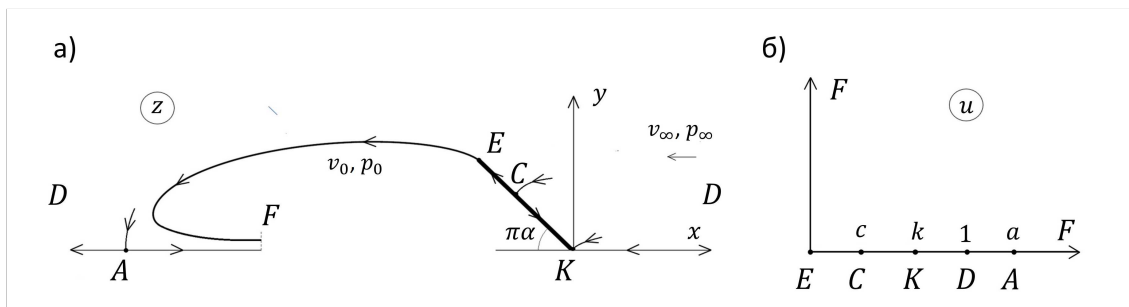


Рис. 1: Схема течения (а), параметрическая область (б)

В вершине клина K расположен точечный сток заданной интенсивности $-Q < 0$. В течении имеются две критические точки C и A . Точка C находится на щеке клина, точка A — в плоскости симметрии течения.

Рассматриваемая схема соответствует положительным значениям числа кавитации $\sigma = 2(p_\infty - p_0)/\rho v_\infty^2$, где ρ — плотность жидкости.

В результате решения задачи следует определить распределение скорости и давления в области течения, форму и размеры кавитационной полости, и силу сопротивления, действующую на клин со стоком.

3. Аналитическое решение

Решение задачи строится отображением областей изменения комплексного потенциала w и комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$ течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного u , в качестве которого выбирается правый верхний квадрант. Соответствие точек физической и параметрической областей указано на рис. 1, а, б.

Для построения отображения $\frac{dw}{du}(u)$ проанализируем его особенности в параметрической области.

В точке D ($u = 1$) функция $w(u)$ имеет простой полюс и логарифмическую особенность, а ее производная $\frac{dw}{du}(u)$ — полюс второго порядка. Вследствие нарушения конформности в тейлоровских разложениях $w(u)$ в окрестности критических точек C ($u = c$) и A ($u = a$) отсутствуют линейные члены, функция $\frac{dw}{du}(u)$ имеет в этих точках нули первого порядка. Точка K ($u = k$) соответствует точечному стоку. Комплексный потенциал $w(u)$ имеет логарифмическую особенность в этой точке, а $\frac{dw}{du}(u)$ — полюс первого порядка.

При аналитическом продолжении $\frac{dw}{du}(u)$ на всю плоскость u согласно принципу симметрии добавляются нули первого порядка в точках $u = -a$ и $u = -c$, полюс второго порядка в точке $u = -1$ и простой полюс в точке $u = -k$.

Других особенностей во всей плоскости u отображение $\frac{dw}{du}(u)$ не имеет, поэтому согласно теореме Лиувилля [14, 15] находим

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{u(u-a)(u-c)(u+a)(u+c)}{(u-1)^2(u+1)^2(u-k)(u+k)}. \quad (1)$$

Постоянная N является действительной, в чем легко убедиться, вычисляя последнюю формулу в точках действительной оси.

Перейдем к построению отображения $\frac{dw}{dz}(u)$. В критических точках C ($u = c$) и A ($u = a$) функция $\frac{dw}{dz}(u)$ имеет простые нули, в точке K ($u = k$) — особенность вида $(u-k)^{\alpha-1}$. Других нулей и особенностей отображение $\frac{dw}{dz}(u)$ в параметрической области не имеет. При аналитическом продолжении добавляются простые полюса в точках $u = -c$ и $u = -a$, а также особенность вида $(u+k)^{1-\alpha}$ в точке $u = -k$. Следовательно, функция $\frac{dw}{dz}(u)$ имеет вид

$$\frac{dw}{dz}(u) = v_0 \frac{(u-a)(u-c)(u+k)^{1-\alpha}}{(u+a)(u+c)(u-k)^{1-\alpha}}. \quad (2)$$

В формуле (2) учтено также, что $\frac{dw}{dz}(\infty) = v_0$, $\frac{dw}{dz}(0) = -v_0 e^{i\pi\alpha}$.

Из (1) и (2) следует

$$\frac{dz}{du}(u) = \frac{N}{v_0} \frac{u(u+a)^2(u+c)^2}{(u^2-1)^2(u-k)^\alpha(u+k)^{2-\alpha}}. \quad (3)$$

В формулы (2) и (3), дающие общее решение задачи, входят неизвестные параметры N, a, c, k , подлежащие определению из дополнительных условий.

Так как $z(k) - z(0) = \int_0^k \frac{dz}{du}(u) du$, то с помощью (3) находим

$$N = \frac{lv_0}{J}, \quad J = \int_0^k \frac{u(u+a)^2(u+c)^2}{(u^2-1)^2(u-k)^\alpha(u+k)^{2-\alpha}} du. \quad (4)$$

С помощью (4) формула (3) может быть записана в виде

$$\frac{1}{l} \frac{dz}{du}(u) = \frac{1}{J} \frac{u(u+a)^2(u+c)^2}{(u^2-1)^2(u-k)^\alpha(u+k)^{2-\alpha}}. \quad (5)$$

После нахождения неизвестных параметров a, c, k последнее соотношение служит для вычисления геометрических характеристик течения.

В бесконечно удаленной точке D потока известно значение комплексной скорости $\frac{dw}{dz}(1) = -v_\infty$. Поэтому с помощью (2) находим

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{(a-1)(1-c)(1+k)^{1-\alpha}}{(1+a)(1+c)(1-k)^{1-\alpha}} \quad (6)$$

Отношения скоростей, входящее в (6), может быть выражено через число кавитации с помощью интеграла Бернулли: $\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}}$.

Так как лучи DA и KD лежат на одной прямой $y = 0$, то есть в плоскости симметрии течения, следует потребовать $\text{Res} \frac{dz}{du}(1) = 0$, что приводит к соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+c} - \frac{\alpha k + 1 - k}{1 - k^2} = 0. \quad (7)$$

Выражение для безразмерного расхода стока находится интегрированием (2) по бесконечно малой полуокружности вокруг точки $u = k$:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{lv_0} = \frac{\pi(a^2 - k^2)(k^2 - c^2)}{J(k^2 - 1)^2}. \quad (8)$$

Суммарная сила сопротивления определяется формулой [2]

$$X = - \int_S (pn_x + \rho v_n v_x) ds,$$

где интеграл берется по поверхности S клина со стоком, нормаль $\mathbf{n}$ направлена в сторону жидкости. Выражение для величины X может быть получено с применением интегральных законов сохранения массы и количества движения [14]:

$$X = \rho v_0^2 \delta + \rho v_\infty (v_0 \delta + Q),$$

где δ — ширина возвратной струи в бесконечно удаленной точке.

При переходе с AF на FE в параметрической области по четверти бесконечно большой окружности значение $\text{Im } w(u)$ увеличивается на $v_0\delta/2$. Интегрируя (1) по указанной четверти окружности, находим $\frac{v_0\delta}{2} = \frac{\pi}{2}N$, откуда с учетом (4) имеем $\delta = \frac{\pi l}{J}$.

Для коэффициента сопротивления, отнесенного к миделеву сечению клина, получаем выражение

$$C_x = \frac{X}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} 2l \sin(\pi\alpha)} = \frac{\sqrt{1+\sigma} [\pi(\sqrt{1+\sigma}+1) + J\bar{Q}]}{J \sin(\pi\alpha)}. \quad (9)$$

Уравнения (6), (7), (8) при заданных α , σ и $\bar{Q}$ образуют замкнутую систему уравнений для нахождения параметров a , c , k , которая в дальнейшем решается численно. Для исследования системы (6–8) используется следующая методика. Параметр a из (6) выражается через остальные параметры, и после подстановки полученного выражения в уравнение (7) получается соотношение, связывающее c и k . Полученное уравнение имеет решение $c \in (0, k]$ только при $k \in [k_1, k_2)$, где $0 < k_1 < k_2 < 1$. Для каждого k из этого промежутка находится единственное значение $c \in (0, k]$, а после определения a , c и k по формуле (8) вычисляется безразмерный расход источника $\bar{Q}$. Таким образом, варьируя значение k в промежутке $[k_1, k_2)$, мы можем вычислить все возможные значения $\bar{Q}$, соответствующие рассматриваемой схеме течения. Расчеты показывают, что при фиксированном $\sigma > 0$ с ростом k значение $\bar{Q}$ монотонно увеличивается от нуля до некоторого $\bar{Q}_{max}$, зависящего от α и σ . Решение задачи для случая $\bar{Q} = 0$, т.е. для клина без стока, может быть получено из представленного выше при $c = k$.

4. Результаты численных расчетов

На рис. 2 показаны рассчитанные формы границ кавитационной полости для трех значений угла раствора клина $2\pi\alpha = \pi$ (пластинка), $2\pi/3$ и $\pi/2$ при фиксированном числе кавитации $\sigma = 0.5$ и нескольких значениях безразмерного расхода $\bar{Q}$. Линии 1 соответствуют случаю $\bar{Q} = 0$, т.е. обтеканию клина без особенности в вершине.

Как видно из рис. 2, рост значения $\bar{Q}$ приводит к существенному уменьшению размеров кавитационной полости. Уже при $\bar{Q} = 0.7$ длина каверны примерно в 2 раза меньше, чем в случае отсутствия стока. При фиксированных σ и $\bar{Q}$ уменьшение α также приводит к сокращению размеров каверны.

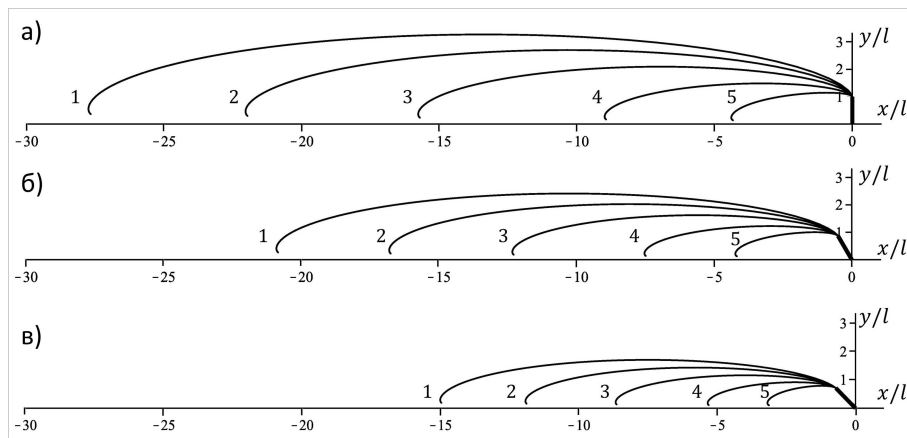


Рис. 2: Форма границ каверны для $\sigma = 0.5$ и значений $\alpha = 1/2$ (а), $1/3$ (б), $1/4$ (в) при различных $\bar{Q}$: 0, 0.3, 0.7, 1.7, 2 (линии 1–5 соответственно)

Дополнительную информацию о влиянии интенсивности стока на размеры кавитационной полости дают представленные на рис. 3–5 зависимости относительных длины L/l и миделя h/l каверны от величины $\bar{Q}$ для трех указанных выше значений угла раствора клина и при нескольких значениях числа кавитации. Длина каверны L определяется как разность абсцисс точки E и точки свободной линии тока EF , в которой касательная к этой линии параллельна оси y . Следует отметить, что для значений $\bar{Q}$, близких к $\bar{Q}_{max}(\alpha, \sigma)$, величина L/l близка к нулю, и решения для случая $\bar{Q} \approx \bar{Q}_{max}$ следует рассматривать как нефизичные.

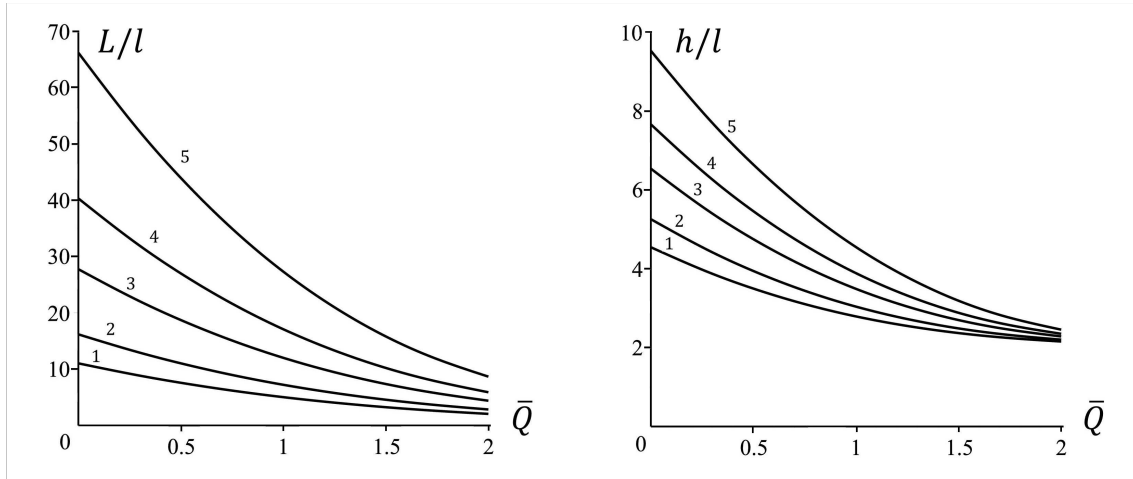


Рис. 3: Зависимость относительных длины L/l и миделя h/l каверны от $\bar{Q}$ для $\alpha = 1/2$ (пластинка) и значениях числа кавитации σ : 0.9, 0.7, 0.5, 0.4 и 0.3 (линии 1-5 соответственно)

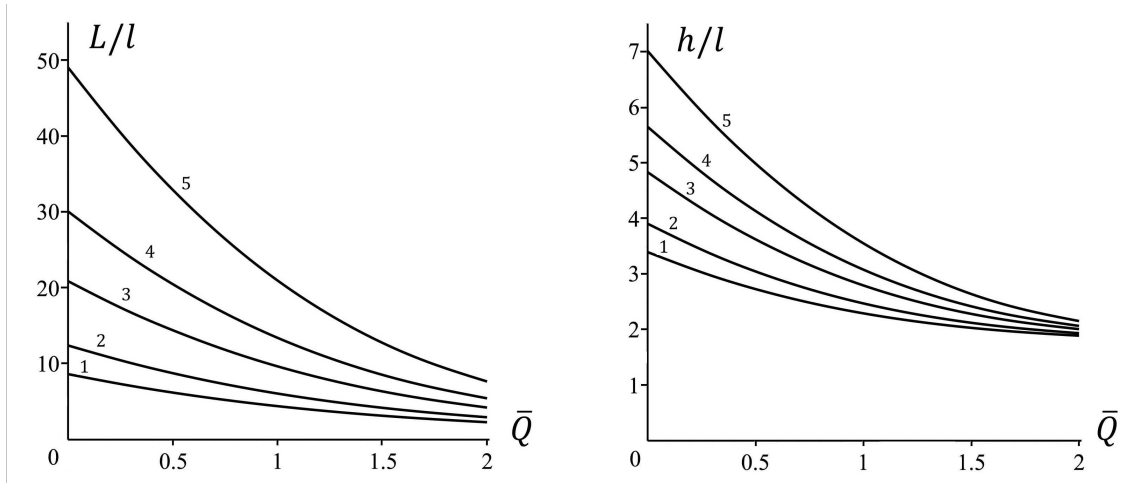


Рис. 4: Зависимость относительных длины L/l и миделя h/l каверны от $\bar{Q}$ для $\alpha = 1/3$ (пластинка) и значениях числа кавитации σ : 0.9, 0.7, 0.5, 0.4 и 0.3 (линии 1-5 соответственно)

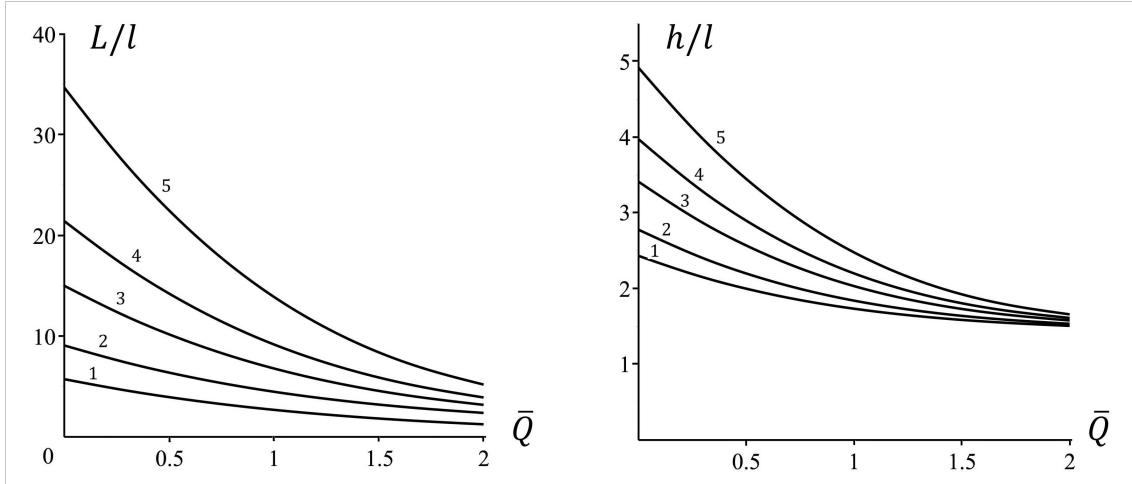


Рис. 5: Зависимость относительных длины L/l и глубины h/l каверны от $\bar{Q}$ для $\alpha = 1/4$ (пластинка) и значениях числа кавитации σ : 0.9, 0.7, 0.5, 0.4 и 0.3 (линии 1-5 соответственно)

На рис. 6 показаны зависимости коэффициента сопротивления C_x от $\bar{Q}$ для трех различных углов раствора клина и нескольких значений числа кавитации. Для всех рассмотренных случаев с увеличением $\bar{Q}$ коэффициент сопротивления возрастает.

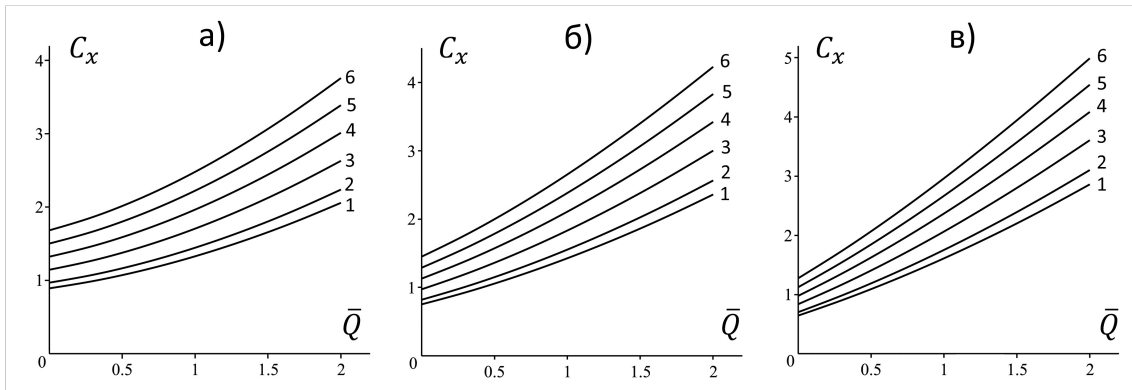


Рис. 6: Зависимости коэффициента сопротивления C_x от $\bar{Q}$ для $\alpha = 1/2$ (а), $1/3$ (б), $1/4$ (в) при различных σ : 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 (линии 1-6 соответственно)

5. Заключение

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости получено точное решение задачи о кавитационном обтекании клина с расположенным в его вершине точечным стоком. Установлено, что форма и размеры каверны существенно зависят от величины расхода стока. Показано, что безразмерный расход по величине не может превосходить некоторого максимального значения, зависящего от угла раствора клина и числа кавитации. Установлено, что при фиксированном значении числа кавитации с ростом величины безразмерного расхода стока наблюдается возрастание коэффициента сопротивления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. М.: Наука, 1994. 436 с.
2. Ильинский Н. Б., Абзалилов Д. Ф. Математические проблемы проектирования крыловых профилей: усложненные схемы течения; построение и оптимизация формы крыловых профилей. Казань: Казан. ун-т, 2011. 284 с.
3. Шурыгин В. М. Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977. 200 с.
4. Седов Л. И. Об обтекании идеальной жидкостью тела со встречной струей // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 1. С. 41-42.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1994. 560 с.
6. Сотина Н. Б., Фоминых В. В. О моделировании источником тонкой струйки, вытекающей из тела // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 5. С. 47-54.
7. Мухина Т. Г. О кавитационном обтекании пластинки с источником. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. №5. 1979. С. 157-161.
8. Сотина Н. Б., Фоминых В. В. Кавитационное обтекание клина при наличии источника в клине или потоке // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 6. С. 137-141.
9. Пик-Пичак Е. Г. Обтекание ограниченным потоком клина с источником в вершине // Отчет института механики МГУ № 2565. 1981. 56 с.
10. Сотина Н. Б. Асимптотический закон расширения каверны при наличии в потоке гидродинамических особенностей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 3. С. 153-155.
11. Петров А. Г., Сотина Н. Б. Универсальные, не зависящие от формы кавитатора, соотношения при малых числах кавитации // Журнал прикладной механики и технической физики. 1984. № 5. С. 110-117.
12. Петров А. Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Наука, 2010. 520 с.
13. Штанько В. А. О струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток. // Тр. НИИ прикл. матем. и механ. при Томск. ун-те, 1976. Т. 7. С. 120-123.
14. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

REFERENCES

1. Elizarov, A. M., Ilyinsky, N. B., Potashev, A. V. 1994, "Inverse boundary value problems of aerohydrodynamics: theory and methods for designing and optimizing of the shape of the wing profiles", Nauka, Moscow, 436 p., [in Russian].
2. Ilyinsky, N. B., Abzalilov, D. F. 2011, "Mathematical problems of designing wing profiles: complicated flow patterns; building and optimization of the shape of the wing profiles", Kazan University, Kazan, 284 p., [in Russian].

3. Shurygin, V. M. 1977, “*Aerodynamics of bodies with jets*”, Mashinostroenie, Moscow, 200 p., [in Russian].
4. Sedov, L. I. 1972, “On the flow around an ideal fluid of a body with counter jet”, *Doklady AN SSSR*, vol. 206, no. 1, pp. 41-42, [in Russian].
5. Sedov, L. I. 1994, “*Continuum mechanic*”, vol. 2, Nauka, Moscow, 560 p., [in Russian].
6. Sotina, N. B., Fominykh, V. V. 1979, “Simulation by a source of a thin jet from a body”, *Fluid Dynamics*, vol. 14, no. 5, pp. 673–679.
7. Mukhina, T. G. 1979, “Cavitation flow over a plate with a source”, *Fluid Dynamics*, vol. 14, no. 5, pp. 764–767.
8. Sotina, N. B., Fominykh, V. V. 1979, “Symmetric cavitation flow past a wedge in the presence of a source on the wedge or in the flow”, *Fluid Dynamics*, vol. 14, no. 6, pp. 927–931.
9. Pik-Pichak, E. G. 1981, “Flow around a limited wedge with a source at the top”, *Report Inst. Mech. Moscow State Univer. no. 2565*, 56 p., [in Russian].
10. Sotina, N. B. 1977, “Asymptotic law of expansion of a cavity in the presence of hydrodynamic singularities in the flow”, *Fluid Dynamics*, vol. 12, no. 3, pp. 469–472.
11. Petrov, A. G., Sotina, N. B. 1984, “Universal, cavity-shape-independent relations for cavitation flow with small cavitation numbers”, *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.*, vol. 25, no. 5, pp. 758–766.
12. Petrov, A. G. 2010, “*Analytical hydrodynamics*”, Nauka, Moscow, 520 p., [in Russian].
13. Shtanko, V. A. 1976, “On the jet flow around a plate, in the center of which there is a source or drain”, *Trudy NII Appl. Math. and Mech. Tomsk Gos. Univ.*, vol. 7, pp. 120–123.
14. Gurevich, M. I. 1979, “*Theory of the ideal liquid jets*”, Nauka, Moscow, 536 p., [in Russian].
15. Lavrentiev, M. A., Shabat, B. V. 1973, “*Methods of complex variable functions theory*”, Nauka, Moscow, 736 p., [in Russian].

Получено: 27.11.2022

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 531.091

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-304-312

**Аналитическое обоснование гироскопического эффекта
в работах О. И. Сомова**

А. О. Юлина

Юлина Анна Олеговна — Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: parfanova19761976@mail.ru

Аннотация

С начала XIX в. в европейских странах (Германия, Франция, Бельгия, Австрия) астрономы, инженеры, механики изобретали, создавали и совершенствовали гироскопы. Практический запрос на устройства с гироскопом был значительным, но специальной теории гироскопа ещё не было. Фундамент теории был заложен Эйлером, развит Лагранжем, продолжен Пуассоном. С другой стороны, в XIX в. в работах Якоби, Абеля, Вейерштрасса была создана и начала развиваться теория эллиптических функций. На основе этой теории К. Якоби и О.И. Сомовым была создана специальная теория гироскопа.

Ключевые слова: Гироскоп, эллиптическая функция, Эйлер, Лагранж, Якоби, Сомов.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:

А. О. Юлина. Аналитическое обоснование гироскопического эффекта в работах О. И. Сомова
// Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 304–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 531.091

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-304-312

**Analytical substantiation of the gyroscopic effect
in the works of O. I. Somov**

A. O. Yulina

Yulina Anna Olegovna — Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (St. Petersburg).

e-mail: parfanova19761976@mail.ru

Abstract

Since the beginning of the XIX century in European countries (Germany, France, Belgium, Austria) astronomers, engineers, mechanics invented, created and improved gyroscopes. The practical demand for gyroscope devices has been significant, but there has not yet been a specific theory of the gyroscope. The foundation of the theory was laid by Euler, developed by Lagrange, and continued by Poisson. On the other hand, in the 19th century in the works of Jacobi, Abel, Weierstrass, the theory of elliptic functions was created and began to develop. Based on this theory, K. Jacobi and O.I. Somov created a special theory of the gyroscope

Keywords: Gyroscope, elliptic function, Euler, Lagrange, Jacobi, Somov.

Bibliography: 9 titles.

For citation:

A. O. Yulina, 2023, "Analytical substantiation of the gyroscopic effect in the works of O. I Somov", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 304–312.

1. Введение

В 1817 году Иоанн Боненбергер (Johann von Bohnenberger; 1765–1831) изобрёл, а затем опубликовал описание гироскопа [1]. Главной частью устройства был вращающийся массивный шар в кардановом подвесе. В 1852 году французский учёный Ж. Б. Фуко (J. B. L. Foucault, 1819–1868) усовершенствовал гироскоп и впервые использовал его как прибор, доказывающий суточное вращение Земли.

Впервые уравновешенный гироскоп нашел практическое применение в устройстве для стабилизации курса торпеды, изобретенном в 1880-х гг. австрийским инженером Л. Обри (L. Obry, 1863–1915) [1]. Гироскоп Обри устанавливался в кардановом подвесе так, чтобы его ось вращения была параллельна продольной оси торпеды. Ротор гироскопа приводился во вращение за несколько секунд до выстрела, когда ось торпеды была уже направлена на цель. При движении торпеды гироскоп продолжал сохранять исходное направление и при возникновении отклонений торпеды поворачивал ее рули таким образом, чтобы обеспечить неизменность курса.

Специальным прикладным разделом динамики твердого тела с одной неподвижной точкой является теория гироскопа. Теоретические основания теории гироскопа в рамках динамики твердого тела развивались в связи с решением задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Впервые задачу о вращении твердого тела, причем сразу в общем виде, поставил Эйлер в 1758 г. В работе «Теория движения твердых тел» [6] он рассмотрел случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса). В этом случае тело имеет три степени свободы. Такие три параметра Леонард Эйлер называет углами: прецессии – ψ , собственного вращения – φ , нутации – θ , которые однозначно определяют положение подвижной системы отсчета, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы координат. При вращении твердого тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени, которые он вывел еще в работе «Открытие нового принципа механики» (1750). Были получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей тела и параметров движения). Далее Эйлер устанавливает зависимости между параметрами движения и силами, действующими на тело – динамические уравнения. Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т.е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам.

Следующий шаг вперед вскоре сделал Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Существенно новым достижением Лагранжа в этой проблеме была постановка задачи о движении твердого

тела, получившая в дальнейшем наименование “случая Лагранжа”: точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести тела [7]. Лагранж ввел упрощающие предположения о динамической симметрии твердого тела и о расположении точки опоры на оси симметрии. Этот важный результат вместе с выделением практически интересного случая движения тяжелого симметричного гироскопа (как стали позже называть случай Лагранжа) представляет чрезвычайно большое достижение в динамике твердого тела. Таким образом, Лагранж привел задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки к квадратурам. В 1773 г. он исследовал вращение твердого тела некоторой формы около неподвижной точки, рассмотрев и усовершенствовав решение Эйлера задачи о вращении тела без действия внешних сил. Позже, при подготовке второго издания “Аналитической механики” в начале XIX в., Лагранж вернулся к этой проблеме, начав более глубокое ее исследование [7]. Он вводит понятие мгновенной оси вращения твердого тела около неподвижной точки, опираясь на обоснование примененного им подхода, детально разработанного ранее. Далее заново выводятся кинематические уравнения Эйлера вращения твердого тела в дифференциальной форме. Затем заново выводятся динамические уравнения Эйлера, исходя из той формы дифференциальных уравнений движения системы, которые теперь называют “уравнениями Лагранжа второго рода”. Лагранж подчеркивает, что свободные оси в твердом теле открыл Эйлер, и наиболее изящная и удобная во многих случаях форма дифференциальных уравнений движения впервые выведена Эйлером [7]. Однако Лагранж этим не ограничился: он наметил путь интегрирования и двух первых уравнений движения, довел их до квадратур в эллиптических функциях.

В 1811 г. Симеон Дени Пуассон (1781–1840) более детально исследовал проблемы для случая, найденного Лагранжем, и довел его почти до современного состояния. Пуассон опубликовал эти исследования несколько раньше посмертного выхода в свет второго тома “Аналитической механики” Лагранжа (1815). Он, видимо, ничего не знал о результатах своего учителя Лагранжа по тому же вопросу, связанному с кинематикой вращения твердого тела [8].

Существенный шаг в развитии динамики твердого тела, сделал Карл Якоби (1854–1851), введя эллиптические функции. С помощью этих функций время становится независимой переменной и основные параметры вращения твердого тела являются однозначными функциями времени. Работа К. Якоби по эллиптическим функциям была выполнена им в 1849 году, а опубликована уже посмертно в его втором томе сочинений Берлинской академией наук в 1882 году. Таким образом, созданный Якоби математический аппарат эллиптических функций позволил О.И. Сомову в 1850 году блестяще решить задачу о вращении твердого тела в случае первоначального удара. В 1850 году Осип Иванович Сомов (1815–1876) решил задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки в новой постановке, отличной от Эйлера и Лагранжа: для того случая, когда движение происходит только от первоначального удара. Он показал, как эллиптические функции Якоби применяются в механике твердого тела. «Якоби дал новые формулы, отличающиеся своей изящностью и разрешающие вполне вопрос. Они были сначала напечатаны без доказательства, а потом в 39 томе журнала Крелле, с доказательством и новым развитием» [2].

Общее решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки позволяет выполнять следующие технические задачи: рассчитывать кинематические параметры качки основания и элементов подвеса в системе с динамически настраиваемым гироскопом, определять способы стабилизации двуногих роботов на подвижной опоре, изобретать новые стабилизирующие устройства.

Таким образом появилась необходимость в обосновании гироскопического эффекта. Для этого необходимо рассмотреть третий случай решения классической задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. К середине XIX в. в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова, Римана определились два основных теоретических подхода: геометрический (Риман) и аналитический (на базе теории эллиптических функций). История этого вопроса содержит значительные пробелы, и целью нашей статьи является их освещение.

Первое систематическое изложение по вопросам теории эллиптических функций в России представлено у петербургского академика Осипа Ивановича Сомова. Подробно и ясно изложена эта непростая и поныне отрасль интегрального исчисления в его фундаментальном труде «Основания теории эллиптических функций» (1850 год). Книга содержит семь глав, и отдельная глава посвящена приложениям эллиптических функций к некоторым вопросам геометрии и механики.[2]

Таким образом, Сомов в 1850 году получил аналитическое представление для вращения твердого тела вокруг неподвижной точки [3].

А в 1855 году он объясняет гироскопический эффект [4]. Далее перейдем к анализу этой работы.

2. Аналитическое представление гироскопического эффекта

В 1855 году Сомов продолжил исследование задачи о вращении твердого тела. Эта работа представляет законченное аналитическое решение поставленной проблемы. Сомов получил все основные характеристики движения через эллиптические функции третьего рода и обосновал соотношения между моментами инерции для гироскопического явления. Кратко приведем основные выводы статьи «Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux. (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855.)»

Интегрирование уравнений движения тяжелого твердого тела любой формы вокруг неподвижной точки, которая не находится в центре тяжести, представляет значительные трудности. Сомов воспользовался свойствами эллиптических функций для строгого обсуждения такого движения. Он ограничился заменой эллиптических функций приближенными формулами в случае, когда угол между вертикалью и осью вращения остается очень малым, а скорость вращения очень большая.

В статье будет представлено содержание работы Сомова, в которой он дал полное и строгое решение поставленной задачи, включающей, как частный случай, задачу о коническом маятнике. Любопытные явления, наблюдаемые на гироскопе или машине от Vonenberger, также находят свои объяснения в этом решении.

Дифференциальные уравнения движения, которые рассматриваются, а также их первые интегралы, могут быть взяты либо из аналитической механики Лагранжа, либо из механики Пуассона. Сомов, используя все данные задачи, сразу выводит первые интегралы геометрическим методом.

Для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной точки Сомов вводит две системы отсчета: неподвижная (O, X, Y, Z) и подвижная, связанная с телом вращения (O, X', Y', Z') . Ось Z - вертикальная ось вращения, на линии Z' находится центр тяжести тела. Тогда параметры, однозначно определяющие положение тела: $ZOZ' = \theta$, $NOX = \psi$, $X'ON = \varphi$. Где ON , линия пересечения плоскостей (O, X, Y) и (O, X', Y') .

Обозначая за t время, дифференциалы этих углов: $d\psi, d\varphi, d\theta$ будут тремя мгновенными перемещениями, которые определяют угловое перемещение в течение времени dt .

Итак, если автор представляет значения: $d\psi, d\varphi, d\theta$ по длинам диапазона на соответствующих осях: ON, OZ, OZ' , и далее находит равнодействующую по правилу параллелограмма, тогда направление результирующей будет мгновенной осью, а ее длина - значением мгновенного углового смещения. Такие же предположения он делает относительно осей OX', OY', OZ' , которые будут представлять значения мгновенных перемещений вокруг этих осей. Вот их записать:

$$pdt, qdt, rdt.$$

Для краткости, обозначая $\cos \theta = z$:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg\gamma(z+h)(1-z^2) - (l - Cnz)^2}{A^2}$$

Три корня второго члена этого уравнения, рассматриваемые как функция от z , действительны. В самом деле, подставляя в этом члене вместо z последовательно: $-\infty, -1, \cos \alpha, +1$, выясняем знаки этой функции: $+, -, +, -$.

Это не только доказывает действительность корней, но и показывает, что рассматриваемая Сомовым функция имеет корень отрицательный, модуль которого < 1 , и два корня с числовыми значениями > 1 , одно из которых находится между пределами: $-1, \cos(\alpha)$. Обозначив эти корни в соответствии с порядком их величины: $-c, b, a$, будем иметь:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg\gamma}{A} \cdot (a-c)(z-b)(z+c) \quad (5)$$

Числовое значение для $z = \cos \theta$ не может превышать 1, значение $(z+c)$ всегда будет оставаться положительным; поэтому $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ имеет положительные значения если, соответствующая величина z находится в пределах: a, b .

Чтобы подчинить z этому условию, автор полагает :

$$z = a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega = b + (a-b) \cdot \cos^2 \omega$$

обозначая через ω вещественный угол. Более того если:

$$\frac{a-b}{a+c} = k^2, u = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \omega)}}$$

Получает

$$\omega = am(u), z = a \cos^2(am(u)) + b \sin^2(am(u)), a-z = (a+c)k^2 \sin^2(am(u)), \\ z-b = (a+c)k^2 \cos^2(am(u)), z+c = (a-c)(1-k^2) \sin^2(am(u)) = (a+c)\Delta^2 am(u).$$

Тогда

$$\frac{dz}{dt} = -2(a+c)k^2 \sin^2(am(u)) \cos(am(u)) \Delta am(u) \frac{du}{dt}$$

, что при подстановке в уравнение (5) дает

$$\frac{du}{dt} = \frac{Mg\gamma}{2A} \cdot (a+c)$$

Обозначив для сокращения $\sqrt{\frac{du}{dt} = \frac{Mg\gamma}{2A} \cdot (a+c)} = p$, получает

$$du = \pm p dt, u = \pm p(t + \tau),$$

где τ произвольная константа.

Далее из уравнения (2) определяет значение угла ψ , пользуясь подстановками приведенными выше. После интегрирования получает следующее выражение для этого угла:

$$\psi + \psi_0 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{(1+b)(c-1)}{(a+c)(1+a)}} \int_0^u \frac{du}{1 - \frac{a-b}{1+a}} \cdot \sin^2 am(u) + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(1-b)(c+1)}{(a+c)(1-a)}} \int_0^u \frac{du}{1 + \frac{a-b}{1-a}} \cdot \sin^2 am(u) \quad (6)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры, определяющие связь между моментами инерции, кинетическим моментом и введенными выше величинами: p, a, b, c .

Таким образом, переменная ψ будет выражаться двумя эллиптическими функциями третьего рода. Далее представляет эти эллиптические функции через тета функции и переходит к быстросходящимся рядам. Подобные выводы делает относительно двух остальных углов (собственного вращения и нутации).

Угловую скорость тела Сомов раскладывает на составляющие: p, q, r относительно осей X', Y', Z' соответственно. Составляющая скорости r определяет вращение тела относительно вертикальной оси. Значения этой скорости будут задавать следующие режимы движения твердого тела:

- Вращение с постоянной по направлению угловой скоростью собственного вращения (гироскоп),
- Колебательное движение.

Для гироскопического явления Сомов приводит подробные выводы относительно соотношения моментов инерции. Детально анализируя угловую скорость собственного вращения тела:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n[A \sin^2 \theta + C \cos \theta (\cos \theta - \cos \alpha)]}{\sin^2 \theta}$$

, Сомов доказывает, что подобное явление имеет место при следующих условиях:

$$A = \frac{C}{2}, \cos \alpha < 0, \cos^2 \alpha > \frac{4A(C - A)}{C}$$

3. Заключение

К началу XIX века Ж.Л. Лагранж привел задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки к квадратурам. Дальнейшее развитие динамика твердого тела получила в работах К. Якоби и О.И. Сомова [5]. Якоби разработал аппарат теории эллиптических функций и применил его к решению задачи о вращении. Сомов показал, что основные интегралы движения являются эллиптическими интегралами: первый из них – эллиптический интеграл первого рода, два других эллиптических интеграла имеют более сложный вид. К 1851 г. Сомов дал первое обобщение задачи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Он получил решение этой задачи для случая после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим элементам.

В 1855 Сомов дает фундаментальное аналитическое обоснование гироскопического эффекта, опираясь на полученные ранее выводы.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым О.И. в 1850 и 1855 годах вполне объясняет дальнейшее направление исследований: как в кватернионном представлении, так и в решении Ковалевской С.В.[5]

К сожалению, статья Сомова осталась невостребованной ни в России, ни в Европе. Возможно, это было связано с политическими событиями 1855 г. (Крымская война), либо с отсутствием в России запроса на использование гироскопов. Высоко оценил исследование Сомова лишь Феликс Клейн. С 1890-х гг. этой темой стали серьезно заниматься в военной и промышленной отраслях разных стран. В Германии Ф. Клейн вместе с Арнольдом Зоммерфельдом написал исследования теории гироскопа в четырех томах (Felix Klein with Arnold Sommerfeld.

Theorie des Kreisels. 1897, 1898, 1903, 1910). В России Мещерский И.В. использовал гироскопическую стабилизацию для создания однорельсовой железной дороги. Сейчас гироскоп широко применяется во всех промышленных отраслях, связанных со стабилизацией, навигацией и ориентацией механических объектов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.О. Юлина, Д.В. Бородин: О работе И.В. Мещерского в области гироскопической стабилизации монорельсового вагона // История науки и техники. 2020 г. № 4. С. 45-52.
2. Сомов О.И. Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850 г. - 250 с.
3. Юлина. А.О. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. История науки и техники, 2021 (12): 03-08.
4. J. Somoff. "Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux"... (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855., стр.115-136.
5. Клейн Ф. Математическая теория волчка.- Москва-Ижевск, 2003 г.- 70 стр.
6. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1765. T. XIV. – P. 154–193.
7. Lagrange J. L. Mécanique analytique. Paris: Ve Courcier, 1811–15.
8. Poincot, L. Éléments de statique, à l'usage des lycées (Nouv. éd.) par L. Poincot; nouv. éd., augm. d'un Mémoire sur la composition des moments et des aires. Paris: Volland l'aîné et le jeune, 1811. – 301 P.
9. Ковалевская С.В. Научные труды. СССР: АН, 1948 г. – с. 153.

REFERENCES

1. A. O. Yulina, D. V. Borodin, 2020, "About the work of I.V. Meshchersky in the field of gyroscopic stabilization of a monorail car" // History of Science and Technology. № . 4. pp. 45-52.
2. O. I. Somov. Foundations of the theory of elliptic functions. St. Petersburg: AN, 1850 - 250 p.
3. A. O. Yulina, 2021, "On the history of the problem of rotation of a rigid body around a fixed point in the case of an initial impact" // History of science and technology, (12): 03-08.
4. J. Somoff. "Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux"... (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, XIV, 1855., стр.115-136.
5. F. Klein, 2003, "Mathematical theory of the top". - Moscow-Izhevsk, 2003 - 70 p.
6. L. Euler, 1765, "Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable" // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. T. XIV. – P. 154–193.
7. J. L. Lagrange, Mécanique analytique. Paris: Ve Courcier, 1811–15.

8. L. Poinsot, *Éléments de statique, à l'usage des lycées* (Nouv. éd.) par L. Poinsot; nouv. éd., augm. d'un *Mémoire sur la composition des moments et des aires*. Paris: Volland l'aîné et le jeune, 1811. – 301 P.
9. S.V. Kovalevskaya, *Scientific works*. USSR: AN, 1948 - p. 153.

Получено: 07.08.22

Принято в печать: 24.04.2023

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-313-324

Алексей Николаевич Паршин в мире гуманитарного знания

С. С. Демидов

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация

Выдающийся российский математик Алексей Николаевич Паршин (1942 – 2022) был также глубоким мыслителем и оригинальным историком науки. Свои идеи он подытожил в ряде работ, опубликованных в различных журналах и сборниках, основные из которых составили содержание двух книг: «Путь. Математика и другие миры» (2002), «Лестница отражений» (2022). Делается попытка дать содержательный анализ основных идей А.Н. Паршина.

Ключевые слова: русская философия, П. А. Флоренский, Г. Вейль, Д. Гильберт, нумерация Гёделя, истина Откровения, геометрия умопостигаемого мира, бесконечное универсальное дерево, концепция дополнительности, пространство православного богослужения

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

С. С. Демидов. Алексей Николаевич Паршин в мире гуманитарного знания // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 313–324.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-313-324

Alexey Nikolaevich Parshin in the world of humanitarian sciences

S. S. Demidov

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: serd42@mail.ru

Abstract

The outstanding Russian mathematician Alexei Nikolaevich Parshin (1942–2022) was also a deep thinker and an original historian of science. He summed up his ideas in a number of articles published in various journals and collections, the main of which formed the content of two books: «The Way. Mathematics and Other Worlds» (2002), «Ladder of Reflections» (2022). An attempt is made to give an analysis of the main ideas of A.N. Parshin.

Keywords: Russian philosophy, P. A. Florensky, H. Weyl, D. Hilbert, Gödel numbering, the truth of Revelation, geometry of the world intelligible, infinite universal tree, complementarity concept space for Orthodox worship

Bibliography: 29 titles.

For citation:

S. S. Demidov, 2023, "Alexey Nikolaevich Parshin in the world of humanitarian sciences", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 313–324.

Текст статьи

Ушёл из жизни выдающийся российский учёный, один из крупнейших современных математиков, глубокий мыслитель и оригинальный историк науки Алексей Николаевич Паршин (7 ноября 1942 – 18 июня 2022).

Алексей Николаевич родился в городе Свердловске, нынешнем Екатеринбурге, где его родители оказались в эвакуации¹. В 1959 году после окончания учёбы в одной из московских средних школ он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, где его научным руководителем стал выдающийся математик, общественный деятель и мыслитель Игорь Ростиславович Шафаревич (1923 – 2017)². По окончании в 1964 году университета он был принят в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, с которым оказалась связанной вся его дальнейшая творческая деятельность: с 1968 года в качестве научного сотрудника, а с 1995 – заведующего отделом алгебры. В 1968 году он защитил диссертацию на степень кандидата («Некоторые теоремы конечности в диофантовой геометрии»), а в 1983 году – на степень доктора («Адели и поля классов на алгебраических поверхностях») физико-математических наук. Уже результаты его кандидатской диссертации обратили на себя внимание в мире – в 1970 году он выступил приглашённым докладчиком на Международном математическом конгрессе в Ницце. В последующие годы он вырос в одного из ведущих математиков современности, крупнейшим специалистом по алгебраической геометрии и теории чисел.

Высокой оценкой достижений А. Н. Паршина математическим сообществом стали полученные им престижные премии (премия Московского математического общества в 1971 г., премия Александра фон Гумбольдта (ФРГ) в 1996 г., премия имени И. М. Виноградова РАН в 2004 г., золотая медаль П.Л. Чебышёва РАН в 2001 г.), его приглашение в качестве пленарного докладчика на Международный математический конгресс в Хайдарабаде в 2010 г., избрание его доктором *honoris causa* Университета Париж-ХIII (2001), наконец, его избрание членом-корреспондентом (2000) и действительным членом (2011) Российской академии наук, а также членом *Academia Europaea* (2017).

Наша статья посвящена творчеству А.Н. Паршина в области гуманитарного знания. Поэтому в части, касающейся его математических достижений в алгебраической теории чисел и теории Галуа, алгебраической геометрии, геометрии многообразий и теории интегрируемых систем, мы ограничимся тем, что отошлём читателя к статьям [1 – 2].

Математика оставалась центром творческих устремлений Алексея Николаевича до конца его жизни и поэтому совершенно естественным стало продолжение его активности на проблемы организации математических исследований и математического образования. Мы не можем

¹Отец Алексея Николаевича, Николай Алексеевич, был инженером-строителем. Ещё до войны он какое-то время состоял депутатом Моссовета (это стало причиной выделения ему дачного участка в подмосковной Малаховке – именно на выстроенной там даче протекла значительная часть жизни и прошли последние годы жизни Алексея Николаевича). Его мать – Любовь Михайловна (урождённая Рожкова) – домашняя хозяйка.

²Первым увлечением Алексея Николаевича ещё в детстве была физика. Поэтому, когда в ходе его учёбы на механико-математическом факультете перед ним встала проблема – каким разделом математики заняться, другими словами – встала проблема выбора научного руководителя, он попробовал начать работать у нашего великого математика Израиля Моисеевича Гельфанда. Гельфанд, как рассказывал сам Алексей Николаевич, принял его хорошо. И однажды он высказался относительно темы своих будущих занятий. На это последовала немедленная реакция Израиля Моисеевича: «Алёша, Вы будете заниматься тем, что я Вам скажу». И больше Паршин у него не появлялся. Он избрал иного научного руководителя – другого великого математика – И.Р. Шафаревича.

подробно останавливаться на этом, отсылая читателя к специальной литературе. Ограничимся лишь упоминанием о его многообразных обязанностях в Стекловке – заведовании отделом алгебры, участии в работе учёных советов, семинаров, руководстве аспирантами и пр. – в Отделении математических наук РАН, в редколлегиях математических журналов и т.д. Мы же сосредоточимся далее на его занятиях вопросами, относящимися к сфере гуманитарных наук.

Алексея Николаевича отличала широта интеллектуального горизонта и исключительная восприимчивость, проявившиеся, в частности, в его открытости миру гуманитарной культуры³. А поразительная его одарённость выразилась в стремительности его вхождения и в этот, на первый взгляд казалось бы столь далёкий от математики, мир. Придя в университет типичным математическим вундеркиндом, начисто лишённым каких либо интересов и тем более познаний в области гуманитарных наук, к концу своего пребывания в аспирантуре он не только вошёл в обширный круг вопросов, разрабатываемых в различных гуманитарных дисциплинах, таких как лингвистика, археология, этнография, искусствоведение, теоретическая биология и, конечно, гражданская история, философия и богословие, но и в общих чертах сформировал проблематику (надо сказать достаточно обширную) своих будущих размышлений⁴. В этом следует усматривать не только выражение его одарённости и остроты ума, но и влияние той среды, в которой он оказался, духа, царившего в 60-е годы на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, легендарном мехмате.

А мехмат тех лет и его аналитическое продолжение – московские математики, объединявшиеся вокруг Московского математического общества – представляли собой явление чрезвычайное – они образовывали не только признанное во всём мире средоточие математической мысли (по мнению некоторых экспертов, даже не имевшим тогда себе равных!)⁵, но и один из интеллектуальных центров, определявших атмосферу в советском обществе⁶. Чрезвычайно важным обстоятельством, во многом определившим творческую эволюцию Алексея Николаевича, стало вхождение в середине 60-ых в круг его тогдашнего коллеги по стекловскому математическому институту (Стекловке) яркого и самобытного мыслителя Андрея Ивановича Лапина (1922 – 1996) и его супруги – историка математики, выдающегося исследователя древнегреческой математической традиции профессора Московского университета Изабеллы Григорьевны Башмаковой (1921 – 2005). Андрея Ивановича отличала чрезвычайная широта интересов и познаний (их спектр охватывал такие казалось бы разнородные сюжеты как квантовая механика, единая теория поля, генетика, теоретическая онкология, этнография, лингвистика, история, различные философские учения) и, что самое главное, удивительная творческая сила. Свои мысли он переносил на бумагу и авторское чтение его рукописей, сопровождавшееся его же комментариями, стало подлинной школой для нескольких поколений слушателей, преимущественно математиков, собиравшихся в их доме. Влияние его идей, хотя и трудно поддаётся сегодня оценке, бесспорно сказалось на творчестве многих его современников. В их числе И.Р. Шафаревич, а также А.Н. Паршин, высоко ценивший его творчество⁷.

Первые шаги Алексея Николаевича в мир гуманитарной культуры были связаны с пограничной для математика областью – с историей математики. В июле 1973 года в Тарту была проведена Первая Всесоюзная школа по истории математики, на которую он был приглашён в

³Об этом замечательно сказал в своих воспоминаниях В. П. Визгин – см. [3, с. 40 – 51], особенно с. 49.

⁴См. воспоминания С.С. Демидова [3, с. 19 – 33], особенно с. 20 – 21.

⁵Замечательно писал об этом сам Паршин [4]. См. также [5, с. 346 – 348] и [6]

⁶События в жизни московского математического сообщества выходили далеко за его пределы. Достаточно вспомнить о реакции на насильственное помещение в 1968 г. А.С. Есенина-Вольпина в психиатрическую больницу, правозащитную деятельность И.Р. Шафаревича или на борьбу Л.С. Понтрягина против проекта поворота сибирских рек, нашедших широкий отклик во всей стране.

⁷К сожалению, практически всё, написанное А.И. Лапиным, осталось в рукописи. То немногое, что было опубликовано, вряд ли может дать даже слабое представление о глубине и масштабности этого удивительного мыслителя. Некоторые сведения о нём можно найти в [7 – 10]. Публикация наследия Андрея Ивановича была мечтой А.Н. Паршина, реализация которой до сих пор остаётся лишь проектом.

качестве докладчика. Темой своего выступления он избрал историю теории инвариантов. Как раз в это время он работал над переводом, включавшим книгу Ж. Дьёдонне и Дж. Керолла и работы Д. Мамфорда, увидевшем свет в 1974 году [11].

Этот доклад, в котором была развернута панорама развития теории, увиденная через призму идей Д. Мамфорда, осуществившего синтез теории инвариантов и алгебраической геометрии, выявил (а в обсуждении этого доклада приняли участие Н.И. Ахиезер, А.П. Юшкевич, Г.Е. Шилов, И.Г. Башмакова, Ю.И. Манин) в совсем молодом А.Н. Паршине глубокого историка математики. С этого момента крупнейший советский историк математики А.П. Юшкевич (1906 – 1993) старался привлекать его к значимым историко-математическим проектам: к изданию «Математики XIX века» (в качестве одного из авторов раздела, посвящённого алгебре [12], 1978), к выпуску «Историко-математических исследований» (в 1985 году он был приглашён в редколлегию сборника), к участию в работе над запланированной в конце 80-ых серии книг, посвящённых математике XX столетия. Этот так и не реализованный проект намеревались возглавить А.Н. Колмогоров и А.П. Юшкевич вместе с редколлегией, в которую были включены Б.В. Гнеденко, И.Г. Башмакова, М.М. Постников, В.М. Тихомиров, Ю.И. Манин, А.Н. Паршин и С.С. Демидов⁸.

Вхождению Алексея Николаевича в мир гуманитарной культуры способствовал сам интеллектуальный дух присущий математическому сообществу первопрестольной, традиционно склонному к философии, прежде всего к философии так или иначе связанной с православием.⁹ И здесь большую роль сыграли философские идеи П.А. Флоренского, с которыми он познакомился в первые студенческие годы. В ту пору имя Флоренского только возвращалось из забвения: в оборот начали входить его прижизненные публикации. Мало по малу началась работа над изданием материалов из сохранённого его семьёй архива. Из этих материалов начала проступать фигура великого богослова и философа во многом отличная от той, которая рисовалась ранее. Так уже случилось, что Алексей Николаевич оказался в кругу лиц близких семье Флоренского¹⁰ и принял участие в этой деятельности. Начало ей положила публикация материалов опять же историко-математического характера – предисловия к «кандидатскому» сочинению 1903 г. [17] и переписки с Н.Н. Лузиным (1904 – 1922) [18, 19]. С них берут начало его исследования философских и богословских идей Флоренского. Он постоянно возвращался к ним, став одним из немногих исследователей творчества Флоренского, предложивших оригинальное развитие его идей.

Людей, изучавших философские идеи мыслителей прошлого, он делил на две категории – «историков» и «философов». К первым он причислял тех, кто был прежде всего озабочен вопросом – «а как это было?», для кого во главе угла оказывались проблемы, скажем так, биографий философов и преемственности их идей (из каких источников они проистекали, какое содержание и форму приобретали с течением времени, и на кого и какое воздействие оказывали впоследствии) и публикация сочинений этих мыслителей. Ко вторым он относил

⁸Работа над изданием началась и даже были подготовлены разделы, посвящённые французской математической школе (Ж. Дьёдонне), Гёттингенской математической школе (Б.Л. Ван дер Варден), развитию топологии (М.М. Постников), теории трансцендентных чисел (Н.И. Фельдман), теории вероятностей (Б.В. Гнеденко, А.М. Прохоров), оптимальному управлению (В.М. Тихомиров). Но развернувшиеся события перестройки и смерть Колмогорова и Юшкевича поставили на проекте крест. Правда, в настоящее время возродилась идея возобновления работы по его реализации. (Впрочем, некоторые из подготовленных материалов – очерки Ж. Дьёдонне, М.М. Постникова, Б.В. Гнеденко и А.М. Прохорова – были опубликованы – [13, 14, 15].)

⁹Здесь москвичи расходились с математиками северной столицы, лидеры которой традиционно испытывали неприязнь к идеалистической философии, тем более к философии религиозной. Результатом этого расхождения стали конфронтационные взаимоотношения, сложившиеся между ними в последней трети XIX – первых десятилетиях XX вв. [16]. Конец этой конфронтации в значительной мере положил переезд в 1934 г. Стекловки в Москву: вчерашние оппоненты вынуждены были жить и работать вместе. Однако, отмеченная разность во взглядах сохраняется на персональном уровне и зачастую проявляется по самым различным поводам.

¹⁰Назовём некоторых из них: известный философ С.М. Половинкин (1935 – 2018), внуки отца Павла – игумен Адроник (А.С. Трубочёв; 1952 – 2021) и геолог П.В. Флоренский.

тех, для кого основным оказывался вопрос – «почему?» – и на передний план выходили содержание этих идей, их смысл в контексте философской мысли нашего времени и (и это главное!) возможность их использования для её развития. В себе самом он хотел видеть, конечно, «философа», хотя ценность исследований «историков» не отрицал и даже сам, как мы только что имели возможность убедиться, отдал дань историческим исследованиям. Можно сказать, что в первых упомянутых нами его работах он выступал прежде всего как «историк».

Конечно, история математики не располагалась в центре его интересов, но безусловно оставалась важной составляющей пространства его мысли – в своих размышлениях мировоззренческого характера, он, как правило, опирался на историю математики, а также на историю естествознания¹¹. Знаковыми фигурами в математике, особый интерес к которым он сохранял на протяжении всей жизни, были Д. Гильберт, Г. Вейль и К. Гёдель.

Алексей Николаевич не имел возможности уделять истории математики много времени. Тем не менее он успел принять деятельное участие в издании сборника работ Г. Вейля по философским вопросам науки [20], выступив одним из его редакторов, комментаторов и автором одной из сопроводительных статей «Герман Вейль – математик, мыслитель, человек», на наш взгляд, одной из лучших из существующих сегодня работ о Вейле – редком для XX столетия типе математика, «чувствовавшего себя как дома по обе стороны стены, разделившей культуру» на «две враждебные друг другу части – гуманитарную и научную (scientific)». Борьба с этим расколом, разделившим в XX столетии художественную интеллигенцию и учёных, стала одной из центральных тем творчества Алексея Николаевича. Именно в этом ключе он сближал личности Г. Вейля и П.А. Флоренского – мыслителей, чувствовавших себя причастными и к науке, и к гуманитарному знанию. Оба они, писал он в своей статье о Г. Вейле [20, с. 337], интересовались и занимались многими областями науки, «им обоим было присуще глубокое понимание языка, как человеческого, так и научного, их объединяло математическое образование и литературный талант, и, наконец, оба они пришли к теологическим проблемам». И далее: «Но если Вейль шёл к ним, исходя из своего математического опыта, твёрдо стоя на территории освоенной наукой, для Флоренского, одного из крупнейших православных богословов, истина Откровения была, конечно, центром, вокруг которого кристаллизировались его занятия отдельными науками и попытки соединить их в единое целое». Сказанное им о Вейле справедливо отнести и к творчеству самого Паршина, опиравшегося прежде всего на собственный математический опыт и своими трудами соединявшего расколовшийся в новейшее время мир человеческой культуры: научного знания и религиозного познания мира.

Под редакцией Алексея Николаевича в 1998 году вышли избранные сочинения Давида Гильберта в двух томах [21]. Каждый принимавший участие в подготовке этого издания (а автору этих строк довелось участвовать в этой работе) помнит, сколько усилий пришлось приложить Алексею Николаевичу, чтобы организовать работу большого коллектива переводчиков и комментаторов – математиков, физиков, историков науки. Увидевшее свет в 1998 году, это собрание сочинений одного из величайших математиков XIX – XX веков стало основополагающим вкладом в современную отечественную математическую литературу.

Что же касается К. Гёделя, то начало размышлениям Паршина над его знаменитой теоремой мы находим в его докладе на Третьей Всесоюзной школе по истории математики, прошедшей в сентябре 1984 года в Одессе¹². И уже в этом докладе, в котором он показывает, что эта теорема задаёт не просто вынужденное ограничение на пути формализации математики, но утверждает фундаментальный философский факт, который может привести «к намного более глубокому развитию психологии, логики и многих других наук, которые изучают человека», мы находим начала одной из самых замечательных его идей – идеи геометрии умопостигае-

¹¹Поэтому совершенно естественным выглядит случившееся впоследствии его вхождение в редколлегия журнала «Вопросы истории естествознания и техники».

¹²Этот доклад лёг в основу статьи [22].

мого пространства и важнейшей его части – пространства языка (см. [22, 23]).

«Точно так же, как в XVII в. Декарт ввёл своё декартово пространство как вместилище всех физических (и геометрических) предметов, окружающих нас, в точности так же было бы естественно поместить высказывания языка, мысли, представления в некоторое другое умопостигаемое или умозрительное пространство», – читаем в [22, с. 39]. «Как же подступиться к такой задаче – построению умопостигаемого пространства?» – здесь я пользуюсь изложением, которое Алексей Николаевич привёл в своей работе [23] (цитирую по [25, с. 83]). И предлагает на поставленный вопрос такой ответ: «Так же как в физике геометрия была исходным пунктом для рассуждений Декарта, возьмём [в качестве отправной точки] логику понятий, как она была развита в античности» – у Платона и, особенно, у Аристотеля в его «Категориях» и в комментариях к ним Порфирия. Попытки построения такого пространства он находит у Лейбница – его «универсальная характеристика» как вместилище для языка, наконец, у К. Гёделя – его известная «нумерация», создававшаяся с сугубо прикладными целями – для доказательства его знаменитой теоремы, связанной с арифметикой. Отталкиваясь от этой нумерации (первые её усовершенствования принадлежат Г. Вейлю), Паршин приходит к пространству, имеющему вид бесконечного универсального дерева, в которое «нумерация Гёделя» языка элементарной арифметики входит как часть. Это бесконечное универсальное дерево и служит, по мысли Паршина, искомым умозрительным пространством. Логические высказывания в таком пространстве являются как бы его «предметами», не исчерпывая его вовсе, находясь в нём «примерно так, как рациональные числа помещаются среди иррациональных. И, следовательно, интуиция оказывается связанной «с движением по этому пространству» [22, с. 44].

Проблемы языка при таком подходе, естественно, оказываются в центре внимания Алексея Николаевича: «если мы стоим на позиции реализма, а мы действительно на ней стоим, – писал он в [23] (цитируем по [25, с. 80]), – то где же находится язык? Его материальная, звуковая оболочка – это колебания воздуха окружающего нас пространства. А само слово, его смысл?». Паршин полагает, что постижение слова связано с особым светом и зрением – умственным зрением, и выдвигает гипотезы: первая – «смысл слова представляет собой волну (умопостигаемого) света, находящуюся в сверхчувственном пространстве» [25, с. 94], вторая – об иерархической конструкции слова [25, с. 94].

Особое место в размышлениях Паршина занимает концепция дополнительности. Ей посвящена одна из центральных его работ «Дополнительность и симметрия», опубликованная в 2001 году в журнале «Вопросы философии»¹³. Отметив [25, с. 54], что «за явлением дополнительности в физике стоит ... ясный математический механизм – преобразование Фурье», он указывает на неверность распространённого представления о дополнительных сторонах действительности как о «перпендикулярных», не имеющих отношения друг к другу. «Между обеими дополнительными картинками мира, – замечает он [25, с. 54], – существует точная и нетривиальная связь». Понятие дополнительности он применяет к различным формам функциональной (двигательной, сенсорной, речевой) асимметрии человека, а также асимметрий, проявляющихся в психической деятельности. Судя по всему, полагает Паршин [25, с. 70], имеет место дополнительность «двух пространств, в которых суждено жить и действовать человеку» – левого, двигательного, и правого, осязательного.

В завершение своих размышлений о дополнительности он проводит анализ антиномизма отца Павла Флоренского и приходит к заключению [25, с. 73], что «антиномия – это противоречащие друг другу высказывания об одном и том же, но делаемые в разных, дополнительных ситуациях».

Рассмотренные работы Паршина не написаны в стиле традиционных историко-математических исследований, но история математики выступает во всех его сочинениях по филосо-

¹³Впоследствии он вошёл в состав редакции этого журнала.

фии и истории науки как одно из оснований, на котором происходит развитие его мысли. Нервом его размышлений, зачастую скрытым, служили взаимосвязи и взаимопроникновения научного и религиозного мировоззрений. Тема конфликта, разделившего в XX столетии интеллектуальный мир на два соответствующих им враждующих лагеря, как мы уже говорили, красной нитью проходит через его творчество. Зримым свидетельством этому служит содержание двух сборников «Путь. Математика и другие миры» (2002) [24] и «Лестница отражений» (2022) [25], в которые включены его основные историко-научные и философские работы. Первый сборник составлен из работ Алексея Николаевича, опубликованных в 1975 – 2002 гг. Что касается второго, то во время работы над ним он скончался. Тем не менее в значительной своей части он был им уже сформирован. Комплектуя окончательную его версию, составители старались постольку, поскольку это оказывалось возможным, следовать замыслам автора. Само его название – «Лестница отражений» – запечатлело восходящее к Дионисию Ареопажиту богословское представление о природе познания, Божественном свете, распространяющемся по уровням небесной иерархии.

Сборник [25] продолжает линии, развиваемые в работах, опубликованных в предыдущей книге [24]. Эта преемственность подчёркивается тем фактом, что сборник [25] открывается статьями – «Размышления над теоремой Гёделя», «Дополнительность и симметрия» и «Свет и Слово» – опубликованными в [24]. А вслед за ними помещена работа «Лестница отражений (от гносеологии к антропологии)», давшая название всему сборнику.

В этом тексте, восходящем к выступлению автора в ноябре 2002 г. и увидевшем свет в «Историко-философском ежегоднике 2005», Алексей Николаевич ставит вопрос [25, с. 97]: «Возможно ли единое представление о человеке, в котором и научная, и религиозная картины дополняли бы, а не изгоняли друг друга?» «Я думаю, – продолжает он, – что это не просто возможно, но уже давно возможно. Более того, думается, что вопрос о том, что наука и религия могут значить для антропологии, можно расширить. А именно: что наука и религия могут сказать о мире и о месте человека в нем?»

В 2004 г. в Доме А. Ф. Лосева начал работу семинар по русской философии, одним из организаторов которого выступил Алексей Николаевич, который по первоначальному по существу руководил им, направляя его деятельность своими докладами и многочисленными выступлениями, память о которых хранит выпущенный в 2011 году под его редакцией сборник [26]. Из этих работ особенно следует отметить большую статью «Время и пространство православного богослужения» [25, с. 242 – 313], основой которой послужило выступление на семинаре «Русская философия» 27 декабря 2007 года¹⁴. Эта статья, созданная в сотрудничестве с Т.Н. Резвых, продолжает и развивает основные темы предшествующих исследований Алексея Николаевича, прежде всего связанных с его размышлениями о природе времени и пространства.

Своё исследование он начинает с анализа временной структуры православного богослужения, основанного на идеях статьи 2004 г. [24, с. 132 – 164] и приводящего к представлению о времени не только как привычной нам направленной прямой, но как о системе циклов согласованных друг с другом: каждый большой цикл (скажем, годовой) навивается целое число раз на меньший (месячный, недельный, дневной ...).

Анализ организации пространства храма, структуры изобразительного ряда церковных росписей позволяет сделать нетривиальные выводы о математической структуре умопостига-

¹⁴Некоторое представление о масштабах работы над текстом доклада, проделанной А.Н. Паршиным совместно с его соавтором Т.Н. Резвых, после его произнесения на семинаре, даёт сноска к 72-страничной (!) публикации доклада на с. 242 : «Мы выражаем глубокую благодарность прот. Александру Салтыкову, прот. Борису Левшенко, прот. Даниилу Калашникову, прот. Павлу Хондзинскому и прот. Феликсу Станцевичу, прочитавшим первоначальный вариант текста и сделавшим ряд ценных замечаний. Мы весьма признательны Ирине Анатольевне Стерлиговой за многочисленные советы и внимание к работе. Хотим поблагодарить также Николая Станиславовича Серебрякова за помощь в подготовке текста». Подчеркнём, что такая основательность при работе над текстом, включавшая привлечение по возможности широкого возможных оппонентов, характерна для творческой манеры Алексея Николаевича.

емого литургического пространства¹⁵ и связи физического пространства, в котором ведётся богослужение, с литургическим. «Крест и круг относятся к числу основных реалий православия. Крест лежит в основе литургического пространства, которое является скорее умопостигаемым..., а в физическом пространстве он воплощается. Круг – предмет физического пространства, но движения по кругу затрагивают и пространство литургическое», – читаем мы в [25, с. 312]. И далее: «вопрос о строении и соединении этих двух пространств можно сформулировать и как вопрос о том, как соотносятся крест и круг. Зримая основа для ответа на него уже явлена – это крестово-купольный храм, вершина православной богословской мысли».

Сборник [25] завершает статья «Судьба науки», опубликованная в 2019 году в журнале «Вопросы философии» и представляющая собой комментарий к «несостоявшимся лекциям Ф. Дайсона и И.Р. Шафаревича», посвящённая месту науки в современном обществе и перспективам её развития. «Последние годы, участвуя в борьбе против действий властных структур по отношению к науке в нашей стране, – пишет Алексей Николаевич [25, с. 488], – я осознал силу чиновничества и у нас, и за рубежом и лежащую в основе этой силы идеологию. Подлинная трагедия состоит в том, что огромный социум умных и энергичных людей оказался беспомощным в имеющейся ситуации: лилипуты побеждают Гулливера». Будущее науки рисуется ему неопределённым, внушающим самые мрачные перспективы¹⁶.

Наука, её место в системе государственных и общественных институтов, истинные приоритеты и подлинные ценности народного образования, наконец, достоинство самого звания учёного, представителя учёного сословия – все эти материи стали не просто предметами размышлений и переживаний Алексея Николаевича, но и тем полем деятельности, на котором с удивительной силой проявилась его (да простят мне за употребление этого ставшего банальным оборота, но другого подобрать не умею) гражданская позиция. Напомним о его непримиримой критике развернувшихся в 2013 году так называемых реформ Российской Академии наук – некоторые из его выступлений (на заседаниях Никитского клуба, на радиостанции «Эхо Москвы», в интернете) приведены на страницах 418 – 427 сборника [25]. В том же году в самые сжатые сроки он подготовил и издал сборник «Российская Академия наук. Хроника протеста. Июнь – июль 2013» [27]. Другим объектом его беспощадной критики стал модный в последнее время (и более того, взятый на вооружение отечественными чиновниками от науки для оценки научной эффективности !) подход к оценке деятельности учёных на основании библиометрических данных. По его инициативе и под его руководством был подготовлен и в 2011 году издан сборник [28].

Вернёмся к сборнику [25], к последним его текстам, волею судеб ставших для нас завещанием учёного и мыслителя. Одним из них [25, с. 457 – 476] стала стенограмма лекции «Наука и вера в наше время: вместе или нет?», прочитанная 26 сентября 2017 г. в храме мученицы Татьяны при МГУ им. М. В. Ломоносова и собравшая чрезвычайно многочисленную и профессионально заинтересованную аудиторию – университетскую публику, московских богословов и философов. Свою лекцию Алексей Николаевич: снабдил подзаголовком «Подкреплять Священное Писание — не функция науки», очень точно характеризовавшим его воззрения, согласно которым «высшие сферы бытия должны просветлять низшие, а не наоборот». И следствием этого стал поставленный им вопрос: что богословие может дать науке? Не наука богословию (произведений на эту тему немало), но богословие науке.

¹⁵В модели, предлагаемой А.Н. Паршиным, «неограниченного графа с вершинами и рёбрами, в котором нет петель» [25, с. 308].

¹⁶«можно представить, например, переход к частным формам занятия наукой, как в XVII в., когда наука и создавалась. При дворах «государей» будущего «феодалного общества»? Рядом с руинами ускорителей и телескопов, этими стоунхенджами будущего, останками mega-science прошлого. Или же совсем иначе, как занятия изгоев в подпольных кружках, ютящихся в «бойлерных» будущего свёрхтехнологичного и запредельно прагматичного «brave new world»» [25, с. 489].

Как он сказал в самом начале своей лекции, «вопрос науки и веры – не просто вопрос в плоскости размышлений, обсуждений, дискуссий, научных текстов. Это ещё вопрос раскола в нашем обществе, который всё более и более нарастает – весьма серьёзного раскола» [25, с. 457]. Другой раскол, тесно связанный с первым, продолжал Алексей Николаевич, это не фундаментальный раскол «между наукой и верой, а раскол уже внутри науки, между естественнонаучным знанием и гуманитарным знанием» [25, с. 459]. Как мы уже говорили, борьба с этими расколами стала одной из главных тем его творчества, начиная с первых «всплесков» его творческого сознания вплоть до его последних дней. В своём докладе он намечал пути их преодоления, ключом к которому мог послужить историко-научный анализ (он приводит несколько примеров) некоторых фрагментов о природе времени из сочинений блаженного Августина, теоретико-множественного наследия Г. Кантора, работ А.А. Фридмана по теории относительности.

Провести такой анализ – одна из многих задач, которые он ставил перед собой. Свой последний из известных нам его текстов «Зима тревоги нашей (декабрь 2021 – январь 2022)», темой которого стала античная философия, Алексей Николаевич завершил следующими словами: «Какой огромный пласт напряжённого мыслительного труда лежит уже полторы тысячи лет позади нас и он до сих пор и не понят и не освоен. Чтобы его создать ушло восемьсот лет, а всей современной науке нет и четырёхсот.

Взяв себе из всей античности математику и, пожалуй, механику, наука Нового Времени презрела остальное и без колебаний выбросила столь многое: наличие умопостигаемого мира, мира идей, к которому имеет доступ человек и без которого он не может воспринимать и мир чувственный; иерархическое, уровневое строение мира в космологии и представление о том как устроены переходы с уровня на уровень; представление о вечности и о видах вечностей и их связях со временем («время как подвижный образ вечности» у Платона и виды эонов у Прокла); целевую и формальную причины в физике и биологии (у Л. С. Берга они есть!); всю нетривиальную медицину древних, основанную на философии... К этому можно многое добавить... Работы тут непочатый край...».

Эту работу великий мастер Алексей Николаевич Паршин уже начал. Будет ли она продолжена? Надеемся, что «да». Сам мастер очень надеялся продолжить работу и ставил перед собой большие планы, осуществить которые было ему уже не суждено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. В. Востоков, С. О. Горчинский, А. Б. Жеглов, Ю. Г. Зархин, Ю. В. Нестеренко, Д. О. Орлов, Д. В. Осипов, В. Л. Попов, А. Г. Сергеев, И. Р. Шафаревич. Алексей Николаевич Паршин (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи Математических Наук, 2013, том 68, выпуск 1, 201–207.
2. Горчинский С.О., Добровольский Н.М., Жеглов А.Б., Осипов Д.В. Памяти Алексея Николаевича Паршина. Некролог // Чебышевский сборник. 2022, Т. 23, Вып. 3, С.306 – 307.
3. Воспоминания об А.Н. Паршине. М.: МЦНМО. 2022.
4. Паршин А.Н. Математика в Москве: у нас была великая эпоха // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 14 (49). 2011. С. 11 – 25.

5. Демидов С.С. Математика в России на поворотах истории. М.: МЦНМО. 2021.
6. Вершик А.М. Как прорастает математика / А.М. Вершик / <http://polit.ru/article/2013/03/18/vershik2/>).
7. Кривоносов Ю.И. Высшая математика и высшая власть // Вопросы истории естествознания и техники. 2001. № 2. С. 116 – 121.
8. Демидов С.С. Эпизод из истории советской математики // Вопросы истории естествознания и техники. 2001. № 2. С. 122 – 126.
9. Шафаревич И.Р. Об Андрее Ивановиче Лапине // Вопросы истории естествознания и техники. 2001. № 2. С. 127 – 128.
10. Башмакова И.Г. Как это было ... // Вопросы истории естествознания и техники. 2001. № 2. С. 128 – 131.
11. Дьёдонне Ж., Керолл Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. Перевод А.Н. Паршина. М.: Мир. 1974.
12. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под редакцией А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука. 1978.
13. Dieudonné J. L'école mathématique française du XX siècle / Development of mathematics 1950 – 2000. Ed. by J.-P. Pier. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag. 2000. P. 329 – 358.
14. Постников М.М. Страницы математической автобиографии // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 2 (37). 1997. С. 78 – 104.
15. Гнеденко Б.В., Прохоров А.В. Из истории теории вероятностей в XX веке / Гнеденко Б.В., Прохоров А.В. Очерк по истории теории вероятностей. М.: URSS. 2022. С. 114 – 156.
16. Демидов С.С. Повесть о двух городах / Демидов С.С. Математика в России на поворотах истории. М.: МЦНМО. 2021. С. 65 – 79.
17. Флоренский П.А. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент мирозерцания». Публикация и примечания С.С. Демидова и А.Н. Паршина // Историко-математические исследования. Вып. 30. 1986. С. 159 – 177.
18. Демидов С.С., Паршин А.Н., Половинкин С.М. О переписке Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским // Историко-математические исследования. Вып. 31. 1989. С. 116 – 125.
19. Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским. Публикация и примечания С.С. Демидова, А.Н. Паршина, С.М. Половинкина и П.В. Флоренского // Историко-математические исследования. Вып. 31. 1989. С. 125 – 191.
20. Вейль Г. Математическое мышление. Перевод с английского и немецкого. Составитель Ю.А. Данилов. Под редакцией Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. М.: Наука. 1989.
21. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. Под общей редакцией А.Н. Паршина. М.: Факториал. 1998.
22. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 2. Анализ. Физика, Проблемы. Personalia. Под общей редакцией А.Н. Паршина. М.: Факториал. 1998.
23. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя // Историко-математические исследования. 2000. Вып. 5 (40). С. 26 – 55.

24. Паршин А.Н. Свет и Слово (к философии имени) / Имяславие (антология). М.: Факториал. 2008. С. 529 – 544.
25. Паршин А.Н. Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет. 2002.
26. Паршин А.Н. Лестница отражений. М.: МЦНМО. 2022.
27. Семинар «Русская философия (традиция и современность)». 2004 – 2009. М.: Русский путь. 2011.
28. Российская Академия наук. Хроник протеста. Июнь – июль 2013. (Составитель А. Н. Паршин.) М.: Журнал “Русский репортер”, 2013.
29. Игра в цыфирь или как теперь оценивают труд ученого (сборник статей о библиометрике). Составитель и редактор А.Н.Паршин. М. МЦНМО, 2011.

REFERENCES

1. Vostokov S. V., Gorchinsky S. O., Zheglov A. B., Zarkhin Yu. G., Nesterenko Yu. V., Orlov D. O., Osipov D. V., Popov V. L., Sergeev A. G., Shafarevich I. R., 2013, “Alexey Nikolaevich Parshin (to the seventieth anniversary of his birth)” // *Successes of Mathematical Sciences*, Vol. 68, Iss. 1, pp. 201–207.
2. Gorchinsky S. O., Dobrovolsky N. M., Zheglov A. B., Osipov D. V., 2022, “In memory of Alexey Nikolaevich Parshin. Obituary” // *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 23, Iss. 3, pp. 306 – 307.
3. *Memories of A. N. Parshin*, 2022, М.: ICNMO.
4. Parshin A. N., 2011, “Mathematics in Moscow: we had a great epoch” // *Historical and mathematical research. The second series*. Iss. 14 (49). pp. 11 – 25.
5. Demidov S. S., 2021, *Mathematics in Russia at the turns of history*. Moscow: ICNMO.
6. Vershik A. M. “How mathematics sprouts”. Available at: <http://polit.ru/article/2013/03/18/vershik2>.
7. Krivonosov Yu. I., 2001, “Higher mathematics and higher power” // *Questions of the history of natural science and technology*. № 2. pp. 116 – 121.
8. Demidov S. S., 2001, “An episode from the history of Soviet mathematics” // *Questions of the history of natural science and technology*. № 2. pp. 122 – 126.
9. Shafarevich I. R., 2001, “About Andrey Ivanovich Lapin” // *Questions of the history of natural science and technology*. № 2. pp. 127 – 128.
10. Bashmakova I.G., 2001, “How it was...” // *Questions of the history of natural science and technology*. № 2. pp. 128 – 131.
11. Dieudonne J., Keroll J., Mumford D., 1974, *Geometric theory of invariants*. Translated by A.N. Parshin. М.: Mir.
12. *Mathematics of the XIX century. Mathematical logic. Algebra. Number theory. Probability theory*. Edited by A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich. М.: Nauka. 1978.
13. Dieudonné J. *L'école mathématique française du XX siècle / Development of mathematics 1950 – 2000*. Ed. by J.-P. Pier. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag. 2000. P. 329 – 358.

14. Postnikov M. M., 1997, "Pages of mathematical autobiography" // Historical and mathematical research. The second series. Iss. 2 (37). pp. 78 – 104.
15. Gnedenko B. V., Prokhorov A. V., 2022, "From the history of probability theory in the twentieth century" // An essay on the history of probability theory. Moscow: URSS. pp. 114 – 156.
16. Demidov S. S., 2021, "A Tale of two cities" / Demidov S.S. Mathematics in Russia at the turns of history. Moscow: ICNMO. pp. 65 – 79.
17. Florensky P. A., 1986, "Introduction to the dissertation «The idea of discontinuity as an element of worldview». Publication and notes by S. S. Demidov and A. N. Parshchin" // Historical and mathematical research. Iss. 30. pp. 159 – 177.
18. Demidov S. S., Parshin A. N., Polovinkin S. M., 1989, "On the correspondence of N. N. Luzin with P. A. Florensky" // Historical and mathematical research. Iss. 31. pp. 116 – 125.
19. Correspondence of N. N. Luzin with P.A. Florensky. Publication and notes by S.S. Demidov, A.N. Parshin, S.M. Polovinkin and P.V. Florensky // Historical and mathematical research. Iss. 31. 1989. pp. 125 – 191.
20. Weil G., 1989, *Mathematical thinking*. Translated from English and German. Compiled by Yu.A. Danilov. Edited by B.V. Biryukov and A.N. Parshin. M.: Nauka.
21. Hilbert D., 1998, *Selected works. Vol. 1. Theory of invariants. Number theory. Algebra. Geometry. Foundations of mathematics*. Under the general editorship of A.N. Parshin. M.: Factorial.
22. Gilbert D., 1998, *Selected works. Vol. 2. Analysis. Physics, Problems. Personalia*. Under the general editorship of A.N. Parshin. M.: Factorial.
23. Parshin A. N., 2000, "Reflections on Godel's theorem" // Historical and mathematical research. Iss. 5 (40). pp. 26 – 55.
24. Parshin A. N., 2008, "Light and the Word (to the philosophy of the name)" // Imyaslavie (anthology). M.: Factorial. pp. 529 – 544.
25. Parshin A. N. Path. *Mathematics and other worlds*. M.: Dobrosvet. 2002.
26. Parshin A. N., 2022, *Ladder of reflections*. M.: ICNMO.
27. Seminar «Russian Philosophy (tradition and modernity)» Seminar. 2004 – 2009. M.: Russian Way. 2011.
28. Russian Academy of Sciences. Chronicles of protest. June - July 2013. (Compiled by A.N.Parshin.) Moscow: Russian Reporter Magazine, 2013.
29. The game of tsyfir or how the work of a scientist is now evaluated (a collection of articles on bibliometrics). Compiled and edited by A.N.Parshin. M. MCNMO, 2011.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-325-333

Игорь Моисеевич Кричевер (в воспоминаниях)

В. И. Леванков, Н. М. Добровольский

Леванков Владимир Иванович — доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: levx@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В статье даются некоторые воспоминания авторов о начальном этапе математического образования двух замечательных выпускников Интерната ФМШ 18 при МГУ: Миши Бошерницане и Игоре Кричевере, приводятся некоторые факты, связанные с юбилеем Интерната ФМШ 18 при МГУ. Также приводятся некоторые фотографии из фотоархивов И. Н. Найды и Ю. В. Матиясевича.

Авторы не касались научного творчества И. М. Кричевера и М. Д. Бошерницана, так как в литературе есть прекрасные обзоры по этой теме.

Ключевые слова: М. Д. Бошерницан, И. М. Кричевер, П. Л. Капица, А. Н. Колмогоров, А. Б. Сосинский, О. Н. Найда, А. С. Мищенко, Е. И. Гайдуков, Д. И. Гордеев, И. К. Сури́н, А. А. Карацуба, Н. М. Коробов.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

В. И. Леванков, Н. М. Добровольский. Игорь Моисеевич Кричевер (в воспоминаниях) // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 325–333.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-325-333

Igor Moiseevich Krichever (in memoirs)

V. I. Levankov, N. M. Dobrovolsky

Levankov Vladimir Ivanovich — associate professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: levx@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The article gives some recollections of the authors about the initial stage of mathematical education of two remarkable graduates of the Boarding School of the Moscow State University 18: Misha Boshernitsan and Igor Krichever, some facts related to the anniversary of the Boarding School FMSH 18 at Moscow State University are given. Some photos from the photo archives of I. N. Naida and Yu. V. Matiyasevich are also given. The authors did not touch on the scientific work of I. M. Krichever and M. D. Boshernitsan, since there are excellent reviews on this topic in the literature.

Keywords: M. D. Boshernitsan, I. M. Krichever, P. L. Kapitsa, A. N. Kolmogorov, A. B. Sosinsky, O. N. Naida, A. S. Mishchenko, E. I. Gaidukov, D. I. Gordeev, I. K. Surin, A. A. Karatsuba, N. M. Korobov.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

V. I. Levankov, N. M. Dobrovolsky, 2023, “Igor Moiseevich Krichever (in memories)” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 325–333.

1. Введение

1 декабря 2022 года в Нью-Йорке умер выпускник ФМШ 18 при МГУ имени М. В. Ломоносова Игорь Моисеевич Кричевер. Он родился 8 октября 1950 года в семье инженеров авиационной промышленности — воентехника 2-го ранга военного представительства ГУ ВВС КА на Куйбышевском авиационном заводе № 1 Моисея Соломоновича Кричевера (1918—?), уроженца Могилёва, выпускника Военно-воздушной академии имени Жуковского, участника Великой Отечественной войны, и Марии Лейзеровны Арлиевской, родом из Полоцка. Вырос в Таганроге.

Цель данной статьи — дать некоторые факты о начальном этапе математического образования двух замечательных выпускников Интерната ФМШ 18 при МГУ: Миши Бошерницана и Игоря Кричевера.

Данная публикация выйдет в юбилейный год — 120-летие со дня рождения основателя Интерната ФМШ 18 при МГУ академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летие со дня открытия Интерната ФМШ 18 при МГУ, поэтому мы приводим некоторые факты, связанные с этими юбилеями.

2. Миша и Игорь

Мы познакомились с Игорем в 1965 году в колмогоровском интернате ФМШ 18 при МГУ имени М. В. Ломоносова. Игорь стал учиться в 9В классе вместе с Мишей Бошерницаном.

Миша Бошерницан поступил в интернат в порядке исключения, так как он был из города Черновцы Украинской ССР, а из УССР тогда в интернат не принимали, но он получил I премию на V-ой Всероссийской олимпиаде по математике и физике в г. Москве¹, оргкомитет написал ходатайство за подписью председателя оргкомитета академика П. Л. Капицы, заместителя председателя академика А. Н. Колмогорова, и Миша был принят в Интернат (здесь см. интересную статью: Исаак Корнфельд, О Мише Бошерницане // Семь искусств, №7 • 26.07.2021 <https://litbook.ru/article/15732/>).

¹В 1967 году одновременно проходили три олимпиады: по математике, по физике и по химии. Все участники олимпиады по математике участвовали и в олимпиаде по физике, которая проходила в Физ-техе в г. Долгопрудном. Победители определялись отдельно по математике и отдельно по физике. Закрытие всех трёх олимпиад проходило одновременно в актовом зале МГУ на Ленинских горах.

Игорь Кричевер на этой олимпиаде получил только похвальный отзыв, но он ежегодно с V по VII классы получал I премии по восьмым классам на Таганрогской городской олимпиаде, а в 1965 году на областной олимпиаде I премию по восьмым классам и одновременно II и III премии по IX и X классам. Важную роль в жизни Игоря, несомненно, сыграла школьная учительница математики Таисия Митрофановна Мищенко, у которой он учился в 1963–1965 гг. в Таганроге.



В интернате ФМШ-18, 1965–1967 годы

Как он работал над собой в Интернате, видно на первой фотографии наших воспоминаний. Кроме занятий математикой Игорь увлекался настольным теннисом и был лучшим в Интернате, позднее в МГУ он стал кандидатом в мастера спорта и входил в сборную университета. Ещё он был прекрасным шахматистом. Игорь Найда вспоминает свою первую встречу с Игорем и Мишей. Когда он вошёл в комнату нашего интернатовского общежития, то увидел живописную картину: Миша и Игорь лежали на кроватях и, смотря на потолок, диктовали свои ходы в шахматной партии, а Володя Шилиев переставлял фигуры на шахматной доске.

Но главным для них была математика. В Интернате они попали в руки блестящих преподавателей: академик И. К. Кикоин — читал лекции по физике, А. Б. Сосинский — читал лекции по математике, О. Н. Найда — преподаватель физики, А. С. Мищенко, Е. И. Гайдуков, Д. И. Гордеев — преподаватели математики, И. К. Сурин — выдающийся преподаватель по элементарной математике, которому выпуск 1967 года обязан своими рекордными показателями поступления на мех-мат, физфак МГУ и Физ-тех.

В Интернате в начале второго полугодия проходили Ломоносовские чтения, на которых в течение пары недель проводилось чтение лекций по некоторым разделам математики. Кроме этого, читались спецкурсы молодыми преподавателями мех-мата. Так А. С. Мищенко читал спецкурс по алгебре, молодой тогда аспирант, а потом профессор В. В. Федорчук — по топологии.

По настойчивой просьбе одного из авторов А. Б. Сосинский пригласил молодого доктора наук А. А. Карацубу прочитать для десятиклассников в первом полугодии 1966/67 учебного года спецкурс по теории чисел. На этот спецкурс ходило очень много десятиклассников. Среди них были Витя Абрашкин, Дима Митькин, Слава Никулин, Миша Бошерницан, Игорь Кричевер и многие другие, которые потом стали профессиональными математиками и докторами наук. Из них только Дима Митькин и Коля Добровольский стали профессиональными

теоретико-числовиками.

Надо отметить, что Анатолий Алексеевич Карацуба участвовал в 1963 году в проведении набора в Интернат. На фотографиях первых выпусков мы видим среди преподавателей не только А. Н. Колмогорова, но и А. А. Карацубу.

Всё время учебы в Интернате Миша и Игорь много времени и сил отдавали участию в олимпиадах и имели хорошие результаты. В статье [11] приводятся такие данные: Миша Бошерницан в 1966 году получил премию на Московской городской олимпиаде, II премию на Всероссийской олимпиаде; в 1967 году — III премию на Московской городской олимпиаде. Игорь Кричевер в 1966 году получил I премию на Всероссийской олимпиаде и похвальный лист в 1967 году на Московской городской олимпиаде.

По-видимому, учитывая стабильные достижения Миши Бошерницана и Игоря Кричевера, их включили в 1967 году в сборную команду СССР на 9-ую Международную математическую олимпиаду в Цетинье, Югославия. Они оба успешно выступили и завоевали серебряные медали. Как участников Международной олимпиады их без экзаменов приняли на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

В 1972 году Игорь закончил МГУ и поступил в аспирантуру, а Миша в том же году, будучи на последнем курсе, с родителями и сестрой эмигрировал в Израиль.

3. Кратко об учебе в МГУ

Миша и Игорь не сразу выбрали дифференциальную геометрию своей математической специальностью. В сентябре на первом курсе они начали посещать спецкурс по теории чисел, который должен был читать А. О. Гельфонд, но из-за его болезни первые лекции прочитал А. А. Карацуба. Они даже вначале ходили на семинар по трансцендентным числам, который вёл А. Б. Шидловский. Но постепенно у всех выкристаллизовались те направления специализации, которыми каждый должен был целенаправленно заниматься, начиная с третьего курса и уже до конца учебы в университете. Миша и Игорь выбрали кафедру дифференциальной геометрии и научного руководителя Сергея Петровича Новикова. Коля и Дима пошли на кафедру теории чисел к Николаю Михайловичу Коробову.

Как оказалось, Игорь сделал выбор на всю жизнь. Он стал одним из самых выдающихся представителей научной школы академика С. П. Новикова.

С Мишей ситуация оказалась гораздо сложнее. На пятом курсе он ушёл от С. П. Новикова. По протекции Димы он стал заниматься у Н. М. Коробова. Эта ситуация напоминает историю с А. А. Карацубой, который начинал свою научную карьеру у А. Н. Колмогорова, но после того как студент третьего курса Анатолий Карацуба решил задачу Мура из теории конечных автоматов (см. [7]) он сменил научное направление и научного руководителя. А. А. Карацуба перешёл к Н. М. Коробову, у которого написал дипломную работу, закончил аспирантуру и защитил кандидатскую диссертацию по теории чисел. Теория чисел для А. А. Карацубы стала делом всей его жизни. Надо отметить, что в 1960 году аспирант А. А. Карацуба придумал способ быстрого умножения многозначных чисел (см. [8], [9]).

Надо заметить, что некоторое время Н. М. Коробов в трудный период своей жизни работал на кафедре математической логики мех-мата МГУ у А. Н. Колмогорова, хотя он никогда не занимался математической логикой и продолжал свои исследования по теории чисел. Потом он вынужден был перейти на кафедру общих проблем управления к профессору В. М. Тихомирову, где проработал до конца своих дней.

Ещё одно объединяющее обстоятельство состоит в том, что Н. М. Коробов в 1935 году стал победителем первой Московской олимпиады, и с тех пор он известен А. Н. Колмогорову, а через 30 лет Миша и Игорь были участниками V Всероссийской олимпиады по математике и

физике, а А. Н. Колмогоров был председателем жюри по математике и, как мы писали выше, лично принимал участие в судьбе Миши Бошерницана.

Так уж распорядилась судьба, что Миша, Игорь, Дима и Коля на третьем курсе оказались в одной 304 группе. Дело всё в том, что кафедру теории чисел традиционно выбирает самое небольшое число студентов, кафедру дифференциальной геометрии и кафедру высшей геометрии и топологии чуть большее количество. Но даже вместе не набиралась одна группа, в то время как алгебру выбрали студенты по численности на полторы группы. Именно эта половина группы студентов-алгебраистов и вошла в 304 академическую группу.

Состав этой группы был очень сильный: Андрей Болибрух, Михаил Бошерницан, Александр Вайнштейн, Борис Дубровин, Игорь Кричевер, Дмитрий Митькин, Сергей Ошанин, Владимир Чирский, Семён Шлосман и другие, которые стали профессиональными математиками. К большому сожалению, пятеро из выше перечисленных, уже покинули этот мир: Андрей Болибрух — 11 ноября 2003 года, Дмитрий Митькин — 9 апреля 2007 года, Борис Дубровин — 19 марта 2019 года, Михаил Бошерницан — август 2019 года, Игорь Кричевер — 1 декабря 2022 года.

4. После университета

Судьбы И. М. Кричевера и М. Д. Бошерницана сложились совершенно по разному.

И. М. Кричевер поступил в целевую аспирантуру, затем работал в ЭНИНе (Энергетический институт им. Г. М. Кржижановского). Подготовил докторскую диссертацию. Игорь Моисеевич вошёл в число первых десяти выпускников Интерната ФМШ-18 при МГУ, защитивших докторские диссертации. На следующей фотографии мы видим А. Н. Колмогорова в окружении восьми из этих десяти молодых докторов наук.



А. Н. Колмогоров с первыми докторами наук выпускниками интерната ФМШ-18.

Сидят А. Н. Варченко, В. Н. Темляков, стоят Ю. В. Матиясевич (академик РАН),

Е. В. Щепин (член-корреспондент РАН), И. М. Кричевер,

В. И. Янчевский (академик в Белоруссии), С. М. Воронин, С. И. Пинчук.

О научных достижениях Игоря Моисеевича лучше всего прочесть в юбилейных статьях [1] и [2], которые написали его коллеги по научной работе с глубоким знанием предметной области научных интересов И. М. Кричевера.

Игорь Моисеевич никогда не забывал Интернат ФМШ-18 при МГУ и, когда была возможность, встречался со своими однокашниками.



Выпускники интерната ФМШ-18, 1987 год



Встреча одноклассников
Игорь Кричевер и Миша Милявский

Также с уважением Игорь Моисеевич относился к своим школьным учителям, что хорошо видно на следующей фотографии.



Ученик и учитель — два доктора физико-математических наук
И. М. Кричевер и О. Н. Найда

В 1996 году И. М. Кричевера, уже хорошо известного специалиста мирового уровня, пригласили в Колумбийский университет (Нью-Йорк, США), где он преподавал до последнего времени, совмещая это с работой в ИТФ им. Л. Д. Ландау, ИППИ, ВШЭ и Сколтехе.

Игорь Моисеевич Кричевер стоит на 16 месте в списке наиболее цитируемых математиков по сведениям mathnet.ru (см. [12]) (1728 цитирований), h-индекс 27. Он хорошо представлен в Интернете (см. [3]).

Миша Бошерницан оказался в США гораздо раньше, чем Игорь. Согласно [10]: Миша "после армии закончил Hebrew University, потом защитил диссертацию в Институте Вейцмана. ... Он решил, причём очень элегантно, несколько интересных и трудных задач, а затем, проведя один год в Принстоне, в Institute for Advanced Study, получил в 82-м году постоянную работу в Америке, в Хьюстонском университете Райса."

Научные интересы Михаила Давидовича Бошерницана были достаточно разнообразные: эргодическая теория, комбинаторика и теория чисел. Он, например, сотрудничал с Григорием Колесником, который был учеником А. А. Карацубы, но очень давно переехал в США и стал видным специалистом по теории чисел.

Хотя на странице М. Д. Бошерницана мы находим упоминание только о 65 научных статьях, но у него весьма высокий h-индекс 20.

5. Заключение

Авторы в этой небольшой статье постарались отразить известные им факты о двух математиках, которые были друзьями ещё со времён обучения в Интернате на протяжении 54 лет.

Мы считали, что будет интересно привести факты о них и о людях, сыгравших на разных этапах их жизни определенную роль. На наш взгляд, это полезно, так как со временем люди уходят и многие важные обстоятельства жизни замечательных ученых уходят вместе с ними.

Авторы выражают свою глубокую благодарность И. Н. Найде за ценные воспоминания и фотографии, которыми он поделился с авторами.

Авторы выражают свою глубокую благодарность член-корреспонденту РАН В. М. Бухштаберу за идею написания этой статьи и полезные обсуждения.

Авторы выражают свою глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову, который помог уточнить некоторые исторические моменты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Бухштабер, А. Н. Варченко, А. П. Веселов, П. Г. Гриневич, С. Грушевский, С. Ю. Доброхотов, А. В. Забродин, А. В. Маршаков, А. Е. Миронов, Н. А. Некрасов, С. П. Новиков, А. Ю. Окуньков, М. А. Ольшанецкий, А. К. Погребков, И. А. Тайманов, М. А. Цфасман, Л. О. Чехов, О. К. Шейнман, С. Б. Шлосман, Игорь Моисеевич Кричевер (к семидесятилетию со дня рождения), УМН, 2021, том 76, выпуск 4, pp. 183–193. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10015>
2. V. M. Buchstaber, L. O. Chekhov, S. Yu. Dobrokhoto, S. M. Gusein-Zade, Yu. S. Ilyashenko, S. M. Natanzon, S. P. Novikov, G. I. Olshanski, A. K. Pogrebkov, O. K. Sheinman, S. B. Shlosman, M. A. Tsfasman, “Igor Krichever”, Mosc. Math. J., 10:4 (2010), pp. 833–834.
3. Видеоматериалы с Игорем Моисеевичем Кричевером <https://imperiya.by/show/%D0%98%D0%B3%D0%BE%D1%80%D1%8C+%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D0%B2%D0%B5%D1%80/CBgQAQ>
4. Игорь Кричевер: «Занятия математической физикой требуют удвоенных знаний» <https://nauchkor.ru/media/igor-krichever-zanyatiya-matematicheskoy-fizikoy-trebuyut-udvoennyh-znaniy-58da6b915f1be774a6846356>
5. Игорь Кричевер: неправильных математических теорий не бывает <https://old.sk.ru/news/b/articles/archive/2016/08/23/igor-krichever-nepravilnyh-matematicheskikh-teoriy-ne-byvaet.aspx?fbclid=IwAR1FWW7k28V20geYonXglOtMeOTmPDO5iOEY8qNXOM-bEMHkG-e-MWHm4VZc>
6. Интервью с И. М. Кричевером https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/434281/Matematika_kak_ochki_delaet_mir_chyotche
7. А. А. Карацуба, “Решение одной задачи из теории конечных автоматов” // УМН, 15:3(93) (1960), 157–159.
8. А. Карацуба, Ю. Офман, “Умножение многозначных чисел на автоматах” // Докл. АН СССР, 145:2 (1962), 293–294.
9. А. А. Карацуба, “Сложность вычислений” // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 211, Наука, Физматлит, М., 1995, 186–202; Proc. Steklov Inst. Math., 211 (1995), 169–183.
10. Исаак Корнфельд, О Мише Бошерницане // Семь искусств, № 7 • 26.07.2021 <https://litbook.ru/article/15732/>
11. Е. А. Морозова, И. С. Петраков. IX Международная // Математика в школе, 1967, № 6, С. 70–76.
12. Наиболее цитируемые авторы // https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?wshow=&option_lang=rus&stopatmax=40#r9

REFERENCES

1. V. M. Buchstaber, A. N. Varchenko, A. P. Veselov, P. G. Grinevich, S. M. Grushevsky, S. Yu. Dobrokhoto, A. V. Zabrodin, A. V. Marshakov, A. E. Mironov, N. A. Nekrasov, S. P. Novikov, A. Yu. Okounkov, M. A. Olshanetsky, A. K. Pogrebkov, I. A. Taimanov, M. A. Tsfasman, L. O. Chekhov, O. K. Sheinman and S. B. Shlosman, 2021, “Igor’ Moiseevich Krichever”, *Russian Academy of Sciences (DoM), London Mathematical Society, IOP Publishing Limited Russian Mathematical Surveys*, Volume 76, Number 4, DOI 10.1070/RM10015
2. V. M. Buchstaber, L. O. Chekhov, S. Yu. Dobrokhoto, S. M. Gusein-Zade, Yu. S. Ilyashenko, S. M. Natanzon, S. P. Novikov, G. I. Olshanski, A. K. Pogrebkov, O. K. Sheinman, S. B. Shlosman, M. A. Tsfasman, 20106 “Igor Krichever”, *Mosc. Math. J.*, 10:4, 833–834.
3. Video materials with Igor Moiseevich Krichever <https://imperiya.by/show/%D0%98%D0%B3%D0%BE%D1%80%D1%8C+%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D0%B2%D0%B5%D1%80/CBgQAQ>
4. Igor Krichever: “Classes in mathematical physics require doubled knowledge” <https://nauchkor.ru/media/igor-krichever-zanyatiya-matematicheskoy-fizikoy-trebuyut-udvoennyh-znaniy-58da6b915f1be774a6846356>
5. Igor Krichever: there are no wrong mathematical theories <https://old.sk.ru/news/b/articles/archive/2016/08/23/igor-krichever-nepravilnyh-matematicheskikh-teoriy-ne-byvaet.aspx?fbclid=IwAR1FWW7k28V20geYonXglOtMeOTmPDO5iOEY8qNXOMbEMHkG-e-MWHm4VZc>
6. Interview with I. M. Krichever https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/434281/Matematika_kak_ochki_delaet_mir_chyotche
7. A. A. Karatsuba, 1960, “Solving a problem from the theory of finite automat”, *VMH*, 15:3(93), 157–159.
8. A. A. Karatsuba, Yu. P. Ofman, 1963, “Multiplication of multidigit numbers on automata”, *Soviet Physics-Doklady*, 7, 595–596.
9. A. A. Karatsuba, 1995, “The complexity of computations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 211, 169–183.
10. Isaac Kornfeld, 2021, “About Misha Boshernitsan”, *Seven Arts*, № 7 • 26.07.2021 <https://litbook.ru/article/15732/>
11. E. A. Morozova, I. S. Petrakov, 1967, “IX International”, *Mathematics at School*, No. 6, pp. 70–76, (Russia).
12. Most cited authors // https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?wshow=&option_lang=rus&stopatmax=40#r9

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 1.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-334-355

**Сергей Сергеевич Демидов
(к 80-летию со дня рождения)**

А. И. Шафаревич, В. Н. Чубариков, А. Л. Семенов, В. М. Бухштабер, А. О. Иванов,
В. М. Тихомиров, Вл. П. Визгин, В. Г. Чирский, В. В. Козлов, М. В. Козлов, Е. А. Зайцев,
Г. С. Смирнова, В. Н. Чиненова, Н. М. Добровольский

Аннотация

Статья посвящена 80-летию юбилею выдающегося отечественного историка математики, президента Международной Академии истории науки Демидова Сергея Сергеевича.

Ключевые слова: история дифференциальных уравнений с частными производными, проблемы Гильберта, развитие математики в России, московская математическая школа, советская математическая школа

Библиография: 321 названий.

Для цитирования:

А. И. Шафаревич, В. Н. Чубариков, А. Л. Семенов, В. М. Бухштабер, А. О. Иванов, В. М. Тихомиров, Вл. П. Визгин, В. Г. Чирский, В. В. Козлов, М. В. Козлов, Е. А. Зайцев, Г. С. Смирнова, В. Н. Чиненова, Н. М. Добровольский. Сергей Сергеевич Демидов (к 80-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 334–355.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 1.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-334-355

**Sergey Sergeevich Demidov
(to the 80-th anniversary of his birth)**

A. I. Shafarevich, V. N. Chubarikov, A. L. Semenov, V. M. Buchstaber, A. O. Ivanov,
V. M. Tikhomirov, Vl. P. Vizgin, V. G. Chirskii, V. V. Kozlov, M. V. Kozlov, E. A. Zaitsev,
G. S. Smirnova, V. N. Chinenova, N. M. Dobrovolsky

Abstract

The article is devoted to the 80-th anniversary of Sergey Sergeevich Demidov – the outstanding Russian historian of mathematics, president of the International Academy of the History of Science.

Keywords: history of partial differential equations, Hilbert problems, development of mathematics in Russia, Moscow mathematical school, Soviet mathematical school

Bibliography: 321 titles.

For citation:

A. I. Shafarevich, V. N. Chubarikov, A. L. Semenov, V. M. Buchstaber, A. O. Ivanov, V. M. Tikhomirov, Vl. P. Vizgin, V. G. Chirskii, V. V. Kozlov, M. V. Kozlov, E. A. Zaitsev, G. S. Smirnova, V. N. Chinenova, N. M. Dobrovolsky, 2023, "Sergey Sergeevich Demidov (to the 80-th anniversary of his birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 334–355.



30 декабря 2022 г. доктору физико-математических наук, профессору Московского университета **Сергею Сергеевичу Демидову исполнилось восемьдесят лет.**

С.С. Демидов родился в 1942 г. в Москве. Его отец всю свою жизнь посвятил авиации: в молодые годы работал инженером-испытателем самолетов, а позже занимался исследовательской деятельностью в авиационной промышленности.

Сразу после окончания средней школы в 1959 г. Сергей Сергеевич поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Пятидесятые годы XX века были золотой порой московской математики. В это время в МГУ работали, читали лекции и вели научные семинары ученые высочайшего уровня. Талантливая молодежь стремилась заниматься наукой на благо своей страны и очень часто разница в возрасте между студентами и их научными руководителями была совсем невелика.

Сергей Сергеевич избрал для себя изучение вопросов, связанных с дифференциальными уравнениями с частными производными, и готовил дипломную работу под руководством совсем тогда еще молодого, но уже подававшего большие надежды, ученика О.А. Олейник – С.Н. Кружкова, только-только (в 1963 г.) защитившего кандидатскую диссертацию.

В 1964 г. С.С. Демидов окончил механико-математический факультет, но в аспирантуру поступил уже по специальности история математики, поскольку, еще будучи студентом, всерьез заинтересовался историей и философией науки и стал активным участником Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики МГУ, которым тогда руководили С.А. Яновская, А.П. Юшкевич, К.А. Рыбников и И.Г. Башмакова. Именно с историей математики и связан первый большой научный успех Сергея Сергеевича.

Развитие математики в XX веке во многом было определено проблемами, которые в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже предложил математическому сообществу великий Гильберт. Однако русского перевода этого замечательного доклада в пятидесятые годы все еще не существовало. Для успешного выполнения задачи такого высокого уровня академик П.С. Александров привлек многих известных математиков. Нужно было не

только перевести текст доклада с немецкого языка, но и попытаться оценить, что произошло в той или иной области математики за прошедшие полвека и в каком состоянии находится решение каждой из проблем. Руководство семинара предложило С.С. Демидову присоединиться к этой работе. Наряду с подготовкой к изданию русского перевода с комментариями советских ученых С.С. Демидов провел глубокое историко-математическое исследование XIX и XX проблем Гильберта, относящихся к теории эллиптических дифференциальных уравнений, которое стало основным сюжетом его кандидатской диссертации “Некоторые вопросы истории математических проблем Д. Гильберта”. В 1968 г. он успешно защитил ее в Институте истории естествознания и техники АН СССР. Научным руководителем С.С. Демидова сначала был профессор К.А. Рыбников, а после его отъезда в длительную заграничную командировку руководство взял на себя профессор А.П. Юшкевич, который до конца своей жизни с особым вниманием и заботой следил за успехами своего ученика.

В 1969 г. в издательстве “Наука” монография “Проблемы Гильберта”, в подготовке которой приняли участие такие выдающиеся отечественные математики как П.С. Александров, А.О. Гельфонд, Б.Н. Делоне, Б.В. Гнеденко, Ю.И. Манин, Ю.В. Линник, О.А. Олейник, Б.В. Шабат и др., вышла из печати. Это было первое издание такого рода в мировой литературе и, конечно же, книга была переведена на немецкий язык и вышла несколькими изданиями в серии *Ostwalds Klassiker*. Еще долгие годы доклад Гильберта оставался центром притяжения интересов и математиков, и историков науки. Особенно сильно это проявилось на рубеже XX–XXI вв., когда многими учеными предпринимались попытки дать оценку гильбертовскому проекту и обсудить его влияние на развитие математики в целом.

С.С. Демидов посвятил этому вопросу несколько своих работ, в которых осветил успехи математики XX в., уделив особенное внимание историческому осмыслению феномена гильбертовских проблем. На примере уже хорошо изученных им XIX и XX проблем он проанализировал предпосылки выдвижения Гильбертом тех или иных задач и развитие тематики, поднятой в докладе, ответил на вопрос, действительно ли на путях решения этих проблем сформировалась значительная часть математики XX в. Успех программы Гильберта С.С. Демидов объясняет особенностью исторического момента, когда эти проблемы были поставлены: на конец XIX в. приходился отрезок гладкости кривой развития математики, когда ее дальнейшее поведение можно было предвидеть. Сбой программы появились лишь в 70-е годы вместе со стремительным закатом бурбакизма, явившемся ее финальным выражением. В это время начался крутой поворот в развитии математики – в нее решительно вторгся внешний мир. Новые открытия в физике быстро изменили многие приоритеты. Например, в теории дифференциальных уравнений на передний план вышла вновь проблема интегрирования в конечном виде, и методы Д.Ф. Егорова геометрической теории дифференциальных уравнений оказались востребованными новой математикой. Кажется, что период гладкого аналитического развития закончился и теперь мы находимся в точке бифуркации, а значит, судить о том, каково будет развитие математики в будущем, представляется занятием бесперспективным.

Изучение творчества и взглядов Гильберта на математику привлекло внимание С.С. Демидова к аксиоматическому методу, истории его возникновения в древнегреческой математике и возрождения в трудах европейских ученых в XIX – XX вв. В 1968 г. за научное исследование в этом направлении “*Évolution, extension et limites de la méthode axiomatique dans les sciences modernes sur l'exemple de la géométrie*” (“Развитие, распространение и пределы аксиоматического метода в современных науках на примере геометрии”) он был удостоен премии, учрежденной для молодых ученых Международной Академией истории науки. Несколько лет после окончания аспирантуры С.С. Демидов работал на механико-математическом факультете МГУ: читал лекции и вел занятия по математике на философском, психологическом и филологическом факультетах МГУ. В 1972 г. он начал работать в Институте истории естествознания и техники АН СССР (ныне ИИЕТ им. С.И. Вавилова РАН), где в 1987–2010 гг. руководил сектором истории математики, в 2010–2018 гг. возглавлял отдел истории физико-

математических наук.

Долгие годы главной темой исследований С.С. Демидова была история дифференциальных уравнений. Именно этой области математики, привлекавшей его внимание с самого начала обучения в Московском университете, посвящена его докторская диссертация “ Развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений от эпохи О. Коши до начала XX в.” , которая была защищена в 1990 г. На протяжении всей своей дальнейшей научной жизни С.С. Демидов продолжал изучать вопросы развития теории дифференциальных уравнений, начиная с первых примеров появления уравнений с частными производными в творчестве Эйлера и Даламбера и заканчивая диалектикой концептуального развития общей теории дифференциальных уравнений с частными производными в XIX–XX вв. в целом.

Отдельного разговора заслуживает цикл работ, посвященных вкладу московских математиков (К.М. Петерсона, Д.Ф. Егорова и др.) в развитие теории уравнений с частными производными, которые вели свои исследования в тесной связи с изысканиями по дифференциальной геометрии. В отличие от москвичей, петербургские математики вели исследования по теории дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемой как теория краевых задач математической физики. Именно так стали смотреть на общую теорию в XX веке: под нею стали понимать теорию краевых задач для уравнений различных типов – эллиптических, параболических, гиперболических и уравнений смешанного типа. Эта переориентация проявилась уже в 1900 г. в знаменитом докладе Гильберта “ Математические проблемы” , в котором нет ни одной проблемы, связанной с общей геометрической теорией дифференциальных уравнений с частными производными, зато целых две проблемы из 23 были посвящены теории эллиптических дифференциальных уравнений.

Интерес к общей теории в первоначальном понимании возродился в 70-е годы XX века, когда обнаружился особый физический смысл случаев интегрируемости уравнений в замкнутой форме. Чрезвычайно благотворным для развития теории уравнений с частными производными стал синтез идей двух ведущих российских математических школ, случившийся в ходе реформы советской науки конца 20-х–начала 30-х гг., когда представители обеих школ, до этого находившиеся в конфронтации, стали работать вместе в Москве. Это и представитель школы Егорова И.Г. Петровский, и выпускник Ленинградского университета С.Л. Соболев, и примкнувший к ленинградцам воспитанник Парижского университета С.Н. Бернштейн. Этот синтез определил лицо одной из наиболее ярких школ XX столетия – Советской математической школы.

Творчество отечественных ученых все больше и больше увлекало С.С. Демидова. Начиная с 90-х годов прошлого века, основной целью его научных изысканий становится проблема изучения в контексте развития мировой математической мысли становления математики как научной, так и образовательной дисциплины в России и в СССР с 20-х годов XVIII до 60-х годов XX вв. В результате был создан абсолютно новый специальный курс, вобравший в себя все опубликованные и неопубликованные достижения С.С. Демидова по этому вопросу. В нем рассматриваются начальный период математических исследований в Петербургской академии наук (деятельность Л. Эйлера и его учеников), создание системы народного образования в рамках реформ Александра I, творчество Н.И. Лобачевского и М.В. Остроградского, становление центра математических исследований в Москве (Н.Д. Брашман, Н.Е. Зернов, Московское математическое общество), исследования П.Л. Чебышева и основанной им Петербургской математической школы, творчество С.В. Ковалевской, конфликт Петербургской и Московской математических традиций, рождение Московской школы теории функций (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин), ключевые моменты процесса возникновения и развития Советской математической школы. При этом особое внимание уделено аспектам социальной истории науки – развитие математики исследуется в контексте эволюции гражданской и культурной истории страны.

Начав изучение творчества Эйлера с его работ по теории дифференциальных уравнений

с частными производными, С.С. Демидов не мог обойти стороной и вопросы, связанные с вкладом Эйлера в развитие математики и математического образования в России, с его участием в создании русской учебной литературы по математике. С 2004 г. на протяжении ряда лет С.С. Демидов опубликовал несколько работ, посвященных истории российской системы школьного математического образования.

Согласно идеям Петра I, Российская Академия наук должна была не только проводить научные исследования и реализовывать их практические приложения на нужды государства Российского, но и готовить новое поколение ученых, происходящих из российских подданных. В ходе выполнения этой задачи у Эйлера выявился необычайный педагогический дар. В 1737 г. он подготовил свой проект системы гимназического образования, в которой математике должно принадлежать особое место. Позже его идеи были воплощены в жизнь его учениками (С.Я. Румовским, Н.И. Фуссом и др.) в ходе реформ Александра I. Эйлер сам написал несколько учебников по математике, которые заложили русскую традицию учебной литературы, в частности, руководств по алгебре. Его ученики Н.И. Фусс, М.Е. Головин переработали работы Эйлера и составили учебники по геометрии и тригонометрии, равным которым в Европе того времени не было. Последователями и учениками Эйлера был создан корпус превосходной учебной математической литературы, сделавший возможным мощный рывок в области математики первой половины XIX в. (Н.И. Лобачевский, П.Л. Чебышев и др.). Именно Эйлер и его ученики положили начало традиции, живущей в России по сию пору: пристального внимания математической элиты к проблемам школьного математического образования.

Отметим здесь, что и сам С.С. Демидов много внимания уделяет вопросам создания учебной литературы для будущих специалистов по истории математики. Так, им в 2003 г. вместе с А.Г. Барабашевым и С.С. Петровой были подготовлены “Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки. История математики”. Во многом необходимость этого была обусловлена и теми обязанностями, которые С.С. Демидов исполняет по ходу своей долгой трудовой деятельности: на протяжении многих лет он являлся членом Ученого совета ИИЕТ, с 2004 г. – членом Ученого совета механико-математического факультета МГУ, с 2001 г. – членом Научно-методического совета по математике при Минвузе РФ. Уже многие годы он исполняет обязанности председателя Диссертационного совета при ИИЕТ РАН по истории физико-математических наук.

Основной темой историко-математических исследований С.С. Демидова в последние годы остается изучение творчества отечественных математиков, деятельность Московского математического общества, формирование Советской математической школы. Большое количество публикаций посвящено вопросам становления российского математического сообщества в XIX–XX вв., истории Московского математического общества.

На основании изучения философского контекста эволюции математических исследований в Москве С.С. Демидову удалось выявить преемственность бугаевской аритмологии (теории разрывных функций) и тематики теории функций действительного переменного, занявшей на рубеже XIX–XX вв. центральное место в работах московских математиков. Немалую роль в этом процессе сыграла деятельность ученика Н.В. Бугаева знаменитого русского богослова и философа П.А. Флоренского, изучение и публикация рукописей которого (в частности, переписки с Н.Н. Лузиным и др.) позволили в значительной степени прояснить историю возникновения московской школы теории функций.

Другой важной проблемой, над которой долгое время работал С.С. Демидов, стал процесс формирования советской математической школы. Огромную роль в ее решении сыграло изучение уникальных архивных материалов, позволивших лучше понять события “егоровщины” и “дела академика Н.Н. Лузина”. Издание материалов дела, подготовленное группой историков математики, было издано под его и Б.В. Левшина редакцией в 1999 г. (второе дополненное издание этой книги увидело свет в 2019 г.), а в 2016 г. в серии изданий Американского мате-

математического общества появился английский перевод этой книги, осуществлённый Р. Куком.

Благодаря публикации С.С. Демидовым писем Н.Н. Лузина, написанных М.Я. Выгодскому в связи выходом в свет его учебного курса “Основания исчисления бесконечно малых” (1931–1933 гг.), был прояснен важный вопрос о взглядах главы московской школы теории функций на основания математического анализа. В этих письмах Н.Н. Лузин – в отличие от большинства математиков-теоретиков своего времени – подчеркивает значение содержательного подхода к исследованию проблем анализа, опирающегося на понятие бесконечно малой величины. В итоге эта переписка предстаёт перед нами как чрезвычайно интересная страница предыстории нестандартного анализа.

На протяжении ряда лет С.С. Демидов занимается изучением проблем историографии истории математики, в частности, вопросом о соотношении “антикваризма” и “презентизма” в попытках описания и осознания процессов развития математического знания.

Серия важных публикаций С.С. Демидова посвящена формированию в конце XIX – начале XX вв. национальных математических школ и их последующему взаимодействию в ходе развития международного математического сообщества. Особое внимание в этих публикациях уделено связям российской и советской математики с ведущими математическими школами Европы – немецкой, французской и итальянской.

Ряд публикаций С.С. Демидова разных лет освещает вопросы влияния философско-мировоззренческих концепций на становление и развитие отдельных областей математики, а также на творчество отдельных ученых.

В 1995 г. С.С. Демидов вернулся к преподавательской деятельности в Московском университете. Уже более 25 лет он читает обязательный курс истории математики для студентов механико-математического факультета МГУ, отдает много времени и сил работе со студентами и аспирантами. Им разработаны совершенно новые оригинальные специальные курсы по истории математического анализа и отечественной математики. С 2004 г. он заведует кабинетом истории и методологии математики и механики, является одним из руководителей Общественного научно-исследовательского семинара по истории математики и механики в МГУ. Под его руководством и при его деятельном участии регулярно проходят всероссийские и международные школы и конференции по истории и философии математики. Яркие и глубокие по своему содержанию лекции и доклады С.С. Демидова всегда вызывают повышенный интерес у слушателей.

Наконец, Сергей Сергеевич является главным редактором основного отечественного издания по истории математики – “Историко-математических исследований”. Без его огромных усилий сборник, издающийся с 1948 г., вряд ли смог регулярно выходить в постсоветское, непростое для всей российской науки время. С приходом С.С. Демидова к руководству сборника начался выпуск его второй серии. В новой версии были сохранены традиционные разделы, но при этом значительно расширилась рубрика, содержащая публикации воспоминаний и архивных материалов о жизни и творчестве российских и советских математиков. Благодаря этому сборник стал более ярким и живым, а его читательская аудитория расширилась.

Труды и деятельность С.С. Демидова известны не только в нашей стране, но и за рубежом. Он является членом редколлегий ряда ведущих российских и международных историко-научных журналов. В 1971–1993 гг. был вице-президентом Международной комиссии по истории математики. В 1986 г. избран членом-корреспондентом, а в 1993 г. – действительным членом Международной академии истории науки. С 1997 г. по 2005 г. являлся ее вице-президентом, а в 2017–2023 гг. президентом академии. На протяжении многих лет С.С. Демидов состоял заместителем главного редактора журнала академии “Archives Internationales d’Histoire des Sciences”. С 1980 года С.С. Демидов является членом редколлегии журнала “Вопросы истории естествознания и техники”.

Свой юбилей С.С. Демидов встречает полным жизненных сил, в расцвете творческой и деловой активности.

Друзья, коллеги и ученики желают Сергею Сергеевичу многих лет жизни, доброго здоровья и новых открытий.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ С. С. ДЕМИДОВА

1. К истории проблем Гильберта // Историко-математические исследования. Москва: Наука, 1966. Вып. 17. С. 91–121.
2. К истории проблем Гильберта. Тезисы // Тезисы 15 секции Международного конгресса математиков в Москве. М.: Наука, 1966. С. 14. Совм. с К.А. Рыбниковым.
3. Международный конгресс математиков в Москве // Вестник Московского университета. Сер. философ. Н. 2. 1967. С. 90–95. Совм. с А.В. Дорофеевой, А.Н. Паршиным.
4. О работе научно-исследовательского семинара по истории математики и механики МГУ // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. Вып. 6. С. 263–266. Совм. с Х.О. Ондаром.
5. История математики на Международном математическом конгрессе // Вопросы истории естествознания и техники. 1968. Вып. 23. С. 135–137. Совм. с Э.И. Березкиной, Л.Е. Майстровым.
6. Некоторые вопросы истории математических проблем Д. Гильберта. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт истории естествознания и техники. АН СССР. М. 1968. 120 с.
7. Предисловие и примечания редактора / Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969. 10 с.: С. 3–6 + примечания по тексту.
8. Проблемы Гильберта. М.: Знание. 1969. 32 с.
9. К истории 19 проблемы Гильберта // История и методология естественных наук. 1970. Вып. 9. С. 150–164. Совм. с К.А. Рыбниковым.
10. Дж. Кардано и Н. Тарталья // Физико-математическое списание. София. 1970. Т. 13. Кн. 1. С. 34–46. Болгарский язык.
11. Évolution, extension et limites de la méthode axiomatique dans les sciences modernes sur l'exemple de la géométrie // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 1970. N. 90–91. P. 3–30.
12. Problemy Hilberta // Roczniki polskiego towarzystwa mat. Ser. 2. Vol. 11. 1970. S. 201–219. Польский язык.
13. Hilbert problémáinak történetéhez // Matematikai lapok. Budapest, 1970. Т. 21. S. 279–293. Венгерский язык.
14. Предыстория 19-ой проблемы Гильберта. // История и методология естественных наук. 1971. Вып. 11. С. 69–79.
15. У истоков современной алгебры. М.: Знание, 1971. 32 с.
16. Sur l'histoire de la méthode axiomatique // Actes de 12-e Congr. Intern. d'Hist. des Sciences. Paris, 1971. Т. IV. P. 45–47.
17. Anmerkungen / Die Hilbertschen Probleme. Vortrag “ Mathematische Probleme” von D. Hilbert gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress Paris 1900 erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion, von P.S. Alexandrov. Leipzig. 1971.
18. К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Москва: Наука, 1973. Вып. 18. С. 181–202.
19. К истории аксиоматического метода // История и методология естественных наук. 1973. Вып. 14. С. 74–91.
20. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Даламбера // Историко-математические исследования. Вып. 19. 1974. С. 94–124.

21. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Даламбера // Труды XIII Международ. Конгресса по истории науки. М., 1974. С. 133–136.
22. Школа по истории математики и механики в Тарту // Вопросы истории естествознания и техники. 1974. Вып. 2–3 (47–48). С. 200–201. Совм. с Л.Е. Майстровым.
23. Возникновение теории дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. 1975. Вып. 20. С. 204–221.
24. Naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles // Proc. of XIV Int. Congr. Hist. Sci. Tokyo. 1975. V. 2. P. 111–113.
25. История математики на XIV Международном конгрессе по истории науки // Успехи математических наук. 1975. Т. 30. Вып. 3. С. 201–206. Совм. с С.С. Петровой.
26. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в 18 веке // Историко-математические исследования. 1976. Вып. 21. С. 158–182.
27. Б. Риман (к 150-летию со дня рождения) // Математика в школе. 1977. N. 4. С. 76–80. Совм. с А.П. Юшкевичем.
28. О вкладе советских математиков в решение проблем Гильберта // Квант. 1977. № 11. С. 31–37.
29. Спор о колебании струны // Роль дискуссии в развитии естествознания. Тезисы докладов. М.: Наука, 1977. С. 78–80.
30. К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. 1978. Вып. 23. С. 87–117.
31. К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Работы И.Ф. Пфаффа и О. Коши // Историко-математические исследования. Вып. 24. 1979. С. 191–217.
32. Третий международный Лейбницевский конгресс // Вопросы истории естествознания и техники. 1979. Вып. 64–66. С. 89–92. Совм. с П.В. Мюрсепп, В.Н. Садовским.
33. Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII–XIX вв. // Историко-математические исследования. 1980. Вып. 25. С. 71–103.
34. On axiomatic and genetic construction of mathematical theories // Pisa Conf. Proceedings. V. 1. Reidel, 1980. P. 215–221.
35. Филдсовская премия советскому математику // Математика в школе. 1980. N. 1. С. 76–77.
36. Second Summer Conference on the History of Mathematics in the Soviet Union // Historia Mathematica. 1980. V. 7. P. 71–75. Совм. с А.И. Володарским.
37. Вторая школа по истории математики // Вопросы истории естествознания и техники. 1980. Вып. 3–4 (67–68). С. 154–156.
38. Математический симпозиум в ГДР // Вопросы истории естествознания и техники. 1980. Вып. 3–4 (67–68). С. 157–158.
39. Вторая международная конференция по истории и философии науки // Вопросы истории естествознания и техники. 1980. Вып. 3–4 (67–68). С. 161–162. Совм. с Г.А. Фирсовой.
40. From Poisson brackets to Lie algebras // Proceed. 16th Intern. Congr. Hist. Sci. V. C–D. Bucharest. 1981. P. 398–401.
41. Des parenthèses de Poisson aux algèbres de Lie / S.D. Poisson et la science de son temps. Paris. 1981. P. 133–150.
42. Историко-математические исследования в СССР в 1977–1981 гг. // Вопросы истории естествознания и техники. 1981. N. 2. Совм. с А.П. Юшкевичем. С. 16–21.
43. О творчестве Ж. Фурье // Математика в школе. 1981. N. 5. С. 63–65. Совм. с А.П. Юшкевичем.

44. Изабелла Григорьевна Башмакова // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 5. С. 211–213. Совм. с П.С. Александровым, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоровым, А.Н. Паршиным, С.С. Петровой, А.П. Юшкевичем.
45. И.Г. Башмакова // Математика в школе. 1981. № 1. Совм. с С.С. Петровой, А.П. Юшкевичем.
46. Isabella Grigoryevna Bashmakova on the occasion of her 60th birthday // Historia Mathematica. 1981. V. 8. P. 389–392. Совм. с С.С. Петровой, А.П. Юшкевичем.
47. Simonov Nikolai Ivanovich // Schriftenreihe für Geschichte der Naturwiss. Techn. und Medizin (NTM). 1981. Bd. 18. N. 1. S. 92–93. Совм. с А.П. Юшкевичем.
48. К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. “Первый метод” К.Г. Якоби // Историко-математические исследования. Вып. 26. 1982. С. 137–153.
49. Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de D'Alembert // Revue d'Hist. des Sci. 1982. V. 35. N. 1. P. 3–42.
50. Mathématiques et réalité physique dans la discussion sur la vibration d'une corde au XVIIIe siècle // Studia Leibnitiana - Suppl. 22: Theoria cum praxi / Internationaler Leibniz-Kongress. 4. 1982. P. 138–142.
51. The study of partial differential equations of the first order in the 18th and 19th centuries // Archive for Hist. Ex. Sci. 1982. V. 26. N. 4. P. 325–350.
52. On the history of the theory of linear differential equations // Archive for Hist. Ex. Sci. 1983. V. 28. N. 4. P. 369–387.
53. От скобок Пуассона до алгебр Ли // Историко-математические исследования. Вып. 27. 1983. С. 275–289.
54. F.A. Medvedev et son apport à l'histoire de la théorie des fonctions // Historia Mathematica. 1983. V. 10. N. 4. P. 397–398. Совм. с П. Дюгаком, А.П. Юшкевичем.
55. Коллоквиум по истории математики в Обервольфахе // Вопросы истории естествознания и техники. 1983. N. 3. С. 168–170. Совм. с В.С. Кирсановым, Ф.А. Медведевым.
56. К истории теории линейных дифференциальных уравнений // Историко-математические исследования. Вып. 28. 1985. С. 78–97.
57. Письмо Н.Н. Лузина к О.Ю. Шмидту. Публикация и примечания // Историко-математические исследования. Вып. 28. 1985. С. 278–286.
58. Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. Вып. 29. 1985. С. 113–124.
59. N.V. Bougaiev et la création de l'école de Moscou de la théorie des fonctions d'une variable réelle / Folkerts M., Lindgren U. (Eds.) Mathemata. Festschrift für Helmut Gericke. 1985. S. 651–673.
60. N.V. Bougaiev et la création de l'école de Moscou de la théorie des fonctions d'une variable réelle (Sur un épisode dans l'histoire du développement des idées de Leibniz en Russie) // Leibniz Werk und Wirkung. IV. Int. Leibniz-Kongress. Vorträge. II Teil. Hannover. 1985. P. 63–74.
61. Третья Школа по истории математики // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 6. С. 177–178. Совм. с С.Н. Киро.
62. Третья Школа по истории математики // Вопросы истории естествознания и техники. 1985. N. 4. С. 161–164. Совм. с С.Н. Киро.
63. IV Международный Лейбницевский конгресс // Вопросы истории естествознания и техники. 1985. N. 1. С. 165–167. Совм. с А.Т. Григорьяном.
64. Lettre de N.N. Luzin à O.Yu. Schmidt. Publication, introduction et remarques // Cahiers du séminaire d'Histoire des mathématiques. Paris. 1986. V. 7. P. 31–42.
65. Из ранней истории Московской школы теории функций // Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 124–129.

-
66. Публикация и примечания к работе: Флоренский П.А. Введение к диссертации “Идея прерывности как элемент мирозерцания” // Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 159–176. Совм. с А.Н. Паршиным.
 67. Публикация и примечания к работе: Лузин Н.Н. О рестрикторах // Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 177–181.
 68. Спор о колебании струны / Роль дискуссий в развитии естествознания. М.: Наука, 1986. С. 78–101.
 69. Закономерности и современные тенденции развития математики // Вопросы философии. 1986. N. 8. С. 150–154. Совм. с А.Г. Барабашевым, М.И. Пановым.
 70. Обсуждение актуальных проблем развития математики // Вестник АН СССР. 1986. N. 8. С. 98–103. Совм. с А.Г. Барабашевым, М.И. Пановым.
 71. Adolph Pavlovich Yushkevich on the occasion of his eightieth birthday // *Historia mathematica*. 1986. V. 13. № 3 ю Р. 215–220. Совм. с И.Г. Башмаковой, А.Т. Григорьяном, А.Н. Колмогоровым, Ю.В. Прохоровым, Б.А. Розенфельдом.
 72. Адольф Павлович Юшкевич // Математика в школе. 1986. N. 4. С. 72–74. Совм. с И.Г. Башмаковой, Б.В. Гнеденко, А.Н. Паршиным, С.С. Петровой, Р.С. Черкасовым.
 73. The Third Summer Conference on the History of Mathematics, Odessa, USSR // *Historia mathematica*. 1986. V. 13. P. 177–179. Совм. с С.Н. Киро.
 74. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич (Ред.). Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. М.: Наука, 1987. С. 80–183.
 75. Naissance de l'école mathématique de Moscou // *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*. Nouv. série. № 20. 1987. P. 42–53.
 76. Юшкевич Адольф Павлович // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. Вып. 4. С. 211–212. Совм. с А.Д. Александровым, И.Г. Башмаковой, А.Н. Колмогоровым, Б.А. Розенфельдом.
 77. Об актуальных проблемах истории и философии математики (I Всесоюзный симпозиум по философско-методологическим проблемам математики и её истории) // Вопросы истории естествознания и техники. 1987. N. 1. С. 162–164. Совм. с А.Г. Барабашевым и М.И. Пановым.
 78. Regularities and modern tendencies of the development of mathematics // *Philosophia Mathematica*. 2nd ser. 1987. V. 1. N. 2. P. 32–47. Совм. с А.Г. Барабашевым и М.И. Пановым.
 79. Der philosophische Kontext der Herausbildung der Moskauer funktionentheoretischen Schule // *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwiss., Techn. und Medizin (NTM)*. 1988. Bd. 25. S. 25–31.
 80. On an Early History of the Moscow School of theory of functions // *Philosophia Mathematica*. 2nd. ser. 1988. V. 3. N. 1. P. 29–35.
 81. “Lex continui” de Leibniz et les fonctions discontinues dans les mathématiques des XVIII–XX siècles // *Leibniz, Tradition und Aktualität: 5. Internationaler Leibniz-Kongreß <5, 1988, Hannover>. Vorträge. Hannover. 1988. S. 1058–1059.*
 82. О работе Д. Гильберта “Аксиоматическое мышление” / Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988. С. 104–107.
 83. Boris A. Rozenfeld: On the 70th anniversary of his birth // *Historia Mathematica*. 1988. V. 15. N. 1. P. 1–8. Совм. с А.Д. Александровым, А.Т. Григорьяном, Г.П. Матвиевской, С.Х. Сираждиновым, А.П. Юшкевичем.
 84. Адольф Павлович Юшкевич. К 80-летию со дня рождения // *Kexueshiyicong*. 1988. N. 1. Совм. с И.Г. Башмаковой, А.Т. Григорьяном, А.Н. Колмогоровым, Ю.В. Прохоровым, Б.А. Розенфельдом. Китайск. язык.
 85. О переписке Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 116–124. Совм. с А.Н. Паршиным, С.М. Половинкиным.

86. Публикация переписки Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским и комментарии к ним // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 125–190. Совм. с А.Н. Паршиным, С.М. Половинкиным, П.В. Флоренским.
87. La loi de la continuité de Leibniz et les fonctions continues dans les mathématiques des XVIII–XIX siècles // Leibniz, Tradition und Aktualität : 5. Internationaler Leibniz-Kongreß <5, 1988, Hannover>. Vorträge. Hannover. 2. Teil (1989). S. 155–159.
88. D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles. / Jean D'Alembert: savant et philosophe: portrait à plusieurs voix. Actes du Colloque organisé par le Centre International de Synthèse les 15-18 juin 1983. Paris: Ed. des Archives Contemporaines, 1989. P. 335–350.
89. Развитие математики: основные закономерности и тенденции (обзор работы 2-го Всесоюзного Симпозиума по философско-методологическим вопросам математики и её истории) / Методологический анализ закономерностей развития математики. М., 1989. С. 6–30. Совм. с А.Г. Барабашевым и М.И. Пановым.
90. “Закон непрерывности” Г.В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера // Историко-математические исследования. 1990. Вып. 32–33. С. 34–38.
91. Публикация и примечания к работе: П.А. Флоренский. Черновик выступления на открытии студенческого математического кружка при Московском Математическом Обществе // Историко-математические исследования. 1990. Вып. 32–33. С. 467–473. Совм. с С.М. Половинкиным, П.В. Флоренским.
92. Выступление на круглом столе “П.А. Флоренский глазами наших современников” // Вопросы истории естествознания и техники. 1990. N. 3. С. 150–152.
93. Международный компьютерный каталог средневековых естественнонаучных манускриптов // Вопросы истории естествознания и техники. 1991. N. 4. С. 74–76. Совм. с Е.А. Зайцевым, Р.А. Симоновым.
94. Философские предпосылки возникновения Московской школы теории функций / Традиции и революции в истории науки. Отв. ред. П.П. Гайдено. М.: Наука, 1991. С. 253–262.
95. Изабелла Григорьевна Башмакова. К 70-летию со дня рождения // Математика в школе. 1991. N. 2. С. 71. Совм. с Б.В. Гнеденко, С.С. Петровой, А.П. Юшкевичем.
96. Isabella Grigoryevna Bashmakova on the 70th anniversary of her birth // Historia Mathematica. 1991. V. 18. P. 209–211. Совм. с С.С. Петровой, А.П. Юшкевичем.
97. La théorie des équations différentielles à la limite des XVIIIe–XIXe siècles // Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag / S.S. Demidov, M. Folkerts, D. Rowe, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1992. S. 157–169.
98. Introduction. Symposium “Historiographie et Histoire des Mathématiques” (18e Congrès international d'histoire des sciences / Hambourg-Munich, 1-9 août 1989) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 1992. V. 42. N. 128. P. 5–9. Совм. с М. Folkerts.
99. Historiographie des mathématiques en Russie et en URSS avant 1941 // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 1992. V. 42. N. 128. P. 94–113.
100. Публикация, предисловие и комментарий к письмам А.В. Васильева Г. Миттаг-Леффлеру // Вопросы истории естествознания и техники. 1992. N. 4. С. 48–61. Совм. с Т.А. Токаревой.
101. Über die Mathematik in Werk P.A. Florenskijs // P.A. Florenskij und die Kultur seiner Zeit / M. Hagemester, N. Kauchtschischwili (Eds.). Marburg, 1992. S. 171–183.
102. Компьютерные базы данных об отечественных учёных в области физико-математических наук // Вопросы истории естествознания и техники. 1993. N. 1. С. 105–107. Совм. с О.В. Ивановым и Г.С. Смирновой.
103. Математик, историк математики и просто человек Жан Дьедонне // Вопросы истории естествознания и техники. 1993. N. 3. С. 107–112. Совм. с А.П. Юшкевичем.
104. Теория дифференциальных уравнений на рубеже XVIII–XIX веков // Историко-математические исследования. 1993. Вып. 34. С. 46–57.
105. La revue “Matemathicheskii Sbornik” dans les années 1866–1935 // Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800–1946) / E. Ausejo, M. Hormigon (Eds.). Zaragoza, 1993. P. 235–256.

106. Formation of mathematical schools in the 19th and 20th centuries // XIXth International Congress of History of Science. Zaragoza (Spain) 22–29 August 1993. Symposia Survey. Papers – Plenary Lectures / J. Dhombres, M. Hormigon, E. Ausejo (Eds.). Zaragoza, 1993. P. 79–93.
107. Russian Mathematical Schools of the 19th – First Third of the 20th Century // XIXth International Congress of History of Science. Zaragoza (Spain) 22–29 August 1993. Book of Abstracts. Symposia (12. 7) / J. Dhombres, M. Hormigon, E. Ausejo (Eds.). Zaragoza, 1993.
108. The Moscow School of the Theory of Functions in the 1930's // Golden Years of Moscow Mathematics / History of Mathematics. P.L. Duren, S. Zdravkovska (Eds.) AMS, LMS: Providence, Rhode Island. 1993. V. 6. P. 35–53.
109. The Birth of the Soviet Mathematical School // Abstracts of Papers Presented to the American Math. Society. 1994. V. 15. P. 12.
110. Презентизм и антиквариизм в историко-математическом исследовании // Вопросы истории естествознания и техники. 1994. N. 3. С. 3–12.
111. Комментарий к работе П.А. Флоренского “Об одной предпосылке мировоззрения” // П.А. Флоренский. Сочинения. Т. 1. М.: Мысль, 1994. С. 707–708. Совм. с А.Н. Паршиным.
112. Комментарий к работе П.А. Флоренского “О символах бесконечности” // П.А. Флоренский. Сочинения. Т. 1. М.: Мысль, 1994. С. 708–714. Совм. с А.Н. Паршиным.
113. D.F. Egorov and mathematics in Moscow (1917–1931) // Algorismus. Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften. 1994. Heft 13. S. 333–346.
114. Адольф-Андрей Павлович Юшкевич // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 4. С. 75–76. Совм. с И.Г. Башмаковой, Б.В. Гнеденко, Н.С. Ермолаевой, Н.М. Коробовым, Ю.В. Прохоровым, А.Д. Соловьёвым и В.М. Тихомировым.
115. Zum Gedenken an Adol'f Pavlovich Jushkevich // NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin. 1994. 2 (1). S. 250–252. Совм. с Annette Vogt.
116. Adolph Andrei Pavlovich Yushkevich (1906–1993) // Historia Mathematica. 1995. V. 22. N. 2. P. 113–118. Совм. с И.Г. Башмаковой, А.Н. Боголюбовым, Б.В. Гнеденко, Г.П. Матвиевской, Б.А. Розенфельдом, В.М. Тихомировым, О.Б. Шейниным, Э. Кноблом, Д.Э. Роу.
117. Публикация и примечания к письму И.Ю. Крачковского А.П. Юшкевичу // Историко-математические исследования. 1995. 2-я серия. Вып. 1(36). N. 1. С. 25–26.
118. Публикация и примечания к письму В.В. Степанова А.П. Юшкевичу // Историко-математические исследования. 1995. 2-я серия. Вып. 1(36). N. 1. С. 26–27.
119. Публикация и примечания к письму Г.Ф. Рыбкина А.П. Юшкевичу // Историко-математические исследования. 1995. 2-я серия. Вып. 1(36). N. 1. С. 27–39.
120. “Математический сборник” в 1866–1935 гг. // Историко-математические исследования. 1995. 2-я серия. Вып. 1(36). N. 2. С. 127–145.
121. Адольф-Андрей Павлович Юшкевич / Юшкевич А.П. Математика в ее истории. Сборник под ред. С.С. Демидова. М.: Янус-К, 1996. С. 6–10.
122. Where is the meeting place of philosophical influence on mathematics? An exemple taken from the history of mathematics in Russia // Paradigms and Mathematics. Zaragoza, 1996. P. 283–287.
123. N.N. Luzin and the Affair of the “National Fascist Center” // History of Mathematics: States of the Art / J.W. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch, H. Wussing (Eds.). San Diego, Boston, New York, London, Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press. 1996. P. 137–148. Совм. с Ch. Ford.
124. К 100-летию со дня рождения П.С. Александрова // Вопросы истории естествознания и техники. 1996. N. 1. С. 85.
125. Жажда ясности // Вопросы истории естествознания и техники. 1996. N. 4. С. 108–119. Совм. с И.Г. Башмаковой и В.А. Успенским.

126. Софья Александровна Яновская // *Modern Logic*. 1996. V. 6. N. 4. P. 357–372. Совм. с И.Г. Башмаковой и В.А. Успенским.
127. Имени Лобачевского // *Квант*. 1996. С. 27. Совм. с М.И. Монастырским и В.М. Тихомировым.
128. До и после Лузитании // *Природа*. 1997. С. 98–110.
129. L'histoire des mathématiques en Russie et en URSS comme histoire des écoles // Историко-математические исследования. 1997. 2-я серия. Спец. вып. М.: Янус-К. С. 9–21.
130. “Но эта Ваша идея . . . универсального масштаба и ценности чрезвычайной!” (к предистории нестандартного анализа) // Историко-математические исследования. 1997. 2-я серия. Вып. 2(37). М.: Янус-К. С. 128–132.
131. Два письма Н.Н. Лузина М.Я. Выгодскому. Публикация и примечания // Историко-математические исследования. 1997. 2-я серия. Вып. 2(37). М.: Янус-К. С. 133–152. Совм. с В.А. Волковым.
132. О статье И.Б. Погребысского “К истории качественных методов в теории дифференциальных уравнений” // Историко-математические исследования. 1997. 2-я серия. Вып. 2(37). М.: Янус-К. С. 281–282.
133. Таким мы его помним . . . (80 лет со дня рождения Г.Е. Шилова: размышления над старыми фотографиями) // Вопросы истории естествознания и техники. 1997. N. 4. С. 115–124. Совм. с В.М. Тихомировым.
134. Москва математическая / Москва научная. Под ред. В.М. Орла. М.: Янус-К, 1997. С. 136–160.
135. О письме Н.Н. Лузина в ЦК ВКП(б) // Историко-математические исследования. 1997. 2-я серия. Вып. 3(38). М.: Янус-К. С. 119–128. Совм. с Т.А. Токаревой.
136. Математические проблемы / Д. Гильберт. Избранные труды. Под ред. А.Н. Паршина. Т. 2. М.: Факториал, 1998. С. 580–591. Совм. с А.Н. Паршиным.
137. Примечания 1–4, 7–20, 23 к докладу Гильберта “Математические проблемы” / Д. Гильберт. Избранные труды. Под ред. А.Н. Паршина. Т. 2. М.: Факториал, 1998. С. 580–591, 593–596.
138. Russian Mathematicians in Berlin in the Second Half of the 19th Century / Workshop “Berlin as a Centre of Mathematical Activity” (Berlin, 22nd August 1998) / International Congress of Mathematicians. Program. Berlin. 1998. P. 158.
139. Leonhard Euler / La science classique (XVIe–XVIIIe siècle): dictionnaire critique. Sous la direction de M. Blay et de R. Halleux. Louvain: Société Philosophique de Louvain, 1998. P. 245–251.
140. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имяславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. 1999. 2-я серия. Вып. 4(39). С. 123–155.
141. “Дело академика Н.Н. Лузина” в свете сталинской реформы советской науки // Историко-математические исследования. 1999. 2-я серия. Вып. 4(39). С. 156–170. Совм. с В.Д. Есаковым.
142. “Дело академика Н.Н. Лузина” в свете сталинской реформы советской науки // Дело академика Н.Н. Лузина. СПб: Изд. РХГИ, 1999. С. 7–44. Совм. с В.Д. Есаковым.
143. Математические проблемы Гильберта и математика XX столетия // IV International Symposium Galdeano. Zaragoza. En el centenario de los Grundlagen de Hilbert. Zaragoza, 23–26 June 1999. P. 13.
144. “Мы не должны ждать милостей от природы” // *Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum*. 1999. New Series. V. 3. Prague. P. 47–60.
145. Математика в Российской академии наук со времени ее основания до конца 30-х гг. XX столетия // Российская Академия Наук. 275 лет служения России. М.: Янус-К, 1999. С. 371–393.
146. Публикация текста П.А. Флоренского “Понятие формы” // Священник Павел Флоренский. Сочинения в четырех томах. Т. 3(1). М.: Мысль, 1999. С. 453–503. Совм. с игуменом Андроником (А.С. Трубачевым), А.Н. Паршиным и С.М. Половинкиным.
147. Примечания к публикации текста П.А. Флоренского “Понятие формы” // Священник Павел Флоренский. Сочинения в четырех томах. Т. 3(1). М.: Мысль, 1999. С. 599–613. Совм. с А.Н. Паршиным.

148. On the Progress of Mathematics / Grosholz E., Breger H. (Eds.) The Growth of Mathematical Knowledge. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers. 2000. P. 377–386.
149. Introduction to “Two Letters by N.N. Luzin to M.Ya. Vygodskii” // A. Shenitzer, J. Stillwell (Eds.) Mathematical Evolutions. Washington: The Mathematical Association of America. 2000. P. 35–38.
150. Об историко-математических работах Р.А. Симонова // Гербовник. Издаваемый Русской Геральдической Коллегией. Москва. 2000. С. 99–100.
151. “Математические проблемы” Д. Гильберта и математика XX века / Математика и практика. Математика и культура. Отв. ред. В.Н. Чубариков. М. 2000. С. 12–26.
152. Русские математики в Берлине во второй половине XIX–начале XX века // Историко-математические исследования. 2000. Вып. 5(40). Москва: Янус-К. С. 71–82.
153. Историография истории математики в России и в СССР // Принципы историографии естествознания: XX век. Отв. ред. И.С. Тимофеев. СПб: Алетейя. 2001. С. 254–279.
154. Контroversa “Реализм-Конструктивизм” и вопрос о прогрессе математики // Проблема знания в истории науки и культуры. Отв. ред. Е.Н. Молодцова. СПб: Алетейя. 2001. С. 142–154.
155. Эпизод из истории советской математики // Вопросы Истории Естествознания и Техники. 2001. N. 2. С. 122–126.
156. “Математические проблемы” Д. Гильберта и математика XX века // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2001. Вып. 6 (41). С. 64–100.
157. La formation de la communauté mathématique internationale (la deuxième moitié du XIXème–le XXème siècles) // XXI Intern. Congress of History of Science. Mexico City 8–14 July 2001. Book of Abstracts. V. 1. Symposia. Mexico City. 2001. P. 276–277.
158. La théorie des équations aux dérivées partielles au XVIIIème siècle // Intern. Meeting on the History of Differential Equations. Lisbon, 28–30 June 2001. Lisbon. 2001. P. 2.
159. Изабелла Григорьевна Башмакова (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 2001. Т. 56. Вып. 4 (340). С. 169–172. Совм. с А.Н. Паршиным, С.С. Петровой, К.А. Рыбниковым, Г.С. Смирновой, В.М. Тихомировым, И.Р. Шафаревичем.
160. Isabella Grigoryevna Bashmakova on the Eightieth Anniversary of Her Birth // Historia Mathematica. V. 29, N. 4, November, 2002. P. 370–382. Совм. с А.Н. Паршиным, С.С. Петровой, Г.С. Смирновой, В.М. Тихомировым, И.Р. Шафаревичем и Я. Вандулакисом.
161. Феномен непрерывности функции от Г.В. Лейбница до П.А. Флоренского // Нариси з історії математики і математичного природознавства – Праці Інституту математики НАН України. Т. 39. Киев. 2001. С. 21–30.
162. A.P. Youshkevitch et l’histoire des mathématiques en Russie // Knobloch E., Mawhin J., Demidov S. (Eds.) Studies in History of Mathematics dedicated to A.P. Youshkevitch – Proceedings of the XXth Intern. Congress of History of Science. Turnhout: Brepols. 2002. P. 33–42.
163. Предисловие // Урбанский В.М. Михаил Филиппович Кравчук. Сер. Научно-биографическая литература РАН. М.: Наука. 2002. С. 5–6.
164. Russia and the USSR // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 179–197.
165. Vygodskii Mark Yakovlevich // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 559–560.
166. Youshkevich Adolf-Andrei Pavlovich // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 571–574.
167. Bobynin Viktor Viktorovich // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 367–368.
168. Medvedev Fedor Andreevich // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 482–483.

169. Timchenko Ivan Yurievitch // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 541–542.
170. Биографические справки: Depman Ivan Yakovlevich, Gnedenko Boris Vladimirovich, Kagan Veniamin Fiodorovich, Kary-Niyazov Tashmukhammed, Kolmogorov Andrei Nikolaevich, Krylov Aleksei Nikolaevich, Lurie (Luria) Solomon Yakovlevich, Lyusternik Lazar Aronovich, Maistrov Leonid Efimovich, Markushevich Aleksei Ivanovich, Mordukhai-Boltovskoi Dmitrii Dmitrievich, Ozhigova Elena Petrovna, Paplauskas Algirdas Boleslavovich, Pogrebysskii Iosif Benediktovich, Simonov Nikolai Ivanovich, Smirnov Vladimir Ivanovich, Sologub Vladimir Stepanovich, Struve Vasilii Vasil'evich, Vasiliev Aleksandr Vasilievich, Vashchenko-Zakharchenko Mikhail Egorovich, Veselovskii Ivan Nikolaevich, Yanovskaya Sof'ya Aleksandrovna, Zubov Vassilii Pavlovich // Writing the history of mathematics: its historical development / J.W. Dauben, Ch.J. Scriba (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2002. P. 408, 437–438, 454, 455, 462, 475, 476, 478–479, 492–493, 500, 500, 503, 523, 525–526, 532, 552, 552, 553, 553, 570, 578.
171. Несколько вводных замечаний об истории математики // Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки. История математики. М.: Янус-К. 2003. С. 4–6.
172. Программа-минимум кандидатского экзамена по истории и философии науки (история математики) // Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки. История математики. М.: Янус-К. 2003. С. 7–13. Совм. с А.Г. Барабашевым, С.С. Петровой.
173. А.Н. Колмогоров – историк математики // Вопросы истории естествознания и техники. 2003. N. 3. С. 88–94.
174. Из истории математического общества // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов. Вторая Международная конференция. Посвящена 80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. М.: Физматлит. 2003. С. 390–391. Совм. с Т.А. Токаревой.
175. Московское математическое общество: фрагменты истории // Историко-математические исследования. 2003. Вып. 8(43). Москва: Янус-К. С. 27–48. Совм. с Т.А. Токаревой.
176. “Дело академика Н.Н. Лузина” как историко-научная проблема // История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания. Труды V Всероссийской Школы по истории математики. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 2003. С. 143–161.
177. Математика в опыте историко-математических исследований последних десятилетий // Математика и опыт. Под ред. А.Г. Барабашева. М.: Изд-во Московского университета. 2003. С. 6–12.
178. Nikolai Dmitrievich Brashman (1796–1866) and the development of mathematics in Russia // Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum. New Series. V. 7. Prague. 2003. P. 63–72.
179. The Moscow mathematical society. Part 1 // European Mathematical Society. Newsletter. 2003. Issue 50. P. 17–19. With V.M. Tikhomirov and T.A. Tokareva.
180. Развитие математики в Московском университете с 1755 г. по 1932 г. // Математика в Московском университете на пороге XXI века. Часть 1. М.: Изд-во Прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. 2003. С. 3–14. Совм. с О.Б. Лупановым и К.А. Рыбниковым.
181. Кабинет истории и методологии математики и механики // Математика в Московском университете на пороге XXI века. Часть 3. М.: Изд-во Прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. 2003. С. 93–100. Совм. с К.А. Рыбниковым.
182. Prince Albertus Dalmatskii and the first Russian manuscript of XVIIth century on theoretical geometry // VIII. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Wien. 2004. S. 212–219. With R.A. Simonov.
183. The Moscow mathematical society. Part 2 // European Mathematical Society. Newsletter. 2004. Issue 51. P. 25–27. With V.M. Tikhomirov and T.A. Tokareva.
184. Роль Московского математического общества в развитии отечественной математики // Вестник Российского гуманитарного научного фонда. 2004. N.1 (34). С. 124–132. Совм. с Т.А. Токаревой.
185. The Moscow Mathematical Society: one of the oldest mathematical society in Europe // VII. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Wien. 2004. S. 28–34.

-
186. Лев Абрамович Тумаркин // Математики и механики – ректоры Московского университета и деканы механико-математического факультета МГУ. К 250-летию Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Под ред. В.Н. Чубарикова. Москва: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. 2004. С. 81–82.
187. Математика в российской школе в исторической перспективе // Вторая международная конференция “Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство” . 22–27 августа 2004. Татранска Ломница. Словакия. 2004. Москва: Изд-во РУДН. С. 28–44. Совм. с С.С. Петровой.
188. Рецензия А.Н. Паршин. Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет. 2002 // Вопросы философии. 2004. N. 7. С. 183–185.
189. On the Road to a Unified World View: Priest Pavel Florensky – Theologian, Philosopher and Scientist // T. Koetsier, L. Bergmans (Eds.) Mathematics and the Divine: Historical Study. Amsterdam: Elsevier B.V. 2005. P. 595–612. (With Ch. Ford).
190. Mathematical Societies in the Development of Mathematics in XIXth–XXth centuries // XXII International Congress of History of Science. Beijing 24–30 July 2005. Book of Abstracts. Beijing. 2005. P. 96.
191. La Scuola Matematica di Mosca // Storia della Scienza. V. VIII. Istituto della Enciclopedia Italiana. Roma. 2005. P. 245–251.
192. Памяти Константина Алексеевича Рыбникова (1913–2004) // Вестник Московского Университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. N. 4. С. 67–69. Совм. с В.А. Садовничим, А.В. Михалевым, О.Б. Лупановым, В.Н. Чубариковым, И.Г. Башмаковой, А.В. Дорофеевой, А.К. Рыбниковым, В.М. Тихомировым, И.А. Тюлиной, В.С. Латышевым.
193. Предисловие ко второму изданию // Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. Издание второе, исправленное и дополненное. Москва: УРСС. 2005. С. 1–7.
194. Комментарии // Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. Издание второе, исправленное и дополненное. Москва: УРСС. 2005. С. 246–291.
195. Страница жизни Бориса Владимировича Гнеденко – историографа математики (постскрипtum к выходу второго издания книги “ Очерки по истории математики в России”) // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 10(45). М.: Янус-К. 2005. С. 126–142. Совм. с В.С. Королюком и Д.Б. Гнеденко.
196. Формирование советской математической школы // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 10 (45). М.: Янус-К. 2005. С. 142–159. Совм. с Т.А. Токаревой.
197. Как складывалась Советская математическая школа // История науки и техники. N. 11. 2005. С. 37–48. Совм. с Т.А. Токаревой.
198. Рождение Советской математической школы // Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 2005. С. 22–35.
199. In memoriam Isabella Grigoryevna Bashmakova // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 2005. V. 55. N. 155. P. 499–501. Совм. с А.Н. Паршиным, И.Р. Шафаревичем, С.С. Петровой, Г.С. Смирновой, В.М. Тихомировым, И.М. Вандулакисом.
200. “ Когда я был еще мальчиком ... хотел стать философом ... ” (к 100-летию со дня рождения А.П. Юшкевича) // Вопросы истории естествознания и техники. 2006. N. 3. С. 3–40. Совм. с Т.А. Токаревой.
201. Некоторые замечания к статье Л. Грэхема и Ж.-М. Кантора // Вопросы истории естествознания и техники. 2006. N. 3. С. 79–85. Совм. с протоиреем А. Геронимусом и А.Н. Паршиным.
202. Российская математика в контексте противостояния двух столиц // International conference “Education, science and economics at universities. Integration to international educational area” August 22–27, 2006. Plock, Poland. Plock: Novum. 2006. P. 15–22.
203. Повесть о двух городах // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 2006. С. 9–21.

204. Адольф Павлович Юшкевич (1906–1993) и формирование сообщества историков математики в СССР // Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики. Международная научная конференция. 6-я Всероссийская школа по истории математики. Тамбов, 11–15 сентября 2006 г. Тамбов: Изд-во Р.В. Першина. 2006. С. 9–24. Совм. с Т.А. Токаревой.
205. Адольф Павлович Юшкевич и советская историко-математическая школа // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2006. Вып. 11(46). С. 48–84. Совм. с Т.А. Токаревой.
206. Публикация (с предисловием и примечаниями) статьи А.П. Юшкевича “Годы учения” // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2006. Вып. 11(46). С. 9–48. Совм. с Т.А. Токаревой.
207. 70 лет журналу “Успехи математических наук” // Успехи математических наук. 2006. Т. 61. Вып. 4 (370). С. 203–207.
208. Rosenfeld Boris Abramovich (to his 90th anniversary) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. V. 57. N. 158. 2007. P. 178–183.
209. Леонард Эйлер и проблема колебания струны // Леонард Эйлер и современная наука. Материалы Международной научной конференции. Санкт-Петербург. 2007. С. 103–105.
210. Князь Альбертус Долмацкий и первая рукопись по теоретической геометрии на русском языке // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2007. Вып. 12(47). С. 50–55. Совм. с Р.А. Симоновым.
211. San Pietroburgo e Mosca, due capitoli // Bartocci C., Odifreddi P. (Ed.) La matematica. V. 1. Giulio Einaudi editore. Torino. 2007. P. 603–623.
212. Рождение советской математической школы // Наука и техника в первые десятилетия советской власти: социокультурное измерение (1917–1940). Под ред. Е.Б. Музруковой. М.: Academia. 2007. С. 347–375. Совм. с Т.А. Токаревой.
213. Беззаветное служение науке. К 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова // Вестник РАН. Т. 77. N. 8. 2007. С. 724–731. Совм. с В.В. Козловым.
214. Isabella Grigoryevna Bashmakova (1921–2005) // Historia Mathematica. V. 34, N. 2. May, 2007. P. 137–139. Совм. с И. Вандулакисом.
215. Сказка о двух городах // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования. Тезисы докладов Третьей международной конференции, посвященной 85-летию члена-корреспондента РАН профессора Л.Д. Кудрявцева. М.: Изд-во МФТИ. 2008. С. 56–72.
216. VI Всероссийская школа по истории математики // Вопросы истории естествознания и техники. 2008. N. 1. С. 204–207. Совм. с А.А. Артемовым и С.В. Кольцовой.
217. Новые тенденции в философии и историографии математики // Историография естествознания на рубеже нового тысячелетия. Отв. ред. И.С. Тимофеев. СПб: Изд-во Русской христианской гуманитарной академии. 2008. С. 368–405.
218. Prince Albertus Dalmatskii and the first Russian manuscript of XVIIth Century on theoretical geometry // Acta Historica Leopoldina. 2008. N. 54. P. 451–456. Совм. с Р.А. Симоновым.
219. Mathematics and physical reality in the discussion of the vibrating string in the XVIIIth century // IX. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik. Wien. 2008. S. 113–119.
220. Andrei Nikolaevich Kolmogorov, historien des mathématiques // Radelet-de Grave P. (Ed.) Liber amicorum. Jean Dhombres. Brepols: Louvain-la-Neuve. 2008. P. 101–110.
221. D'Alembert et la notion de solution des équations différentielles aux dérivées partielles // Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche. N. 2. 2008. P. 155–166.
222. Адольф Павлович Юшкевич (1906–1993) и формирование сообщества историков математики в СССР // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 2008. V. 58. N. 160-161. P. 15–32. Совм. с Т.А. Токаревой.
223. Adolf-Andrei Pavlovich Youshkevich (Odessa 15 juillet 1906 – Moscou 17 juillet 1993) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 2008. V. 58. N. 160–161. P. 7. Avec R. Rashed.

-
224. Vladimir Semyonovich Kirsanov (1936–2007) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 2008. V. 58. 423–428. Avec D. Bayuk, J. Canales, Ch. Ford, L. Graham, E. Knobloch, V. Kritzman, A. Postnikov, S. Schmalzer, I. Schneider, E. Zheltova, Vl. Vizgin.
225. Леонард Эйлер и проблема колебания струны // Леонард Эйлер: к 300-летию со дня рождения. СПб: Нестор-История. 2008. С. 50–56.
226. Professor Boris A. Rosenfeld (30th August 1917–5th April 2008) // SUHAYL (Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation). Publicacions i Edicions. Universitat de Barcelona. V. 7. Barcelona 2008. P. 165–174.
227. Avertissement au lecteur de l'article d'Andrei Kolmogorov paru dans "Les Nouvelles de Moscou", le 17 février 1960 // Revue d'histoire des sciences. 2008. T. 61. N. 1. P. 136.
228. Pontryagin Lev Semionovich / Noretta Kortege (Ed.) New Dictionary of Scientific Biography. V. 6. Gale, Cengage Learning: Detroit, ..., London. 2008. P. 127–129.
229. Vinogradov Ivan Matveevich / Noretta Kortege (Ed.) New Dictionary of Scientific Biography. V. 7. Gale, Cengage Learning: Detroit, ..., London. 2008. P. 155–157.
230. Леонард Эйлер о развитии математики и математического образования в России // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 13 (48). М., Янус. 2009. Вып. 13(48). С. 29–37.
231. L'influence de Leonhard Euler sur les premiers manuels mathématiques de l'Empire Russe // Brizzi G.P., Tavoni M.G. (Ed.) Dalla pecia all'e-book. Libri per l'Università: stampa, editoria, circolazione e lettura. Atti del Convegno internazionale di studi. Bologna, 21–25 ottobre 2008. Bologna, CLUEB. 2009. P. 455–464.
232. Saint-Pétersbourg et Moscou, deux capitales // Bartocci C., Odifreddi P. (Ed.) La mathématique. T. 1: Les lieux et les temps. Paris, CNRS Editions. 2009. P. 683–703.
233. Les relations mathématiques franco-russes entre les deux guerres Mondiales // Revue d'histoire des sciences. 2009. T. 61. N. 1. P. 119–135.
234. Эйлер и русская учебная литература по математике // Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования. М., Изд-во РУДН. 2009. С. 65–77.
235. Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // Труды VII Колмогоровских чтений. Ярославль. 2009. С. 30–45.
236. Слово о Володе Кирсанове // Исследования по истории физики и механики. 2008. М., Физматлит. 2009. С. 358–364.
237. Peano et la communauté mathématique russe au premier tiers du XX-e Siècle // Roero S.C. (Ed.) Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso internazionale di studi (Torino, 6–7 ottobre 2008). Università di Torino. Centro di studi per la storia dell'università. Studi e fonti. XVII. Torino: Deputazione Subalpina di Storia Patria. 2010. P. 215–240.
238. Петровский Иван Георгиевич // Учёные Академии наук (1920-е–1950-е гг.). Коллекция фотопортретов М.С. Напелбаума. М., ИИЕТ РАН. 2010. С. 355–361.
239. Соболев Сергей Львович // Учёные Академии наук (1920-е–1950-е гг.). Коллекция фотопортретов М.С. Напелбаума. М., ИИЕТ РАН. 2010. С. 413–419.
240. Circolo matematico di Palermo и формирование международного математического Сообщества в конце XIX–первой трети XX века // Труды VIII Колмогоровских чтений. Ярославль. 2010. С. 41–50.
241. The role of religious and philosophical factors on the life of Russian mathematical community at the end of the XIXth–the first quarter of the XXth century // X. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik. Wien. 2010. S. 233–247.
242. Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 14 (49). М., Янус-К. 2011. С. 25–39.
243. Leonhard Euler and the development of mathematics and mathematical education in Russia // V Encontro Luso-Brasileiro de historia da matematica. 8 a 9 de outubro de 2007. Lisbonne. 2011. P. 5–14.

244. Памяти Владимира Семёновича Кирсанова // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. 2011. Годичная научная конференция, 2011. М., 2011. С. 26–31.
245. Советская математика и Запад на пороге Второй мировой войны // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. 2011. Годичная научная конференция, 2011. М., 2011. С. 325–328.
246. Профессор Московского университета Дмитрий Фёдорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия // Семинар. Русская философия (традиция и современность). 2004–2009. М., Русский путь. 2011. С. 390–430.
247. Приложение. Письма Д.Ф. Егорова П.А. Флоренскому. Публикация С.С. Демидова. // Семинар. Русская философия (традиция и современность). 2004–2009. М., Русский путь. 2011. 431–432.
248. Учитель в профессии и в жизни // Природа. 2012. N. 3. С. 57–59.
249. Заседание секции математики Центрального дома учёных РАН, посвящённое 90-летию со дня рождения И.Г. Башмаковой // Вопросы истории естествознания и техники. 2012. N. 1. С. 195–198.
250. Памяти Ганса Вуссинга (1927–2011) // Вопросы истории естествознания и техники. 2012. N. 1. С. 213–214. Совм.с В.П. Визгиным, А.И. Володарским и С.С. Петровой.
251. Italy and Russia in the second half of the 19th – the early 20th century // Europa matematica e Risorgimento italiano. Bologna. CLUEB. 2013. P. 59–66
252. The Problem of a Vibrating Chord in the History of Mathematical Analysis // Progress in Analysis. Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation. V. 3. Moscow, 2012. P. 39–47.
253. Geometric sources of the Moscow school of theory of functions: from C.F. Gauss to D.F. Egorov and N.N. Luzin // XI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik. Wien. 2012. S. 9–19.
254. Предисловие / Синкевич Г.И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. Санкт-Петербург, 2012. С. 3–4.
255. Рецензия на книгу: Domoradzki S. The Growth of Mathematical Culture in the Lvov Area in the Autonomy Period (1870–1920) // Вопросы истории естествознания и техники. 2013. № 1. С. 179–182.
256. О роли мировоззренческих факторов в развитии математического знания. Об одном замечании Р. Татона // Вопросы истории естествознания и техники. 2013. N. 1. С. 3–14.
257. La naissance de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg : Le projet russe et sa contribution au développement de la science // Archives internationales d'Histoire des sciences. 2012. V. 62. N. 169. P. 669–677.
258. Des parenthèses de Poisson aux algèbres de Lie // Les mathématiques au service de la science. 2013. P. 113–132.
259. Международная конференция “ Арифметика как геометрия: Паршин Фест” // Вопросы истории естествознания и техники. 2013. N. 4. С. 157–160. Совм. с Дубовицкой М.А.
260. The origins of the Moscow school of the theory of functions // Technical Transactions. Fundamental Sciences. Issue 1–NP/2014 (7). (111). Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. 2014. P. 73–84.
261. Жизнь и судьба Николая Владимировича Ефимова, математика, декана, человека / Вспоминаем Николая Владимировича Ефимова. Составители – В.М. Тихомиров, И.Х. Сабитов. М., 2014. С. 9–24.
262. Константин Алексеевич Рыбников (1913–2004) // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2014. N. 4. С. 69–71. Совм. с Чубариковым В.Н., Рыбниковым А.К.
263. Константин Алексеевич Рыбников. Творческий путь (18.08. 1913–20.08. 2004) // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, N. 4. С. 148–179. Совм. с Ласковой Т.А., Рыбниковым А.К., Рыбниковым К.К.
264. Рисорджименто и формирование итальянского и международного математического сообщества // Историко-математические исследования. М., 2014. Т. 15. С. 157–172.
265. The Moscow Mathematical Society in the development of mathematics in Russia (on its 150th anniversary) // Russian Mathematical Surveys. 2015. V. 70. N. 1. P. 179–196. With Tikhomirov V.M., Tokareva T.A.

-
266. The general theory of partial differential equations in the XIXth-XXth cent.: the dialectic of its conceptual development. // XII. Österreichisches Symposium zu Geschichte der Mathematik. 2015. P. 213–221.
267. World War I and mathematics in “The Russian World” // Technical Transactions. Fundamental Sciences. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. 2015. V. 112. N. 2(19). P. 77–92.
268. Vladimir Steklov: A Mathematician at the Turn of the Era // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. V. 289. P. 10–22.
269. Владимир Стеклов: математик на рубеже двух эпох // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. М., 2015. Т. 289. С. 1–14.
270. Марк Яковлевич Выгодский – математик, историк математики и педагог (к 50-летию со дня смерти) // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, N. 4. С. 319–346. Совм. с Петровой С.С., Токаревой Т.А.
271. In memory of Mariam Mikhaylovna Rozhanskaya // Semianual Journal on the Scientific Heritage of Islam and Iran. 2015. V. 3. N. 2. P. 185–189. With Luther I.O.
272. Московское математическое общество в жизни отечественного математического сообщества (к 150-летию Московского математического общества) // Труды XII международных Колмогоровских чтений. 2015. С. 19–26. Совм. с Токаревой Т.А.
273. Московское математическое общество в развитии отечественной математики (к 150-летию основания) // Успехи математических наук. М., 2015. Т. 70, N. 1(421). С. 189–203. Совм. с Тихомировым В.М., Токаревой Т.А.
274. Общая теория дифференциальных уравнений с частными производными в 19–20 столетиях: диалектика концептуального развития // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. М., 2015. С. 342–347.
275. Первая мировая война и математика в “русском мире” // Труды Международной научной конференции “Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство. Горис. 28 сентября – 2 октября 2015”. Т. 1. С. 25–40.
276. 150 лет на службе российской науке // Математический сборник. М., 2016. Т. 207, N. 10. С. 1–25. Совм. с Петровой С.С., Токаревой Т.А.
277. Introduction / The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. American Mathematical Society. History of Mathematics. 2016. V. 43. P. 1–2. With Loevshin B.V.
278. Preface to the English Translation / The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. American Mathematical Society. History of Mathematics. 2016. V. 43. P. XIII–XVII.
279. The Case of Academician Luzin in the Collective Memory of the Scientific Community / The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. American Mathematical Society. History of Mathematics. 2016. V. 43. P. 3–47. With Esakov V.D.
280. The Soviet Mathematical School / The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. American Mathematical Society. History of Mathematics. 2016. V. 43. P. XIX–XXIX.
281. Гузевич Д., Гузевич И. Габриэль Ламе в России, или один из ликов Януса / Научн. ред. В.Е. Павлов. СПб: Полторак. 2015. (Рецензия) // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2016. Т. 37, N. 3. С. 599–602.
282. К 150-летию Московского математического общества // Математическое просвещение. М., 2016. Т. 20. С. 5–17. Совм. с Петровой С.С., Тихомировым В.М., Токаревой Т.А.
283. Московское математическое общество и развитие математики в России (к 150-летию создания) // Труды Московского математического общества. М., 2016. Т. 77, N. 1. С. 1–29. Совм. с Тихомировым В.М., Токаревой Т.А.
284. Moscow Mathematical Society and the development of Russian mathematical community // Archives Internationales d'Histoire des Sciences. 2016. V. 66/2. N.177. P. 307–318. Совм. с С.С. Петровой, Т.А. Токаревой.

285. Novy Lubos (1929–2017) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences 2016, V. 66, Issue 177. P. 517–518. Совм. с Вл.П. Визгиным, С.С. Петровой, К. Фили.
286. Памяти Любоша Новы (13.XI.1929–6.I.2017) // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2017. Т. 38, № 3. С. 629–630. Совм. с Визгиным Вл.П., Петровой С.С.
287. Miriam Mikhailovna Rozhanskaya (1928–2014) // Archives Internationales d'Histoire des Sciences 2016, V. 66, Issue 177. P. 522–527. Совм. с Вл.П. Визгиным, Г.Е. Куртиком, И.О. Лютер, С.С. Петровой.
288. Бесконечность в богословии и математике: к дискуссии академика Н.Н. Лузина и отца Павла Флоренского // Православие и общество: грани взаимодействия. Материалы научно-практической конференции. М., 2017. С. 115–121.
289. Куда идёт российская наука? (Размышляя над книгой Ю.М. Батурина) // Вопросы философии. М., 2017. № 9. С. 523–531.
290. Математическая Москва в потоке советской истории // Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г. / под общ. ред. А.В. Лебедева. Москва, РУДН. 2017. С. 260–264. Совм. с Петровой С.С.
291. Matematicheskii Sbornik in the context of Russian history: a celebration of the 150th anniversary of its launch // Sbornik Mathematics. London Mathematical Society (United Kingdom), 2018. Т. 209. № 7. P. 178–196. Совм. с С.С. Петровой, Т.А. Токаревой.
292. “Математический сборник” в контексте отечественной истории: к 150-летию создания журнала // Математический сборник. М.: изд-во МИАН, 2018. Т. 209, № 7. С. 3–21. Совм. с С.С. Петровой, Т.А. Токаревой.
293. Николай Николаевич Лузин и отец Павел Флоренский в размышлениях о бесконечности // Вопросы истории естествознания и техники. Москва, 2018. Т. 39, № 1. С. 9–25.
294. Первая мировая война и математика в “русском мире” // Историко-математические исследования. М., 2018. Серия 2. Т. 16. С. 199–217.
295. The development of descriptive set theory in the XXth century and the problem of the structure of mathematical continuum // XIV. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Vienna University of Technology (Austria), 2018. S. 134–141.
296. Математика и математики в период с 1917 до середины 1930-х годов / Вихревая динамика развития науки и техники. Россия/СССР. Первая половина XX века. Отв. ред. Ю.М. Батурин. М. ИИЕТ РАН, 2018. Т. 1. С. 487–506.
297. Математика в СССР с конца 1930-х до эпохи “оттепели” / Вихревая динамика развития науки и техники. Россия/СССР. Первая половина XX века. Отв. ред. Ю.М. Батурин. М. ИИЕТ РАН, 2018. Т. 2. С. 424–440.
298. A.D. Soloviev // Rykov V.V., Singpurwalla N.D., Zubkov A.M. (Eds.) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. Lecture Notes in Computer Science. Springer Cham, 2018. Т. 10684. P. 1–8. Совм. с Д.Б. Гнеденко, А.М. Зубковым, В.А. Каштановым.
299. Иванов А.Е. Учёное достоинство в Российской Империи. XVIII–начало XX века. Подготовка и научная аттестация профессоров и преподавателей высшей школы. М.: Новый Хронограф. 656 с. // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2018. Т. 39, № 3. С. 592–600.
300. Предисловие / Дело академика Николая Николаевича Лузина. Москва: изд-во МЦНМО, 2019. С. 5–11.
301. Введение / Дело академика Николая Николаевича Лузина. Москва: изд-во МЦНМО, 2019. С. 12. Совм. с Б.В. Левшиным.
302. “Дело академика Н.Н. Лузина” в коллективной памяти научного сообщества / Дело академика Николая Николаевича Лузина. Москва: изд-во МЦНМО, 2019. С. 13–56. Совм. с В.Д. Есаковым.
303. Postscriptum / Дело академика Николая Николаевича Лузина. Москва: изд-во МЦНМО, 2019. С. 321–322.
304. Г.М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века // Чебышевский сборник. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2019. Т. 20, № 3. С. 311.

-
305. К вопросу об исторической составляющей советской математической литературы – научной и учебной // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция, 2019. Москва, 2019. С. 227–230. Совм. с Петровой С.С.
306. Творческий путь Н.Н. Лузина в контексте европейской истории первой половины XX века // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2020. С. 19–22.
307. Математика в России на поворотах истории. Сборник статей. М.: МЦНМО. 2021. 391 с.
308. На крутых поворотах европейской истории XX столетия // Чебышевский сборник. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2021. Т. 22, № 1. С. 403–412.
309. Nikolai Nikolaevich Luzin at the crossroads of the dramatic events of the European history of the first half of the 20th century // *Studia Historiae Scientiarum*. Krakow. 2021. Т. 20. С. 9–22.
310. Ещё раз о “ десанте ” московских математиков в Петроград в 1921 году // Чебышевский сборник. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2021. Т. 22, № 5. С. 263–269.
311. П.Л. Чебышев – учёный, учитель и деятель науки // Чебышевский сборник. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2021. Т. 22, № 3. С. 7–20.
312. К 200-летию со дня рождения Пафнутия Львовича Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М.: изд-во Моск. ун-та, 2021. № 3. С. 3–12.
313. Об учителях Пафнутия Львовича Чебышева // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция, 2021. Москва, 2021. С. 86–90. Совм. с Петровой С.С.
314. Торжественное заседание, посвящённое юбилею Галины Павловны Матвиевской // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2021. Т. 42, № 2. С. 377–382. Совм. с Зайцевым Е.А., Петровой С.С., Смирновой Г.С.
315. Памяти Ирины Александровны Тюлиной (3.II.1922 – 29.VI.2020) // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2021. Т. 42, № 1. С. 191–193. Совм. с Визгиным В.П., Смирновым Н.Н., Чинёновой В.Н.
316. Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета и математика XX столетия (к 100-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 269–281.
317. Предисловие. / Паршин А.Н. Лестница отражений. Под ред. С.С. Демидова, В.П. Троицкого. М.: изд-во МЦНМО, 2022. С. 5–9. Совм. с Торховым Ю.Н.
318. “ Здравствуйте, меня зовут Алёша, давайте дружить ... ” / Воспоминания об А.Н. Паршине. М.: изд-во МЦНМО, 2022. С. 19–33.
319. On the Emigration of Russian Mathematicians During the Revolutionary and Post-revolutionary Events of the 1910s and ‘20s / *Foreign Lands: The Migration of Scientists for Political or Economic Reasons*. Ed. by M.T. Borgato, Ch. Phili / *Trends in the History of Science*. Birkhäuser, Cham. 2022. P. 221–234.
320. Н.Н. Лузин на перекрестках событий европейской истории первой половины XX столетия // Вопросы истории естествознания и техники. 2022. Т. 43. № 1. С. 101–130.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 24 Выпуск 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, заведующий молодёжной научно-исследовательской лабораторией “Теоретико-числовых методов в приближённом анализе” Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования,

ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 24 Issue 1

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Head of the Youth Research Laboratory “Theoretical and Numerical Methods in Approximate Analysis”, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Principal Researcher of the Khabarovsk department of IPM FEB RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 24. Issue 1

N. F. Alexiadis. Closed classes in a functional system of polynomials with real coefficients.....	5
K. V. Budiyanskaya, I. B. Kozhukhov. Congruences of a free unar	15
A. I. Denisov, I. V. Denisov. Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities	27
V. G. Durnev, A.I. Zetkina. The problem of solvability of a positive theory of an arbitrary group is algorithmically unsolvable	40
A. G. Eliseev, P.V. Kirichenko. Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed mixed problem on the semiaxis for an equation of Schrodinger type in the presence of a strong turning point for the limit operator.....	50
V. A. Kibkalo. First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system.....	69
O. I. Kuznetsova. Application of megastable system with 2- <i>D</i> strip of hidden chaotic attractors to secure communications	89
O. E. Mirzaev. Partially-isospectral Sturm — Liouville boundary value problems on the finite segment	104
V. I. Panzhensky, A. O. Rastrepina. The left-invariant Sasakian structure on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane	114
A. Y. Popov, V. B. Sherstyukov. Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products.....	127
I. A. Tlyustangelov. On symmetries of 3-dimensional algebraic continued fractions.....	139
M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov. On the best polynomial approximation of functions in the Hardy space $H_{q,R}$, $(1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$	182
BRIEF MESSAGE	
S. A. Aldashev. A criterion for the unique solvability of the spectral Poincare problem for a class of multidimensional hyperbolic equations	194
I. S. Baskov. The de Rham cohomology of the algebra of polynomial functions on a simplicial complex	203
V. N. Bezverkhny, N. B. Bezverkhnyaya. On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups	213
O. H. Gulomov. The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables	219
I. A. Shilin. On Buschman — Erdelyi and Mehler — Fock transforms, related to the group $SO_0(3,1)$	228

Yu. N. Shteynikov. On the set of exceptions in the product of sets of natural numbers with asymptotic density 1.....	237
---	-----

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

A.D. Breki, A. O. Pozdnyakov, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, V. A. Yakhimovich, E. B. Sedakova, A. Ya. Bashkarev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva. Empirical mathematical model of the dynamics of change in the coefficient of friction of a polymer composite material on steel 20X13 in vacuum during ion bombardment.....	243
V. I. Gorbachev, V. V. Nekrasov. Stress concentration in a layered plane with an elliptical cutout.....	253
T. A. Laskovaya, K. K. Rybnikov, O. K. Chernobrovina. XVIII century. At the origins of regular mathematical education in Russia. «The complete course of pure Mathematics» by Yefim Dmitrievich Voityakhovsky.....	264
M. S. Mirzoev, A. I. Nizhnikov. Methodology of teaching the basics of artificial intelligence in the school course of computer science.....	276
S. L. Tolokonnikov, A. A. Spasova. On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges.....	294
A. O. Yulina. Analytical substantiation of the gyroscopic effect in the works of O. I. Somov...	304

MEMORABLE DATES

S. S. Demidov. Alexey Nikolaevich Parshin in the world of humanitarian sciences.....	313
V. I. Levankov, N. M. Dobrovolsky. Igor Moiseevich Krichever (in memories).....	325
A. I. Shafarevich, V. N. Chubarikov, A. L. Semenov, V. M. Buchstaber, A. O. Ivanov, V. M. Tickhomirov, Vl. P. Vizgin, V. G. Chirskii, V. V. Kozlov, M. V. Kozlov, E. A. Zaitsev, G. S. Smirnova, V. N. Chinenova, N. M. Dobrovolsky. Sergey Sergeevich Demidov (to the 80-th anniversary of his birth).....	334

РЕДКОЛЛЕГИЯ	356
-------------------	-----

THE EDITORIAL BOARD	360
---------------------------	-----

TABLE OF CONTENTS	364
-------------------------	-----