

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXIII

Выпуск 5 (86)

Тула

2022

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 23 Выпуск 5

Поздравления академику Владимиру Петровичу Платонову с присуждением золотой медали имени П. Л. Чебышева 2022 года	5
С. Н. Асхабов. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью	6
Ю. А. Басалов. О критических решетках единичного шара	20
А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел	38
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Некоторые результаты для весовых констант Бернштейна — Никольского	45
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел	57
Д. А. Илюхин. Проблема Ферма — Торричелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях	72
М. А. Королев, И. С. Резвякова. О линейных комбинациях логарифмов простых чисел	87
А. С. Оревкова. Приведение гладких функций к нормальным формам вблизи критических точек	101
А. В. Родионов. Метод Ритца решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением теоретико-числовых сеток	117
Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях	130

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О пересечении двух однородных последовательностей Битти	145
А. Х. Галстян. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечномерных нормированных пространствах	152

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Е. В. Агеев, В. О. Поданов, А. Е. Агеева, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине	161
Е. М. Богатов, А. В. Коренев, И. С. Михайлов. О проектировании систем научной осведомленности в области истории математики с использованием мультиагентных технологий	172

А. Д. Бреки, В. А. Яхимович, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, И. А. Шульгин, Е. Б. Седакова, Ю. Г. Барабанщиков, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Эмпирическая математическая модель изменения фактической площади контакта металлов в зависимости от пути трения.....	188
А. Д. Бреки, Д. В. Зимин, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, И. А. Шульгин, Е. Б. Седакова, Ю. В. Галышев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Закономерности трения скольжения тел из серого чугуна в смазочных средах в зависимости от скорости скольжения.....	198
Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах .	206
А. О. Иванов, Г. В. Носовский, В. А. Кибкало, М. А. Никулин, Ф. Ю. Попеленский, Д. А. Федосеев, И. В. Грибушин, В. В. Злобин, С. С. Кузин, И. Л. Мазуренко. Распознавание аномалий неизвестного заранее типа	227
С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Д. С. Клементьев. О поведении водорода в металлических сплавах	241
Ю. М. Мартынюк, В. С. Ванькова, С. В. Даниленко. Изучение и использование рекурсивных алгоритмов в подготовке учителя информатики	258
Р. Р. Мухин. Развитие концептуальных положений качественной теории	269
Е. Н. Надеждин, И. Л. Федотенко, Е. Е. Смирнова. Методология имитационного моделирования педагогических систем	291
Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием	305
Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Тензорная теория деформационной повреждаемости . . .	320
ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ	
Н. М. Добровольский , И. В. Денисов, И. В. Добрынина, Е. В. Манохин. К 90-летнему юбилею профессора Александра Сергеевича Симонова (04.09.1932 – 20.02.2013)	337
Памяти Александра Васильевича Михалёва	348
РЕДКОЛЛЕГИЯ	351
THE EDITORIAL BOARD	355
TABLE OF CONTENTS	359

**Поздравления академику Владимиру Петровичу Платонову
с присуждением золотой медали имени П. Л. Чебышева 2022 года.**



17 мая 2022 года Президиум Российской академии наук присудил золотую медаль имени П. Л. Чебышева 2022 года академику РАН Владимиру Петровичу Платонову.

В своём решении президиум отметил:

Владимир Петрович Платонов — выдающийся советский и российский математик, всемирно известный специалист в области алгебры, алгебраической геометрии и теории чисел.

Им решен ряд крупных научных проблем, которые в течение длительного времени не поддавались усилиям многих математиков. Среди них — проблема сильной аппроксимации в алгебраических группах, проблема Таннаки–Артина и гипотеза Кнезера–Титса о строении изотропных алгебраических групп, проблема рациональности групповых алгебраических многообразий и др.

В 2010 году В. П. Платонов предложил принципиально новый подход к решению трудной и важной проблемы кручения в якобианах гиперэллиптических кривых. Этот подход был развит в серии из более чем 30 работ (2010–2021 гг.), посвященных актуальным вопросам, лежащим на стыке алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии и связанным с классической задачей изучения теоретико-числовых свойств гиперэллиптических полей. Глубокие результаты, полученные В. П. Платоновым в проблеме периодичности разложений в непрерывные дроби элементов гиперэллиптических полей, тесно связаны с классическими исследованиями Н. Х. Абеля и П. Л. Чебышева.

В. П. Платонову также удалось создать коллектив молодых исследователей, которые в своей работе успешно сочетают развитие фундаментальной научной теории с применением новейших средств компьютерной алгебры. Ряд молодых ученых, работающих под руководством В. П. Платонова, успешно защитили кандидатские диссертации.

Редакция Чебышевского сборника поздравляет академика Владимира Петровича Платонова с присуждением медали имени П. Л. Чебышева 2022 года и желает больших творческих успехов.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 517.968

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19

**Интегральное уравнение Вольтерра
со степенной нелинейностью¹**

С. Н. Асхабов

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный педагогический университет; Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Грозный).

e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация

С помощью интегрального неравенства, обобщающего, в частности, неравенство Чебышева, в статье получены точные двусторонние априорные оценки решения интегрального уравнения Вольтерра со степенной нелинейностью и ядром общего вида в конусе, состоящем из всех неотрицательных и непрерывных на положительной полуоси функций. На основе этих оценок строится полное метрическое пространство, инвариантное относительно нелинейного интегрального оператора Вольтерра, порожденного данным уравнением, и методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) доказывается глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения указанного уравнения. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Указаны условия, при которых однородное уравнение, соответствующее данному нелинейному интегральному уравнению, имеет только тривиальное решение. Вместе с этим дано уточнение и обобщение некоторых результатов, полученных в случае нелинейных интегральных уравнений с разностными и суммарными ядрами. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, степенная нелинейность, априорные оценки.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. Н. Асхабов. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 6–19.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00177).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 517.968

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19

Volterra integral equation with power nonlinearity

S. N. Askhabov

Askhabov Sultan Nazhmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Chechen State Pedagogical University; Kadyrov Chechen State University; Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Grozny).

e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract

With the help of an integral inequality generalizing, in particular, Chebyshev's inequality, we obtain sharp two-sided a priori estimates for the solution of the Volterra integral equation with a power nonlinearity and a general kernel in a cone consisting of all non-negative and continuous functions on the positive half-axis. On the basis of these estimates, a complete metric space is constructed that is invariant with respect to the nonlinear Volterra integral operator generated by this equation, and a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a solution to the indicated equation is proved by the method of weighted metrics (analogous to the Belitsky method). It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence in terms of the weight metric. It is shown that, in contrast to the linear case, the nonlinear homogeneous Volterra integral equation, in addition to the trivial solution, can also have a nontrivial solution. Conditions are indicated under which the homogeneous equation corresponding to a given nonlinear integral equation has only a trivial solution. At the same time, a refinement and generalization of some results obtained in the case of nonlinear integral equations with difference and sum kernels is given. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integral equation, power nonlinearity, a priori estimates.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

S. N. Askhabov, 2022, "Volterra integral equation with power nonlinearity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 6–19.

1. Введение

В ряде работ [1-8] и других (подробнее см. монографии [9], [10]) методом весовых метрик были изучены нелинейные интегральные уравнения Вольтерра с разностными и суммарными ядрами

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t)u(t) dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x+t)u(t) dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad (2)$$

в конусе Q , состоящем из неотрицательных и непрерывных на положительной полуоси функций. Такие уравнения возникают при описании различных процессов, изучаемых в гидроаэродинамике, а также в теории переноса тепла излучением, в моделях популяционной генетики и других [11-14], при этом особый интерес представляют положительные при $x > 0$ решения из Q .

В данной работе изучается нелинейное уравнение с ядром общего вида

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K(x, t)u(t)dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

в конусе

$$Q_0 = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty), u(x) > 0 \text{ при } x > 0\},$$

что связано, в частности, с указанными выше приложениями.

Исследование основано на аналоге метода Белицкого (см., например, [15, с. 153]), так называемом методе весовых метрик, который, в отличие от метода Белицкого, не предполагает выполнение условия Липшица и основан на двусторонних априорных оценках решения, играющих важную при применении этого метода к уравнениям вида (1)-(3).

2. Априорные оценки решения

Выясним сначала какими свойствами заведомо должно обладать решение уравнения (3), если оно существует. Всюду ниже на ядро $K(x, t)$ и неоднородность $f(x)$ накладываются следующие основные ограничения:

- 1) $K(x, t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq x$ и непрерывна по совокупности переменных вместе со своей производной по первой переменной x , причем $K'_x(x, t) \geq 0$;
- 2) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, непрерывна и не убывает на $[0, \infty)$.

Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. Пусть функция $g(x)$ определена на $[0, \infty)$, а функция $H(x, t)$ определена при $0 \leq t \leq x$ и непрерывна по совокупности переменных вместе со своей производной $H'_x(x, t)$. Если $H'_x(x, t) \geq 0$ и $g(x)$ не убывает, то для любого $x \geq 0$ выполняется неравенство:

$$\int_0^x H(x, t)g(t)dt \leq \int_0^x \left[H(t, t) + \int_0^t H'_t(t, s)ds \right] g(t)dt. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$$\phi(x) = \int_0^x H(x, t)g(t)dt - \int_0^x \left[H(t, t) + \int_0^t H'_t(t, s)ds \right] g(t)dt.$$

Из условий леммы следует, что

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \int_0^x H'_x(x, t)g(t)dt + H(x, x)g(x) - \left[H(x, x) - \int_0^x H'_x(x, s)ds \right] g(x) = \\ &= \int_0^x H'_x(x, t)[g(t) - g(x)]dt \leq 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральное выражение не положительно. Значит, функция $\phi(x)$ не возрастает на полуоси $[0, \infty)$. Но тогда $\phi(x) \leq \phi(0) = 0$ для любого $x \geq 0$, что равносильно выполнению неравенства (4).

Заметим, что из леммы 1 вытекает интегральное неравенство Чебышева [16, с. 120]

$$\int_0^x f(x-t)g(t) dt \leq \int_0^x f(t)g(t) dt, \quad (5)$$

и неравенство [14, с. 1211]

$$\int_0^x f(x+t)g(t) dt \leq \int_0^x [2f(2t) - f(t)]g(t) dt, \quad (6)$$

которые справедливы для любых неубывающих на $[0, \infty)$ функций $f(x)$ и $g(x)$.

Кроме того, неравенство (4) обращается в равенство, если $g(x)$ есть константа, т.е.

$$\int_0^x H(x, t) dt = \int_0^x \left[H(t, t) + \int_0^t H'_t(t, s) ds \right] dt. \quad (7)$$

Для доказательства равенства (7) достаточно заметить, что производные левой и правой частей равенства (7) совпадают и эти части обращаются в нуль при $x = 0$.

Из равенства (7) вытекает, в частности, равенство [14]

$$\int_0^x f(x+t) dt = \int_0^x [2f(2t) - f(t)] dt, \quad (8)$$

справедливое для любой интегрируемой на полуоси $[0, \infty)$ функции $f(x)$.

Обратим внимание на то, что подынтегральные функции в правых частях соотношений (4)-(8) не зависят от переменной x , что важно для приложений (см., например, доказательства нижеследующих теорем 1-3).

С помощью леммы 1 доказывается следующая основная теорема данного пункта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1), и $u \in Q$ есть решение уравнения (3). Если $\alpha > 0$, то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, а если $\alpha > 1$, то для любого $x \in [0, \infty)$ выполняются неравенства:

$$L(x) \leq u(x) \leq R(x), \quad (9)$$

где

$$L(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(t, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{1/(\alpha-1)},$$

$$R(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) следует, что функция $K(x, t)$ не убывает по x равномерно относительно t . Поэтому, с учетом условия 2), для любых $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ таких, что $x_1 < x_2$, используя тождество (3), для любого $\alpha > 0$ получаем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [K(x_2, t) - K(x_1, t)] u(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, t) u(t) dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

т.е. решение уравнения (3) $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$.

Докажем теперь последовательно оба неравенства из (9) при условии, что $\alpha > 1$. Так как функция $f(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то, по теореме Лебега, она почти всюду дифференцируема на этой полуоси, причем

$$\int_0^x f'(t) dt \leq f(x) - f(0).$$

Используя это неравенство и условие 1), из тождества (3), получаем

$$u^\alpha(x) \geq \int_0^x K(t, t)u(t) dt + \int_0^x f'(t) dt + f(0),$$

или

$$u(x) \geq \left(\int_0^x [K(t, t)u(t) dt + f'(x)] dt + f(0) \right)^{1/\alpha}. \quad (10)$$

Используя неравенство (10), для почти всех $t \in [0, \infty)$ имеем

$$K(t, t)u(t) + f'(t) \geq K(t, t) \left(\int_0^t [K(s, s)u(s) ds + f'(s)] ds + f(0) \right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда, с учетом, что $f'(t) \geq 0$, получаем

$$\frac{K(t, t)u(t) + f'(t)}{\left(\int_0^t [K(s, s)u(s) ds + f'(s)] ds + f(0) \right)^{1/\alpha}} \geq K(t, t).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x , имеем

$$\left(\int_0^x [K(s, s)u(s) ds + f'(s)] ds + f(0) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - [f(0)]^{(\alpha-1)/\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(t, t) dt$$

или

$$\left(\int_0^x [K(t, t)u(t) dt + f'(t)] dt + f(0) \right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(t, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} \quad (11)$$

для любого $x \in [0, \infty)$. Таким образом, оценка $u(x) \geq L(x)$ является прямым следствием неравенств (10) и (11).

Докажем, наконец, неравенство $u(x) \leq R(x)$. Так как $u(x)$ не убывает и $K'_x(x, t) \geq 0$, то в силу неравенства (4) из тождества (3) получаем:

$$u^\alpha(x) \leq \int_0^x r(t)u(t)dt + f(x)$$

где

$$r(t) = K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s)ds.$$

Значит

$$u(x) \leq \left(\int_0^x r(t)u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x \geq 0. \quad (12)$$

В силу неравенства (12) для почти всех $t \in [0, \infty)$ имеем

$$r(t)u(t) + f'(t) \leq r(t) \left(\int_0^t r(s)u(s) ds + f(t) \right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда

$$\frac{r(t)u(t) + f'(t)}{\left(\int_0^t r(s)u(s) ds + f(t) \right)^{1/\alpha}} \leq r(t) + \frac{f'(t)}{\left(\int_0^t r(s)u(s) ds + f(t) \right)^{1/\alpha}} = r(t) + I(t), \quad (13)$$

где

$$I(t) = f'(t) \left(\int_0^t r(s) \cdot u(s) ds + f(t) \right)^{-1/\alpha}.$$

Так как (см. неравенство (11) в [14])

$$\int_0^x I(t) dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right), \quad \forall x > 0,$$

то, проинтегрировав неравенство (13) в пределах от 0 до x , получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^x r(s)u(s) ds + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \leq \\ & \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int_0^x r(t) dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right] \right) \end{aligned}$$

или

$$\left(\int_0^x r(t)u(t) dt + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x r(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x),$$

откуда получаем, что для всех $x \in [0, \infty)$ выполняется неравенство:

$$\left(\int_0^x r(t)u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x r(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}. \quad (14)$$

Из неравенств (12) и (14) непосредственно вытекает, что

$$u(x) \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x r(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x),$$

поскольку, на основании равенства (7),

$$\int_0^x r(t) dt = \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] dt = \int_0^x K(x, t) dt.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что при $K(x, t) = C_1$ и $f(x) = C_2$, где $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$ есть константы, неравенства в (4) обращаются в тождества и дают решение уравнения (3)

$$u^*(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} [C_1 + C_2] \right)^{1/(\alpha-1)},$$

что свидетельствует о точности полученных в теореме 1 обеих априорных оценок.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает теорема 4.1 из [17], в которой доказано, что *если* $u \in Q_0$ *есть решение уравнения*

$$u^\alpha(x) = \int_0^x e^{-2t} \left[\frac{1}{2} + x - t \right] u(t) dt,$$

то

$$\left[\frac{\alpha-1}{4\alpha} (1 - e^{-2x}) \right]^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \left[\frac{\alpha-1}{2\alpha} x \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

3. Теорема существования и единственности решения

Введем в рассмотрение оператор

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x K(x, t) u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Тогда уравнение (3) можно записать в операторном виде: $Tu = u$. Из теоремы 1 следует, что решение этого операторного уравнения естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty), \quad L(x) \leq u(x) \leq R(x)\}.$$

Чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения $Tu = u$ в классе P , далее будем предполагать, что $K(x, t)$ и $f(x)$ удовлетворяют дополнительным условиям:

3) $K(0, 0) > 0$;

4) $f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $\alpha > 1$ и выполнены условия 1)-4), то класс P инвариантен относительно оператора T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in P$ - произвольная функция. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$. То, что $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$ очевидно в силу вольтерровости оператора T . Осталось доказать, что $L(x) \leq (Tu)(x) \leq R(x)$ для любого $x \in [0, \infty)$.

Покажем сначала, что $(Tu)(x) \geq L(x)$. Так как $u(x) \geq L(x)$, а функции $K(x, t)$ и $f(x)$ не убывают по x , то

$$\begin{aligned}
[(Tu)(x)]^\alpha &= \int_0^x K(x, t)u(t) dt + f(x) \geq \int_0^x K(t, t)L(t) dt + f(0) = \\
&= \int_0^x K(t, t) \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t K(s, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{1/(\alpha-1)} dt + f(0) = \\
&= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left[\int_0^t K(s, s) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{1/(\alpha-1)} \times \\
&\quad \times d \left[\int_0^t K(s, s) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right] + f(0) = \\
&= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\left[\int_0^x K(s, s) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} \right) + \\
&\quad + f(0) = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(s, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} + f(0) = \\
&= \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(t, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [L(x)]^\alpha,
\end{aligned}$$

т.е. $(Tu)(x) \geq L(x)$.

Докажем наконец, что $(Tu)(x) \leq R(x)$. Так как $u(x) \leq R(x)$ и $R(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то используя лемму 1 и условие 4), имеем

$$\begin{aligned}
[(Tu)(x)]^\alpha &\leq \int_0^x K(x, t)R(t) dt + f(x) \leq \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] R(t) dt + f(x) = \\
&= \int_0^x \left(\left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] R(t) + f'(t) \right) dt + f(0) = \\
&= \int_0^x R(t) \left(K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds + \frac{f'(t)}{R(t)} \right) dt + f(0) \leq \\
&\leq \int_0^x R(t) \left(K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds + \frac{f'(t)}{f^{1/\alpha}(t)} \right) dt + f(0) = \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^x \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t K(t, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right]^{1/(\alpha-1)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times d \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^t K(t,s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right] + f(0) = \\
& = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(x,s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} + f(0) \equiv R^\alpha(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для построения полного метрического пространства, введем следующий класс

$$P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0, b], \quad L(x) \leq u(x) \leq R(x)\},$$

где $b > 0$ есть любое фиксированное число.

Введем в классе P_b метрику, положив для любых $u, v \in P_b$

$$\varrho_b(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{R(x)}.$$

Заметим, что из условий 1)-3) следует, что $R(x) > 0$ при любом $x > 0$.

Непосредственно проверяется, что пара (P_b, ϱ_b) образует полное метрическое пространство. При этом учитывается, что для любой фундаментальной последовательности $\{u_n(x)\}$ из P_b при любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $u_n(0) - u_m(0) = f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) = 0$, позволяющее доказать фундаментальность этой последовательности в полном метрическом пространстве $C[0, b]$ (см. [9, §17]).

Из теоремы 2 следует, что оператор действует из P_b в P_b . Докажем, что при дополнительном условии

$$\textbf{5)} \quad q = \sup_{0 < x \leq b} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right) \left((\alpha-1) \int_0^x K(t, t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} < 1$$

оператор T является сжимающим в P_b .

Воспользуемся неравенством (14) из [14]:

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}, \quad (15)$$

справедливым для любых $z_1 \geq z_0$ и $z_2 \geq z_0$, где $z_0 > 0$. Пусть $u, v \in P_b^+$ и $x \in (0, b]$. В силу неравенства (15), имеем

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| \left(\int_0^x K(x, t) u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} - \left(\int_0^x K(x, t) v(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\int_0^x K(x, t) |u(t) - v(t)| dt}{[L^\alpha(x)]^{(\alpha-1)/\alpha}} = \\
&= \left((\alpha-1) \int_0^x K(t, t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \int_0^x K(x, t) R(t) \frac{|u(t) - v(t)|}{R(t)} dt \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \varrho_b(u, v) \left((\alpha - 1) \int_0^x K(t, t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} \int_0^x K(x, t) R(t) dt.$$

Применяя лемму 1 и учитывая, что $f^{-1/\alpha}(x)f'(x) \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, t) R(t) dt &\leq \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] R(t) dt \leq \\ &\leq \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds + f^{-1/\alpha}(t)f'(t) \right] \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^t K(t, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right]^{1/(\alpha-1)} dt = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^x \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^t K(t, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right]^{1/(\alpha-1)} d \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^t K(t, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right] = \\ &= \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x K(x, s) ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} = R^\alpha(x) - f(0) \leq R^\alpha(x). \end{aligned}$$

Поэтому из предыдущего неравенства вытекает, что

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq \varrho_b(u, v) \left((\alpha - 1) \int_0^x K(t, t) dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{-1} R^\alpha(x),$$

откуда

$$\frac{|(Tu)(x) - (Tv)(x)|}{R(x)} \leq q \cdot \varrho_b(u, v),$$

где число $q < 1$ определено в условии 5).

Таким образом, для любых $u, v \in P_b$ справедливо неравенство

$$\varrho_b(Tu, Tv) \leq q \cdot \varrho_b(u, v), \quad (16)$$

т.е. оператор T является сжимающим.

Полученные выше результаты позволяют сформулировать и доказать следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha > 1$ и выполнены условия 1)-5), то интегральное уравнение (3) имеет единственное решение $u^* \in Q_0$, причем $u^* \in P_b$ при любом $b > 0$. Это решение удовлетворяет неравенствам $L(x) \leq u^*(x) \leq R(x)$, где

$$\begin{aligned} L(x) &\equiv \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x K(t, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right]^{1/(\alpha-1)}, \\ R(x) &\equiv \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)} \end{aligned}$$

и его можно найти в P_b методом последовательных приближений по рекуррентной формуле $u_n = T_+ u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ϱ_b . Для последовательных приближений справедлива оценка скорости сходимости:

$$\varrho_b^+(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \varrho_b^+(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

где число $q < 1$ определено в условии 5), а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение (любая функция из P_b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем интегральное уравнение (3) в операторном виде $Tu = u$. Из теоремы 2 и неравенства (16) следует, что оператор T удовлетворяет всем требованиям принципа сжимающих отображений. Следовательно, оператор T имеет единственную неподвижную точку $u^* \in P_b$ и эту точку можно найти методом последовательных приближений, для которых справедлива оценка скорости сходимости (17). То, что $u^*(x)$ является единственным решением интегрального уравнения (3) и во всем классе Q_0 доказывается точно так же, как в теореме 3 из [18].

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 3.

Пример 1. Уравнение (3) при $\alpha = 2$, $K(x, t) = e^{x+t}$ и $f(x) = e^x$ имеет в конусе Q_0 единственное решение

$$u^*(x) = \frac{1}{3} (e^{2x} + 2e^{x/2}).$$

Пример 2. Уравнение (3) при $K(x, t) = x + t$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}{2\alpha(\alpha + 1)} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{2/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. Уравнение (3) при $K(x, t) = e^{x+t}$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^{1/(\alpha-1)} \left(e^{(\alpha+1)x/\alpha} - 1 \right)^{1/(\alpha-1)} e^{x/\alpha}.$$

Пример 4. Уравнение (3) при $K(x, t) = e^{x-t}$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение

$$u(x) = \left(e^{[(\alpha-1)/\alpha]x} - 1 \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Последние два примера показывают, что нелинейные однородные интегральные уравнения вида (3) помимо тривиального решения $u(x) \equiv 0$ могут иметь еще и нетривиальные решения, в то время как соответствующие линейные однородные интегральные уравнения вида (3), соответствующие случаю $\alpha = 1$ и $f(x) \equiv 0$, имеют лишь тривиальное решение.

Легко показать, что в случае когда $0 < \alpha < 1$ уравнение (3) не имеет решений в конусе Q_0 . В самом деле, если допустить противное, что $u \in Q_0$ и является решением уравнения (3), то с учетом того, что оно не убывает при $0 < \alpha < 1$ (см. доказательство теоремы 1), из тождества (3) получим

$$u^\alpha(x) \leq u(x) \int_0^x K(x, t) dt = u(x) \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] dt, \quad x > 0,$$

откуда

$$u^{\alpha-1}(x) \leq \int_0^x \left[K(t, t) + \int_0^t K'_t(t, s) ds \right] dt.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \rightarrow 0$ приходим к противоречию: $\infty \leq 0$.

4. Заключение

Методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения неоднородного вольтерровского интегрального уравнения со степенной нелинейностью и ядром общего вида. Получены точные двусторонние оценки решения и показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okrański W. On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation // *Ann. Pol. Math.* 1979. Vol. 36, №1. P. 61-72.
2. Okrański W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // *Annal. Polon. Math.* 1980. Vol. 37, №3. P. 223-229.
3. Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.
4. Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // *Дифференц. уравнения.* 1991. Т. 27, №2. С. 321-330.
5. Bushell P. J., Okrański W. Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel // *J. London Math. Soc.* 1991. Vol. 41, №2. P. 503-510.
6. Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А. Априорные оценки решений нелинейного интегрального уравнения типа свертки и их приложения // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54, №5. С. 3-12.
7. Bushell P. J., Okrański W. Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities // *Bull. London Math. Soc.* 1992. Vol. 24. P. 478-484.
8. Kilbas A. A., Saigo M. On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1999. Vol. 229. P. 41-60.
9. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки (Физматлит, М., 2009).
10. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
11. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // *Z. Angew. Math. Phys.* 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.
12. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // *Z. Angew. Math. Phys.* 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.
13. Okrański W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // *Extracta Math.* 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
14. Асхабов С. Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57, №9. P. 1210-1219.

15. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).
16. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад (МГУ, М., 1987).
17. Okraśiński W. On subsolutions of a nonlinear diffusion problem // *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 1989. V. 11, N3. P. 409-416.
18. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56, №6. С. 786-795.

REFERENCES

1. Okraśiński W. 1979, "On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation", *Ann. Pol. Math.*, vol. 36, no. 1, pp. 61-72.
2. Okraśiński W. 1980, "On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation", *Annal. Polon. Math.*, vol. 37, no. 3, pp. 223-229.
3. Askhabov S. N., Karapetyants H. K., Yakubov A. Ya. 1990, "Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations", *Dokl. Math.*, vol. 41, no. 2, pp. 323-327.
4. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. 1991, "Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones", *Differ. Equat.*, vol. 27, no. 2, pp. 234-242.
5. Bushell P. J., Okraśiński W. 1991, "Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel", *J. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 2, pp. 503-510.
6. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. 1993, "A priori bounds of solutions of the nonlinear integral convolution type equation and their applications", *Math. Notes*, vol. 54, no. 5, pp. 1087-1092.
7. Bushell P. J., Okraśiński W. 1992, "Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 478-484.
8. Kilbas A. A., Saigo M. 1999, "On solution of nonlinear Abel-Volterra integral equation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 229, pp. 41-60.
9. Askhabov S. N. 2009, Nonlinear equations of convolution type. (russian) [Nelineinie uravneniya tipa svertki], Fizmatlit, Moscow, 304 p.
10. Brunner H. "Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications". Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
11. Keller J. J. 1981, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 32, no. 2, pp. 170-181.
12. Schneider W. R. 1982, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 140-142.
13. Okraśiński W. 1989, "Nonlinear Volterra equations and physical applications", *Extracta Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 51-74.

14. Askhabov S. N. 2021, "On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part", *Differ. Equat.*, vol. 57, no. 2, pp. 1185-1194.
15. Edwards R. E. 1995, "Functional analysis. Theory and applications". New York: Holt, Rinehart and Winston, 781 p.
16. Sadovnichii V. A., Grigor'yan A. A., Konyagin S. V. 1987, Problems of student mathematical olympiads. (russian) [Zadachi studencheskikh matematicheskikh olimpiad], Moscow State Univ., Moscow, 310 p.
17. Okraśiński W. 1989, "On subsolutions of a nonlinear diffusion problem", *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 409-416.
18. Askhabov S. N. 2020, "Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part", *Differ. Equat.*, vol. 56, no. 6. P. 775-784.

Получено: 5.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-20-37

О критических решетках единичного шара¹

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

История вопроса вычисления и оценки постоянной Эрмита насчитывает два столетия. В данной статье дается краткий обзор истории этой задачи. Также эта проблема рассматривается с точки зрения критических решеток единичного шара.

Данная задача берет свое начало с работ Ж. Л. Лагранжа, Л. А. Зеебера и К. Ф. Гаусса. Разрабатывая теорию приведения положительно определенных квадратичных форм, ими были получены предельные формы, для которых отношение минимального значения этих форм в целых точках, отличных от 0, к их определителю было максимально.

В середине XIX века Ш. Эрмитом была получена оценка этой величины для произвольной размерности. А в конце XIX века А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым был предложен новый метод приведения квадратичных форм, который позволил получить точные значения постоянной Эрмита вплоть до размерности 8.

В данной работе будет рассматриваться эквивалентная постоянной Эрмита величина — критический определитель единичного шара. Следует отметить тесную связь этих величин с другими задачами геометрии чисел, например, задачами нахождения плотности наилучшей упаковки, поиска кратчайшего вектора решетки и диофантовыми приближениями. Мы приведем критические решетки размерностей до 8, а также рассмотрим их некоторые метрические свойства.

Ключевые слова: критические определители, решетки, минимумы положительно определенных квадратичных форм.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

Ю. А. Басалов. О критических решетках единичного шара // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 20–37.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-20-37

On critical lattices of the unit sphere

Yu. A. Basalov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Abstract

The history of the problem of calculating and estimating the Hermite constant has two centuries. This article provides a brief overview of the history of this problem. Also, this problem is considered from the point of view of critical lattices of the unit sphere.

This problem began from the works of J. L. Lagrange, L. A. Seeber and K. F. Gauss. While developing the theory of reduction of positive definite quadratic forms, they obtained limit forms for which the ratio of the minimum value of these forms at integer points other than 0 to their determinant is maximal.

In the middle of the 19th century, Sh. Hermit obtained an estimate for this quantity for an arbitrary dimension. And at the end of the 19th century, A. N. Korkin and E. I. Zolotarev proposed a new method for reducing quadratic forms, which made it possible to obtain exact values of the Hermite constant up to dimension 8.

In this paper, we will consider a quantity equivalent to the Hermite constant, the critical determinant of the unit sphere. It should be noted that these quantities are closely connected with other problems in the geometry of numbers, for example, the problems of finding the density of the best packing, finding the shortest lattice vector, and Diophantine approximations. We present critical lattices of dimensions up to 8 and consider some of their metric properties.

Keywords: critical determinants, lattices, minimum of positive definite quadratic forms.

Bibliography: 27 titles.

For citation:

Yu. A. Basalov, 2022, “On critical lattices of the unit sphere”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 20–37.

1. Введение

Теория приведения определенных квадратичных форм — это чисто вещественная теория, целью которой является выбрать из бесконечного множества форм, цело эквивалентных данной форме, одну, характеризующую некоторым внутренним образом [7]. В работах Ж. Л. Лагранжа (1768 г. [19]) была построена теория приведения положительно определенных форм двух переменных. А именно, был исследован вопрос о приведении положительно определенных форм вида

$$f(x_1, x_2) = f_{1,1}x_1^2 + 2f_{1,2}x_1x_2 + f_{2,2}x_2^2$$

к виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2.$$

Теория приведения бинарных квадратичных форм была позднее развита в работах К. Ф. Гаусса [13] и П. Г. Л. Дирихле [4].

Результаты Ж. Л. Лагранжа и К. Ф. Гаусса позволили ответить на следующий вопрос: чему равно наименьшее значение τ такое, что для любой f справедливо неравенство

$$\min_{(u_1, u_2) \neq (0, 0)} f(u_1, u_2) \leq (\tau D)^{1/2},$$

где $D = s_{11}s_{22} - s_{12}^2$ определитель формы f . Из работ Ж. Л. Лагранжа следует, что $\tau_{\min} = \frac{4}{3}$.

В 1831 году, Л. А. Зеебером [23] была построена теория приведения для положительно определенных форм трех переменных. А в рецензии на эту работу К. Ф. Гаусса [12] было впервые введено понятие решетки, которое стало центральным понятием геометрии чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительно определенная квадратичная форма f называется *предельной*, если при произвольных, достаточно малых, отличных от 0, вариациях ее коэффициентов, удовлетворяющих условию, что определитель варьированной формы f^* остается постоянным, значения минимума формы f^* меньше минимума формы f .

Таким образом, Ж. Л. Лагранжом и Л. А. Зеебером были найдены предельные формы для $n = 2$ и 3. Более обще задачу поиска предельных форм можно сформулировать следующим образом. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$$

– n -мерная положительно определенная квадратичная форма, а ее определитель равен

$$D = \det(s_{ij}) = (\det A)^2,$$

где $A = (a_{ij})$. Пусть [9]

$$\gamma_n = \sup_f \Lambda(f, \mathbb{Z}^n) D^{-1/n},$$

где $\mathbb{Z}^n$ – целочисленная решетка размерности n , а

$$\Lambda(f, \mathbb{Z}^n) = \min_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^n, \vec{x} \neq \vec{0}} f(\vec{x}).$$

Как отмечалось выше, из результатов Ж. Л. Лагранжа [19] следует, что $\gamma_2 = (4/3)^{1/2}$. А из работы Л. А. Зеебера [23], что $\gamma_3 = 2^{1/3}$.

Позднее Ш. Эрмитом [14, 3] была получена оценка

$$\gamma_n \leq (4/3)^{(n-1)/2},$$

для произвольного n , а γ_n стали называть *постоянной Эрмита*.

Теории приведения положительно определенных квадратичных форм развивались в работах А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева [17, 18], Г. Ф. Вороного [27], Г. Минковского [20, 21], Б. А. Венкова [1, 2, 3] и многих других исследователей [10, 11, 15, 24, 25, 26].

Связь с критическим определителем n -мерного шара. Значительный интерес представляет связь постоянной Эрмита с другими вопросами геометрии чисел. Введем некоторые определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек

$$\vec{x} = u_1 \vec{a}_1 + \dots + u_n \vec{a}_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \dots, u_n$ называется решеткой Λ . Величина

$$d(\Lambda) = |\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)|$$

называется определителем решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\vec{0}$ точек ($\vec{0} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$ -допустима. Точную нижнюю грань

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$ -допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$ -допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Рассмотрим n -мерный единичный шар K_n

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1.$$

Обозначим его критический определитель как $\Delta(K_n)$, а объем $k_n = V(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$. Известно, что [5]

$$\gamma_n = \Delta(K_n)^{-2/n}.$$

Решчатые упаковки. Рассмотрим n -мерную решетку Γ и множество n -мерных шаров одинакового радиуса с центрами в точках решетки. Такое множество образует *упаковку*, если шары не имеют общих внутренних точек. Максимальный радиус шаров называют *радиусом упаковки*, соответствующей решетке Γ и обозначают $r(\Gamma)$. При этом

$$r(\Gamma) = \frac{1}{2} \min \Gamma, \quad (1)$$

где $\min \Gamma$ – длина кратчайшего вектор решетки.

Плотностью решетчатой упаковки называют

$$\delta(\Gamma) = k_n \frac{r^n(\Gamma)}{V(\Gamma)}, \quad (2)$$

где $V(\Gamma)$ – объем основного параллелепипеда решетки, равный $d(\Gamma)$. Плотностью наилучшей решетчатой упаковки называют величину $\delta_n = \sup_{\Gamma} \delta(\Gamma)$. Известно [5], что плотность наилучшей решетчатой упаковки равна

$$\delta_n = \frac{k_n}{2^n \Delta(K_n)}.$$

Тем самым, постоянная Эрмита и плотность наилучшей решетчатой упаковки связаны формулой

$$\delta_n = 2^{-n} k_n \gamma_n^{n/2}.$$

Обширное описание результатов (до 1990 г.) в области решетчатых упаковок можно найти в [8].

Длина кратчайшего вектора решетки Подставив (1) в (2)

$$\frac{\min^n \Gamma}{2^n} = \frac{\delta(\Gamma)V(\Gamma)}{k_n},$$

получим связь длины кратчайшего вектора решетки с постоянной Эрмита

$$\min \Gamma = V(\Gamma)^{1/n} \left(\frac{2^n \delta(\Gamma)}{k_n} \right)^{1/n} \leq \Delta(\Gamma)^{1/n} \left(\frac{2^n \cdot 2^{-n} k_n \gamma_n^{n/2}}{k_n} \right)^{1/n} = \gamma_n^{1/2} \Delta(\Gamma)^{1/n}.$$

Диофантовы приближения. Точная нижняя грань величины θ такой, что для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \dots, p_n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^n (q\alpha_i - p_i)^2 < \frac{\theta^{1/n}}{q^{1+1/n}}$$

называется константой наилучших диофантовых приближений в евклидовой норме $\theta(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$.

Константой наилучших диофантовых приближений в евклидовой норме θ_n называется:

$$\theta_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}).$$

В. Г. Новаком было показано, что [22]

$$\theta_n \leq \frac{n^{-n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2} \cdot \Delta(K_{n+1})}.$$

2. Решетки

Будем рассматривать вопрос с точки зрения решеток. Решетка Λ_n определяется матрицей базисных векторов

$$A_n = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Определитель решетки равен $d(\Lambda_n) = \det(A_n) = \det(a_{i,j})$. Решетка не имеет точек внутри K_n (является допустимой для K_n), если для любого целого вектора $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, отличного от $\vec{0}$,

$$(A_n \cdot \vec{b})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_j \right)^2 \geq 1. \quad (3)$$

Таким образом задача нахождения постоянной Эрмита сводится к минимизации $d(\Lambda_n)$ при условии (3). Решетка с определителем $d(\Lambda_n)$ равным критическому определителю шара K_n , называется критической для шара K_n . Далее, мы будем называть решетку размерности n просто критической, если она является критической для шара K_n .

Рассмотрим альтернативный способ проверки наличия/отсутствия точек Λ_n внутри шара K_n . Преобразуем (3) в квадратичную форму

$$f(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n f_{i,i} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n f_{i,j} b_i b_j, \quad f_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j},$$

и сформулируем следующую оптимизационную задачу:

$$F_{\min} = f(b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min, \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{Z}_n, \quad \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Если $F_{\min} \geq 1$, то решетка Λ_n является допустимой для шара K_n . Отметим также, что

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если все $f_{i,j}$ в f целые, и форма f не обращается в 0 в точках отличных от $\vec{0}$, то $F_{\min} \geq 1$.

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения. Напомним, что

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами

- существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;
- любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Система из $k \leq n$ линейно независимых точек $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ решетки Λ_n называется примитивной, если все точки пересечения решетки Λ_n и линейного пространства построенного на $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ представимы в виде

$$u_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + u_k \vec{\alpha}_k,$$

где $u_1, \dots, u_k$ целые числа.

Известно, что

ТЕОРЕМА 1. (см. [5], гл. 1, п. 3) Примитивная система $k \leq n$ линейно независимых точек решетки Λ_n может быть дополнена до базиса решетки Λ_n .

ЛЕММА 1. Любое преобразование поворота из $SO(n)$ преобразует критическую решетку Λ_n единичного шара K_n в критическую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поворот критической решетки Λ_n единичного шара K_n описывается линейным преобразованием S , которое задается унимодулярной ортогональной матрицей. Это преобразование S переводит единичный шар K_n в самого себя, поэтому образ решетки Λ_n также является критической решеткой для K_n . $\square$

ТЕОРЕМА 2. Существует критическая решетка Λ_n единичного шара K_n с базисом, матрица которого (a_{ij}) имеет треугольный вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения покажем процесс преобразования произвольной критической решетки единичного шара K_n в решетку, у которой базис имеет матрицу верхнетреугольного вида.

По теореме 1 любую точку критической решетки Λ_n единичного шара K_n , принадлежащую сфере K_n , можно дополнить до базиса решетки Λ_n . Поэтому существует базис критической решетки Λ_n единичного шара K_n модуль хотя бы одного вектора которого равны 1. Пусть это базис задается матрицей

$$A_n = A_n^{(0)} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

а модуль вектора $|\vec{a}_1| = 1$.

Произведем поворот решетки Λ_n так, чтобы координаты первого вектора решетки стали равны $\vec{a}_1^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Это можно сделать с помощью преобразования поворота S_1 , задаваемого ортогональной матрицей с первой строкой $a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}$. Такую матрицу можно получить, дополнив вектор $\vec{a}_1 = (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1})^T$ до ортонормированного базиса размерности n и транспонировав матрицу этого базиса. Пусть эта матрица имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ s_{2,1}^{(1)} & s_{2,2}^{(1)} & \dots & s_{2,n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n,1}^{(1)} & s_{n,2}^{(1)} & \dots & s_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S_1 \cdot \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + \dots + a_{1,n}^2 \\ s_{2,1}^{(1)} a_{1,1} + s_{2,2}^{(1)} a_{1,2} + \dots + s_{2,n}^{(1)} a_{1,n} \\ \dots \\ s_{n,1}^{(1)} a_{1,1} + s_{n,2}^{(1)} a_{1,2} + \dots + s_{n,n}^{(1)} a_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

так как в ортогональной матрице скалярное произведение двух любых различных строк равно 0 (это следует из того, что для ортогональной матрицы $A \cdot A^T = E$). После применения преобразования S_1 , получим решетку $\Lambda_n^{(1)}$ с базисом

$$A_n^{(1)} = S_1 \cdot A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1}^{(1)} & \dots & a_{n,1}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{n,2}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2,n}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad a_{i,1}^{(1)} = \sum_{k=1}^n a_{1,k} a_{i,k}, \quad a_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=1}^n s_{j,k} a_{i,k}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Так как S_1 это преобразование поворота, то в силу леммы 1 эта решетка является критической для единичного шара K_n .

Будем далее последовательно строить требуемую решетку (имеющую базис с матрицей верхнетреугольного вида). Рассмотрим базис решетки $\Lambda_n^{(k)}$, полученной на k -ом шаге этого процесса

$$A_n^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1}^{(k)} & \dots & a_{k,1}^{(k)} & a_{k+1,1}^{(k)} & \dots & a_{n,1}^{(k)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \dots & a_{k,2}^{(k)} & a_{k+1,2}^{(k)} & \dots & a_{n,2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k,k}^{(k)} & a_{k+1,k}^{(k)} & \dots & a_{n,k}^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,k+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,n}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Первые k столбцов матрицы этого базиса образуют верхнетреугольную матрицу. Рассмотрим следующее преобразование S_{k+1} , задаваемое матрицей

$$S_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* b_{k+1}^{(k)} & \lambda_k^* b_{k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k b_n^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* s_{k+2,k+1}^{(k)} & \lambda_k^* s_{k+2,k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k^* s_{k+2,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* s_{n,k+1}^{(k)} & \lambda_k^* s_{n,k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k^* s_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_k = \left(\left| \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} \right|^2 - \sum_{i=1}^k \left(a_{i,k+1}^{(k)} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\lambda_k^* = \frac{\lambda_k}{\left| \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} \right|},$$

а

$$\begin{pmatrix} b_{k+1}^{(k)} & b_{k+2}^{(k)} & \dots & b_n^{(k)} \\ s_{k+2,k+1}^{(k)} & s_{k+2,k+2}^{(k)} & \dots & s_{k+2,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n,k+1}^{(k)} & s_{n,k+2}^{(k)} & \dots & s_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix},$$

это ортогональная матрица с первой строкой

$$\overrightarrow{b}^{(k)} = \left(b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k)}, \dots, b_n^{(k)} \right) = \frac{\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}}{\left| \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} \right|} = \frac{1}{\left| \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} \right|} \left(a_{k+1,k+1}^{(k)}, a_{k+1,k+2}^{(k)}, \dots, a_{k+1,n}^{(k)} \right).$$

Она получается следующим образом. Берется вектор $\overrightarrow{b}^{(k)} = \left(b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k)}, \dots, b_n^{(k)} \right)^T$, дополняется до ортонормированного базиса размерности $n-k$. Матрица этого базиса транспонируется.

Тогда

$$S_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1}^{(k)} \\ \dots \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \lambda_k^* \left(\sum_{i=1}^n a_{k+1,i}^{(k)} b_i^{(k)} \right) \\ \lambda_k^* \left(\sum_{i=1}^n a_{k+1,i}^{(k)} s_{k+2,i}^{(k)} \right) \\ \dots \\ \lambda_k^* \left(\sum_{i=1}^n a_{k+1,i}^{(k)} s_{n,i}^{(k)} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1}^{(k)} \\ \dots \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \frac{\lambda_k}{\left| \overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)} \right|^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(a_{k+1,i}^{(k)} \right)^2 \right) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1}^{(k)} \\ \dots \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \lambda_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S_{k+1} \cdot \vec{a}_i^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{i,1}^{(k)} \\ \dots \\ a_{i,i}^{(k)} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, k}, \quad S_{k+1} \cdot \vec{a}_i^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{i,1}^{(k)} \\ \dots \\ a_{i,k}^{(k)} \\ \lambda_k^* \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(k)} b_j^{(k)} \\ \lambda_k^* \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(k)} s_{2,j}^{(k)} \\ \dots \\ \lambda_k^* \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(k)} s_{n,j}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{k+2, n}.$$

Таким образом получим новую решетку $\Lambda_n^{(k+1)}$, с базисом

$$A_n^{(k+1)} = S_{k+1} \cdot A_n^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1}^{(k)} & \dots & a_{k,1}^{(k)} & a_{k+1,1}^{(k)} & a_{k+2,1}^{(k+1)} & \dots & a_{n,1}^{(k+1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \dots & a_{k,2}^{(k)} & a_{k+1,2}^{(k)} & a_{k+2,2}^{(k+1)} & \dots & a_{n,2}^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k,k}^{(k)} & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+2,k}^{(k+1)} & \dots & a_{n,k}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & a_{k+2,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{n,k+1}^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+2,n}^{(k+1)} & \dots & a_{n,n}^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

у которого первые $k+1$ столбцов образуют верхнетреугольную матрицу. Эта решетка является критической для единичного шара K_n . Отметим, что первые k столбцов матрицы $A_n^{(k+1)}$ совпадают с k первыми столбцами матрицы $A_n^{(k)}$. Поэтому

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k+1)}, \quad a_{i,i}^{(k)} = \lambda_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Повторив эту процедуру для всех k от 1 до $n-1$ мы получим решетку, базис которой имеет матрицу верхнетреугольного вида. Теорема доказана. $\square$

Далее мы будем рассматривать критические решетки базисы которых имеют матрицу треугольного вида.

2.1. Случай $n = 2$

Случай $n = 2$ подробно рассмотрен в [6]. Несложно показать, что

$$\Delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86603, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.86603 \end{pmatrix},$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Так как в f_2 все коэффициенты целочисленные, то по замечанию 1 она является допустимой для K_2 . Угол между двумя векторами в базисе Λ_2 равен $\pi/3$. Отметим, что решетка с базисом из любых двух единичных вектора под углом $\pi/3$ является критической.

2.2. Случай $n = 3$

В случае размерности $n = 3$ критический определитель имеет значение [6]

$$\Delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70711, \quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2}.$$

Такой определитель можно получить, если добавить к предыдущей критической решетке размерности 2 вектор под углами $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 \\ 0 & 0 & 0.8165 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(1)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Если добавить к предыдущей критической решетке вектор под углами $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.57734 \\ 0 & 0 & 0.8165 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(2)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Или, если добавить к единичной решетке вектор под углами $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(3)} = x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Отметим, что две последние решетки эквивалентны с точностью до поворота вокруг 0. Так как все точки в исследуемых нами решетках имеют модуль равный 1, то решетка (с точностью до поворота вокруг 0), определяется взаимоположением этих векторов.

Рассмотрим графы, у которого вершинам соответствуют точки базиса решетки, а ребрам – попарные скалярные произведения различных точек базиса. Графы такого вида полные. Будем рассматривать множество графов, соответствующих исследуемым нами критическим решеткам (далее *множество графов взаиморасположения базисов критических решеток*). При этом изоморфные между собой графы мы будем учитывать как один. Для размерности $n = 2$ это множество состоит из одного графа с ребром $\frac{1}{2}$ (см. рис. 1).

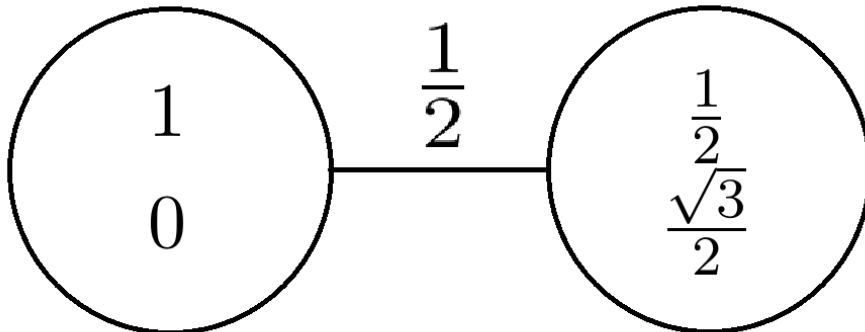


Рис. 1: Граф взаиморасположения векторов критической решетки размерности 2

Для размерности 3 таких множество состоит из 2-х графов. Они изображены на рисунке 2. Для простоты изложения, будем описывать их матрицей смежности:

$$\Gamma_3^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Заметим, что формы $f_3^{(1)}$, $f_3^{(2)}$ и $f_3^{(3)}$ эквивалентны. Действительно

$$f_3^{(2)} = f_3^{(1)}(x_1, x_2 + x_3, -x_3), \quad f_3^{(3)} = f_3^{(1)}(-x_1, x_1 + x_3, x_2)$$

Так как любая форма, эквивалентная предельной, также является предельной, то вместо предельных форм обычно рассматривают классы эквивалентности предельных форм. Таким образом, альтернативой подсчета количества решеток выступает подсчет количества классов предельных квадратичных форм. Для размерностей $n = 2$ и 3 существует только один класс предельных форме [9]. Это форма

$$\varphi_0^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^i x_i x_j.$$

Она является предельной формой для $n \geq 2$ [9].

Наряду с предельными формами рассматривают *совершенные* формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. [27] *Положительно определенная квадратичная форма, полностью определяемая заданием значения ее арифметического минимума и всех его представлений, называется совершенной.*

В работах А. Н. Коркина и Е. И. Золатарева [18] было показано, что всякая предельная форма является совершенной. Для размерностей $n = 2$ и 3 также существует только один класс совершенных форме [9].

2.3. Случай $n = 4$ и $n = 5$

Значение постоянной Эрмита для $n = 4$ было получено А. Н. Коркиным и Е. И. Золатаревым [16, 17]

$$\gamma_4 = \sqrt{2}$$

В своих работах они предложили метод приведения квадратичных форм произвольной размерности (известный как приведение Коркина-Золатарева), который позволил достичь значительных результатов в задаче вычисления постоянной Эрмита для небольших n . Это позволило получить значение постоянной Эрмита для $n = 5$ [18]

$$\gamma_5 = \sqrt[5]{8}$$

Критический определитель размерности $n = 4$ имеет значение

$$\Delta_4 = \frac{1}{2} = 0.5$$

Критическую решетку размерности 4 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_3^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f_4^{(1)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Другую критическую решетку можно получить, если добавив к единичной решетке вектор под углами $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f_4^{(2)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 4 состоит из 2-х графов:

$$\Gamma_4^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Количество классов предельных и совершенных форм размерности 4 равно 2 [9, 17]. Это формы $\varphi_0^{(4)}$ и $\varphi_1^{(n)} = \varphi_0^{(n)} - x_1x_2$. Форма $\varphi_1^{(n)}$ является предельной для $n \geq 4$ [18].

Критический определитель размерности $n = 5$ имеет значение

$$\Delta_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35355$$

Критическую решетку размерности 5 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_4^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_5^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4^2 + x_5^2$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 5 состоит из 7-х графов:

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{(1)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, & \Gamma_5^{(2)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5^{(3)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, & \Gamma_5^{(4)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5^{(5)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \end{pmatrix}, & \Gamma_5^{(6)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5^{(7)} &= \begin{pmatrix} & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Количество классов предельных и совершенных форм размерности 5 равно 3 [9, 18]. К формам $\varphi_0^{(n)}$, $\varphi_1^{(n)}$ добавляется форма [18]

$$\varphi_2^{(5)} = \varphi_0^{(5)} - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5).$$

2.4. Случай $n = 6, 7$ и $n = 8$

Развивая идеи А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева Г. Ф. Блихфельдтом [11] были получены значения постоянной Эрмита для размерности 6, 7 и 8.

$$\gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}, \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64}, \quad \gamma_8 = 2.$$

Критический определитель размерности $n = 6$ имеет значение

$$\Delta_6 = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.21651$$

Критическую решетку размерности 6 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_5^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_6 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 & 0 & 0.61237 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 & 0.3535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.3535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61237 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0.57735 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & 0.40825 & 0.40825 & 0.61237 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0 & 0.3535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.3535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61237 & 0.57735 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57735 & 0.86603 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 8 состоит из 421 графа.

Множества классов предельных и совершенных форм размерности 8 было описано в работе [24]. Они состоят из 10916 совершенных и 2408 предельных форм.

3. Заключение

Задача нахождения постоянной Эрмита имеет богатую историю и имеет тесную связь с другими фундаментальными задачами геометрии чисел, в том числе критическими решетками единичного шара. В данной работе были рассмотрены некоторые метрические свойства критических решеток единичного шара размерности до $n = 8$. Продолжением этих исследований является обобщение полученных результатов на большие размерности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А., К работе «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм», в кн. Г. Ф. Вороной, Собр. соч., том 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
2. Венков Б. А., О приведении положительных квадратичных форм // Изв. АН, серия матем., т. 4, 1940, с. 37–52.
3. Венков Б. А., Элементарная теория чисел. - ОНТИ НКТП СССР, 1937.
4. Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел. - ОНТИ НКТП СССР, 1936.
5. Грубер. П. М., Леккеркеркер. К. Г. Геометрия чисел. – УРСС, 2004.
6. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
7. Касселс Дж. В. С. Рациональные квадратичные формы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
8. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. – М.: Мир, 1990.
9. Рышков С. С., Барановский Е. П., Классические методы теории решетчатых упаковок // УМН, Т. 34, Вып. 4, 1979, с. 3–63.
10. Barnes E. S., The complete enumeration of extreme senary forms // Phil. Trans. Roy. Soc. London, A-249, 1957, p. 461–506.
11. Blichfeldt H. F., The minimum values of positive quadratic formes in six, seven and eight variables // Math. Z., 39, 1934, p. 1–15.
12. Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел. - Изд-во АН СССР, 1959.
13. Gauss C. F., Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, Gottingische gelehrte Anzeigen, 1831.

14. Hermite Ch., Lettres de m. Hermite a m. Jacobie sur differents objets de la theorie des Nombres // J. Reine und Angew. math., 40, 1850, p. 261–315.
15. Jaquet-Chiffelle D.-O., Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7 // Annales de l'Institut Fourier, Vol. 43, 1993, p. 21–55. <http://doi.org/10.5802/aif.1320>
16. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques positives quaternaires // Math. Ann. 5, 1872, p. 581–583.
17. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques // Math. Ann. 6, 1873, p. 366–389.
18. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques positives // Math. Ann. 11, 1877, p. 242–292.
19. Lagrange J. L., Recherches d'arithmetique, Nouveaux Memoires de l'Academie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. – Berlin, 1773.
20. Minkowski H., Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivalenz // J. Reine und Angew. Math., 129, 1905, p. 220–274.
21. Minkowski H., Cher die positiven quadratischen Formen und liber Rettenbruchanliche // Algorithmen, J. Reine und Angew. Math., 107, 1891, p. 278–279.
22. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. p. 181–197.
23. Seeber L. A., Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen. – Freiburg, 1831.
24. Sikiric M., Schuermann A., Vallentin F., Classification of eight dimensional perfect forms // Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, том 13, 2006, p. 21–32. <http://doi.org/10.1090/S1079-6762-07-00171-0>.
25. Stacey K. C., The enumeration of perfect septenary forms // J. London Math. Soc., 2, 10, 1975, p. 97–104.
26. Stacey K. C., The perfect septenary forms with $\delta_4 = 2$ // J. Austral. Math. Soc., 22, 2, 1976, p. 144–164.
27. Voronoi G., Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites // J. Reine und Angew. Math., 133, 1907, p. 97–178.

REFERENCES

1. Venkov B. A. 1952, “To the work “On some properties of positive perfect quadratic forms”, in the book. G. F. Voronoi”, *Sobr. soch.*, vol. 2, publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.
2. Venkov B. A. 1940, “Uber die Reduction positiver quadratischer Formen”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Vol. 4, 1940, p. 37–52.
3. Venkov B. A. 1937, *Elementary number theory*, ONTI NKTP USSR.
4. Dirichlet P. G. L., 1936, *Lectures on number theory*, ONTI NKTP USSR.

5. Gruber. p. M., Lekkerkerker. C. G. 1987, *Geometry of numbers*, Elsevier Science Publishers.
6. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.
7. Cassels J. W. S. 1982, *Rational quadratic forms*, Mir.
8. Conway J., Slooten N., 1990, *Ball packings, lattices, and groups*, Mir.
9. Ryshkov S. S., Baranovskii E. P. 1979, "Classical methods in the theory of lattice packings", *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 34, Issue 4, p. 3-63; *Russian Math. Surveys*, Vol. 34, Issue 4, p. 1-68.
10. Barnes E. S. 1957, "The complete enumeration of extreme senary forms", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A-249, p. 461-506.
11. Blichfeldt H. F., 1934, "The minimum values of positive quadratic formes in six, seven and eight variables", *Math. Z.*, 39, p. 1-15.
12. Gauss C. F. 1831, "Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen", *Formen von Ludwig August Seeber, Gottingische gelehrte Anzeigen*.
13. Gauss C. F. 1959. *Works on the theory of numbers*, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR.
14. Hermite Ch., Lettres de m. Hermite a m. Jacobie sur differents objets de la theorie des Nombres // *J. Reine und Angew. math.*, 40, 1850, p. 261-315.
15. Jaquet-Chiffelle D.-O., 1993, "Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7", *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 43, p. 21-55. <http://doi.org/10.5802/aif.1320>
16. Korkine A., Zolotareff G. 1872, "Sur les formes quadratiques positives quaternaires", *Math. Ann.*, 5, p. 581-583.
17. Korkine A., Zolotareff G. 1873, "Sur les formes quadratiques", *Math. Ann.*, 6, p. 366-389.
18. Korkine A., Zolotareff G. 1877, "Sur les formes quadratiques positives", *Math. Ann.*, 11, p. 242-292.
19. Lagrange J. L., 1773, *Recherches d'arithmetique, Nouveaux Memoires de l'Academie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*.
20. Minkowski H. 1905, "Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivalenz", *J. Reine und Angew. Math.*, 129, p. 220-274.
21. Minkowski H., 1891, "Cher die positiven quadratischen Formen und liber Rettenbruchanliche", *Algorithmen, J. Reine und Angew. Math.*, 107, p. 278-279.
22. Nowak W. G. 2016, "Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem", In: *T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland*, p. 181-197.
23. Seeber L. A., 1831, *Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen*, Freiburg.
24. Sikiric M., Schuermann A., Vallentin F., 2006, "Classification of eight dimensional perfect forms", *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, Vol. 13, p. 21-32. <http://doi.org/10.1090/S1079-6762-07-00171-0>

-
25. Stacey K. C., 1975, “The enumeration of perfect septenary forms”, *J. London Math. Soc.*, 2, 10, p. 97–104.
 26. Stacey K. C., 1976, “The perfect septenary forms with $\Delta_4 = 2$ ”, *J. Austral. Math. Soc.*, 22, 2, p. 144–164.
 27. Voronoi G., 1907, “Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites”, *J. Reine und Angew. Math.*, 133, p. 97–178.

Получено: 2.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-38-44

О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел¹

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказана теорема о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел. Особое внимание обращено на “явные формулы” и условия единственности таких представлений. Здесь найдено, что последовательность остатков в этом разложении имеет равномерное распределение. Данное утверждение обобщает известный результат Харди–Литтлвуда для позиционных систем счисления. В основе доказательства лежат два утверждения: критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица и теоретико-вероятностная лемма Бореля–Кантелли.

Ключевые слова: мультипликативная система чисел, разложение действительного числа в этой системе, последовательность остатков, равномерное распределение остатков, критерий Г.Вейля, лемма Бореля–Кантелли.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 38 – 44.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-38-44

On the uniform distribution of remainders in the expression of real numbers over a multiplicative system numbers

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the expression of real numbers on multiplicative number system. It pay a special attention to “explicit formulas” and conditions of the uniqueness of such representations. Here is found that the sequence remainders in this expansion has the uniform distribution. The given statement generalises the known result of Hardy–Littlewood for a positional system of calculus. On the base of proof lie two statement: the Weyl’s criteria of the uniform distribution of a sequence modulo unit and the theoretic-probability lemma of Borel–Cantelli.

Keywords: multiplicative number system, real number expansion on this system, the sequence of remainders, the uniform distribution of remainders, G.Weyl criteria, lemma of Borel–Cantelli.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2022, “On the uniform distribution of remainders in the expression of real numbers over a multiplicative system numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 38 – 44.

Введение

В настоящей статье дано обобщение известной теоремы Харди–Литтлвуда (1914) о равномерном распределении последовательности остатков вида

$$x_n = x_n(\alpha) = \{q^{n-1}\alpha\}$$

в q -ичном разложении почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел α , где $q > 1$ — натуральное число.

1. Методы исследования

В основе исследования лежат критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица и теоретико-вероятностная лемма Бореля–Кантелли.

2. Формулировка основных результатов

Основная теорема. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность $x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}$ равномерно распределена по модулю единица, где $q_k \geq 2, k \geq 1$ — последовательность натуральных чисел.

Последовательность $x_n = x_n(a)$ представляет собой последовательность остатков в разложении числа a по мультипликативной системе чисел. Определения даны в следующем параграфе.

3. Разложение действительных чисел по мультипликативной системе чисел

3.1. Разложение натуральных чисел. Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $q_k \geq 2, k \geq 1$. Определим мультипликативную систему натуральных чисел $m_k, k \geq 0$, вида

$$m_0 = 1, m_k = m_{k-1} q_k, k \geq 1. \quad (1)$$

Любое натуральное число $a \geq 1$ единственным образом представимо в виде

$$a = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k m_k, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_k - 1,$$

где $\bar{a}_k$ — целые, а число n определяется из условий $m_n \leq a < m_{n+1}$.

При $k \geq 0$ положим

$$\bar{a}_k = \left[\frac{a}{m_k} \right] - q_{k+1} \left[\frac{a}{m_{k+1}} \right].$$

3.2. Разложение действительных чисел. Рассмотрим теперь a — любое действительное число из полуинтервала $[0, 1)$. Говорят, что число a представимо в виде ряда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k}, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_{k+1} - 1, \quad (2)$$

где при $k \geq 0$ числа $\bar{a}_k$ — целые и $\bar{a}_0$ могут принимать два значения либо 0, либо 1, причем для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$a - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} < m_n^{-1}. \quad (3)$$

Теорема 1. Любое действительное число единственным образом представимо в виде (2) и (3).

Доказательство см. [1], теорема 1.

3.3. Остатки в разложении действительных чисел. Определим при $n \geq 1$ последовательность $\{x_n\}$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} + \frac{x_n}{m_n}, 0 \leq x_n < 1, \bar{a}_0 = 0.$$

Для любого $n \geq 1$ находим

$$\frac{\bar{a}_n}{m_n} + \frac{x_n}{m_n} = \frac{x_{n-1}}{m_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = q_n x_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_n = [q_n x_{n-1}], x_n = \{q_n x_{n-1}\}.$$

Отсюда получим

$$x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любых натуральных чисел m и n и любого действительного числа α из промежутка $[0, 1)$ справедливо тождество

$$\{m\{n\alpha\}\} = \{mn\alpha\}.$$

3.4. Законы распределения остатков в разложении действительных чисел. Далее пусть число a , $0 \leq a < 1$, представимо в виде (2) и (3), и пусть при $0 \leq t < 1$ определена периодическая функция $\chi_t(x+1) = \chi_t(x)$ вида

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < t, \\ 0, & \text{если } t \leq x < 1. \end{cases}$$

Тогда число $P(N; t)$ членов последовательности $x_n = x_n(a)$, $n \leq N$, лежащих в полуинтервале $[0, t)$ равно

$$P(N; t) = \sum_{k=1}^N \chi_t(x_k).$$

Если же существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(N; t)}{N} = \sigma(t),$$

то функция $\sigma(t)$ называется законом распределения последовательности $\{x_n\}$. Тогда для любого действительного числа t справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha) d\alpha &= \int_0^1 d\sigma(\alpha), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (P_n(\alpha) - \sigma(t))^2 d\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n^2(\alpha) d\alpha - \sigma^2(t). \end{aligned}$$

По лемме Бореля–Кантелли последних двух соотношений обычно достаточно для установления закона распределения последовательности $\{x_n\}$.

В частности, для равномерного распределения последовательности $\{x_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ имеем $\sigma(t) = t$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha; f) d\alpha = \int_0^1 f(\alpha) d\sigma(\alpha),$$

где

$$P_n(t; f) = \sum_{k=1}^n f(\chi_t(x_k)).$$

3.5. Равномерное распределение остатков в разложении действительных чисел.

Основная теорема. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность $x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}$ равномерно распределена по модулю единица, где $q_k \geq 2, k \geq 1$ — последовательность натуральных чисел.

Доказательство. Воспользуемся критерием Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю 1. Положим $Q_n = q_n q_{n-1} \dots q_1$,

$$S_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h Q_k a},$$

где $h \neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Тогда условие равномерной распределенности последовательности x_n по модулю 1 эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = 0.$$

Далее, имеем

$$\int_0^1 |S_n(a)|^2 da = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i h (Q_k - Q_l) a} da = \frac{1}{n},$$

поскольку

$$\int_0^1 e^{2\pi i m \alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отсюда при $n = q^4$ находим, что неравенство $|S_{q^4}| > q^{-1/2}$ справедливо на множестве E_q , мера $\mu = \mu(E_q)$ которого не превосходит q^{-3} . Действительно,

$$\frac{1}{q^4} = \int_0^1 |S_{q^4}(a)|^2 da \geq q^{-1} \mu E_q, \mu E_q \leq q^{-3}.$$

Следовательно, для любого натурального p мера $\mu(E'_p)$ множества $E'_p = \bigcup_{q \geq p} E_q$ не превосходит

$$\mu(E'_p) \leq \sum_{q=p}^{\infty} \mu(E_q) \leq \sum_{q=p}^{\infty} q^{-3} \leq p^{-3} + \int_p^{\infty} \frac{dt}{t^3} = p^{-3} + 2p^{-2} \leq 3p^{-2}.$$

Стало быть, множество $E' = \bigcap_{p=1}^{\infty} E'_p$ имеет меру нуль. Это и доказывает теорему 2.

4. Обсуждение результатов

А.О.Гельфонд обобщил теорему Харди–Литтлвуда на $q = \theta$ -ичные разложения, $\theta > 1$ и нашел закон распределения последовательности остатков при произвольном нецелом θ для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел α из промежутка $[0, 1)$. А.О.Гельфонд также нашел интересные свойства закона распределения в случае, когда θ является числом Пизо–Виджаярагхавана.

5. Заключение

Предполагается продолжить исследования законов распределения остатков в других системах счисления, в частности, связанных со специальными алгебраическими числами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., 1914, **37**.
2. Borel E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.// Rend. Circolo math. Palermo, 1909, **27**.
3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем. (in Russian). 1959, **23** (Избр. тр. с.366-371).
4. Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washington. 1919. Ch.17.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.
8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.
9. Бернулли Д.// Comment. Acad.Sci. Petrop., 1728, **3**, p. 85–100.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.
11. de Moivre A.// Philos. Trans., 1722, **32**, p. 162–178.
12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.
13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.
14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.
15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.
16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14**, No.3, p.370.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. (1914). The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., **37**.
2. Borel E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.// Rend. Circolo math. Palermo, **27**.
3. Gel'fond A. O. (1959). On one general property of numerical system// Izv. AN SSSR, Ser. math. (in Russian). **23** (Selected works. p.366-371).
4. Zeckendorf E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. (1919). History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washington. Ch.17.

6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. (2006). Lectures on mathematical analysis. — M.: Drofa. Pp. 640.
7. Cassels J. W. S. (1961). An introduction to Diophantine approximation. — Cambridge University Press. Pp. 212.
8. Hall M., Jr. (1970). Combinatorial theory. — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp. Pp. 424.
9. Bernoulli D. (1728). Combinatorial theory. // Comment. Acad. Sci. Petrop., **3**, p. 85–100.
10. Knuth D. E. (1998). The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed. — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, California-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc.. Pp. 720.
11. de Moivre A. (1722). // Philos. Trans., **32**, p. 162–178.
12. Chebyshev P. L. (1936). The theory of probabilities. — AN SSSR. §23. 143–147. (in Russian).
13. Landau E. (1947). Fundamentals of analysis. — M.: Inostr. literature. (in Russian).
14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. (1987). Series and the Uolsh's transformations: the theory and applications. — M.: Nauka, pp. 344. (in Russian).
15. Mineev M. P., Chubarikov V. N. (2014). Lectures on arithmetical questions of cryptography. — M.: ООО“Luch”, pp. 224. (in Russian).
16. Ghyasi A. H. (2007). A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems // Russian Journal of Mathematical Physics. **14**, No.3, p.370.

Получено: 18.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-45-56

Некоторые результаты для весовых констант
Бернштейна — Никольского¹

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула)

e-mail: dvgtail@mail.ru

Аннотация

В данной небольшой обзорного плана работе мы приводим последние результаты по точным константам Бернштейна — Никольского для полиномов на многомерной единичной сфере в пространстве L^p с весом Данкля и оператором Бельтрами–Данкля и родственным весовым константам для полиномов и целых функций экспоненциального типа и операторами Гегенбауэра, Бесселя. Долгое время классическим направлением теории неравенств Бернштейна — Никольского было установление порядкового роста констант в зависимости от роста степени полиномов. Современным развитием теории является доказательство асимптотических равенств типа Левина — Любинского, которые уточняют порядковые соотношения. Основные результаты здесь получили F. Dai, M. Ganzburg, E. Levin, D. Lubinsky, S. Tikhonov, авторы работы.

Мы отталкиваемся от доказанных ранее соотношений между многомерной константой Бернштейна — Никольского и одномерной константой для алгебраических полиномов с весом и дифференциальным оператором Гегенбауэра. В случае группы отражений октаэдра и функции кратности κ , такой что $\min \kappa = 0$, имеет место равенство между этими константами. Как следствие, для $p \geq 1$ это позволяет выписать асимптотические равенства равенства Левина — Любинского для констант Бернштейна — Никольского с целой степенью оператора Бельтрами — Данкля. Случай $\min \kappa > 0$ рассмотрен для случая констант Никольского и окружности. Для подпространства четных полиномов с четными гармониками установлена связь с точной константой Никольского для полиномов на компактных однородных пространствах ранга 1. Это позволило выписать равенство Левина — Любинского для поточечных констант при всех $p > 0$ и обычных констант при $p \geq 1$, которое согласуется с известным порядковым неравенством.

Предельные константы в асимптотических равенствах Левина — Любинского выражаются через константы Бернштейна — Никольского для целых функций экспоненциального типа на евклидовом пространстве, полуоси со степенным весом и операторами Лапласа, Лапласа — Данкля, Бесселя. Дальнейшее уточнение значений констант связано с их оценкой при больших значениях размерности пространства или степени степенного веса. В работе мы приводим схему получения таких оценок для случая пространства L^1 . Этот случай также интересен тем, что он связан с экстремальной проблемой Ремеза о концентрации L^1 -нормы.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Ключевые слова: единичная сфера, полином, вес Данкля, константа Бернштейна — Никольского, равенство Левина — Любинского, проблема Ремеза.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Некоторые результаты для весовых констант Бернштейна — Никольского // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 45–56.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-45-56

Some results for weighted Bernstein–Nikol’skii constants²

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Dobrovolskii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

In this short review paper, we present the latest results on the sharp Bernstein–Nikol’skii constants for polynomials on the multidimensional unit sphere in the space L^p with the Dunkl weight and the Beltrami–Dunkl operator and related weight constants for polynomials and entire functions of exponential type and Gegenbauer and Bessel operators. For a long time, the classical trend in the theory of Bernstein–Nikol’skii inequalities was the establishment of an growth rate of constants depending on the growth of the degree of polynomials. The modern development of the theory is the proof of asymptotic equalities of Levin–Lubinsky-type, which refine the asymptotic equivalences. The main results here were obtained by F. Dai, M. Ganzburg, E. Levin, D. Lubinsky, S. Tikhonov, the authors of the work.

We start from the previously proven relations between the multidimensional Bernstein–Nikol’skii constant and the one-dimensional constant for algebraic polynomials with the Gegenbauer weight and the Gegenbauer differential operator. In the case of the reflection group of an octahedron and a multiplicity function κ such that $\min \kappa = 0$, these constants are equal. As a corollary, for $p \geq 1$ this allows one to write down the Levin–Lubinsky asymptotic equalities of the Bernstein–Nikol’skii constants with an integer power of the Beltrami–Dunkl operator. The case $\min \kappa > 0$ is considered for the case of Nikol’skii constants and the circle. For the subspace of even polynomials with even harmonics, a connection is established with the sharp Nikol’skii constant for polynomials on compact homogeneous spaces of rank 1. This made it possible to write the Levin–Lubinsky equality for pointwise constants for all $p > 0$ and general constants for $p \geq 1$, which agrees with the known asymptotic inequality.

The limit constants in the Levin–Lubinsky asymptotic equalities are expressed in terms of the Bernstein–Nikol’skii constants for entire functions of exponential type on Euclidean space, half-axis with the power weight and Laplace, Laplace–Dunkl, Bessel operators. Further refinement of the values of the constants is connected with their estimation at large dimension of space or

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

the weight exponent. In this paper, we present a scheme for obtaining such estimates for the case of the space L^1 . This case is also interesting because it is related to the Remez extremal L^1 -norm concentration problem.

Keywords: unit sphere, polynomial, Dunkl weight, Bernstein–Nicol’skii constant, Levin–Lubinsky equality, Remez problem

Bibliography: 15 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, 2022, “Some results for weighted Bernstein–Nicol’skii constants”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 45–56.

1. Введение

Будем опираться на введенные в работах [9, 10] обозначения. Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+$; $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ — полиномы Якоби; $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha, \alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha, \alpha)}(1)}$ — нормированные условием в единице полиномы Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w_\alpha(t) = (1 - t^2)^\alpha$, где $\alpha \geq -1/2$;

$$G_\alpha = (1 - t^2) \frac{d^2}{dt^2} - (2\alpha + 2)t \frac{d}{dt}$$

— дифференциальный оператор Гегенбауэра. Если $g(t) = \sum_{j=0}^n \hat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$ — разложение Фурье–Гегенбауэра полинома $g \in \mathcal{P}_n$, то для $s \geq 0$

$$(-G_\alpha)^s g(t) = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha, n})^s \hat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$$

где $\lambda_{\alpha, n} = n(n + 2\alpha + 1)$ — собственные значения оператора $(-G_\alpha)$.

Пусть $\mathbb{S}^d$, $d \in \mathbb{N}$, — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$; $v_\kappa(x) = \prod_{a \in R_+} |\langle a, x \rangle|^{2\kappa(a)}$ — степенной вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$, где R_+ — положительная подсистема заданной системы корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $W(R)$. Сужение v_κ на $\mathbb{S}^d$ называется сферическим весом Данкля.

Для $p \in (0, \infty]$ и множества X с весом $v: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ через $L_v^p(X)$ обозначается пространство измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой $\|f\|_{p, v} = (\int_X |f(x)|^p v(x) dx)^{1/p}$ для $p < \infty$ (квазинормой при $p < 1$), $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$ для $p = \infty$; $\|f\|_p = \|f\|_{p, 1}$ для единичного веса; $\hat{v}(x) = \frac{v(x)}{\int_X v(y) dy}$ — нормированный вес для компактного X .

Пусть Π_n^d — пространство комплекснозначных сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда в $L_{v_\kappa}^2(\mathbb{S}^d)$ имеем $\Pi_n^d = \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространство сферических κ -гармоник порядка j . Пусть $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где размерность $h_j(d) = \binom{j+d}{d} - \binom{j+d-2}{d}$; proj_j^κ — проектор на $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $\Delta_{\kappa, 0}$ — оператор Бельтрами–Данкля на сфере;

$$(-\Delta_{\kappa, 0})^s \text{proj}_j^\kappa = (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^s \text{proj}_j^\kappa,$$

где $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$, $d_\kappa = d + 2 \sum_{a \in R_+} \kappa(a)$ — размерность Данкля для $\mathbb{S}^d$.

Через $Z_j^\kappa(x, y) = \sum_{i=1}^{h_j(d)} Y_{ji}(x) \overline{Y_{ji}(y)}$ обозначается воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$. Имеем

$$\tilde{Z}_j^\kappa(x, y) = \frac{Z_j^\kappa(x, y)}{h_j(d_\kappa)} = V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle \cdot, y \rangle)](x),$$

где V_κ — оператор сплетения Данкля.

Пусть $Y \subset L^\infty(X)$ — некоторое подпространство, имеющее непустое пересечение с $L_v^p(X)$; D — некоторый (дифференциальный) оператор, для которого $DY \subset Y$. Тогда точная константа Бернштейна — Никольского в $L_v^p(X)$ для подпространства Y определяется как решение экстремальной задачи

$$C(Y, D, L_v^p(X)) = \sup_{f \in (Y \cap L_v^p(X)) \setminus \{0\}} \frac{\|Df\|_\infty}{\|f\|_{p,v}}.$$

Для единичного оператора $D = I$ она называется константой Никольского. Для $D \neq I$ и $p = \infty$ получаем константу Бернштейна. Пусть $\widehat{C}(Y, D, L_v^p(X)) = C(Y, D, L_v^p(X))$.

Также изучается точечный вариант константы Бернштейна — Никольского для фиксированной точки $x_0 \in X$:

$$C^{(x_0)}(Y, D, L_v^p(X)) = \sup_{f \in (Y \cap L_v^p(X)) \setminus \{0\}} \frac{|Df(x_0)|}{\|f\|_{p,v}} \leq C(Y, D, L_v^p(X)).$$

Данная константа удобна для вычислений и оценок. Поэтому в теории, как правило, вначале доказывается равенство между константами для подходящей точки x_0 .

Нас будут интересовать многомерная константа Бернштейна — Никольского в пространстве $L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)$ и ее одномерный вариант в пространстве $L_{w_\alpha}^p([-1, 1])$. Пусть

$$C_{p,\kappa}(d, n, s) = C(\Pi_n^d, (-\Delta_{\kappa,0})^s, L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)),$$

$$C_{p,\alpha}(n, s) = C(\mathcal{P}_n, (-G_\alpha)^s, L_{w_\alpha}^p([-1, 1]))$$

и аналогично для нормированных весов и точечных констант. Справедливы следующие утверждения о взаимосвязи этих констант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([9]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $s \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{S}^d$. Тогда

$$\sup \left| \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^s \widehat{g}_j \widetilde{Z}_j^\kappa(x_0, x_0) \right| \leq \widehat{C}_{p,\kappa}(d, n, s) \leq \sup \left| \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^s \widehat{g}_j \right| = \widehat{C}_{p,\alpha_\kappa}^{(1)}(n, s) = \widehat{C}_{p,\alpha_\kappa}(n, s),$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha_\kappa)}(t) \in \mathcal{P}_n$ с нормой $\|g\|_{p, \widehat{w}_{\alpha_\kappa}} = 1$. В частности, для $\kappa \equiv 0$ имеем

$$\widehat{C}_{p,0}(d, n, s) = \widehat{C}_{p,d/2-1}(n, s).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([10]). Пусть $R = \{\pm e_1, \dots, \pm e_{d+1}\}$, $R_+ = \{e_1, \dots, e_{d+1}\}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa(\pm e_j) = \kappa_j \geq 0$, $W(R) = \{\pm 1\}^{d+1}$ — группа октаэдра, $v_\kappa(x) = \prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$. Тогда, если $\min \kappa = \min_{j=1, \dots, d+1} \kappa_j = 0$, то для $p \geq 1$

$$\widehat{C}_{p,\kappa}(d, n, s) = \widehat{C}_{p,\alpha_\kappa}(n, s).$$

Если $s = 0$ и $\min \kappa > 0$, то константы не равны по порядку при больших n .

Было бы интересно свести вычисление многомерной константы к одномерной в общей ситуации. Однако данная проблема видится сложной. Тем не менее важно изучать даже частные варианты. В качестве примера в условиях предложения 2 рассмотрим случай окружности $\mathbb{S}^1$. Не ограничивая общности можно считать, что $k_1 \geq k_2$. Положим $x = (\sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тогда вес $v_\kappa(\theta) = |\sin \theta|^{2\kappa_1} |\cos \theta|^{2\kappa_2}$ и пространство полиномов Π_n^1 можно отождествить с множеством комплекснозначных тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_n$ степени не выше n . Возьмем

подпространство $Y_{2n} \subset \Pi_{2n}^1$ четных полиномов $\sum_{k=0}^n a_k \cos 2k\theta = T(2\theta)$, $T \in \mathcal{T}_n^{even}$. Нетрудно показать, что

$$\left(\int_0^{2\pi} |T(2\theta)|^p v_\kappa(\theta) d\theta \right)^{1/p} = \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p w_{\kappa_1-1/2, \kappa_2-1/2}(\theta) d\theta \right)^{1/p},$$

где $w_{\alpha, \beta}(\theta) = |\sin \frac{\theta}{2}|^{2\alpha+1} |\cos \frac{\theta}{2}|^{2\beta+1}$ — тригонометрический вес Якоби (см. [7]). Следовательно,

$$C(Y_{2n}, I, L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^1)) = C(\mathcal{T}_n^{even}, I, L_{w_{\kappa_1-1/2, \kappa_2-1/2}}^p(\mathbb{T})). \quad (1)$$

Последняя константа Никольского связана с точными константами для компактных однородных пространств ранга 1 и изучена в работе [7].

2. Асимптотические равенства Левина — Любинского

Большой интерес представляет выяснение поведения констант Бернштейна — Никольского в зависимости от изменения параметров. Типичным результатом в данном направлении является зависимость

$$C_{p, d/2-1}(n, s) \asymp n^{d/p+2s}, \quad n \rightarrow \infty,$$

при фиксированных $p > 0$, d и s (см. [13] для $p \geq 1$ и [3] для $p < 1$). В случае веса Данкля приведем пример для группы октаэдра, где [4]

$$C(\Pi_n^d, I, L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)) \leq C n^{(d_\kappa - 2 \min \kappa)/p}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p \in (0, \infty). \quad (2)$$

Современным направлением теории неравенств Бернштейна — Никольского является уточнение этого асимптотического поведения и доказательство асимптотических равенств типа Левина — Любинского. В частности, в статье [1] доказано, что для $n \rightarrow \infty$

$$C_{p,0}(d, n, 0) = C(\mathcal{E}^d, I, L^p(\mathbb{R}^d)) n^{d/p} (1 + o(1)), \quad p \in (0, \infty),$$

где $\mathcal{E}^d$ — множество целых функций от d переменных экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных на $\mathbb{R}^d$. В статье [5] рассмотрен случай $s \in \mathbb{Z}_+$ и доказано, что

$$C_{p,0}(d, n, s) = C(\mathcal{E}_p^d, (-\Delta)^s, L^p(\mathbb{R}^d)) n^{d/p+2s} (1 + o(1)), \quad p \in [1, \infty],$$

где Δ — оператор Лапласа. Для $p < 1$ и $s \neq 0$ доказательство данного равенства является открытой проблемой.

Для случая веса Данкля в связи с предложением 2 большую роль приобретают результаты для константы $C_{p,\alpha}(n, s)$ с произвольным не обязательно полуцелым α . В частности, в статье [5] также доказано, что для $p \in (0, \infty]$, $\alpha \geq -1/2$, $s \in \mathbb{Z}_+$

$$C_{p,\alpha}^{(1)}(n, s) = C^{(0)}(\mathcal{E}^{even}, (-B_\alpha)^s, L_{x^{2\alpha+1}}^p(\mathbb{R}_+)) n^{(2\alpha+2)/p+2s} (1 + o(1)), \quad (3)$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}^1$, $B_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{t} \frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Бесселя. Если $p \geq 1$, то точечные и обычные константы Бернштейна — Никольского совпадают и в равенстве (3) можно убрать верхние индексы «(1)» и «(0)». Случаи $p < 1$ и дробных s открыты. Отметим, что для константы Никольского ($s = 0$) другое доказательство асимптотического равенства типа Левина — Любинского (3) с явной оценкой остаточного члена приведено в [12].

Из равенства (3) без индексов и предложения 2 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 2 для $p \in [1, \infty]$, $\alpha \geq -1/2$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{C}_{p,\kappa}(d, n, s) = C_{p,\kappa,s} n^{d_\kappa/p+2s} (1 + o(1)),$$

где константа $C_{p,\kappa,s}$ с точностью до множителя совпадает с $C(\mathcal{E}^{even}, (-B_{\alpha_\kappa})^s, L_{x^{2\alpha_\kappa+1}}^p(\mathbb{R}_+))$.

Из равенства (1) и результатов работы [7] можно вывести следующее утверждение для константы Никольского в случае веса Данкля $v_\kappa(\theta) = |\sin \theta|^{2\kappa_1} |\cos \theta|^{2\kappa_2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях предложения 2 при $p \in (0, \infty)$ справедливо следующее равенство Левина — Любинского

$$C^{(0)}(Y_{2n}, I, L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^1)) = C_{p, \kappa_1}^{(0)} n^{(2\kappa_1+1)/p} (1 + O(n^{-1})),$$

где предельная константа $C_{p, \kappa_1}^{(0)}$ с точностью до множителя совпадает с константой Никольского $C^{(0)}(\mathcal{E}^{\text{even}}, I, L_{x^{2\kappa_1}}^p(\mathbb{R}_+))$. При $p \geq 1$ оно верно и для обычных констант Никольского.

Данное утверждение особенно интересно тем, что множитель

$$2\kappa_1 + 1 = d_\kappa - 2\kappa_2 = d_\kappa - 2 \min \kappa$$

в степени n согласуется со множителем в оценке (2).

3. Границы L^1 -констант Бернштейна — Никольского

В приведенных выше равенствах Левина — Любинского устанавливается взаимосвязь между константой для полиномов высокой степени n и константой для целых функций экспоненциального типа. При этом размерность пространства d и экспонента p фиксируются. Следующий шаг состоит в выяснении поведения предельных констант при больших d и фиксированном p . В этой связи приведем доказанные в [2] границы

$$(1/2)^d \leq A_0^{-1} C(\mathcal{E}^d, I, L^1(\mathbb{R}^d)) \leq (\sqrt{2/e})^{d(1+O(d^{-2/3}))}, \quad d \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\sqrt{2/e} = 0.857\dots$, $A_0 = \frac{V_d}{(2\pi)^d}$ (индекс «0» нужен для согласования с (5)), V_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$. Этот результат имеет интересное приложение для проблемы Ремеза о концентрации нормы [2]. В случае константы для сферических полиномов в работе [1] отмечается связь нижней границы с геометрической проблемой об оценке мощности сферических дизайнов. Представляет интерес обобщить этот результат на случай константы Бернштейна — Никольского в условиях веса Данкля.

Приведем схему получения оценок L^1 -констант Бернштейна — Никольского на основе известных оценок L^1 -констант Никольского и L^∞ -констант Бернштейна. Ограничимся случаем $s = 1$. В силу (3) имеем

$$C_{1,\alpha}(n, 2) = C_{\alpha,1} n^{2\alpha+4} (1 + o(1)),$$

где

$$C_{\alpha,1} = C^{(0)}(\mathcal{E}^{\text{even}}, (-B_\alpha), L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)).$$

Получим границы $C_{\alpha,1}$ для больших α .

Для большей общности отметим, что константа $C_{\alpha,1}$ связана с константой Бернштейна — Никольского для веса v_κ и лапласиана Δ_κ Данкля на $\mathbb{R}^d$. Вес v_κ определяется как выше с подстановкой d вместо $d+1$. Пусть теперь $d_\kappa = d + 2 \sum_{a \in R_+} \kappa(a)$ — размерность Данкля для $\mathbb{R}^d$, $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$, $\omega_\kappa = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} v_\kappa(x) dx$. Тогда [11]

$$C_{\alpha_\kappa,1} = \omega_\kappa C(\mathcal{E}^d, (-\Delta_\kappa), L_{v_\kappa}^1(\mathbb{R}^d)).$$

Запишем оценки сразу для обеих констант. Оценку снизу можно получить на неотрицательных функциях. Из результатов работ [6, 8] следует, что

$$\sup_{0 \leq f \in (\mathcal{E}^d \cap L_{v_\kappa}^1(\mathbb{R}^d)) \setminus \{0\}} \frac{\|\Delta_\kappa f\|_\infty}{\|f\|_{1,v_\kappa}} = \frac{A_\kappa}{2^{d_\kappa+1}(d_\kappa+2)},$$

где

$$A_\kappa = \frac{1}{2^{d_\kappa-1} \Gamma(d_\kappa/2) \Gamma(d_\kappa/2 + 1) \omega_\kappa}. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеем*

$$C_{\alpha_\kappa, 1} \geq \frac{\omega_\kappa A_\kappa}{2^{d_\kappa+1} (d_\kappa + 2)}.$$

Из оценок работы [11] при $p = 1$ находим

$$C_{\alpha_\kappa, 1} \leq \frac{\omega_\kappa A_\kappa}{d_\kappa + 2}. \quad (6)$$

Она отличается от нижней оценки из следствия 1 в растущий экспоненциально множитель при больших d_κ .

Уточним границу (6) как это сделано в (4). Для этого применим точное неравенство Бернштейна для лапласиана Данкля [8]

$$\|\Delta_\kappa f\|_\infty \leq d_\kappa \|f\|_\infty, \quad f \in \mathcal{E}^d.$$

Отсюда

$$C(\mathcal{E}^d, (-\Delta_\kappa), L_{v_\kappa}^1(\mathbb{R}^d)) \leq d_\kappa C(\mathcal{E}^d, I, L_{v_\kappa}^1(\mathbb{R}^d)). \quad (7)$$

Несмотря на то, что такая оценка грубая, при больших d_κ она оказывается лучше (6) в убывающий экспоненциально множитель при больших d_κ . Покажем это, следуя [2] в упрощенной форме. Также используем результаты [11].

Для $\alpha = \alpha_\kappa \geq -1/2$ имеем

$$\omega_\kappa C(\mathcal{E}^d, I, L_{v_\kappa}^1(\mathbb{R}^d)) = C^{(0)}(\mathcal{E}^{\text{even}}, I, L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{E}^{\text{even}} \\ \|f\|_{1, x^{2\alpha+1}} = 1}} f(0) = C_\alpha^{(0)}.$$

Пусть $j_\alpha(x) = (2/x)^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя, $q_{\alpha,1} < q_{\alpha,2} < \dots$ — ее положительные нули, $b_\alpha = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-1}$. Для подпространства $Y = \mathcal{E}^{\text{even}} \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)$ функция $K(x) = \frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(x)$ является воспроизводящим ядром, поэтому

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) K(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad f \in Y.$$

Пусть $g \in Y^\perp \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — произвольная функция из ортогонального дополнения подпространства Y . Тогда для произвольной функции $f \in Y$

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{\mathbb{R}_+} f(x) K(x) x^{2\alpha+1} dx = \frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) (j_{\alpha+1}(x) - g(x)) x^{2\alpha+1} dx \\ &\leq \frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2} \|j_{\alpha+1}(x) - g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем двойственную оценку

$$C_\alpha^{(0)} \leq \frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2} \inf_{g \in Y^\perp} \|j_{\alpha+1}(x) - g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Для $r \geq 1$ функция $j_\alpha(rx)$ ортогональна Y , так как интеграл $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) j_\alpha(rx) x^{2\alpha+1} dx$ является значением преобразования Бесселя функции f в точке r , а по теореме Пэли–Винера оно равно тождественно нулю при $r \geq 1$. Поэтому для последовательности $r_k = \frac{q_{\alpha+1,k}}{q_{\alpha+1,1}}$ любой

сходящийся в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ряд Фурье–Бесселя $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k j_\alpha(r_k x)$ будет принадлежать $Y^\perp$. Следовательно,

$$\inf_{g \in Y^\perp} \|j_{\alpha+1}(x) - g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \inf_{a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}} \left\| j_{\alpha+1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k j_\alpha(r_k x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = I_\alpha.$$

Экстремальная задача I_α решена при $\alpha \in \{-1/2\} \cup [-0.272, \infty)$ [2]:

$$I_\alpha = \frac{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} j_{\alpha+1}(x) x^{2\alpha+1} dx}{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} x^{2\alpha+1} dx} = {}_1F_2\left(\alpha + 1; \alpha + 2, \alpha + 2; -\frac{q_{\alpha+1,1}^2}{4}\right).$$

Также в [2] проведен асимптотический анализ I_α при больших α , который влечет

$$I_\alpha = (2/e)^{\alpha(1+O(\alpha^{-2/3}))}, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Запишем приведенные результаты в виде следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеем*

$$C_\alpha^{(0)} \leq \frac{b_\alpha^2}{2\alpha + 2} \inf_{g \in Y^\perp} \|j_{\alpha+1}(x) - g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{b_\alpha^2}{2\alpha + 2} I_\alpha.$$

Неравенство (7) эквивалентно можно записать в виде $C_{\alpha,1} \leq (2\alpha + 2)C_\alpha^{(0)}$, поэтому $C_{\alpha,1} \leq b_\alpha^2 I_\alpha$. Отсюда и из следствия 1 с учетом (5) приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеем*

$$C_{\alpha_\kappa,1} \leq \frac{\omega_\kappa A_\kappa}{d_\kappa} I_{\alpha_\kappa}.$$

При больших α_κ

$$(1/2)^{d_\kappa(1+o(1))} \leq (\omega_\kappa A_\kappa)^{-1} C_{\alpha_\kappa,1} \leq (\sqrt{2/e})^{d_\kappa(1+o(1))}.$$

4. Вывод асимптотической оценки I_α

Решение задачи I_α , приведенное в [2], достаточно сложно технически и использует многочисленные свойства функции Бесселя, в том числе новые. При этом случай $\alpha \in (-0.5, -0.272)$ остается открытым.

Однако для доказательства верхней асимптотической оценки L^1 -константы Бернштейна — Никольского в предложении 4 достаточно показать, что

$$I_\alpha \leq (2/e)^{\alpha(1+o(1))}, \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Данное неравенство может быть доказано достаточно просто. Сделаем это для полноты изложения.

Решение задачи I_α использует тот факт, что система функций Бесселя $\{j_\alpha(r_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $L_{x^{2\alpha+1}}^2([0, q_{\alpha+1,1}])$. Отсюда следует, что нормированная функция Бесселя $j_{\alpha+1}(x)$ на отрезке $[0, q_{\alpha+1,1}]$ может быть разложена в ряд Фурье–Бесселя

$$j_{\alpha+1}(x) = a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* j_\alpha(r_k x), \quad x \in [0, q_{\alpha+1,1}], \quad (9)$$

где

$$a_0^* = \frac{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} j_{\alpha+1}(x) x^{2\alpha+1} dx}{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} x^{2\alpha+1} dx}.$$

Ряд $g_*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* j_{\alpha}(r_k x)$ продолжается на всю полуось. Пользуясь разложением (9) несложно показывается (см. [2]), что

$$a_0^* \leq I_{\alpha} \leq \|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+)},$$

причем здесь $\|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)\|_{L^{\infty}([0, q_{\alpha+1,1}])} = a_0^*$.

Основная сложность при решении I_{α} состояла в установлении неравенства

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leq a_0^*, \quad x > q_{\alpha+1,1}.$$

Однако для доказательства (8) достаточно использовать более простую оценку. Используя известные свойства нормированной функции Бесселя, включая невозрастание последовательных модулей локальных экстремумов, показывается, что при $x > q_{\alpha+1,1}$

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leq |j_{\alpha+1}(x) - a_1^* j_{\alpha}(x)| + a_0^* - a_1^* |j_{\alpha}(q_{\alpha+1,1})|. \quad (10)$$

Далее в статье [2] начинается сложная часть, заключающаяся в доказательстве неравенства $|j_{\alpha+1}(x) - a_1^* j_{\alpha}(x)| \leq a_1^* |j_{\alpha}(q_{\alpha+1,1})|$ при $\alpha \geq -0.272$. Однако оценку (10) можно просто продолжить как

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leq |j_{\alpha+1}(x)| + a_1^* |j_{\alpha}(x)| + a_0^* - a_1^* |j_{\alpha}(q_{\alpha+1,1})| \leq |j_{\alpha+1}(x)| + a_0^* \leq |j_{\alpha+1}(q_{\alpha+2,1})| + a_0^*.$$

Для больших α

$$a_0^* \sim 4|j_{\alpha}(q_{\alpha+1,1})| = (2/e)^{\alpha(1+o(1))}$$

и $|j_{\alpha+1}(q_{\alpha+2,1})| \sim (2/e)|j_{\alpha}(q_{\alpha+1,1})|$. Отсюда получаем (8):

$$I_{\alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{2e}\right) a_0^* (1 + o(1)) = (2/e)^{\alpha(1+o(1))}.$$

5. Проблема Ремеза для L^1 -нормы

Верхние оценки L^1 -констант Бернштейна — Никольского имеют интересное приложение в проблеме Ремеза о концентрации L^1 -нормы функции $f \in Y$ (см. [2]). Данная проблема заключается в ответе на вопрос, сколь малой может быть мера $|E|$ измеримого множества $E \subset X$, для которого найдется функция $f \in Y$, такая что

$$\rho \int_X |f(x)| v(x) dx \leq \int_E |f(x)| v(x) dx, \quad (11)$$

где фиксированный параметр $\rho \in (0, 1)$.

Известен следующий подход получения нижней оценки $|E|$ (см., например, [14]). При помощи точного неравенства Никольского получаем

$$\int_E |f(x)| v(x) dx \leq |E| \|f\|_{\infty} \leq |E| C(Y, I, L_v^1(X)) \|f\|_{1,v}.$$

Отсюда и из (11) находим

$$|E| \geq \frac{\rho}{C(Y, I, L_v^1(X))}.$$

Для продолжения этой оценки можно использовать верхние оценки константы Никольского.

Например, предложения 3 влечет следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для $\alpha \geq -1/2$ и подпространства $Y = \mathcal{E}^{even} \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)$ мера множества $E \subset \mathbb{R}_+$ в неравенстве (11) оценивается снизу как

$$|E| \geq \frac{\rho}{\frac{b_{\alpha}^2}{2\alpha+2} I_{\alpha}}.$$

6. Заключение

В проблеме вычисления точных констант Бернштейна — Никольского для сферических полиномов в пространстве L^p с весом Данкля остается много открытых вопросов. На наш взгляд, одна из основных проблем, являющейся камнем преткновения, является ответ на вопрос, можно ли в общей ситуации свести вычисление многомерной константы к нахождению соответствующей одномерной весовой константы. Для начала здесь было бы интересно получить ответ на вопрос в случае группы октаэдра, когда $\min \kappa > 0$. Также интерес случай симметричной группы. В этих случаях полностью или частично известно явное интегральное представление оператора сплетения [4, 15], что может облегчить задачу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, № 1. P. 161–185.
2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. 101553.
3. Dai F., Tikhonov S. Weighted fractional Bernstein's inequalities and their applications // J. d'Anal. Math. 2016. Vol. 129. P. 33–68.
4. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N.Y.: Springer, 2013.
5. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics // Constr. Approx. 2019. Vol. 50. P. 543–577.
6. Горбачев Д.В. Константы Никольского–Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального типа на оси // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Том 24, № 4. С. 92–103.
7. Горбачев Д.В. Константы Никольского для компактных однородных пространств // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 4. С. 100–113.
8. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Об экстремальных задачах типа Никольского–Бернштейна и Турана для преобразования Данкля // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 394–400.
9. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.
10. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н., Мартыанов И.А. Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 5. С. 354–358.
11. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87.
12. Горбачев Д.В., Мартыанов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.
13. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна — Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3 (231). С. 179–180.

14. Temlyakov V., Tikhonov S. Remez-type and Nikol'skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials // *Constr. Approx.* 2017. Vol. 46. P. 593–615.
15. Xu Y. Intertwining operator associated to symmetric groups and summability on the unit sphere // *J. Approx. Theory.* 2021. Vol. 272. 105649.

REFERENCES

1. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.
2. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2021. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, *Journal of Complexity*, vol. 65, 101553.
3. Dai, F. & Tikhonov, S. 2016. “Weighted fractional Bernstein's inequalities and their applications”, *J. d'Anal. Math.*, vol. 129, pp. 33–68.
4. Dai, F. & Xu, Yu. 2013. “Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls”, Springer, N.Y.
5. Ganzburg, M.I. 2019. “Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics”, *Constr. Approx.*, vol. 50, pp. 543–577.
6. Gorbachev, D.V. 2018. “Nikolskii–Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 24, no. 4, 2018, pp. 92–103. (In Russ.)
7. Gorbachev, D.V. 2021. “Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 100–113. (In Russ.)
8. Gorbachev, D.V. & Dobrovol'sky, N.N. 2019. “Extremal Nikolskii–Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 394–400. (In Russ.)
9. Gorbachev, D.V. & Dobrovol'skii, N.N. 2020. “Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)
10. Gorbachev, D.V., Dobrovol'skii, N.N. & Mart'yanov, I.A. 2021. “Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 354–358. (In Russ.)
11. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2019. “Nikol'skii–Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no. 2, pp. 75–87. (In Russ.)
12. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. “Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)
13. Ivanov, V.A. 1983. “On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1”, *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.
14. Temlyakov, V. & Tikhonov, S. 2017. “Remez-type and Nikol'skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials”, *Constr. Approx.*, vol. 46, pp. 593–615.

15. Xu, Y. 2021. “Intertwining operator associated to symmetric groups and summability on the unit sphere”, *J. Approx. Theory*, vol. 272, 105649.

Получено: 5.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-57-71

Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел¹

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В абстрактной теории чисел и её приложениях к статистической физике важную роль играет понятие энтропии. Так как энтропия равна логарифму функции распределения, то изучение поведения энтропии моноида равносильно решению обратной задачи для этого моноида.

В работе рассмотрены вопросы об асимптотике энтропии для некоторых моноидов натуральных чисел и моноидов натуральных чисел с весовой функцией.

Во-первых, задача решена для двух моноидов типа геометрическая прогрессия.

Во-вторых, полученные результаты относительно энтропии для моноидов с произвольной экспоненциальной последовательностью простых чисел типа q на основании полученного ранее авторами решения обратной задачи для моноидов этого типа.

Наконец, для произвольного основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q на основании решения обратной задачи, то есть нахождения асимптотике для функции распределения элементов моноида $M(\mathbb{P}(q))$, исходя из асимптотике распределения псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q , получены оценки для энтропии.

Для решения этой задачи рассматриваются два гомоморфизма основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q и задача о распределении сводится к аддитивной задаче Ингама.

Показано, что для этого класса моноидов понятие степенной плотности не работает. Введено новое понятие C логарифмической θ -степенной плотности.

Показано, что любой моноид $M(\mathbb{P}(q))$ для последовательности псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q имеет оценки сверху и снизу для функции распределения элементов основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q .

Показано, что если C логарифмическая θ -степенная плотность для основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q существует, то $\theta = \frac{1}{2}$ и для константы C справедливы неравенства $\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leq C \leq \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$.

Для основных моноидов $M(\mathbb{P}(q))$ типа q остается открытым вопрос о существовании C логарифмической $\frac{1}{2}$ -степенной плотности и величине константы C .

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, экспоненциальная последовательность простых,

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-21-00544

основной моноид $M(\mathbb{P}(q))$ типа q , C логарифмическая θ -степенная плотность, энтропия моноида натуральных чисел, энтропия моноида натуральных чисел с весовой функцией.

Библиография: 34 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 57–71.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-57-71

Entropy for some monoids of natural numbers²

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In abstract number theory and its applications to statistical physics, the concept of entropy plays an important role. Since entropy is equal to the logarithm of the distribution function, studying the entropy behavior of a monoid is equivalent to solving the inverse problem for this monoid.

The paper considers questions about the asymptotics of entropy for some monoids of natural numbers and monoids of natural numbers with a weight function.

First, the problem is solved for two monoids of the geometric progression type.

Secondly, the results obtained with respect to entropy for monoids with an arbitrary exponential sequence of primes of type q are based on the solution of the inverse problem for monoids of this type obtained earlier by the authors.

To solve this problem, we consider two homomorphisms of the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q and the distribution problem reduces to the additive Ingham problem.

It is shown that the concept of power density does not work for this class of monoids. A new concept of C logarithmic θ -power density is introduced.

It is shown that any monoid $M(\mathbb{P}(q))$ for a sequence of pseudo-simple numbers $\mathbb{P}(q)$ of type q has upper and lower bounds for the element distribution function of the main basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q .

It is shown that if C is a logarithmic θ -power density for the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q exists, then $\theta = \frac{1}{2}$ and for the constant C the inequalities are valid $\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leq C \leq \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$.

The results obtained are similar to those previously obtained by the authors when solving the inverse problem for monoids generated by an arbitrary exponential sequence of primes of type q .

²Acknowledgments: This work was prepared under a grant from the RSF № 22-21-00544.

For basic monoids $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q , the question remains open about the existence of a C logarithmic $\frac{1}{2}$ -power density and the value of the constant C .

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, exponential sequence of primes, the basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q , C logarithmic θ -power density, entropy monoid of natural numbers, entropy monoid of natural numbers with a weight function.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Entropy for some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 57–71.

1. Введение

Рассмотрим частный случай *арифметической полугруппы* из работы [28]. Будем называть *арифметической полугруппой* прямую сумму $G = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_+$ счетного числа экземпляров полугруппы $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ неотрицательных целых чисел вместе с гомоморфизмом $\partial : G \rightarrow \mathbb{N}$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел таким, что число

$$\mathcal{N}_{G,\partial}^{\#}(x) = \#\{g \in G : \partial(g) \leq x\} \quad (1)$$

элементов $g \in G$, для которых $\partial(g)$ не превосходит x , конечно для любого $x \in \mathbb{N}$. Будем обозначать j -ю компоненту элемента $g \in G$ через g_j . Таким образом, $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j p_{(j)}$, где $p_{(j)} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ (в j -позиции стоит единица, а остальные компоненты равны нулю), $j = 1, 2, \dots$ — образующие полугруппы G . Как отмечается в работе [28], фактически сумма конечна, так как у любого $g \in G$ лишь конечное число ненулевых компонент.

Гомоморфизм ∂ арифметической полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ имеет вид

$$\partial(g) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{g_j}, \quad \text{где } \lambda_j = \partial(p_{(j)}) \geq 1, \quad \lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty. \quad (2)$$

Ясно, что образ $M = \partial(G)$ является моноидом натуральных чисел.

В работе [15] начато систематическое изучение дзета-функций моноидов натуральных чисел и законов распределения простых элементов в этих моноидах.

Если, следуя за Б. М. Бредихиным, рассмотреть дзета-функцию гомоморфизма ∂ арифметической полугруппы G :

$$\zeta(G, \partial | \alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{(\partial(g))^\alpha} = \sum_{m \in M} \frac{k(m)}{m^\alpha},$$

где весовая функция $k(m)$ — число прообразов g в арифметической полугруппе G у натурального числа $m \in M$, то мы приходим к новому понятию — дзета-функция моноида с весовой функцией. Такая конструкция встречалась ранее в работе [15], когда раскладывалось в ряд Дирихле произведение Эйлера моноида M без однозначного разложения на простые элементы. Нетрудно видеть, что можно задать сюръективный гомоморфизм арифметической полугруппы G на $\mathbb{N}$ с неединичной весовой функцией. Например, $\partial(p_{(2j-1)}) = \partial(p_{(2j)}) = p_j$, p_j — j -ое простое число ($j = 1, 2, \dots$). Если $V(m)$ — количество всех простых делителей в разложении числа m на простые делители, то $k(m) = 2^{V(m)}$ в этом случае. Аналогичные примеры можно построить для любого моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

Отметим ещё одно важное обстоятельство, как будет видно из дальнейшего, образы абстрактных простых чисел из G не обязаны быть простыми элементами в моноиде $M = \partial(G)$.

В работе [28] рассматривается важная для статистической физики характеристика энтропии $\mathfrak{S}(x) = \ln \mathcal{N}_{G,\partial}^\sharp(x)$ и изучается её асимптотика.

Обобщая эту ситуацию, можно для любого моноида M натуральных чисел рассмотреть функцию $\nu_M(x) = \sum_{m \in M, m \leq x} 1$ распределения элементов моноида M и функцию энтропии $\mathfrak{S}_M(x) = \ln \nu_M(x)$. Чтобы различать энтропию арифметической полугруппы G с гомоморфизмом ∂ , мы будем писать $\mathfrak{S}_{M,\partial}(x) = \ln \mathcal{N}_{G,\partial}^\sharp(x)$, где $M = \partial(G)$.

Цель данной работы — рассмотреть вопрос об асимптотике энтропии для некоторых моноидов натуральных чисел и моноидов натуральных чисел с весовой функцией.

2. Моноид типа геометрическая прогрессия с весовой функцией

Пусть $q \geq 2$ — натуральное число и $M_1(q) = \{1, q, q^2, \dots, q^n, \dots\}$ — мультипликативный моноид, геометрическая прогрессия со знаменателем q , и $M_2(q) = \{1, q^2, q^4, q^6, \dots\}$ — мультипликативный моноид, геометрическая прогрессия со знаменателем q^2 .

Обозначим через $p_1(n)$ количество решений в неотрицательных целых числах $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots$ диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + r \cdot x_r + \dots,$$

а через $p_2(n)$ количество решений диофантова уравнения

$$n = 2(1 \cdot x_1 + \dots + r \cdot x_r + \dots).$$

Ясно, что $p_2(2n) = p_1(n)$ и $p_2(2n+1) = 0$.

Положим

$$P_1(x) = \sum_{n \leq x} p_1(n), \quad P_2(x) = \sum_{n \leq x} p_2(n).$$

Очевидно, что

$$P_2(x) = \sum_{2n \leq x} p_1(n) = P_1\left(\frac{x}{2}\right).$$

В первом случае гомоморфизм ∂_1 арифметической полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ имеет вид

$$\partial_1(g) = \prod_{j=1}^{\infty} q^{\lambda_j g_j}, \quad \text{где } q^{\lambda_j} = \partial_1(p_{(j)}) \geq 1, \quad \lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty \quad (3)$$

и хотя бы одно $\lambda_j = 1$, а во втором случае гомоморфизм ∂_2 арифметической полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ имеет вид

$$\partial_2(g) = \prod_{j=1}^{\infty} q^{2\lambda_j g_j}, \quad \text{где } q^{2\lambda_j} = \partial_2(p_{(j)}) \geq 1, \quad \lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty \quad (4)$$

и хотя бы одно $\lambda_j = 1$.

Нетрудно видеть, что функция распределения $\mathcal{N}_G^\sharp(x)$ для гомоморфизма ∂ арифметической полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$, заданного соотношениями (3), выражается через число решений в целых неотрицательных числах $g_1, g_2, \dots$ неравенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j \leq \frac{\ln x}{\ln q}. \quad (5)$$

Рассмотрим простейший естественный случай, когда $\lambda_j = j$ ($j = 1, 2, \dots$). В этом случае мы приходим к задаче Харди–Рамунаджана (см. [29], стр. 164).

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $p(n)$ количество решений в неотрицательных числах $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots$ диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + r \cdot x_r + \dots$$

ТЕОРЕМА 1. При $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3n}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}\right) \right).$$

Ясно, что для нашего случая имеем равенство

$$\mathcal{N}_{G,\partial}^\#(x) = \sum_{n=1}^{\frac{\ln x}{\ln q}} p(n).$$

Нам потребуется следующая аддитивная теорема Ингама (см. [29], стр. 180), которую мы приведём в сокращённой форме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ — данная последовательность вещественных чисел, причём

$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$

где $N(u)$ — количество чисел λ_ν , не превосходящих u , и

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v} dv = b \ln u + c + o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$. Для вещественного l пусть будет $p(l)$ — количество решений уравнения

$$l = r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + \dots$$

в целых $r_\nu \geq 0$.

Обозначим для вещественного u

$$P(u) = \sum_{l < u} p(l),$$

где суммирование ведётся по дискретному множеству чисел l , для которых $p(l) \neq 0$.

Тогда при $u \rightarrow \infty$

$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-(b+\frac{1}{2})\alpha} u^{(b+\frac{1}{2})(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

ТЕОРЕМА 3. При $x \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$P_1(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \mathcal{N}_{G,\partial_1}^\#(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}, \quad \nu_{M_1(q)}(x) = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln q} \right\rfloor + 1,$$

$$\mathfrak{S}_{M_1(q),\partial_1}(x) = \ln \mathcal{N}_{G,\partial_1}^\#(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln 2\frac{\ln x}{\ln q}, \quad \mathfrak{S}_{M_1(q)}(x) \sim \ln \frac{\ln x}{\ln q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), тогда $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$, $B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и (см. [29], стр. 181)

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_1(x) = P(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{G,\partial_1}^\sharp(x)(x) &= P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}, \\ \mathfrak{S}_{M_1(q),\partial_1}(x) &= \ln \mathcal{N}_{G,\partial_1}^\sharp(x)(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln 2\frac{\ln x}{\ln q}. \end{aligned}$$

Утверждения для функции распределения и для энтропии моноида $M_1(q)$ очевидны. $\square$

ТЕОРЕМА 4. При $x \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P_2(x) &\sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}}, \quad \mathcal{N}_{G,\partial_2}^\sharp(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}, \quad \nu_{M_2(q)}(x) = \left[\frac{\ln x}{2\ln q}\right] + 1, \\ \mathfrak{S}_{M_2(q),\partial_2}(x) &= \ln \mathcal{N}_{G,\partial_2}^\sharp(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x}{\ln q}, \quad \mathfrak{S}_{M_2(q)}(x) = \ln \nu_{M_2(q)}(x) \sim \ln \frac{\ln x}{2\ln q}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущей теоремы имеем:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}}, \\ \mathcal{N}_{G,\partial_2}^\sharp(x)(x) &= P_1\left(\frac{\ln x}{2\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}, \\ \mathfrak{S}_{M_2(q),\partial_2}(x) &= \ln \mathcal{N}_{G,\partial_2}^\sharp(x)(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x}{\ln q}. \end{aligned}$$

Утверждения для функции распределения и для энтропии моноида $M_2(q)$ очевидны. $\square$

3. Моноид с экспоненциальной последовательностью

В работе [15] дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $q \geq 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ называется экспоненциальной типа q , если выполняются соотношения $q \leq p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ ($\nu \geq 2$).

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым (см. [32]), для любого $q \geq 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел типа q .

В работе [15] было дано определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_A). \quad (6)$$

Если множество A конечное, то равенство (6) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α -плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (6) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leq \sigma_A \leq 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [30], [32]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Пусть $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $M(PE_q)$ — моноид натуральных чисел, образованный с помощью PE_q . В работе [15] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q дзета-ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE_q)|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.

В работе [21] была высказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функции $\zeta(M(PE_q)|\alpha)$, которая была доказана в работе [18]. Тем самым было установлено, что для этой дзета-функции её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

В работе [16] доказана теорема о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x , которое будем обозначать через $\pi_{M(A)}(x)$. В общем случае это непросто задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q и моноида $M(PE_q)$ можно дать удовлетворительный ответ.

ТЕОРЕМА 6. Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q для количества простых элементов в моноиде $M(PE_q)$, не превосходящих x , справедливо равенство

$$\pi_{PE_q}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE_q}(x),$$

$$\text{где } 0 \leq \theta_{PE_q}(x) = \left\{ \frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} + \left\{ \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} < 2 \text{ при } q^n \leq x < q^{n+1}.$$

Теорема 6 непосредственно связана с тематикой работ Б. М. Бредихина [2]–[10]. Следуя этим работам, определим функцию $\nu_{M(PE_q)}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE_q)}(x) = \sum_{n \in M(PE_q), n \leq x} 1.$$

В работе [26] решена обратная задача для функций $\nu_{M(PE_q)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$, т. е. нахождение асимптотики для этих функций, зная асимптотики для функций $\pi_{PE_q}(x)$ и $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. При $x \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\ln \nu_{M(PE)}(x) \sim \pi \sqrt{\frac{2 \ln x}{3 \ln q}}.$$

Отсюда сразу получается асимптотика для энтропии

$$\mathfrak{S}_{M(PE)}(x) = \ln \nu_{M(PE)}(x) \sim \pi \sqrt{\frac{2 \ln x}{3 \ln q}}.$$

4. Основные моноиды типа q

В работе [20] введено понятие основного моноида типа q и показано, что для этого моноида $M(\mathbb{P}(q))$, в котором все простые элементы суть псевдопростые числа образующие множество $\mathbb{P}(q) = \{q^n p_n | n \geq 1\}$ p_n — n -ое простое число, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Существует $n_1 = n_1(q) \geq n_0$ такое, что при $x \geq q^{n_1} n_1 \ln n_1$ справедливы оценки для $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$:

$$\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = \frac{\ln x - \ln \ln x + \ln \ln q - \ln(\ln \ln x - \ln \ln q)}{\ln q} + \theta(x), \quad |\theta(x)| \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 9. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}(q))|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

Целью данной работы будет решение обратной задачи для произвольного основного моноида типа q .

5. Вспомогательные леммы

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, $P(M)$ — множество его простых элементов и функции $\nu_M(x)$, $\pi_{P(M)}(x)$ заданы равенствами

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M, n \leq x} 1, \quad \pi_{P(M)}(x) = \sum_{r \in P(M), r \leq x} 1.$$

ЛЕММА 1. Справедливо равенство

$$\nu_M(x) \ln x = \int_1^x \nu_M(u) \frac{du}{u} + \sum_{k \geq 1} \sum_{r \in P(M), r \leq x} \nu_M\left(\frac{x}{r^k}\right) \ln r. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См.[26] $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q . Справедливо неравенство³

$$\prod_{p_j^{(q)} \leq x} \left(1 - \frac{1}{p_j^{(q)}}\right)^{-1} = \exp \left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q} \ln \left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O \left(\ln \left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right) \right) \right), \quad (8)$$

где $x \geq p_1^{(q)} > 1$.

³Здесь и далее, как обычно, $\exp(x) = e^x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26]. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q . Справедливо неравенство

$$\nu_{M(PE_q)}(x) \leq x \exp \left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q} \ln \left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}} \right)^{-1} + \frac{1}{\ln q} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O \left(\ln \left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}} \right) \right) \right), \quad (9)$$

где $x \geq p_1^{(q)} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26]. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $n_q = \pi(q) + 1$, тогда для любого $j \geq n_q$ справедливо неравенство $q^j p_j > p_j^{(q)}$. При $x \geq q^{n_q}$ справедливо неравенство $\pi_{M(PE_q)}(x) \geq \pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [27]. $\square$

Мы видим, что в данном случае подход Б. М. Бредихина не работает, так как мы заведомо имеем случай для моноидов $M(PE_q)$ и $M(\mathbb{P}(q))$, когда отсутствует степенная θ -плотность, так как при степенной плотности невозможны асимптотические формулы из теорем 6 и 8.

6. О двух гомоморфизмах основного моноида типа q

Пусть G — произвольная свободная коммутативная мультипликативная полугруппа с нейтральным элементом e и со счетным числом образующих элементов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$, множество которых будем обозначать через $\Omega(G)$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, обладающий тем свойством, что в полугруппе G имеется только конечное число элементов g с $N(g) \leq x$ для любого вещественного x . Обозначим через M его образ. Это будет мультипликативный моноид натуральных чисел $M = N(G)$. Вслед за Б. М. Бредихиным (см. [2]), рассмотрим дзета-функцию полугруппы G

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_G,$$

где σ_G — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции полугруппы G .

В силу мультипликативности гомоморфизма имеет место разложение в эйлерово произведение

$$\zeta_G(\alpha) = P_G(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha(\omega_\nu)} \right)^{-1}$$

в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_G$.

Рассмотрим дзета-функцию моноида $M = N(G)$

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции моноида $M = N(G)$.

Вообще говоря, $\zeta_G(\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Дело в том, что

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)} = \sum_{n \in M} \frac{|N^{-1}(n)|}{n^\alpha},$$

где $N^{-1}(n) = \{g \in G \mid N(g) = n\}$ — прообраз натурального числа n при гомоморфизме $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, а $|N^{-1}(n)|$ — количество элементов в этом прообразе, которое конечно в силу ограничений на гомоморфизм $N(g)$.

Таким образом, равенство дзета-функций возможно только в случае изоморфизма G и $M = N(G)$.

Следующее важное обстоятельство связано с тем, что $P(M)$ — множество простых элементов мультипликативного моноида M , вообще говоря, не совпадает с образом множества образующих элементов полугруппы G : $P(M) \subset N(\Omega(G))$.

Напомним, что если через $P(M|\alpha)$ обозначается эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Таким образом, возможны следующие ситуации:

$$\zeta(M|\alpha) \neq P(M|\alpha), \quad P(M|\alpha) \neq P_G(\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-|N^{-1}(r)|}.$$

Рассмотрим в качестве G мультипликативный моноид $M(\mathbb{P}(q))$ — основной моноид типа q , где $q \geq 2$ — любое натуральное число. Определим два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

$$\begin{aligned} N_1 : M(\mathbb{P}(q)) &\rightarrow \mathbb{N} : N_1 \left(\prod_{j=1}^n (q^j p_j)^{\beta_j} \right) = q^{\sum_{j=1}^n j \beta_j}, \\ N_2 : M(\mathbb{P}(q)) &\rightarrow \mathbb{N} : N_2 \left(\prod_{j=1}^n (q^j p_j)^{\beta_j} \right) = q^{\sum_{j=1}^n 2j \beta_j}. \end{aligned}$$

Обозначим через $M_1(q)$ образ мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ при гомоморфизме N_1 , а через $M_2(q)$ при гомоморфизме N_2 . Непосредственно из определения следует, что

$$M_1(q) = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}, \quad M_2(q) = \{1, q^2, q^4, q^6, \dots\}.$$

Отсюда сразу следует, что $P(M_1(q)) = \{q\}$ и $P(M_2(q)) = \{q^2\}$.

Определим функции $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)), N_1(n) \leq x} 1, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)), N_2(n) \leq x} 1.$$

ЛЕММА 5. *Справедливы неравенства:*

для любого $n \in M(\mathbb{P}(q))$ имеем $N_1(n) \leq n \leq N_2(n)$,

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \leq \nu_{M(\mathbb{P}(q))}(x) \leq \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [27]. $\square$

ЛЕММА 6. *Справедливы равенства*

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{2\ln q}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [27]. $\square$

Из доказанных лемм и утверждений второго раздела сразу следуют оценки сверху и снизу для энтропии основного моноида типа q :

$$\left(\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\frac{\ln x}{\ln q}\right)(1 + \theta_1(x)) \leq \mathfrak{S}_{M(\mathbb{P}(q))}(x) \leq \left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln 2\frac{\ln x}{\ln q}\right) \cdot (1 + \theta_2(x)),$$

где $\theta_1(x) \rightarrow 0$, $\theta_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

7. Заключение

В работе [6] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Из вышеизложенного видно, что это понятие не работает в случае моноидов, рассмотренных в данной работе. В работе [26] было дано естественное новое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ -степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M, n \leq x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из результатов данной работы следует, что энтропия, рассмотренная в разделах 2 и 3 подчиняется закону логарифмической $\frac{1}{2}$ -степенной плотности.

В случае основного моноида типа q для энтропии не удалось доказать существование асимптотики, а установлены только оценки снизу и сверху.

Таким образом, остается открытым вопрос о существовании логарифмической $\frac{1}{2}$ -степенной плотности для энтропии основного моноида типа q и, если она существует, то о величине константы C .

В заключение авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
2. Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ ”, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.
3. Б. М. Бредихин, “Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полу-групп”, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.

4. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.
5. Б. М. Бредихин, “О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп”, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.
6. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.
7. Б. М. Бредихин, “Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией”, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.
8. Б. М. Бредихин, Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.
9. Б. М. Бредихин, О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 — 612.
10. Б. М. Бредихин, О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.
11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
12. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
13. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
14. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.
15. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
16. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
17. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
18. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
19. Н. Н. Добровольский, “Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера”, Матем. заметки, 109:3 (2021), 464–469
20. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).
21. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о “заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

22. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
23. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.
24. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
25. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
26. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.
27. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 59–71.
28. Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский, “Замечание об обратной теореме о распределении абстрактных простых чисел”, Матем. заметки, 100:4 (2016), 627–629.
29. А. Г. Постников Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
30. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
31. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.
32. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
33. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.
34. Н. Davenport, Н. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.
2. Bredikhin, B.M., 1960, “The remainder term in the asymptotic formula for the function $\nu_G(x)$ ”, *Izvestiya vuzov Matematika*, no. 6, pp. 40–49.
3. Bredikhin, B.M., 1960, “An elementary solution of inverse problems on bases of free semigroups”, *matematicheskiy sbornik*, 50(92):2, pp. 221–232.
4. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, 118:5, pp. 855–857.
5. Bredikhin, B.M., 1958, “On power densities of some subsets of free semigroups”, *Izvestiya vuzov Matematika*, no. 3, pp. 24–30.

6. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", *matematicheskiy sbornik*, 46(88):2, pp. 143–158.
7. Bredikhin, B.M., 1956, "An example of a finite homomorphism with a bounded adder function", *UMN*, 11:4(70), pp. 119–122.
8. Bredikhin, B.M., 1956, "Some questions of the theory of characters of commutative semigroups", *Trudy 3-go Vsesoyuznogo matematicheskogo s'yezda*, vol. 1, Moskva, izdatel'stvo akademii nauk SSSR, no. 3.
9. Bredikhin, B.M., 1954, "On adder functions of characters of numerical semigroups", *DAN* 94, pp. 609 – 612.
10. Bredikhin, B.M., 1953, "On the characters of numerical semigroups with a rather rare base", *DAN* 90, pp. 707–710.
11. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
12. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
13. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
14. M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Koguhov, I. Yu. Rebrova, 2022, "Monoid of products of zeta functions of monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 102–117.
15. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
16. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
17. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 142–150.
18. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
19. Н. Н. Добровольский, "Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера", *Матем. заметки*, 109:3 (2021), 464–469
20. N. N. Dobrovol'skii, 2022, "Distribution of simple elements in some monoids of natural numbers", *Math. Notes* (in print).
21. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
22. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

23. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.
24. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
25. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
26. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.
27. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.
28. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The inverse problem for a basic monoid of type q ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 59–71.
29. D. S. Minenkov, V. E. Nazaikinskii, 2016, "Remark on the Inverse Abstract Prime Number Theorem", *Math. Notes*, 100:4, P. 633–635.
30. Postnikov, A. G., 1971, *Introduction to analytical number theory* Izd-vo "Nauka", Moskva, 416 p.
31. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.
32. Trost E., 1959, "Prime numbers", *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 136 p.
33. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuyu teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
34. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.
35. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

Получено: 5.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-72-86

**Проблема Ферма — Торричелли в случае трёх точек
в нормированных плоскостях¹**

Д. А. Илюхин

Илюхин Даниил Александрович — студент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Аннотация

В статье изучается проблема Ферма — Торричелли: задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до некоторых заданных точек в нормированном пространстве. Рассмотрены различные обобщения данной задачи, а также изложены актуальные методы решения и некоторые последние результаты в этой области. Целью работы является поиск ответа на следующий вопрос: в каких нормах на плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трёх точек. В работе сформулирован и доказан критерий единственности, кроме того показано применение полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостях.

Ключевые слова: проблема Ферма — Торричелли, нормирующий функционал, лямбда-плоскость.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Д. А. Илюхин. Проблема Ферма — Торричелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 72–86.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-72-86

**The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets
in normed planes**

D. A. Ilyukhin

Ilyukhin Daniil Alexandrovich — student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00355 в МГУ имени М. В. Ломоносова

Abstract

In the paper the Fermat–Torricelli problem is considered. The problem asks a point minimizing the sum of distances to arbitrarily given points in d -dimensional real normed spaces. Various generalizations of this problem are outlined, current methods of solving and some recent results in this area are presented. The aim of the article is to find an answer to the following question: in what norms on the plane is the solution of the Fermat–Torricelli problem unique for any three points. The uniqueness criterion is formulated and proved in the work, in addition, the application of the criterion on the norms set by regular polygons, the so-called lambda planes, is shown.

Keywords: Fermat–Torricelli problem, norming functional, lambda-plane.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

D. A. Ilyukhin 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 72–86.

1. Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы ([4]).

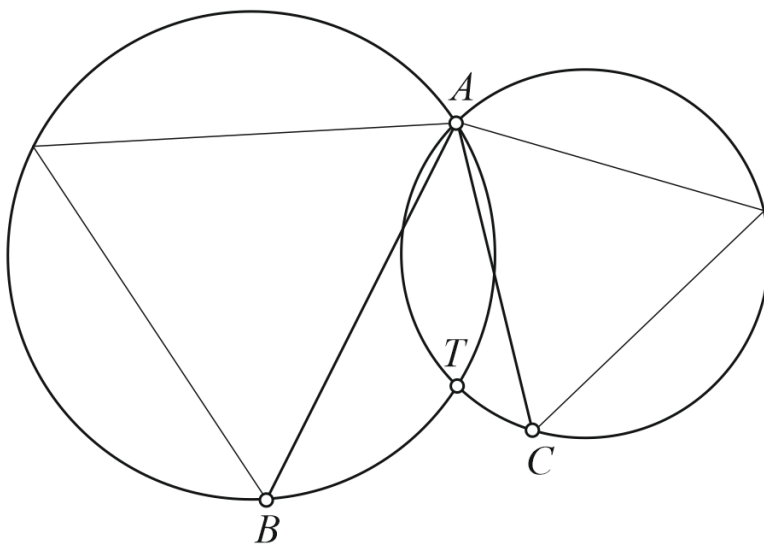


Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли. Точка T является решением задачи для заданных точек A, B, C ([20])

С тех пор были рассмотрены различные обобщения этой проблемы. Задача была сформулирована для произвольных количества точек, размерности пространства, а также нормы, заданной в этом пространстве. Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве. К примеру, задача для четырёх точек на евклидовой плоскости решена Д. Фаньяно ([3], [16]). А для случая пяти точек было доказано, что задача неразрешима в радикалах, доказательство приведено в [1] и [6]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в

работах [21], [22], [19]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([16]).

В 1934 году Ярником и Кесслером [15] была поставлена задача о поиске графа минимальной длины, соединяющего конечное число точек на евклидовой плоскости, а в 1941 году она обсуждалась в книге Куранта и Роббинса “Что такое математика?” ([7]), авторы которой называли рассматриваемую проблему *задачей Штейнера* в честь Якоба Штейнера. Теория проблемы Штейнера изложена в монографиях [9] и [14], а в книге “Теория экстремальных сетей” ([13]) Ивановым и Тужилиным были предложены различные обобщения задачи и новые направления исследований. Про изучение экстремальных сетей в нормированных пространствах можно прочитать в [17], [2].

В этой статье будет рассматриваться классический вариант задачи: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма — Торричелли* (или просто *проблемой Ферма — Торричелли*). Работа опирается на статью [18], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств, называемых *пространствами Минковского*. В частности, авторы приводят следующий результат:

ТЕОРЕМА 1 ([18]). *В пространстве Минковского решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любого конечного множества точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда норма строго выпукла.*

Целью данной работы является решение задачи с более слабым условием: будем искать нормы на плоскости, в которых решение единственно для любых трёхточечных границ. В этом случае появляются новые примеры норм, обладающих свойством единственности решения для любого множества, например, манхэттенская плоскость.

Во втором разделе изложены основные определения, а также описан геометрический метод поиска решения задачи Ферма — Торричелли. В разделе три дан ответ на поставленный вопрос: приведено доказательство критерия единственности. Последняя часть посвящена применению полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Все утверждения этого раздела будут сформулированы для пространства Минковского, поэтому это не будет уточняться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Точка x_0 называется точкой Ферма — Торричелли для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\text{ft}(A)$.*

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма — Торричелли, см. например [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве. Тогда $\text{ft}(A)$ — непустое, компактное и выпуклое множество.*

Приведём два примера решения задачи Ферма — Торричелли на плоскости. На рисунке 2 изображены вершины равностороннего треугольника сначала в евклидовой плоскости, а затем в норме, заданной правильным шестиугольником. В первом случае множеству решений

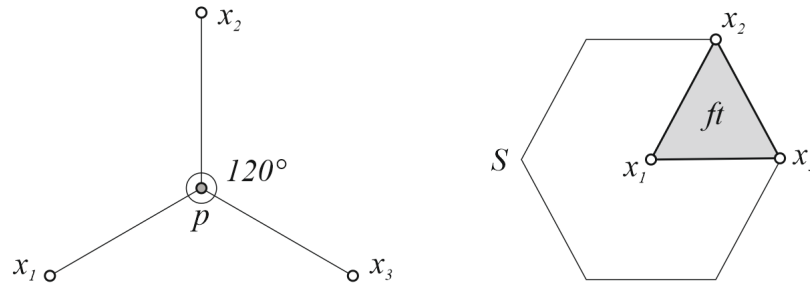


Рис. 2: Примеры решений задачи Ферма — Торричелли на евклидовой плоскости и на λ -плоскости

принадлежит единственная точка, построенная так, что углы между лучами, выходящими из неё в направлении вершин треугольника, равны. Во втором случае уточним расположение точек заданного множества: пусть одна из них находится в начале координат, а две другие — в соседних вершинах единичной окружности. При таких условиях в множество решений войдут все точки построенного треугольника, включая внутренность и границы.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма—Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^* , состоящее из линейных функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал $\varphi \in X^*$ называется нормирующим для вектора $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Легко заметить, что элементы пространства X , полученные умножением вектора x на положительное число k , имеют тот же набор нормирующих функционалов. То есть множество таких функционалов можно описать с помощью точек единичной сферы. Рассмотрим нормирующие функционалы на некоторой нормированной плоскости.

На рисунке 3 приведён участок единичной окружности S , содержащий как уплотнение, так и гладкий участок. Построим нормирующие функционалы для векторов с началом в нуле и концом в точке, лежащей на S . В точке z единичная окружность имеет единственную опорную прямую, тогда для соответствующего вектора существует единственный нормирующий функционал φ_z , его линия уровня совпадает с этой опорной прямой. Внутренним точкам уплотнения xu тоже соответствуют векторы с единственным нормирующим функционалом. В точке x единичная окружность имеет больше одной опорной прямой. Каждая из них задаёт нормирующий функционал, то есть для вектора с концом в x существует бесконечно много нормирующих функционалов. Функционалы φ_1 и φ_2 задаются предельными положениями опорной прямой, а φ_3 — произвольной.

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма — Торричелли.

ТЕОРЕМА 2 ([8], [12]). Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 — точка Ферма — Торричелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.

Приведём простейший пример использования этой теоремы на евклидовой плоскости. Рассмотрим три точки на окружности, расположенные на равном расстоянии друг от друга, и предположим, что начало координат является решением задачи Ферма—Торричелли для них. Для каждой из точек x_1, x_2, x_3 существует единственная опорная прямая, которая является

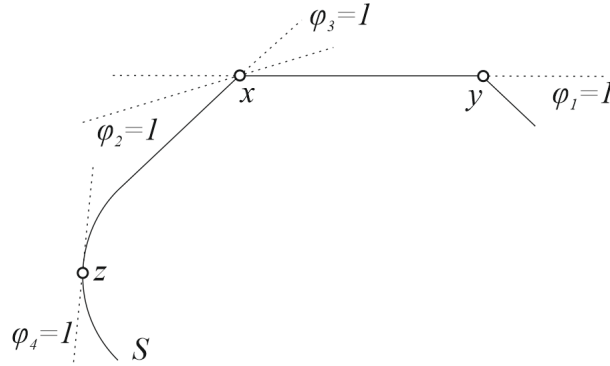


Рис. 3: Построение нормирующих функционалов по опорным прямым к единичной окружности

линией уровня $\varphi_i = 1$ некоторого функционала. Три построенные прямые образуют равносторонний треугольник и равноудалены от начала координат, следовательно, сумма функционалов, которые они задают, равна нулю. По теореме 2 точка $p = 0$ принадлежит множеству решений.

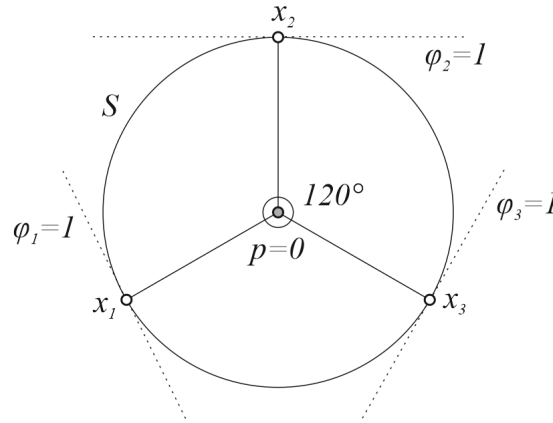


Рис. 4: Начало координат принадлежит множеству решений для точек x_1, x_2, x_3

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A . Теперь с помощью функционалов из теоремы 2 можно построить всё множество $\text{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

Рассмотрим два примера построения конуса на манхэттенской плоскости (рисунок 5). Пусть функционал φ_1 задаётся опорной прямой, пересекающей единичную окружность в одной точке, а φ_2 - прямой, содержащей уплощение. Множество $\{a : \varphi_1(a) = \|a\|\}$ является лучом, который выходит из начала координат и проходит через эту точку. Для второго функционала это будет целый набор лучей, пересекающих все точки уплощения. В обоих случаях далее отражаем построенное множество относительно начала координат и параллельным переносом сдвигаем так, чтобы вершина попала в заданную точку.

ТЕОРЕМА 3 ([8]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \text{ft}(A) \setminus A$. По теореме 2 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\text{ft}(A) = \cap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.

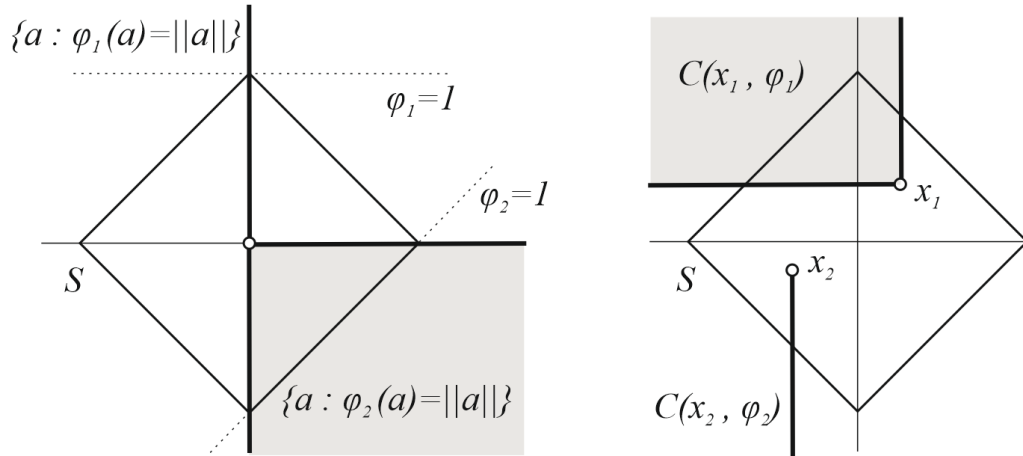
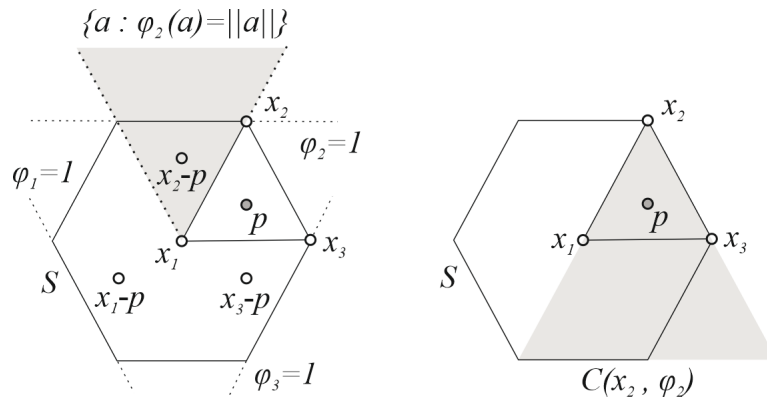


Рис. 5: Построение конусов на манхэттенской плоскости

Теоремы 2 и 3 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равностороннего треугольника в шестиугольной норме (рисунок 6).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 2 докажем, что $p \in \text{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i , линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

Рис. 6: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

Теперь воспользуемся теоремой 3, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \varphi_2(a) = ||a||\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2 . После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 3 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i .

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма — Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. В случае плоскости это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([18]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки на плоскости. Тогда $\text{ft}(A)$ — выпуклый многоугольник, который может вырождаться в отрезок или точку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([18]). Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \dots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\text{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$.

3. Критерий единственности

Пусть на нормированной плоскости задано множество из трёх точек $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Отвечая на вопрос, какой вид имеет множество решений задачи Ферма — Торричелли $\text{ft}(A)$ при этих условиях, можно получить три случая: невырожденный выпуклый многоугольник, отрезок и точка. Чтобы сформулировать критерий единственности, решим обратную задачу: найдём необходимые и достаточные условия того, что $\text{ft}(A)$ является многоугольником либо отрезком.

Теорема 3 говорит о том, что множество $\text{ft}(A)$ всегда является пересечением трёх конусов, которые на плоскости — углы или лучи, то есть

$$\text{ft}(A) = C(x_1, \varphi_1) \cap C(x_2, \varphi_2) \cap C(x_3, \varphi_3)$$

для некоторых функционалов φ_i .

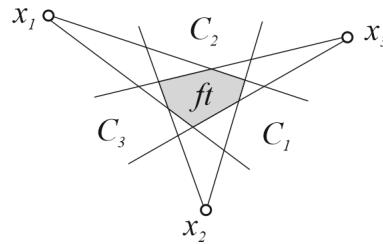


Рис. 7: Решение задачи Ферма — Торричелли — пересечение конусов, выходящих из точек заданного множества

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\text{ft}(A)$ является невырожденным многоугольником, то конусы C_i — невырожденные углы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда хотя бы один из конусов — луч, множество $\text{ft}(A)$ является подмножеством этого луча и невырожденным многоугольником быть не может.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\text{ft}(A)$ является невырожденным отрезком, то хотя бы один из конусов C_i — невырожденный угол.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все три конуса — лучи, то их пересечение может быть отрезком только при условии, что все они лежат на одной прямой. В этом случае точки x_i лежат на одной прямой и по предположению 3 множество $\text{ft}(A)$ совпадает с одной из этих точек. Противоречие.

Утверждения 4 и 5 формулируют необходимые условия, теперь перейдём к условиям на норму, обеспечивающим существование множества точек с неединственным решением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что единичная окружность на нормированной плоскости состоит из элементов нулевого типа, которыми являются точки, не лежащие внутри уплощений, а также элементов первого типа, которыми являются внутренние точки уплощений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Возьмём три элемента единичной окружности. Для каждого из них выберем опорную прямую так, чтобы для элемента нулевого типа она пересекала единичную окружность только в одной точке, то есть в самом элементе. По выбранным опорным прямым построим функционалы, линии уровня $\varphi_i = 1$ которых совпадают с этими прямыми. Если найдётся набор опорных прямых такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такую тройку будем называть согласованной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из трёх элементов первого типа, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный многоугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1, x_2, x_3 — элементы данной тройки. Тогда взяв функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из определения 5, по теореме 2 получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$. По теореме 3 $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением конусов, выходящих из точек x_1, x_2, x_3 . Так как все функционалы содержат уплощения, все три конуса являются невырожденными углами. Причём каждый из них содержит некоторую окрестность нуля в силу того, что точки x_1, x_2, x_3 не являются границами уплощений. Следовательно, конусы в пересечении образуют многоугольник.

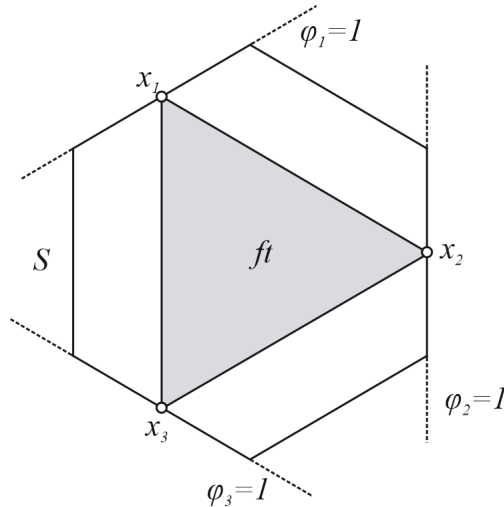


Рис. 8: Первое условие неединственности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из двух элементов первого типа и одного элемента нулевого типа, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки x_1, x_2 — элементы первого типа, а x_3 — нулевого типа из данной тройки. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$. Конусы, выходящие из x_1, x_2 , содержат окрестность нуля, а из точки x_3 выходит луч, проходящий через начало координат. Следовательно, в пересечении получаем невырожденный отрезок.

Следующее условие обеспечит существование в заданной норме трёх точек, для которых множество решений является пересечением одного невырожденного угла и двух лучей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из одного элемента первого типа и двух элементов нулевого типа, причём элементы нулевого типа расположены симметрично относительно начала координат, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $ft(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки x_1, x_2 — элементы нулевого типа, а x_3 — первого типа из данной тройки. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из определения 5 удовлетворяют теореме 2, и точка $x = 0$ принадлежит $ft(x_1, x_2, x_3)$. По теореме 3 решение $ft(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением двух лучей, лежащих на одной прямой, содержащей элементы нулевого типа, и невырожденного угла, выходящего из уплощения. Получаем отрезок.

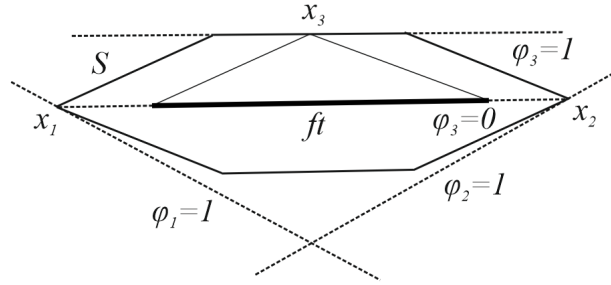


Рис. 9: Третье условие неединственности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что для нормы на плоскости выполняется первое, второе или третье условие неединственности, если она удовлетворяет условию утверждения 6, 7 или 8 соответственно.

ТЕОРЕМА 4. На нормированной плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трёх точек тогда и только тогда, когда для данной нормы не выполняется ни одно из условий неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для нормы выполняется хотя бы одно из условий неединственности, то по соответствующему утверждению на плоскости найдутся три точки, для которых множество решений бесконечно.

Пусть нашлись три точки x_1, x_2, x_3 , для которых $ft(x_1, x_2, x_3)$ неединственно. Так как решение — пересечение конусов, то это либо многоугольник, либо отрезок. В случае многоугольника все три конуса — невырожденные углы. Рассмотрим функционалы, задающие конусы. Их линии уровня содержат уплощения единичной окружности. Взяв по одной внутренней точке из каждого уплощения, получим согласованную тройку элементов первого типа, что и требуется в первом условии неединственности.

Отрезок может получиться тремя способами: пересечением трёх углов, пересечением двух углов и луча и пересечением одного угла и двух лучей. В первых двух случаях аналогично рассмотрим функционалы, задающие конусы. Получим первое и второе условие неединственности соответственно. Теперь обратимся к третьему случаю. Во-первых, получаем согласованную тройку, состоящую из одного уплощения и двух точек. Во-вторых, для того, чтобы решение было неединственно, лучи должны лежать на одной прямой, то есть каждый из двух лучей должен содержать начало другого. Отсюда следует, что элементы нулевого типа из согласованной тройки это точки, лежащие напротив друг друга относительно начала координат. Следовательно, для данной нормы выполняется третье условие неединственности.

4. λ -нормированные плоскости

На практике критерий 4 применить нелегко, так как ответ для заданной нормы даётся путём перебора уплощений единичной окружности. Если рассматривать его как алгоритм, то его сложность напрямую зависит от их количества, а из-за наличия норм с бесконечным количеством уплощений он даже не является вычислимым за конечное время. Покажем его применение на самом популярном семействе нестрогих выпуклых норм — λ -плоскостях. Экстремальные сети в λ -нормированных плоскостях изучаются Илютко в работах [10], [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. λ -нормированной плоскостью называется плоскость, норма на которой задана правильным 2λ -угольником.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используем обозначение $\text{dist}(x, y)$ для евклидова расстояния между точками x и y на плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$ не выполняется первое условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю и прямые $\varphi_i = 1$ содержат уплощения единичной окружности.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Сумма векторов, задающих эти прямые, равна нулю, а также $\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) = \text{dist}(0, l_3)$, так как l_i содержат уплощения 2λ -угольника. Следовательно, линии уровня образуют правильный треугольник, что невозможно при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$ не выполняется второе условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю, прямые $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2 = 1$ содержат уплощения единичной окружности, а прямая $\varphi_3 = 1$ — вершину.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Повернём плоскость так, чтобы прямая l_3 была параллельна координатной оси x . Пусть l_1 и l_2 задаются уравнениями $\alpha_1 x + \beta_1 y = 1$ и $\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$, а l_3 — уравнением $\gamma y = 1$. Так как $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 + \beta_2 + \gamma = 0$. Из того, что прямыми l_1 и l_2 принадлежат уплощения многоугольника, получаем

$$\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) \Rightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2.$$

Заметим, что прямые l_1 и l_2 не параллельны. В противном случае сумма функционалов φ_1 и φ_2 равна нулю, так как l_1 и l_2 находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. Это значит, что функционал φ_3 — нулевой, но это не так, потому что его линия уровня является опорной прямой к единичной окружности. Учитывая это,

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma = -2\beta.$$

Таким образом, уравнения для прямых l_i приобрели вид:

$$-\alpha x + \beta y = 1, \quad \alpha x + \beta y = 1, \quad -2\beta y = 1.$$

Треугольник, образованный прямыми l_i — равнобедренный, его основание параллельно координатной оси x . Пусть оно расположено ниже оси, то есть пусть $\beta > 0$. Также допустим, что $\alpha > 0$, иначе заменим α на $-\alpha$. Проведём биссектрису из точки пересечения прямых l_1 и l_2 . Биссектриса лежит на оси ординат. Возможны два случая: либо она проходит через середины противоположных сторон 2λ -угольника, либо через пару противоположных вершин. Первый

случай противоречит тому, что опорная прямая l_3 не содержит уплощение. Тогда биссектриса проходит через вершину, которой касается l_3 . Так как l_3 параллельна оси абсцисс, получаем равенство углов, образованных прямой l_3 и сторонами 2λ -угольника, имеющими с ней общую точку.

Наложим ещё одно условие на коэффициенты α и β . Пусть n — кол-во вершин многоугольника. Имеем

$$\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) = \cos \frac{\pi}{n} \text{dist}(0, l_3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{2\beta} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \beta^2.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 1} = \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Если $\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}$ — углы между прямыми l_1, l_2, l_3 , то $\xi_{13} = \xi_{23}$ и $\xi_{12} + \xi_{13} + \xi_{23} = \pi$. Так как $\tan \xi_{13} = \tan \xi_{23} = \frac{\alpha}{\beta}$, то

$$\xi_{12} = \pi - 2 \arctan \tan \xi_{13} = \pi - 2 \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

С другой стороны, $\xi_{12} = \pi - \frac{2\pi k}{n}$ для некоторого k , $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k < \frac{n}{2}$. То есть

$$\frac{\pi k}{n} = \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Докажем, что это равенство не выполняется при натуральных значениях k и n , таких что $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, и придём к противоречию с первоначальным допущением. Для доказательства этого факта достаточно проверить, что следующее двойное неравенство справедливо при всех $n > 2$:

$$\frac{n}{3} - \frac{1}{3} < \frac{n}{\pi} \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3} < \frac{n}{3} + \frac{1}{3}$$

Сначала умножим неравенство на $\frac{\pi}{n}$:

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3n} < \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3n}.$$

Левая часть неравенства меньше $\frac{\pi}{3}$ для всех $n > 2$, а средняя часть больше $\frac{\pi}{3}$ при тех же n , значит, первое неравенство выполняется. В оставшемся неравенстве возьмём тангенс от обеих частей и возведём в квадрат:

$$4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3 < \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3n} \right).$$

Далее сделаем замену $x = \tan \frac{\pi}{3n}$, и после нескольких простых преобразований получим неравенство

$$4 \left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \right)^2 + 3 < \left(\frac{x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}x} \right)^2,$$

которое должно выполняться для $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Несложно заметить, что это действительно так. Утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для λ -нормированной плоскости не выполняется третье условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется. Тогда существует согласованная тройка, состоящая из внутренней точки уплощения и пары вершин, лежащих симметрично относительно центра многоугольника. Пусть φ — функционал, соответствующий опорной прямой к элементу первого типа. Его линия уровня $\varphi = 1$ содержит уплощение многоугольника, а линия $\varphi = 0$ проходит через элементы нулевого типа, так как сумма функционалов равна нулю. Таким образом, нормы, заданные $4n$ -угольниками уже не подходят, потому что одно из уплощений параллельно оси симметрии многоугольника. Далее пусть $n \geq 6$, рассмотрим опорные прямые, соответствующие элементам нулевого типа. Их точка пересечения должна принадлежать прямой $\varphi = -2$. Угол между прямой $\varphi = 0$ и соседним уплощением должен быть меньше, чем угол между прямой $\varphi = 0$ и опорной прямой. Перейдём к неравенству их тангенсов:

$$\tan \frac{\pi(n-2)}{2n} < 2 \cos \frac{\pi}{n}$$

Это неравенство не выполняется при $n \geq 6$. То есть получаем противоречие для всех λ -плоскостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Рассмотрим на плоскости треугольник ABC , все углы которого меньше 120° . Тогда T — точка Торричелли для вершин A, B, C , если углы ATB, BTC, ATC равны 120° .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используем обозначение $\hat{x}$ для $\frac{1}{\|x\|}x$ при $x \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ — множество точек на λ -нормированной плоскости, не лежащих на одной прямой, и $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$. Пусть в треугольнике с вершинами x_1, x_2, x_3 все углы меньше 120° , и p — точка Торричелли для этого треугольника. Тогда если точки $\widehat{x_i - p}$ не совпадают с вершинами 2λ -угольника, то $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, иначе $\text{ft}(A) = \{p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим нормирующие функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для векторов $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$. Если $\widehat{x_i - p}$ принадлежат уплощениям единичной окружности, то положим $\varphi_i = 1$ на этом уплощении. Если $\widehat{x_i - p}$ — вершины многоугольника, то выберем уплощения в одном и том же направлении обхода. Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ и по Теореме 2 $p \in \text{ft}(A)$. По Теореме 3 $\text{ft}(A) = \bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i)$. В первом случае каждый конус $C(x_i, \varphi_i)$ вместе с p содержит некоторую окрестность p , и $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, в другом случае точка p лежит на границе каждого из конусов $C(x_i, \varphi_i)$ и в силу симметрии $\bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i) = \{p\}$.

Из доказанных утверждений следует теорема, классифицирующая нормы данного семейства относительно единственности решения задачи Ферма — Торричелли.

ТЕОРЕМА 5. На λ -нормированной плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$.

5. Заключение

Простота формулировки классической задачи Ферма — Торричелли позволяет рассматривать множество вариантов обобщения этой проблемы. В статье было рассмотрено расширение задачи с евклидовой плоскости на произвольную нормированную плоскость. Основным результатом работы является описание норм на плоскости, обеспечивающих единственность решения задачи Ферма — Торричелли для любых трёх точек. Полученный критерий позволяет проанализировать семейство норм, заданных правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bajaj C. The algebraic degree of geometric optimization problems. // 1988. *Discr. Comput. Geom.*, 3, 177–191.
2. Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula // 2016. *Journal of Mathematical Sciences*, 214:5, 593–608.
3. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. Geometric methods and optimization problems. // 1999. Kluwer Acad. Publ.
4. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem // 2013.
5. Cieslik D. The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces. // 1988. *Optimization* 19, 485–489.
6. Cockayne E. J., Melzak Z. A. Euclidean constructibility in graph-minimization problems. // 1969. *Math. Mag.*, 42, 206–208.
7. Courant R., Robbins H. What Is Mathematics? // 1941. Oxford University Press.
8. Durier R., Michelot C. Geometrical properties of the Fermat-Weber problem. // 1985. *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
9. Hwang F. K., Richards D., Winter P. The Steiners Tree Problem. // 1992. Elsevier Science Publishers.
10. Илютко Д. П. Разветвленные экстремали функционала λ -нормированной длины. // 2006. *Матем. сб.*, 197:5, 75–98.
11. Илютко Д. П., Никонов И. М. Экстремальные сети на λ -нормированной плоскости, где $\lambda=3,4,6$. // 2017. *Матем. сб.*, 208:4, 17–50.
12. Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические в нормированных пространствах. // 2002. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 66:5, 33–82
13. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. // 2003. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований.
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. // 1994. CRC Press.
15. Jarník V., Kössler M. O minimálních grafech obsahujících n daných bodu // 1934. *Čas, Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.
16. Kupitz Y. S., Martini H. Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem. // 1997. *Bolyai Society Mathematical Studies* 6, 55–127.
17. Лаут И. Л., Овсянников З. Н. Вид минимальных разветвлённых геодезических в нормированном пространстве определяет норму. // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, 2, с. 67–77.
18. Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces. // 2002. *Journal of Optimization Theory and Applications* 115, 283–314.

19. Nguyen S. D. Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces // 2018. ArXiv e-prints. arXiv:1806.04296.
20. Torricelli E. De maximis et minimis. // 1919. Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.
21. Uteshev A. Y. Analytical solution for the generalized Fermat-Torricelli problem // 2014. The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.
22. Zachos A. N. An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere // 2014. ArXiv e-prints. arXiv:1408.6495.

REFERENCES

1. Bajaj C. 1988, “The algebraic degree of geometric optimization problems.”, *Discr. Comput. Geom.*, 3, 177–191.
2. Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, “The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula”, *Journal of Mathematical Sciences*, 214:5, 593–608.
3. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. 1999, “Geometric methods and optimization problems.”, Kluwer Acad. Publ.
4. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. 2013, “On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem.”
5. Cieslik D. 1988, “The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces.”, *Optimization* 19, 485–489.
6. Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, “Euclidean constructibility in graph-minimization problems”, *Math. Mag.*, 42, 206–208.
7. Courant R., Robbins H. 1941, “What Is Mathematics?”, Oxford University Press.
8. Durier R., Michelot C. 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.”, *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
9. Hwang F. K., Richards D., Winter P. 1992, “The Steiners Tree Problem”, Elsevier Science Publishers.
10. Ilyutko D. P. 2006, “Branching extremals of the functional of λ -normed length”, *Sb. Math.*, 197:5, 705–726.
11. Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2017, “Extremal networks in λ -geometry, where $\lambda=3,4,6$ ”, *Sb. Math.*, 208:4 (2017), 479–509.
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, “Branching geodesics in normed spaces”, *Izvestiya: Mathematics*, 2002, 66:5, 905–948.
13. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2003, “Extreme Networks Theory”, Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Investigations.
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 1994, “Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations”, CRC Press.
15. Jarník V., Kössler M. 1934, “O minimálních grafech obsahujících n daných bodu”, *Čas, Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.

16. Kupitz Y.S., Martini H. 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem.”, Bolyai Society Mathematical Studies 6, 55-127.
17. Laut I.L., Ovsyannikov Z.N. 2014, “The Type of Minimal Branching Geodesics Defines the Norm in a Normed Space.”, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18, no. 2, pp. 67–77.
18. Martini H., Swanepoel K.J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.”, Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.
19. Nguyen S.D. 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces”, ArXiv e-prints, arXiv:1806.04296.
20. Torricelli E. 1919, “De maximis et minimis.” Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.
21. Uteshev A.Y. 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem”, The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.
22. Zachos A.N. 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere”, ArXiv e-prints, arXiv:1408.6495.

Получено: 15.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-87-100

О совместных приближениях логарифмов простых чисел¹

М. А. Королёв, И. С. Резвякова

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Резвякова Ирина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: rezvyakova@mi-ras.ru

Аннотация

В первой части статьи модификация элементарного метода Э. Ч. Титчмарша применяется к доказательству локальной теоремы Кронекера. Для произвольной конечной последовательности $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ вещественных чисел, линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$, и для любого $\varepsilon > 0$ этот метод даёт явную верхнюю оценку величины $h = h(\varepsilon, \bar{\lambda})$ такой, что для всякой последовательности $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ любой интервал длины h содержит точку t такую, что $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leq \varepsilon$, $1 \leq s \leq r$. Эта оценка уступает по точности наилучшей известной на сегодняшний день, однако проста в выводе и в приложениях приводит, по сути, к результатам той же точности, что и наилучшая.

Во второй части помещены воспоминания авторов об академике Алексее Николаевиче Паршине.

Ключевые слова: локальная теорема Кронекера, совместные приближения, логарифмы простых чисел, бесквадратные числа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

М. А. Королёв, И. С. Резвякова. О линейных комбинациях логарифмов простых чисел // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 87–100.

¹Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00001) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-87-100

On simultaneous approximations to the logarithms of primes

M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Rezvyakova Irina Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: rezvyakova@mi-ras.ru

Abstract

In the first part of the paper, a modification of elementary Titchmarsh's method is applied to the proof of the local Kronecker's theorem. For any finite real sequence $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ of linearly independent (over $\mathbb{Q}$) numbers and for any $\varepsilon > 0$, this method leads to the explicit upper bound of the value $h = h(\varepsilon, \bar{\lambda})$ with the following property: for any real sequence $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, any interval of the length h contains a point t such that $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leq \varepsilon$, $1 \leq s \leq r$. Such estimate is weaker than the best known, but its proof is quite simple and leads to the same (in essence) results in the applications.

The second part contains the short memoirs concerning the academician Alexey Nikolaevich Parshin who passed away on June, 18 this year.

Keywords: local Kronecker's theorem, simultaneous approximations, logarithms of primes, squarefree numbers.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova, 2022, "On simultaneous approximations to the logarithms of primes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 87–100.

Светлой памяти академика Алексея Николаевича Паршина (07.11.1942 - 18.06.2022)

1. Введение

Простейший вариант классической теоремы Л. Кронекера о приближениях (1884; см. [1], а также [2, с. 47-110], [3, Ch. XXIII]) утверждает следующее.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ - произвольные вещественные числа, линейно независимые над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ - произвольные вещественные числа. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 0.5$, существует t такое, что $\|t\lambda_s - \alpha_s\| < \varepsilon$ для каждого s , $1 \leq s \leq r$ (здесь $\|x\|$, как обычно, означает расстояние от x до ближайшего целого числа).

Со временем появились доказательства этой теоремы, дающие верхнюю оценку величины h такой, что искомое значение t найдётся в интервале вида $(y, y + h)$, где y - произвольное вещественное число. Всякое утверждение такого рода называется локальной теоремой Кронекера. Локальные теоремы Кронекера используют информацию о распределении значений линейной формы $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r$ для случая, когда переменные x_s принимают целочисленные

значения с условиями $|x_s| \leq X_s$ ($s = 1, \dots, r$), не все одновременно равные нулю. В частности, для доказательства локальных теорем важно знать, насколько близки к нулю могут быть значения такой линейной формы с указанными ограничениями на переменные.

Один из наиболее точных вариантов локальной теоремы Кронекера, принадлежащий С.М. Гонеку и Х.Л. Монтгомери, формулируется следующим образом.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ - наборы вещественных чисел, причём $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ линейно независимы над полем рациональных чисел и $0 < \varepsilon_s < 0.5$ для $s = 1, \dots, r$. Пусть, далее,

$$\delta = \min |\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r| > 0,$$

где минимум берётся по всем ненулевым целочисленным векторам $(x_1, \dots, x_r)$ с условиями

$$|x_s| \leq X_s, \quad X_s = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_s} \ln \frac{r}{\varepsilon_s} \right\rceil, \quad s = 1, \dots, r.$$

Тогда для всякого набора вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ любой интервал вида $(y, y + h)$, $h = 4\delta^{-1}$, содержит число t , для которого $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leq \varepsilon_s$, $s = 1, \dots, r$.

Доказательство этого утверждения методом, восходящим к П. Турану [4], а также обзор, посвящённый локальной теореме Кронекера, можно найти в работе [5].

Настоящая статья преследует, по большей части, методологическую цель: показать, что достаточно грубый и элементарный метод, применённый Э.Ч. Титчмаршем [6, гл. VIII, §8] к важному частному случаю (когда в качестве λ_s берутся логарифмы простых чисел) и восходящий к Г. Бору [7], позволяет и в общем случае получить вполне удовлетворительные оценки величины h (хотя и не столь точные, которые следуют из теоремы Гонека и Монтгомери). Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть $r \geq 2$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ - набор вещественных чисел, линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$, и пусть $0 < \varepsilon < 0.25$. Пусть, далее,

$$\delta(X) = \min |(x_1 - y_1)\lambda_1 + \dots + (x_r - y_r)\lambda_r|,$$

где минимум берётся по всем векторам $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_r)$ с неотрицательными целочисленными компонентами, таким, что

$$\bar{x} \neq \bar{y}, \quad \sum_{s=1}^r x_s \leq X, \quad \sum_{s=1}^r y_s \leq X.$$

Пусть, наконец,

$$h = h(\varepsilon, \bar{\lambda}) = \frac{4}{3\pi\delta(k)} \binom{k+r}{r}, \quad \text{где} \quad k = k(\varepsilon, r) = \left\lceil 3 \left(\frac{r}{4\varepsilon} \right)^2 \left(\ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln \ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \right) \right\rceil + 1.$$

Тогда для всякого набора вещественных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ любой интервал вида $(y, y + h)$ содержит точку t , для которой

$$\|t\lambda_s - \alpha_s\| < \varepsilon, \quad s = 1, \dots, r.$$

2. Доказательство вспомогательных утверждений и основной теоремы

При доказательстве основной теоремы будем следовать рассуждениям Титчмарша и лишь на последних шагах подберём необходимые параметры оптимально.

ЛЕММА 1. Пусть $r \geq 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ - произвольные вещественные числа,

$$F = 1 + \sum_{s=1}^r e^{2\pi i \lambda_s},$$

и пусть $|F| \geq r + 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $\|\lambda_s\| \leq \sqrt{\varepsilon/8}$ для каждого s , $1 \leq s \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sqrt{\varepsilon/8} < \|\lambda_r\| \leq 0.5. \quad (1)$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} |F| &= \left| \sum_{s=1}^{r-1} e^{2\pi i \lambda_s} + 1 + e^{2\pi i \lambda_r} \right| \leq r - 1 + |1 + e^{2\pi i \lambda_r}| = r - 1 + 2|\cos(\pi \lambda_r)| = \\ &= r + 1 - 4\sin^2(0.5\pi \|\lambda_r\|). \end{aligned}$$

Поскольку $|\sin x| \geq 2\sqrt{2}|x|/\pi$ при $|x| \leq \pi/4$, то ввиду неравенства (1) получим:

$$4\sin^2(0.5\pi \|\lambda_r\|) \geq 4 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi \|\lambda_r\|}{2} \right)^2 = 8\|\lambda_r\|^2 > \varepsilon,$$

откуда $|F| < r + 1 - \varepsilon$. Последнее противоречит условию леммы.

ЛЕММА 2 (ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА). Пусть $k, r \geq 2$ - целые числа. Тогда для любых чисел $x_0, x_1, \dots, x_r$ справедливы равенства

$$\left(\sum_{s=0}^r x_s \right)^k = \sum_{\bar{\mu}} c(\bar{\mu}) x_0^{\mu_0} x_1^{\mu_1} \dots x_r^{\mu_r}, \quad c(\bar{\mu}) = \frac{k!}{\mu_0! \mu_1! \dots \mu_r!},$$

где суммирование ведётся по всем наборам $\bar{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)$ неотрицательных целых чисел с условием $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_r = k$. При этом

$$(a) \quad \sum_{\bar{\mu}} c(\bar{\mu}) = (r+1)^k, \quad (b) \quad \sum_{\bar{\mu}} c^2(\bar{\mu}) \geq \frac{(r+1)^{2k}}{\binom{k+r}{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (а) получим, положив $x_0 = x_1 = \dots = x_r = 1$. Число слагаемых в правой части полиномиальной формулы совпадает с числом решений уравнения $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_r = k$ в неотрицательных целых числах и потому равно $\binom{k+r}{r}$. Поэтому, возводя обе части (а) в квадрат и применяя неравенство Коши, будем иметь:

$$(r+1)^{2k} = \left(\sum_{\bar{\mu}} c(\bar{\mu}) \right)^2 \leq \binom{k+r}{r} \sum_{\bar{\mu}} c^2(\bar{\mu}),$$

откуда и следует (b). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим

$$F(t) = 1 + \sum_{s=1}^r e^{2\pi i(t\lambda_s - \alpha_s)} = 1 + \sum_{s=1}^r \bar{\omega}_s e^{2\pi i t \lambda_s},$$

где $\omega_s = e^{2\pi i \alpha_s}$, и зададимся целым числом $k \geq 2$, которое в дальнейшем выберем оптимально. Имеем тогда:

$$F^k(t) = \sum_{\bar{\mu}} c(\bar{\mu}) \bar{\omega}_1^{\mu_1} \dots \bar{\omega}_r^{\mu_r} e^{2\pi i t(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_r \lambda_r)}, \quad |F(t)|^{2k} = \sum_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} c(\bar{\mu}) c(\bar{\nu}) \omega(\bar{\mu}, \bar{\nu}) e^{2\pi i t \Lambda},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= (\nu_0, \dots, \nu_r), \quad \bar{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_r), \quad \sum_{s=0}^r \mu_s = \sum_{s=0}^r \nu_s = k, \\ \omega(\bar{\mu}, \bar{\nu}) &= \omega_1^{\mu_1} \dots \omega_r^{\mu_r} \bar{\omega}_1^{\nu_1} \dots \bar{\omega}_r^{\nu_r}, \quad |\omega(\bar{\mu}, \bar{\nu})| = 1, \\ \Lambda &= \Lambda(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = (\mu_1 - \nu_1) \lambda_1 + \dots + (\mu_r - \nu_r) \lambda_r. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, величины $\Lambda(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ обращаются в ноль лишь в случае $\bar{\mu} = \bar{\nu}$. Следовательно,

$$|F(t)|^{2k} = \sum_{\bar{\nu}} c^2(\bar{\nu}) + \sum_{\bar{\mu} \neq \bar{\nu}} c(\bar{\mu}) c(\bar{\nu}) \omega(\bar{\mu}, \bar{\nu}) e^{2\pi i t \Lambda}.$$

Задавшись произвольными y и $h > 0$, получим:

$$I = \int_y^{y+h} |F(t)|^{2k} dt = h \sum_{\bar{\nu}} c^2(\bar{\nu}) + \sum_{\bar{\mu} \neq \bar{\nu}} c(\bar{\mu}) c(\bar{\nu}) \omega(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \cdot \frac{1}{2\pi i \Lambda} (e^{2\pi i (y+h) \Lambda} - e^{2\pi i y \Lambda}).$$

Поскольку

$$\sum_{s=1}^r \mu_s = k - \mu_0 \leq k, \quad \sum_{s=1}^r \nu_s = k - \nu_0 \leq k,$$

то в силу условия теоремы $|\Lambda| \geq \delta(k)$. Пользуясь п. (а) леммы 2, заключаем, что сумма по $\bar{\mu} \neq \bar{\nu}$ не превосходит по модулю величины

$$\frac{1}{\pi \delta(k)} \left(\sum_{\bar{\mu}} c(\bar{\mu}) \right)^2 = \frac{(r+1)^{2k}}{\pi \delta(k)}.$$

Так в силу п. (б) леммы 2 приходим к оценке

$$I \geq \frac{h(r+1)^{2k}}{\binom{k+r}{r}} - \frac{(r+1)^{2k}}{\pi \delta(k)} = \frac{h(r+1)^{2k}}{\binom{k+r}{r}} (1 - \Delta),$$

где обозначено:

$$\Delta = \frac{1}{\pi h \delta(k)} \binom{k+r}{r}.$$

Если M - максимум $|F(t)|$ на промежутке $y \leq t \leq y+h$, то $I \leq hM^{2k}$, откуда

$$M^{2k} \geq \frac{I}{h} \geq (r+1)^{2k} \frac{1 - \Delta}{\binom{k+r}{r}}.$$

Предположим, что $0 < \Delta < 1$. Тогда

$$M \geq (r+1) \left((1 - \Delta) \binom{k+r}{r}^{-1} \right)^{1/(2k)}.$$

Положим теперь

$$q = \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \quad (\text{так что } q > er \geq 2e), \quad k = k(\varepsilon, r) = \left\lceil 3 \left(\frac{r}{4\varepsilon} \right)^2 (\ln q + \ln \ln q) \right\rceil + 1,$$

и покажем, что выполняется неравенство

$$\left((1 - \Delta) \binom{k+r}{r}^{-1} \right)^{1/(2k)} > 1 - \frac{8\varepsilon^2}{r+1}.$$

Заметим сначала, что

$$\binom{k+r}{r} = \frac{(k+1) \dots (k+r)}{r!} < \frac{(k+r)^r}{(r/e)^r} = \left(\frac{e(k+r)}{r} \right)^r = \left(\frac{ek}{r} \right)^r \left(1 + \frac{r}{k} \right)^r,$$

откуда

$$\binom{k+r}{r}^{1/(2k)} < \left(\frac{ek}{r} \right)^{r/(2k)} \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{r/(2k)} < \exp \left(\frac{r}{2k} \ln \frac{ek}{r} \right) \exp \left(\frac{r^2}{2k^2} \right).$$

Далее, несложно проверить, что

$$\frac{ek}{r} > \frac{3er}{2\varepsilon} (\ln q + \ln \ln q) = 3q(\ln q + \ln \ln q) > e.$$

Так как функция $y(x) = (\ln x)/x$ убывает при $x > e$, то

$$\begin{aligned} \frac{r}{2k} \ln \frac{ek}{r} &= \frac{e}{2} \frac{\ln(ek/r)}{ek/r} \leq \frac{e}{2} \frac{\ln(3q(\ln q + \ln \ln q))}{3q(\ln q + \ln \ln q)} = \\ &= \frac{8\varepsilon^2}{3r} \frac{\ln(3q(\ln q + \ln \ln q))}{\ln q + \ln \ln q} \leq \frac{c_1 \varepsilon^2}{r}, \quad c_1 = 4.311802. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2k^2} &= \frac{e^2}{2} \left(\frac{r}{ek} \right)^2 < \frac{e^2}{2} \frac{1}{(3q(\ln q + \ln \ln q))^2} = \\ &= \frac{e^2}{18q} \frac{1}{q(\ln q + \ln \ln q)^2} = \frac{\varepsilon^2}{r} \cdot \frac{8e}{9} \frac{1}{q(\ln q + \ln \ln q)^2} \leq \frac{c_2 \varepsilon^2}{r}, \quad c_2 = 0.090202. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\binom{k+r}{r}^{1/(2k)} < e^{c_3 \varepsilon^2/r}, \quad \binom{k+r}{r}^{-1/(2k)} > e^{-c_3 \varepsilon^2/r} > 1 - \frac{c_3 \varepsilon^2}{r}, \quad (2)$$

где $c_3 = c_1 + c_2 < 4.402004$. Положим теперь

$$h = h(\varepsilon, \bar{\lambda}) = \frac{4}{3\pi\delta(k)} \binom{k+r}{r}.$$

Тогда $\Delta = 3/4$ и

$$(1 - \Delta)^{1/(2k)} = 4^{-1/(2k)} = \exp \left(-\frac{\ln 2}{k} \right) > 1 - \frac{\ln 2}{k} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{r} \cdot \frac{r \ln 2}{k\varepsilon^2}.$$

Заметим, что

$$k > \frac{3r^2}{16\varepsilon^2} (\ln q + \ln \ln q).$$

Принимая во внимание неравенство $q \geq 2e$, находим:

$$\frac{r \ln 2}{k \varepsilon^2} < \frac{16 \ln 2}{3r(\ln q + \ln \ln q)} \leq \frac{8 \ln 2}{3(\ln q + \ln \ln q)} \leq c_4 = 0.8327082.$$

Поэтому

$$\left((1-\Delta) \binom{k+r}{r}^{-1} \right)^{1/(2k)} > \left(1 - \frac{c_3 \varepsilon^2}{r} \right) \left(1 - \frac{c_4 \varepsilon^2}{r} \right) > 1 - \frac{c_5 \varepsilon^2}{r}, \quad c_5 = c_3 + c_4 < 5.2348 < \frac{16}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{c_5 \varepsilon^2}{r} = \frac{c_5 \varepsilon^2}{r+1} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{r+1} \cdot \frac{3}{2} c_5 < \frac{8 \varepsilon^2}{r+1}.$$

Отсюда заключаем:

$$\left((1-\Delta) \binom{k+r}{r}^{-1} \right)^{1/(2k)} > 1 - \frac{8 \varepsilon^2}{r+1}, \quad M = \max_{y \leq t \leq y+h} |F(t)| > (r+1) \left(1 - \frac{8 \varepsilon^2}{r+1} \right) = r+1 - 8 \varepsilon^2.$$

В силу леммы 1, для точки t , в которой достигается максимум M , при каждом s , $1 \leq s \leq r$, выполнено неравенство

$$\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. Несколько частных случаев

В этом разделе мы выведем несколько следствий, важных для приложений.

Пусть $\bar{\lambda}$ -последовательность логарифмов простых чисел p , $p \leq N$, так что $r = \pi(N)$. Тогда их линейная независимость следует из основной теоремы арифметики. Для оценки величины $\delta(X)$ рассмотрим произвольные наборы неотрицательных целых чисел $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_r)$ с условиями

$$\bar{x} \neq \bar{y}, \quad \sum_{s=1}^r x_s \leq X, \quad \sum_{s=1}^r y_s \leq X$$

и заметим, что

$$(x_1 - y_1) \ln p_1 + \dots + (x_r - y_r) \ln p_r = \ln \frac{A}{B}, \quad \text{где } A = p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r} \quad B = p_1^{y_1} \dots p_r^{y_r}.$$

Пусть $A > B$ (случай $A < B$ рассматривается аналогично). Если $B = 1$, то $A \geq 2$ и поэтому $\ln(A/B) = \ln A \geq \ln 2 = (\ln 2)/B$. Если же $B \geq 2$, то

$$\ln \frac{A}{B} \geq \ln \frac{B+1}{B} = \ln \left(1 + \frac{1}{B} \right) > \frac{1}{B} - \frac{1}{2B^2} \geq \frac{3}{4B} > \frac{\ln 2}{B}.$$

Итак, в каждом из случаев имеем $\ln(A/B) \geq (\ln 2)/B$. Несложно видеть, что

$$B \leq N^{y_1 + \dots + y_r} \leq N^X.$$

Поэтому $\delta(X) \geq (\ln 2)N^{-X}$. Соответственно, определяя $k = k(\varepsilon, r)$ по формуле из условия теоремы и пользуясь оценкой

$$\binom{k+r}{r} < e^{2c_3 k \varepsilon^2 / r} < e^{(3\varepsilon)^2 k / r},$$

которая следует из (2), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $N \geq 3$, $0 < \varepsilon < 0.25$ - произвольные числа, $r = \pi(N)$ - количество простых чисел p , не превосходящих N , и пусть

$$h(\varepsilon, N) = \exp \left\{ \left(3 \left(\frac{r}{4\varepsilon} \right)^2 \left(\ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln \ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \right) + 1 \right) \left(\ln N + \frac{(3\varepsilon)^2}{r} \right) \right\}.$$

Тогда для любого набора из r вещественных чисел α_p , $p \leq N$ на всяком промежутке $(y, y+h)$ найдётся точка t , для которой при каждом простом p , $p \leq N$, будет выполнено неравенство:

$$\|t \ln p - \alpha_p\| \leq \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь тем, что $r = \pi(N) = (1 + o(1))N/\ln N$ при $N \rightarrow +\infty$, несложно проверить, что при достаточно большом N и ε с условием $1/\varepsilon \leq \sqrt[4]{\ln N}$ оценку величины $h(\varepsilon, N)$ после небольшого огрубления можно записать в виде

$$h(\varepsilon, N) \leq \exp \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right)^2 \left(1 + \frac{3 \ln(1/\varepsilon)}{\ln N} \right) \right\}.$$

В частности, при фиксированном ε получаем:

$$h(\varepsilon, N) \leq \exp \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right)^2 (1 + o(1)) \right\}.$$

В этой же ситуации теорема Гонека и Монтгомери приводит к оценке вида

$$h(\varepsilon, N) \leq \exp \left\{ \frac{N}{\varepsilon} \left(\ln \frac{N}{\varepsilon} \right) (1 + o(1)) \right\}.$$

Однако ввиду того, что в ряде приложений ключевую роль играет не сама величина h , а итерации её логарифма (не ниже второй), применение оценки из следствия 1 приводит к результатам, сравнимым по силе с теми, что даёт применение теоремы Гонека и Монтгомери (пример такой задачи, связанной с существованием больших по модулю значений дзета-функции Римана на критической прямой, см. в [8]).

Пусть теперь $n_1, \dots, n_r$ - все бесквадратные числа, не превосходящие N , занумерованные по возрастанию (так что $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 5$ и т.д.), и пусть $\bar{\lambda}$ - последовательность чисел вида $\lambda_s = \sqrt{n_s}$, $s = 1, \dots, r$. Согласно теореме А.С. Безиковича [9] (также см. [10, гл. VIII, §6]), эти числа линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. Чтобы оценить $\delta(X)$ в этом случае, рассмотрим величину

$$\Lambda = m_1 \sqrt{n_1} + \dots + m_r \sqrt{n_r},$$

где m_s - целые числа с условием

$$\sum_{s=1}^r |m_s| \leq 2X,$$

не равные нулю одновременно. Будем следовать рассуждениям А. Сельберга, содержащимся в его неопубликованной рукописи [11] (также см. лемму 5 из [12]). Рассмотрим произведение

$$P = \prod_{(c_2, \dots, c_r)} (m_1 \sqrt{n_1} + c_2 m_2 \sqrt{n_2} + \dots + c_r m_r \sqrt{n_r}),$$

где каждая из величин c_s независимо от других принимает значения ± 1 . В силу теоремы Безиковича, все сомножители этого произведения отличны от нуля. Очевидно, сомножитель,

отвечающий набору $c_2 = \dots = c_r = 1$, совпадает с Λ . Далее, произведение P не меняется от замены $\sqrt{n_s}$ на $(-\sqrt{n_s})$ для любого s . Действительно, если $s \geq 2$, то это очевидно, поскольку наряду с множителем, отвечающим набору $(c_2, \dots, c_s, \dots, c_r)$, в произведении присутствует и множитель, отвечающий набору $(c_2, \dots, -c_s, \dots, c_r)$. Если же $s = 1$, то произведение P' , получившееся после такой замены, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} P' &= \prod_{(c_2, \dots, c_r)} (-m_1 \sqrt{n_1} + c_2 m_2 \sqrt{n_2} + \dots + c_r m_r \sqrt{n_r}) = \\ &= (-1)^{2^{r-1}} \prod_{(c_2, \dots, c_r)} (m_1 \sqrt{n_1} - c_2 m_2 \sqrt{n_2} - \dots - c_r m_r \sqrt{n_r}). \end{aligned}$$

Но набор $(-c_2, \dots, -c_r)$ при изменении компонент пробегает то же множество, что и набор $(c_2, \dots, c_r)$. Поэтому последнее произведение совпадает с P .

Следовательно, всякое слагаемое, возникающее при раскрытии скобок в P , содержит каждую из величин $\sqrt{n_s}$ в чётной степени. Значит, P - целое число. Так как $P \neq 0$, то необходимо $|P| \geq 1$. С другой стороны,

$$|m_1 \sqrt{n_1} + c_2 m_2 \sqrt{n_2} + \dots + c_r m_r \sqrt{n_r}| \leq \sqrt{N} \sum_{s=1}^r |m_s| \leq 2X\sqrt{N}.$$

Таким образом, $1 \leq |P| \leq |\Lambda|(2X\sqrt{N})^{2^{r-1}-1}$, откуда $|\Lambda| \geq (2X\sqrt{N})^{1-2^{r-1}}$. Поэтому и

$$\delta(X) \geq (2X\sqrt{N})^{1-2^{r-1}}.$$

В частности, положив $X = 2k$, где $k = k(\varepsilon, r)$ определено в условии теоремы, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $N \geq 5$, $0 < \varepsilon < 0.25$ - произвольные числа, r - количество бесквадратных чисел n , не превосходящих N , и пусть

$$h = h(\varepsilon, N) = \frac{4}{3\pi} (4k\sqrt{N})^{2^{r-1}-1} e^{(3\varepsilon)^2 k/r}, \quad k = k(\varepsilon, r).$$

Тогда для произвольного набора из r вещественных чисел α_n , $n \leq N$, на всяком промежутке $(y, y + h)$ найдётся точка t , для которой при каждом бесквадратном n , $n \leq N$, будет выполнено неравенство:

$$\|t\sqrt{n} - \alpha_n\| \leq \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{(3\varepsilon)^2 k}{r} &\leq \frac{27r}{16} \left(\ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln \ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \right) + \frac{(3\varepsilon)^2}{r} < \frac{27}{16} r \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\}, \\ 4k &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\}, \\ \ln(4k) &\leq \ln \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 + \ln \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\} - \ln \frac{4}{3} \leq \ln \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 \left(1 + \frac{\ln \ln \left\{ (r/\varepsilon)^2 \ln (r/\varepsilon)^2 \right\} - \ln(4/3)}{\ln(r/\varepsilon)^2} \right) < \\ &< 2.7 \ln \frac{r}{\varepsilon}, \\ \ln(4k\sqrt{N}) &< 2.7 \ln \frac{r}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln N < 2.7 \ln \frac{N}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln N < 3.2 \ln \frac{N}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Так для величины $h(\varepsilon, N)$ получаем менее точную, но более удобную для приложений оценку

$$h(\varepsilon, N) < \exp \left(3.2 \cdot 2^{r-1} \ln \frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16} \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\} \right) < \exp \left(\frac{16}{5} \cdot 2^r \ln \frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16} \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\} \right)$$

(по поводу приложений следствия 2 см., например, [13]). Последнюю оценку также можно упростить, заменив в ней r на N (отметим, что $r = r(N) = (6/\pi^2)N + O(\sqrt{N})$ при неограниченном возрастании N ; см., например, [14, гл. 34, §3]).

Пусть, наконец, $\ell \geq 3$ - фиксированное целое число, и пусть $n_1, \dots, n_r$ - все числа, свободные от ℓ -х степеней и не превосходящие N , занумерованные по возрастанию. Возьмём в качестве $\bar{\lambda}$ последовательность чисел вида $\lambda_s = \sqrt[\ell]{n_s}$, $s = 1, \dots, r$. Как и в предыдущем примере, линейная независимость этих чисел над полем $\mathbb{Q}$ следует из теоремы Безиковича. Чтобы оценить $\delta(X)$ снизу, рассмотрим величину

$$\Lambda = m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + \dots + m_r \sqrt[\ell]{n_r},$$

где m_s - целые числа с условием

$$\sum_{s=1}^r |m_s| \leq 2X,$$

не равные нулю одновременно. Далее, положим

$$P = \prod_{(c_2, \dots, c_r)} (m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + c_2 m_2 \sqrt[\ell]{n_2} + \dots + c_r m_r \sqrt[\ell]{n_r}),$$

где каждая из величин c_s независимо от других принимает значения $e^{2\pi i j / \ell}$, $j = 1, \dots, \ell$. Теперь необращение в нуль каждого из сомножителей следует из теоремы Л.Дж. Морделла [15]. Подобно тому, как это делалось выше, доказывается, что значение произведения не меняется при замене $\sqrt[\ell]{n_s}$ на $e_s \sqrt[\ell]{n_s}$, где e_s - произвольный корень ℓ -й степени из единицы, и что P - целое число. Замечая, что

$$|m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + c_2 m_2 \sqrt[\ell]{n_2} + \dots + c_r m_r \sqrt[\ell]{n_r}| \leq 2X N^{1/\ell},$$

будем иметь:

$$1 \leq |P| \leq |\Lambda| (2X N^{1/\ell})^{\ell^{r-1}-1}, \quad |\Lambda| \geq (2X N^{1/\ell})^{1-\ell^{r-1}}, \quad \delta(X) \geq (2X N^{1/\ell})^{1-\ell^{r-1}}.$$

Положив $X = 2k$, где $k = k(\varepsilon, r)$ определено в условии теоремы, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\ell \geq 3$ - фиксированное целое число, $N \geq 5$, $0 < \varepsilon < 0.25$ - произвольные числа, r - количество чисел n , свободных от ℓ -х степеней и не превосходящих N , и пусть

$$h = h(\varepsilon, N) = \frac{4}{3\pi} (4k N^{1/\ell})^{\ell^{r-1}-1} e^{(3\varepsilon)^2 k / r}.$$

Тогда для произвольного набора из r вещественных чисел α_n , $n \leq N$, на всяком промежутке $(y, y + h)$ найдётся точка t , для которой при каждом целом n , $1 \leq n \leq N$, свободном от ℓ -х степеней, будет выполнено неравенство:

$$\|t \sqrt[\ell]{n} - \alpha_n\| \leq \varepsilon.$$

Оценку следствия 3 можно упростить за счёт некоторого огрубления. Пользуясь установленными выше неравенствами, несложно заключить, что

$$h(\varepsilon, N) < \exp \left(\ell^{r-1} (2.7 + 1/\ell) \ln \frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16} \ln \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2} \right\} \right)$$

(следует заметить, что $r = r(N) = N/\zeta(\ell) + O(N^{1/\ell})$ при $N \rightarrow +\infty$, где $\zeta(w)$ - дзета-функция Римана; см., например: [16, гл. 7, §48]).

4. Краткое слово об Алексее Николаевиче Паршине

(М.А.Королёв)

18 июня 2022 года отошёл в путь вся земли великий учёный, мудрый наставник и замечательный человек. Дело будущего — всесторонне, вдумчиво, неторопливо изучить то наследие, которое оставил по себе Алексей Николаевич. Но сейчас вспоминается иное — его забота и любовь, которые он являл своим родным, ученикам, коллегам, в числе которых посчастливилось оказаться и мне. Алексей Николаевич взял под своё крыло отдел теории чисел Математического института, оказавшийся в нелёгкой ситуации после безвременной кончины Анатолия Алексеевича Карацубы и Василия Алексеевича Исковских. Остановив тогда в коридоре нас с Ирой Резвяковой, он, помнится, огорошил известием, что «теперь у нас в отделе будет всё строго», но тут же, улыбнувшись, добавил: «Но это только на бумаге!»

Его заботу мы ощущали на себе: помогая словом и делом, где-то покрывая наши недостатки своим тактом и любовью, он бережно сохранил наш отдел до лучших времён. Не раз и не два приходилось обращаться к Алексею Николаевичу за советом, особенно когда дело касалось сложных, трудноразрешимых ситуаций. Готовность помочь, принять участие, войти в суть твоих трудностей, отложив свои дела — всё это было присуще Алексею Николаевичу.

Много значила для нас и его общественная позиция — особенно в тот памятный год, когда проводилась реформа РАН (2013). Опыт, трезвомыслие, рассудительность и одновременно смелость, решительность остаются для меня непревзойдённым образцом.

Осталась далеко позади работа под началом Алексея Николаевича в диссертационном совете МИАН, выступления на отдельском семинаре и многое другое из того, что принято называть «официальным общением». . . Но я чётко помню тот момент, когда это общение перестало быть лишь формальным. В январе 2015 года нам с супругой Мариной довелось оказаться на конференции «Православие, наука и современность», проводимой ежегодно в рамках «Рождественских чтений» в Институте физики Земли на Большой Грузинской улице. Для нас обоих это был, пожалуй, первый опыт такого рода. С тем большим удивлением обнаружили мы в числе докладчиков профессора Юрия Валентиновича Нестеренко, который предложил тогда — ни много ни мало — проект новоюлианской пасхалии. Буквально через несколько дней Алексей Николаевич при встрече в МИАН поинтересовался впечатлением, которое произвела эта конференция, и предложил — если будет желание — обращаться к нему для обсуждения вопросов такого рода. Вскоре (к моей огромной радости!) была презентована и ставшая ныне библиографической редкостью книга Алексея Николаевича «Путь. Математика и иные миры».

Увы... предложенной возможностью я так и не воспользовался. Видимо, чувствовал, что моего кругозора, мягко говоря, недостаточно для подобных дискуссий. Но с тех пор как-то сама собой появилась возможность звонить Алексею Николаевичу «не по работе»: поздравить с днём рождения, с очередным праздником, да и просто узнать, как дела, как здоровье. Вроде бы мелочь, но я очень дорожил этой возможностью.

Вспоминается весна первого «пандемийного года» (2020). Часть Великого Поста и Светлое Христово воскресение случились в ту весну в дни всеобщего карантина, когда полстраны сидело взаперти. Так случилось, что мне довелось быть тогда — невиданная для москвича роскошь! — на Пасхальном богослужении. Это было незабываемое переживание: когда под пение «Воскресение Твое, Христе Спасе, ангели поют на Небеси» крестный ход выстроился на ступенях храма, все вдруг осознали, что кругом стоит полная тишина. И где — в Москве! Через минуту в этой звенящей тиши раздались вечные глаголы пасхального тропаря: «Христос воскрес из мертвых, смертию смерть поправ и сущим во гробех живот даровав!». Тогда-то и поверилось, что жизнь всегда сильнее смерти. И совсем иначе звучало огласительное слово Иоанна Златоуста: «Смерть! где твое жало? Ад! где твоя победа? Воскрес Христос, и

ты низверглся еси! Воскрес Христос, и пали демоны! Воскрес Христос, и радуются ангелы! Воскрес Христос, и жизнь жительствоует!»

Вот этой радостью я и поспешил поделиться тогда — как смог, как сумел — с Алексеем Николаевичем. Почти сразу же получил от него ответ: «Спасибо! Примите и мои поздравления Вам и Марине с праздником Святой Пасхи! Желаю вам в это трудное время твердости духа и крепости тела. Тяжело видеть пустые храмы, но это не везде. Я знаю храмы в Подмоскovie, которые были забыты народом и сотни причащались.»

Алексей Николаевич обладал великим даром — поддержать тогда, когда у тебя опускались руки. Вспоминаю один из последних телефонных разговоров с ним — в день рождения, 7 ноября 2021 года. После положенных поздравлений и обмена новостями разговор свернул на окружавшую тогда действительность: пандемию, изоляцию, qr-коды, дистанционку и прочее. В ответ на моё пожелание сохранить свой внутренний мир и душевное равновесие в условиях мертвящей цифровизации Алексей Николаевич ответил с юмором: «Вы знаете, цифровизация и те, кто за ней стоит — это такая страшная вещь, что есть надежда, что она сожрёт саму себя».

До последних дней своей жизни Алексей Николаевич, несмотря на недуг, продолжал — так или иначе, насколько это было возможно — опекать других, и опять мне, уж не знаю за что, довелось оказаться в их числе. «Раздарил всем по сердцу, себе ничего не оставил...» — наверное, таково условие сдачи нашего последнего, самого важного экзамена перед переходом в Вечность. Вечная память вам, дорогой Алексей Николаевич!

5. Воспоминания об Алексее Николаевиче Паршине

(И.С. Резвякова)

Моё близкое знакомство с Алексеем Николаевичем случилось в то время, когда он стал заведующим объединённого отдела алгебры и теории чисел (в 2010 году), и первое моё общение с ним произошло на отчёте отдела в конце года. До этого в практике немногочисленного отдела теории чисел существовала традиция совместного заседания во время отчёта, когда каждый сотрудник выступал перед остальной аудиторией и рассказывал о своих результатах, полученных за год. Алексей Николаевич же назначил каждому сотруднику присоединённого отдела теории чисел индивидуальную встречу. Мои страхи первого общения с Алексеем Николаевичем рассеялись в первую же минуту разговора. Его обычно серьёзное лицо осенила добродушная улыбка и я уже общалась не со строгим заведующим, а с душевным человеком, интересующимся разными направлениями математики. Личное общение Алексея Николаевича с новыми сотрудниками давало и ему, и нам возможность познакомиться, разглядеть друг в друге личность и наладить доверительные отношения. С тех пор, при встрече со своими новыми «подопечными», лицо Алексея Николаевича мгновенно озаряла улыбка.

К своим («алгебраистам»), Алексей Николаевич относился строже, но эта строгость преследовала единственную цель — разбудить максимальный (на текущий момент) потенциал ученика и вдохновить его на большее. Алексей Николаевич безусловно радовался успехам своих учеников и подопечных и заботился об их благополучии и развитии. Именно стараниями Алексея Николаевича после консультаций со своими младшими коллегами отдел алгебры в 2016 году разделился на три, породив отдел теории чисел и новый отдел алгебраической геометрии. Это оказалось действительно важным вкладом Алексея Николаевича в развитие разных направлений математики в Математическом институте. Все в отделе с радостью приняли новые изменения. Сам же Алексей Николаевич был очень обрадован тем, что Д.О. Орлову так подошла должность заведующего новым отделом, как он и не мог даже подумать.

Во время реформы РАН Алексей Николаевич взял на себя огромный труд по анализу нововведений оценки вклада учёного. Благодаря своим организаторским способностям, исклю-

чительному аналитическому уму и большому чувству ответственности он в самые кратчайшие сроки написал чёткий и доказательный манускрипт, прочитав который, человек, даже не имеющий отношения к науке, сможет понять суть новых требований и их эффект для научной деятельности.

Наверное, реформа РАН и все последующие глобальные события в мире отразились на улыбчивом и доброжелательном математике. Но я всегда буду помнить ту его улыбку, которая мгновенно превращает серьёзного математика в добродушного, открытого, приятного, внимательного и тактичного собеседника.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kronecker L., Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen // Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1884. S. 1179-1193, 1271-1299.
2. Leopold Kronecker's Werke, Hensel K. (ed.), Vol. III, Teubner, Leipzig, 1899.
3. Hardy G.H., Wright E.M., An introduction to the theory of numbers (4th ed.). Clarendon Press, Oxford, 1975.
4. Turán P., A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function // Acta Sci. Math. (Szeged). 1960. Vol. 21. P. 311-318.
5. Gonek S.M., Montgomery H.L., Kronecker's approximation theorem // Indag. Math. (N.S.) 2016. Vol. 27. № 2. P. 506-523.
6. Титчмарш Е.К., Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
7. Bohr H., Again the Kronecker Theorem, // J. Lond. Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 5-6.
8. Конягин С.В., Королёв М.А., О явлении Титчмарша в теории дзета-функции Римана // Теория приближений, функциональный анализ и приложения, Сборник статей. К 70-летию академика Бориса Сергеевича Кашина, Труды МИАН, 318, МИАН, М., 2022. С. 182-201.
9. Besikovitch A.S., On the linear independence of fractional powers of integers // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 3-6.
10. Чандрасекхаран К., Арифметические функции. М.: Наука, 1975.
11. Selberg A., On the remainder term in the lattice point problem of the circle. Manuscript. <http://publications.ias.edu/selberg/section/2494>
12. Heath-Brown D.R., The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem // Acta Arith. 1992. Vol. 60. № 4. P. 389-415.
13. Королёв М.А., Попов Д.А., Об интеграле Ютилы в проблеме круга // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Vol. 86. № 3. P. 3-46.
14. Бухштаб А.А., Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.
15. Mordell L.J., On the linear independence of algebraic numbers // Pacific J. Math. 1953. Vol. 3. № 3. P. 625-630.
16. Хуа Л.-К., Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел. М.: Мир, 1964.

REFERENCES

1. Kronecker L. 1884, “Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen”, *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*. S. 1179-1193, 1271-1299.
2. Hensel K. (ed.) 1899, Leopold Kronecker’s Werke, Vol. III, Teubner, Leipzig.
3. Hardy G.H., Wright E.M. 1975, An introduction to the theory of numbers (4th ed.). Clarendon Press, Oxford.
4. Turán P. 1960, “A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*., vol. 21. P. 311-318.
5. Gonek S.M., Montgomery H.L. 2016, “Kronecker’s approximation theorem”, *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 27, № 2. P. 506–523.
6. Titchmarsh E.C. 1986, The Theory of the Riemann Zeta-function. 2nd ed. (revised by D.R. Heath-Brown). Clarendon Press, Oxford.
7. Bohr H. 1934, “Again the Kronecker Theorem”, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 9. P. 5–6.
8. Konyagin S.V., Korolev M.A. 2022, “On the Titchmarsh’s phenomenon in the theory of the Riemann zeta-function”, Approximation Theory, Functional Analysis, and Applications, Collected papers. On the occasion of the 70th birthday of Academician Boris Sergeevich Kashin, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 318, Steklov Math. Inst., Moscow. P. 182-201.
9. Besikovitch A.S. 1940, “On the linear independence of fractional powers of integers”, *J. London Math. Soc.*, vol. 15. P. 3-6.
10. Chandrasekharan K. 1970, Arithmetical Functions. Springer-Verlag, Berlin.
11. Selberg A., “On the remainder term in the lattice point problem of the circle”. Manuscript. <http://publications.ias.edu/selberg/section/2494>
12. Heath-Brown D.R. 1992, “The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem”, *Acta Arith.*, vol. 60, № 4. P. 389-415.
13. Korolev M.A., Popov D.A. 2022, “On Jutila’s integral in the circle problem”, *Izv. Math.*, vol. 86, № 3. P. 413-455.
14. BuhshTAB A.A. 1960, Number Theory (in Russian). Uchpedgiz, Moscow.
15. Mordell L.J. 1953, “On the linear independence of algebraic numbers”, *Pacific J. Math.*, vol. 3, № 3. P. 625-630.
16. Hua L.-K. 1959, Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. Teubner-Verlag, Leipzig.

Получено: 25.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 514.74

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-101-116

Приведение гладких функций к нормальным формам вблизи критических точек¹

А. С. Оревкова

Оревкова Александра Степановна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: s15b3_orevkova@179.ru

Аннотация

Работа посвящена «равномерному» приведению гладких функций на двумерных многообразиях к каноническому виду вблизи критических точек этих функций. Функция $f(x, y)$ имеет особенность типа A_k , E_6 или E_8 в своей критической точке, если в некоторых локальных координатах с центром в этой точке ряд Тейлора функции имеет вид $x^2 + y^{k+1} + R_{2,k+1}$, $x^3 + y^4 + R_{3,4}$, $x^3 + y^5 + R_{3,5}$ соответственно, где через $R_{m,n}$ обозначена сумма мономов более высокого порядка, т.е. $R_{m,n} = \sum a_{ij} x^i y^j$, где $\frac{i}{m} + \frac{j}{n} > 1$. Согласно результату В.И. Арнольда (1972), эти особенности просты и гладкой заменой переменных приводятся к каноническому виду, в котором член $R_{m,n}$ равен нулю.

Для особенностей типов A_k , E_6 и E_8 мы явно строим такую замену и оцениваем снизу (через C^r -норму функции, где $r = k + 3, 7$ и 8 соответственно) максимальный радиус окрестности, в которой определена замена. Наша замена является «равномерным» приведением к каноническому виду в том смысле, что построенные нами окрестность и замена координат в ней (а также все частные производные замены координат) непрерывно зависят от функции f и ее частных производных.

Ключевые слова: правая эквивалентность гладких функций, ADE-особенности, нормальные формы особенностей, равномерное приведение к нормальным формам.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

А. С. Оревкова. Приведение гладких функций к нормальным формам вблизи критических точек // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 101–116.

¹Автор является стипендиатом фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», договор № 21-8-9-9-1.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 514.74

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-101-116

Reducing smooth functions to normal forms near critical points²

A. S. Orevkova

Orevkova Alexandra Stepanovna — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: s15b3_orevkova@179.ru

Abstract

The paper is devoted to “uniform” reduction of smooth functions on 2-manifolds to canonical form near critical points of the functions by some coordinate changes in some neighborhoods of these points. A function $f(x, y)$ has a singularity of the type A_k , E_6 , or E_8 at its critical point if, in some local coordinate system centered at this point, the Taylor series of the function has the form $x^2 + y^{k+1} + R_{2,k+1}$, $x^3 + y^4 + R_{3,4}$, $x^3 + y^5 + R_{3,5}$ respectively, where $R_{m,n}$ stands for a sum of higher order terms, i.e., $R_{m,n} = \sum a_{ij} x^i y^j$ where $\frac{i}{m} + \frac{j}{n} > 1$. In according to a result by V. I. Arnold (1972), these singularities are simple and can be reduced to the canonical form with $R_{m,n} = 0$ by a smooth coordinate change.

For the singularity types A_k , E_6 , and E_8 , we explicitly construct such a coordinate change and estimate from below (in terms of C^r -norm of the function, where $r = k + 3$, 7, and 8 respectively) the maximal radius of a neighborhood in which the coordinate change is defined. Our coordinate change provides a “uniform” reduction to the canonical form in the sense that the radius of the neighborhood and the coordinate change we constructed in it (as well as all partial derivatives of the coordinate change) continuously depend on the function f and its partial derivatives.

Keywords: right equivalence of smooth functions, ADE-singularities, normal form of singularities, uniform reducing to normal form.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

A. S. Orevkova, 2022, “Reducing smooth functions to normal forms near critical points”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 101–116.

1. Introduction

DEFINITION 1. A smooth function $f = f(u, v)$ has a singularity type E_k ($k = 6, 7, 8$) at its critical point $P \in \mathbb{R}^2$ if

- (i) the first and second differentials $df(P)$ and $d^2f(P)$ vanish, and the third differential $d^3f(P)$ is a perfect cube (non-zero);
- (ii) one the following coefficients of the Taylor series of f at P does not vanish (the upper black points in Fig. 1): $f_{y^4}^{(4)}(P)$, $f_{xy^3}^{(4)}(P)$, and $f_{y^5}^{(5)}(P)$, where $(u, v) \rightarrow (x, y)$ is a linear coordinate change such that $d^3f(P) = 6(dx)^3$. More specifically: the singularity type is E_6 if $f_{y^4}^{(4)}(P) \neq 0$ (equivalently, there exists a tangent vector $v \in \text{Ker } d^3f(P)$ at P such that $v^4 f \neq 0$, where $v^4 f$

²The author is a Fellow of the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation “BASIS”.

denotes the fourth derivative of f along the vector v); the singularity type is E_7 if $f_{y^4}^{(4)}(P) = 0$ and $f_{xy^3}^{(4)}(P) \neq 0$; the singularity type is E_8 if $f_{y^4}^{(4)}(P) = f_{xy^3}^{(4)}(P) = 0$ and $f_{y^5}^{(5)}(P) \neq 0$. The vanishing coefficients of the Taylor series correspond to the points beneath the oblique line (except the origin) in Fig. 1.

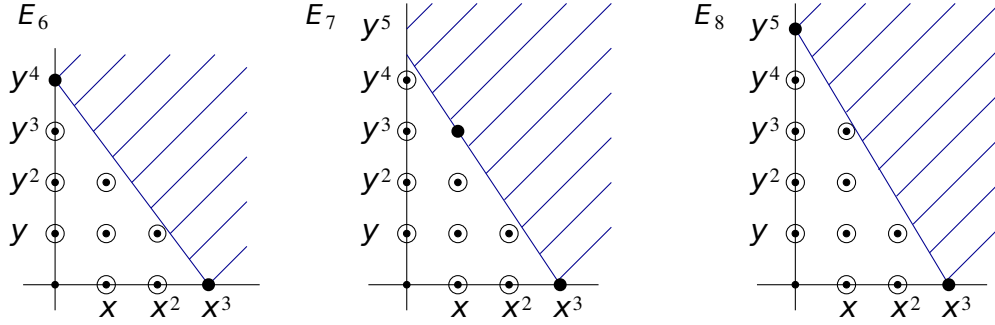


Fig 1: Taylor coefficients of a function with a singularity E_6 , E_7 , and E_8 : the triangle of zeros

From the definition of E_k we have $f_{x^a y^b}^{(a+b)}(P) = 0$ for $0 < \frac{a}{3} + \frac{2b}{k+2} < 1$, $f_{x^3}'''(P) = 6$ ($k = 6, 7, 8$) and $f_{y^{1+k/2}}^{(1+k/2)}(P) \neq 0$ ($k = 6, 8$), see Fig. 1. We will assume that $P = \mathbf{0} = (0, 0)$ in the coordinates x, y .

ASSUMPTION 1. For singularities E_k ($k = 6, 8$), assume that $f_{y^{1+k/2}}^{(1+k/2)}(\mathbf{0}) = \pm(1 + \frac{k}{2})!$.

THEOREM 1 (Reducing E_k to normal form [1]). Let a function $f(u, v)$ have a singularity E_k ($k = 6, 7, 8$) at a critical point P . Then, in some neighborhood of P , there is a local coordinate system $\tilde{x}, \tilde{y}$ in which the point P is the origin, and the function has the normal form $f = f(P) + \tilde{x}^3 \pm \tilde{y}^{1+k/2}$ for $k = 6, 8$, $f = f(P) + \tilde{x}^3 + \tilde{x}\tilde{y}^3$ for $k = 7$.

In [1], the existence of a coordinate change was proved using the Tougeron theorem [14]. In view of this, obtaining a formula for the corresponding coordinate change requires solving the Cauchy problem for a system of ODE's. We construct our coordinate change explicitly, without using the Tougeron theorem.

LEMMA 1 ([1]). In the case of a singularity E_k ($k = 6, 8$), under the hypotheses of Assumption 1, there exist coordinate changes $(x, y) \rightarrow (x_1 = x + d_0 y^2, y) \rightarrow (x_1, y_1 = y + d_1 x_1) \rightarrow (x_2 = x_1 + d_2 y_1^{k/2-1}, y_1) \rightarrow (x_2, y_2 = y_1 + d_3 x_2^2)$ where $d_j \in \mathbb{R}$ and $d_0 = 0$ for $k = 6$, such that $f_{x_2^a y_2^b}^{(a+b)}(\mathbf{0}) = 0$ for all $a, b \in \mathbb{Z}_+$ with $a + b > 0$, $a < 3$, and $b < 1 + \frac{k}{2}$.

A proof of Lemma 1 is schematically shown in Fig. 2.

THEOREM 2 (Estimating the radius of a neighborhood for the coordinate change). In the case of singularities E_k ($k = 6, 8$), under the hypotheses of Assumption 1, let $(x, y) \rightarrow (x_2, y_2)$ be the coordinate change from Lemma 1. Suppose that, in a neighborhood $U_0 = \{(x_2, y_2) \mid \max(|x_2|, |y_2|) < R_0\}$ of $\mathbf{0}$, the following estimates hold: $C_{\alpha\beta} := \sup_{U_0} |f_{x_2^\alpha y_2^\beta}^{(\alpha+\beta)}(x_2, y_2)| \leq M$ for

$$(\alpha, \beta) \in \{(0, 5), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\} \quad \text{if } k = 6,$$

$$(\alpha, \beta) \in \{(0, 6), (1, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} \quad \text{if } k = 8,$$

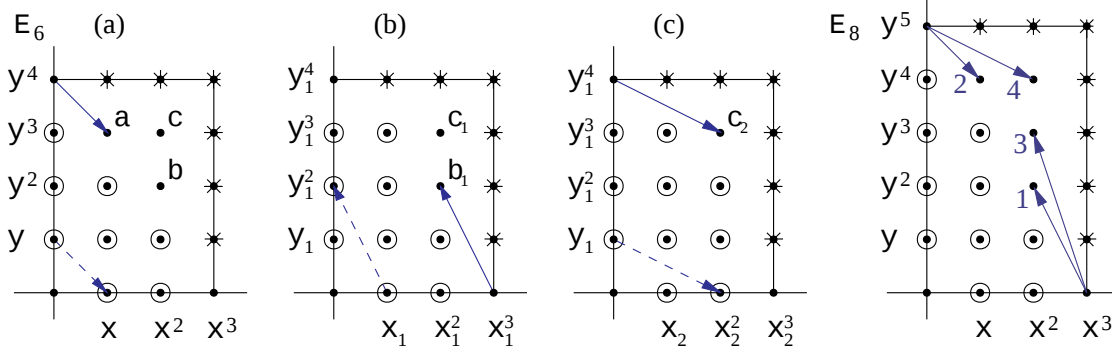


Fig 2: Coordinate changes killing the coefficients inside the rectangle: E_6 : (a) $y = y_1 - d_1 x$, $d_1 = \pm \frac{a}{4}$; (b) $x = x_2 - d_2 y_1^2$, $d_2 = \frac{b}{3} \mp \frac{a^2}{8}$; (c) $y_1 = y_2 - d_3 x_2^2$, $d_3 = \pm \frac{c_2}{4}$; E_8

where $R_0 > 0$, $M \geq 0$. Then, in the neighborhood $U = \{(x_2, y_2) \mid \max(|x_2|, |y_2|) < R\}$, with $R = \min\{R_0, \frac{2}{M+2}\}$, there is a coordinate change of the form

$$\phi : (x_2, y_2) \rightarrow (\tilde{x} = x_2 \sqrt[3]{h(x_2, y_2)}, \tilde{y} = y_2 g(x_2, y_2)^{\frac{2}{2+k}})$$

that reduces f to the normal form $f = f(P) + \tilde{x}^3 \pm \tilde{y}^{1+k/2}$ of E_k . In more detail:

- (a) the functions $h(\mathbf{x})$ and $g(\mathbf{x})$ are positive in U , thus the change $\phi|_U$ is well-defined and is C^∞ -smooth;
- (b) $\|\phi'(\mathbf{x}) - I\| < C < 1$ for all $\mathbf{x} \in U$, where $C = \frac{2}{5}$, thus $\phi|_U$ is C^1 -close to the identity;
- (c) the coordinate change $\phi|_U$ is injective and regular, i.e., it is an embedding and $\det \phi'(\mathbf{x}) \neq 0$ for all $\mathbf{x} \in U$, moreover $\phi(U)$ contains the open disk of radius $(1 - C)R$ centered at $\mathbf{0}$.

Further in Section 4, Theorem 3, we prove a similar result for the singularity type A_k . Our coordinate change $\phi|_U$ from Theorems 2 and 3 provides a “uniform” reduction of the function f at a singular point of type E_k , $k = 6, 8$, and A_k , $k \geq 1$, to the canonical form $f = f(P) + \tilde{x}^3 \pm \tilde{y}^{1+k/2}$ and $f = f(P) \pm \tilde{x}^2 \pm \tilde{y}^{k+1}$ in the sense that the neighborhood radius and the coordinate change we constructed in this neighborhood (as well as all partial derivatives of the coordinate change) continuously depend on the function f and its partial derivatives. A uniform reduction of smooth functions near critical points to a canonical form was known earlier for several singularity types [2, 11, 12], [13, Sec. 8].

The uniform Morse lemma [4] was applied in [5]–[8] for studying topology of the spaces of Morse functions on surfaces and decomposition of these spaces into classes of topological equivalence. Our results have similar applications for studying topology of the spaces of smooth functions [9] and gradient-like flows [10] with prescribed local singularities of ADE -types.

The author is grateful to Elena Kudryavtseva for suggesting the problem and useful discussions, advice and help in writing of this paper.

2. Key lemmas

LEMMA 2. Let $f_{x^a y^b}^{(a+b)}(\mathbf{0}) = 0$ for all $a, b \in \mathbb{Z}_+$ with $a < m$ and $b < n$, where $m, n \in \mathbb{N}$. Then the function $f|_U$ has the form $f(x, y) = x^m h(x, y) + y^n g(x, y)$ where U is a neighborhood of $\mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^2$ and

$$g(x, y) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f_y^{(n)}(x, sy)(1-s)^{n-1} ds, \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{1}{x^m} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^i}{i!} f_y^{(i)}(x, 0) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^i}{i!} \int_0^1 f_{x^m y^i}^{(m+i)}(sx, 0)(1-s)^{m-1} ds. \quad (2)$$

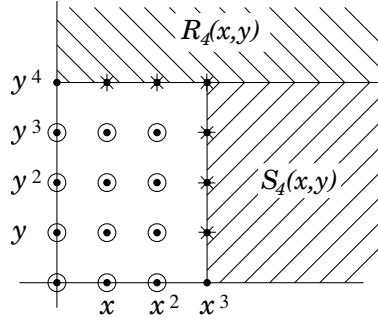


Fig 3: Constructing functions $S_n(x, y) = x^m h(x, y)$ and $R_n(x, y) = y^n g(x, y)$ (for $m = 3$ and $n = 4$)

PROOF. We represent f as a function of y with a parameter x . We write down the Taylor formula at the point $y = 0$ with the remainder term in the integral form:

$$f(x, y) = S_n(x, y) + R_n(x, y) = x^m h(x, y) + y^n g(x, y),$$

$$S_n(x, y) = f(x, 0) + f'_y(x, 0)y + f''_{y^2}(x, 0)\frac{y^2}{2!} + \cdots + f_{y^{n-1}}^{(n-1)}(x, 0)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = x^m h(x, y),$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^y f_y^{(n)}(x, t)(y-t)^{n-1} dt = \frac{y^n}{(n-1)!} \int_0^1 f_y^{(n)}(x, sy)(1-s)^{n-1} ds = y^n g(x, y).$$

The functions $S_4(x, y) = x^3 h(x, y)$ and $R_4(x, y) = y^4 g(x, y)$ appearing in the case of a singularity type E_6 are schematically shown in Fig. 3. The lemma is proved. $\square$

LEMMA 3. Let $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a smooth mapping, where U is a convex open subset of $\mathbb{R}^n$. Let the differential of ϕ have the form $\phi'(\mathbf{x}) = I + A(\mathbf{x})$, where I is the unit matrix of dimension n , $\|A(\mathbf{x})\| < c$, $0 < c < 1$. Then ϕ is injective and $\det \phi'(\mathbf{x}) \neq 0$ at every point $\mathbf{x} \in U$, i.e., ϕ is a diffeomorphism to its image $\phi(U)$. Moreover, $\langle \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq (1-c)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ for any pair of points $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$.

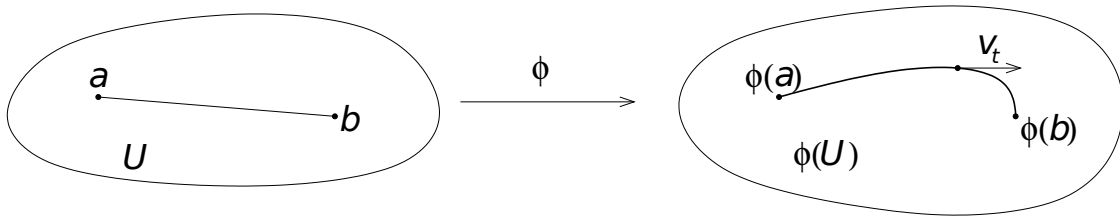


Fig 4: The mapping ϕ on the segment $[a, b]$

PROOF. Take any two points $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, and consider the mapping ϕ on the segment $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Consider the velocity vector

$$v_t = \frac{d}{dt}(\phi(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})))$$

along the ϕ -image of this segment, see Fig. 4. Let us look at the projection of the velocity vector v_t onto $\mathbf{b} - \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}\langle v_t, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} (\phi(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))), \mathbf{b} - \mathbf{a} \right\rangle = \\ &= \langle \phi'(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \langle (I + A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))) (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle + \langle A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle.\end{aligned}$$

Let us find an upper bound for the absolute value of the second term. Note that by the Cauchy-Schwarz inequality and by the definition of the matrix norm:

$$|\langle A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle| \leq \|A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \leq \|A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2.$$

Let us go back to the estimation of $\langle v_t, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle v_t, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle &= \langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle + \langle A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle \geq \\ &\geq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 - |\langle A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle| \geq \\ &\geq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 - \|A(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 > \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 (1 - c) > 0,\end{aligned}$$

from which $v_t \neq 0$, thus $\text{Ker } \phi'(\mathbf{a}) = 0$, therefore $\det \phi'(\mathbf{a}) \neq 0$.

By hypothesis $\|A(\mathbf{x})\| < c < 1$. Let us look at the dot product $\langle \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle$. As $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{a} \rangle'_t = [\sum x_i a_i]'_t = \sum x'_t a_i = \langle \mathbf{x}', \mathbf{a} \rangle$, we have

$$\langle \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \int_0^1 \langle v_t, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle dt > (1 - c) \int_0^1 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 dt = (1 - c) \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 > 0.$$

In other words, the injectivity condition is satisfied: $\phi(\mathbf{a}) \neq \phi(\mathbf{b})$ for each point $\mathbf{b} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$. Lemma 3 is proved. $\square$

LEMMA 4. *Under the notations of Theorem 2, the following inequality is true for all points $(x_2, y_2) \in U$: $|f_{x_2^k y_2^l}^{(k+l)}(x_2, y_2) - f_{x_2^k y_2^l}^{(k+l)}(0, 0)| \leq R(C_{k+1, l} + C_{k, l+1}) \leq 2MR$.*

PROOF. By abusing notations, denote (x_2, y_2) by (x, y) . We have

$$\begin{aligned}|f_{x^k y^l}^{(k+l)}(x, y) - f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, 0)| &= |f_{x^k y^l}^{(k+l)}(x, y) - f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, y) - f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, 0) + f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, y)| \leq \\ &\leq |f_{x^k y^l}^{(k+l)}(x, y) - f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, y)| + |f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, y) - f_{x^k y^l}^{(k+l)}(0, 0)| = \\ &= \left| \int_0^x f_{x^{k+1} y^l}^{(k+l+1)}(t, y) dt \right| + \left| \int_0^y f_{x^k y^{l+1}}^{(k+l+1)}(0, t) dt \right| \leq R(C_{k+1, l} + C_{k, l+1}).\end{aligned}$$

The lemma is proved. $\square$

LEMMA 5. *For any square $n \times n$ matrix $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, the Euclidean norm of the linear operator given by this matrix can be estimated as follows: $\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^t)}$. $\blacksquare$*

3. Proof of Theorem 1 for E_6, E_8 and Theorem 2

By Lemma 1, after the change $(x, y) \rightarrow (x_2, y_2)$, we have $f_{x_2^a y_2^b}^{(a+b)}(\mathbf{0}) = 0$ for all $a, b \in \mathbb{Z}_+$ with $a + b > 0$, $a < 3$, and $b < 1 + \frac{k}{2}$. By Lemma 2, $f = f(P) + x_2^3 h(x_2, y_2) + \eta y_2^{1+k/2} g(x_2, y_2)$ for some functions $h, g \in C^\infty(U_0)$, where $\eta = \pm 1$ is defined as $\eta = \text{sgn } f_{y_2^{1+k/2}}^{(1+k/2)}(\mathbf{0})$. Observe

that $h(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = 1$ due to the definition of E_k singularity ($k = 6, 8$) and Assumption 1. This immediately reduces the function to the required normal form $f = f(P) + \tilde{x}^3 + \eta \tilde{y}^{1+k/2}$ by the coordinate change $\phi : \mathbb{R}_{x_2, y_2}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\tilde{x}, \tilde{y}}^2$ with $\tilde{x} = x_2 \sqrt[3]{h(x_2, y_2)}$, $\tilde{y} = y_2 g(x_2, y_2)^{\frac{2}{2+k}}$. Thus we proved Theorem 1 for $k = 6, 8$.

By abusing notations, we will denote (x_2, y_2) by (x, y) . By Lemma 2, we have explicit formulas (1), (2) for g, h (with $m = 3$ and $n = 1 + k/2$), namely:

$$\eta g(x, y) = \frac{1}{(k/2)!} \int_0^1 f_{y^{1+k/2}}^{(1+k/2)}(x, sy)(1-s)^{k/2} ds, \quad h(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k/2} \frac{y^i}{i!} \int_0^1 f_{x^3 y^i}^{(3+i)}(sx, 0)(1-s)^2 ds.$$

It remains to apply Lemma 3 to the coordinate transformation ϕ and to the neighborhood U from the formulation of Theorem 2. In other words, it remains to check the fulfillment of the assumptions of Lemma 3. By using the above formulas for the coordinate change ϕ and the functions g, h , the bound $C_{\alpha\beta} \leq M$ and Lemmas 4 and 5, as well as the Taylor expansion formula with a remainder in the Lagrange form or an integral remainder, we will prove the required bound $\|\phi'(\mathbf{x}) - I\| = \|A(\mathbf{x})\| < C < 1$ for each point $\mathbf{x} \in U$.

Let us proceed with detailed estimations, separately for the cases of E_6 and E_8 .

3.1. The case of E_6

For simplifying notations, we will give the proof for the case $\eta = 1$, i.e. $f_{y^{1+k/2}}^{(1+k/2)}(\mathbf{0}) > 0$. In the case $\eta = -1$, the proof is similar.

We compute the elements of the Jacobi matrix of ϕ :

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = h^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} h^{-\frac{2}{3}} \cdot h'_x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{3} h^{-\frac{2}{3}} \cdot h'_y, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{4} g^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6} \int_0^1 f_{xy^4}^{(5)}(x, sy)(1-s)^3 ds \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} = g^{\frac{1}{4}} + y \cdot \left(\frac{1}{4} g^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{6} \int_0^1 s f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^3 ds \right). \quad (6)$$

If $M = 0$, then $\phi = \text{id}$ and everything is proved. Let further $M > 0$, and therefore $R < 1$. By Assumption 1, we have $h(0, 0) = 1$, $g(0, 0) = 1$. Thus, the Jacobi matrix at $\mathbf{0}$ is the unit matrix I .

By using the above formulas (3)–(6) for Jacobi matrix' elements, let us estimate the elements of the Jacobi matrix $\frac{\partial(\tilde{x}-x, \tilde{y}-y)}{\partial(x, y)}$ and prove item (a) for the case of E_6 .

Step 1. Here we find an upper bound for $|1 - \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}|$. Remind that:

$$\tilde{x} = x \sqrt[3]{h(x, y)} = \sqrt[3]{f(x, 0) + y f'_y(x, 0) + \frac{y^2}{2} f''_{y^2}(x, 0) + \frac{y^3}{6} f'''_{y^3}(x, 0)}.$$

Denote $\tilde{h} = \tilde{h}(x, y) = h(x, y) - 1$.

Let us estimate $\tilde{h}(x, y)$. In the expression for $h(x, y)$, we apply the Taylor expansion formula in x with a remainder in the Lagrange form to the coefficients of powers of y :

$$\begin{aligned} |h(x, y) - 1| &= \left| \frac{f'''_{x^3}(0, 0)}{6} + x \frac{f^{(4)}_{x^4}(c_0, 0)}{24} + \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k+3)}_{x^3 y^k}(c_k, 0)}{6} \cdot \frac{y^k}{k!} - 1 \right| = \\ &= \left| 1 + x \frac{f^{(4)}_{x^4}(c_0, 0)}{24} + y \frac{f^{(4)}_{x^3 y}(c_1, 0)}{6} + y^2 \frac{f^{(5)}_{x^3 y^2}(c_2, 0)}{12} + y^3 \frac{f^{(6)}_{x^3 y^3}(c_3, 0)}{36} - 1 \right| \leq \\ &\leq \frac{MR}{12} \left(\frac{5}{2} + R + \frac{R^2}{3} \right) < \frac{5}{24} \cdot \frac{MR}{1-R} \leq \frac{5}{24} \cdot \frac{2M}{M+2} \cdot \frac{1}{1-2/(M+2)} = \frac{5}{24} \cdot 2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hence $h(x, y) \in (0.5, 1.5)$. Therefore $\sqrt[3]{h(x, y)} \in (0.79, 1.21)$.

Item (a) of Theorem 2 is proved for the function $h(x, y)$. Set $c = 0.5$. Then $|\tilde{h}(x, y)| < c$.

By the formula (3) we have

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = h^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} h^{-\frac{2}{3}} \cdot h'_x = (1 + \tilde{h})^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} (1 + \tilde{h})^{-\frac{2}{3}} \cdot h'_x.$$

Let us estimate $|h'_x|$. We use Taylor's formula with an integral remainder:

$$\begin{aligned} |h'_x| &= \left| \left(\sum_{k=0}^3 \frac{y^k}{k!} \frac{f^{(k)}_{y^k}(x, 0)}{x^3} \right)' \right|_x = \left| \left(\sum_{k=0}^3 \frac{y^k}{k!} \frac{1}{2} \int_0^1 f^{(k+3)}_{y^k x^3}(sx, 0) (1-s)^2 ds \right)' \right|_x = \\ &= \left| \sum_{k=0}^3 \frac{y^k}{k! \cdot 2} \int_0^1 s f^{(k+4)}_{y^k x^4}(sx, 0) (1-s)^2 ds \right| \leq \sum_{k=0}^3 \frac{R^k M}{k! \cdot 2} \int_0^1 (s - 2s^2 + s^3) ds < \\ &< \frac{M}{24} \left(1 + R + \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{6} \right) < \frac{1}{24} \cdot \frac{M}{1-R} \leq \frac{1}{12R}. \end{aligned}$$

Set $c_x = \frac{1}{12R}$. We obtain a bound for $|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - 1|$ using the estimate of $\sqrt[3]{h}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - 1 \right| &= \left| \sqrt[3]{h} - 1 + x \cdot \frac{1}{3} (1 + \tilde{h})^{-\frac{2}{3}} h'_x \right| \leq |\sqrt[3]{h} - 1| + \left| x \cdot \frac{1}{3} (1 + \tilde{h})^{-\frac{2}{3}} h'_x \right| < \\ &< 0.21 + \frac{c_x R}{3} (1 - c)^{-\frac{2}{3}} = 0.21 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3 \cdot 12} < 0.21 + 0.05 = 0.26. \end{aligned}$$

Step 2. Let us estimate $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}$ from the formula (4).

a) First we estimate $|h'_y|$ when $x \neq 0$. We use Taylor's formula with an integral remainder:

$$\begin{aligned} |h'_y| &= \left| (f(x, 0) + y f'_y(x, 0) + \frac{y^2}{2} f''_{y^2}(x, 0) + \frac{y^3}{6} f'''_{y^3}(x, 0))'_y / x^3 \right| = \\ &= \left| (f'_y(x, 0) + y f''_{y^2}(x, 0) + \frac{y^2}{2} f'''_{y^3}(x, 0)) / x^3 \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \left(f^{(4)}_{x^3 y}(sx, 0) + y f^{(5)}_{x^3 y^2}(sx, 0) + \frac{y^2}{2} f^{(6)}_{x^3 y^3}(sx, 0) \right) (1-s)^2 ds \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{6} (1 + R + R^2) < \frac{1}{6} \cdot \frac{M}{1-R} \leq \frac{1}{3R}. \end{aligned}$$

Set $c_y = \frac{1}{3R}$.

b) In the formula (4) for $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}$ we expand $h^{-\frac{2}{3}}$ in a Taylor series in $\tilde{h}$ and take $c_{\tilde{h}} = c_{\tilde{h}}(x, y) \in [0, \tilde{h}(x, y)]$ from the Taylor-Lagrange formula:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \right| &= \left| x \cdot \frac{1}{3} (1 + \tilde{h})^{-\frac{2}{3}} \cdot h'_y \right| = \left| \frac{x}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \tilde{h} + \frac{5}{9} (1 + c_{\tilde{h}})^{-\frac{8}{3}} \tilde{h}^2 \right) h'_y \right| \leq \\ &\leq \frac{R}{3} \left(1 + \frac{2}{3} c + \frac{5}{9} (1 + c_{\tilde{h}})^{-\frac{8}{3}} c^2 \right) c_y < \frac{c_y R}{3} \left(1 + \frac{2}{3} c + \frac{5}{9} (1 - c)^{-\frac{8}{3}} c^2 \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} 2^{\frac{8}{3}} / 4 \right) < 0.25. \end{aligned}$$

Step 3. Let us estimate $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}$ from the formula (5). Let us first estimate separately the factors of this expression.

a) Auxiliary Assessment. By Lemma 4, we have

$$\left| \int_0^1 \left(f_{y^4}^{(4)}(x, sy) - f_{y^4}^{(4)}(0, 0) \right) (1-s)^3 ds \right| \leq \int_0^1 2MR(1-s)^3 ds = \frac{MR}{2} < 1.$$

b) By Assumption 1, we have $f_{y^4}^{(4)}(0, 0) = 24$. We get the following lower bound:

$$\begin{aligned} 6|g| &= \left| \int_0^1 f_{y^4}^{(4)}(x, sy) (1-s)^3 ds \right| = \left| \int_0^1 \left(f_{y^4}^{(4)}(x, sy) - f_{y^4}^{(4)}(0, 0) + f_{y^4}^{(4)}(0, 0) \right) (1-s)^3 ds \right| \\ &\geq 6 - \frac{MR}{2} > 5 > 0. \end{aligned}$$

Item (a) of Theorem 2 has been completely proved for E_6 . Set $\tilde{c} = 1 - \frac{MR}{12}$. Then

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right| &= \left| y \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} \int_0^1 f_{y^4}^{(4)}(x, sy) (1-s)^3 ds \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{6} \int_0^1 f_{xy^4}^{(5)}(x, sy) (1-s)^3 ds \right) \right| \leq \\ &\leq R \frac{1}{4} \tilde{c}^{-\frac{3}{4}} \frac{M}{24} < \frac{MR}{96} \left(1 - \frac{MR}{12} \right)^{-\frac{3}{4}} < \frac{1}{48} \left(1 - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{3}{4}} < 0.03. \end{aligned}$$

Step 4. Let us estimate $|1 - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}|$ from formula (6).

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - 1 \right| &= \left| \sqrt[4]{\frac{1}{6} \int_0^1 f_{y^4}^{(4)}(x, sy) (1-s)^3 ds} - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{4} \left(\frac{1}{6} \int_0^1 f_{y^4}^{(4)}(x, sy) (1-s)^3 ds \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{6} \int_0^1 s f_{y^5}^{(5)}(x, sy) (1-s)^3 ds \right| \leq \\ &< \left(1 + \frac{MR}{12} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 + \frac{MR}{80} \left(1 - \frac{MR}{12} \right)^{-\frac{3}{4}} < \left(1 + \frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 + \frac{1}{40} \left(1 - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{3}{4}} < 0.07. \end{aligned}$$

Step 5. By Steps 1–4, for each point $\mathbf{x} \in U$, we have:

$$\|\phi'(\mathbf{x}) - I\| = \|A(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{0.26^2 + 0.25^2 + 0.03^2 + 0.07^2} = \sqrt{0.1359} < 0.4 = C < 1,$$

that proves item (b) of Theorem 2 for $C = \frac{2}{5}$. By Lemma 3 the coordinate change ϕ is injective in U , that proves item (c), except for the properties of $\phi(U)$.

From the last assertion of Lemma 3 and [5, Cor. 8.3, Step 1], we conclude that $\phi(U)$ contains the open disk of radius $(1 - C)R$ centered at the origin.

This completes our proof of Theorem 2 for the case of a singularity E_6 .

3.2. The case of E_8

For a singularity E_8 , the coordinate change ϕ is given by the formulas $\tilde{x} = x\sqrt[3]{h(x, y)} = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^4 \frac{y^k}{k!} f_{y^k}^{(k)}(x, 0)}$, $\tilde{y} = y\sqrt[5]{g(x, y)} = y \left[\eta \frac{1}{24} \int_0^1 f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right]^{\frac{1}{5}}$, where $\eta = \operatorname{sgn} f_{y^5}^{(5)}(\mathbf{0})$.

Like in the case of E_6 , we will further assume that $\eta = 1$ (for $\eta = -1$, the proof is similar).

Step 1. As in the case of E_6 , we find a bound for the term $\tilde{h}(x, y)$, in order to estimate $|1 - \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}|$. The difference from the case of E_6 is an additional term in the sum of absolute values that can be bound by $\frac{MR^4}{144}$, then the sum can be bound by the same geometric progression. In more detail:

$$\begin{aligned} |h(x, y) - 1| &= \left| \frac{f_{x^3}'''(0, 0)}{6} + x \frac{f_{x^4}^{(4)}(c_0, 0)}{24} + \sum_{k=1}^4 \frac{f_{x^3 y^k}^{(k+3)}(c_k, 0)}{6} \cdot \frac{y^k}{k!} - 1 \right| \leq \frac{RC_{40}}{24} + \\ &+ \frac{RC_{31}}{6} + \frac{R^2 C_{32}}{12} + \frac{R^3 C_{33}}{36} + \frac{R^4 C_{34}}{144} \leq \frac{MR}{12} \left(\frac{5}{2} + R + \frac{R^2}{3} + \frac{R^3}{12} \right) < \frac{5}{24} \cdot 2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

The bound from before holds: $h(x, y) \in (0.5, 1.5)$ or $|\tilde{h}| < 0.5$. Then $\sqrt[3]{h(x, y)} \in (0.79, 1.21)$.

Similar arguments work for the estimation of the term $|h'_x|$. Thus we can bound it as we did it in the case of E_6 :

$$|h'_x| < \frac{1}{12R}.$$

Set $c_x = \frac{1}{12R}$.

The element $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ has the same representation in terms of the function h as in the case E_6 and the same estimation for every term. Hence the following bound holds:

$$\left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - 1 \right| < 0.26.$$

Step 2. a) For estimating the term $|h'_y|$ when $x \neq 0$, we can use the bound from the case of E_6 :

$$|h'_y| = \left| \left(\sum_{k=0}^4 \frac{y^k}{k!} \frac{f_{y^k}^{(k)}(x, 0)}{x^3} \right)'_y \right| \leq \frac{1}{3R}.$$

b) The element $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}$ has the same representation in terms of the function h as in the case of E_6 . Hence the following bound holds:

$$\left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \right| < 0.25.$$

Step 3. In this step, we have orders of partial derivatives and a constant $\tilde{c}$ that differ from the case of E_6 .

a) Auxiliary Assessment. By Lemma 4, we have

$$\left| \int_0^1 \left(f_{y^5}^{(5)}(x, sy) - f_{y^5}^{(5)}(0, 0) \right) (1-s)^4 ds \right| \leq \int_0^1 R(C_{15} + C_{06})(1-s)^4 ds = \frac{(C_{15} + C_{06})R}{5} \leq \frac{2MR}{5}.$$

b) By Assumption 1, we have $f_{y^5}^{(5)}(0, 0) = 120$. We get the following lower bound for $24|g|$:

$$\left| \int_0^1 f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right| = \left| \int_0^1 \left(f_{y^5}^{(5)}(x, sy) - f_{y^5}^{(5)}(0, 0) + f_{y^5}^{(5)}(0, 0) \right) (1-s)^4 ds \right| \geq 24 - \frac{2MR}{5}.$$

Thus $|g| > 0$, and item (a) of Theorem 2 is proved for E_8 . Set $\tilde{c} = 1 - \frac{MR}{60}$. Then

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right| &= \left| y \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{24} \int_0^1 f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{1}{24} \int_0^1 f_{xy^5}^{(6)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right) \right| \leq \\ &\leq R^{\frac{1}{5}} \tilde{c}^{-\frac{4}{5}} \frac{C_{15}}{120} < \frac{MR}{600} \left(1 - \frac{MR}{60} \right)^{-\frac{4}{5}} < \frac{1}{300} \left(1 - \frac{1}{30} \right)^{-\frac{4}{5}} < 0.004 < 0.03. \end{aligned}$$

Step 4. Let us estimate $|1 - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - 1 \right| &= \left| \sqrt[5]{\frac{1}{24} \int_0^1 f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^4 ds} - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{5} \left(\frac{1}{24} \int_0^1 f_{y^5}^{(5)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right)^{-\frac{4}{5}} \frac{1}{24} \int_0^1 s f_{y^6}^{(6)}(x, sy)(1-s)^4 ds \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{1}{24} \int_0^1 \left(f_{y^5}^{(5)}(x, sy) - f_{y^5}^{(5)}(0, 0) + f_{y^5}^{(5)}(0, 0) \right) (1-s)^4 ds \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right| + |\dots| \leq \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{(C_{15} + C_{06})R}{120} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right| + R \tilde{c}^{-\frac{4}{5}} \frac{C_{06}}{5 \cdot 24 \cdot 30} < \\ &< 1 - \left(1 - \frac{MR}{60} \right)^{\frac{1}{5}} + \frac{MR}{3600} \left(1 - \frac{MR}{60} \right)^{-\frac{4}{5}} < \\ &< 1 - \left(1 - \frac{1}{30} \right)^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{1800} \left(1 - \frac{1}{30} \right)^{-\frac{4}{5}} < 0.008 < 0.07. \end{aligned}$$

Step 5. From Steps 1–4, we get the required bound for a singularity of the type E_8 :

$$\|\phi'(\mathbf{x}) - I\| < \sqrt{0.26^2 + 0.25^2 + 0.004^2 + 0.008^2} < 0.4 = C < 1.$$

The rest of the proof is the same as in the case of E_6 .

Theorem 2 is completely proved. □

4. The case of A_k

DEFINITION 2. A smooth function $f(u, v)$ has a singularity type A_k ($k \geq 2$) at its critical point $P \in \mathbb{R}^2$ if

- (i) the first differential $df(P)$ vanishes and the second differential $d^2f(P)$ is a perfect square (non-zero);
- (ii) some condition on coefficients of the Taylor series of f at P holds (see below).

Consider a linear change $(u, v) \rightarrow (x, y)$ such that $d^2f(P) = \pm 2(dx)^2$. By using a non-linear change $(x, y) \rightarrow (x_1 = x + y^2 Q(y), y_1 = y)$ for some polynomial $Q(y)$ of degree $\leq \frac{k-3}{2}$, one can achieve that $f_{x_1 y_1^{i+1}}^{(i+2)}(P) = 0$ for all i with $1 \leq i \leq [\frac{k-1}{2}]$. Notice that $f_{x_1}''(P) = \pm 2$. The condition on the Taylor series coefficients is as follows: $f_{y_1^3}'''(P) = \dots = f_{y_1^k}^{(k)}(P) = 0$ and $f_{y_1^{k+1}}^{(k+1)}(P) \neq 0$ (if $k = 2$, then this condition means that $f_{y_1^3}'''(P) \neq 0$).

We will assume that $P = (0, 0) = \mathbf{0}$ in the coordinates x, y .

Due to the splitting lemma [1, Lemma 4.1], there exists a C^∞ -smooth coordinate change $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ (which in fact can be constructed by an explicit formula by using a parametric

version of the Morse lemma) such that $P = (0, 0)$ in the coordinates x, y , and $f = f(P) \pm X^2 + F(Y)$ where $F(y)$ is a smooth function such that $F'(0) = F''(0) = 0$. The condition (ii) in the above definition is in fact equivalent to the following: $F'''(0) = \dots = F^{(k)}(0) = 0$ and $F^{(k+1)}(0) \neq 0$ (see also [3, Assertion 6.1] for another condition equivalent to this condition). It is an easy exercise that there exists a C^∞ -smooth coordinate change $Y \rightarrow \tilde{Y}$ (which in fact can be constructed by an explicit formula) centered at the origin that reduces f to the normal form $f = f(P) \pm X^2 \pm \tilde{Y}^{k+1}$.

We say that a smooth function $f(u, v)$ has a singularity type A_1 at its critical point $P \in \mathbb{R}^2$ if this point is non-degenerate (i.e., Morse). For $k = 1$, we can find a linear change $(u, v) \rightarrow (x_1, y_1)$ such that $f''_{x_1}(P) = \pm 2$ and $f''_{x_1 y_1}(P) = 0$, thus $f''_{y_1}(P) \neq 0$.

ASSUMPTION 2. For singularities A_k ($k \geq 1$), assume that $f^{(k+1)}_{y_1}(0, 0) = \pm(k+1)!$.

Similarly to Lemma 1, one can construct a coordinate change $(x_1, y_1) \rightarrow (x_2 = x_1 + y_1^2 Q_1(y_1), y_2 = y_1)$ for some polynomial $Q_1(y_1)$ of degree $\leq k$, such that $f^{(a+b)}_{x_2^a y_2^b}(P) = 0$ for all $a, b \in \mathbb{Z}_+$ with $a + b > 0$, $a < 2$, and $b < k + 1$.

The following theorem extends the uniform Morse lemma [4, 5] to the case of the infinite series of singularities A_k for all $k \geq 1$.

THEOREM 3 (Estimating the radius of a neighborhood for the coordinate change). *In the case of a singularity A_k ($k \geq 1$), under the hypotheses of Assumption 2, let $(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2)$ be the coordinate change from above. Suppose that, in a neighborhood $U_0 = \{(x_2, y_2) \mid \max(|x_2|, |y_2|) < R_0\}$ of $\mathbf{0}$, the following estimates hold: $C_{\alpha\beta} := \sup_{U_0} |f^{(\alpha+\beta)}_{x_2^\alpha y_2^\beta}(x_2, y_2)| \leq M$ for all*

$$(\alpha, \beta) \in \{(0, k+2), (1, k+1), (2, i), (3, 0), (3, i) \mid 1 \leq i \leq k\},$$

where $R_0 > 0$, $M \geq 0$. Then, in the neighborhood $U = \{(x_2, y_2) \mid \max(|x_2|, |y_2|) < R\}$, with $R = \min\{R_0, \frac{3}{4M+3}\}$, there is a C^∞ -smooth coordinate change of the form

$$\phi : (x_2, y_2) \rightarrow (\tilde{x} = x_2 \sqrt{h(x_2, y_2)}, \tilde{y} = y_2 g(x_2, y_2)^{\frac{1}{k+1}})$$

that reduces f to the normal form $f = f(P) \pm \tilde{x}^2 \pm \tilde{y}^{k+1}$ of A_k . In more detail: the coordinate change $\phi|_U$ satisfies the conditions (a), (b), (c) from Theorem 2 with $C = 0.93$.

PROOF. By abusing notations, we will denote (x_2, y_2) by (x, y) . Let $\eta_h = \text{sgn } f''_{x^2}(P)$, $\eta_g = \text{sgn } f^{(k+1)}_{y^{k+1}}(P)$. Due to Lemma 2, we have $f = f(P) + \eta_h x^2 h(x, y) + \eta_g y^{k+1} g(x, y)$, where the functions $\eta_h h, \eta_g g$ are given by the explicit formulas (1), (2) (with $m = 2$ and $n = k + 1$). Thus $h(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = 1$ due to the definition of A_k singularity and Assumption 2.

Like in the case of E_k ($k = 6, 8$), we will further assume that $\eta_h = \eta_g = 1$ (for $\eta_h = -1$ or $\eta_g = -1$, the proof is similar).

Consider the coordinate change

$$\tilde{x} = x \sqrt{h(x, y)} = \sqrt{\sum_{i=0}^k \frac{y^i}{i!} f^{(i)}_{y^i}(x, 0)}, \quad \tilde{y} = y^{k+1} \sqrt{g(x, y)} = y \left[\frac{1}{k!} \int_0^1 f^{(k+1)}_{y^{k+1}}(x, sy) (1-s)^k ds \right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

We extend our proof of Theorem 2 (about singularities E_6, E_8) to the case of singularities A_k .

Step 1. a) Let us estimate $\tilde{h}(x, y)$:

$$\begin{aligned} |h(x, y) - 1| &= \left| \frac{f''_{x^2}(0, 0)}{2} + x \frac{f'''_{x^3}(c_0, 0)}{6} + \sum_{i=1}^k \frac{f^{(i+2)}_{x^2 y^i}(c_i, 0)}{2} \frac{y^i}{i!} - 1 \right| \leq \\ &\leq \frac{RC_{30}}{6} + \sum_{i=1}^k \frac{C_{2i} R^i}{2 \cdot i!} \leq \frac{2MR}{3(1-R)} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Thus $h(x, y) \in (0.5, 1.5)$, or $|\tilde{h}| < 0.5 =: c$. Then $\sqrt{h(x, y)} \in (0.7, 1.3)$.

We have

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = h^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} \cdot h'_x = (1 + \tilde{h})^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} (1 + \tilde{h})^{-\frac{1}{2}} \cdot h'_x.$$

Let us estimate $|h'_x|$:

$$\begin{aligned} |h'_x| &= \left| \left(\sum_{i=0}^k \frac{y^i f_{y^i}^{(i)}(x, 0)}{i! x^2} \right)' \right|_x = \left| \left(\sum_{i=0}^k \frac{y^i}{i!} \int_0^1 f_{y^i x^2}^{(i+2)}(sx, 0) (1-s) ds \right)' \right|_x = \\ &= \left| \sum_{i=0}^k \frac{y^i}{i!} \int_0^1 s f_{y^i x^3}^{(i+3)}(sx, 0) (1-s) ds \right| \leq \sum_{i=0}^k \frac{R^i C_{3i}}{i!} \int_0^1 (s - s^2) ds \leq \frac{M}{6(1-R)} \leq \frac{1}{8R}. \end{aligned}$$

Set $c_x = \frac{1}{8R}$. Let us estimate $|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - 1|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - 1 \right| &= \left| \sqrt{h} - 1 + x \cdot \frac{1}{2} (1 + \tilde{h})^{-\frac{1}{2}} h'_x \right| \leq |\sqrt{h} - 1| + \left| x \cdot \frac{1}{2} (1 + \tilde{h})^{-\frac{1}{2}} h'_x \right| < \\ &< 0.3 + \frac{c_x R}{2} (1 - c)^{-\frac{1}{2}} < 0.3 + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 8} < 0.3 + 0.1 = 0.4. \end{aligned}$$

Step 2. a) Let us estimate $|h'_y|$ when $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} |h'_y| &= \left| \left(\sum_{i=0}^k \frac{y^i f_{y^i}^{(i)}(x, 0)}{i! x^2} \right)' \right|_y = \left| \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^i f_{y^{i+1}}^{(i+1)}(x, 0)}{i! x^2} \right)' \right| = \\ &= \left| \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^i}{i!} f_{x^2 y^{i+1}}^{(i+3)}(sx, 0) \right) (1-s) ds \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{R^i C_{2,i+1}}{i!} \leq \frac{M}{2(1-R)} \leq \frac{3}{8R}. \end{aligned}$$

Set $c_y = \frac{3}{8R}$.

b) Let us estimate $|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \right| &= \left| x \cdot \frac{1}{2} (1 + \tilde{h})^{-\frac{1}{2}} \cdot h'_y \right| = \left| \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{h} + \frac{3}{8} (1 + c_{\tilde{h}})^{-\frac{5}{2}} \tilde{h}^2 \right) h'_y \right| \leq \\ &\leq \frac{R}{2} \left(1 + \frac{1}{2} c + \frac{3}{8} (1 + c_{\tilde{h}})^{-\frac{5}{2}} c^2 \right) c_y < \frac{c_y R}{2} \left(1 + \frac{1}{2} c + \frac{3}{8} (1 - c)^{-\frac{5}{2}} c^2 \right) = \\ &= \frac{3}{16} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} 2^{\frac{5}{2}} / 4 \right) < 0.4. \end{aligned}$$

Step 3. a) Auxiliary Assessment. By Lemma 4:

$$\left| \int_0^1 \left(f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy) - f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) \right) (1-s)^k ds \right| \leq \int_0^1 R(C_{1,k+1} + C_{0,k+2}) (1-s)^k ds \leq \frac{2MR}{k+1}.$$

b) By Assumption 2 we have $f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) = (k+1)!$. We get the following lower bound for $k!|g(x, y)|$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy) (1-s)^k ds \right| &= \left| \int_0^1 \left(f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy) - f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) + f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) \right) (1-s)^k ds \right| \geq \\ &\geq k! - \frac{2MR}{k+1} \geq k! \left(1 - \frac{3}{2(k+1)!} \right) > 0. \end{aligned}$$

Thus $|g| > 0$, and we proved item (a) of Theorem 3.

Set $\tilde{c} = 1 - \frac{2MR}{(k+1)!}$. Then the following sequence of inequalities holds:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right| &= \left| y \cdot \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy)(1-s)^k ds \right)^{-\frac{k}{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 f_{xy^{k+1}}^{(k+2)}(x, sy)(1-s)^k ds \right) \right| \leq \\ &\leq R \frac{1}{k+1} \tilde{c}^{-\frac{k}{k+1}} \frac{C_{1,k+1}}{(k+1)!} \leq \\ &\leq \frac{MR}{(k+1)(k+1)!} \left(1 - \frac{2MR}{(k+1)!} \right)^{-\frac{k}{k+1}} < \frac{3}{4 \cdot 4} \left(1 - \frac{3}{2(k+1)!} \right)^{-\frac{k}{k+1}} \leq \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Let us prove the latter inequality in this sequence. For $k = 1$ this inequality is in fact an equality. For $k > 1$ we have $\tilde{c}^{-\frac{k}{k+1}} < \tilde{c}^{-1}$, moreover the function $\tilde{c}^{-1}|_{MR=\frac{3}{4}}$ of k is monotone decreasing. Since $\tilde{c}^{-1}|_{MR=\frac{3}{4}} < 2$ for $k = 2$, we have the same for all $k > 2$. This proves the desired inequality.

Step 4. Let us estimate $|1 - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - 1 \right| &= \left| \sqrt[k+1]{\frac{1}{k!} \int_0^1 f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy)(1-s)^k ds} - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{k+1} \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy)(1-s)^k ds \right)^{-\frac{k}{k+1}} \frac{1}{k!} \int_0^1 s f_{y^{k+2}}^{(k+2)}(x, sy)(1-s)^k ds \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \left(f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x, sy) - f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) + f_{y^{k+1}}^{(k+1)}(0, 0) \right) (1-s)^k ds \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right| + |\dots| \leq \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{(C_{1,k+1} + C_{0,k+2})R}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right| + R \tilde{c}^{-\frac{k}{k+1}} \frac{C_{0,k+2}}{(k+2)(k+1)(k+1)!} < \\ &< 1 - \left(1 - \frac{2MR}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{k+1}} + \dots = 1 - \tilde{c}^{\frac{1}{k+1}} + \frac{MR \tilde{c}^{-\frac{k}{k+1}}}{(k+2)(k+1)(k+1)!} < \\ &< \frac{3}{2 \cdot (k+1)!} + \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{5}{8} \end{aligned}$$

if $k > 1$. And when $k = 1$, we get $1 - \tilde{c}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, therefore $|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - 1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Step 5. From Steps 1–4, for A_k we have $\|\phi'(\mathbf{x}) - I\| < \sqrt{0.4^2 + 0.4^2 + \frac{3^2}{8} + \frac{5^2}{8}} < 0.93 < 1$ for all $k \geq 1$. The rest of the proof is the same as for Theorem 2. Theorem 3 is proved. $\square$

5. Conclusion

For singularities A_k , E_6 , and E_8 there are explicitly constructed (in Theorems 1–3) a coordinate change reducing a function to normal form and estimated (in terms of C^r -norm of the function, where $r = k+3$, 7, and 8 respectively) from below a radius of a neighborhood where this coordinate change is well-defined.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 4. С. 3–25. Engl. version: Arnol'd V.I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities // Funct. Anal. Appl. 1972. Vol. 6, № 4. P. 254–272.

2. Brodersen H. M-t topologically stable mappings are uniformly stable // *Math. Scand.* 1983. Vol. 52. P. 61–68.
3. Kudryavtseva E. A., Lakshmanov E. L. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions // In: *Topological Methods in the Theory of Integrable Systems*. Eds. Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T., and Oshemkov, A. A.; Cambridge Scientific Publishers, Springer. 2006. P. 173–214. <http://arxiv.org/abs/1212.4302>.
4. Кудрявцева Е. А. Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. I Матем. Мех.* 2009. № 4, С. 13–22. Engl. version: Kudryavtseva E. A. Uniform Morse lemma and isotope Morse functions on surfaces // *Moscow Univ. Math. Bull.* 2009. Vol. 64, no. 4. P. 150–158.
5. Кудрявцева Е. А., Пермяков Д. А. Оснащенные функции Морса на поверхностях // *Матем. Сб.* 2010. Т. 201, № 4. С. 501–567. Engl. version: Kudryavtseva E. A., Permyakov D. A. Framed Morse functions on surfaces // *Sbornik Math.* 2010. Vol. 201, no. 4. P. 501–567.
6. Кудрявцева Е. А. Топология пространств функций Морса на поверхностях // *Матем. Записки.* 2012. Т. 92, № 2. С. 241–261. Engl. version: Kudryavtseva E. A. The Topology of Spaces of Morse Functions on Surfaces // *Math. Notes.* 2012. Vol. 92, no. 2. P. 219–236. <http://arxiv.org/abs/1104.4792>.
7. Кудрявцева Е. А. Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2012. № 4, С. 14–20. Engl. version: Kudryavtseva E. A. Special framed Morse functions on surfaces // *Moscow Univ. Math. Bull.* 2012. Vol. 67, no. 4. P. 151–157. <http://arxiv.org/abs/1106.3116>.
8. Кудрявцева Е. А. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // *Матем. сб.* 2013. Т. 204, № 1. С. 79–118. Engl. version: Kudryavtseva E. A. On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces // *Sb. Math.* 2013. Vol. 204, no. 1. P. 75–113. <http://arxiv.org/abs/1104.4796>.
9. Кудрявцева Е. А. Топология пространств функций с заданными особенностями на поверхностях // *Докл. Акад. Наук* 2016. Т. 468, № 1. С. 139–142. Engl. version: Kudryavtseva E. A. Topology of the spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // *Doklady Math.* 2016. Vol. 93, no. 3. P. 264–266.
10. Kudryavtseva E. A. Topology of the spaces of functions and gradient-like flows with prescribed singularities on surfaces // *Arxiv.* 2021. <http://arxiv.org/abs/2106.03017>.
11. Mather J. N. Infinitesimal stability implies stability // *Ann. of Math.* 1969. Vol. 89. P. 254–291.
12. Самойленко А. М. Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа // *Функц. анализ,* 1968. Т. 2, № 4. С. 63–69. Engl. version: Samoilenko A. M. The equivalence of a smooth function to a Taylor polynomial in the neighborhood of a finite-type critical point // *Funct. Anal. Appl.* 1968. Vol. 2, no. 4. P. 318–323.
13. Sergeraert F. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série.* 1972. Vol. 5, no. 4. P. 599–660.
14. Tougeron J. C. Ideaux de fonctions différentiables. I // *Ann. Inst. Fourier.* 1968. Vol. 18, no. 1. P. 177–240.

REFERENCES

1. Arnol'd, V. I. 1972, "Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities", *Funct. Anal. Appl.*, vol. 6, no. 4, pp. 254–272.
2. Brodersen, H. 1983, "M-t topologically stable mappings are uniformly stable", *Math. Scand.*, vol. 52, pp. 61–68.
3. Kudryavtseva, E. A. & Lakshtanov, E. L. 2006, "Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions", In: *Topological Methods in the Theory of Integrable Systems*. Eds. Bolsinov, A.V., Fomenko, A.T., and Oshemkov, A.A.; Cambridge Scientific Publishers, Springer, pp. 173–214. <http://arxiv.org/abs/1212.4302>.
4. Kudryavtseva, E. A. 2009, "Uniform Morse lemma and isotope Morse functions on surfaces", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 64, no. 4, pp. 150–158.
5. Kudryavtseva, E. A. & Permyakov, D. A. 2010, "Framed Morse functions on surfaces", *Sbornik Math.*, vol. 201, no. 4, pp. 501–567.
6. Kudryavtseva, E. A. 2012, "The Topology of Spaces of Morse Functions on Surfaces", *Math. Notes.*, vol. 92, no. 2, pp. 219–236. <http://arxiv.org/abs/1104.4792>.
7. Kudryavtseva, E. A. 2012, "Special framed Morse functions on surfaces", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 67, no. 4, pp. 151–157. <http://arxiv.org/abs/1106.3116>.
8. Kudryavtseva, E. A. 2013, "On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces", *Sb. Math.*, vol. 204, no. 1, pp. 75–113. <http://arxiv.org/abs/1104.4796>.
9. Kudryavtseva, E. A. 2016, "Topology of the spaces of functions with prescribed singularities on surfaces", *Doklady Math.*, vol. 93, no. 3, pp. 264–266.
10. Kudryavtseva, E. A. 2021, "Topology of the spaces of functions and gradient-like flows with prescribed singularities on surfaces", Available at <http://arxiv.org/abs/2106.03017>.
11. Mather, J. N. 1969, "Infinitesimal stability implies stability", *Ann. of Math.*, vol. 89, pp. 254–291.
12. Samoilenko, A. M. 1968, "The equivalence of a smooth function to a Taylor polynomial in the neighborhood of a finite-type critical point", *Funct. Anal. Appl.*, vol. 2, no. 4, pp. 318–323.
13. Sergeraert, F. 1972, "Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications", *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série.*, vol. 5, no. 4, pp. 599–660.
14. Tougeron, J. C. 1968, "Ideaux de fonctions différentiables. I", *Ann. Inst. Fourier.*, vol. 18, no. 1, pp. 177–240.

Получено: 08.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-117-129

**Метод Ритца решения дифференциальных уравнений
в частных производных с применением
теоретико-числовых сеток¹**

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} Lu(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u(\vec{x})|_{\partial G_s} &= g(\vec{x}), \end{aligned}$$

где $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, G_s — единичный куб $[0; 1]^s$.

Её решение сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int \dots \int_{G_s} F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s$$

при заданных граничных условиях.

Значения функционала $v(u(\vec{x}))$ в методе Ритца рассматриваются не на множестве всех допустимых функций $u(\vec{x})$, а на линейных комбинациях

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

где $W_k(\vec{x})$ — некоторые базисные функции, которые будем находить с помощью теоретико-числовой интерполяции, причём $W_0(\vec{x})$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, а остальные $W_k(\vec{x})$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

На этих полиномах данный функционал превращается в функцию $\varphi(\vec{w})$ от коэффициентов $w_1, \dots, w_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\varphi(\vec{w})$ достигала экстремума. При некоторых ограничениях на функционал $v(u(\vec{x}))$ и базисные функции $W_k(\vec{x})$ получим приближённое решение краевой задачи.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационные методы.

Библиография: 10 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

А. В. Родионов. Метод Ритца решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением теоретико-числовых сеток // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 117–129.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-117-129

The Ritz method for solving partial differential equations using number-theoretic grids

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

Consider the problem

$$\begin{aligned} Lu(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u(\vec{x})|_{\partial G_s} &= g(\vec{x}), \end{aligned}$$

where $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L is a linear differential operator with constant coefficients, G_s is the unit cube $[0; 1]^s$.

Its solution is reduced to finding the minimum of the functional

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s$$

under given boundary conditions.

The values of the functional $v(u(\vec{x}))$ in the Ritz method are considered not on the set of all admissible functions $u(\vec{x})$, but on linear combinations

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

where $W_k(\vec{x})$ are some basic functions that we will find using number-theoretic interpolation, and $W_0(\vec{x})$ is a function that satisfies the given boundary conditions, and the rest $W_k(\vec{x})$ satisfy homogeneous boundary conditions.

On these polynomials, this functional turns into a function $\varphi(\vec{w})$ of the coefficients $w_1, \dots, w_n$. These coefficients are chosen so that the function $\varphi(\vec{w})$ reaches an extremum. Under some restrictions on the functional $v(u(\vec{x}))$ and the basis functions $W_k(\vec{x})$, we obtain an approximate solution of the boundary value problem.

Keywords: number-theoretic method, partial differential equations, variational methods.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2022, "The Ritz method for solving partial differential equations using number-theoretic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 117–129.

1. Введение

В середине прошлого века Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение класс E_s^α , $\alpha > 1$. Это класс функций $f(x_1, \dots, x_s)$, которые имеют период равный единице по каждой из переменных и для коэффициентов Фурье этой функции $C(m_1, \dots, m_s)$ выполняется оценка

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{C}{(\bar{m}_1 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s)^\alpha},$$

где $\bar{m} = \max(|x|, 1)$.

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha| \quad (1)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — пространству всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

В 1959 году в работе [2] Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

где целые $a_1, \dots, a_s$ — специально выбранные числа — оптимальные коэффициенты.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от α и s .

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Использование параллелепипедальных сеток не ограничивается только численным интегрированием.

В 1961 году В. С. Рябенский в работе [8] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (4)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \dots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).

В своей работе В. С. Рябенский предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные

условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [6] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \quad (5)$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (6)$$

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_s) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1-x_1) \cdot \dots \cdot x_s(1-x_s) = 0. \quad (7)$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = 0, \quad G_s = [0; 1]^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right)$ ($k = 0, \dots, N-1$) приближенного решения указанной задачи Дирихле на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$. Необходимость приближенного решения обусловлена тем, что, как правило, явного вида ряда Фурье неизвестно, а потому, точное решение имеет только теоретическое значение.

Другой подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных использовали Я. М. Жилейкин [4, 5] и В. Т. Стоянец [9]. В своих работах они сводили задачу решения дифференциального уравнения к задаче вычисления интегралов, которые, в свою очередь, находили с помощью параллелепипедальных сеток.

В 1980 году Л. А. Книжнерман [1] применил вариационный метод решения задач для уравнений в частных производных. Суть его заключается в следующем.

Рассматривается задача $Lu = f$, где u — элемент линейного нормированного пространства решений U , f — элемент гильбертова пространства правых частей F , $L : U \rightarrow F$ — линейный дифференциальный оператор. Аппроксимируем все переменные компоненты оператора L и правой части f рядами по многочленам Лежандра с использованием теоретико-числовых сеток. Полученная приближённая задача $\tilde{L}u = \tilde{f}$ решается на конечномерном подпространстве $U' \subset U$. В качестве приближённого решения берётся функция u , минимизирующая квадрат нормы невязки $\|\tilde{L}u - \tilde{f}\|_F^2$.

В данной работе будем использовать прямой вариационный метод — метод Ритца. Рассмотрим задачу

$$Lu(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (8)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x}), \quad (9)$$

где $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, G_s — единичный куб $[0; 1]^s$.

Её решение сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int \dots \int_{G_s} F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s \quad (10)$$

при заданных граничных условиях (см. напр. [10]).

Значения функционала $v(u(\vec{x}))$ в методе Рунге рассматриваются не на множестве всех допустимых функций $u(\vec{x})$, а на линейных комбинациях

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

где $W_k(\vec{x})$ — некоторые базисные функции, которые будем находить с помощью теоретико-числовой интерполяции, причём $W_0(\vec{x})$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, а остальные $W_k(\vec{x})$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

На этих полиномах функционал (10) превращается в функцию $\varphi(\vec{w})$ от коэффициентов $w_1, \dots, w_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\varphi(\vec{w})$ достигала экстремума. При некоторых ограничениях на функционал $v(u(\vec{x}))$ и базисные функции $W_k(\vec{x})$ получим приближённое решение задачи (8).

2. Интерполяционные полиномы по параллелепипедальным сеткам

В 2005 году в работе [3] Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева и Н. В. Зайцева предложили способ построения интерполяционного полинома периодической функции многих переменных, заданной в узлах параллелепипедальной сетки.

Их подход заключается в выборе полной решётки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^s$. Данной решётке ставятся в соответствие параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ и конечное множество целочисленных векторов $M^*(\Lambda)$ — полная система вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно Λ . Тогда, если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах сетки $M(\Lambda)$, то тригонометрический полином

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad c_{\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

Данный раздел посвящён описанию фактов, необходимых для построения интерполяционных многочленов по параллелепипедальной сетке.

Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность λ всех векторов вида

$$a_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + a_s \vec{\lambda}_s,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — базисом этой решетки.

Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Пусть базис $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Величина $\det A$ называется детерминантом решётки $\det \Lambda$ и не зависит от выбора базиса решётки.

Тогда базис взаимной решётки Λ^* задаётся матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det \Lambda} & \cdots & \frac{A_{1s}}{\det \Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{s1}}{\det \Lambda} & \cdots & \frac{A_{ss}}{\det \Lambda} \end{pmatrix}, \quad \det \Lambda \neq 0,$$

где $A_{\nu,\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu,\mu}$.

Тогда сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \cdots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1; \nu = 1, \dots, s; \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Рассмотрим теперь линейное сравнение

$$x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_s x_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (12)$$

где $(a_j, N) = 1$ для всех $j = 1, \dots, s-1$.

Решение этого сравнения представляет собой решётку Λ . Её базисная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_s & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Детерминант этой решётки равен N , а соответствующая ей сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{ka_2}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{ka_s}{N} \right\} \right) \mid k = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Усеченной нормой вектора $\vec{x}$ называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{ \vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T \},$$

а величина T — его параметром.

r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ называется подмножество

$$K_r(T) = \{ \vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0 \}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{ \vec{0} \}.$$

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M .

ЛЕММА 1. Если решётка Λ является решёткой линейного сравнения (12), то два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{Z}^s$ сравнимы по подрешётке Λ тогда и только тогда, когда

$$x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_s x_s \equiv y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_s y_s \pmod{N}.$$

Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно решетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M .

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ называется минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, называется абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такая полная система вычетов обозначается через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ полином

$$I_\Lambda(f(\vec{x})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (13)$$

где

$$c_{\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} \quad (14)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] $\square$

ЛЕММА 2. Пусть значения функции $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$, при $\vec{x} \in M(\Lambda)$ и множество $M^*(\Lambda)$ симметрично относительно начала координат. Тогда интерполяционный многочлен $I_\Lambda(f(\vec{x}))$ — действительнoзначная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ и $(e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})})^{-1} = \overline{e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}}$ получим

$$c_{-\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(-\vec{m}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} \right)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \overline{e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}} = \bar{c}_{\vec{m}}.$$

Из равенства $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$ следует утверждение леммы. $\square$

Тригонометрический полином (13) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ . Выбор $M^*(\Lambda)$ зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Другими словами все целые точки этого креста несравнимы по модулю Λ .

Для класса E_s^α верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] $\square$

3. Решение задачи в общем случае

Опишем построение функций $W_k(\vec{x})$ ($k = 0, \dots, n$).

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$, симметричное относительно начала координат.

Обозначим через $\mathbb{T}(S)$ пространство всех тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами

$$\mathbb{T}(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid c_{\vec{m}} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Также обозначим через $\mathbb{T}_0(S) \subset \mathbb{T}(S)$ пространство всех функций, принимающих значение нуль на границе s -мерного единичного куба $\overline{G_s} = [0; 1]^s$.

Найдём сначала на пространстве $\mathbb{T}(S)$ множество функций удовлетворяющих граничному условию

$$u(\vec{x})|_{\partial \overline{G_s}} = g(\vec{x}), \quad g(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (16)$$

Обозначим через $J_{s,t}^*$ множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_{s,t} = (j_1, \dots, j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$ такую, что $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq s$, $1 \leq j_{t+1} < \dots < j_s \leq s$. Таким образом $|J_{s,t}^*| = C_s^t$ и $J_{s,0}^* = J_{s,s}^* = \{(1, 2, \dots, s)\}$. Также обозначим

$$S(\vec{j}_{s,t}) = \{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) | (m_1, \dots, m_s) \in S\}.$$

Для дальнейшего потребуется явный вид $J_{s,s-1}^*$:

$$J_{s,s-1}^* = \{(2, \dots, s, 1), (1, 3, \dots, s, 2), \dots, (1, \dots, s-2, s, s-1), (1, \dots, s)\}, \\ |J_{s,s-1}^*| = s.$$

В работе [7] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

граничное условие

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_S}) \quad (17)$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и

$$(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$$

выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}. \quad (18)$$

Заметим, что коэффициенты функции $\varphi(\vec{x})$ являются решением этой системы, а решение соответствующей однородной системы

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = 0, \quad \vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*, \quad (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1}) \quad (19)$$

зависит только от множества S .

ТЕОРЕМА 3. Множество функций на пространстве $\mathbb{T}(S)$ удовлетворяющих граничному условию (16) представляет собой линейное многообразие и имеет вид

$$u(\vec{p}, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}}(\vec{p}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad c_{\vec{m}}(\vec{p}) = \sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}}, \quad (20)$$

где r — размерность пространства решений системы (19), $w_{\vec{m}}^{(t)}$ — некоторый его базис ($t = 1, \dots, r$, $\vec{m} \in S$), $p_t \in \mathbb{C}$ — произвольные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$W_t(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} w_{\vec{m}}^{(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad t = 1, \dots, r$$

— базис пространства $\mathbb{T}_0(S)$.

Тогда множество функций, удовлетворяющих граничному условию (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, \vec{x}) &= \sum_{t=1}^r p_t W_t(\vec{x}) + \varphi(\vec{x}) = \sum_{t=1}^r p_t \sum_{\vec{m} \in S} w_{\vec{m}}^{(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{\vec{m} \in S} \left(\sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}} \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\vec{p}$ — произвольный вектор комплексных чисел. $\square$

Обозначим $S^+ \subset S$ — подмножество векторов в S , первая ненулевая координата которых положительна.

Пусть теперь через $\mathbb{TR}(S) \subset \mathbb{T}(S)$ — пространство вещественнозначных функций пространства $\mathbb{T}(S)$. Поскольку для таких функций выполнено условие $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$, $\vec{m} \in S$, то

$$\mathbb{TR}(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S^+} \left[\alpha_{\vec{m}} \cos(2\pi(\vec{m}, \vec{x})) + \beta_{\vec{m}} \sin(2\pi(\vec{m}, \vec{x})) \right] \mid \alpha_{\vec{m}}, \beta_{\vec{m}} \in \mathbb{R} \right\},$$

где $\alpha_{\vec{m}} = 2 \operatorname{Re} c_{\vec{m}}$, $\beta_{\vec{m}} = -2 \operatorname{Im} c_{\vec{m}}$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s \quad (22)$$

на пространстве функций $\mathbb{TR}(S)$.

Подставим в (22) тригонометрические полиномы $u(\vec{p}, \vec{x})$, найденные в предыдущем разделе. В этом случае $v(u(\vec{x}))$ превращается в функцию $\varphi(\vec{p})$. Далее задача сводится к отысканию коэффициентов p_t , при которых достигается минимум этой функции. Метод нахождения этих коэффициентов зависит от вида функционала $v(u(\vec{x}))$.

4. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

В качестве примера использования описанного метода рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (23)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x}). \quad (24)$$

Решение этой задачи сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int \left(\sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + 2u(x)f(x) \right) dx_1 \dots dx_s \quad (25)$$

с граничным условием $u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x})$.

Выберем решётку Λ и построим интерполяционные полиномы $I_\Lambda f(\vec{x})$ и $I_\Lambda g(\vec{x})$ функций $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ соответственно. Тогда множество $S = M^*(\Lambda)$ и эти интерполяционные полиномы будут принадлежать пространству $\mathbb{TR}(M^*(\Lambda))$. Заменим задачу поиска минимума функционала (25) на пространстве всех допустимых функций задачей поиска минимума данного функционала на пространстве $\mathbb{TR}(M^*(\Lambda))$.

ТЕОРЕМА 4. Для функций $u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \mathbb{TR}(S)$, заданных тригонометрическими многочленами

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

верно равенство

$$v(u(\vec{x})) = 4\pi^2 \sum_{\vec{m} \in S} |c_{\vec{m}}|^2 \vec{m}^2 + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} \bar{b}_{\vec{m}}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k} &= 2\pi i \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} m_k e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 = -4\pi^2 \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} c_{\vec{m}} c_{\vec{n}} m_k n_k e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}, \quad k = 1, \dots, s, \\ u(\vec{x}) f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} b_{\vec{m}} c_{\vec{n}} e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}, \end{aligned} \quad (27)$$

то из равенства

$$\int_{G_s} \dots \int e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} dx_1 \dots dx_s = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{n} = -\vec{m}, \\ 0, & \text{при } \vec{n} \neq -\vec{m}, \end{cases} \quad \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \quad (28)$$

найдем интеграл:

$$\begin{aligned} v(u(\vec{x})) &= \int_{G_s} \dots \int \left(-4\pi^2 \sum_{k=1}^s \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} c_{\vec{m}} c_{\vec{n}} m_k n_k e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} + 2 \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} b_{\vec{m}} c_{\vec{n}} e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) dx_1 \dots dx_s = \\ &= -4\pi^2 \sum_{k=1}^s \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} c_{-\vec{m}} m_k (-m_k) + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} b_{-\vec{m}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку функции $u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \mathbb{TR}(S)$, то $\vec{m} \in S$ $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$ и $b_{-\vec{m}} = \bar{b}_{\vec{m}}$, из чего следует утверждение теоремы. $\square$

Так как, из условия (20) коэффициенты $c_{\vec{m}} = c_{\vec{m}}(\vec{p})$, то, обозначив $p_k = \alpha_k + i\beta_k$, получим многочлен

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 4\pi^2 \sum_{\vec{m} \in S} |c_{\vec{m}}(\vec{p})|^2 \vec{m}^2 + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}}(\vec{p}) \bar{b}_{\vec{m}}, \quad c_{\vec{m}}(\vec{p}) = \sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}}.$$

Коэффициенты $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, при которых достигается данного многочлена находятся из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

5. Заключение

В работе рассмотрен подход к решению первой краевой задачи на классах периодических функций E_s^α в s -мерном кубе. Дело в том, что параллелепипедальные сетки наиболее эффективны именно для таких функций. Однако, от условия периодичности можно избавиться, если воспользоваться одним из вариантов периодизации, предложенных Н. М. Коробовым (см. напр. [6]).

Теоретико-числовые сетки также используются для вычисления интегралов на областях отличных от куба. Отдельный интерес представляет использование данного подхода к решению дифференциальных уравнений в таких областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Книжнерман, Л. А. Приложение метода оптимальных коэффициентов к численному решению уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физико-математические науки: 01.01.06, 01.01.07. - М.: РГБ, 2006.

2. Коробов, Н. М. О приближённом вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
3. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
4. Жилейкин Я. М. О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа.- докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 5, с. 999-1002.
5. Жилейкин Я. М. О методе приближённого решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде.- Журн. вычислительной математики и матем. физики, 1965, т. 5, № 2, с. 345-347.
6. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
7. А. В. Родионов. О методе Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле // Чебышевский сборник, 15:3 (2014), 48–85.
8. Рябенский В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.
9. Стоянец В. Т. Решение задачи Коши для параболического уравнения методом квази Монте-Карло.- Журн. вычислительной математики и матем. физики, 1973, т. 13, № 5, с. 1153-1160.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 425 с.
11. W. Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1909, vol. 135, pages 1–61.

REFERENCES

1. Knizhnerman, L. A. “Application of the method of optimal coefficients to the numerical solution of partial differential equations”: Dis. ... cand. physical and mathematical sciences: 01.01.06, 01.01.07. - M.: RGB, 2006.
2. N. M. Korobov, 1959, “On the approximate calculation of multiple integrals”, DAN SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
3. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation”, Chebyshevskii sbornik, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
4. Zhileikin Ya. M. “On the approximate solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation”. - Dokl. AN SSSR, 1964, vol. 155, no. 5, p. 999-1002.
5. Zhileikin Ya. M. “On the method of approximate solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangular parallelepiped”.- Zh. Computational Mathematics and Mathematics. Physics, 1965, vol. 5, no. 2, p. 345-347.
6. N. M. Korobov, 1963, “Number-theoretic methods in approximate analysis”, Moscow: Fizmatgiz.

7. A. V. Rodionov, 2014, "About N. M. Korobov's method of approximate solution of the Dirichlet problem", vol. Chebyshevskii sbornik, vol. 15:3, pp. 48–85.
8. V. S. Ryabenky, 1961, "On one method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", Tr. matem. V. A. Steklov Institute, vol. 60, p. 232–237.
9. V. T. Stoyantsev, "Solution of the Cauchy problem for a parabolic equation by the quasi Monte Carlo method", Zh. Computational Mathematics and Mathematics. Physics, 1973, vol. 13, no. 5, p. 1153-1160.
10. Elsgol'ts L. E. Differential Equations and the Calculus of Variations. M.: Nauka, 1969. 425 p.
11. W. Ritz. "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1909, vol. 135, pages 1–61.

Получено: 24.07.2022

Принято в печать

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-130-144

О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях¹

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тер-Гукасова Надежда Константиновна — специалист по кадровому делопроизводству отдела по кадровому администрированию управления персонала НИУ ВШЭ (г. Москва).

e-mail: nadj_nadj@mail.ru

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobvol@tsput.ru

Аннотация

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо одной оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру добавлены ещё два случая и в первом случае уменьшена константа. Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях приводит к необходимости в доказательстве теоремы Бахвалова–Коробова рассматривать различные области применения теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов, количественная мера качества сетки.

Библиография: 26 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-130-144

**On the number of lattice points of linear comparison solutions
in rectangular areas**

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Ter-Gukasova Nadezhda Konstantinovna — HR Clerk of the HR Administration Department of the HSE Personnel Department (Moscow).

e-mail: nadj_nadj@mail.ru

Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior Researcher, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

In the theory of the hyperbolic zeta function of lattices, a significant role is played by the Bakhvalov theorem, in which the magnitude of the zeta function of the lattice of linear comparison solutions is estimated through the hyperbolic lattice parameter.

In N. M. Korobov's 1963 monograph, this theorem is proved by a method different from the original work of N. S. Bakhvalov. In this method, the central role is played by the lemma about the number of linear comparison solutions in a rectangular area.

The paper gives new estimates of the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions. This allows us to prove the strengthened Bakhvalov theorem on the evaluation of the hyperbolic zeta function of the lattice of solutions of linear comparison.

The difference between the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions and the corresponding Korobov lemma is that instead of one estimate through the ratio of the volume of a rectangular region to a hyperbolic parameter, two more cases are added and in the first case the constant is reduced. The use of the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas leads to the need to prove the Bakhvalov–Korobov theorem to consider various areas of application of the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients, quantitative measure of grid quality

Bibliography: 26 titles.

For citation:

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

1. Введение**1.1. Актуальность и цель работы**

Актуальность темы состоит в том, что решетка решений соответствующего линейного сравнения возникает при изучении количественной меры качества оптимальных коэффициентов и оценки погрешности приближенного интегрирования периодических функций с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками. Поэтому эта решетка играет важную роль в современных исследованиях по теории теоретико-числового метода приближенного анализа (см. [2] — [5], [11] — [16], [20] — [24]), в которых метод оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова занимает центральное место.

Особое значение параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами объясняется тем фактом, что квадратурные формулы с этими сетками задают ненасыщаемые алгоритмы численного интегрирования на классах E_s^α ($\alpha > 1$) (см. [1], [19]), для которых порядок убывания погрешности почти наилучший.

Цель работы — получить оценки сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях, которые необходимы для оценки качества оптимальных коэффициентов параллелепипедальных сеток по простому модулю и модулю произведения двух простых, найденных по алгоритму Н. М. Коробова (см. [14], [16]).

1.2. Параллелепипедальные сетки Н. М. Коробова и решетки решений линейного сравнения

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где $(a_j, N) = 1$ ($j = 1, \dots, s$), и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| << \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad (\text{Н. С. Бахвалов [2], Н. М. Коробов [15]}).$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ ($\alpha > 1$) решетки $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \quad (1)$$

и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda(\vec{a}, N)} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}, \quad (2)$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключен набор $\vec{m} = \vec{0}$, а символ Киробова $\delta_N(a)$ задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

1.3. Качество параллелепипедальной сетки

Количественной мерой качества набора коэффициентов $a_1, \dots, a_s$ параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(N, \vec{a}) = \frac{3^s}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{j=1}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{N} \right\} \right)^2, \quad (3)$$

которая равна приближенному значению интеграла от периодической функции

$$h(\vec{x}) = 3^s \prod_{j=1}^s (1 - 2\{x_j\})^2$$

по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3^s}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{j=1}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{N} \right\} \right)^2 - R_N[h],$$

где $R_N[h]$ — погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(N, \vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^\alpha \left(\cdot, \frac{\pi^2}{6} \right)$ (подробности см. [16]).

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$H(N, \vec{a}) = \left(1 + \frac{2}{N^2} \right)^s + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \frac{N^2}{N^2 + 2}, & \text{при } m = 0; \\ \frac{N^2 \sin^2 \pi \frac{m}{N}}{6}, & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad N_1 = \left[\frac{N-1}{2} \right], \quad N_2 = \left[\frac{N}{2} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для целых z функция $H(z)$ определена равенством*

$$H(z) = \frac{3^s}{p} \sum_{k=1}^p \left(1 - 2 \left\{ \frac{k}{p} \right\} \right)^2 \dots \left(1 - 2 \left\{ \frac{kz^{s-1}}{p} \right\} \right)^2, \quad (4)$$

где p — простое число, большее s .

Если при $z = a$ достигается минимум функции $H(z)$ на интервале $1 \leq z \leq p-1$, то целые $a_1 \equiv 1, a_2 \equiv a, \dots, a_s \equiv a^{s-1} \pmod{p}$ $1 \leq a_j \leq p-1$ ($j = 1, \dots, s$) будут оптимальными коэффициентами по модулю p и выполняется неравенство

$$\left(1 + \frac{2}{p^2}\right)^s < H(a) < \left(1 + \frac{2}{p^2}\right)^s + \frac{M(p, s)}{p^2} = 1 + O\left(\frac{\ln^{2s-2} p}{p^2}\right), \quad (5)$$

где

$$M(p, s) = \begin{cases} 2s \cdot 3^s \cdot p & \text{при } p < 2s \cdot 3^s \cdot e^{3s}, \\ 6s^2 \cdot 3^s \sum_{r=2}^s C_s^r \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^r 2^r m(p, r) \cdot l(t_r, r) & \text{при } p \geq 2s \cdot 3^s \cdot e^{3s}, \end{cases}$$

$$m(t, r) = \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^\nu \frac{\ln^\nu t}{\nu!}, \quad l(t, r) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\ln^\nu t}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{r-1-\nu} C_{r-1-\mu}^\nu \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^\mu,$$

$$t_r = \frac{p}{2(s-1) \cdot 3^s \cdot m(p, r)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [18].

При доказательстве этой теоремы существенную роль играла следующая лемма.

Пусть $p > 2$ — простое, $a_1, \dots, a_s$ — фиксированные целые, не кратные p и $2 \leq r \leq s$. Рассмотрим решения сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}, \quad |m_j| \leq \frac{p-1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

в которых ровно r переменных m_j отличны от нуля и определим величину $q_r = q_r(a_1, \dots, a_s)$ равенством $q_r = \min \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s$, где минимум берется по всем указанным ненулевым решениям сравнения и $\bar{x} = \max(|x|, 1)$ для вещественных x .

ЛЕММА 1. Существует не менее $(p+1)/2$ значений $z \in [1, p-1]$ таких, что при

$$a_1 \equiv 1, a_2 \equiv z, \dots, a_s \equiv z^{s-1} \pmod{p} \quad (6)$$

для величин $q_r = q_r(a_1, \dots, a_s)$ будут выполняться оценки

$$q_r > \frac{p}{2(s-1) \cdot 3^s \cdot m(p, r)} \quad (r = 2, \dots, s). \quad (7)$$

1.4. Теорема Бахвалова

Гиперболический параметр $q(\Lambda(\vec{a}, N))$ решетки решений сравнения (1) определяется как минимальное значение произведения $\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s$, где $m_1, \dots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}. \quad (8)$$

В следующей теореме, принадлежащей Н. С. Бахвалову [2], устанавливается связь между параметром $q(\Lambda(\vec{a}, N))$ и величиной гиперболической дзета-функции решетки $\Lambda(\vec{a}, N)$ при $N = p$.

Доказательство использует две леммы.

ЛЕММА 2. При любых целых λ , λ_ν , и $n_\nu \geq 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$) справедлива оценка

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1} \dots \sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s} \delta_p(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s + \lambda) \leq \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \dots n_s \leq q, \\ \frac{4n_1 \dots n_s}{q} & \text{при } n_1 \dots n_s > q, \end{cases} \quad (9)$$

где $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки.

ЛЕММА 3. При любых действительных $\alpha > 1$ и $t \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{m_1 \dots m_s \geq t} \frac{1}{(m_1 \dots m_s)^\alpha} \leq \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^s \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1, \dots, m_s$, для которых произведение $m_1 \dots m_s$ больше или равно t .

ТЕОРЕМА 3. (Н. С. Бахвалов). Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $N = p$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \leq 4\alpha \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^s \frac{(1 + \ln q)^{s-1}}{q^\alpha}. \quad (10)$$

В работе [9] теорема Бахвалова доказана в наиболее общем виде для гиперболической дзета-функции произвольной решетки Λ .

Замечание Легко показать (см. [17]), что существуют параллелепипедальные сетки, для которых при $q \ll p(\ln p)^{-1}$ оценку гиперболической дзета-функции теоремы 3 можно несколько усилить и вместо (10) получить оценку

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^s p}{pq^{\alpha-1}}. \quad (11)$$

Сравнительно сложно (см. [10]) получается усиление этой оценки:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}} \ln \ln p.$$

Наконец, в книге [16] утверждается, что с помощью соображений, использованных в работе [15], можно получить наиболее сильную оценку:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}},$$

но этот результат нигде не опубликован.

В следующем разделе мы прежде всего усилим оценку из леммы 2.

2. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^s [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$.

ЛЕММА 4. Для любых целых b и λ справедливо равенство

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $(a_j, N) = 1$, то $a_j m_j + \lambda$ пробегает полную систему вычетов по модулю N , когда m_j пробегает N последовательных целых значений. Поэтому в сумме ровно одно слагаемое равно 1, а все остальные равны 0 и лемма полностью доказана. $\square$

Обозначим через $T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$ число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}). \end{cases} \quad (12)$$

Ясно, что

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки и величина n определена равенством $n = \max(n_1, \dots, n_s)$. Тогда справедлива оценка

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \dots n_s \leq q, \\ \frac{3n_1 \dots n_s}{n} & \text{при } n_1 \dots n_s > q, n \leq \frac{q}{3}, \\ \frac{n_1 \dots n_s}{n} & \text{при } n_1 \dots n_s > q, \frac{q}{3} < n < N, \\ \frac{2n_1 \dots n_s}{N} & \text{при } n \geq N. \end{cases} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n_1 \dots n_s = 1$ оценка (14) очевидна.

Пусть $n_1 \dots n_s > 1$. Утверждение леммы достаточно проверить для суммы

$$S = \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_s=1}^{n_s} \delta_N(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s + \mu) = T(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \mu; N), \quad (15)$$

при $\mu = a_1 \lambda_1 + \dots + a_s \lambda_s + \lambda$ в силу (13).

Рассмотрим сперва случай $n_1 \dots n_s \leq q$. Допустим, что в сумме (15) найдется два слагаемых, отличных от нуля: $\delta_N(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s + \mu) = 1$ и $\delta_N(a_1 k'_1 + \dots + a_s k'_s + \mu) = 1$. Тогда, согласно определению величины $\delta_N(m)$, числа $a_1 k_1 + \dots + a_s k_s + \mu$ и $a_1 k'_1 + \dots + a_s k'_s + \mu$ будут кратны N . Но тогда и их разность также будет кратна N :

$$a_1(k_1 - k'_1) + \dots + a_s(k_s - k'_s) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Так как системы $k_1, \dots, k_s$ и $k'_1, \dots, k'_s$ различны, то система $k_1 - k'_1, \dots, k_s - k'_s$ будет нетривиальным решением сравнения (1) и, следовательно,

$$q \leq \overline{k_1 - k'_1} \dots \overline{k_s - k'_s} < n_1 \dots n_s \leq q,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает первую из оценок (14).

Пусть теперь $n_1 \dots n_s > q$. Определим величины r, ρ и l из условий

$$n_{r+1} \dots n_s < q \leq n_r \dots n_s, \quad q = \rho n_{r+1} \dots n_s, \quad l[\rho] \leq n_r < (l+1)[\rho].$$

Очевидно, здесь $1 \leq r \leq s$, $1 < \rho \leq n_r$ и $l \geq 1$. Отметим ещё, что

$$l+1 = \left\lceil \frac{n_r}{[\rho]} \right\rceil + 1 \leq \frac{n_r}{[\rho]} + 1 < \frac{2n_r}{\rho} + 1 \leq \frac{3n_r}{\rho} = 3 \frac{n_r \dots n_s}{q}. \quad (16)$$

Разбивая в сумме (15) интервал r -го суммирования на части, получим

$$S \leq \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_{r-1}=1}^{n_{r-1}} \sum_{\nu=0}^l \left[\sum_{k_r=\nu[\rho]+1}^{(\nu+1)[\rho]} \sum_{k_{r+1}=1}^{n_{r+1}} \dots \sum_{k_s=1}^{n_s} \delta_p(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s + \mu) \right].$$

Так как $[\rho]n_{r+1} \dots n_s \leq q$, то согласно первой из оценок (14) сумма, стоящая в квадратных скобках, не превосходит единицы. Следовательно, пользуясь оценкой (16), получим

$$S \leq n_1 \dots n_{r-1} (l+1) < 3 \frac{n_1 \dots n_s}{q},$$

и эта оценка справедлива всегда при $n_1 \dots n_s \geq q$. Таким образом вторая из оценок (14) установлена.

Пусть $n_r = n$ и $n < N$, тогда, делая суммирование по m_r внутренним и пользуясь леммой 4, получим

$$S \leq n_1 \dots n_{r-1} n_{r+1} \dots n_s = \frac{n_1 \dots n_s}{n}$$

и третья из оценок (14) установлена. При этом на указанном интервале она точнее чем вторая оценка.

Наконец, если $n_r = n \geq N$, то сделаем суммирование по m_r внутренним, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m_r=1}^{n_r} \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \mu) \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]} \sum_{m_r=1+kN}^{(k+1)N} \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \mu) = \left[\frac{n}{N}\right] + 1 \leq \frac{2n}{N} \end{aligned}$$

и

$$S \leq \frac{2n_1 \dots n_s}{N},$$

чем теорема доказана полностью.

3. Усиленная теорема Бахвалова—Коробова

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова—Коробова для произвольного модуля N .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $q \geq 4$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) < \\ & < \frac{s 2^\alpha}{(N-1)^\alpha} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^s + s \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1} \frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha} + \\ & + \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \sum_{r=2}^s \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r} \alpha^{r-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению гиперболической дзета-функции решетки Λ имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \quad (18)$$

В силу условия теоремы при $\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s < q$ слагаемые суммы (18) равны нулю.

Определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s < q, \\ \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s), & \text{если } \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s \geq q. \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_s = 1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 0$, $\lambda_\nu = -(m_\nu + 1)$ и $n_\nu = 2m_\nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$). Тогда при $m_1 \dots m_s \geq q$ утверждение теоремы 4 (с. 136) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{|k_1| \leq m_1} \dots \sum_{|k_s| \leq m_s} \delta_p(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s) \leq \\ &\leq \begin{cases} 0 & \text{при } m_1 \dots m_s < q, \\ \frac{3(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{q} & \text{при } \begin{matrix} m_1 \dots m_s > q, \\ \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) \leq \frac{q}{3}, \end{matrix} \\ \frac{(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{\max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1)} & \text{при } \begin{matrix} m_1 \dots m_s > q, \\ \frac{q}{3} < \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) < N, \end{matrix} \\ \frac{2(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{N} & \text{при } \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) \geq N. \end{cases} \end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой, получим

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \leq S_{1,s} + S_2 + S_3,$$

где

$$S_{1,s} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s = 1, \\ m_1 \dots m_s \geq q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \frac{3(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{q}, \quad (19)$$

$$S_2 = s \sum_{\frac{q-3}{6} < m_s < \frac{N-1}{2}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1} = 1, \\ m_1 \dots m_s \geq q}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} (2m_\nu + 1), \quad (20)$$

$$S_3 = \frac{2s}{N} \sum_{m_s \geq \frac{N-1}{2}}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_{s-1} = 1}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1). \quad (21)$$

Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) &= \sum_{m=1}^n \frac{2m+1}{m^\alpha} - \sum_{m=2}^{n+1} \frac{2m-1}{m^\alpha} = \\ &= 1 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^\alpha} - \frac{2n+1}{(n+1)^\alpha} < 3 + \frac{2}{\alpha-1} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq \frac{2s}{N} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-1} \sum_{m_s \geq \frac{N-1}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s + 1)^\alpha}\right) (2m_s + 1) \leq \\
&\leq \frac{2s}{N} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-1} \left(\frac{N-2}{\left(\frac{N-1}{2}\right)^\alpha} + 2 \sum_{m \geq \frac{N-1}{2}}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}\right) \leq \\
&\leq 2s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-1} \left(\frac{2^\alpha}{(N-1)^\alpha} + \frac{2^\alpha}{(\alpha-1)N(N-1)^{\alpha-1}}\right) \leq \\
&\leq \frac{s2^\alpha}{(N-1)^\alpha} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s.
\end{aligned} \tag{22}$$

Аналогично, получаем

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-1} \sum_{\frac{q-3}{6} < m_s < \frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s + 1)^\alpha}\right) \leq \\
&\leq s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-1} \frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Перейдем к оценке величины $S_{1,s}$:

$$\begin{aligned}
S_{1,s} &= \frac{3}{q} \left(\sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} \geq q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha}\right) (2m_\nu + 1) \cdot \right. \\
&\cdot \sum_{m_s=1}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s + 1)^\alpha}\right) (2m_s + 1) + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} < q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha}\right) \cdot \\
&\cdot (2m_\nu + 1) \left. \sum_{m_s \geq \frac{q}{m_1 \dots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s + 1)^\alpha}\right) (2m_s + 1) \right) \leq \\
&\leq \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right) S_{1,s-1} + S_{4,s},
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{4,s} &= \frac{3}{q} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} < q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha}\right) (2m_\nu + 1) \cdot \\
&\cdot \sum_{m_s \geq \frac{q}{m_1 \dots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s + 1)^\alpha}\right) (2m_s + 1).
\end{aligned} \tag{25}$$

Применяя несколько раз неравенство (24), получим

$$S_{1,s} \leq \sum_{r=2}^s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-r} S_{4,r}. \tag{26}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_r \geq \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_r^\alpha} - \frac{1}{(m_r+1)^\alpha} \right) (2m_r+1) = \\
& = \sum_{m_r \geq \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \frac{2m_r+1}{m_r^\alpha} - \sum_{m_r \geq \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}+1}^{\frac{q+3}{6}} \frac{2m_r-1}{m_r^\alpha} \leq \\
& \leq 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{q^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \right) + 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^\alpha}{q^\alpha} \leq \\
& \leq 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{q^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$S_{4,r} \leq \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{r-1}=1, \\ m_1 \dots m_{r-1} < q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{r-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1) m_\nu^{\alpha-1}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) m^{\alpha-1} < \sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \alpha \frac{2m+1}{m^2} < \\
& < \alpha \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right),
\end{aligned}$$

то

$$S_{4,r} < \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right)^{r-1}.$$

Отсюда и из (19) — (26) вытекает, что

$$\begin{aligned}
& \zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N) | \alpha) < \frac{s 2^\alpha}{(N-1)^\alpha} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right)^s + s \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right)^{s-1} \frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha} + \\
& + \sum_{r=2}^s \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right)^{s-r} \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right)^{r-1}.
\end{aligned}$$

□

4. Заключение

На наш взгляд перспективно объединить подходы данной статьи и работы В. А. Быковского [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.
4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.
6. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.
7. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.
8. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.
9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
10. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41–48.
11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.
12. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.
13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.
14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
15. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
17. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.
18. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.
19. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
20. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.

21. Огородничук Н. К., Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом останковки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.
22. Огородничук Н. К., Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом останковки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.
23. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.
24. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.
25. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом останковки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.
26. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффицентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. В печати.

REFERENCES

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3—18.
3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффицентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.
4. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27—33.
5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.
6. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 — 90.
7. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффицентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 — 121.
8. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 — 59.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
10. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепipedальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41–48.
11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.
12. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.
13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.
14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
15. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
17. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.
18. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.
19. Локуцкий О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
20. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.
21. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.
22. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.
23. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

24. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.
25. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.
26. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. В печати.

Получено: 11.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-145-151

О пересечении двух однородных последовательностей Битти

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Аннотация

Однородными последовательностями Битти называют последовательности вида $a_n = [\alpha n]$, где α — положительное иррациональное число. В 1957 г. Т. Сколем показал, что если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то последовательности $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ имеют бесконечно много общих членов. Т. Банг усилил этот результат: пусть $S_{\alpha,\beta}(N)$ — количество натуральных чисел k , $1 \leq k \leq N$, принадлежащих одновременно двум последовательностям Битти $[\alpha n]$ и $[\beta m]$ и числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, тогда $S_{\alpha,\beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}$ при $N \rightarrow \infty$.

В работе доказывается уточнение этого результата для случая алгебраических чисел. Пусть $\alpha, \beta > 1$ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Ключевые слова: однородная последовательность Битти, тригонометрические суммы, асимптотическая формула.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О пересечении двух однородных последовательностей Битти // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 145–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-145-151

On the intersection of two homogeneous Beatty sequences

A. V. Begunts, D. V. Goryashin

Begunts Alexander Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Goryashin Dmitry Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Abstract

Homogeneous Beatty sequences are sequences of the form $a_n = [\alpha n]$, where α is a positive irrational number. In 1957 T. Skolem showed that if the numbers $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers, then the sequences $[\alpha n]$ and $[\beta n]$ have infinitely many elements in common. T. Bang strengthened this result: denote $S_{\alpha, \beta}(N)$ the number of natural numbers k , $1 \leq k \leq N$, that belong to both Beatty sequences $[\alpha n]$, $[\beta m]$, and the numbers $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers, then $S_{\alpha, \beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}$ for $N \rightarrow \infty$.

In this paper, we prove a refinement of this result for the case of algebraic numbers. Let $\alpha, \beta > 1$ be irrational algebraic numbers such that $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers. Then for any $\varepsilon > 0$ the following asymptotic formula holds:

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Keywords: homogeneous Beatty sequence, exponential sums, asymptotic formula.

Bibliography: 9 titles.

For citation:

A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2022, “On the intersection of two homogeneous Beatty sequences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 145–151.

Последовательностями Битти называют последовательности вида $a_n = [\alpha n + \beta]$, где α — положительное иррациональное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\beta = 0$, то последовательность Битти называется однородной. В случае $\alpha > 1$ такая последовательность строго возрастает.

Хорошо известно (см. [1]), что если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то однородные последовательности Битти $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ не пересекаются и дают в объединении всё множество натуральных чисел.

В последнее время интерес вызывают задачи о распределении арифметических функций на последовательностях Битти, а также аддитивные задачи с такими числами (см., например, обзор [2] и монографию [3]).

В 1957 г. Т. Сколем показал, что если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, либо если при некоторых $a, b, c \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = c$, причём числа a и b разных знаков, то последовательности $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ имеют бесконечно много общих членов (см. [4], теоремы 5, 6). Т. Банг [5] усилил этот результат следующим образом. Обозначим через $S_{\alpha, \beta}(N)$ количество натуральных чисел k , $1 \leq k \leq N$, принадлежащих одновременно двум последовательностям Битти $[\alpha n]$ и $[\beta m]$.

ТЕОРЕМА 1 (Т. Банг). Пусть $\alpha, \beta > 1$ — иррациональные числа. Тогда если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то

$$S_{\alpha, \beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Целью настоящей работы является доказательство уточнения этого результата для случая алгебраических чисел.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha, \beta > 1$ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $[\alpha n] = [\beta m] = k$ равносильны одновременному выполнению неравенств $k < \alpha n < k+1$, $k < \beta m < k+1$, или $\frac{k}{\alpha} < n < \frac{k+1}{\alpha}$, $\frac{k}{\beta} < m < \frac{k+1}{\beta}$. Тогда

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \sum_{k \leq N} \left(\left[\frac{k+1}{\alpha} \right] - \left[\frac{k}{\alpha} \right] \right) \left(\left[\frac{k+1}{\beta} \right] - \left[\frac{k}{\beta} \right] \right).$$

Поскольку $[x] = x - \{x\} = x - \frac{1}{2} + \rho(x)$, получаем

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta}(N) &= \sum_{k \leq N} \left(\frac{1}{\alpha} + \rho\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{k}{\alpha}\right) \right) \left(\frac{1}{\beta} + \rho\left(\frac{k+1}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{k}{\beta}\right) \right) = \\ &= \frac{N}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k \leq N} \left(\rho\left(\frac{k+1}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{k}{\beta}\right) \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{k \leq N} \left(\rho\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{k}{\alpha}\right) \right) + \\ &+ \sum_{k \leq N} \left(\rho\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{k}{\alpha}\right) \right) \left(\rho\left(\frac{k+1}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{k}{\beta}\right) \right) = \frac{N}{\alpha\beta} + O(1) + R(N), \end{aligned}$$

где

$$R(N) = \sum_{k \leq N} \left(\rho\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{k}{\alpha}\right) \right) \left(\rho\left(\frac{k+1}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{k}{\beta}\right) \right).$$

Далее применим следующую лемму о приближении функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ частичной суммой своего ряда Фурье (см. [6], стр. 440, 601, 607).

ЛЕММА 1. При любом $M \geq 2$ справедливо равенство

$$\rho(x) = \sum_{1 \leq |m| \leq M} \frac{e^{2\pi i m x}}{2\pi i m} + O(r_M(x)),$$

где

$$r_M(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi x}} = \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} c_m e^{2\pi i m x} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right), \quad |c_m| \ll \frac{\ln M}{M} e^{-|m|/M}.$$

Положим $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, $\mu = \frac{1}{\beta}$, $\psi_{\lambda, M}(x) = r_M(x + \lambda) + r_M(x)$ и воспользуемся леммой:

$$\rho\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{k}{\alpha}\right) = \sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \frac{e^{2\pi i k m_1 \lambda}}{2\pi i m_1} (e^{2\pi i m_1 \lambda} - 1) + O(\psi_{\lambda, M}(\lambda k)), \quad (1)$$

$$\rho\left(\frac{k+1}{\beta}\right) - \rho\left(\frac{k}{\beta}\right) = \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{e^{2\pi i k m_2 \mu}}{2\pi i m_2} (e^{2\pi i m_2 \mu} - 1) + O(\psi_{\mu, M}(\mu k)). \quad (2)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} r_M(\lambda(k+1)) &= \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} c_m e^{2\pi i m \lambda(k+1)} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) = \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} c_m e^{2\pi i m \lambda} e^{2\pi i m \lambda k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) = \\ &= \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} c'_m e^{2\pi i m \lambda k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right), \end{aligned}$$

где для c'_m справедлива такая же оценка, как для c_m , заключаем, что

$$\psi_{\lambda, M}(\lambda k) = r_M(\lambda(k+1)) + r_M(\lambda k) = \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} \tilde{c}_m e^{2\pi i m \lambda k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right), \quad |\tilde{c}_m| \ll \frac{\ln M}{M} e^{-|m|/M}.$$

Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$R(N) = R_1(N) + R_2(N) + R_3(N) + R_4(N),$$

где

$$\begin{aligned} R_1(N) &= \sum_{k \leq N} \sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \frac{e^{2\pi i k m_1 \lambda}}{2\pi i m_1} (e^{2\pi i m_1 \lambda} - 1) \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{e^{2\pi i k m_2 \mu}}{2\pi i m_2} (e^{2\pi i m_2 \mu} - 1) = \\ &= \sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{(e^{2\pi i m_1 \lambda} - 1)(e^{2\pi i m_2 \mu} - 1)}{2\pi i m_1 \cdot 2\pi i m_2} \sum_{k \leq N} e^{2\pi i k (m_1 \lambda + m_2 \mu)} \ll \\ &\ll \sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{1}{|m_1| |m_2| \|m_1 \lambda + m_2 \mu\|}, \end{aligned}$$

$$R_2(N) \ll \ln M \sum_{k \leq N} \psi_{\lambda, M}(\lambda k), \quad R_3(N) \ll \ln M \sum_{k \leq N} \psi_{\mu, M}(\mu k), \quad R_4(N) \ll \sum_{k \leq N} \psi_{\lambda, M}(\lambda k) \psi_{\mu, M}(\mu k).$$

ТЕОРЕМА (В. Шмидт, [7], теорема 2). Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \lambda, \mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное множество пар таких целых чисел $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$, что

$$\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| < \frac{1}{(m_1 m_2)^{1+\varepsilon}}.$$

ЛЕММА 2. Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \lambda, \mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $M \geq 2$ и $|m_1| \leq M, |m_2| \leq M, (m_1, m_2) \neq (0, 0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c > 0$, что $\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| \geq \frac{c}{M^{2+\varepsilon}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Шмидта неравенство $\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| < \frac{1}{(m_1 m_2)^{1+\varepsilon}}$ справедливо лишь для конечного множества пар целых чисел $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$. Следовательно, существует такое число $c_1 > 0$, что для всех пар (m_1, m_2) с условиями $1 \leq |m_1| \leq M, 1 \leq |m_2| \leq M$ выполняется неравенство $\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| \geq \frac{c_1}{(m_1 m_2)^{1+\varepsilon/2}} \geq \frac{c_1}{M^{2+\varepsilon}}$.

Если же одно из чисел m_1, m_2 равно 0, скажем, $m_2 = 0$, то поскольку число λ алгебраическое, существует такое число $c_2 > 0$, что $\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| = \|m_1 \lambda\| \geq \frac{c_2}{m_1^{1+\varepsilon/2}} \geq \frac{c_2}{M^{2+\varepsilon}}$. Полагая $c = \min(c_1, c_2) > 0$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\delta > 0$ и числа $x, y \in \mathbb{R}$ таковы, что $\|x \pm y\| \geq \delta$. Тогда $||x| - |y|| \geq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу 1-периодичности функции $f(x) = \|x\|$ можно без ограничения общности считать, что $x, y \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Более того, если неравенства $\|x \pm y\| \geq \delta$ выполнены для чисел x и y , то в силу чётности функции $f(x)$ эти же неравенства справедливы и для чисел $-x$ и y . Таким образом, можно считать, что $x, y \in [0; \frac{1}{2}]$, а тогда $|\|x\| - \|y\|| = |x - y| \geq \|x - y\| \geq \delta$.

ЛЕММА 4. Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \lambda, \mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $M \geq 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеют место оценки

$$\sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{1}{\|m_1 \lambda + m_2 \mu\|} = O(M^{2+\varepsilon} \ln M),$$

$$\sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{1}{|m_1| |m_2| \|m_1 \lambda + m_2 \mu\|} = O(M^{1+\varepsilon} \ln M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое равенство. Все числа $\|m_1 \lambda + m_2 \mu\|$, где $1 \leq |m_1| \leq M$, $1 \leq |m_2| \leq M$, различны в силу линейной независимости чисел $1, \lambda, \mu$. Пользуясь леммой 2, покажем, что в каждом из промежутков

$$[0; \delta), \quad [\delta; 2\delta), \quad [2\delta; 3\delta), \quad \dots, \quad [n\delta; \frac{1}{2}],$$

где $\delta = \frac{c}{(2M)^{2+\varepsilon}}$ и $n = \lfloor \frac{1}{2\delta} \rfloor$, лежит не более одного из этих чисел, а в первый из промежутков не попадает ни одного из них. Действительно, если $(m_1, m_2) \neq (m_3, m_4)$, то согласно лемме 2 $\|(m_1 \lambda + m_2 \mu) \pm (m_3 \lambda + m_4 \mu)\| = \|(m_1 \pm m_3)\lambda + (m_2 \pm m_4)\mu\| \geq \delta$, а тогда в силу леммы 3

$$|\|m_1 \lambda + m_2 \mu\| - \|m_3 \lambda + m_4 \mu\|| \geq \delta.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{1}{\|m_1 \lambda + m_2 \mu\|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta k} = O(M^{2+\varepsilon} \ln M).$$

Докажем теперь второе равенство. Обозначим $a_{m_1, m_2} = \frac{1}{\|m_1 \lambda + m_2 \mu\|}$. Тогда

$$S(M) = \sum_{\substack{1 \leq |m_1| \leq M \\ 1 \leq |m_2| \leq M}} \frac{a_{m_1, m_2}}{|m_1| |m_2|} = \sum_{\substack{M/2 < |m_1| \leq M \\ M/2 < |m_2| \leq M}} \frac{a_{m_1, m_2}}{|m_1| |m_2|} + \sum_{\substack{1 \leq |m_1| \leq M/2 \\ M/2 < |m_2| \leq M}} \frac{a_{m_1, m_2}}{|m_1| |m_2|} +$$

$$+ \sum_{\substack{M/2 < |m_1| \leq M \\ 1 \leq |m_2| \leq M/2}} \frac{a_{m_1, m_2}}{|m_1| |m_2|} + \sum_{\substack{1 \leq |m_1| \leq M/2 \\ 1 \leq |m_2| \leq M/2}} \frac{a_{m_1, m_2}}{|m_1| |m_2|} \leq \frac{2}{M} \sum_{\substack{1 \leq |m_1| \leq M \\ 1 \leq |m_2| \leq M}} a_{m_1, m_2} + S\left(\frac{M}{2}\right).$$

Аналогично получаем

$$S\left(\frac{M}{2}\right) \leq \frac{4}{M} \sum_{\substack{1 \leq |m_1| \leq M/2 \\ 1 \leq |m_2| \leq M/2}} a_{m_1, m_2} + S\left(\frac{M}{4}\right)$$

и т. д. Применяя оценку из первого равенства в доказываемой лемме, получаем

$$S(M) \ll \frac{2}{M} M^{2+\varepsilon} \ln M + \frac{4}{M} \left(\frac{M}{2}\right)^{2+\varepsilon} \ln \frac{M}{2} + \frac{8}{M} \left(\frac{M}{4}\right)^{2+\varepsilon} \ln \frac{M}{4} + \dots \leq$$

$$\leq 2M^{1+\varepsilon} \ln M \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\varepsilon} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\varepsilon} + \dots\right) \ll M^{1+\varepsilon} \ln M.$$

Лемма 4 доказана.

Замечание. Доказательство первого равенства в утверждении леммы 4 аналогично доказательству леммы 3.3 из [8] (см. также упр. 3.16 этой же книги).

Оценим $R_2(N)$ и $R_3(N)$. Для суммы $R_2(N)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq N} \psi_{\lambda, M}(\lambda k) &= \sum_{k \leq N} \left(\sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} \tilde{c}_m e^{2\pi i m \lambda k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} \tilde{c}_m \sum_{k \leq N} e^{2\pi i m \lambda k} + O\left(\frac{N \ln M}{M}\right) \ll \frac{\ln M}{M} \sum_{1 \leq |m| \leq M \ln M} \frac{1}{\|\lambda m\|} + \frac{N \ln M}{M} \ll \left(M^\varepsilon + \frac{N}{M}\right) \ln M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_2(N) \ll \left(M^\varepsilon + \frac{N}{M}\right) \ln^2 M,$$

и такая же оценка имеет место и для $R_3(N)$.

Наконец, оценим сумму $R_4(N)$:

$$\begin{aligned} R_4(N) &\ll \sum_{k \leq N} \psi_{\lambda, M}(\lambda k) \psi_{\mu, M}(\mu k) = \\ &= \sum_{k \leq N} \left(\sum_{1 \leq |m_1| \leq M \ln M} \tilde{c}_{m_1} e^{2\pi i m_1 \lambda k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) \right) \left(\sum_{1 \leq |m_2| \leq M \ln M} \tilde{c}_{m_2} e^{2\pi i m_2 \mu k} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq |m_1| \leq M \ln M} \tilde{c}_{m_1} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M \ln M} \tilde{c}_{m_2} \sum_{k \leq N} e^{2\pi i k(m_1 \lambda + m_2 \mu)} + O\left(\frac{N \ln^2 M}{M}\right) \ll \\ &\ll \frac{\ln^2 M}{M^2} \sum_{1 \leq |m_1| \leq M} \sum_{1 \leq |m_2| \leq M} \frac{1}{\|m_1 \lambda + m_2 \mu\|} + \frac{N \ln^2 M}{M}. \end{aligned}$$

Применение леммы 2 приводит к оценке

$$R_4(N) \ll \left(M^\varepsilon + \frac{N}{M}\right) \ln^2 M.$$

Выберем теперь $M = N^{\frac{1}{2}}$. Тогда получим $R(N) = O(N^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим также, что другим возможным направлением уточнения теоремы Т. Банга может являться задача об асимптотической формуле для $S_{\alpha, \beta}(N)$ с как можно лучшим остаточным членом для почти всех $\alpha, \beta > 1$ в смысле меры Лебега. М. Р. Габдуллин сообщил нам, что при помощи вероятностных соображений в этом случае можно получить асимптотическую формулу

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{N}{\alpha \beta} + O_{\alpha, \beta, \varepsilon}((\ln N)^3 (\ln \ln N)^{1 + \varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,$$

которая также следует из результатов работы [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beatty S. Problem 3173 // American Mathematical Monthly, **33** (3), 1926, p. 159.
2. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. **18**. Вып. 4. 2017. 97—105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

3. Technau, M., 2018, “On Beatty sets and some generalisations thereof”, Würzburg, Würzburg University Press. doi: 10.25972/WUP-978-3-95826-089-4
4. Skolem, Th. On certain distributions of integers in pairs with given differences // *Math. Scand.* 5 (1957), 57–68.
5. Bang, T. On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem // *Math. Scand.* 5 (1957), 69–76.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2004. 640 с.
7. Шмидт, Вольфганг М. О совместных приближениях двух алгебраических чисел рациональными // *Математика*, 1971, том 15, выпуск 3, 3–25.
8. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей: Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. — 408 с.
9. Beck, J. Probabilistic Diophantine Approximation, I. Kronecker Sequences // *Annals of Mathematics*, Sep., 1994, Second Series, Vol. 140, No. 2 (Sep., 1994), pp. 449+451-502.

REFERENCES

1. Beatty, S., 1926, “Problem 3173”, *American Mathematical Monthly*, vol. 33, no. 3, p. 159.
2. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2017, “Topical problems concerning Beatty sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 4, pp. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Technau, M., 2018, “*On Beatty sets and some generalisations thereof*”, Würzburg, Würzburg University Press. urn:nbn:de:bvb:20-opus-163303
4. Skolem, Th., 1957, “On certain distributions of integers in pairs with given differences”, *Math. Scand.*, vol. 5, pp. 57–68.
5. Bang, T., 1957, “On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem”, *Math. Scand.*, vol. 5, pp. 69–76.
6. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A., Chubarikov, V. N., 2004, “*Lectures in mathematical analysis*”, 4-d ed., Moscow, Drofa. 640 p. (In Russian.)
7. Schmidt, Wolfgang M., 1967, “On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals”, *Acta Math.*, vol. 119, no. 1–2 (1967), 27–60.
8. Kuipers, L., Niederreiter, H., 1974, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York.
9. Beck, J., 1994, “Probabilistic Diophantine Approximation, I. Kronecker Sequences”, *Annals of Mathematics*, Second Series, vol. 140, no. 2 (Sep., 1994), pp. 449 + 451–502.

Получено: 15.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 514.172

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-152-160

**Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами
в конечномерных нормированных пространствах¹**

А. Х. Галстян

Галстян Арсен Хачатурович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ares.1995@mail.ru

Аннотация

В данной работе изучается деформация пересечения одного компакта с замкнутой окрестностью другого компакта посредством изменения радиуса этой окрестности. Показано, что в конечномерных нормированных пространствах в случае, когда оба компакта являются непустыми выпуклыми подмножествами, такая операция непрерывна в топологии, порождённой метрикой Хаусдорфа.

Вопрос непрерывной зависимости описанного пересечения от радиуса окрестности возник в качестве побочного продукта развития теории экстремальных сетей. Однако он оказался интересным сам по себе, предполагающим различные обобщения. Поэтому было решено опубликовать его отдельно.

Ключевые слова: метрическая геометрия, выпуклые множества, расстояние Хаусдорфа, непрерывные деформации.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Х. Галстян. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечномерных нормированных пространствах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 152–160.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 514.172

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-152-160

**About the continuity of one operation with convex compacts
in finite-dimensional normed spaces**

A. Kh. Galstyan

Galtayan Arsen Khachaturovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ares.1995@mail.ru

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект No. 21-11-00355) в МГУ имени М. В. Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (договор No. 21-8-3-3-1).

Abstract

In this paper, we study the deformation of the intersection of one compact set with a closed neighborhood of another compact set by changing the radius of this neighborhood. It is shown that in finite-dimensional normed spaces, in the case when both compact sets are non-empty convex subsets, such an operation is continuous in the topology generated by the Hausdorff metric.

The question of the continuous dependence of the described intersection on the radius of the neighborhood arose as a by-product of the development of the theory of extremal networks. However, it turned out to be interesting in itself, suggesting various generalizations. Therefore, it was decided to publish it separately.

Keywords: metric geometry, convex sets, Hausdorff distance, continuous deformations.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. Kh. Galstyan, 2022, “About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 152–160.

1. Введение

Выпуклые множества и различные их преобразования естественным образом возникают в вопросах функционального анализа, теории вероятностей, теории информации, теории экстремальных сетей и линейного программирования.

Действительно, любая система линейных неравенств в $\mathbb{R}^n$ с геометрической точки зрения задаёт некоторый выпуклый (быть может, некомпактный) многогранник. Такие системы возникают повсеместно, например, в проблемах оптимизации, начиная от планирования и организации производств [1] и заканчивая расписанием работы компьютерных процессоров [2]. Во второй половине 20-го века сформировалась даже отдельная ветвь математики под названием теория оптимального управления [3]. В рамках этой теории можно, например, выделить такие работы как [4], [5], [6], [7] и [8], в которых предлагаются методы решения проблем оптимизации на выпуклых подмножествах.

Важность в современной математике множеств, обладающих свойством выпуклости, является стимулом к изучению особенностей работы с этими объектами. В рамках данной деятельности можно, например, отметить статью [9], которая посвящена, в частности, изучению вопросов непрерывности таких операций над выпуклыми компактами, как сумма Минковского и L_p сумма.

В настоящей работе изучается вопрос непрерывности в конечномерном нормированном пространстве над полем $\mathbb{R}$ следующей операции. Пусть в таком пространстве даны два непустых выпуклых компакта A и B , и пусть $r \in [\min_{a \in A} |aB|, +\infty)$. Положим

$$f(r) = B_r(A) \cap B,$$

где $B_r(A)$ — замкнутая окрестность радиуса r с центром в A , см. определение 2. Данная работа посвящена доказательству непрерывности функции f , где на пространстве непустых компактов задана топология, порождённая метрикой Хаусдорфа (эта метрика описана в разделе 2, определение 4).

Отображение f появляется естественным образом, например, в рамках теории экстремальных сетей в пространствах с метрикой Хаусдорфа [15]. Многие результаты в этой теории опираются на всевозможные деформации множеств вида $B_r(A) \cap B$.

В метрической геометрии есть ряд стандартных функций, например, расстояние между точками или от точки до множества, которые являются 1-липшицевыми [10], откуда прямо следует их непрерывность. Интуитивно кажется, что этим свойством должна обладать и функция f . Однако это не так, что усложняет процесс доказательства её непрерывности.

Действительно, даже если мы рассмотрим случай плоскости с евклидовой нормой, то при изменении r на малую величину $\delta > 0$ в положительную сторону расстояние по Хаусдорфу между $B_r(A) \cap B$ и $B_{r+\delta}(A) \cap B$ может измениться вовсе не на δ , а на величину существенно большую, см. рис. 1.

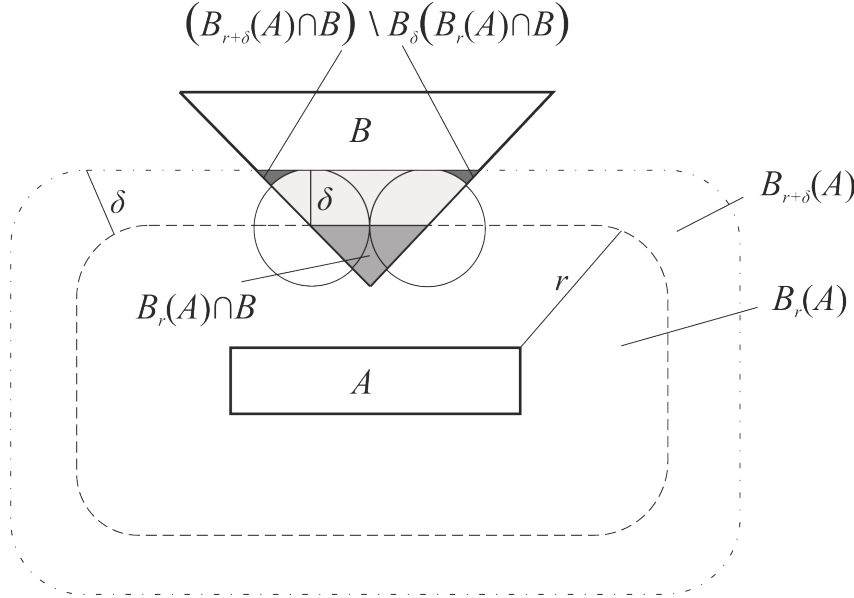


Рис 1: Пример, когда $d_H(B_r(A) \cap B, B_{r+\delta}(A) \cap B) > \delta$.

На этом рисунке изображены два выпуклых компакта A и B . Компакт A представляет собой прямоугольник, компакт B — треугольник. В этом примере $B_{r+\delta}(A) \cap B \not\subset B_\delta(B_r(A) \cap B)$ ввиду того, что наклонная к отрезку длиннее перпендикуляра к нему. Следовательно,

$$d_H(B_r(A) \cap B, B_{r+\delta}(A) \cap B) > \delta.$$

Отметим, что для наличия непрерывности требование выпуклости к обоим компактам здесь по существу. А именно, для невыпуклых компактов несложно привести пример, когда f уже не будет непрерывным, см. рис. 2.

В самом деле, на рис. 2 верхний компакт B является уже невыпуклым, и мы замечаем, что в таком случае деформация множества $B_r(A) \cap B$ при росте r терпит разрыв — скачок, ввиду появления в некоторый момент в пересечении новой компоненты связности. Однако в выпуклом случае новых компонент не возникает.

Главным результатом статьи является теорема 1.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору А. А. Тужилину, и профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

2. Необходимые определения и утверждения

Пусть дано некоторое метрическое пространство (X, ρ) . Для удобства расстояние между двумя произвольными точками $a, b \in X$ будем обозначать через $|ab|$ вместо $\rho(a, b)$.

В определениях 1, 2, 3, и 4 множества $A \subset X$ и $B \subset X$ непусты.

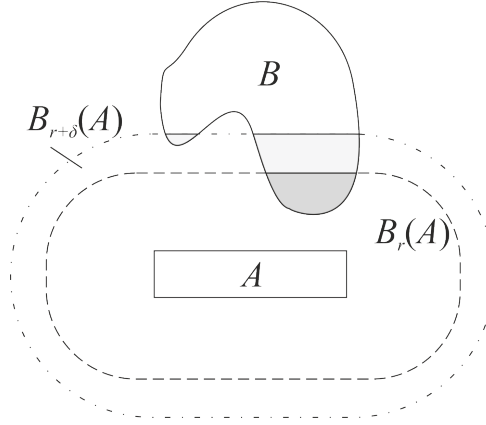


Рис 2: Пример, когда f не является непрерывным в случае невыпуклых компактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Расстоянием от точки $p \in X$ до множества $A \subset X$ называется величина

$$|pA| = \inf\{|pa| : a \in A\}.$$

Согласно [10] справедливо следующее утверждение, которое нам понадобится далее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([10]). Пусть A — непустое подмножество пространства X и функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ задана правилом $f: x \mapsto |xA|$. Тогда функция f непрерывна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество

$$B_r(A) = \{p : |pA| \leq r\}$$

называется замкнутой окрестностью A радиуса r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество

$$U_r(A) = \{p : |pA| < r\}$$

называется открытой окрестностью A радиуса r .

Когда $A = \{a\}$, где a — некоторая точка пространства X , то для удобства вместо $B_r(\{a\})$ и $U_r(\{a\})$ будем писать $B_r(a)$ и $U_r(a)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Расстоянием Хаусдорфа между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}.$$

Обозначим множество непустых замкнутых и ограниченных подмножеств пространства X через $\mathcal{H}(X)$. Хорошо известно (см., например, [11] или [12]), что d_H на $\mathcal{H}(X)$ задаёт метрику. Метрическое пространство $(\mathcal{H}(X), d_H)$ обычно называют гиперпространством над пространством X .

Нам также потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть M — непустое подмножество X . Множество всех подмножеств X обозначим через 2^X . Отображение $P_M: X \rightarrow 2^X$, заданное по правилу

$$P_M: x \mapsto \{z \in M : |xz| = |xM|\},$$

называется метрической проекцией X на M .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любого $M \in \mathcal{H}(X)$ и для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто.

Пусть X — конечномерное нормированное пространство. Тогда верен следующий факт (см., например, [13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 ([13]). Пусть $M \subset X$ — непустой выпуклый компакт. Тогда для любой точки $x \in X \setminus M$, для любой точки $y \in P_M(x)$ и для всех $\lambda \geq 0$ выполняется

$$y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x).$$

3. Основная часть

Всюду далее X — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

ЛЕММА 1. Пусть A — непустое подмножество X и $\varepsilon \geq 0$. Тогда $|pA| = \varepsilon$ для любой точки $p \in \partial B_\varepsilon(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим последовательности точек $\{x_n\} \subset B_\varepsilon(A)$ и $\{y_n\} \subset X \setminus B_\varepsilon(A)$, сходящиеся к p . Заметим, что $|x_i A| \leq \varepsilon$ и $|y_j A| > \varepsilon$ для всех i, j . Согласно утверждению 1, а также ввиду $\|p - x_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\|p - y_j\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ получаем $|pA| \leq \varepsilon$ и $|pA| \geq \varepsilon$. Значит, $|pA| = \varepsilon$.

□

Далее нам понадобятся обозначения

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\},$$

$$(a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in (0, 1]\},$$

$$[a, b) = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1)\},$$

$$|AB| = \min_{a \in A} |aB|,$$

при $a, b \in X$ и $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X . Тогда

$$f: [|AB|, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}(X),$$

$$f: r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Возьмём произвольную точку $r \in [|AB|, +\infty)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Отметим, что в таком случае $B_r(A) \cap B \neq \emptyset$. Покажем сначала, что функция непрерывна справа. Рассмотрим следующие случаи.

Случай первый:

$$K := B \cap \partial B_\varepsilon(B_r(A) \cap B) \neq \emptyset.$$

Введём обозначение

$$\delta = |KB_r(A)|.$$

Допустим, что $\delta = 0$. Тогда это означает, что существует точка $x \in K$ такая, что $x \in B_r(A)$. При этом $x \in B$, так как $x \in K$. Значит, $x \in B_r(A) \cap B$. Таким образом, $x \in \partial B_\varepsilon(B_r(A) \cap B)$,

что силу леммы 1 означает $|x(B_r(A) \cap B)| = \varepsilon > 0$, и при этом $x \in B_r(A) \cap B$, то есть $|x(B_r(A) \cap B)| = 0$. Получили противоречие. Поэтому $\delta > 0$.

Рассмотрим $r' \geq r$ такой, что $r' - r < \delta$. Для удобства введём обозначения

$$M = B_r(A) \cap B,$$

$$M' = B_{r'}(A) \cap B.$$

Имеем $M \subset B_\varepsilon(M')$, так как $r \leq r'$. Покажем теперь, что $M' \subset B_\varepsilon(M)$. Допустим, существует точка $x \in M'$ такая, что $x \notin B_\varepsilon(M)$. Пусть $y \in P_M(x)$. Так как $r \leq r'$, то $y \in M'$. Обозначим через s отрезок, соединяющий точку x с точкой y . В силу выпуклости M' имеем $s \subset M'$. Так как $y \in M$, то $y \in B_\varepsilon(M)$. Значит, найдётся точка $z \in s$ такая, что $z \in \partial B_\varepsilon(M)$. Так как $s \subset M' = B_{r'}(A) \cap B$, то $z \in K = B \cap \partial B_\varepsilon(M)$. Это означает, что $K \cap M' \neq \emptyset$. Поэтому $K \cap B_{r'}(A) \neq \emptyset$. Но так как $\delta = |K B_r(A)|$ и $r' - r < \delta$, то $K \cap B_{r'}(A) = \emptyset$. Получили противоречие. Значит, $M' \subset B_\varepsilon(M)$. Следовательно, $d_H(M', M) \leq \varepsilon$.

Случай второй: $K = \emptyset$. Тогда это означает, что $B \subset B_\varepsilon(M)$. Но для любого $r' \geq r$ имеем $M' \subset B \subset B_\varepsilon(M)$. При этом, так как $r' \geq r$, верно $M \subset M' \subset B_\varepsilon(M')$. Значит, $d_H(M', M) \leq \varepsilon$.

Отсюда получаем, что f непрерывна справа. Покажем теперь непрерывность слева.

Зафиксируем произвольную точку $r \in (|AB|, +\infty)$. Так как $r > |AB|$, то существует $p \in U_r(A) \cap B$. Рассмотрим отображение

$$g(x) = \lambda p + (1 - \lambda)x = x + \lambda(p - x),$$

где $\lambda \in (0, 1)$.

Покажем, что коэффициент λ можно выбрать так, чтобы было верно $\|x - g(x)\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$. Имеем

$$\|x - g(x)\| = \lambda \|p - x\|.$$

Обозначим $\max_{x \in M} \|p - x\|$ через L . Тогда $0 \leq \lambda \|p - x\| \leq \lambda L$ для всех $\lambda \in [0, 1]$ и $x \in M$. Следовательно, существует $\lambda \in (0, 1)$ такой, что $\lambda L \leq \varepsilon$. Значит, при таком λ верно $\|x - g(x)\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$.

В силу непрерывности функции g множество $g(M)$ — компакт. Поэтому корректно определена следующая величина:

$$\delta = |g(M) \partial B_r(A)|.$$

Покажем, что $\delta > 0$. По построению $g(x) \in (x, p]$ для любой точки $x \in M$. Также $p \in U_r(A)$ и при этом $x \in B_r(A)$. Поэтому согласно Accessibility lemma [14] имеем $(x, p] \subset U_r(A)$. Значит, $g(x) \in U_r(A)$. Следовательно, $g(M) \cap \partial B_r(A) = \emptyset$. Отсюда, так как множество $\partial B_r(A)$ тоже является компактом, верно $\delta > 0$.

Покажем теперь, что для любого $r' \in [|AB|, r)$ такого, что $r - r' < \delta$, верно $g(x) \in B_{r'}(A)$ при $x \in M$. Допустим, что $g(x) \notin B_{r'}(A)$. Значит, $|g(x) A| > r'$. Пусть $y \in P_A(g(x))$. Значит,

$$\|g(x) - y\| > r'.$$

Проведём луч l из точки y , проходящий через $g(x)$. В какой-то точке l пересечёт $\partial B_r(A)$, обозначим эту точку через z . Следовательно, $|zA| = r$. Согласно утверждению 2 имеем $y \in P_A(z)$, поэтому $\|z - y\| = r$. При этом $|g(x) \partial B_r(A)| \geq \delta > r - r'$. Поэтому

$$\|z - g(x)\| > r - r'.$$

Отсюда получаем

$$r = \|z - y\| = \|z - g(x)\| + \|g(x) - y\| > r - r' + r' = r.$$

Получили противоречие, следовательно, $g(x) \in B_{r'}(A)$ при всех $x \in M$.

Заметим, что для любого $x \in M$ имеем $[x, p] \subset M$ в силу выпуклости множеств A и B . Значит, $g(x) \in M = B_r(A) \cap B$ для всех $x \in M$ и поэтому $g(x) \in B$. Таким образом,

$$g(x) \in B_{r'}(A) \cap B =: M'$$

для всех $x \in M$. Следовательно, $g(M) \subset M'$. При этом в силу выбора коэффициента λ

$$M \subset B_\varepsilon(g(M)) \subset B_\varepsilon(M').$$

Отсюда, так как $r' < r$, получаем $d_H(M', M) \leq \varepsilon$. Значит, f непрерывна слева в силу произвольности выбора r и ε .

Таким образом, функция f непрерывна на $[|AB|, +\infty)$. Теорема доказана.

□

4. Заключение

В данной работе была доказана непрерывная зависимость от $r \in [|AB|, +\infty)$ множества $B_r(A) \cap B$, где A и B — непустые выпуклые компактные подмножества конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$. Такая операция возникает в задачах геометрической оптимизации с метрикой Хаусдорфа, например, при поиске компактов, реализующих минимум суммы расстояний до заданных элементов гиперпространства $\mathcal{H}(X)$, см. [15].

Интересно было бы обобщить теорему 1 на случай произвольных банаховых пространств. Более того, здесь имеется возможность посмотреть на саму операцию $f_r^{A,B} = B_r(A) \cap B$ под другим углом. Зафиксируем $r \in (|AB|, +\infty)$. Будет ли отображение $f_r^{A,B}$ непрерывно в точке $(A, B) \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$, и если да, то в каких случаях? Это также является вопросом возможных дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л. В. Математические методы организации планирования производства // Ленинград: Издание Ленинградского государственного университета, 1939. 68 с.
2. Ахо А. В., Лам М. С., Сети Р., Ульман Д. Д. Компиляторы: принципы, технологии и инструментарий, 2-е изд.: Пер. с англ. // М.: ООО “И. Д. Вильямс”, 2008. 1184 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат., 1976. Т. 6. — С. 133–259.
4. Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование // Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. 150 с.
5. Lenstra H. W. Integer Programming with a Fixed Number of Variables // Mathematics of Operations Research, 1983. Vol 8, No. 4. — pp. 538–548.
6. Kannan R. Minkowski’s Convex Body Theorem and Integer Programming // Mathematics of Operations Research, 1987. Vol. 12. — pp. 415–440.
7. Glover F. Tabu search—Part II // ORSA Journal on Computing, 1990. Vol. 2, No. 1. — pp. 4–32.
8. Williams H. P. Logic and integer programming // NY: Springer New York, 2009. P. 200.

9. Gardner R. J., Hug D., Weil W. Operations between sets in geometry // J. Eur. Math. Soc., 2013. Vol. 15, No. 6. — pp. 2297–2352.
10. Mendelson B. Introduction to topology // Dover Publications, 1990. P. 206.
11. Бурого Д. Ю., Бурого Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.
12. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов // М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017. 111 с.
13. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундаментальная и прикладная математика, 2014. Vol. 19, No. 4. — pp. 21–91.
14. Leonard I. E., Lewis J. E. Geometry of convex sets // Wiley, 2015. P. 336.
15. Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., 2021. Vol. 212, No. 1. — pp. 25–56.

REFERENCES

1. Kantorovich, L. V. 1939, *Mathematical methods of organization of production planning*, Edition of the Leningrad State University, Leningrad, p. 68.
2. Aho, A. V., Lam, M. S., Seti, R. & Ulman, D. D. 2008, *Compilers: principles, technologies and tools, 2-nd ed. : Trans. from English*, ООО “I. D. Villiams”, Moscow, p. 1184.
3. Gabasov, R. & Kirillova, F. M. 1976, “Optimal control methods”, *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovr. prob. mat.*, vol 6, pp. 133–259.
4. Shevchenko, V. N. & Zolotykh, N. Yu. 2004 *Linear and integer linear programming*, Publishing house of the Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, p. 150.
5. Lenstra, H. W. 1983, “Integer Programming with a Fixed Number of Variables”, *Mathematics of Operations Research*, vol 8, no. 4, pp. 538–548.
6. Kannan, R. 1987 “Minkowski’s Convex Body Theorem and Integer Programming”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 12, pp. 415–440.
7. Glover, F. 1990 “Tabu search—Part II”, *ORSA Journal on Computing*, vol. 2, no. 1, pp. 4–32.
8. Williams, H. P. 2009 *Logic and integer programming*, Springer New York, NY, p. 200.
9. Gardner, R. J., Hug D. & Weil W. 2013 “Operations between sets in geometry”, *J. Eur. Math. Soc.*, vol. 15, no. 6, pp. 2297–2352.
10. Mendelson, B. 1990 *Introduction to topology*, Dover Publications, p. 206.
11. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2004 *A course in metric geometry*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, p. 512.
12. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2017 *Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances: the case of compact sets*, Faculty of mechanics and mathematics of MSU, Moscow, p. 111.

13. Alimov, A. R. & Tsarkov, I. G. 2014 “Connection and other geometric properties of suns and Chebyshev sets”, *Fundamental and applied mathematics*, vol. 19, no. 4, pp. 21–91.
14. Leonard, I. E. & Lewis, J. E. 2015 *Geometry of convex sets*, Wiley, p. 336.
15. Galstyan, A. Kh., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2021 “The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric”, *Sb. Math.*, vol. 212, no. 1, pp. 25–56.

Получено: 15.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-161-171

Размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине¹

Е. В. Агеев, В. О. Поданов, А. Е. Агеева, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева

Агеев Евгений Викторович — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Поданов Вадим Олегович — аспирант, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: vadim.podanov@yandex.ru

Агеева Анна Евгеньевна — студент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageevaanna2004@yandex.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В настоящее время одной из основных проблем широкого применения в машиностроении вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава является высокая стоимость легирующих компонентов, входящих в его состав, вольфрама и титана. Помимо того, данный сплав обладает достаточно высокой температурой плавления, что затрудняет его переработку для вторичного использования. Одним из перспективных методов их переработки в порошки сферической формы является электроэрозионное диспергирование. К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения об использовании диспергированных электроэрозией частиц вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 в качестве шихты для производства твердых сплавов и режущего инструмента из них. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований.

Целью настоящей работы являлось проведение размерного анализа частиц твердосплавного порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине.

Электроэрозионное диспергирование отходов вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859). В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались твердосплавные частицы различной формы и размера. Размерные характеристики частиц порошка, полученного вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава, исследовали на лазерном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoTec».

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00123, <https://rscf.ru/project/22-29-00123/>

На основании проведенных экспериментальных исследований, установлено, что в порошке, полученном электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 в керосине, содержится: 10% частиц с размером до 5,592 мкм; 20% частиц с размером до 9,871 мкм; 30% частиц с размером до 13,483 мкм; 40% частиц с размером до 19,451 мкм; 50% частиц с размером до 24,996 мкм; 60% частиц с размером до 29,194 мкм; 70% частиц с размером до 33,868 мкм; 80% частиц с размером до 42,686 мкм; 90% частиц с размером до 56,121 мкм; 99% частиц с размером до 64,469 мкм включительно. При этом частицы твердосплавного порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового сплава Т5К10, имеют размеры от 0,5 до 100 мкм со средним объемным диаметром 27,092 мкм.

Ключевые слова: отходы вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава, электроэрозионное диспергирование, керосин, частицы порошка, размерные характеристики.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Е. В. Агеев, В. О. Поданов, А. Е. Агеева, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 161–171.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-161-171

Dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy in kerosene²

E. V. Ageev, V. O. Podanov, A. E. Ageeva, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva

Ageev Evgeny Viktorovich — doctor of technical sciences, professor, Southwest State University (Kursk).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Podanov Vadim Olegovich — postgraduate student, Southwest State University (Kursk).

e-mail: vadim.podanov@yandex.ru

Ageeva Anna Evgenievna — student, Southwest State University (Kursk).

e-mail: ageevaanna2004@yandex.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

²The study was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation No. 22-29-00123, <https://rscf.ru/project/22-29-00123/>

Currently, one of the main problems of widespread use in mechanical engineering of tungsten-titanium-cobalt hard alloy is the high cost of alloying components that make up its composition, tungsten and titanium. In addition, this alloy has a sufficiently high melting point, which makes it difficult to recycle it for secondary use. One of the promising methods of their processing into spherical powders is electroerosive dispersion. To date, there is no complete information in the modern scientific and technical literature on the use of particles dispersed by electroerosion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy of the T5K10 brand as a charge for the production of hard alloys and cutting tools from them. For these purposes, comprehensive theoretical and experimental studies are required.

The purpose of this work was to conduct a dimensional analysis of particles of carbide powder obtained by electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy in kerosene.

Electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy waste of the T5K10 brand was carried out on an experimental installation (RF Patent No. 2449859). As a result of exposure to short-term electrical discharges, carbide particles of various shapes and sizes were formed. The dimensional characteristics of the powder particles obtained from the tungsten-titanium-cobalt hard alloy were studied using the Analysette 22 NanoTec laser particle size analyzer.

Based on the conducted experimental studies, it was found that the powder obtained by electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy T5K10 grade in kerosene contains: 10% of particles with a size up to 5,592 microns; 20% of particles with a size up to 9,871 microns; 30% of particles with a size up to 13,483 microns; 40% of particles with a size up to 19,451 microns; 50% of particles with a size up to 24,996 microns; 60% of particles with a size up to 29,194 microns; 70% of particles with a size up to 33,868 microns; 80% of particles with a size up to 42,686 microns; 90% of particles with a size up to 56,121 microns; 99% of particles with a size up to 64,469 microns inclusive. At the same time, the particles of the carbide powder obtained by electroerosive dispersion of the tungsten-titanium-cobalt alloy T5K10 have sizes from 0.5 to 100 microns with an average volumetric diameter of 27,092 microns.

Keywords: tungsten-titanium-cobalt hard alloy waste, electroerosive dispersion, kerosene, powder particles, dimensional characteristics.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

E. V. Ageev, V. O. Podanov, A. E. Ageeva, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, 2022, "Dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy in kerosene", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 161–171.

1. Введение

Спеченные вольфрамсодержащие твердые сплавы обладают рядом весьма ценных свойств, благодаря которым их эффективно используют во многих областях техники. В производстве вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава используются дорогостоящие карбиды вольфрама WC и титана TiC, в качестве связующего материала — порошок металлического кобальта Co [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Одной из основных проблем использования вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в настоящее время является высокая стоимость вольфрама и титана. Ввиду высокой температуры их плавления существует проблема их переработки для вторичного использования. Одним из перспективных методов переработки вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава порошки сферической формы является электроэрозионное диспергирование (ЭЭД).

Прочностные характеристики вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава во многом зависят от способа их получения. В настоящее время для производства вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава, т.е. консолидации порошков используют спекание (или горячее прессование), недостатком которой является наличие пор. Для получения спеченных изделий

с высокими механическими свойствами при повышенных температурах необходимо создание беспористой микроструктуры [7, 8, 9].

Современной альтернативой традиционному спеканию является SPS-синтез, при котором используется импульсы постоянного электрического тока, проходящего через графитовую матрицу, в которой находится образец. Процесс состоит из совместного воздействия температуры, осевого давления и электрического тока в присутствии электромагнитного поля (плазмы). Высокие локальные температуры между частицами испаряют загрязняющие вещества и оксиды на поверхности частиц до образования перемычки. Именно этот эффект с одновременным приложением осевого давления позволяет значительно снизить температуру спекания и продолжительность процесса, что в свою очередь способствует значительному уменьшению скорости роста зерна, в отличие от спекания без нагрузки или горячего прессования. SPS-синтез позволит получать конкурентноспособный высокотехнологичный продукт с повышенными физико-механическими свойствами [10, 11, 12, 13].

Решение вопросов, связанных с улучшением качества вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава, в полной мере касается так же качества порошковых материалов, используемых для их изготовления.

В связи с этим крайне актуальной задачей является комплексное изучение влияния исходного сырья на структуру и свойства сплавов, в частности, порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов сплава Т5К10 в процессе SPS-синтеза.

К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения об использовании диспергированных электроэрозией частиц сплава Т5К10 в качестве шихты для производства вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и режущего инструмента из них. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований. Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и повторное их использование при изготовлении режущего инструмента.

Работы в области исследования новых вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов ведутся в научных и высших образовательных учреждениях, таких как: НИТУ МИСиС, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, МПУ, ЮЗГУ, Институт материаловедения Хабаровского НЦ ДВО РАН и др. Однако в трудах ученых этих организаций не рассматриваются вопросы, касающиеся использования диспергированных электроэрозией частиц сплава Т5К10 в качестве шихты для производства вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и режущего инструмента из них.

Целью настоящей работы являлось проведение размерного анализа частиц твердосплавного порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине.

2. Основной текст статьи

Электроэрозионное диспергирование отходов вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859) [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] в керосине. В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались твердосплавные частицы различной формы и размера.

Блок-схема процесса электроэрозионного диспергирования отходов вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 представлена на рисунке 1.

В результате воздействия кратковременных электрических разрядов в рабочей жидкости (керосине) образовывались частицы твердосплавного порошка различного размера.

Размерные характеристики частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10, исследовали на лазер-

ном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoTec» (Германия). Блок-схема методики исследования гранулометрического состава представлена на рисунке 2.

Лазерный анализатор размеров частиц «Analysette 22 NanoTec plus» определяет распределение по размерам частиц в суспензиях и эмульсиях. По сравнению с «классическими» методами измерения — рассевом, седиментацией либо анализом по изображению, лазерная дифракция обладает рядом важных преимуществ, таких как краткое время анализа, хорошая воспроизводимость и точность, простая калибровка, большой диапазон измерений и высокая универсальность.

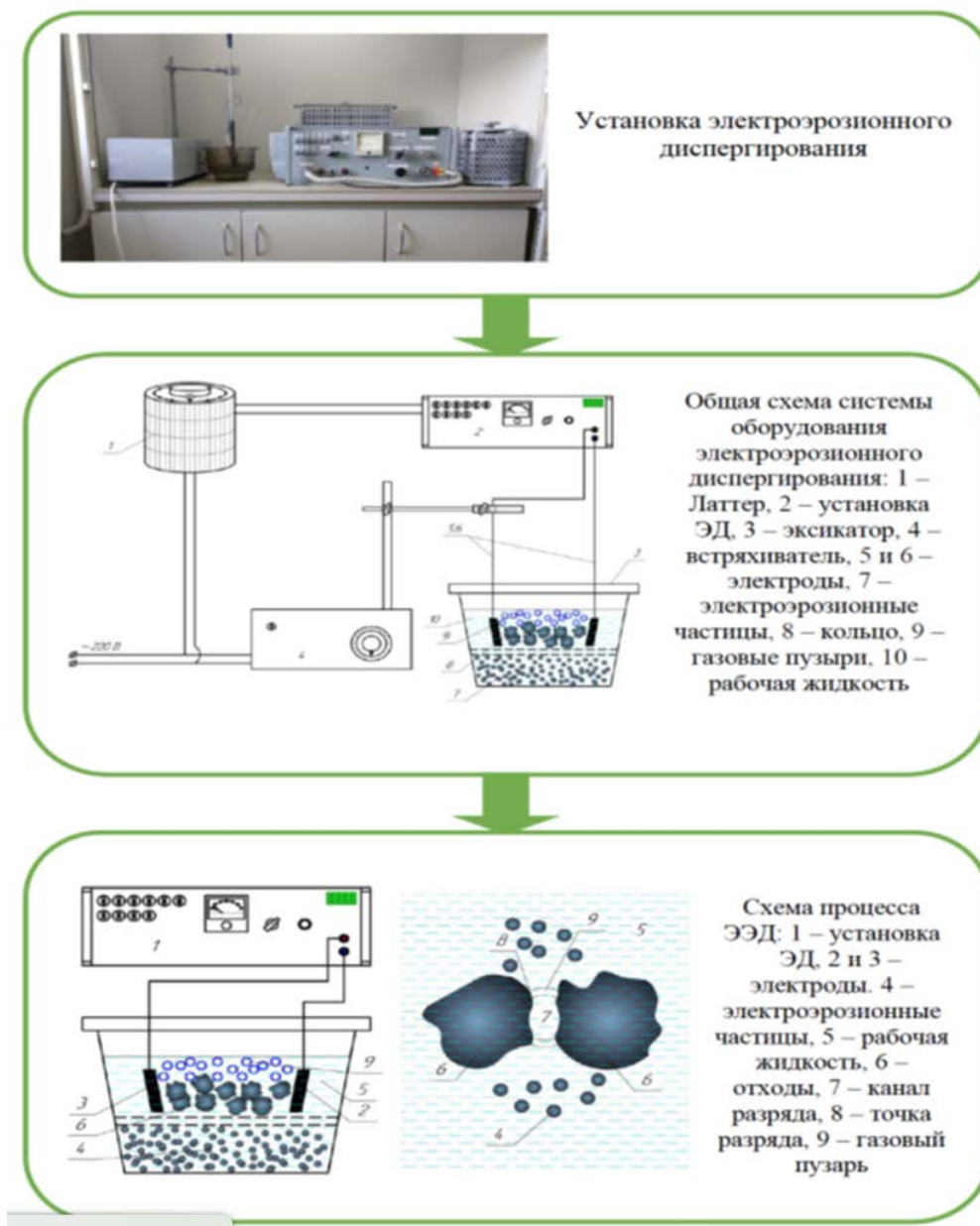


Рис 1: Блок-схема процесса электродиспергирования отходов вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава

Диапазон измерений «Analysette 22 NanoTec plus» составляет от 0,01 до 2000 мкм. В анализаторах, определяющих распределение частиц по размерам посредством лазерной дифракции, используется физический принцип рассеяния электромагнитных волн. Конструкция состоит

из лазера, через измерительную ячейку направленного на детектор. При помощи диспергирующего устройства частицы подают в измерительную ячейку и проходят сквозь лазерный луч. Свет, рассеянный пропорционально размеру частиц, посредством линзы фокусируется на детектор. По распределению рассеянного света при помощи комплексной математики рассчитывают распределение частиц по их размерам. В результате получают объемные доли, соответствующие эквивалентным диаметрам при лазерной дифракции. Благодаря встроенной ультразвуковой ванне (объем около 500 мл, энергия и частота ультразвука 80 Вт/36 кГц), даже труднодиспергируемые пробы могут анализироваться без применения дополнительного оборудования. Цифровой ультразвуковой генератор всегда поддерживает установленную мощность на оптимальном и постоянном уровне. Нижний предел чувствительности при малых количествах мелких и крупных частиц в распределениях их по размерам (в пределах диапазона измерений) — 3%. Воспроизводимость согласно ISO 13320-1 $d_{50} \leq 1\%$.

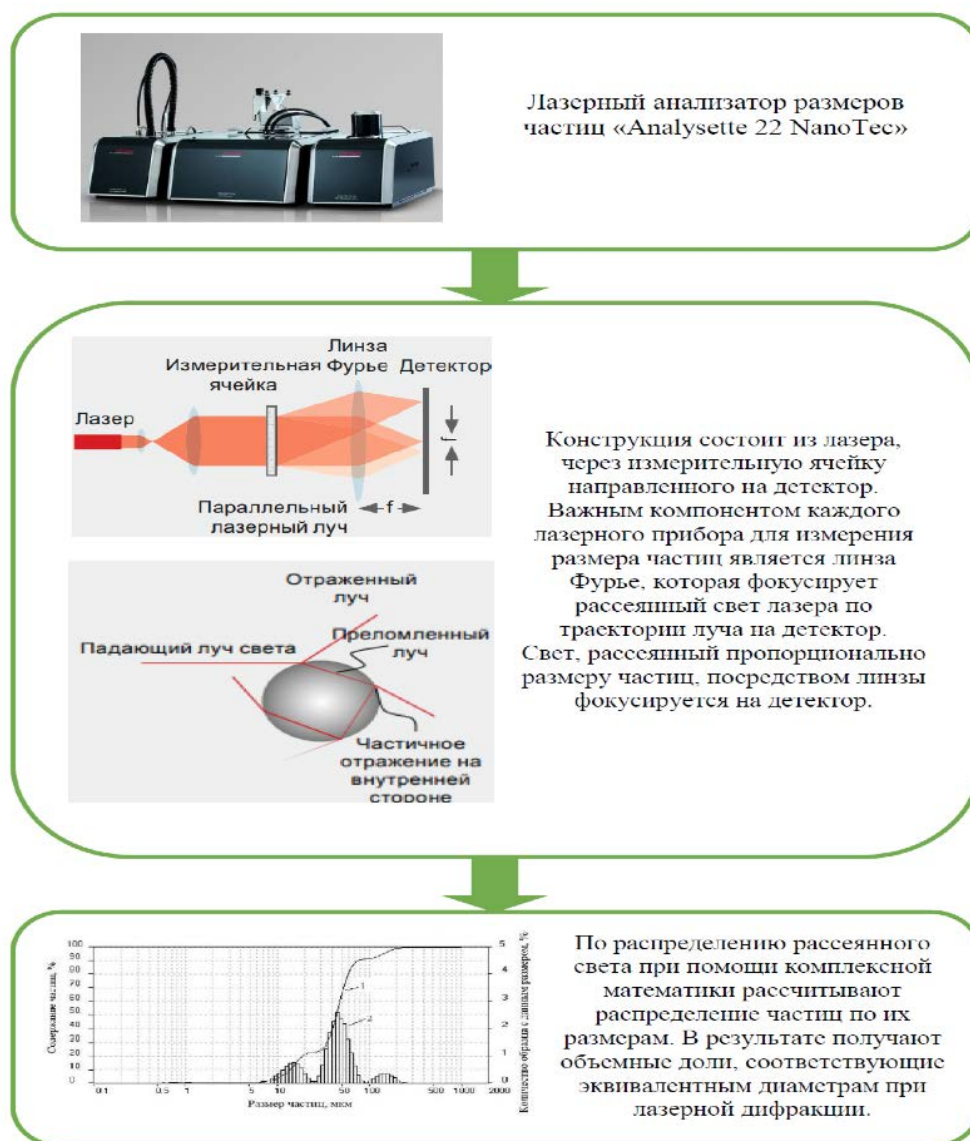


Рис 2: Блок-схема методики определения среднего размера частиц твердосплавного порошка

3. Результаты и их обсуждение

Экспериментально установлено (рис. 3), что частицы порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового сплава Т5К10, имеют размеры от 0,5 до 100 мкм со средним объемным диаметром 27,092 мкм.

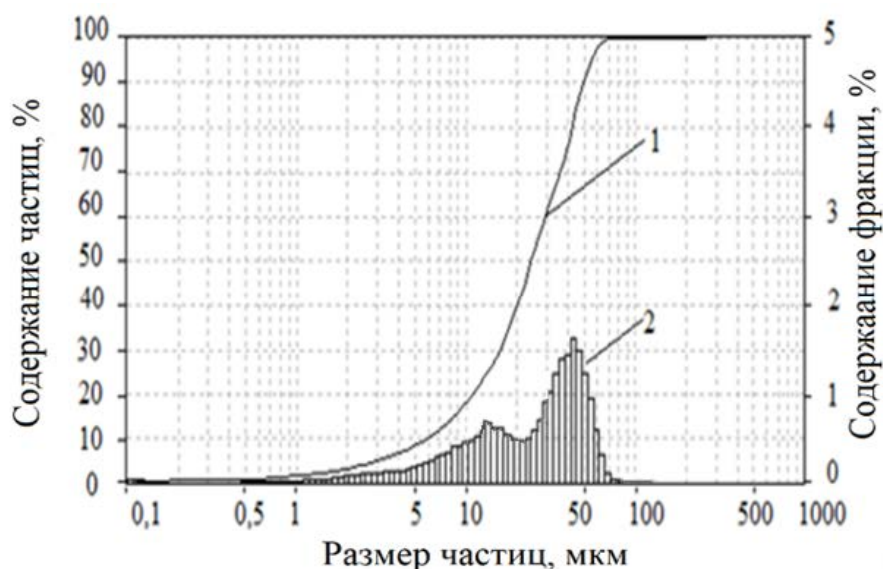


Рис 3: Интегральная кривая (1) и гистограмма (2) распределения по размерам частиц твердосплавного порошка, полученного в керосине

Отмечены особенности формирования фракционного состава частиц порошка в процессе электроэрозионной металлургии вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10, а именно наличие двух экстремумов размеров частиц 15 мкм и 40 мкм: мелкая фракция (0,5 ... 25,0 мкм) образуется за счет конденсации парообразной фазы и крупная фракция (25,0 ... 100,0 мкм) образуется за счет конденсации жидкой фазы.

Отмечено, что смещение экстремумов размеров частиц, образующихся при кристаллизации парообразной и жидкой фаз, определяется электрическими параметрами работы установки: напряжением на электродах, емкостью разрядных конденсаторов и частотой следования импульсов.

Установлена зависимость, показывающая, что средний размер частиц увеличивается с повышением энергии импульса. Получены зависимости, позволяющие выполнить расчетную оценку фракционного состава диспергируемого материала, получаемого в условиях действия электроконтактных тепловых источников.

Размерные характеристики частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10, представлены в таблице 1.

Таблица 1: Размерные характеристики частиц твердосплавного порошка

Размерная характеристика	Величина
D10, мкм	5,592
D20, мкм	9,871
D30, мкм	13,483
D40, мкм	19,451
D50, мкм	24,996

D60, мкм	29,194
D70, мкм	33,868
D80, мкм	42,686
D90, мкм	56,121
D99, мкм	64,469
Средний объемный диаметр, мкм	27,092

Из представленных данных в таблице 1 видно, что в порошке, полученном электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10 в керосине, содержится: 10% частиц с размером до 5,592 мкм; 20% частиц с размером до 9,871 мкм; 30% частиц с размером до 13,483 мкм; 40% частиц с размером до 19,451 мкм; 50% частиц с размером до 24,996 мкм; 60% частиц с размером до 29,194 мкм; 70% частиц с размером до 33,868 мкм; 80% частиц с размером до 42,686 мкм; 90% частиц с размером до 56,121 мкм; 99% частиц с размером до 64,469 мкм включительно.

4. Заключение

На основании проведенных экспериментальных исследований, направленных на проведение размерного анализа частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава в керосине, показана высокая эффективность применения технологии электроэрозионного диспергирования, которая обеспечивает при низких затратах электроэнергии получение твердосплавных порошков, пригодных для практического применения. Отмечены особенности формирования фракционного состава частиц порошка в процессе электроэрозионной металлургии вольфрамо-титано-кобальтового твердого сплава марки Т5К10, а именно наличие двух экстремумов размеров частиц 15 мкм и 40 мкм: мелкая фракция (0,5 ... 25,0 мкм) образуется за счет конденсации парообразной фазы и крупная фракция (25,0 ... 100,0 мкм) образуется за счет конденсации жидкой фазы.

Экспериментально установлено, что частицы порошка, полученного электроэрозионным диспергированием вольфрамо-титано-кобальтового сплава Т5К10, имеют размеры от 0,5 до 100 мкм со средним объемным диаметром 27,092 мкм.

Помимо того, установлено, что смещение экстремумов размеров частиц, образующихся при кристаллизации парообразной и жидкой фаз, определяется электрическими параметрами работы установки: напряжением на электродах, емкостью разрядных конденсаторов и частотой следования импульсов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеев Е.Н., Замулаева Е.И., Зайцев А.А., Коняшин И.Ю., Левашов Е.А. Структура и свойства крупнозернистых твердых сплавов WC-Co с особо однородной микроструктурой // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2019. № 4. С. 70-78.
2. Богодухов С.И., Козик Е.С., Свиденко Е.В. Исследование влияния температурных полей нагрева при непрерывной лазерной обработке на эксплуатационные свойства пластин твердого сплава Т15К6 // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2018. № 2. С. 76-84.
3. Самотугин С.С., Кудинова Е.В., Христенко О.А., Беляковский В.П., Шибистая Я.Н. Выбор оптимальных режимов плазменной обработки инструмента из твердых сплавов // Технология машиностроения. 2018. № 7. С. 30-34.

4. Дворник М.И., Михайленко Е.А. Использование недостатка углерода для создания наноструктурного градиентного твердого сплава // Бюллетень научных сообщений. 2018. № 23. С. 22-27.
5. Богодухов С.И., Козик Е.С., Свиденко Е.В., Игнатьюк В.Д. Термическая обработка непиретицируемых пластин из твердого сплава Т15К6 непрерывным лазерным излучением // Упрочняющие технологии и покрытия. 2019. Т. 15. № 1 (169). С. 26-30.
6. Быстров В.А. Эффективность упрочнения твердым сплавом сменных деталей металлургических агрегатов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2018. Т. 61. № 12. С. 939-947.
7. Latypov R.A., Latypova G.R., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Elemental composition of the powder particles produced by electric discharge dispersion of the wastes of a VK8 hard alloy // Russian metallurgy (Metally). 2017. Т. 2017. № 12. С. 1083-1085.
8. Ageev E.V., Ugrimov A.S., Latypov R.A. Metallurgical features of the manufacture of hard-alloy powders by electroerosive dispersion of a T15K6 alloy in butanol // Russian metallurgy (Metally). 2016. Т. 2016. № 12. С. 1155-1157.
9. Ageev E.V., Ageeva E.V., Latypov R.A. Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. 2015. Т. 56. № 1. С. 52-62.
10. Кочергин С.А., Моргунов Ю.А., Саушкин Д.Т. Конечно-элементное моделирование процесса искрового плазменного спекания режущих пластин // СТИН. 2015. № 10. С. 28-32.
11. Смирнов А.В., Юшин Д.И., Кузнецов В.А. Моделирование искрового плазменного спекания: цели, задачи, проблемы и пути их решения // Молодой ученый. 2016. № 25 (129). С. 66-72.
12. Забелин Д.А., Чайникова А.С., Качаев А.А., Осин И.В., Гращенков Д.В. Синтез, структура и свойства керамики на основе оксинитрида алюминия (AlON), полученной методом искрового плазменного спекания // Труды ВИАМ. 2019. № 6 (78). С. 13-19.
13. Пристинский Ю.О., Перетягин Н.Ю., Кузнецова Е.В., Перетягин П.Ю. Сравнение механических свойств твердых сплавов ВК6, полученных традиционным методом и искровым плазменным спеканием // Вестник машиностроения. 2019. № 9. С. 51-54.
14. Агеев Е.В., Латыпов Р.А., Агеева Е.В. Исследование свойств электроэрозионных порошков и твердого сплава, полученного из них изостатическим прессованием и спеканием // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. – 2014. – №6. – С. 51–55.
15. Агеева Е.В., Хорьякова Н.М., Агеев Е.В. Морфология и элементный состав медных электроэрозионных порошков, пригодных к спеканию // Вестник машиностроения. 2014. №10. С. 66–68.
16. Агеева Е.В., Агеев Е.В., Воробьев Е.А. Рентгеноспектральный микроанализ порошка, полученного из отходов быстрорежущей стали электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. 2014. №11. С. 71–72.
17. Агеева Е.В., Хорьякова Н.М., Агеев Е.В. Исследование формы и морфологии электроэрозионных медных порошков, полученных из отходов // Вестник машиностроения. 2014. №8. С. 73–75.

18. Агеева Е.В., Хорьякова Н.М., Агеев Е.В. Исследование распределения микрочастиц по размерам в порошках, полученных электроэрозионным диспергированием медных отходов // Вестник машиностроения. 2014. №9. С. 63–64.
19. Агеев Е.В., Агеева Е.В., Воробьев Е.А. Гранулометрический и фазовый составы порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в керосине // Упрочняющие технологии и покрытия. 2014. №4(112). С. 11–14.
20. Агеева Е.В., Агеев Е.В., Воробьев Е.А. Анализ формы и морфологии частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. 2015. №7. С. 72–73.

REFERENCES

1. Avdeenko E.N., Zamulaeva E.I., Zaitsev A.A., Konyashin I.Yu., Levashov E.A. 2019, “Structure and properties of coarse-grained WC-Co hard alloys with a particularly homogeneous microstructure”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh zavedeniy, Non-ferrous metallurgy*. No. 4. pp. 70-78.
2. Bogodukhov S.I., Kozik E.S., Svidenko E.V. 2018, “Investigation of the influence of temperature fields of heating during continuous laser processing on the operational properties of T15K6 hard alloy plates”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh zavedenii. Powder metallurgy and functional coatings*. No. 2. pp. 76-84.
3. Samotugin S.S., Kudinova E.V., Khristenko O.A., Belyakovsky V.P., Shibistaya Ya.N. 2018, “The choice of optimal modes of plasma processing of tools made of hard alloys”, *Technology of mechanical engineering*. No. 7. pp. 30-34.
4. Dvornik M.I., Mikhailenko E.A. 2018, “The use of carbon deficiency to create a nanostructured gradient hard alloy”, *Bulletin of scientific communications*. No. 23. pp. 22-27.
5. Bogodukhov S.I., Kozik E.S., Svidenko E.V., Ignatyuk V.D. 2019, “Heat treatment of non-sharpenable plates made of T15K6 hard alloy by continuous laser radiation”, *Hardening technologies and coatings*. Vol. 15. No. 1 (169). pp. 26-30.
6. Bystrov V.A. 2018, “Efficiency of hardening with a hard alloy of replaceable parts of metallurgical aggregates”, *Izvestia of higher educational institutions. Ferrous metallurgy*. Vol. 61. No. 12. pp. 939-947.
7. Latypov R.A., Latypova G.R., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. 2017, “Elemental composition of the powder particles produced by electric discharge dispersion of the wastes of a VK8 hard alloy”, *Russian metallurgy (Metally)*. Vol. 2017. No. 12. pp. 1083-1085.
8. Ageev E.V., Ugrimov A.S., Latypov R.A. 2016, “Metallurgical features of the manufacture of hard-alloy powders by electroerosive dispersion of a T15K6 alloy in butanol”, *Russian metallurgy (Metally)*. Vol. 2016. No. 12. pp. 1155-1157.
9. Ageev E.V., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2015, “Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering”, *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. T. 56. No. 1. pp. 52-62.
10. Kochergin S.A., Morgunov Yu.A., Saushkin, D.T. “Finite element modeling of the process of spark plasma sintering inserts”, *STIN*. No. 10. pp. 28-32.

11. Smirnov A.V., Yushin D.I., Kuznetsov V.A. 2016, "Modeling of spark plasma sintering: goals, objectives, problems and solutions", *Young scientist*. No. 25 (129). pp. 66-72.
12. Zabelin D.A., Chaynikova A.S., Kachaev A.A., Osin I.V., Grashchenkov D.V. 2019, "Synthesis, structure and properties of ceramics based on aluminum oxynitride (ALON) obtained by spark plasma sintering", *Proceedings of VIAM*. No. 6 (78). pp. 13-19.
13. Pristinsky Yu.O., Peretyagin N.Yu., Kuznetsova E.V., Peretyagin P.Yu. 2019, "Comparison of mechanical properties of vk6 hard alloys obtained by the traditional method and spark plasma sintering", *Bulletin of Mechanical Engineering*. No. 9. pp. 51-54.
14. Ageev E.V., Latypov R.A., Ageeva E.V. 2014, "Investigation of the properties of electroerosive powders and hard alloy obtained from them by isostatic pressing and sintering", *News of higher educational institutions. Non-ferrous metallurgy*. No.6. pp. 51-55.
15. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, "Morphology and elemental composition of copper electroerosive powders suitable for sintering", *Bulletin of Mechanical Engineering*. No. 10. pp. 66-68.
16. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyev E.A. 2014, "X-ray spectral microanalysis of powder obtained from high-speed steel waste by electroerosive dispersion in kerosene", *Vestnik mashinostroeniya*. No.11. pp. 71-72.
17. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, "Investigation of the form and morphology of electroerosive copper powders obtained from waste", *Vestnik mashinostroeniya*. No.8. pp. 73-75.
18. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, "Investigation of the size distribution of microparticles in powders obtained by electroerosive dispersion of copper waste", *Vestnik Mashinostroeniya*. No. 9. pp. 63-64.
19. Ageev E.V., Ageeva E.V., Vorobiev E.A. 2014, "Particle size and phase composition of the powder obtained from tungsten-containing wastes tool materials by electroerosion dispersion in kerosene", *Strengthening technologies and coatings*. №4(112). pp. 11-14.
20. Ageeva E.V. Ageev E.V., Vorob'ev E.A. 2015, "Analysis of the shape and morphology of the powder particles obtained from tungsten-containing wastes by electroerosion dispersion in kerosene", *Journal of mechanical engineering*. No. 7. pp. 72-73.

Получено: 21.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 51 (09): 004.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-172-187

О проектировании систем научной осведомленности в области истории математики с использованием мультиагентных технологий^{1,2}

Е. М. Богатов, А. В. Коренев, И. С. Михайлов

Богатов Егор Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент, Губкинский филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Губкин); Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: embogatov@inbox.ru

Коренев Артем Викторович — Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: korenev01@mail.ru

Михайлов Илья Сергеевич — Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

*e-mail: mikhaylov.is@yandex.ru***Аннотация**

Хорошо известно, что современным историкам физико-математических наук приходится отдавать много времени и сил на рутинную работу, относящуюся к формированию тематической базы данных по выбранному направлению исследований, а также поиском первоисточников и материалов историко-научного плана (воспоминаний, писем, статей к юбилеям и т.п.). Ещё одна трудозатратная часть деятельности научного работника (вне зависимости от сферы интересов) связана с вопросами научно-организационного и научно-методического характера, такими, как участие в конференциях и семинарах, поиск журналов для публикации, грантов для получения финансовой поддержки и т.п. Развитие теории экспертных систем и нейросетевых алгоритмов дало возможность для построения электронных систем научной осведомлённости в области истории науки, выполняющих значительную часть вышеперечисленных задач. Это позволит уделять больше времени основной работе учёного — получению новых результатов. В соответствии с принципами инженерии знаний, в структуру системы научной осведомленности историка математики предлагается включить обучаемых электронных агентов, обладающих искусственным интеллектом, что позволит решать задачи сложного поиска, а также формировать базы данных и знаний в соответствующей предметной области. Авторами приводится вариант интерфейса системы научной осведомленности в сфере истории математики, включающей в себя подсистему обучения, содержащую лекционный материал и сведения энциклопедического характера, а также следующие функциональные блоки

- поиска;
- формирования баз данных публикаций и первоисточников;

¹Работа является продолжением исследований, проведенных в [14]. Ее также можно считать расширенным вариантом доклада [5].

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402.

- семинаров и конференций;
- форумов и социальных сетей учёных;
- грантовой поддержки;
- формирования базы данных университетов, реализующих образовательные программы в области истории математики;
- совместной работы по научным проектам.

Ключевые слова: проектирование систем научной осведомленности, мультиагентные технологии, инженерия знаний, история математики.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:

Е. М. Богатов, А. В. Корнев, И. С. Михайлов. О проектировании систем научной осведомленности в области истории математики с использованием мультиагентных технологий // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 172–187.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 51 (09): 004.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-172-187

**On the design of scientific awareness systems in the field
of the history of mathematics using multi-agent technologies**

E. M. Bogatov, A. V. Korenev, I. S. Mikhailov

Bogatov Egor Mikhailovich — Gubkin branch of the National University of Science and Technology «MISIS» (Gubkin); Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISIS» (Sary Oskol).

e-mail: embogatov@inbox.ru

Korenev Artyom Viktorovich — Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISIS» (Sary Oskol).

e-mail: korenev01@mail.ru

Mikhailov Ilya Sergeyevich — Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISIS» (Sary Oskol).

e-mail: mikhaylov.is@yandex.ru

Abstract

It is well known that modern historians of the physical and mathematical sciences have to devote a lot of time and effort to routine work related to the formation of a thematic database in the chosen field of research, as well as the search for primary sources and for the historical-scientific content (memoirs, letters, articles for anniversaries, etc.). Another labor-intensive part of the researcher's activity (regardless of the sphere of interests) is related to scientific-organizational and scientific-methodological nature's questions, such as participation in conferences and seminars, search for journals for publication, search for grants for financial support, etc. The development of the theory of expert systems and neural network algorithms made it possible to build electronic systems of scientific awareness in the field of the history of science, performing a significant part of the above tasks. This will allow to spend more time to the main work of the scientist – obtaining new results. In accordance with the principles of knowledge engineering, it is proposed to include trained electronic agents with artificial

intelligence in the structure of the scientific awareness system of the historian of mathematics, which will allow solving complex search problems, as well as forming databases and knowledge bases in the relevant subject area. The authors present a variant of the interface of the system of scientific awareness in the field of the history of mathematics, which includes a learning subsystem containing lecture material and information of an encyclopedic nature, as well as the following functional blocks

- search;
- formation of databases of publications and primary sources;
- seminars and conferences;
- forums and social networks of scientists;
- grant support;
- formation of a database of universities implementing educational programs in the field of history of mathematics;
- joint work on scientific projects.

Keywords: design of scientific awareness systems, multi-agent technologies, knowledge engineering, history of mathematics.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

E. M. Bogatov, A. V. Korenev, I. S. Mikhailov, 2022, "On the design of scientific awareness systems in the field of the history of mathematics using multi-agent technologies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 172–187.

1. Введение

Последние 300-400 лет происходило достаточно интенсивное развитие математики, механики, физики и астрономии, что явилось основой научно-технического прогресса в XX-XXI вв. Осмысление указанных процессов происходит в рамках историко-научных исследований, включающих в себя, как правило, следующие основные этапы [6]:

- а) тщательное изучение предметной области;
- б) поиск и анализ первоисточников;
- в) использование форумов и социальных сетей учёных для поиска ответов на вопросы, возникающие при погружении в предметную область;
- г) поиск публикаций на аналогичную тему исследования;
- д) воссоздание эволюции математических идей;
- е) апробация на конференциях и семинарах;
- ж) подготовка к публикации в журнале.

Немаловажным фактором в мотивации исследователей является наличие премий, стипендий и грантов в указанной области, а также доступность информации об их получении.

К началу XXI века значительная часть архивных документов³ по истории математики стала оцифрована и может быть доступна по подписке. Наличие большого количества первоисточников и статей, вышедших за последние 30-40 лет в области истории науки приводит к необходимости систематизировать их поиск в сети Интернет в разных разрезах по запросам научных коллективов и отдельных ученых, а также обеспечить их накопление в локальных хранилищах данных.

Возникает вопрос, можно ли спроектировать экспертную систему, которая предоставит возможности для получения помощи при выполнении всего спектра исследований по истории

³В первую очередь это относится к европейским и американским научным фондам.

математики и будет, при необходимости, обеспечивать совместную работу учёных, специализирующихся в этой области. Подобная система (система научной осведомленности) позволит, прежде всего, освободить исследователя части от рутинной работы, возникающей на перечисленных выше этапах, за исключением, вероятно, этапа воссоздания эволюции идей и выявления закономерностей развития математики.

2. Возможности для уменьшения объёма рутинной работы историка математики (на примере России)

Продemonстрируем задачи и трудности, которые могут возникнуть при изучении конкретной историко-математической темы:

а) *Тщательное изучение предметной области.*

На данном этапе должны быть сформированы следующие базы данных, возможно при участии электронного помощника:

- Электронные учебники по выбранной теме.
- Научно-популярные издания (журнал «Квант», журнал «Математическое просвещение» [26]).
- Математические энциклопедии [17].
- Лекции на канале YouTube Russia в MathNet.ru (см., например, [19]).
- Научные обзоры в журналах *Успехи математических наук* (см., например, [4]) и *Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ»* (см., например, [31]).

б) *Поиск и анализ первоисточников.*

К первоисточникам будем относить статьи старше 100 лет. В процессе работы над темой их выходные данные зачастую можно найти в списке литературы при работе на предыдущем этапе. Существенную помощь здесь может оказать поисковый робот, который будет проверять наличие первоисточников на заданную тему в имеющихся электронных библиотеках. Наибольший интерес представляют следующие онлайн-ресурсы:

- <http://www.e-heritage.ru> (научное наследие России);
- <https://gallica.bnf.fr> (национальная цифровая библиотека Франции);
- <https://eudml.org> (европейская цифровая математическая библиотека);
- <https://archive.org> (универсальная электронная библиотека США);
- <https://www.jstor.org> (цифровая база данных полнотекстовых научных журналов).

Другое важное место, где стоит искать первоисточники – это энциклопедии по истории математики разных стран: «Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences» [8], «The Oxford Handbook of The History of Mathematics» [24], История отечественной математики [9]–[12] и др.

Одна из основных задач поискового робота – пополнять первоисточниками соответствующую базу данных.

в) *Использование форумов и социальных сетей учёных для поиска ответов на вопросы, возникающие при погружении в предметную область.*

Этот инструмент будет задействован в случае необходимости получения ответа на вопросы, появляющиеся в процессе изучения отдельных разделов математики в рамках работы над

предыдущими пунктами. Нет нужды создавать отдельную базу данных форумов, поскольку они могут появляться и исчезать в сети Интернет. Поиск подходящих форумов/социальных сетей учёных также можно поручить электронному помощнику. В качестве примера форума можно указать международную площадку обмена мнениями MATHEMATICA [22]; соответствующий русскоязычный аналог имеет название *Научный форум dxdy* [21].

Одна из наиболее известных в нашей стране социальных сетей учёных (куда могут входить, конечно, и историки математики) – это ResearchGate.

г) *Поиск публикаций на аналогичную тему исследования.*

Российские авторы, работающие в области истории математики, ориентируются здесь, прежде всего, на специализированные журналы, выпускавшиеся в XX в.: ИМИ (Историко-математические исследования); ИАИ (Историко-астрономические исследования); ИМЕН (История и методология естественных наук); труды ИИЕТ РАН (Институт истории естествознания и техники имени С. И. Вавилова РАН).

Статьи на нужную тему имеет смысл поискать в международных иностранных журналах, таких, как «Archive for History of Exact Sciences», «Historia Mathematica», «Antiquitates Mathematicae».

Если удастся найти имена учёных, работающих в областях, близких к интересующей, то полезно заглянуть на их домашние страницы и посмотреть их статьи. Для поиска нужных статей на этих страницах в автоматическом режиме существует ряд методов, о которых мы скажем ниже.

д) *Воссоздание эволюции математических идей.*

Это этап самостоятельной работы учёного; привлечь электронного помощника здесь не представляется возможным.

е) *Апробация на семинарах и конференциях.*

Поиск и структурирование информации о семинарах и конференциях в России и других странах нужно поручить программе-роботу. Приведём возможные варианты структурирования: по странам, по континентам, по статусу (Scopus, Web of Science, РИНЦ), по величине оргвзноса, по формату проведения (дистанционно, очно, очно-заочно), по количеству участников, по качественному их составу.

ж) *Подготовка к публикации.*

Поиск и упорядочивание информации о журналах, в которых можно опубликовать научные результаты, также можно поручить программе-роботу. Информация о журнале может включать в себя: статус журнала (Scopus, Web of Science, РИНЦ⁴), периодичность выхода номеров, язык публикации, стоимость публикации, рейтинг журнала, объем статьи, правила оформления.

3. Построение системы научной осведомленности

Одна из первых попыток дать определение системы научной осведомленности (СНО) была предпринята в статье Р. Хакаторна [28].

Под СНО мы будем понимать экспертную систему, обеспечивающую эффективную работу членов научного сообщества в рамках выделенной предметной области знаний и берущую на себя часть функций исследователя.

В системах научной осведомленности методы исследований помещаются в общую библиотеку решений, а данные из разнородных источников интегрируются в общее хранилище данных, которое через предметно-ориентированные информационные ресурсы предоставляет информацию конечным пользователям: ученым, студентам, преподавателям, аспирантам. Реализа-

⁴Российский индекс научного цитирования. Аналогичные индексы имеются, естественно, и в других странах.

ция механизмов доставки данных потребителям, включающая поиск научных публикаций в интернет-источниках, может быть осуществлена на основе мультиагентных технологий. Поскольку системы научной осведомленности предназначены для коллективного использования и совместной работы, они должны предоставлять быстрый доступ к данным и простые способы обмена информацией между работающими в разных городах специалистами.

Архитектуру системы научной осведомленности (независимо от предметной области) можно представить на рис. 1.

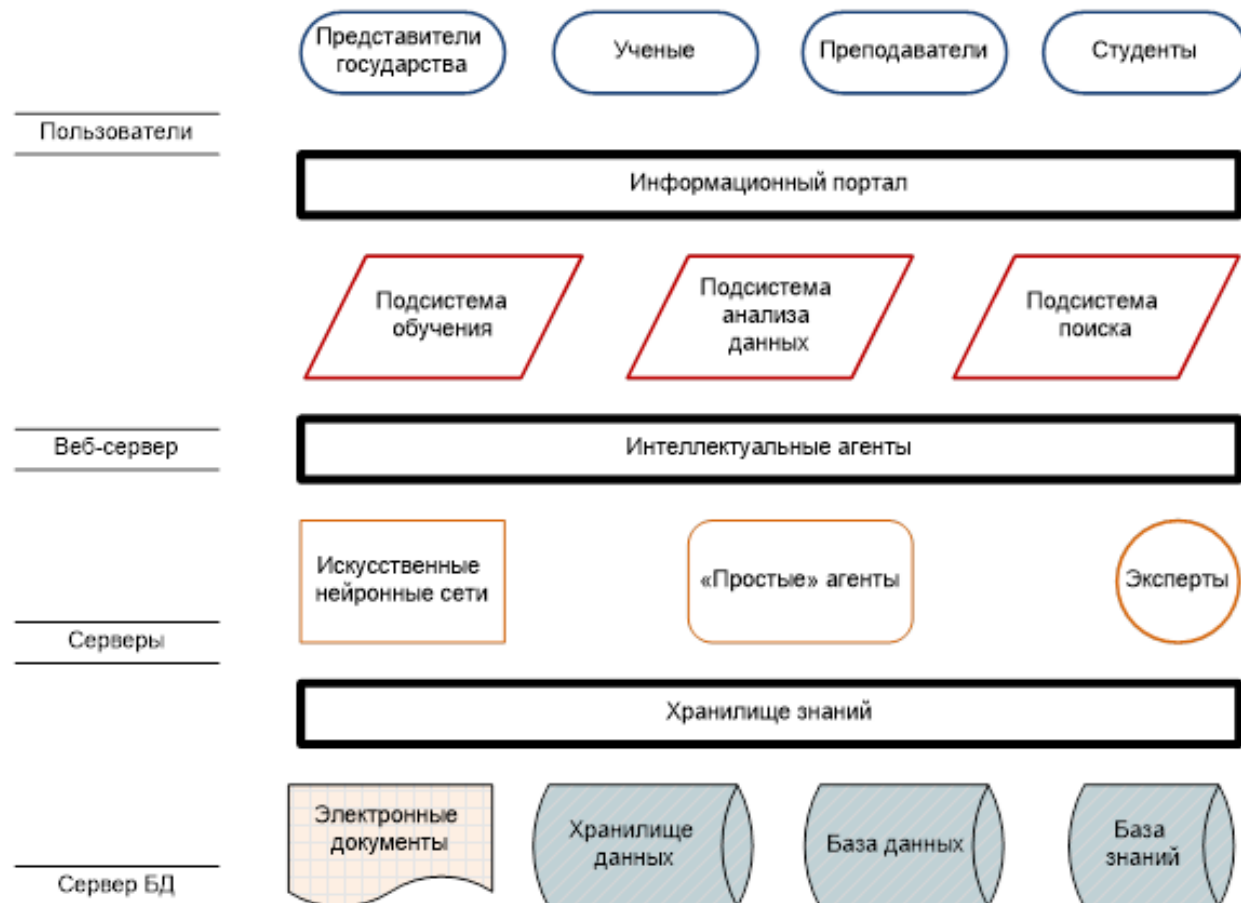


Рис 1: Архитектура системы научной осведомленности

Эта система состоит из нескольких программных слоев [7].

Первый слой реализован как предметно-ориентированное визуальное решение, которое предоставляет пользователю интерфейс. Данное приложение предоставляет доступ к следующим программным компонентам системы: информационной подсистеме, аналитической подсистеме, подсистеме обучения.

Второй слой состоит из интеллектуальных агентов, которые управляют работой встроенных в систему «рядовых» агентов, выполняющих функции «умного» поиска и систематизации информации. Все агенты должны иметь собственные критерии поиска, предпочтения и ограничения. Таким образом, полученная система может быть отнесена к категории мультиагентных систем.

Третий слой представляет собой хранилище знаний, которое состоит из:

- хранилищ данных, в которые пользователи имеют возможность заносить полученные ими в результате работы с системой новые сведения;

- электронных документов, которые, в частности, могут представлять собой материалы лекций по предметной области, а также словарь терминов.

Возможность пополнения системы предметными знаниями накладывает на её функционал определенные ограничения. Такие ограничения связаны с необходимостью обеспечить достоверность вносимых данных. Поэтому хранилище знаний системы состоит из двух разделов: базового раздела, составленного экспертами по данным научных публикаций, и раздела, произведенного пользователями системы [7].

Одной из особенностей архитектуры СНО, что делает ее привлекательной для использования в высшем образовании, является возможность включения в неё подсистемы e-learning. Основу данной подсистемы могут составить веб-ориентированные курсы лекций.

Отметим, что система научной осведомлённости в области истории математики не предполагает производства новых знаний без участия человека, как это, например, реализовано в СНО по физической химии [27, 25].

В данной мультиагентной системе предполагается использовать следующие типы агентов [32].

Интерфейсный агент отвечает за взаимодействие между пользователем и системой.

Резидентный агент обладает механизмом принятия решений, выбирает агентов-исполнителей для конкретных задач.

Реактивный агент принимает входные данные от резидентного агента, обрабатывает их и возвращает ответ. Характерным примером реактивного агента является *поисковый агент*, предназначенный для поиска и извлечения необходимых данных из объектов хранилища знаний и внешних источников.

Пользователь осуществляет взаимодействие с системой с помощью интерфейсного агента. После получения запроса производится опрос резидентных агентов. На основе полученных ответов принимается решение, какому агенту поручить выполнение действий. Например, если был произведен запрос поиска источника по ключевым словам (статьи, книги и т.п.), то он перенаправляется поисковому агенту, имеющему доступ к базам знаний и данных системы научной осведомленности.

4. Специфика мультиагентной работы для СНО в области истории математики

Перечислим функции агентов системы научной осведомленности, имеющих интеллектуальные составляющие, соответствующие задачам, перечисленным в п.2 и блокам на схеме рис. 1. Для удобства этим агентам будут присвоены порядковые номера.

1. Детальное изучение предметной области.

Агент 1 подбирает материалы по предметной области. Его интеллектуальные функции основаны на использовании алгоритмов нечёткой логики [16]:

- Подбор синонимов к фразе.
- Перевод на другие языки исходной фразы.
- Подбор синонимов на иностранном языке.
- Возможная передача части функций подчиненным агентам.

2. Поиск и изучение первоисточников.

Агент 2 осуществляет поиск первоисточников. Его интеллектуальные функции:

- Перевод ключевых слов на иностранные языки.
 - Работа с различными типами данных (pdf, docx, doc, jpg, PS и др.).
3. Использование форумов и социальных сетей для поиска ответов на возникшие в процессе погружения в тему вопросы.

Агент 3 служит для поиска форумов и социальных сетей учёных (таких, как ResearchGate). Интеллектуальная функция: актуализировать список форумов по истории физики и математики.

4. Поиск материалов на схожую тему исследования.

Агент 4 должен владеть нижеперечисленными методами поиска:

- Метод, использующий стандартную поисковую стратегию. Здесь страница с наиболее высокой релевантностью запросу (в том числе среди текстов авторефератов и диссертаций [3]) принимается искомой страницей.
 - Метод автономного индексирования цитирований, используемый в поисковой системе CiteSeerX, где поиск статей, созданных в формате PostScript и PDF ведется на домашних страницах ученых [23].
 - Метод поиска указанных страниц, базирующийся на машинном обучении. Он реализует поиск ресурсов, релевантных запросу, путем построения дерева решений, а также использования модели логистической регрессии для оценки их релевантности [15].
 - Трёхшаговый метод целенаправленного сканирования, который включает в себя поиск в базах данных активно работающих в выбранной области ученых, нахождение научных статей на их домашних страницах, а также поиск аналогичных статей других авторов [29].
 - Метод, основанный на поиске по заданной библиографической ссылке. Его суть заключается в следующем: сначала осуществляется отбор десяти ссылок, затем с помощью поискового робота ведётся поиск страницы, содержащей с большой вероятностью ссылку на искомую статью, после чего найденная ссылка сравнивается с библиографической.
 - Вероятностный метод, использующий для поиска информацию из структуры и текста документа. Для каждого документа создается языковая модель, которая определяет частоту распределения слов в полученной базе документов и выбираются документы с наибольшей частотой встречаемости нужных семантических единиц.
5. Поиск подходящих семинаров и конференций.

Агент 5 служит для поиска семинаров и конференций. Интеллектуальная функция: актуализировать список семинаров и конференций по истории математики.

Цель работы агента: создать обновляемую базу конференций по истории математики (региональных и международных). Примером такой базы может стать WikiCFP – семантическая вики-страница для запросов на публикации в области науки и техники, на которой размещены данные о конференциях, проходивших в разное время в различных странах мира [2].

6. Подготовка к публикации:

Агент 6 служит для поиска журналов. Интеллектуальные функции:

- Умение актуализировать список журналов по истории физики и математики.

- Умение разбивать журналы по категориям (статус, язык, ожидаемое время публикации).

Цель работы агента: создать базу данных журналов в области истории математики.

Здесь за основу может быть взят каталог журналов открытого доступа (DOAJ) – веб-сайт, на котором разрешается читать, загружать, копировать, распространять или ссылаться на полные тексты статей [13]. К примеру, в перечень российских журналов, публикующих статьи по истории математики входят: «Чебышевский сборник», «Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика & Физика», «Таврический вестник математики и информатики», «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», «Владикавказский математический журнал», «Математическое образование».

7. Работа с подсистемой обучения.

Интеллектуальные функции агента 7:

- Умение пополнять словарь терминов (например, если пользователь начал прибегать к помощи какого-то учебника, и в нем есть глоссарий, то агент автоматически должен пополнять словарь терминов из него).
- Умение пополнять базу знаний учебниками и курсами лекций из списка, найденного агентом 1.

8. Поиск премий и грантов в конкретной области истории математики.

Для этой цели служит агент 8. Интеллектуальная функция: актуализировать список премий и грантов в области истории математики.

В результате работы этого агента должна быть сформирована база данных премий и грантов в указанной области. Такую базу можно создать по примеру Научного фонда Ирландии (SFI), на сайте которого содержится информация о премиях, вручаемых различным ученым и исследователям в самых разнообразных отраслях науки [20]. Составными элементами этой базы (в нашем случае) могут быть:

- Премия Тейлора и Фрэнсиса для молодых исследователей.
- Конкурс диссертаций по истории науки DHST.
- Премия Отто Нойгебауэра по истории математики.
- Премия Неймана по истории математики.
- Премия Кеннета О. Мэйя по истории математики.
- Премия Монтюкла по истории математики.
- Грант на архивные исследования Граттан-Гинесса.
- Гранты на исследование истории китайской математики фонда ССКФ.

9. Создание баз данных ВУЗов, имеющих программы магистратуры и аспирантуры по истории математики.

Агент 9 служит для поиска ВУЗов. Его интеллектуальная функция - актуализация списка ВУЗов, имеющих программы подготовки по истории математики.

Этот список (для англоязычных претендентов) может, к примеру, иметь следующий вид:

- Кафедра истории и философии Университета Калгари, Канада;
- Математический факультет Университета Саймона Фрейзера, Канада;

- Институт истории и философии науки и техники Университета Торонто, Канада;
- Школа философии, религии и истории науки Лидского университета, Великобритания;
- Кафедра истории науки Гарвардского университета, США;
- Исторический факультет Чикагского университета, США;
- Факультет философии Мичиганского университета, США;
- Индийский технологический институт в Гандинагаре (постдоковские программы по истории индийской математики);
- Центр математики и истории науки Северозападного университета, Китай;
- Университет Бангалор, Индия (магистерская программа по философии математики);
- Кафедра философии Университета имени Сунь Ятсена, Китай.

В последние годы стал набирать обороты речевой сегмент истории науки, особенно в европейских и американских ВУЗах (см., например, [1]), поэтому в число агентов, обслуживающих системы научной осведомлённости по истории науки, в недалёком будущем потребуются включить агента по транскрибации устной информации.



Рис 2: План-схема интерфейса системы научной осведомлённости в области истории математики

В качестве основы для реализации всех указанных выше функций системы научной осведомлённости по истории математики, может быть предложена схема, изображённая на рис. 2.

Блок Проекты (см. рис.2) предназначен для совместной работы над определённой научной темой. Участники проекта будут иметь возможность определить свою роль (руководитель, исполнитель, помощник), в соответствии с чем они будут наделяться соответствующими правами и обязанностями. Функционал этого блока должен включать в себя способы общения участников проекта (чат, видеоконференция и т.п.) и обеспечивать совместную работу с файлами и текстовыми документами.

5. Другие особенности системы научной осведомлённости в области истории математики

Авторы считают необходимым заложить в систему научной осведомлённости возможность использования форумов, на которых можно обмениваться идеями, задавать вопросы и формировать научные группы для работы над определенной темой (см. рис. 2). Примером может стать интернет-форум по истории математики Math10.com. Для создания форумов подобного рода можно использовать различные конструкторы, как, например WordPress [18], на котором, по данным аналитической площадки BuiltWith, уже построено около 20 миллионов Web-ресурсов. Его удобство состоит в частности, в наличии специального инструмента (Disputo), который позволяет реализовать следующие полезные функции:

- обмен личными сообщениями;
- менеджер объявлений;
- рейтинговую систему поощрений;
- планирование отправки сообщений;
- раздел FAQ (Часто задаваемые вопросы).

Кроме того, участники созданного в рамках Disputo платформы WordPress форума смогут создавать личные блоги и отправлять посты на одобрение. Предполагается, что форум СНО будет иметь следующую (традиционную) структуру: Разделы → Темы → сообщения (посты), в которых будет предусмотрена функция добавления редактора формул.

6. Заключение

Предложенная схема построения системы научной осведомлённости в области истории математики может стать основой для разработки подобного рода систем не только в области естественных и технических наук, но и в перспективе, в области общественных и социальных наук.

По-видимому, имеет смысл сначала создавать национальные СНО, а потом, на их основе, по примеру мозаики – международные. Это позволит облегчить работу учёных из разных стран, проводящих исследования в рамках интернациональных проектов, а также создавать виртуальные научные коллективы исследователей, работающих в одной области. Финансирование национальных СНО должно осуществляться, по-видимому, за государственный счёт (возможно, в виде грантов и программ поддержки науки). Функционирование международных СНО может поддерживаться за счёт международных научных фондов, а их управление целесообразно строить по принципу международных научных организаций, таких, как Международная академия истории науки.

Представленная система научной осведомлённости в области истории математики, по мнению авторов, должна быть кроссплатформенной, иметь «открытую архитектуру» и пополняться, по мере необходимости, новыми элементами. Сюда, к примеру, могут входить компоненты по созданию команд для выполнения международных проектов, перевод текстов статей с иностранного языка на национальный, а также дополнительный функционал, относящийся к подсистеме обучения. Мы также предполагаем, что система научной осведомлённости в области истории отдельных дисциплин в рамках выделенного цикла (например, физико-математического) будет давать возможность пользоваться ресурсной базой «соседа по циклу». Например, система научной осведомлённости по истории математики будет подключаться к базе источников по истории астрономии и т.п.

Отметим, что внедрение аналога СНО в ВУЗы было положительно воспринято университетским сообществом [30, Гл. 5]. Это позволяет сделать оптимистический прогноз по поводу использования СНО среди историков науки, что, в конечном итоге, должно увеличить производительность труда исследователей и позволит уделять больше времени и внимания выявлению новых закономерностей в развитии науки в целом и отдельных её направлений, определению роли выдающихся учёных и научных коллективов в национальном и мировом масштабе и решению других актуальных задач истории науки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ассоциация устной истории. Режим доступа: URL: <https://www.oralhistory.org> (дата обращения: 30.02.2022).
2. A Wiki calls for papers. Режим доступа: URL: <http://www.wikicfp.com/cfp/> (дата обращения: 10.03.2022).
3. Авдеева Н. В., Никулина О. В. и др. Научный поиск: методы тематически-ориентированного поиска научной информации / XVI Всеросс. науч. конф. RCDL-2014 “Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции” – 2014. С. 237-241.
4. Александров П. С. О некоторых основных направлениях в общей топологии // Успехи математических наук, 19:6(120) (1964), С. 3–46.
5. Bogatov, E. M., Korenev, A. V., Mikhailov, I. S., 2021, About designing a system of scientific awareness in the history of mathematics field. Dickstein Forum 2021, Cracow, Poland. Book of abstracts, p.39. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://pau.krakow.pl/zaproszenia/2021/Dickstein_Forum_2021_09_14-17_abstracts.pdf (дата обращения: 30.10.2021).
6. Богатов Е. М., Корнев А. В., Михайлов И. С. О современных инструментах и методах ведения научных исследований по истории математики // Таврический вестник информатики и математики. - 2021. - № 3 (52). - С. 35-57.
7. Гайфуллин Б. Н., Туманов В. Е. Предметно-ориентированные системы научной осведомленности в науке и образовании // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2012. № 8. С. 741-750.
8. Grattan-Guinness, I. 2003: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 2 vols. Baltimore : J. Hopkins University Press, p. 1806.
9. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И. З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 1. - Киев: Наукова думка, 1966. - 493 с.

10. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 2. - Киев: Наукова думка, 1967. - 616 с.
11. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 3. - Киев: Наукова думка, 1968. - 726 с.
12. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 4. Книга 1. Киев: Наукова думка, 1970. - 884 с.
13. Каталог журналов с открытым доступом [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: <https://doaj.org>. (дата обращения: 01.05.2021).
14. Коренев А. В., Михайлов И. С. Об особенностях проектирования систем научной осведомлённости в области истории науки // Инновационная парадигма развития современной науки: Сборник статей II Международной научно-практической конференции, Петрозаводск, 05 августа 2021 года. – Петрозаводск: Международный центр научного партнерства «Новая Наука», 2021. – С. 127–132.
15. Xi W., Fox E. A. 2001: Machine Learning Approach for Homepage Finding Task. Proceedings of the Tenth Text REtrieval Conference (TREC 2001), pp. 686-698.
16. Матвеев, М. Г.; Свиридов, А. С.; Алейникова Н. А. 2008: Модели и методы искусственного интеллекта. Применение в экономике. Москва: Финансы и статистика, 446 с.
17. Математическая энциклопедия. Гл. ред. Виноградов И.М. В пяти томах. – Москва: Советская энциклопедия, 1977.
18. Молочков В. WordPress с нуля. СПб: Изд-во BHV, 2021. 304 с.
19. Мусин О. Р. Лемма Шпернера: приложения и обобщения. Занятие 1. Летняя школа «Современная математика», 2015. [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=12048 (дата обращения: 30.12.2021).
20. Научный фонд Ирландии [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: https://grants.sfi.ie/ex/ex_viewreport.jsp?key=&token=%40Gg4KSBgZeFpZQxZYSRxxQlNYZ1V8HnBv (дата обращения: 10.07.2021).
21. Научный форум dxdy [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL <https://dxdy.ru/> (дата обращения: 10.05.2022).
22. Научный форум MATHEMATICA [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL <https://math.stackexchange.com/> (дата обращения: 11.05.2022).
23. Поисквик CiteSeerX [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/> (дата обращения: 20.10.2021).
24. Robson E., Stedall J., 2009, The Oxford Handbook of The History of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, p. 91.
25. Science intelligence system in physical chemistry of radical reactions. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://lion.icp.ac.ru/> (дата обращения: 20.04.2022).
26. Сборник «Математическое Просвещение». Третья серия [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: <https://www.mccme.ru/free-books/matpros.html> (дата обращения: 30.11.2021).

27. Туманов В.Е., Прохоров А.И., Лазарев Д.Ю., Соловьева М.Е. Разработка и создание предметно-ориентированной системы научной осведомленности по физической химии радикальных реакций // Информационные ресурсы России. – 2010. – № 5(117). – С. 16-21.
28. Hackathorn R., 2005, Science Intelligence. Can a business Intelligence Approach Enable «Smart» Science? DM Review. [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: <http://www.DMReview.com>. (дата обращения: 30.01.2022).
29. Hoff G., Mundhenk M. 2001. Finding scientific papers with homepage search and MOPS. Proceedings of the Nineteenth Annual International Conference of Computer Documentation, Communicating in the New Millennium, pp. 201-207.
30. Chen M. 2012: Applying business intelligence in higher education sector: conceptual models and users acceptance. MSc thesis. University of Bedfordshire. 157 p.
31. Шашкин Ю.А. Выпуклые множества // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, 11, ВИНТИ, М., 1973, с. 5–50.
32. Янишевская А.Г., Пестерев П.В. Архитектура мультиагентной поисковой системы предприятия // Динамика систем, механизмов и машин. 2018. Том 6, №2. С. 94-101.

REFERENCES

1. The Oral History Association, Available at: <https://www.oralhistory.org> (accessed 30.02.2022).
2. A Wiki calls for papers. Available at: <http://www.wikicfp.com/cfp/> (accessed 10.03.2022).
3. Avdeeva, N.V., Nikulina, O.V. & others 2014: Scientific search: methods of thematically-oriented search for scientific information. *XVI Vseross. nauch. konf. RCDL-2014 "Elektronnye biblioteki: perspektivnye metody i tekhnologii, elektronnye kollekcii"*, pp. 237-241.
4. Alexandrov, P.S. 1964: On some basic directions in general topology. *Uspekhi Mat. Nauk*, 19:6(120), pp. 3–46.
5. Bogatov E.M., Korenev A.V., Mikhailov I.S., 2021, About designing a system of scientific awareness in the history of mathematics field. *Dickstein Forum 2021, Cracow, Poland*. Book of abstracts, p.39, Available at http://pau.krakow.pl/zaproszenia/2021/Dickstein_Forum_2021_09_14-17_abstracts.pdf.
6. Bogatov, E.M., Korenev, A.V. & Mikhailov, I.S. 2021: About the modern tools and methods of scientific research conducting in the field of the history of mathematics, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, no. 3 (52). pp. 35 -57.
7. Gajfullin, B.N. & Tumanov, V.E. 2012: Subject-oriented systems of scientific awareness in science and education, *Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie*, no. 8, pp. 741-750.
8. Grattan-Guinness, I. 2003: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 2 vols. Baltimore: J. Hopkins University Press, p. 1806.
9. Shtokalo, I.Z. 1966: *Istoriya otechestvennoj matematiki*. Vol. 1. Kiev: Naukova dumka, p. 493.
10. Shtokalo, I.Z. 1967: *Istoriya otechestvennoj matematiki*. Vol. 2. Kiev: Naukova dumka, p. 616.
11. Shtokalo, I.Z. 1968: *Istoriya otechestvennoj matematiki*. Vol. 3. Kiev: Naukova dumka, p. 726.

12. Shtokalo, I. Z. 1970: *Istoriya otechestvennoj matematiki*. Vol. 4. Kiev: Naukova dumka, p. 884.
13. Directory of Open Access Journals. Available at: <https://doaj.org> (accessed 16.12.2021).
14. Korenev, A. V. & Mikhailov, I. S. 2021: About the features of designing scientific awareness systems in the field of the history of science. *Innovacionnaya paradigma razvitiya sovremennoj nauki: Sbornik statej II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Petrozavodsk: Mezhdunarodnyj centr nauchnogo partnerstva «Novaya Nauka»*, pp. 127-132.
15. Xi W., Fox E. A. 2001: Machine Learning Approach for Homepage Finding Task. *Proceedings of the Tenth Text REtrieval Conference (TREC 2001)*, pp. 686-698.
16. Matveev, M. G.; Sviridov, A. S. & Aleynikova, N. A. 2008: *Models and methods of artificial intelligence. Application in economics*. Moscow: Infra-M, p. 446.
17. Vinogradov, I. M. 1977: Mathematical Encyclopedia. In 5 volumes. Moscow: Sovetskaya enciklopediya.
18. Molochkov, V. 2021: *WordPress s nulya*. SPb: Izd-vo BHV, p. 304.
19. Musin, O. R. 2015: Sperner's Lemma: applications and generalizations. Lesson 1. *Summer School "Contemporary Mathematics"*, Available at: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=12048 (accessed 30.12.2021).
20. Science Foundation Ireland, Available at: RL: https://grants.sfi.ie/ex/ex_viewreport.jsp?key=&token=%40Gg4KSBgZeFpZQxZYSRxXQlNYZ1V8HnBv (accessed 16.12.2021).
21. Scientific forum dxdy, Available at: <https://dxdy.ru/> (accessed 10.05.2022).
22. Scientific forum MATHEMATICA, Available at: URL <https://math.stackexchange.com/> (accessed 11.05.2022).
23. CiteSeerX, Available at: <https://citeseerx.ist.psu.edu/> (accessed 20.10.2021).
24. Robson, E.; Stedall, J. 2009: *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, p. 91.
25. Science intelligence system in physical chemistry of radical reactions, Available at: <http://lion.icp.ac.ru/> (accessed 20.04.2022).
26. Matematicheskoe Prosveshchenie. Third series, Available at: <https://www.mccme.ru/free-books/matpros.html> (accessed 30.11.2021).
27. Tumanov, V. E., Prohorov, A. I., Lazarev, D. Y., Solovyova, M. E. 2010: Development and creation of a subject-oriented system of scientific awareness on the physical chemistry of radical reactions. *Informacionnye resursy Rossii*, no. 5(117), pp. 16-21.
28. Hackathorn, R. 2005: Science Intelligence. Can a business Intelligence Approach Enable «Smart» Science? DM Review. Available at: <http://www.DMReview.com> (accessed 30.01.2022).
29. Hoff, G. & Mundhenk, M. 2001. Finding scientific papers with homepage search and MOPS. *Proceedings of the Nineteenth Annual International Conference of Computer Documentation, Communicating in the New Millennium*, pp. 201-207.
30. Chen M. 2012: *Applying business intelligence in higher education sector: conceptual models and users acceptance*. MSc thesis. University of Bedfordshire. 157 p.

-
31. Yu. A. Shashkin, "Convex sets, extremal points, simplexes", *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.*, 11, VINITI, Moscow, 1973, 5–50; J. Math. Sci. (N. Y.), 4:6 (1975), 625–655.
 32. Yanishevskaya, A. G. & Pesterev, P. V. 2018: Architecture of a multi-agent enterprise search engine. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*, vol. 6, no. 2, pp. 94-101.

Получено: 25.08.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-188-197

Эмпирическая математическая модель изменения фактической площади контакта металлов в зависимости от пути трения¹

А. Д. Бреки, В. А. Яхимович, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, И. А. Шульгин, Е. Б. Седакова,
Ю. Г. Барабанщиков, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева

Бреки Александр Джалюльевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Яхимович Валерий Александрович — ведущий инженер, аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: valera_spb@inbox.ru

Чулкин Сергей Георгиевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Москалец Артём Анатольевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

Шульгин Игорь Андреевич — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: igorshulgin@polihimnpp.ru

Седакова Елена Борисовна — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Барабанщиков Юрий Германович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: ugb@mail.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: "Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии № 22-19-00178.

Аннотация

В статье приведена новая эмпирическая математическая модель для описания изменения фактической площади контакта металлов в зависимости от пути трения, включающая такие характеристики как резкость изменения фактической площади контакта, исходная интенсивность изменения фактической площади контакта, приращение интенсивности изменения фактической площади контакта, значение пути трения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения фактической площади контакта. Показана справедливость разработанной математической модели при трении пирамидальных инденторов из алюминия, меди и стали Ст.3 по стальной поверхности.

Ключевые слова: математическая модель, трение, фактическая площадь контакта, индентор, фрикционное взаимодействие.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

А. Д. Бреки, В. А. Яхимович, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, И. А. Шульгин, Е. Б. СедакOVA, Ю. Г. Барабанщиков, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Эмпирическая математическая модель изменения фактической площади контакта металлов в зависимости от пути трения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 188–197.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-188-197

Empirical mathematical model of change in the actual contact area of metals depending on the friction path²

A. D. Breki, V. A. Yakhimovich, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I. A. Shulgin, E. B. Sedakova, Yu. G. Barabanshchikov, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva

Breki Alexander Dzhalyulevich — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Yakhimovich Valery Alexandrovich — postgraduate student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: valera_spb@inbox.ru

Chulkin Sergey Georgievich — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Moskalets Artem Anatolyevich — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

Shulgin Igor Andreevich — postgraduate student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

²The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation for the priority area of activity of the Russian Science Foundation “Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by individual scientific groups” to the scientific project: Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium steam turbine blades and their operation under conditions of drop impact erosion № 22-19-00178.

e-mail: igorshulgin@polihimnpp.ru

Sedakova Elena Borisovna — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Barabanshchikov Yuri Germanovich — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: ugb@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The article presents a new empirical mathematical model for describing the change in the actual contact area of metals depending on the friction path, including such characteristics as the sharpness of the change in the actual contact area, the initial intensity of the change in the actual contact area, the increment in the intensity of the change in the actual contact area, the value of the friction path corresponding to the minimum "acceleration" of changes in the actual area of contact. The validity of the developed mathematical model is shown for the friction of pyramidal indenters made of aluminum, copper and steel St.3 on a steel surface.

Keywords: mathematical model, friction, actual contact area, indenter, frictional interaction.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

A. D. Breki, V. A. Yakhimovich, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I. A. Shulgin, E. B. Sedakova, Yu. G. Barabanshchikov, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, 2022, "Empirical mathematical model of change in the actual contact area of metals depending on the friction path", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 188–197.

1. Введение

Известно [1], что «реальные поверхности деталей машин по своей общей форме и местному рельефу лишь приближаются к своим идеальным прообразам. Понятие пятна контакта как меры плотности прилегания отдельных сопрягающихся элементов применимо к реальным поверхностям. Контакт реальных поверхностей отличается от идеального номинального контакта, площадь которого равна номинальной площади соприкосновения двух поверхностей, заданных в чертежах одинаковыми параметрами». В соответствии с этим различают фактическую и контурную площади контакта. Фактической площадью контакта (ФПК) называется площадь, по которой осуществляется контакт микронеровностей, образующих шероховатость [2]. Фактическая площадь контакта обычно составляет от номинальной десятые и даже сотые доли процента, а контурная — несколько процентов [3]. Величина фактической площади контакта [4] «во многом характеризует такие параметры неподвижных соединений деталей как прочность, теплопроводность, электрическое сопротивление и т. д. В частности, учет параметров упругопластического взаимодействия сопряженных деталей позволяет уменьшить погрешность определения нагрузочной способности неподвижного соединения. Кроме того,

передача тепловой и электрической энергии в соединениях деталей происходит в пятнах контакта, что свидетельствует о том, что энергоэффективность соединений напрямую зависит от параметров контакта шероховатых поверхностей сопрягаемых деталей».

Проводится ряд важных исследований фактической площади контакта. В работе [5] показано, что «величина износа и коэффициент трения зависят от фактической площади контакта. Для процесса изнашивания важна не только величина фактической площади контакта, но и распределение контактных пятен по поверхности соприкасающихся тел». В работе [6]: «рассмотрено влияние на фактическую площадь контакта шероховатых плоских поверхностей некоторых параметров, таких как соотношение твердостей, среднее давление, радиус микровыступов шероховатости. Анализ проводился с помощью известных зависимостей, описывающих упругопластическое контактное взаимодействие шероховатых поверхностей». В работе [7] сказано, что «на основе закономерностей упругопластического контакта отдельной микронеровности шероховатой поверхности получены зависимости для определения сближения и фактической площади контакта плоских поверхностей при близких твердостях их материалов».

Известно [8], что фактическая площадь контакта в случае движения металлического индентора по стальной отполированной поверхности изменяется по сложным зависимостям, включающим как участки линейного, так и участки нелинейного изменения, для которых в настоящее время ещё не создано соответствующих математических моделей. В связи с этим, в границах данной работы, предлагается новая математическая модель, описывающая закономерности влияния перемещения (пути трения) на фактическую площадь контакта.

2. Результаты и их обсуждение

В работах [9, 10] предложена следующая зависимость, которая была использована для описания обобщённого закона внешнего трения, а также закона динамики изнашивания:

$$F(x) = C + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta C_i}{s_i} \ln [1 + \exp(s_i \cdot (x - x_i))] . \quad (1)$$

Анализ данных работы [8] позволил предположить, что зависимость фактической площади контакта от пути трения, может быть представлена с использованием (1) в следующем виде:

$$A_r = J_{r0} \cdot l_f + A_{r0} - \frac{\Delta J_r}{\Psi_l} \ln [1 + \exp(\Psi_l \cdot (l_f - l_{f\Omega}))], \quad (2)$$

где Ψ_l — резкость изменения фактической площади контакта; J_{r0} — исходная интенсивность изменения фактической площади контакта; ΔJ_r — приращение интенсивности изменения фактической площади контакта; l_f — путь трения; $l_{f\Omega}$ — значение пути трения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения фактической площади контакта; A_{r0} — фактическая площадь контакта покоящихся тел.

В работе [8] профессором Н.Б. Демкиным получены важные зависимости фактической площади контакта при фрикционном взаимодействии трёхгранных пирамидок из алюминия, меди, стали Ст.3 по плоскости из стали 12Х1. Условия испытаний: прямолинейное скольжение трёхгранной пирамиды по стальной плоскости со скоростью 0,1 мм/с, при нагрузке 3Н на расстояние 5мм. Автор [8] установил зависимости фактической площади контакта от пути трения в графическом виде, однако не было найдено их аналитического представления.

В данной работе реализована точная оцифровка графиков из работы [8] и осуществлена аппроксимация выявленных точек с использованием разработанной формулы (2).

На рисунке 1 показаны точки, полученные при оцифровке графика [8] для пирамиды из алюминия, скользящей по стальной поверхности, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

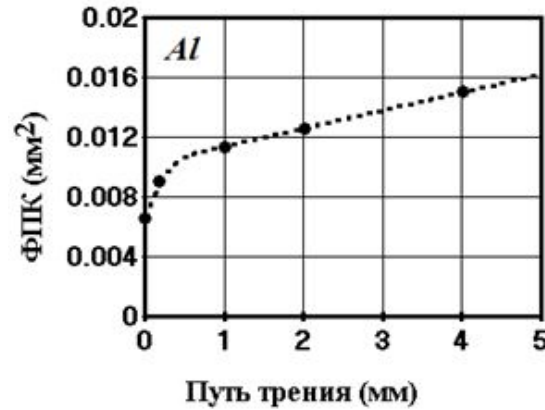


Рис 1: Зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из алюминия, скользящей по стальной поверхности

Аналитически, зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из алюминия, скользящей по стальной поверхности выражается формулой:

$$A_r = 0,0136l_f + 0,0066 - \left(\frac{0,0124}{10} \right) \cdot \ln(1 + \exp(10(l_f - 0,29))). \quad (3)$$

Интегрирование (3) по всему интервалу от 0 до 5 мм и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение ФПК, равное 0,0131 мм².

Дифференцируя (3) получаем зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамидки из алюминия:

$$J_r = 0,0136 - \frac{0,0124}{1 + \exp(-10(l_f - 0,29))} \quad (4)$$

График функции (4) показан на рисунке 2.

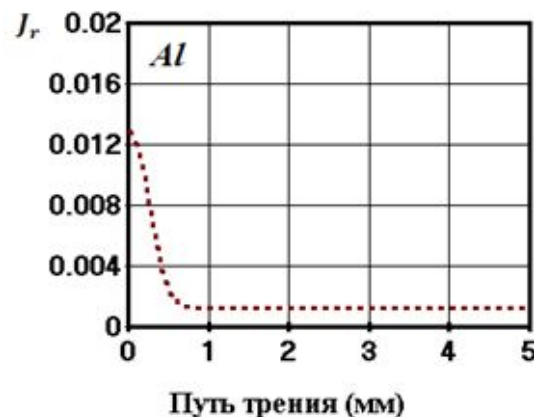


Рис 2: Зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамиды из алюминия, скользящей по стальной поверхности

Из рис. 2 видно, что интенсивность изменения ФПК вначале резко падает, а затем устанавливается на значении $0,0012 \text{ мм}^2/\text{мм}$.

На рисунке 3 показаны точки, полученные при оцифровке графика [8] для пирамиды из меди, скользящей по стальной поверхности, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

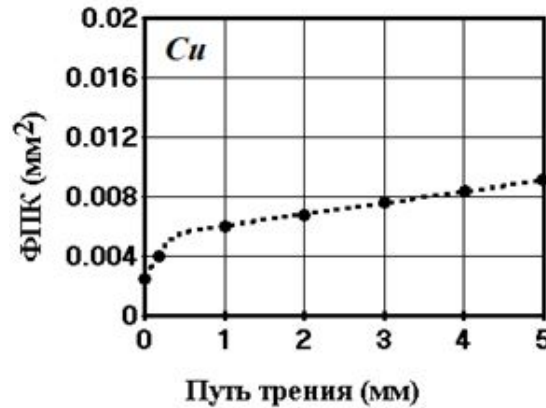


Рис 3: Зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из меди, скользящей по стальной поверхности

Аналитически, зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из меди, скользящей по стальной поверхности выражается формулой:

$$A_r = 0,0121l_f + 0,00244 - \left(\frac{0,01124}{10} \right) \cdot \ln(1 + \exp(10(l_f - 0,255))). \quad (5)$$

Интегрирование (5) по всему интервалу от 0 до 5 мм и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение ФПК, равное $0,0071 \text{ мм}^2$.

Дифференцируя (5) получаем зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамидки из меди:

$$J_r = 0,012 - \frac{0,01124}{1 + \exp(-10(l_f - 0,255))}. \quad (6)$$

График функции (6) показан на рисунке 4.

Из рис. 4 видно, что интенсивность изменения ФПК вначале резко падает, а затем устанавливается на значении $0,00076 \text{ мм}^2/\text{мм}$.

На рисунке 5 показаны точки, полученные при оцифровке графика [8] для пирамиды из стали Ст.3, скользящей по стальной поверхности, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

Аналитически, зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из стали Ст.3, скользящей по стальной поверхности выражается формулой:

$$A_r = 0,007l_f = 0,00122 - \left(\frac{0,0067}{12} \right) \cdot \ln(1 + \exp(12(l_f - 0,15))). \quad (7)$$

Интегрирование (7) по всему интервалу от 0 до 5 мм и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение ФПК, равное $0,00295 \text{ мм}^2$.

Дифференцируя (7) получаем зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамидки из стали Ст.3:

$$J_r = 0,007 - \frac{0,0067}{1 + \exp(-12(l_f - 0,15))}. \quad (8)$$

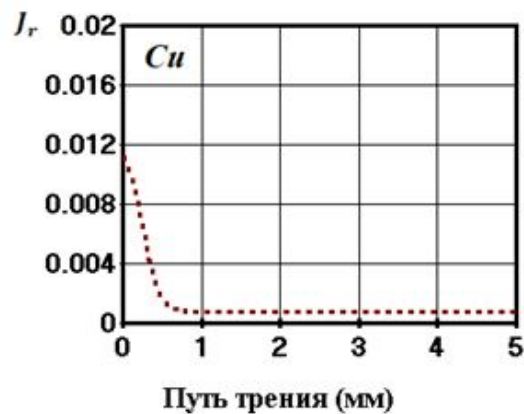


Рис 4: Зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамиды из меди, скользящей по стальной поверхности

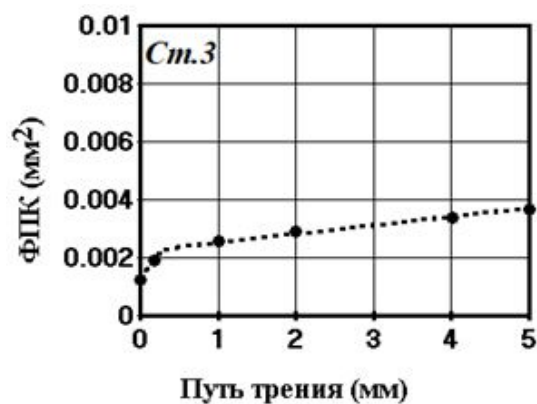


Рис 5: Зависимость фактической площади контакта от пути трения для пирамиды из стали Ст.3, скользящей по стальной поверхности

График функции (8) показан на рисунке 6.

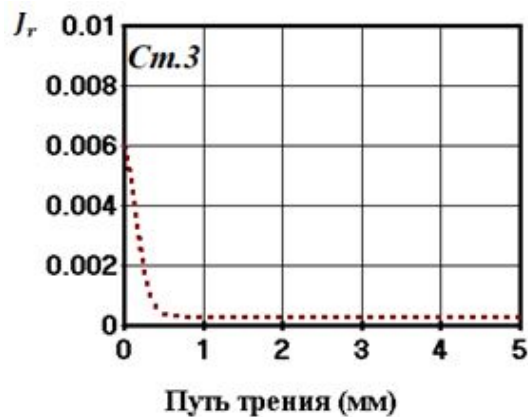


Рис 6: Зависимость интенсивности изменения ФПК от пути трения для пирамиды из стали Ст.3, скользящей по стальной поверхности

Соответственно с увеличением твёрдости уменьшается как среднее значение ФПК, так и

установившееся значение интенсивности её изменения.

3. Заключение

В результате проведённого исследования:

1. Показано, что функция, которая была использована для описания обобщённого закона внешнего трения, а также закона динамики изнашивания подходит для описания изменения фактической площади контакта металлического индентора со стальной поверхностью в зависимости от пути трения.
2. Разработана математическая модель для описания изменения фактической площади контакта металлов в зависимости от пути трения, включающая такие характеристики как резкость изменения фактической площади контакта, исходная интенсивность изменения фактической площади контакта, приращение интенсивности изменения фактической площади контакта, значение пути трения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения фактической площади контакта.
3. Реализована оцифровка экспериментальных данных профессора Демкина Н.Б. и проведён их анализ, с использованием разработанной математической модели, подтвердивший справедливость данной эмпирической модели для рассматриваемого комплекса условий испытаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грязев В.М. «Определение фактической площади контакта поверхностей взаимодействующих деталей» Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. № 11-1. С. 287-292.
2. Демкин Н.Б., Ланков А.А. Определение фактической площади касания двух тел при помощи угольных плёнок. // Заводская лаборатория. 1965. № 6. С. 739-740.
3. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. 224 с.
4. Влияние соотношения твердостей материалов, среднего давления и параметров шероховатости на фактическую площадь контакта сопрягаемых поверхностей / М.М. Матлин, В.А. Казанкин, Е.Н. Казанкина, Е.В. Капиносова // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2021. № 6(253). С. 32-36.
5. Ермоленко И.Ю. Исследование фактической площади контакта тормозных колодок вагонов на испытательном стенде / И. Ю. Ермоленко, Н. П. Рычков // Наука и образование транспорта. 2018. № 1. С. 21-24.
6. Капиносова Е.В. Исследование фактической площади контакта при различных параметрах контактирующих поверхностей / Е. В. Капиносова // XXVI Региональная конференция молодых ученых и исследователей Волгоградской области: сборник материалов конференции, Волгоград, 16–28 ноября 2021 года. Волгоград: Волгоградский государственный технический университет, 2022. С. 50-52.
7. Матлин М.М. Расчет сближения и фактической площади контакта плоских шероховатых поверхностей при близких твердостях их материалов / М.М. Матлин, Е.Н. Казанкина, В.А. Казанкин // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2013. № 6(109). С. 82-84.

8. Демкин Н.Б. Контакт твёрдых тел при статическом нагружении и трении / Теория трения и износа [Текст]: [Сборник статей] // Акад. наук СССР. Науч. совет по трению и смазкам. Москва: Наука, 1965. С. 26-29.
9. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.
10. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: автореферат дис. ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого]. - Санкт-Петербург, 2021. 43 с.

REFERENCES

1. Gryazev V.M. 2012, «Determination of the actual contact area of the surfaces of interacting parts», *News of the Tula State University, Technical Sciences*, No. 11-1. pp. 287-292.
2. Demkin N.B., Lankov A.A. 1965, «Determination of the actual area of contact between two bodies using carbon films», *Factory laboratory*, No. 6. pp. 739-740.
3. Demkin N.B., Ryzhov E.V. *Surface quality and contact of machine parts*. M.: Mashinostroenie, 1981. 224 p.
4. Matlin M.M., Kazankin V.A., Kazankina E.N., Kapinosova E.V. 2021, «Influence of the ratio of hardness of materials, average pressure and roughness parameters on the actual area of contact of mating surfaces», *Proceedings of the Volgograd State Technical University*. No. 6 (253). pp. 32-36.
5. Ermolenko I.Yu., Rychkov N.P. 2018, «Research of the actual area of contact of the brake pads of wagons on the test bench», *Science and education for transport*, No. 1. pp. 21-24.
6. Kapinosova E.V. 2022, «Study of the actual contact area for various parameters of contact surfaces», *XXVI Regional Conference of Young Scientists and Researchers of the Volgograd Region: Collection of Conference Proceedings*, Volgograd, November 16–28, 2021. Volgograd: Volgograd State Technical University, pp. 50-52.
7. Matlin M.M., Kazankina E.N., Kazankin V.A. 2013, «Calculation of convergence and actual contact area of flat rough surfaces with close hardness of their materials», *Proceedings of the Volgograd State Technical University*, No. 6 (109). pp. 82-84.
8. Demkin N.B. 1965, «Contact of solid bodies under static loading and friction», *Theory of friction and wear*, Acad. sciences of the USSR. Scientific advice on friction and lubrication, pp. 26-29.
9. Breki A.D. 2021, *Tribological characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: dissertation ... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Breki Alexander Dzhallulevich; [Place of defense: FGAOU VO «St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great»]. St. Petersburg. 378 p.

10. Breki A.D. 2021, *Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: Abstract of the thesis. ... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulyevich Breki; [Place of defense: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University]. St. Petersburg. 43 p.

Получено: 21.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК УДК539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-198-205

**Закономерности трения скольжения тел из серого чугуна
в смазочных средах в зависимости от скорости скольжения¹**

А. Д. Бреки, Д. В. Зимин, С. Г. Чулкин, А. А. Москалец, И. А. Шульгин, Е. Б. Седакова,
Ю. В. Галышев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева

Бреки Александр Джалюльевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Зимин Денис Викторович — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: tkvaug@mail.ru

Чулкин Сергей Георгиевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Москалец Артём Анатольевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

Шульгин Игорь Андреевич — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: igorshulgin@polihimnpp.ru

Седакова Елена Борисовна — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Галышев Юрий Виталиевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: galyshev_yuv@spbstu.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии № 22-19-00178.

Аннотация

В статье приведена новая эмпирическая математическая модель для описания изменения коэффициента трения в зависимости от скорости скольжения, включающая такие характеристики как начальная интенсивность изменения коэффициента трения, приращение интенсивности изменения коэффициента трения при переходе на новый режим, резкость изменения коэффициента трения при переходе на новый режим, значение скорости скольжения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения коэффициента трения при переходе на новый режим трения. Показана справедливость разработанной математической модели при трении направляющих из серого чугуна СЧ21-40 в среде смазочных масел «Индустриальное 12», «Индустриальное 45», «Автол 18».

Ключевые слова: математическая модель, трение, смазочное масло, серый чугун, кривая Герси-Штрибека.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

А. Д. Бреки, Д. В. Зимин, С. Г. Чулкин, А.А. Москалец, И.А. Шульгин, Е.Б. Седакова, Ю.В. Галышев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева. Закономерности трения скольжения тел из серого чугуна в смазочных средах в зависимости от скорости скольжения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 198–205.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC УДК539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-198-205

**Regularities of sliding friction of grey cast iron bodies
in lubricating media depending on the sliding speed²**

A. D. Breki, D. V. Zimin, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I. A. Shulgin, E. B. Sedakova,
Yu. V. Galyshev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva

Breki Alexander Dzhalyulevich — candidate of technical Sciences, associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Zimin Denis Viktorovich — postgraduate student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: tkvaug@mail.ru

Chulkin Sergey Georgievich — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Moskalets Artem Anatolyevich — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: artem.moskalec@gmail.com

²The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation for the priority area of activity of the Russian Science Foundation “Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by individual scientific groups” to the scientific project: Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium steam turbine blades and their operation under conditions of drop impact erosion № 22-19-00178.

Shulgin Igor Andreevich — postgraduate student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: igorshulgin@polihimnpp.ru

Sedakova Elena Borisovna — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: elenasedakova2006@yandex.ru

Galyshev Yuri Vitalievich — doctor of technical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: ugb@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The article presents a new empirical mathematical model for describing the change in the friction coefficient depending on the sliding speed, including such characteristics as the initial intensity of the change in the friction coefficient, the increment in the intensity of the change in the friction coefficient when switching to a new mode, the sharpness of the change in the friction coefficient when switching to a new mode, the value sliding speed corresponding to the minimum “acceleration” of the change in the friction coefficient during the transition to a new friction mode. The validity of the developed mathematical model is shown for the friction of guides made of gray cast iron SCh21-40 in the medium of lubricating oils "Industrialnoe 12 "Industrialnoe 45 "Avtol 18".

Keywords: mathematical model, friction, lubricating oil, gray cast iron, Guersey-Striebeck curve.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

A. D. Breki, D. V. Zimin, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I.A. Shulgin, E.B. Sedakova, Yu.V. Galyshev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, 2022, “Regularities of sliding friction of grey cast iron bodies in lubricating media depending on the sliding speed”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 198–205.

1. Введение

Известно [1], что большинство направляющих металлорежущих станков работает в режиме смешанного трения. Это объясняется скоростями скольжения, изменяющимися в весьма широких пределах от долей миллиметра до нескольких метров в минуту. Как известно, область смешанного трения характеризуется большим разнообразием условий работы трущихся поверхностей в зависимости от доли сухого, граничного или жидкостного трения в общем процессе трения. Исследованию триботехнических свойств смазочных масел посвящено много работ различной направленности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. В литературе описаны закономерности изменения коэффициента трения от скорости скольжения для самых различных смазочных масел. Однако эти закономерности в большинстве случаев представлены в виде графиков и таблиц.

С другой стороны, для более качественного выявления закономерностей внешнего трения направляющих в различных смазочных средах, в зависимости от скорости, требуется разработка и верификация новых математических моделей, объединяющих в себе как участки линейного, так и участки нелинейного изменения триботехнических характеристик.

2. Результаты и их обсуждение

В работах [9, 10] предложена следующая зависимость, которая была использована для описания обобщённого закона внешнего трения, а также закона динамики изнашивания:

$$F(x) = C + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta C_i}{s_i} \ln [1 + \exp(s_i \cdot (x - x_i))] . \quad (1)$$

Анализ данных работы [1] позволил предположить, что зависимость коэффициента трения от скорости скольжения, может быть представлена с использованием (1) в следующем виде:

$$f = f_0 - J_{f_0} \cdot \nu_f + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta J_{f_i}}{\Psi_{f_i}} \ln [1 + \exp(\Psi_{f_i}(\nu_f - \nu_{f\Omega_i}))] , \quad (2)$$

где f_0 — исходный коэффициент трения, J_{f_0} — начальная интенсивность изменения коэффициента трения, ν_f — скорость скольжения, ΔJ_{f_i} — приращение интенсивности изменения коэффициента трения при переходе на i -й режим трения, Ψ_{f_i} — резкость изменения коэффициента трения при переходе на i -й режим трения, $\nu_{f\Omega_i}$ — значение скорости скольжения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения коэффициента трения при переходе на i -й режим.

В работе [1] Г.А. Левитом и Б.Г. Лурье получены важные зависимости коэффициента трения от скорости скольжения при фрикционном взаимодействии направляющих из серого чугуна СЧ21-40 в среде смазочных масел промышленное 12, промышленное 45, автол 18. Условия испытаний: скольжение бруска из серого чугуна по плоскости из серого чугуна со скоростью от 0 до 1200 мм/мин, при давлении 0,5 кГс/см².

Авторы [1] установили зависимости коэффициента трения от скорости скольжения в графическом виде, однако не было найдено их аналитического представления. В данной работе реализована точная оцифровка графиков из работы [1] и осуществлена аппроксимация выявленных точек с использованием выбранной формулы (2).

На рисунке 1 показаны точки, полученные при оцифровке графика [1] зависимости коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки промышленное 12, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

Аналитически, зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки промышленное 12 выражается формулой:

$$f = 0,28 - 0,004\nu_f + \left(\frac{0,00377}{0,1} \right) \ln (1 + \exp(0,1(\nu_f - 22))) + \\ + \left(\frac{0,00018}{0,02} \right) \ln (1 + \exp(0,02(\nu_f - 600))) . \quad (3)$$

Интегрирование (3) по всему интервалу скоростей от 0 до 1200 мм/мин и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,0879.

На рисунке 2 показаны точки, полученные при оцифровке графика [1] зависимости коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки промышленное 45, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

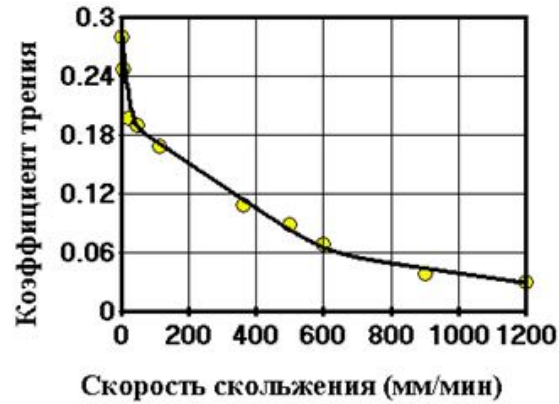


Рис 1: Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки индустриальное 12

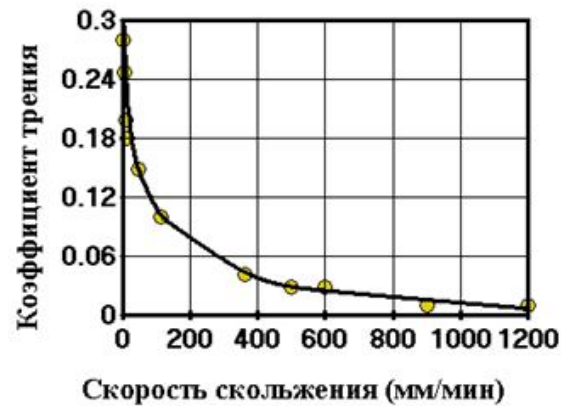


Рис 2: Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки индустриальное 45

Аналитически, зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки индустриальное 45 выражается формулой:

$$f = 0,28 - 0,01\nu_f + \left(\frac{0,0093}{0,1}\right) \ln(1 + \exp(0,1(\nu_f - 11))) + \\ + \left(\frac{0,00046}{0,1}\right) \ln(1 + \exp(0,1(\nu_f - 111))) + \left(\frac{0,00021}{0,02}\right) \ln(1 + \exp(0,02(\nu_f - 400))). \quad (4)$$

Интегрирование (4) по всему интервалу скоростей от 0 до 1200 мм/мин и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,0433.

На рисунке 3 показаны точки, полученные при оцифровке графика [1] зависимости коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки Автол 18, и соответствующий график аппроксимирующей функции.

Аналитически, зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки Автол 18 выражается формулой:



Рис 3: Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения пары трения в среде масла марки Автол 18

$$f = 0,24 - 0,011\nu_f + \left(\frac{0,0101}{0,1}\right) \ln(1 + \exp(0,1(\nu_f - 11))) + \\ + \left(\frac{0,00083}{0,1}\right) \ln(1 + \exp(0,1(\nu_f - 111))) + \left(\frac{0,000106}{0,02}\right) \ln(1 + \exp(0,02(\nu_f - 400))). \quad (5)$$

Интегрирование (5) по всему интервалу скоростей от 0 до 1200 мм/мин и деление полученного результата на длину данного интервала даёт среднее значение коэффициента трения, равное 0,0294.

Таким образом, хотя характер зависимости коэффициента трения от скорости скольжения в целом соответствует кривой Герси–Штрибека, аналитическое описание данной зависимости имеет сложный вид с целым рядом переходов.

3. Заключение

В результате проведённого исследования:

1. Показано, что функция, которая была использована для описания обобщённого закона внешнего трения, а также закона динамики изнашивания подходит для описания зависимости коэффициента трения от скорости скольжения в жидкой смазочной среде. Соответственно описывается кривая Герси – Штрибека.
2. Разработана математическая модель для описания изменения коэффициента трения в зависимости от скорости скольжения, включающая такие характеристики как начальная интенсивность изменения коэффициента трения, приращение интенсивности изменения коэффициента трения при переходе на новый режим, резкость изменения коэффициента трения при переходе на новый режим, значение скорости скольжения, соответствующее минимальному «ускорению» изменения коэффициента трения при переходе на новый режим.
3. Реализована оцифровка экспериментальных данных Г.А. Левита и Б.Г. Лурье и проведён их анализ, с использованием разработанной математической модели, подтвердивший справедливость данной эмпирической модели для рассматриваемого комплекса условий испытаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левит Г.А., Лурье Б.Г. Исследование механизма смешанного трения в направляющих металлорежущих станков / Теория трения и износа // Акад. наук СССР. Науч. совет по трению и смазкам. 1965. С. 250 – 254.
2. Кустов О.Ю. Эффективность композиции из смазочного масла, нанопорошка оксида алюминия и поверхностно-активного вещества для снижения трения // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. 2015. Т.1. С. 153-156.
3. Кустов О.Ю., Малинин В.И., Беломытцев О.М. Исследование влияния нанопорошков оксида алюминия на триботехнические свойства масел и определение областей их применения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2014. № 36. С. 131–142.
4. Кустов О.Ю. Получение композиции из смазочного масла, нанопорошка оксида алюминия и ПАВ для снижения трения в подшипниках качения // Вестник Пермского научного центра УрО РАН. 2015. № 2. С. 43–51.
5. Кандева-Иванова М.К., Задорожная Е.А., Мухортов И.В., Леванов И.Г. Изучение влияния нетоксичных добавок в рапсовое масло при экспериментальных исследованиях узлов трения машин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2021. Т.21. № 2. С. 5-14.
6. Breki A.D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V. Frictional Properties of a Nanocomposite Material with a Linear Polyimide Matrix and Tungsten Diselinate Nanoparticle Reinforcement // Journal of Tribology. 2019. Vol. 141. No 8. pp. 082002.
7. Breki A.D., Chulkin S.G., Dobrovolsky N.M. Mathematical regularities of the sliding friction process of a porous material based on iron impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated graphene // Chebyshevskii sbornik. 2021. Vol. 22. No 1(77). pp. 378-389.
8. Sergeev N.N., I.V. Minaev, Gvozdev A.E. Decarburization and the Influence of Laser Cutting on Steel Structure // Steel in Translation. 2018. Vol. 48. No 5. pp. 313-319.
9. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.
10. Бреки А.Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: автореферат дис. ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого]. - Санкт-Петербург, 2021. 43 с.

REFERENCES

1. Levit G.A., Lurie B.G. 1965, “Investigation of the mechanism of mixed friction in the guides of metal-cutting machine tools”, *Theory of friction and wear, Acad. sciences of the USSR. Scientific advice on friction and lubrication*. 1965. pp. 250–254.

2. Kustov O.Yu. 2015, "The effectiveness of the composition of lubricating oil, aluminum oxide nanopowder and surfactant to reduce friction", *Aerospace engineering, high technologies and innovations*. T.1. pp. 153-156.
3. Kustov O.Yu., Malinin V.I., Belomyttsev O.M. 2014, "Investigation of the influence of aluminum oxide nanopowders on the tribotechnical properties of oils and the determination of their applications", *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace engineering*. No. 36. pp. 131-142.
4. Kustov O.Yu. 2015, "Obtaining a composition from lubricating oil, aluminum oxide nanopowder and surfactants to reduce friction in rolling bearings", *Bulletin of the Perm Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. No. 2. pp. 43-51.
5. Kandeveva-Ivanova M.K., Zadorozhnaya E.A., Mukhortov I.V., Levanov I.G. 2021, "Study of the influence of non-toxic additives in rapeseed oil in experimental studies of friction units of machines", *Bulletin of the South Ural State University. Series: Engineering*. T.21. No.2. pp. 5-14.
6. Breki A.D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V. 2019, "Frictional Properties of a Nanocomposite Material with a Linear Polyimide Matrix and Tungsten Diselide Nanoparticle Reinforcement", *Journal of Tribology*. Vol. 141. No 8. pp. 082002.
7. Breki A.D., Chulkin S.G., Dobrovolsky N.M. 2021, "Mathematical regularities of the sliding friction process of a porous material based on iron impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated grapheme", *Chebyshevskii sbornik*. Vol. 22. No 1(77). pp. 378-389.
8. Sergeev N.N., Minaev I.V., Gvozdev A.E. 2018, "Decarburization and the Influence of Laser Cutting on Steel Structure", *Steel in Translation*. Vol. 48. No 5. pp. 313-319.
9. Breki A.D. 2021, *Tribological characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: dissertation ... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Breki Alexander Dzhalevich; [Place of defense: FGAOU VO "St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great"]. St. Petersburg. 378 p.
10. Breki A.D. 2021, *Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricating media under conditions of spontaneous changes in the states of friction contact*: Abstract of the thesis. ... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulyevich Breki; [Place of defense: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University]. St. Petersburg. 43 p.

Получено: 1.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-206-226

**Применение теоретико-числовых сеток
в задачах дифракции звука на упругих телах**¹²

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Ларин Николай Владимирович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции плоской гармонической звуковой волны на упругом эллипсоиде. Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Кирхгофа. Это приводит к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода для определения потенциала смещения в рассеянной волне на поверхности рассеивателя. Показано, что использование квадратурных формул на основе сеток Смоляка позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов, при решении интегрального уравнения и при вычислении рассеянного акустического давления в ближней зоне. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом простых ячеек, который имеет тот же порядок точности. Проведено сопоставление времени решения задачи с вычислением давления в окрестности эллипсоида на основе решения интегрального уравнения двумя методами вычисления интегралов.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, линейные интегральные уравнения, квадратурные формулы, периодизация, сетки Смоляка, параллелепипедальные сетки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 206–226.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 19-41-710005_p_a).

²Исследование выполнено за счет гранта правительства Тульской области (договор № ДС/306 от 16.11.2021)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-206-226

**Application of number-theoretic grids
in problems of sound diffraction by elastic bodies**

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Larin Nikolai Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Abstract

The article considers the problem of a plane harmonic sound wave diffraction by an elastic ellipsoid. To represent the scattered field, a representation in the form of a Kirchhoff integral is used. This leads to the need to solve the Fredholm integral equation of the second kind to determine the displacement potential in the scattered wave on the surface of the scatterer. It is shown that the use of quadrature formulas based on number-theoretic grids allows you to reduce the number of calculations for the approximate calculation of integrals, when solving the integral equation and when calculating the scattered acoustic pressure in near field. This method is compared with the calculation of integrals by the simple cell method, which has the same order of accuracy. The time of solving the problem is compared with the calculation of pressure in the vicinity of the ellipsoid based on the solution of an integral equation by two methods for calculating integrals.

Keywords: diffraction, sound waves, linear integral equations, quadrature formulas, periodization, Smolyak grids, parallelepiped grids.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2022, "Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction by elastic bodies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 206–226.

1. Введение

Многие задачи акустики эффективно могут быть решены методом граничных интегральных уравнений [1], основанный на интегральном представлении излучаемого или рассеянного

звукового поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца, которая предполагает определение акустического поля вне рассеивателя (излучателя) по известным характеристикам поля на поверхности объекта в виде интеграла по этой поверхности. Представление рассеянной звуковой волны в форме Кирхгофа-Гельмгольца приводит к необходимости приближенного решения интегральных уравнений относительно потенциала скорости или смещения частиц жидкости в рассеянном поле.

Во многих источниках такой подход называют методом граничных интегральных уравнений или методом граничных элементов (ВЕМ, МГЭ). Он активно используется исследователями для решения задач о рассеянии звука различными объектами: с идеальной поверхностью, жидкими, упругими [2–6].

В монографии Шендерова [7] изложены принципы использования интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции звука, представлено решение некоторых задач.

Численная реализация метода граничных интегральных уравнений имеет ряд ограничений. Одно из них связано с обеспечением требуемой точности приближенного решения интегрального уравнения. При дискретизации интегрального уравнения для получения удовлетворительной точности возникает необходимость разбиения поверхности, по которой осуществляется интегрирование, на интервалы длиной не более одной десятой длины звуковой волны. Это ограничивает волновые размеры тела, так как порядок системы алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации, не должен быть слишком большим для возможности практических вычислений. Таким образом, возникает проблема построения сетки со сравнительно небольшим числом узлов, чтобы решение задачи с требуемой точностью было пригодным в широком диапазоне волновых размеров тела.

Вторая проблема связана с тем, что использование функций источника приводит к тому, что подынтегральные функции часто имеют особенности и для вычисления таких интегралов приходится использовать специальные приемы.

В работе авторов [8] на основе решения эталонной задачи дифракции сферической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере проведен сравнительный анализ решений интегральных уравнений с помощью классических формул численного интегрирования и формул, построенных на теоретико-числовых сетках. В данной работе поставлена задача оценки эффективности использования формул численного интегрирования, построенных на теоретико-числовых сетках, при решении задачи дифракции звука на упругом теле – эллипсоиде.

В данной работе теоретико-числовые сетки будут применяться при решении классической задачи численного интегрирования при реализации метода граничных интегральных уравнений в задачах акустики. В работе будут применяться параллелепипедальные сетки (см. [9]), требующие периодизации и учитывающие класс гладкости при интегрировании периодических функций из класса Коробова E_s^α .

Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольтерра описаны, как с применением теоретико-числовых методов [10], [11], так и с применением других методов [12, 13, 14].

Математические вопросы построения интерполяционных многочленов с использованием, как теоретико-числовых, так и других методов описаны в работах [10, 15, 16, 17, 20].

2. Постановка задачи

Рассмотрим упругий эллипсоид Ω с полуосями a, b, c , находящийся в безграничном пространстве Ω_0 , заполненным идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . Будем считать, что материал эллипсоида – однородный изотропный, имеющий плотность ρ и модули упругости Ламе λ, μ . Пусть из внешнего пространства на тело падает плоская звуковая волна с потенциалом смещения ψ_p

$$\psi_p = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; $\mathbf{k}$ – волновой вектор, определяющий направление распространения и частоту падающей волны; $k = |\mathbf{k}| = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число в окружающей жидкости; ω – круговая частота; λ_0 – длина волны; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; t – время.

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ у ψ_p и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания предполагаются стационарными).

Потенциал ψ_p , определяет вектор смещения $\mathbf{u}_p$ и давление p_p в падающей волне

$$\mathbf{u}_p = \text{grad} \psi_p, \quad p_p = \rho_0 \omega^2 \psi_p. \quad (2)$$

Геометрия задачи представлена на рис. 1.

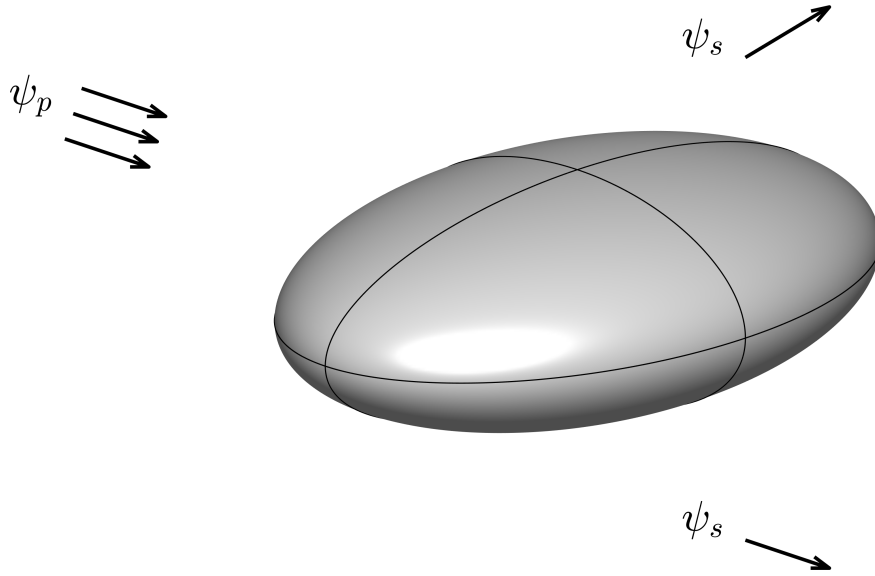


Рис 1: Геометрия задачи

Требуется определить акустическое поле, рассеянное эллипсоидом Ω .

3. Математическая постановка задачи дифракции

Введем декартову систему координат

$$x_1, x_2, x_3. \quad (3)$$

с началом O в центре эллипсоида так, чтобы полуоси эллипсоида a, b, c были направлены по осям Ox_1, Ox_2 и Ox_3 , соответственно. Тогда уравнение поверхности эллипсоида $\Gamma(\Omega)$ может быть записано в каноническом виде

$$\Gamma: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Единичные базисные векторы системы координат будем обозначать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Также будем использовать сферическую систему координат r, θ, φ , связанную с x_1, x_2, x_3 соотношениями

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Будем задавать направление вектора $\mathbf{k}$ углами θ_0, φ_0 . Тогда в базисе $\mathbf{e}_k$ он может быть представлен в виде $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$.

Для решения задачи дифракции надо найти решения уравнений движения жидкости в Ω_0 и упругой среды в Ω , удовлетворяющих граничным условиям на поверхности эллипсоида и условиям излучения звука на бесконечности [23].

Решение проводится в рамках моделей движения идеальной жидкости [21] и линейной теории упругости [22].

В результате отражения падающей звуковой волны от упругого тела формируется отраженное акустическое поле, а в теле Ω – упругие колебания. Обозначим потенциал смещения в рассеянном поле ψ_s , а вектор смещения в Ω – $\mathbf{u}$. При этом смещение частиц жидкости в Ω_0 будет выражаться соотношением $u_0 = \text{grad } \psi_0$, а акустическое давление $p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0$ (подобно (2)), где $\psi_0 = \psi_p + \psi_s$.

Таким образом, искомыми функциями в задаче дифракции являются: потенциал смещения в рассеянном поле ψ_s в области Ω_0 и смещение частиц упругой среды $\mathbf{u}$ в Ω .

С учетом гармонической зависимости ψ_s и $\mathbf{u}$ от времени в отношении ψ_s надо решать уравнение Гельмгольца [21]

$$\Delta \psi_s + k^2 \psi_s = 0. \quad (5)$$

Смещение $\mathbf{u}$ должно удовлетворять уравнениям движения упругой среды в напряжениях [22]

$$\text{Div } \sigma + \rho \mathbf{F} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad (6)$$

где $\text{Div } \sigma$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ ; $\mathbf{F}$ – вектор объемных сил, который обычно в задачах дифракции равен 0.

Тензор напряжений в случае изотропной среды выражается через $\mathbf{u}$ таким законом Гука

$$\sigma = \lambda \text{div } \mathbf{u} \delta + 2\mu \varepsilon, \quad (7)$$

где δ – тензор Кронекера; ε – тензор малых деформаций Коши, компоненты которого в общем случае являются линейными комбинациями компонентов вектора $\mathbf{u}$ и их первых производных.

В частности, в декартовой системе координат (3) компоненты тензора малых деформаций определяются соотношениями

$$\varepsilon_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right). \quad (8)$$

На поверхности эллипсоида Γ должны выполняться условия сопряжения движений частиц жидкости и упругого материала, которые состоят в равенстве нормальных смещений и напряжений и отсутствии касательных напряжений в упругой среде [21]

$$\mathbf{r} \in \Gamma : u_n = \frac{\partial \psi_0}{\partial n}; \quad \sigma_{nn} = -\rho_0 \omega^2 \psi_0; \quad \sigma_{n\tau_1} = 0; \quad \sigma_{n\tau_2} = 0, \quad (9)$$

где u_n, σ_{nn} – проекции векторов $\mathbf{u}$ и вектора напряжений $\mathbf{p} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к Γ в точке $\mathbf{r}$; $\sigma_{n\tau_1}, \sigma_{n\tau_2}$ – проекции $\mathbf{p}$ на два неколлинеарных вектора в касательной плоскости к Γ в точке $\mathbf{r}$.

Условия излучения на бесконечности для потенциала рассеянной звуковой волны ψ_s могут быть представлены в виде [23]

$$\text{при } r \rightarrow \infty : \quad \psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial r} - ik \psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Таким образом, математически задача состоит в необходимости найти решения уравнений (5), (6), удовлетворяющих граничным условиям (9) и условиям излучения на бесконечности (10).

Уравнения (6) можно свести к уравнениям, содержащим в качестве неизвестных только компоненты смещения $\mathbf{u}$. Для изотропного однородного линейно-упругого тела, используя (7), (8), можно получить

$$(\text{Div } \sigma)_k = \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_k} = \lambda \delta_{km} \frac{\partial \text{div } \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right). \quad (11)$$

Подставляя выражения этих частных производных в уравнения (6), получим

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \text{div } \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mu (\Delta u)_k + \rho (F_k + \omega^2 u_k) = 0. \quad (12)$$

Полученные уравнения движения в перемещениях, содержащие три функции u_j , называются дифференциальными уравнениями Ламе. Система уравнений (11) эквивалентна дифференциальному уравнению в векторной форме

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho (\mathbf{F} - \omega^2 \mathbf{u}) = 0, \quad (13)$$

которое получится из уравнений (12), если каждое из них умножить на $\mathbf{e}_k$, а затем просуммировать по индексу k , учитывая, что $\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

4. Решение задачи методом граничных интегральных уравнений

Согласно методу интегральных уравнений [7, 8] рассеянное телом акустическое поле записывается в виде

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[\psi_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - \frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right] d\Gamma, \quad (14)$$

где $\mathbf{x}$ – точка наблюдения, имеющая координаты (x_1, x_2, x_3) ; $\boldsymbol{\xi}$ – точка на поверхности тела Γ с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ; Ψ – функция Грина для свободного пространства, удовлетворяющая неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -4\pi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}); \quad (15)$$

$d\Gamma = d\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ – элемент поверхности в окрестности $\boldsymbol{\xi}$; $\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \delta(d)$ – дельта-функция; $d = |\mathbf{d}|$; $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3)$; $(d = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2})$.

Дифференцирование и интегрирование в формуле (14) производится по переменной $\boldsymbol{\xi}$. Заметим, выражение $\psi_0(\mathbf{x})$ в (14) через значение потенциала ψ_0 и его нормальной производной на границе Γ получается с учетом выполнения условий излучения на бесконечности (10).

Решение (15) известно, оно приведено, например, в [7]

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{\exp(ikd)}{d}, \quad (16)$$

При этом

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} = \text{grad } \Psi \cdot \mathbf{n}, \quad \text{grad } \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{(ikd - 1) \exp(ikd)}{d^3} \mathbf{d}.$$

Представим первые два граничных условия из (9) в виде

$$\left. \frac{\partial \psi_s}{\partial n} \right|_{\Gamma} = u_n - \frac{\partial \psi_p}{\partial n}, \quad \psi_s|_{\Gamma} = -\psi_p - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \sigma_{nn}. \quad (17)$$

Будем рассматривать точки $\mathbf{x} \in \Gamma$, тогда из уравнения (14) с учетом (17) можно получить

$$\frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}) + \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma} \sigma_{nn}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} u_n(\boldsymbol{\xi}) \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_p(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) - \int_{\Gamma} \psi_p(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}). \quad (18)$$

Здесь интегралы, содержащие известные функции перенесены в правую часть. В качестве неизвестных функций выступают $\psi_s(\mathbf{x})$ и компоненты вектора смещения в упругом материале $u_k(\mathbf{x})$ на поверхности Γ , через которые выражаются и $u_n(\boldsymbol{\xi})$, и $\sigma_{nn}(\boldsymbol{\xi})$.

Для нахождения компонентов $u_k(\mathbf{x})$ используем фундаментальное решение для уравнения движения упругой среды в форме (13) или (12).

Фундаментальное решение уравнения (13) для единичной сосредоточенной массовой силы $\mathbf{F}_m = \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_m$, меняющейся по гармоническому закону $\exp(-i\omega t)$, т.е. решение уравнения

$$[\mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot] U_m(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + \rho \omega^2 U_m(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_m,$$

определяется выражением [26, 22] для компонентов вектора смещения U_m

$$U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[\delta_{mn} k_2 \frac{e^{ik_2 d}}{d} - \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \left(\frac{e^{ik_1 d}}{d} - \frac{e^{ik_2 d}}{d} \right) \right], \quad (19)$$

где $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$; $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольных и поперечных волн в упругой среде соответственно.

В силу линейности модели приложенные в точке сосредоточенные нагрузки действуют независимо. Тогда для перемещения и напряжения соответствующих фундаментальному решению можно написать

$$\mathbf{U}_m = U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{P}_m = P_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_n, \quad (20)$$

где $U_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ и $P_{mn}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ представляют собой перемещения и напряжения, возникающие в точке $\mathbf{x}$ в n -ом направлении и соответствующие единичной сосредоточенной нагрузке, действующей в m -ом направлении (направлении единичного вектора $\mathbf{e}_m$) и приложенной в точке $\boldsymbol{\xi}$ [26, 25].

Найти компоненты фундаментального вектора напряжений P_{ik} можно, подставив выражение (19) для U_{km} в формулу для компонентов напряжения $\mathbf{p}$, приложенного к площадке с нормалью $\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}_k$

$$p_k = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} + u_{j,k} n_j \right) + \lambda u_{j,j} n_k.$$

Учитывая (20) можем записать

$$\mathbf{P}_i = \mu \left(\frac{\partial U_{ki}}{\partial n} \mathbf{e}_k + U_{kj,i} n_j \mathbf{e}_k \right) + \lambda U_{kj,j} n_i \mathbf{e}_k = \left[\mu \left(\frac{\partial U_{ki}}{\partial n} + U_{kj,i} n_j \right) + \lambda U_{kj,j} n_i \right] \mathbf{e}_k.$$

Последнее выражение, стоящее в квадратных скобках в соответствии с (20) задает компоненты фундаментального вектора напряжений P_{ik} .

Решение уравнения (13) на основе формулы Сомильяны [27], построенной на основе тождества Бетти, с использованием фундаментального решения можно представить в виде

$$u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[p_i(\boldsymbol{\xi}) U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - P_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) u_i(\boldsymbol{\xi}) \right] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Omega} \rho F_i(\boldsymbol{\xi}) U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d\Omega(\boldsymbol{\xi}), \quad (21)$$

где $p_i(\boldsymbol{\xi})$ – компоненты вектора напряжений $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ на площадке $d\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ с внешней нормалью $\mathbf{n}$ в точке $\boldsymbol{\xi}$.

Если использовать (21) для точек границы Γ с учетом того, что внешние объемные силы отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$), то получим интегральное уравнение относительно неизвестных компонент смещений и напряжений u_k, p_i на границе Γ

$$\frac{1}{2}u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left(p_i(\boldsymbol{\xi})U_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - P_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})u_i(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}). \quad (22)$$

Для проведения дальнейших рассуждений условимся, что вектор напряжений в упругой среде на площадке границы Γ с нормалью $\mathbf{n}$ записан через компоненты следующим образом $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Аналогично компоненты вектора смещения частиц упругой среды обозначим $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Единичные касательные векторы и вектор нормали к поверхности Γ в каждой точке границы обозначим соответственно $\boldsymbol{\tau}_k = (\tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3})$ ($k = 1, 2$) и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, при этом будем вводить $\boldsymbol{\tau}_k$ так, что тройка векторов $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$ является правой.

Используем введенные обозначения для представления компонент граничных условий (9) на поверхности тела

$$\begin{aligned} u_{0n} &= \text{grad}(\psi_p + \psi_s) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial(\psi_p + \psi_s)}{\partial n}, \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 (\psi_p + \psi_s), \\ u_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3, \quad p_n = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3, \\ p_{\tau_1} &= \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = p_1 \tau_{11} + p_2 \tau_{12} + p_3 \tau_{13}, \quad p_{\tau_2} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = p_1 \tau_{21} + p_2 \tau_{22} + p_3 \tau_{23}. \end{aligned}$$

Тогда сами граничные условия (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s}{\partial n} - (u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3) &= -\frac{\partial \psi_p}{\partial n}, \\ \psi_s - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} (p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3) &= -\psi_p, \\ p_1 \tau_{11} + p_2 \tau_{21} + p_3 \tau_{31} &= 0, \quad p_1 \tau_{21} + p_2 \tau_{22} + p_3 \tau_{32} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь известные величины перенесены в правую часть.

Таким образом, интегральная формулировка поставленной задачи выглядит следующим образом: требуется найти решение уравнений (18), (22) при соблюдении граничных условий (23).

5. Дискретизация интегральных соотношений

Для численного решения полученных интегральных соотношений проведем их дискретизацию. Поверхность эллипсоида Γ разобьем на M достаточно малых участков Γ_m так, чтобы $\Gamma = \bigcup_m \Gamma_m$, а изменение неизвестных функций $\psi_s, \mathbf{u}, \mathbf{p}$ в пределах m -го участка было столь незначительно, чтобы можно было бы считать постоянными на участке

$$\psi_s(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \psi_s(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} \approx \frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x})|_{\Gamma_m} \approx \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}_m),$$

где $\mathbf{x}_m$ – некоторая фиксированная точка участка Γ_m , близкая к его геометрическому центру.

Таким образом, полагается, что $\psi_s, \frac{\partial \psi_s}{\partial n}, u_1, u_2, u_3, p_1, p_2, p_3$ являются постоянными в

пределах каждого участка Γ_m . При введенных допущениях уравнение (18) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{\rho_0\omega^2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} p_n(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m) + \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} u_n(\xi_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m) = \\ = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_p(\xi_m)}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m) - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_p(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m). \end{aligned} \quad (24)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_{1mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_1(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m), & P_{2mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_2(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m), \\ P_{3mk}^{<1>} &= \frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_m} n_3(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m), \\ U_{1mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_1(\xi_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m), & U_{2mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_2(\xi_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m), \\ U_{3mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} n_3(\xi_m) \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m), \\ G_{mk}^{<1>} &= \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_p(\xi_m)}{\partial n} \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m) - \int_{\Gamma_m} \psi_p(\xi_m) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_k; \xi_m)}{\partial n} d\Gamma(\xi_m). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда с учетом $\xi_k = \mathbf{x}_k$ (24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_s(\mathbf{x}_k) + \sum_{m=1}^M P_{1mk}^{<1>} p_1(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M P_{2mk}^{<1>} p_2(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M P_{3mk}^{<1>} p_3(\mathbf{x}_m) + \\ + \sum_{m=1}^M U_{1mk}^{<1>} u_1(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M U_{2mk}^{<1>} u_2(\mathbf{x}_m) + \sum_{m=1}^M U_{3mk}^{<1>} u_3(\mathbf{x}_m) = \sum_{m=1}^M G_{mk}^{<1>}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично, дискретную форму придадим уравнению (22)

$$\frac{1}{2}u_j(\mathbf{x}_k) = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \left(p_i(\xi_m) U_{ij}(\mathbf{x}_k; \xi_m) - P_{ij}(\mathbf{x}_k; \xi_m) u_i(\xi_m) \right) d\Gamma(\xi_m). \quad (27)$$

Обозначим

$$(U_{mk}^{<2>})_{ij} = \int_{\Gamma_m} U_{ij}(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m), \quad (\bar{P}_{mk}^{<2>})_{ij} = - \int_{\Gamma_m} P_{ij}(\mathbf{x}_k; \xi_m) d\Gamma(\xi_m). \quad (28)$$

Тогда (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u_1(\xi_k) &= \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{11} \right) p_1(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{21} \right) p_2(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{31} \right) p_3(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{11} \right) u_1(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{21} \right) u_2(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{31} \right) u_3(\xi_m), \\
\frac{1}{2}u_2(\xi_k) &= \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{12} \right) p_1(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{22} \right) p_2(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{32} \right) p_3(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{12} \right) u_1(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{22} \right) u_2(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{32} \right) u_3(\xi_m) \\
\frac{1}{2}u_3(\xi_k) &= \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{13} \right) p_1(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{23} \right) p_2(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (U_{mk}^{<2>})_{33} \right) p_3(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{13} \right) u_1(\xi_m) + \\
&+ \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{23} \right) u_2(\xi_m) + \left(\sum_{m=1}^M (P_{mk}^{<2>})_{33} \right) u_3(\xi_m).
\end{aligned} \tag{29}$$

Дискретный аналог граничных условий (23) представим в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\xi_m) - (u_1(\xi_m)n_1(\xi_m) + u_2(\xi_m)n_2(\xi_m) + u_3(\xi_m)n_3(\xi_m)) &= -\frac{\partial \psi_p}{\partial n}(\xi_m), \\
\psi_s(\xi_m) - \frac{1}{\rho\omega^2}(p_1(\xi_m)n_1(\xi_m) + p_2(\xi_m)n_2(\xi_m) + p_3(\xi_m)n_3(\xi_m)) &= -\psi_p(\xi_m), \\
p_1(\xi_m)\tau_{11}(\xi_m) + p_2(\xi_m)\tau_{21}(\xi_m) + p_3(\xi_m)\tau_{31}(\xi_m) &= 0, \\
p_1(\xi_m)\tau_{12}(\xi_m) + p_2(\xi_m)\tau_{22}(\xi_m) + p_3(\xi_m)\tau_{32}(\xi_m) &= 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

где $\xi_m \in \Gamma_m$, $m = \overline{1, M}$.

Таким образом, если положить, что граница Γ разбита на M граничных элементов и неизвестные функции постоянны на каждом элементе, то для нахождения $8 \times M$ неизвестных: $\psi_s(\mathbf{x}_m)$, $\frac{\partial \psi_s}{\partial n}(\mathbf{x}_m)$, $u_1(\mathbf{x}_m)$, $u_2(\mathbf{x}_m)$, $u_3(\mathbf{x}_m)$, $p_1(\mathbf{x}_m)$, $p_2(\mathbf{x}_m)$, $p_3(\mathbf{x}_m)$ надо решать систему $8 \times M$ линейных алгебраических уравнений (26), (29), (30).

Решение полученной системы позволяет найти значение искомой величины ψ_s в любой точке области Ω_0 по формуле

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \psi_p(\xi)}{\partial n} - u_n(\xi) \right) \Psi(\mathbf{x}; \xi) d\Gamma(\xi) - \int_{\Gamma} \left(\psi_p(\xi) + \frac{p_n(\xi)}{\rho_0\omega^2} \right) \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}; \xi)}{\partial n} d\Gamma(\xi). \tag{31}$$

где $\mathbf{x}$ – произвольная внутренняя точка рассматриваемой области Ω_0 ; $\xi \in \Gamma$.

6. О вычислении интегралов

Вычисление интегралов (25), (28) выполнялось методом ячеек [24] с использованием построения сетки малых элементов поверхности Γ на основе параметрического уравнения по-

поверхности эллипсоида [28]

$$\Gamma: \quad x = a \sin \eta \cos \zeta, \quad y = b \sin \eta \sin \zeta, \quad z = c \cos \eta, \quad (32)$$

где $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \zeta < 2\pi$.

Построение сетки предполагает равномерное разбиения интервалов $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$ изменения параметров η и ζ с фиксированным шагом h таким, что $K = \pi/h$ – целое. Участок Γ_m поверхности Γ определяется двумя индексами (i, j) ($i = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, 2K}$) и обозначается еще как Γ_{ij} так, что $m = 2 \times (i - 1) \times K + j$. При этом сам участок Γ_m определяется диапазоном изменения параметров $(\eta, \zeta) \in [(i-1)h, ih] \times [(j-1)h, jh]$, а число участков равно $M = 2K \times K$.

В качестве точки $\mathbf{x}_m$, характеризующей участок Γ_m выбирается точка, определяемая параметрами $\eta_m = h(2i - 1)/2$, $\zeta_m = h(2j - 1)/2$, т. е.

$$\mathbf{x}_m: \quad x_m = a \sin \eta_m \cos \zeta_m, \quad y_m = b \sin \eta_m \sin \zeta_m, \quad z_m = c \cos \eta_m.$$

Общий вид интегралов вида (25) или (28) можно представить в форме

$$I_{mk} = \int_{\Gamma_m} f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) d\Gamma(\mathbf{x}_m), \quad (33)$$

где переменной интегрирования является точка $\mathbf{x}_m$.

В функцию $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m)$ входят функции источников, содержащие слагаемые вида T/d , где $d = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m|$. Поэтому в интегралах вида I_{mm} (т. е. при $k = m$) подынтегральная функция имеет особенность вида $1/0$.

При $k \neq m$ малый размер участка Γ_m позволяет вычислять интеграл I_{mk} , полагая подынтегральную функцию постоянной в пределах участка.

Приближенное значение площади участка представляется в виде

$$\int_{\Gamma_m} d\Gamma(\mathbf{x}_m) \approx \sqrt{g(\eta_i, \zeta_j)} h^2,$$

где $g(\eta_i, \zeta_j)$ – определитель матрицы первой фундаментальной формы поверхности (32) в точке $\mathbf{x}_m = (\eta_i, \zeta_j)$. Тогда приближенное значение интеграла (33) при $k \neq m$ полагается равным

$$I_{mk} \approx f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) \sqrt{g(\eta_i, \zeta_j)} h^2.$$

При вычислении интеграла I_{mm} (при $k \neq m$) использовался прием [7], основанный на его представлении в виде

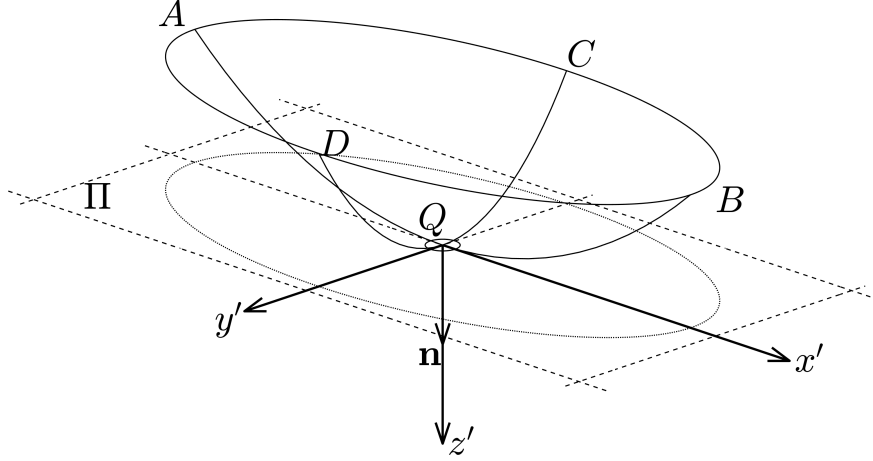
$$I_{mm} = \int_{\Gamma_m} \frac{1}{d} f_1(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (34)$$

где $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|$.

Согласно [7] для вычисления интеграла (34) в точке $\mathbf{x}_m$ строится касательная плоскость Π . По касательным к линиям двух главных кривизн поверхности Γ в плоскости Π вводятся координатные линии x' и y' вспомогательной локальной системы координат с началом в точке касания. Третья координата z' направляется по внешней нормали $\mathbf{n}$ в точке $\mathbf{x}_m$. Уравнение поверхности Γ в пределах участка Γ_m аппроксимируется параболоидом (см. рис. 2; точке $\mathbf{x}_m$ соответствует точка Q на рисунке)

$$z' = \frac{x'^2}{2R_1} + \frac{y'^2}{2R_2},$$

где R_1, R_2 – радиусы главных кривизн (кривизны дуг AQB, CQD).

Рис 2: Аппроксимация поверхности при вычислении интеграла I_{mm}

С координатами x' , y' связывается полярная система координат: $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$; $\varphi' = \arctan \frac{y'}{x'}$. Интеграл (34) записывается в полярных координатах ρ' φ'

$$I_{mm} \approx \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi', \quad (35)$$

где $f_2(\mathbf{x})$ – результат перевода функции $f_1(\mathbf{x})$ в локальную систему координат; $\rho' = l(\varphi')$ – проекция границы участка Γ_m на плоскость Π в полярных координатах локальной системы координат. Введем малый радиус $R = \min\{l(\varphi')\}/1000$ (см. окружность с центром в Q на рис. 2) и разобьем интеграл (35) на 2 слагаемых

$$I_{mm} = I_1 + I_2, \quad \text{где } I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \int_R^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'.$$

В силу малости R интеграл I_1 можно приближенно вычислить так

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi' \approx f_2(\mathbf{x}_m) \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\rho'} \rho' d\rho' d\varphi' = f_2(\mathbf{x}_m) \int_0^{2\pi} \int_0^R d\rho' d\varphi' = 2\pi R f_2(\mathbf{x}_m).$$

Возвращаясь к (35), получим

$$I_{mm} = 2\pi R f_2(\mathbf{x}_m) + \int_0^{2\pi} \int_R^{l(\varphi')} \frac{1}{d} f_2(\mathbf{x}) \rho' d\rho' d\varphi'. \quad (36)$$

Заметим, оставшийся интеграл I_2 уже не имеет особенности в подынтегральной функции.

7. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала смещения (31) вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на стандартном методе ячеек, описанный в предыдущем разделе;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коробова.

Рассмотрим один подход к построению квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коробова, впервые предложенные в работе [29].

В качестве базового соотношения вычисления двойных интегралов на основе параллелепедальных сеток рассматривается формула вычисления интеграла на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$

$$\int_0^1 \int_0^1 g(X, Y) dX dY = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{k}{N}\right) + R1_N(g), \quad (37)$$

где N – количество узлов параллелепедальной сетки, a – оптимальный коэффициент, подбираемый экспериментально. Наиболее качественные сетки получаются, если N равно некоторому числу Фибоначчи F_n , а $a = F_{n-1}$.

Простейшую периодизацию функции по одной переменной проведем с помощью приема, предложенного в работе [8]. Для этого введем вспомогательную функцию

$$f_2(X, Y) = \begin{cases} f_1(X, Y), & 0 \leq Y \leq 1 \\ f_1(X, 2 - Y), & 1 < Y \leq 2 \end{cases}, \quad 2 \int_0^1 \int_0^1 f_1(X, Y) dX dY = \int_0^1 \int_0^2 f_2(X, Y) dX dY.$$

На основе этого подхода, основанного на продолжении функции, по аналогии с интегралом (37) рассмотрим квадратурную формулу по растянутой параллелепедальной сетке

$$\int_0^1 \int_0^2 g(X, Y) dX dY = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R2_N(g). \quad (38)$$

Применяя к функции f_2 , получаем периодизированную по одной переменной квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1(X, Y) dX dY &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 f_2(X, Y) dX dY = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R2_N(f_2) = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right) + R2_N(f_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что на основе параметрического представления уравнения поверхности эллипсоида (32) интегралы из представления (31) могут быть записаны в виде (40)

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(\eta, \zeta) \sqrt{g(\eta, \zeta)} d\zeta d\eta, \quad (40)$$

где $g(\eta, \zeta) = \sin^2 \eta [(ab \cos \eta)^2 + (ac \sin \eta \sin \zeta)^2 + (bc \sin \eta \cos \zeta)^2]$ – определитель матрицы первой фундаментальной формы поверхности в точке (η, ζ) .

Сделаем замену переменных

$$X = \eta/\pi; \quad Y = \zeta/(2\pi); \quad \eta = \pi X; \quad \zeta = 2\pi Y; \quad d\eta = \pi dX; \quad d\zeta = 2\pi dY.$$

Тогда интеграл (40) можно представить в виде

$$I = 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(X, Y) dX dY, \quad (41)$$

где $G_1(X, Y) = G(\pi X, 2\pi Y) \sqrt{g(\pi X, 2\pi Y)}$.

По аналогии с $f_2(X, Y)$ введем вспомогательную функцию $G_2(X, Y)$

$$G_2(X, Y) = \begin{cases} G_1(X, Y), & 0 \leq Y \leq 1 \\ G_1(X, 2 - Y), & 1 < Y \leq 2 \end{cases}.$$

Заметим при таком задании $G_2(X, Y)$ ее вычисление при $Y > 1$ приводит к необходимости вычислять $G_1(X, 2 - Y)$ в тех точках, где последняя определена.

При втором методе вычисления интеграла (31) используется представление (40) и приближенное значение находится из соотношений

$$\begin{aligned} I = 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(X, Y) dX dY &\approx \frac{2\pi^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) = \\ &= \frac{2\pi^2}{N} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} G_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} G_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right). \quad (42) \end{aligned}$$

8. Численные исследования

При проведении численных исследований проводились расчеты амплитуды нормированного давления $p' = |\psi_0/\psi_p|$ в окрестности упругого эллипсоида.

Для свойств сред были выбраны значения:

$$\Omega : \quad \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1485 \text{ м/с};$$

$$\Omega_1 : \quad \rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 5.3 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 2.6 \times 10^{10} \text{ Па}.$$

Рассматривались две формы эллипсоида со значениями полуосей $a=1$, $b=2$, $c=3$ и $a=3$, $b=2$, $c=1$. При этом "характерный" размер эллипсоида $a_0 = (a + b + c)/3 = 2$.

Частота падающей волны была зафиксирована значением $ka_0 = 5$. Направление распространения волны ψ_p определялось изменением угла θ_0 при постоянном $\varphi_0 = 0$.

Расчеты p' проводились в двух плоских сечениях Π_1 и Π_2 сферической поверхности с центром в начале координат системы x_1, x_2, x_3 и радиусом $R = 3a_0$ (ближняя зона). Плоскость Π_1 выбрана так, чтобы она содержала волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}$ и начало координат (в рассматриваемых случаях она совпадает с координатной плоскостью $x_2 = 0$), а Π_2 повернута относительно Π_1 вокруг оси Ox_3 на $\pi/2$ и совпадает с координатной плоскостью $x_1 = 0$. Точки наблюдения/измерения давления p' фиксируются координатой (θ) на контуре наблюдения $r = R$, так что демонстрация изменения давления в рассеянной волне выполняется диаграммами распределения $p'(\theta)$.

В первой серии численных экспериментов определялись параметры M и N сеток разбиения поверхности Γ на участки Γ_m с тем, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления p' . Для этого решалась задача дифракции плоской звуковой волны на сфере (при $a=b=c$) и полученные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями такой задачи [30, 31]. Выяснилось, что при использовании арифметических операций и библиотечных функций MATLAB с использованием чисел с плавающей точкой типа double (спецификация IEEE 754) для обеспечения совпадения численных решений по формуле (31) с аналитическим

решением с точностью до 5 знаков при использовании метода, основанного на стандартном методе ячеек, требуется выбирать $M=4147200$ ($K=1440$), а при использовании квадратурной формулы (42) на основе параллелепедальной сетки Коробова – $N=3524578$ ($a=2178309$).

Заметим, узлы сетки формулы (42) в общем случае не совпадают с узлами стандартного метода ячеек даже при совпадающем числе узлов. Поэтому, при использовании формулы (42) выполняется билинейная интерполяция [24] предварительно вычисленных в точках $\mathbf{x}_m$ значений ψ_p , $\frac{\partial \psi_p}{\partial n}$, u_n , p_n для точек вида $\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right)$, $\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right)$.

Иллюстрация первой серии численных экспериментов представлена на рис. 3. Здесь и далее горизонтальное направление соответствует оси Ox_3 . Вертикальная ось рисунка соответствует координате x_1 . Пунктирная линия Γ в окрестности начала координат схематично показывает сечение поверхности упругого тела (4) (здесь, для шара, это – окружность; далее, для эллипсоида, – эллипсы). Окружность единичного радиуса соответствует $p' = 1$ показывает уровень амплитуды акустического давления в падающей волне на контуре наблюдения. Соотношение расстояний между пунктирными линиями на рисунке (между линией Γ и $p' = 1$) характеризует отношение реальных расстояний от поверхности тела до поверхности, на которой производится измерение давления.

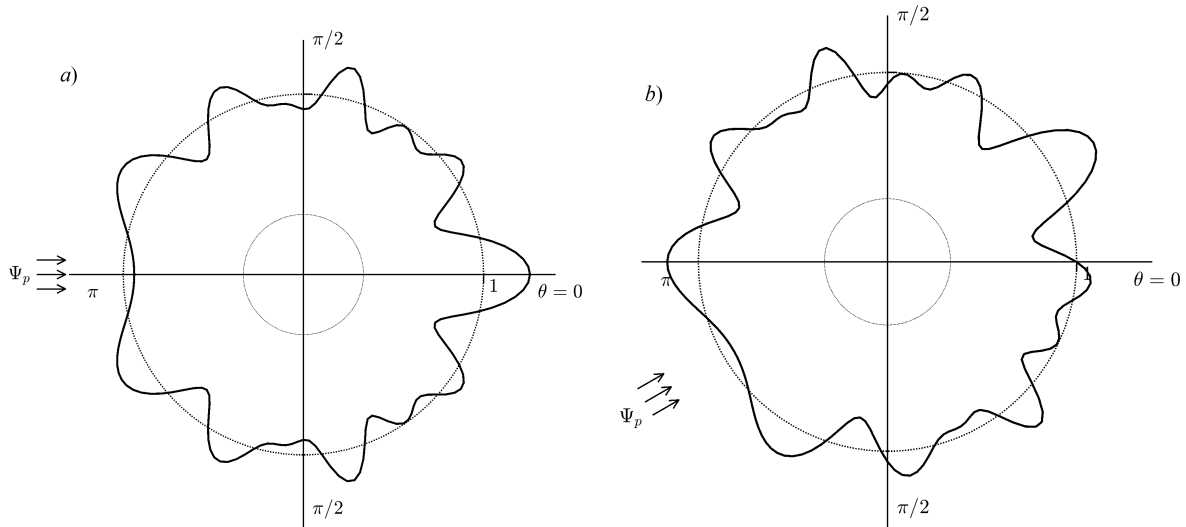


Рис 3: Распределение давления p' при $a = b = c = 2$

На каждом рисунке изображаются две диаграммы $p'(\theta)$: первая – основная (сплошной линией) – для эллипсоида; вторая – вспомогательная (штриховой линией) – для шара радиуса a_0 (для оценки влияния эллипсоидальной формы тела). Для шара (штриховая линия) представляются результаты аналитического решения, а сплошной линией строится диаграмма, полученная в результате вычисления интеграла (31). Заметим, что используемые параметры M , N обеспечивают совпадение значений p' , полученных двумя методами (А и В) вычисления интеграла (31), не менее, чем в трех знаках. Поэтому для численного решения строится одна сплошная линия.

Заметим, отношение числа точек $M/N \approx 1,177$ однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале $\theta \in [0, \pi]$ (в обеих полуплоскостях сечений Π_1 и Π_2) методом В – t_B по отношению к t_A составляет только 10-12%, поскольку при использовании метода В требуется интерполяция получаемых в точках $\mathbf{x}_m$ значений ψ_p , $\frac{\partial \psi_p}{\partial n}$, u_n , p_n .

На рис. 3 представлены результаты расчетов нормированного давления p' в первой серии численных экспериментов при найденных M , N . Рисунок 3.а) построен для случая $\theta_0 = 0$.

Рисунок 3.б) – для случая $\theta_0 = \pi/6$. Как видно, диаграммы, построенные пунктирной линией и сплошной совпадают в обоих случаях а), б). Это демонстрирует достаточную точность численного решения.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов нормированного давления p' во второй серии численных экспериментов. В этой серии рассматривалось рассеяние звука эллипсоидом с полуосями $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

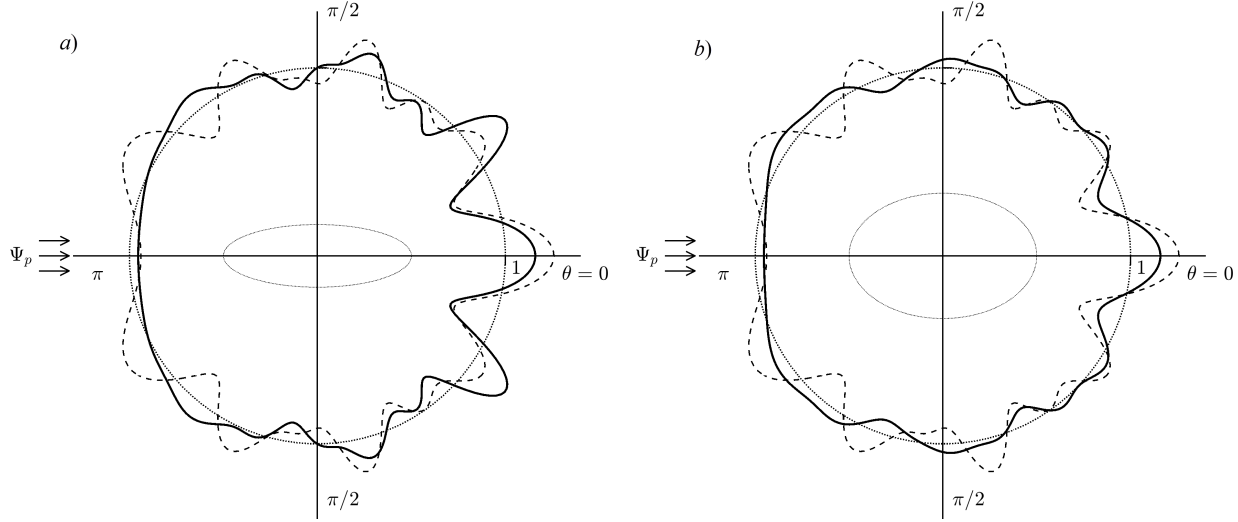


Рис 4: Распределение давления p' при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $\theta_0 = 0$

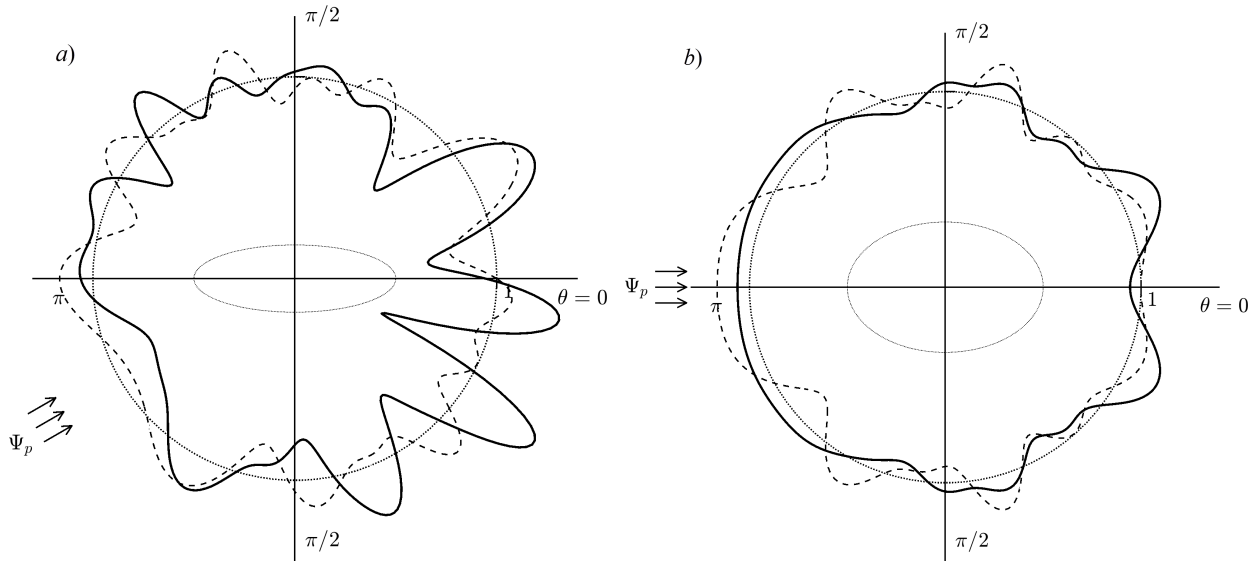


Рис 5: Распределение давления p' при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $\theta_0 = 30^\circ$

Здесь и далее вариант а) (левая половина рисунка) показывает диаграмму в сечении Π_1 , на правой половине (b) показана диаграмма в сечении Π_2 .

Несовпадение диаграмм, изображенных штриховой и сплошной линиями, показывает заметное влияние формы тела на распределение давления в ближнем поле рассеянной волны. Распространение волны ψ_p вдоль большей полуоси эллипсоида приводит к тому, что лепестки диаграммы распределения для такого эллипсоида оказываются менее выраженными, чем на диаграмме для шара (штриховая линия).

Рис. 4 показывает, что геометрическая симметрия тела вдоль направления распространения волны обеспечивает симметрию диаграмм в обоих сечениях Π_1, Π_2 .

Диаграммы на рисунке 5 построены для случая $\theta_0 = \pi/6$. в этом случае симметрия диаграммы наблюдается только в сечении Π_2 . А в сечении Π_1 диаграмма распределения $p'(\theta)$ обладает явно выраженной асимметрией относительно направления распространения падающей волны. В теневой области величина изменения амплитуды давления в суммарном поле в зависимости от θ имеет порядок амплитуды давления в падающей волне.

На рис. 6, 7 представлены результаты расчетов нормированного давления p' в третьей серии численных экспериментов. В этой серии рассматривалось рассеяние звука эллипсоидом с полуосями $a = 3, b = 2, c = 1$. По сути эллипсоид в этой серии такой же, что и во второй. Но при $\theta_0 = 0$ в этом случае падающая волна распространяется вдоль меньшей полуоси эллипсоида (по нормали к большей).

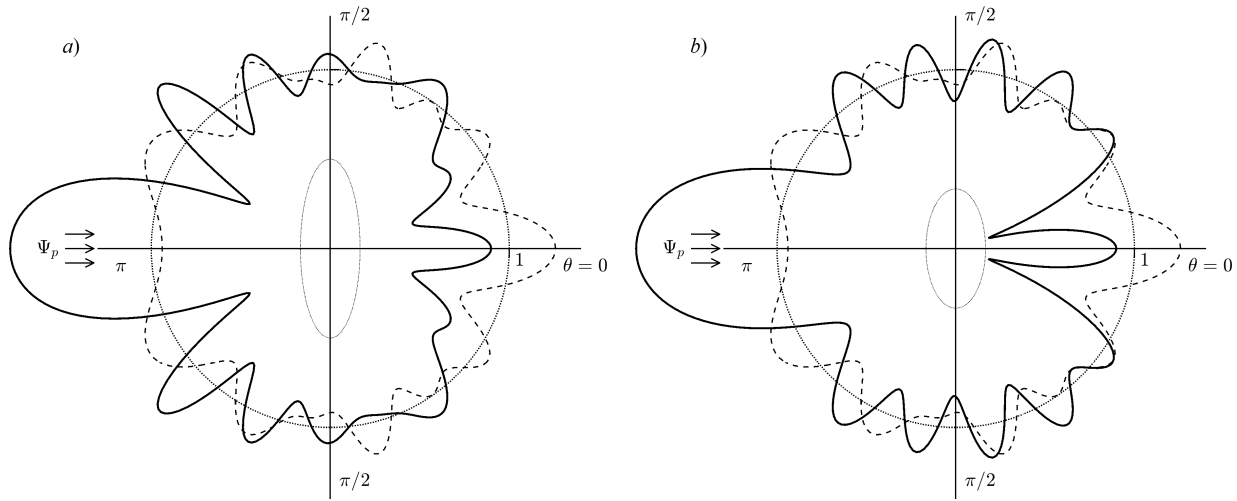


Рис 6: Распределение давления p' при $a = 3, b = 2, c = 1, \theta_0 = 0$

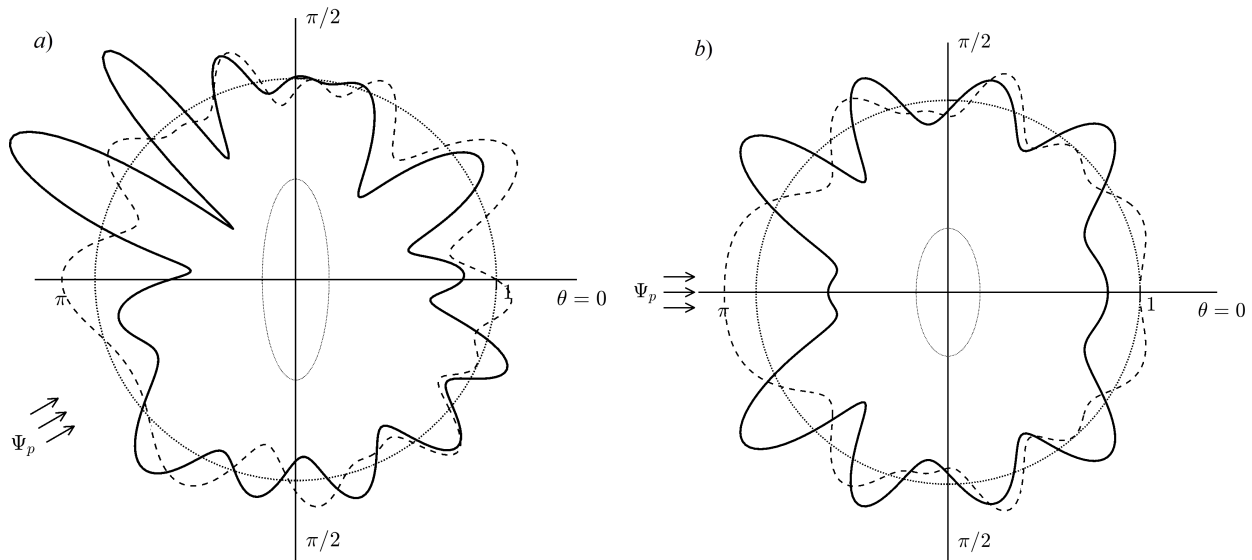


Рис 7: Распределение давления p' при $a = 3, b = 2, c = 1, \theta_0 = 30^\circ$

Диаграммы распределения на рис. 6 показывают существенное их отклонение от варианта для шара и соответствующих вариантов для случая $a = 1, b = 2, c = 3$ в направлениях $\theta = 0, \pi$.

Эти отклонения свидетельствуют об увеличении эффективной поверхности рассеяния при такой ориентации эллипсоида (таком направлении распространения падающей волны).

Диаграммы на рисунке 7 построены для случая $\theta_0 = \pi/6$. Интересно, что в этом случае в сечении Π_1 максимальное изменение амплитуды давления в суммарном поле (порядок амплитуды давления в падающей волне) в зависимости от θ наблюдается уже не в теневой области, а в освещенной.

9. Заключение

Сравнение двух схем приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении не превышающей 0.0001 по абсолютной величине при использовании схемы вычисления интегралов на основе параллелепипедальных сеток (по формулам (42)) можно получить сокращение времени вычислений интеграла от 10% до 12%.

Результаты данной работы можно развить применением Фурье интерполяции по тригонометрической системе функций и обобщенной Фурье интерполяции по сферическим гармоникам в узлах параллелепипедальной сетки. Также интерес представляет адаптация квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам для вычисления возникающих несобственных интегралов.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Колтон, Р. Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311 с.
2. S. Kirkup. The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey // Appl. Sci. 2019. V. 9. 1642.
3. S. M. Rao. An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
4. J. A. Fawcett. Scattering from a finite cylinder near an interface // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136, issue 2, pp. 485–493.
5. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz, B. Shanker. Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
6. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. Е. Л. Шендеров. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
8. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021. Том. 22, № 3. С. 368–382.
9. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176

10. Н. М. Коробов. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961, т. 60, с. 195–210.
11. Ю. Н. Шахов. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Докл. АН СССР, 1961, т. 136, вып. 6, с. 1302–1305.
12. M. Z. Gecmen, E. Celik. Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials. // Math Meth Appl Sci., 2021, т. 44, с. 11166–11173.
13. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al. Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces // Adv Differ Equ, 2021, 358 (2021).
14. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
15. В. А. Быковский. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Докл. АН СССР, 1988, 302:1, с. 11–13.
16. Y. Kolomoitsev, J. Prestin. Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators // Journal of Approximation Theory, 2021, т. 270, 105631.
17. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
18. Н. Н. Добровольский. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007, т. 8, вып. 1, с. 110–152.
19. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
20. Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева, Н. В. Зайцева. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, т. 5. Вып. 1. с. 122–143.
21. М. А. Исакович. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
22. В. Новацкий. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. Е. Скучик. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
24. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
25. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
26. П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
27. В. Д. Купрадзе. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 473 с.
28. Г. А. Корн, Т. М. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
29. Н. М. Коробов. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

30. J. J. Faran. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. т. 23. № 4. P. 405–418.
31. L. Flax, G. C. Gaunaurd, H. Überall. Theory of resonance scattering // Physical Acoustics, edited by Mason W.P. and Thurson R.N. New York: Academic, 1981. т. 15. P. 191–294.

REFERENCES

1. D. Colton and R. Kress, 1983, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York, Wiley-Interscience.
2. S. Kirkup, 2019, “The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey”, *Appl. Sci.*, vol. 9. 1642.
3. S. M. Rao, 2011, “An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
4. J. A. Fawcett, 2014, “Scattering from a finite cylinder near an interface”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 136, issue 2, pp. 485–493.
5. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz and B. Shanker, 2020, “Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
6. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, 1984 *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Berlin, Springer-Verlag.
7. E. L. Shenderov, 1989, *Sound emission and scattering, [Izluchenie i rasseianie zvuka]*, Leningrad, Shipbuilding.
8. N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov and N. V. Larin, 2021, “About application of number-theoretic grids in problems of acoustics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.
9. N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.
10. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, “On classical number-theoretic nets”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
11. N. M. Korobov, 1961, “Application of number-theoretical sieves to integral equations and interpolation formulas”, *Collection of articles. To the 60th anniversary of academician Mikhail Alekseevich Lavrent'ev, Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 60, pp. 195–210.
12. Yu. N. Shakhov, 1961, “The approximate solution of Volterra equations of the second kind by the method of iterations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 136, issue 6, pp. 1302–1305.
13. M. Z. Gecmen and E. Celik, 2021, “Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials”, *Math Meth Appl Sci.*, vol. 44, pp. 11166–11173.
14. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al., 2021, “Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces”, *Adv Differ Equ*, 358 (2021).

15. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan and S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, 9, 1193.
16. V. A. Bykovskii, 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integral lattices”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 302:1, pp. 11–13.
17. Yu. Kolomoitsev and J. Prestin, 2021, “Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 270, 105631.
18. S. C. Buranay, M. A. Ozarslan and S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, vol. 9, 1193.
19. N. N. Dobrovol’skii, 2007, “Discrepancy of two-dimensional Smolyak grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, no. 1, pp. 110–152.
20. N. M. Korobov, 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]*, 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
21. N. M. Dobrovol’skii, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva and N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation” [Mnogomernaya teoretiko-chislovaya Fur’e interpol’yaciya], *Chebyshevskii sbornik*, vol 5, no 1, pp. 122–143
22. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics [Obshchaya akustika]*, Moscow, Nauka.
23. W. Nowacki, 1963, *Dynamics of elastic systems*, New York, Wiley.
24. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
25. N. N. Kalitkin, 1978, *Numerical methods [Chislennye metody]*, Moscow, Nauka.
26. P. M. Morse and H. Feshbach, 1953, *Methods of Mathematical Physics*, New York, McGraw-Hill.
27. P. K. Banerjee and R. Butterfield, 1981, *Boundary element methods in engineering science*, New York, McGraw-Hill.
28. V. D. Kupradze, 1965, *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Israel Program for Scientific Translations.
29. G. A. Corn and T. M. Corn, 2000, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York, Dover Publications.
30. N. M. Korobov, 1959, “Calculation of multiple integrals by the method of optimal coefficients” [Vychislenie kratnykh integralov metodom optimalnykh koeffitcientov], *Vestn. Moscow university*, no. 4, pp. 19–25.
31. J. J. Faran, 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no.4, pp. 405–418.
32. L. Flax, G. C. Gaunaurd and H. Überall, 1981, “Theory of resonance scattering”, *Physical Acoustics, edited by Mason W.P. and Thurson R.N.*, New York, Academic, vol. 15, pp. 191–294.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 004.8, 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-227-240

Распознавание аномалий неизвестного заранее типа

А. О. Иванов, Г. В. Носовский, В. А. Кибкало, М. А. Никулин, Ф. Ю. Попеленский,
Д. А. Федосеев, И. В. Грибушин, В. В. Злобин, С. С. Кузин, И. Л. Мазуренко

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Носовский Глеб Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: gleb_nosovskiy@mail.ru

Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Никулин Михаил Александрович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: nikmihale@gmail.com

Попеленский Федор Юрьевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Федосеев Денис Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: denfedex@yandex.ru

Грибушин Иван Владимирович (писать ему) — ведущий инженер, ООО «Техкомпания Хуавей» (г. Москва).

e-mail: ivangribushin@yandex.ru

Злобин Валерий Валерьевич — ведущий инженер ключевых проектов, ООО «Техкомпания Хуавей» (г. Москва).

e-mail: hello.valera@gmail.com

Кузин Сергей Сергеевич — ведущий инженер, ООО «Техкомпания Хуавей» (г. Москва).

e-mail: serkuz23@ya.ru

Мазуренко Иван Леонидович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; заведующий лабораторией интеллектуальных систем и науки о данных HUAWEI, ООО «Техкомпания Хуавей» (г. Москва).

e-mail: ivan@mazurenko.ru

Аннотация

В работе предложена модификация метода PaDiM детекции аномалий, сопоставляющему изображению вектор и вычисляющему расстояние Махаланобиса от такого вектора до распределения векторов обучающего множества. Выделяется подмножество тех координатных осей векторов, распределение вдоль которых наименее близко к нормальному в сравнении с остальными по выбранному статистическому критерию. Применение к этим координатам векторов процедуры выпрямления (униформизации) перед вычислением расстояния Махаланобиса повышает значение ROCAUC метода PaDiM.

Ключевые слова: детекция аномалий, нормальное распределение, униформизация.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. О. Иванов, Г. В. Носовский, В. А. Кибкало. Распознавание аномалий неизвестного заранее типа // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 227–240.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 004.8, 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-227-240

Recognition of anomalies of an a priori unknown type

A. O. Ivanov, G. V. Nosovskiy, V. A. Kibkalo, M. A. Nikulin, F. Yu. Popelensky, D. A. Fedoseev,
I. V. Gribushin, V. V. Zlobin, S. S. Kuzin, I. L. Mazurenko

Ivanov Alexander Olegovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Nosovsky Gleb Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: gleb_nosovskiy@mail.ru

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Nikulin Mikhail Alexandrovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: nikmihale@gmail.com

Popelensky Fyodor Yurievich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Fedoseev Denis Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: denfedex@yandex.ru

Gribushin Ivan Vladimirovich — lead engineer, LLC «Huawei Tech Company» (Moscow).

e-mail: ivangribushin@yandex.ru

Valery Valerievich Zlobin — leading engineer of key projects, LLC «Huawei Tech Company» (Moscow).

e-mail: hello.valera@gmail.com

Kuzin Sergey Sergeevich — leading engineer, LLC «Huawei Tech Company» (Moscow).

e-mail: serkuz23@ya.ru

Mazurenko Ivan Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Head of the Laboratory of Intelligent Systems and Data Science HUAWEI, LLC «Huawei Tech Company» (Moscow).

e-mail: ivan@mazurenko.ru

Abstract

In the present article we propose a modification of the PaDiM anomaly detection method which maps images to vectors and then calculates the Mahalanobis distance between such vectors and the distribution of the vectors of the training set. Of the coordinate axes of the vectors we choose a subset of such that the distribution along them is close to normal according to the chosen statistical criterion. The uniformization procedure is then applied to those coordinates and the Mahalanobis distance is calculated. This approach is shown to increase the ROCAUC value in comparison with the PaDiM method.

Keywords: anomaly detection, normal distribution, uniformization.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. O. Ivanov, G. V. Nosovskiy, V. A. Kibkalo et al., 2022, “Recognition of anomalies of an a priori unknown type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 227–240.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается применение ряда геометрических методов для решения задачи *распознавания аномалий*. Общая постановка задачи следующая: имея базу данных фотографий качественных объектов одного и того же вида, построить алгоритм распознавания, проверяющий является ли объект того же вида на новой фотографии качественным или нет. Задачи подобного типа широко известны, см., например, [9].

Более точно, имеется множество фотографий качественных предметов определенного вида, которое заранее подается на вход нейросети. Нейросеть строит по каждой фотографии точку в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Таким образом, получается облако точек $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$. При работе алгоритма в реальном времени на вход подается тестовая фотография P по которой при помощи той же нейросети строится точка $x_P \in \mathbb{R}^N$. Алгоритм должен по имеющемуся облаку $\mathcal{X}$ и точке x_P определить, является ли объект на фотографии P качественным или аномальным.

Как и в иных задачах компьютерного зрения, использующих нейросети, предполагается справедливой *гипотеза о многообразии*, согласно которой точки множества $\mathcal{X}$ сосредоточены в малой окрестности некоторого многообразия M (вообще говоря, не обязательно связного и, возможно, с особенностями), см., например, [11]. Как следствие, важным шагом к решению поставленной задачи является анализ многообразия M , в частности, оценка его размерности. Вторая стадия решения задачи — построение аналога функции расстояния в пространстве $\mathbb{R}^N$, которое эффективно характеризует близость тестовой точки x_P к облаку $\mathcal{X}$ “качественных” точек.

В настоящей работе представлены результаты (для конкретного множества типов объектов и конкретной нейросети) по обоим вопросам: в разделе 2 приведены результаты оценки размерности при помощи подсчета размерности Минковского для облака $\mathcal{X}$, в разделе 3 описано улучшение показателя ROCAUC эффективности распознавания аномалий при помощи предложенного авторами метода, основанного на раздельной обработке “более гауссовых” и “менее гауссовых” координат — то есть, координат, распределение которых в облаке “качественных точек” ближе или дальше от гауссовского распределения в соответствии с подходящей мерой близости и выбранным порогом.

2. Оценка размерности при помощи размерности Минковского

Оценка размерности облака точек, соответствующего изучаемым изображениям, крайне важна в задаче распознавания образов и выявления аномалий (см., например, [10, 12, 14, 15,

16, 17, 18]). В настоящей работе мы предлагаем использование метода, основанного на понятии размерности Минковского.

Идея применяемого здесь метода оценки размерности заключается в следующем. Если мы замостим евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ маленькими кубами и посчитаем число кубов замощения, необходимых для покрытия данного подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, мы получим величину, асимптотически описывающую *фрактальную размерность* этого подмножества — *размерность Минковского* [1, 13]. Если рассматриваемое подмножество является многообразием, размерность Минковского совпадает с размерностью этого многообразия. Для вычисления размерности Минковского может быть использован хорошо известный *box-counting алгоритм*, основанный на подсчете числа необходимых для замощения данного подмножества кубиков в зависимости от их размера.

Формально размерность Минковского подмножества $M \subset \mathbb{R}^m$ определяется следующим образом. Разобьем пространство $\mathbb{R}^m$ на m -мерные кубы со стороной r , так что любые два куба с непустым пересечением пересекаются либо по вершине, либо по ребру, либо по грани. Обозначим множество этих кубов через B_r . Рассмотрим число $N(r)$ кубов, пересекающихся с множеством M :

$$N(r) = |\{B \in B_r \mid B \cap M \neq \emptyset\}|. \quad (1)$$

Размерностью Минковского множества M называется предел (если он существует)

$$\dim_{\text{mink}}(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}. \quad (2)$$

В случае, когда M — n -мерное многообразие, при $r \rightarrow 0$ имеем $N(r) \sim \frac{V}{r^n}$, где V — n -мерный объем M . Следовательно, при $r \rightarrow 0$ справедлива асимптотическая оценка

$$\log N(r) \sim \log V - n \log r. \quad (3)$$

Это означает, что $\log N(r)$ — асимптотически линейная функция от $\log r$. Следовательно, размерность n многообразия M может быть оценена как угловой коэффициент соответствующей экспериментальной функции (если она оказывается приблизительно линейной), см. Рис. 1.

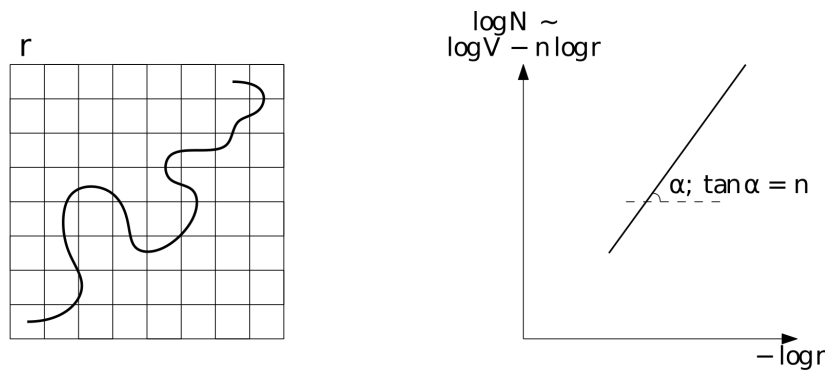


Рис 1: Размерность Минковского одномерной кривой на двумерной плоскости. Угловой коэффициент: $\tan \alpha = 1$

Рассмотрим теперь облако, состоящее из конечного числа точек $\mathcal{C} = \{P_i\}$, расположенных в малой окрестности некоторого n -мерного многообразия M . Мы хотим найти размерность n многообразия M , применяя алгоритм вычисления размерности Минковского к облаку $\mathcal{C}$. Определим $N(r)$ как число кубов, содержащих точки облака $\mathcal{C}$. Предполагая, что $\mathcal{C}$ содержит достаточно большое количество точек (достаточное число точек зависит от m и n), мы можем оценить n при помощи асимптотической формулы (3).

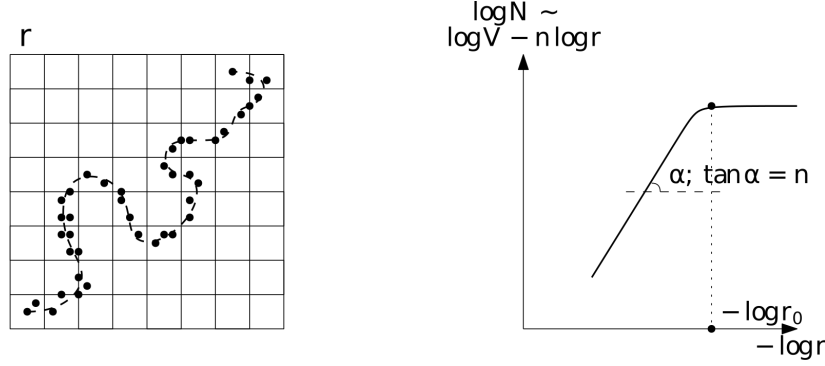


Рис 2: Размерность Минковского для облака точек в окрестности одномерной кривой на двумерной плоскости. Для $-\log r \geq -\log r_0$ график становится горизонтальным

Заметим, что формула (3) для $\log N$ справедлива только если $r > r_0 > \frac{d}{\sqrt{m}}$ для некоторого критического r_0 , где d — минимальное расстояние между точками облака: $d = \min_{i \neq j} \{|P_i - P_j|\}$. В самом деле, если $r < \frac{d}{\sqrt{m}}$, то каждый куб содержит не более одной точки множества, а потому при $r < \frac{d}{\sqrt{m}}$ имеем $\log N(r) = \log |\mathcal{C}| = \text{const}$, см. Рис. 2. Это означает, что в этом случае размерность следует оценивать используя только $r > r_0$.

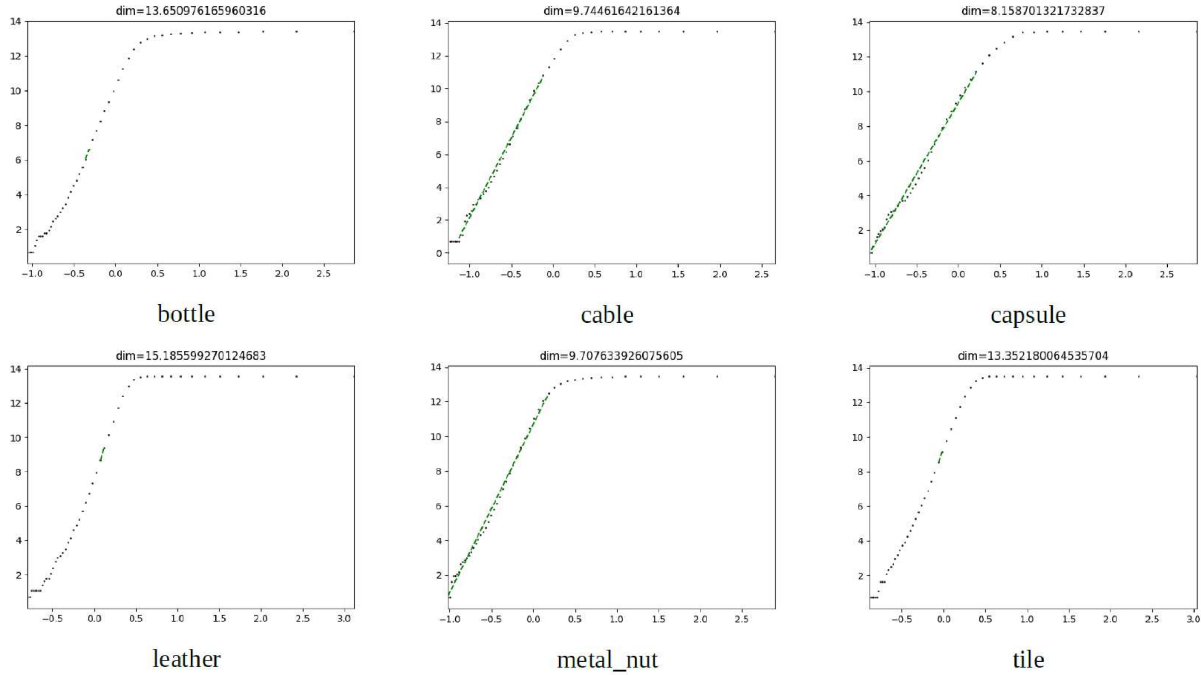


Рис 3: Оценка размерности Минковского для разных типов объектов: график и линейное приближение

Приведем результаты оценки размерности для реальных облаков точек (эти точки иногда называют эмбедингами) в 1700-мерном пространстве, вычисленных для открытой базы объектов MVТес [4] по методу PaDiM [2, 3] путем применения нейросети WideResNet50. Количество типов объектов в базе MVТес равно 15. В таблице 1 для каждого из этих 15 типов приведено значение оценки размерности Минковского для соответствующего облака точек.

Как оказалось, значения размерности Минковского для всех изученных типов объектов

находятся в диапазоне от 8 до 15. При этом, как показали расчеты, многообразие в этих примерах довольно быстро отходит от своей касательной плоскости в любой точке, то есть, по-видимому, вложено в объемлющее пространство достаточно сложным, искривленным способом.

Объект	Оценка размерности Минковского
bottle	13.65
cable	9.74
capsule	8.16
carpet	12.27
grid	13.00
hazelnut	9.17
leather	15.19
metal_nut	9.71
pill	11.02
screw	8.65
tile	13.35
toothbrush	12.41
transistor	10.25
wood	13.05
zipper	13.37
Среднее	11.53

Таблица 1: Оценка размерности Минковского

3. Улучшение эффективности распознавания аномалий

При решении задачи распознавания аномалий часто используется так называемое *расстояние Махаланобиса*.

3.1. Обычное расстояние Махаланобиса

Говоря неформально, расстояние Махаланобиса — это расстояние от данной точки в многомерном евклидовом пространстве до данного (в идеале — многомерного нормального) распределения в этом пространстве. Дадим формальное определение.

Рассмотрим случайное распределение в пространстве $\mathbb{R}^N$ со средним $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ и матрицей ковариации S . Тогда расстояние Махаланобиса от точки $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ до этого распределения определяется как

$$D_M(x) = \sqrt{(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu)}.$$

В случае нормального распределения важно отметить, что плотность вероятности в точке x однозначно определяет расстояние Махаланобиса:

$$\begin{aligned} p(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi S}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu)}{2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi S}} \exp\left(-\frac{D_M^2(x)}{2}\right) dx \end{aligned}$$

С геометрической точки зрения расстояние Махаланобиса можно понимать следующим образом. Рассмотрим для примера двумерный случай. Тогда линиями уровня плотности нормального распределения на плоскости являются эллипсы. Преобразование плоскости $T_M: x \mapsto S^{-1}x$, называемое преобразованием Махаланобиса, превращает эти эллипсы в концентрические окружности. После такого преобразования подсчет расстояния Махаланобиса сводится к вычислению обычного евклидова расстояния до центра распределения.

Важно отметить, что в случае нормального распределения расстояние Махаланобиса обладает следующим важнейшим свойством: все точки, плотность распределения в которых одна и та же, лежат на одинаковом расстоянии Махаланобиса от центра распределения. С этим и связано геометрическое описание этого метода: после преобразования Махаланобиса все точки с одинаковой плотностью оказываются лежащими на окружности с центром в центре распределения (точке наибольшей плотности). Однако, это свойство вместе с тем и ограничивает применимость расстояния Махаланобиса к задаче определения аномалий. В самом деле, если распределение, которому подчиняются изучаемые точки, не является нормальным, преобразование Махаланобиса переведет кривые постоянной плотности не в концентрические окружности, а в некоторые, вообще говоря, произвольные замкнутые кривые. Как следствие, евклидово расстояние, вычисленное в образе, не даст разумной характеристики расстояния от точки до распределения.

3.2. Популярные модификации расстояния Махаланобиса

В литературе можно найти разные методы обобщения и адаптации расстояния Махаланобиса на случаи других распределений. Выделим работу [5], в которой разрабатывается ядерный подход, подобный геометрической идее преобразования Махаланобиса, но предполагающий подбор подходящего преобразования для изучаемого распределения, и [6], в которой строится “полиномиальное расстояние Махаланобиса” при помощи расширения пространства, в которое вложены изучаемые точки, и использования обычного $D_M(x)$, но уже в расширенном пространстве.

Остановимся подробнее на первом методе обобщения расстояния Махаланобиса следуя [5].

Рассмотрим пространство $X \subset \mathbb{R}^n$ с вероятностной мерой P . Обозначим через f_P функцию плотности распределения, порожденного мерой P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $g: (X, P) \rightarrow \mathbb{R}$ называется f -монотонной если из неравенства $f(x) \geq f(y)$ следует, что $g(x, P) \geq g(y, P)$, где запись $g(x, P)$ означает, что функция g зависит также и от распределения P .*

Если распределение P неизвестно, а известна лишь выборка S_n случайных точек из этого распределения, то определение f -монотонности адаптируется следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Функция $g(x, S_n)$ называется асимптотически f -монотонной, если из неравенства $f(x) \geq f(y)$ следует, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(g(x, S_n) \geq g(y, S_n)) = 1.$$

Теперь определим ядро плотности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Пусть $g(x, P)$ (или (g, S_n)) — положительная (асимптотически) f -монотонная функция. Тогда ядро плотности определяется так:*

$$K_P(x, y) = g(x, P)g(y, P)$$

(или, соответственно, $K(x, y) = g(x, S_n)g(y, S_n)$).

Наконец, ядро плотности порождает меру различия:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если дано ядро плотности K_P , то соответствующая ему мера различия определяется как

$$d_K^2(x, y) = -\log K_P(x, y).$$

В частности, при наличии порожденной ядром плотности меры различия можно построить обобщенное расстояние Махаланобиса между точкой x и данным распределением, вычислив меру различия точки x и среднего значения изучаемого распределения. Следующее предложение показывает, что мера различия d_K^2 действительно обобщает расстояние Махаланобиса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть рассматриваемое распределение P является нормальным $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, и пусть f -монотонная функция g определена как

$$g(x, P) = e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

Тогда соответствующее расстояние $d_K^2(x, \mu)$ совпадает с расстоянием Махаланобиса от точки x до распределения P .

Доказательство см. в [5].

3.3. Анализ распределения координат точек в облаке

Описанное в предыдущем разделе расстояние Махаланобиса является одним из стандартных инструментов поиска аномалий, например, в задаче распознавания некачественных предметов по их фотографиям. Однако, поскольку реальные данные часто оказываются распределены не по нормальному закону, имеет смысл поиск иного расстояния, более подходящего для изучаемого распределения, чем расстояние Махаланобиса. Первым шагом к этому является анализ распределения координат точек с целью определения, какие координаты распределены нормально, а какие — нет. Для этого могут использоваться различные методы оценки близости распределения к нормальному, например, критерий Колмогорова-Смирнова или критерий Шапиро.

Напомним суть критерия Колмогорова-Смирнова. Для выборочной функции распределения F_n , построенной по выборке размера n , и теоретической (проверяемой) непрерывной функции распределения F вычисляется

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

Если статистика $\sqrt{n}D_n$ превысит квантиль распределения Колмогорова K_α с данным уровнем значимости α , то гипотеза о соответствии закона распределения выборки распределению F отвергается. В нашем случае в качестве F берется одномерное нормальное распределение.

Критерий проверки нормальности распределения, предложенный в работе Shapiro и Wilk [7], состоит в следующем. Для выборки $x_1, \dots, x_n$ вычисляется статистика:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где $x_{(i)}$ есть i -я порядковая статистика выборки, $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$ есть среднее значение выборки.

Коэффициенты $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ определяются следующим образом. Для выборки из n независимых, одинаково распределенных по стандартному нормальному закону случайных

величин обозначим через m_i математическое ожидание соответствующих порядковых статистик, а через V — матрицу их ковариаций. Тогда

$$(a_1, \dots, a_n) = m^T V^{-1} / C, \quad C = ((V^{-1} m)^T V^{-1} m)^{1/2}.$$

Нулевая гипотеза, состоящая в том, что выборка x взята из нормального распределения, принимается, если значение статистики W оказывается больше заданной квантили.

3.4. Метод отдельной обработки гауссовых и негауссовых координат

Авторы предложили и реализовали следующий метод. Сначала анализируются распределения координат векторов облака $\mathcal{X}$: с помощью статистического критерия (например, критерий Колмогорова–Смирнова, Шапиро–Вилка [7] или других подсчета L_2 -расстояния между функцией нормального распределения и эмпирической функцией распределения) определяют те координатные оси, распределение которых наиболее отклоняется от гауссового. Основная идея метода состоит в том, что негауссовы координаты следует обрабатывать отдельно.

Самый простой способ состоит в отбрасывании негауссовых координат (и у точек облака, и у пробной точки x_P) и применении к оставшимся координатам обычного расстояния Махаланобиса. Эксперимент показывает, что даже такой подход в отдельных случаях увеличивает эффективность распознавания аномалий.

Например, для открытой базы данных MVTec [4] вычислительный эксперимент показал, что отбрасывание негауссовых осей и последующее применение расстояния Махаланобиса к оставшимся осям увеличивает среднее значение ROCAUC примерно на 3% по сравнению с расстоянием Махаланобиса по всем осям.

Более действенный подход, который еще сильнее повышает среднее значение ROCAUC, состоит в выпрямлении распределений координат для наименее гауссовых осей с последующим применением обычного расстояния Махаланобиса по всем осям. Операция выпрямления распределений координат по отдельности (приведения их распределений к равномерному распределению на $[0, 1]$ преобразованием $y = F(x)$, где $F(x)$ — исходная функция распределения данной координаты в предположении, что эта функция непрерывна) с успехом применялась авторами и ранее для анализа другой прикладной задачи (ArcFace), см. [8]. Отметим, что операция выпрямления всех без исключения координат также дает положительный эффект в рассматриваемой здесь задаче.

Опишем операцию выпрямления подробнее. В ее основе лежит следующее простое утверждение:

ТЕОРЕМА 1. Пусть X — скалярная случайная величина с непрерывной функцией распределения F . Тогда величина $Y := F(X)$ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

Пусть наши обучающие данные представляют собой облако точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для каждой из n координат построим эмпирическую функцию распределения $F_{emp}^i(x)$ этой координаты на нашем облаке (здесь верхний индекс i — это номер координаты). Процедура выпрямления состоит в следующем преобразовании:

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (\hat{F}_{emp}^1(x^1), \dots, \hat{F}_{emp}^n(x^n)),$$

где $\hat{F}_{emp}^i$ — линейная интерполяция эмпирической функции распределения $F_{emp}^i(x)$, построенной по точкам обучающего множества. Линейная интерполяция превращает скачкообразную эмпирическую функцию распределения в кусочно-линейную. Конечно, на самой выборке

линейная интерполяция не меняет значение эмпирической функции распределения, но процедура выпрямления применяется не только к обучающим, но и к пробным точкам, не принадлежащим к той выборке, по которой строились эмпирические распределения $F_{emp}^i(x)$.

Если та или иная координата принимает на обучающем множестве различные значения, без повторений, то после выпрямления эмпирическая функция распределения для этой координаты будет представлять собой ступенчатое (с высотой ступенек $\frac{1}{N}$, где N – объем выборки) приближение линейной функции, растущей от 0 до 1 на отрезке $[0, 1]$, а ее линейная интерполяция — саму эту функцию, то есть функцию равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$.

В случае, когда значения той или иной координаты содержат повторения, возникшие искусственно, — например, в результате предварительной обработки и размножения исходных данных, — имеет смысл убрать эти повторения из обучающего распределения данной координаты перед вычислением эмпирической функции распределения и последующим применением процедуры выпрямления. Это делается для каждой координаты отдельно.

Объект	Оценка разм. Минковского	ROCAUC исходный	Выпрямл. всех осей	1400 наиболее гауссовых осей	Выпрямление негауссовых
bottle	13.65	0.998	1.00	1.00	1.00
cable	9.74	0.922	0.956	0.9949	0.9942
capsule	8.16	0.915	0.922	0.9537	0.9689
carpet	12.27	0.999	0.999	0.9940	0.9940
grid	13.00	0.957	0.978	0.9825	0.9875
hazelnut	9.17	0.933	0.930	0.9996	1.00
leather	15.19	1.00	1.00	1.00	1.00
metal_nut	9.71	0.992	0.998	0.9966	0.9961
pill	11.02	0.944	0.947	0.9574	0.9926
screw	8.65	0.836	0.904	0.9555	0.9539
tile	13.35	0.974	0.991	0.9910	0.9917
toothbrush	12.41	0.972	0.981	0.9917	1.00
transistor	10.25	0.978	1.00	0.9925	0.9942
wood	13.05	0.988	0.989	0.9974	0.9974
zipper	13.37	0.909	0.958	0.9701	0.9832
Среднее	11.53	0.954	0.970	0.9851	0.9882
Улучш. абс.	-	0.0	0.016	0.028	0.0342
До max = 1	-	0%	34.78%	67.61%	74.35%

Таблица 2: Оценка размерности Минковского и величины ROCAUC для разных способов обработки осей с “наименее гауссовыми” распределениями координат. В трех нижних строках для каждого метода (включая отсутствие модификаций) указаны: среднее арифметическое ROCAUC по всем 15-ти типам объектов, его абсолютное улучшение от базового уровня 0.954 и процент улучшения, если за 100% взято улучшение до $ROCAUC = 1$.

Результаты работы на множестве векторов, получаемых при обработке датасета изображений MVTeс при помощи нейросети WideResNet50 и ее модификации, приведены в таблице 2. Опишем, что стоит в его столбцах.

- “*ROCAUC* исходный”: применение расстояния Махаланобиса к множеству векторов без каких-либо преобразований
- “Выпрямл. всех осей”: перед вычислением расстояния Махаланобиса проведем выпрямление (приведение к равномерному распределению на $[0, 1]$) каждой координаты по

отдельности.

- “1400 наиболее гауссовых”: применяя заданный критерий согласия, выберем N осей, распределение значения координат вдоль которых наиболее похоже на гауссово (в данном примере $N = 1400$), а остальные оси отбросим, понизив тем самым размерность пространства.
- “Выпрямление негауссовых”: проверим с помощью некоторого статистического критерия (с единой выбранной квантилью принятия) гипотезу о нормальности одномерного распределения вдоль произвольной координаты. Распределения вдоль тех координат, на которых гипотеза была отвергнута, подвергаются процедуре выпрямления, подробно описанной в [8]. В правом столбце таблицы приведен лучший из результатов, полученных нами при применении такой схемы к эмбедингам для датасета MVТес.

4. Заключение

При анализе данных, полученных нейросетями в результате обработки изображений, существенную роль может играть специфика распределений отдельных координат результирующих многомерных векторов. На необходимость отдельной обработки координат, имеющих приблизительно гауссово и существенно негауссово распределение, может указывать сильная искривленность многообразия, в окрестности которого расположено рассматриваемое облако точек. В компьютерных экспериментах, проведенных авторами, за счет выпрямления распределений существенно негауссовых координат получено улучшение показателя ROCAUC на 3.4 процентных пункта с 0.954 до 0.9882, а доля неверно обрабатываемых аномалий сократилась почти на 75 процентов).

В случаях, когда распределение всех координат приблизительно гауссово, обыкновенное расстояние Махаланобиса, по-видимому, является оптимальным с точки зрения интегрального показателя ROCAUC ошибок 1 и 2 рода. В противном случае, распределение координат вдоль существенно не гауссовых осей имеет смысл распрямлять (или как-то иначе преобразовывать) перед вычислением расстояния Махаланобиса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Falkoner K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications // Chichester etc.: John Wiley & Sons 1990, ISBN 0-471-92287-0, xxii + 288.
2. Defard T., Setkov A., Loesch A., Audigier R. PaDiM: a Patch Distribution Modeling Framework for Anomaly Detection and Localization // arXiv e-print: <https://arxiv.org/pdf/2011.08785v1.pdf> 2020.
3. Realization of PaDiM approach // <https://github.com/xiahaifeng1995/PaDiM-Anomaly-Detection-Localization-master>.
4. Bergmann P., Batzner K., Fauser M., Sattlegger D., Steger C. The MVТec Anomaly Detection Dataset: A Comprehensive Real-World Dataset for Unsupervised Anomaly Detection // International Journal of Computer Vision 2021, Vol. 129, P. 1038–1059.
5. Venturini G. M. Statistical Distances and Probability Metrics for Multivariate Data, Ensembles and Probability Distributions // Ph.D. THESIS (advisor: Alberto Munoz Garcia), Dep. of Statistics, Univ. Carlos III, Leganes, Madrid, Spain, June, 2015.

6. Grudic G. Z., Mulligan J. Outdoor Path Labeling Using Polynomial Mahalanobis Distance // Robotics: Science and Systems II, August 16-19, 2006. University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, USA.
7. Shapiro S. S., Wilk M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples) // Biometrika 1965. Vol. 52, P. 591-611.
8. Ivanov A., Nosovskiy G., Chekunov A., Fedoseev D., Kibkalo V., Nikulin M., Popelenskiy F., Komkov S., Mazurenko I., Petiushko A. Manifold Hypothesis in Data Analysis: Double Geometrically-Probabilistic Approach to Manifold Dimension Estimation // arXiv e-print: arXiv:2107.03903 [cs.LG] 2021.
9. Stolz B., Tanner J., Harrington H., Nanda V. Geometric anomaly detection in data // Proceedings of the National Academy of Sciences 2020, Vol. 117, P. 202001741, DOI: 10.1073/pnas.2001741117.
10. Erba V., Gherardi M., Rotondo P. Intrinsic dimension estimation for locally undersampled data // Sci. Rep. 2019, Vol. 9, doi:10.1038/s41598-019-53549-9.
11. Fefferman C., Mitter S., Narayanan H. Testing the manifold hypothesis // J. Amer. Math. Soc. 2016, Vol. 29, doi:10.1090/jams/852.
12. Bernstein A., Burnaev E., Erofeev P. Manifold Reconstruction in Dimension Reduction Problem // International conference "Intelligent Information Processing" IIP-9 2012.
13. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena 1983, Vol. 9, P. 189-208.
14. Eckmann J.-P., Ruelle D. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena 1992, Vol. 56, P. 185-187.
15. Mordohai P., Medioni G. Dimensionality Estimation, Manifold Learning and Function Approximation using Tensor Voting // Journal of Machine Learning Research 2010, Vol. 11, P. 411-450.
16. He J., Jiang L., Ding L., Li Z. Intrinsic Dimensionality Estimation based on Manifold Assumption // Journal of Visual Communication and Image Representation 2014, Vol. 25, Issue 5, P. 740-747.
17. Granata D., Carnevale V. Accurate Estimation of the Intrinsic Dimension Using Graph Distances: Unraveling the Geometric Complexity of Datasets // Sci. Rep. 2016, Vol. 6, doi:10.1038/srep31377.
18. Levina E., Bickel P. J. Maximum likelihood estimation of intrinsic dimension // Advances in neural information processing systems 2005, P. 777-784.

REFERENCES

1. Falconer, K. 1990, "Fractal geometry: mathematical foundations and applications", *Chichester etc.: John Wiley & Sons*, ISBN 0-471-92287-0, xxii + 288.
2. Defard, T., Setkov, A., Loesch, A., Audigier, R. 2020, "PaDiM: a Patch Distribution Modeling Framework for Anomaly Detection and Localization", arXiv e-print: <https://arxiv.org/pdf/2011.08785v1.pdf>.

3. “Realization of PaDiM approach”, <https://github.com/xiahaifeng1995/PaDiM-Anomaly-Detection-Localization-master>.
4. Bergmann, P., Batzner, K., Fauser, M., Sattlegger, D., Steger, C. 2021, “The MVTEC Anomaly Detection Dataset: A Comprehensive Real-World Dataset for Unsupervised Anomaly Detection”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 129, pp. 1038–1059.
5. Venturini, G. M. 2015, “Statistical Distances and Probability Metrics for Multivariate Data, Ensembles and Probability Distributions”, *Ph.D. THESIS (advisor: Alberto Munoz Garcia)*, Dep. of Statistics, Univ. Carlos III, Leganes, Madrid, Spain.
6. Grudic, G. Z., Mulligan, J. 2006, “Outdoor Path Labeling Using Polynomial Mahalanobis Distance”, *Robotics: Science and Systems II, August 16-19, 2006*, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, USA.
7. Shapiro, S. S., Wilk, M. B. 1965, “An analysis of variance test for normality (complete samples)”, *Biometrika*, vol. 52, pp. 591-611.
8. Ivanov, A., Nosovskiy, G., Chekunov, A., Fedoseev, D., Kibkalo, V., Nikulin, M., Popelenskiy, F., Komkov, S., Mazurenko, I., Petiushko, A. 2021, “Manifold Hypothesis in Data Analysis: Double Geometrically-Probabilistic Approach to Manifold Dimension Estimation”, *arXiv e-print: arXiv:2107.03903 [cs.LG]*.
9. Stolz, B., Tanner, J., Harrington, H., Nanda, V. 2020, “Geometric anomaly detection in data”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 117, pp. 202001741, doi:10.1073/pnas.2001741117.
10. Erba, V., Gherardi, M., Rotondo, P. 2019, “Intrinsic dimension estimation for locally undersampled data”, *Sci. Rep.*, vol. 9, doi:10.1038/s41598-019-53549-9.
11. Fefferman, C., Mitter, S., Narayanan, H. 2016, “Testing the manifold hypothesis”, *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 29, doi:10.1090/jams/852.
12. Bernstein, A., Burnaev, E., Erofeev, P. 2012, “Manifold Reconstruction in Dimension Reduction Problem”, *International conference “Intelligent Information Processing” IIP-9*.
13. Grassberger, P., Procaccia, I. 1983, “Measuring the strangeness of strange attractors”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 9, pp. 189-208.
14. Eckmann, J.-P., Ruelle, D. 1992, “Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 56, pp. 185-187.
15. Mordohai, P., Medioni, G. 2010, “Dimensionality Estimation, Manifold Learning and Function Approximation using Tensor Voting”, *Journal of Machine Learning Research*, vol. 11, pp. 411-450.
16. He, J., Jiang, L., Ding, L., Li, Z. 2014, “Intrinsic Dimensionality Estimation based on Manifold Assumption”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 25, issue 5, pp. 740-747.
17. Granata, D., Carnevale, V. 2016, “Accurate Estimation of the Intrinsic Dimension Using Graph Distances: Unraveling the Geometric Complexity of Datasets”, *Sci. Rep.*, vol. 6, doi:10.1038/srep31377.

18. Levina, E., Bickel, P. J. 2005, "Maximum likelihood estimation of intrinsic dimension", *Advances in neural information processing systems*, pp. 777-784.

Получено: 15.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-241-257

О поведении водорода в металлических сплавах

С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Д. С. Клементьев

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Клементьев Денис Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрено взаимодействие водорода с дефектами кристаллического строения в металлах и сплавах. Приведена классификация водородных ловушек с точки зрения их энергетических уровней. Рассмотрены различные виды взаимодействий водородных ловушек, в зависимости от их энергии связи. Изучено влияние водородных ловушек на коэффициент диффузии водорода в стали. Показано, что наличие в металлах высокоэнергетических водородных ловушек приводит к снижению диффузионной подвижности водорода, который тем самым исключается из процесса охрупчивания.

Ключевые слова: водородное охрупчивание, водородные ловушки, диффузия водорода, энергия связи, дислокации, границы раздела.

Библиография: 44 названия.

Для цитирования:

С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Д. С. Клементьев. О поведении водорода в металлических сплавах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 241–257.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-241-257

On the behavior of hydrogen in metal alloys

S. N. Kutepov, А. Е. Gvozdev, О. V. Kuzovleva, D. S. Klementyev

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepovsn@yandex.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Klementyev Denis Sergeevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Abstract

The article considers the interaction of hydrogen with crystal structure defects in metals and alloys. The classification of hydrogen traps in terms of their energy levels is given. Various types of interactions of hydrogen traps are considered, depending on their binding energy. The effect of hydrogen traps on the diffusion coefficient of hydrogen in steel has been studied. It is shown that the presence of high-energy hydrogen traps in metals leads to a decrease in the diffusion mobility of hydrogen, which is thereby excluded from the embrittlement process.

Keywords: hydrogen embrittlement, hydrogen traps, hydrogen diffusion, binding energy, dislocations, interfaces.

Bibliography: 44 titles.

For citation:

S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, D. S. Klementyev, 2022, “On the behavior of hydrogen in metal alloys”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 241–257.

1. Введение

Взаимодействие водорода с дефектами кристаллической решетки металлических материалов является важным и часто преобладающим фактором при определении механизма водородного охрупчивания. Тем не менее, такое взаимодействие гораздо менее понятно на фундаментальном уровне, чем поведение водорода в идеальной кристаллической решетке. Такая ситуация обусловлена многообразием и сложностью процессов взаимодействий водорода с дефектами, а также расхождением между теоретическими расчетами и экспериментальными данными, полученными в ходе исследований процесса водородного охрупчивания металлических материалов [1].

Для получения однородного раствора водорода внутри металлической решетки, в идеальном монокристалле необходимы предварительные условия, так как концентрации водорода

ниже предела растворимости. Однако все реальные твердые тела не являются идеальными кристаллами, поскольку они содержат дефекты, которые могут играть решающую роль в поглощении и транспортировке водорода в металлических материалах и их последующем растрескивании [2]. Следовательно, распределение водорода внутри решетки металла зависит от взаимодействия отдельных адсорбированных атомов водорода с дефектами и структурными неоднородностями в кристаллической решетке, такими как вакансии, атомы примесей, дислокации, границы зерен, микропоры и частицы второй фазы [3, 4, 5]. Такие дефекты и неоднородности принято называть водородными ловушками [6, 7].

2. Результаты и их обсуждение

2.1. Водородные ловушки в металлах: классификация и характерные особенности

Ловушковая теория была предложена Макнаббом и Фостером в начале 1960-х годов [8] и была представлена в качестве математической модели. Эта конкретная идея ловушек возникла из наблюдения, что диффузия водорода в металлах не соответствует закону диффузии Фика (для диффузии при более низких температурах, чем 400°C). Согласно их теории, захват водорода происходит, когда свободная энергия водорода в определенном месте решетки меньше его энергии в междоузлии решетки. Следовательно, время пребывания водорода внутри этого конкретного места больше, чем среднее время пребывания водорода в нормальном междоузлии решетки. Этот эффект называется «энергия связи» ловушки [9].

Прочность ловушки, т. е. доля времени, в течение которого атом водорода находится в ловушке, зависит от энергии связи E_B атома водорода с ловушкой. Чтобы качественно описать прочность мест скопления ловушек, одно водород-ловушечное взаимодействие может быть записано как реакция первого порядка:



где $[H]$ — концентрация диффундирующего водорода, T — место расположения ловушки, а H_T — концентрация водорода в ловушке.

Кинетика захвата водорода, которая включает выделение и захват ловушкой, была получена Макнаббом и Фостером [8]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K c_L (1 - \phi) + \rho \phi, \quad (2)$$

где ϕ — доля ловушек, занятых в течение времени t , c_L — концентрация диффундирующего водорода, K и ρ — константы скорости для захвата и высвобождения водорода, соответственно. Отношение K к ρ (K/ρ) пропорционально $\exp(E_B/RT)$ [10].

Значение параметров K и ρ Макнабба-Фостера подробно обсуждалось несколькими авторами [11, 12]. Пренебрегая фактором энтропии константа скорости высвобождения ρ может быть интерпретирована как связанная с энергией связи ловушек [12]:

$$\rho = \nu_T \varphi(Z) \exp \left[\frac{-(E_B + E_S)}{kT} \right], \quad (3)$$

где E_S — энергия точки перегиба, которая включает в себя энергию активации для скачка между нормальными междоузлиями решетки; ν_T — частота колебаний захваченного атома водорода. Функция $\varphi(Z)$ задается формулой $\varphi(Z) = (1 - e^{-Z})/Z$, где $Z = \frac{\hbar \nu_T}{kT}$, $\hbar$ — постоянная Планка.

Ориани [12], применяя бимолекулярную теорию Уайта, предложил модель, в которой каждая ловушка может удерживать только один атом водорода, который захватывается при рассеивании в небольшой объем на расстоянии r_0 от незаполненной ловушки. Он интерпретировал соотношение между $\mathcal{K}$ и ρ как $\mathcal{K}/\rho = 4\pi r_0 \lambda^2 \exp(E_B/kT)$, считая, что частота колебаний водорода в междоузлии решетки ν_L такая же, как и на участке ловушки, $\nu_T \approx \nu_L = \sqrt{E_L/2m\lambda^2} \approx 10^{13} \text{ с}^{-1}$, где m — масса водорода, λ — расстояние диффузионного перехода. Оценки значений $\mathcal{K}$ и ρ из экспериментальных данных ограничены. Исследуя сплавы системы Fe-Ti Прессшур и Бернштейн [12] сообщили, что значение $\mathcal{K}$ должно быть порядка 10^{-24} или $10^{-23} \text{ см}^3/\text{с}$.

В настоящее время в зависимости от энергии связи принято различать следующие типы водородных ловушек: привлекательные (обратимые), физические (необратимые) и смешанные ловушки [2, 14].

Привлекательная (обратимая) ловушка, представляет собой область решетки Di, где атомы водорода подвергаются действию сил притяжения, таких как электрическое поле, поле напряжений, градиент температуры или взаимодействию с растворенными атомами, которые находятся слева от железа в периодической таблице. Поля напряжений, как правило, сосредоточены в непосредственной близости от таких дефектов, как дислокации, границы зерен и фаз, вершин трещин и микротрещин [14].

Физическая ловушка является объектом в решетке, в которой диффундирующий атом водорода будет захвачен случайным образом, а не будет привлечен. Этот тип ловушек существует из-за искажений идеальной кристаллической решетки, таких как большеугловые границы зерен и фаз, точечные и объемные дефекты. Для водорода является энергетически более выгодным, остаться в этом типе ловушки, чем в междоузлии решетки [2].

Смешанная ловушка является наиболее распространенным типом водородных ловушек, так как в большинстве случаев она сочетает в себе как привлекательные, так и физические характеристики.

Обратимые ловушки могут выступать в роли скоплений и источников водорода, так как они могут поглощать и отдавать водород достаточно легко. При повышенных температурах данный тип ловушек будет обладать свойствами, присущими водороду, находящемуся в кристаллической решетке в свободном состоянии. С другой стороны, физические ловушки могут действовать только в качестве поглотителя водорода, при условии, что рабочая температура недостаточно высока для выхода водорода из мест скоплений такого рода [2, 12]. Следовательно, обратимость ловушки определяется ее энергией связи. Ловушки, обладающие *энергией* связи выше, чем 60 кДж/моль определяются как необратимые ловушки, в то время как ловушки с энергией ниже, чем 60 кДж/моль определяются как обратимые ловушки [15].

В общем случае обратимые ловушки имеют скорость высвобождения $\rho \neq 0$ и в установившемся состоянии:

$$\frac{\partial \phi_\infty}{\partial t} = 0; \quad \phi_\infty = \frac{\mathcal{K}c_L}{1 + \mathcal{K}c_{L\infty}/\rho}, \quad (4)$$

где индекс ∞ указывает на установившееся состояние.

При $\rho \neq 0$ обратимая ловушка не будет насыщена и может быть принято равновесие между обратимо захваченным и диффузионно-подвижным водородом.

Для слабых ловушек ($\mathcal{K}/\rho \ll 1$) равновесная доля ловушек может быть представлена в виде:

$$\phi_\infty^R = \mathcal{K}c_{L\infty}/\rho \quad (5)$$

Обратимая ловушка может приближаться к насыщению ($\phi_\infty^R \approx 1$) только в том случае если $c_{L\infty}$ очень велико. С другой стороны, необратимые ловушки, учитывая достаточное время и содержание водорода, всегда будут достигать насыщения ($\phi_\infty^I = 1$) независимо от количества диффундирующего водорода.

Прессшур [16], в ловушковой теории водородного охрупчивания, обсудил влияние использования как обратимых, так и необратимых ловушек на устойчивость металла к водородному охрупчиванию. Поскольку энергия взаимодействия между решеткой и ловушкой ΔE_{LT} всегда будет положительной, доля водорода в обратимых (ϕ^R) или необратимых ловушках (ϕ^I) всегда будет больше, чем в междоузлии решетки (ϕ^L), в результате чего концентрации диффундирующего водорода (c_L) уменьшается. При условии, что ловушки мелкие и однородно распределены по всей решетке, эти ловушки полезны для устойчивости к ВО. Чтобы достичь такой стойкости, требуется однородное распределение ловушек, чтобы уменьшить вероятность того, что любая конкретная ловушка достигнет насыщения и/или критической концентрации, которая может инициировать растрескивание [17].

Данные работ [7, 16] показывают, что восприимчивость материала к водородному охрупчиванию непосредственно связана с характерной плотностью ловушек. Как правило, главная роль ловушек в процессе охрупчивания сводится к их способности стимулировать или подавлять образование мест скопления водорода путем воздействия на подвижные характеристики водорода. Ловушки, как обратимые, так и необратимые в целом уменьшают коэффициент диффузии водорода в материале и, следовательно, подавляют образование мест скопления водорода. Тем не менее, необратимые ловушки с их большой вместимостью способствуют сосредоточенной концентрации водорода и, так как поля напряжений также имеют тенденцию концентрироваться в окрестности дефектов, их присутствие может повысить восприимчивость материала к ВО [31].

Ловушковая теория водородного охрупчивания описывает различные ситуации, в которых влияние трех основных факторов играет решающую роль: средства, с помощью которых водород проникает в образец и диффузию внутри него (т. е. дислокации, внутренняя диффузия), расположение водорода перед испытанием (т. е. внутренний водород против внешнего водорода), а также характер мест скоплений ловушек в материале (обратимые или необратимые, насыщающиеся или ненасыщающиеся). Степень и тип хрупкости будет определяться в соответствии с комбинацией этих трех параметров [2, 38].

Как правило, материал более подвержен водородному охрупчиванию, когда обратимые ловушки действуют в качестве источников водорода, а водород транспортируется дислокациями. Причина заключается в том, что источники водорода насыщают дислокации при движении и дислокации достигают дефекта (то есть вершины трещины) с большим количеством водорода. Следовательно, большее количество водорода проникнет в дефект [16, 39, 40, 41].

2.2. Особенности взаимодействия системы водород-водородная ловушка

Вклад в энергию связи ловушек включает четыре конкретных типа взаимодействий: электронное, поля напряжений, межфазное и смешанное. Рассмотрим эти виды взаимодействий более подробно.

Электронное взаимодействие

Было высказано предположение, что электроны атомов водорода будут увеличивать электронную плотность d -полос переходных металлов, увеличивая силы отталкивания между атомами. Это взаимодействие является основой водородного охрупчивания из-за уменьшения энергии декогезии, предложенной Трояно [18]. Считается, что любой дефект, который вводит электронную вакансию на электронном уровне d -оболочки Fe, привлекает водород для достижения локальной нейтральности. Для растворенных атомов в железе тогда будет существовать привлекательное взаимодействие, когда примесь расположена слева от железа в периодической системе Д.И. Менделеева. Привлекательные взаимодействия между этими элементами и водородом коррелировали с увеличением растворимости водорода в жидком растворе железа, когда эти элементы присутствуют в виде растворенных атомов [18]. С другой стороны, атомы растворенного вещества, которые находятся в периодической системе спра-

ва от Fe, будут характеризоваться отталкивающими взаимодействиями. Присутствуя в виде атомов растворенного вещества эти элементы снижают растворимость водорода в жидком растворе железа.

Трояно [18], связал характер заполнения $3d$ -зоны электронами атомов растворенного вещества со склонностью к водородной хрупкости в никелевых сплавах. Его модель была подтверждена экспериментально, когда было обнаружено, что водородное охрупчивание (ВО) уменьшается с небольшим добавлением железа (меньше $3d$ -электронов) к никелю, но увеличивается с небольшим добавлением меди (больше $3d$ -электронов).

Электронное взаимодействие между атомами растворенного вещества и водородом также было выражено макроскопически как термодинамические взаимодействия при формулировании коэффициента взаимодействия ε_H^i в системах Fe-H-i [20, 21], где

$$\varepsilon_H^i = \left[\frac{\partial \ln \gamma_H}{\partial X_i} \right], \quad (6)$$

и

$$\ln \gamma_H = \ln \gamma_H^0 + \sum \varepsilon_H^i X_i, \quad (7)$$

где γ_H — коэффициент активности водорода; γ_H^0 — значение γ_H в бесконечно разбавленном растворе; X_i — атомная доля растворенного атома i .

Привлекательные взаимодействия возникают из-за отрицательного ε_H^i и, следовательно, снижение коэффициента активности водорода в растворе достигается в присутствии растворенного атома i . Это уменьшение коэффициента активности указывает на увеличение энергии связи между водородом и другими элементами в растворе. Напротив, отталкивающее взаимодействие существует, когда ε_H^i положительно.

Используя эти значения, Прессшур [14] вычислил энергии связи водород-атом замещения на основе известных экспериментальных значений энергии связи между титаном и водородом E (Ti:H), т. е.

$$\frac{\varepsilon_H^i}{\varepsilon_H^{Ti}} \approx \frac{[\exp(-E(i; H) - 1)]}{-E(Ti : H)}. \quad (8)$$

Для более высоких концентраций водорода становится важным взаимодействие Н-Н. Начало взаимодействия Н-Н и фазовых переходов при более высокой концентрации водорода является одной из наиболее сложных проблем статистической механики [22]. Для учета Н-Н-взаимодействий использовался только простой средний или квазихимический подход, где к химическому потенциалу добавляется член, который пропорционален концентрации водорода

$$\mu = \mu_{id} + \Omega c, \quad (9)$$

где μ_{id} — химический потенциал без Н-Н-взаимодействия; Ω — энергия взаимодействия между атомами водорода, c — концентрация водорода.

Вышеприведенное выражение должно получить большее значение, поскольку ловушка достигает насыщения, когда локальная концентрация водорода в ловушке ($c = cT$) становится значительно выше, чем номинальное содержание водорода в решетке.

Эберхарт с соавторами [23] постулировал орбитальную модель для оптимизации эффективности ловушек в ОЦК-железе. В рамках этой модели утверждается, что энергия связи водорода с ловушками в значительной степени определяется через орбитальную топологию энергии Ферми на границе раздела ловушка–ОЦК-железо. Энергия Ферми для орбитали на границах раздела ОЦК-железа и ловушки в основном представляют собой π -характер, параллельный границе раздела, и δ -характер, перпендикулярный границе раздела. Принимая во внимание, что эффективные ловушки, например, TiC, характеризуются Ферми-орбиталями, которые имеют σ -характер перпендикулярно границе раздела Эберхарт предположил, что

эти разные орбитальные символы не допускают перекрытия для формирования энергетически стабильной границы раздела, причем ловушка обеспечивает «*оборванные связи*» или точнее неудовлетворенный орбитальный характер в области границы раздела. Атомы водорода могут эффективно перекрываться с этими неудовлетворительными орбиталями в процессе, подобном насыщению органических молекул. Это перекрытие снижает энергию этих ловушечных орбиталей до энергий значительно ниже уровня Ферми, стабилизируя границу раздела. Эффективные ловушки затем рассматриваются в этой модели как те ловушки, которые характеризуются σ -связью перпендикулярно границе раздела.

Основываясь на аргументах симметрии, Эберхарт далее предоставил критерий, позволяющий оценивать, исходя из расчетов объемной электронной структуры, какие материалы, вероятно, будут обеспечивать σ -связи, перпендикулярные границе раздела с ОЦК-железом. Расщепление кристаллического поля d -орбиталей переходных металлов (определяемое по разности энергий между d -орбиталями в точке Γ расчетной зоны) и положение энергии Ферми относительно этих орбиталей является единственной информацией, необходимой для прогнозирования. Оптимальная ловушка должна отображать близкое вырождение всех d -орбиталей с энергией Ферми, лежащей чуть выше точки вырождения, т. е. d -полоса только начинает заполняться. Используя этот критерий, были выполнены оценки эффективности ловушек для некоторых включений в стали и предсказано, что Ce_2O_3 является наиболее эффективной ловушкой, за которой следуют TiC , Y_2O_3 , VC , NbC и, наконец, MO_2C .

Взаимодействие поля напряжений

В присутствии включений или дефектов решетки, таких как дислокации или крупные атомы замещения, решетка может быть искажена таким образом, что вокруг дефектов возникает растягивающее напряжение. Эта напряженная область имеет более свободный объем для междоузельных атомов, следовательно, атомы водорода, притягиваются этими полями напряжений. Соответственно, концентрации водорода в напряженной области растяжения будут выше, чем концентрации в междоузлиях решетки. Концентрация водорода, c_T , занимающая напряженную решетку, определяется следующим уравнением [24]:

$$c_T = c_L \exp \left(\frac{V_H \sigma}{RT} \right), \quad (10)$$

где V_H — парциальный молярный объем водорода в решетке, σ — гидростатическое напряжение равное $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, c_L — равновесная концентрация водорода в ненапряженной решетке.

Понимание взаимодействия водорода с дислокациями имеет большое значение из-за влияния указанного взаимодействия на пластические свойства металлов и подвижность водорода. В областях, удаленных от ядра дислокации, энергию взаимодействия водорода с дислокациями обычно рассматривают в рамках механики сплошной среды. С теоретической точки зрения описание упругой энергии, обусловлено взаимодействием поля напряжений дислокации с полем деформации вокруг атома водорода, растворенного в междоузлии. Напряжения вокруг краевых, винтовых и смешанных дислокаций непрерывно возрастают с приближением к ядру [25], что подразумевает соответствующий диапазон энергий связи. Модель сплошной среды неприменима в ядре дислокации, потому что требует атомистической обработки.

Деформация вокруг атомов водорода в ГЦК-металлах имеет кубическую симметрию, поскольку атомы водорода в растворе занимают октаэдрические междоузлия. Ситуация принципиально отличается для ОЦК-металлов, где занятие тетраэдрических междоузлий вызывает тетрагональные искажения. Однако в действительности из экспериментальных данных [1] следует, что тетрагональное искажение отсутствует или очень мало. Следовательно, энергия взаимодействия, будучи в общем случае произведением напряжения и тензора деформации,

выражается в виде [26, 27]:

$$E = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)V_H}{3}, \quad (11)$$

где V_H — парциальный молярный объем водорода; σ_i — главные напряжения.

В этом случае для краевой дислокации можно получить следующее уравнение энергии взаимодействия [26, 27]:

$$E = \left(\frac{A}{r}\right) \sin v, \quad (12)$$

где r — расстояние от ядра дислокации, v — угол между плоскостью скольжения и позиционным вектором r ; A — постоянная, содержащая упругие постоянные материала вместе с вектором Бюргерса дислокации и парциальным молярным объемом водорода.

Таким образом, локальная энергия для атома водорода зависит от координат r и v . В случае винтовой дислокации выражение в скобках в формуле (11) равно нулю, и в следствие этого энергия взаимодействия с водородом обычно считается пренебрежимо малой. Это, однако, может представлять собой упрощение, поскольку оно предполагает отсутствие тетрагонального искажения, что не является общепринятым [26, 28], и пренебрегает возможными ловушками в ядре. Локальное заполнение водорода вблизи мест скопления дислокаций определяется статистическим распределением Ферми-Дирака, отражающим возникновение мест заполнения [29]. Из выражения для энергии взаимодействия, такого как уравнение (12), можно рассчитать распределение энергий ловушек $n(\varepsilon)$. Это позволяет сформулировать соотношение между средней концентрацией водорода в решетке (c) и химическим потенциалом водорода (μ):

$$\mu = \mu^0 + \frac{RT}{2} \ln \left(\frac{P_{H_2}}{P_{H_2}^0} \right), \quad (13)$$

где μ^0 — начальный химический потенциал; P_{H_2} — внешнее давление; $P_{H_2}^0$ — начальное давление;

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\varepsilon)d\varepsilon}{1 + \exp[(\varepsilon - \mu)/kT]}. \quad (14)$$

Для случая, когда почти весь водород захвачен краевыми дислокациями, получаем [1]:

$$\mu - \mu^0 = -\frac{A}{2} \sqrt{\frac{\Psi \rho \pi}{c}}, \quad (15)$$

где Ψ — концентрация насыщения водорода в окрестности дислокации, ρ — плотность дислокаций.

При наличии больших локальных концентраций водорода вблизи дислокаций в теоретический расчет должно быть включено взаимодействие Н-Н. В этом случае, предсказанная сегрегация атомов водорода на дислокациях приводит к протяженным локальным областям высокой концентрации. Образование областей высокой концентрации вносит дополнительные энергетические изменения за счет упругого размещения водородной атмосферы и образования границы между атмосферой и окружающей матрицей. Кроме того, возможна перегруппировка атомов матрицы, приводящая к образованию новой фазы, как это наблюдалось для других растворенных веществ, таких как азот в железе и кислород в кремнии [1].

Подобным же образом отталкивающие взаимодействия между дефектами и атомами водорода можно объяснить наличием сжимающего напряжения вокруг дефекта.

Межфазное взаимодействие

Было замечено, что большинство водородных ловушек имеют очень ограниченную растворимость в железе из-за их высокой реакционной способности. Вместо этого эти потенциальные водородные ловушки существуют в железе в виде включений или выделений вторых

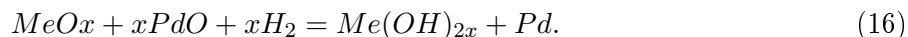
фаз, таких как оксиды, карбонитриды, интерметаллические включения и т. д. Сообщалось о нескольких исследованиях внутренних границ, служащих в качестве водородных ловушек [30]. Дальнейшие исследования в этой области по-прежнему необходимы, поскольку водородные ловушки при сварке стали преимущественно связаны с внутренними границами в широком диапазоне температур.

Некоторые выделения, например TiC, считаются необратимыми ловушками, энергия связи которых изменяется со степенью когерентности границы матрица-выделение [31, 32, 33]. Различные экспериментальные методы показывают противоречивые результаты относительно того, как изменяется энергия связи со степенью когерентности границы раздела Ti (C, N). Одно из ранних наблюдений Бернштейна и Прессшюра, использующих методы водородопроницаемости [31], показало, что крупные некогерентные частицы TiC выделяются в чистом железе, действуя как необратимые ловушки с большой энергией связи до 95 кДж/моль. Валентини с соавторами [30] исследовал сплавы Fe-Ti. В этих исследованиях количество ловушек, как обратимых, так и необратимых, определялось как функция термообработки. Было показано, что выделения Ti (C, N) (менее 350 Å) ведут себя как необратимые ловушки. Одним из недостатков исследования водородных ловушек в результате измерений проницаемости образцов стали, содержащих включения с различными размерами и распределениями, является трудность разделения влияния изменения плотности мест скопления ловушек на энергию связи. Плотность мест скопления ловушек, безусловно, будет уменьшаться, когда сталь подвергается термообработке при более высокой температуре. Этот эффект может превзойти любое увеличение энергии связи из-за изменения когерентности границы раздела включение-матрица.

Смешанные взаимодействия между атомами водорода и ловушками

Как правило, водородная ловушка имеет два или более типов взаимодействий. Ряд исследователей [6, 16] полагают, что большая часть энергии связи ловушек возникает из-за сопряженного поведения физических и химических взаимодействий, поскольку каждое физическое искажение решетки всегда сопровождается электронным возмущением. Наглядным примером такого взаимодействия является краевая дислокация – привлекательный химический характер возникает за счет смещения атомов решетки полем растягивающего напряжения, а физический характер возникает из-за взаимодействия с ядром дислокации [1, 2, 26].

В случае обратимых ловушек смешанный характер их взаимодействия с водородом прослеживался во взаимодействии водорода и кислорода на границах металл/оксид в палладии, легированном алюминием, марганцем, цинком или цирконием [34]. В окисленных образцах Pd-Me (Me – ранее упомянутый легирующий элемент) образуются оксиды. Эти оксиды действуют как необратимые ловушки с энергией связи ловушки равной 90 кДж/моль. При повторном нагревании эти оксиды начинают выделять водород при температуре около 300°C. Предполагается, что слой кислорода окружает частицы оксида MeOx, и этот слой частично относится к оксиду MeOx и частично связан с атомом палладия в матрице. Для поддержания стехиометрии стабильных оксидов необратимые водородные ловушки описываются как:



Рассчитанные энергии связи ловушек от этой реакции дают значения от 106 до 130 кДж/моль для различных образующих оксиды металлов (Me). Эти величины почти равны по величине энтальпии образования воды (равной –119 кДж/моль) и хорошо согласуются с необратимой энергией ловушки 90 кДж/моль, определенной экспериментально. Поэтому логично предположить, что необратимые ловушки в этих оксидах образуются за счет О-Н-связей на границе Pd/оксид. Однако не все границы раздела оксид-металл являются такими прочными ловушками.

Энергия ловушки приблизительно –10 кДж/моль наблюдалась в ниобии [35]. Несмотря на то, разницу –20 кДж/моль в энергии связи, вытекающей из различного исходного состояния твердого раствора в палладии в отличие от матрицы ниобия [36], следует принимать

во внимание при сравнении этих результатов. Было высказано мнение о том, что склонность кислорода в ниобии к образованию О-Н-связей меньше, чем более выраженная конкурирующая реакция с образованием NbO. Поскольку палладий не образует стабильного оксида, эта конкурирующая реакция отсутствует в палладии.

Было обнаружено, что оксид становится обратимым с энергиями ловушек при-близительно -30 кДж/моль, который находится между измеренными энергиями связи водорода от -20 до -60 кДж/моль для краевых дислокаций в палладии [37]. Образование подобной обратимой ловушки обусловлено как упругим взаимодействием с поверхностью раздела, так и небольшим вкладом химического взаимодействия с химическими веществами на границе раздела.

2.3. Общие принципы водородного охрупчивания при наличии в металле водородных ловушек

Прессшур и Бернштейн [7, 31], основываясь на работе со сплавами систем Fe-Ti-C, предложили модель, которая предполагает, что водородное охрупчивание будет происходить в местах скопления ловушек, где образуется достаточное количество водорода. Растрескивание будет происходить в тех областях, где скорее достигается критическая концентрация. Другими словами, охрупчивание будет происходить, когда количество захваченного водорода при заданных микроструктурных дефектах превысит критическую величину для материала. Экспериментальные результаты показали, постоянное соотношение между характером ловушек; либо они уменьшают время достижения критической концентрации, либо они распределяют водород в материале таким образом, что критическая концентрация не может быть достигнута.

Тивари с соавторами [42] согласились с концепцией критической концентрации, но при изучении внутреннего водородного охрупчивания для мягких и мартенситноста-реющих сталей, они высказали мнение о том, что помимо критической концентрации водорода в местах скопления ловушек должна быть достигнута некоторая критическая концентрация напряжений, для того, чтобы зародышевые пустоты могли способствовать пластическому разрушению.

Измерения растворимости водорода при высоких давлениях и несоответствие между диффузией при теоретических и экспериментальных исследованиях при низких температурах привело к более подробному рассмотрению влияния ловушек на коэффициент диффузии водорода. Авторы работ [8, 12, 22] исследовали ловушки с теоретической точки зрения и рассматривали влияние различных типов ловушек в различных узлах решетки на коэффициент диффузии водорода в стали.

Макнабб и Фостер [8] подтвердили, что коэффициент диффузии D является не только функцией температуры, но также зависит от некоторых других неучтенных переменных, связанных с упрочнением, которое испытывает материал. Таким образом, они сомневались в справедливости законов Фика и описании решений уравнения диффузии для простых геометрических форм с учетом ловушечного эффекта. Значение явных констант диффузии для толстых образцов дано в уравнении (17):

$$D_{app} = \frac{D_{latt}}{1 + \frac{Nk}{p}}, \quad (17)$$

где D_{latt} — коэффициент диффузии ловушек в свободной решетке, N — число участков ловушек на единицу объема материала, p — параметр скорости высвобождения, который зависит от температуры и природы ловушки, но не зависит от локальной концентрации ловушек и диффундирующего водорода, и k — параметр ловушки.

Ориани [12] ввел предельное решение математической модели водородных ловушек, предложенной Макнаббом и Фостером [8] для случая быстрого локального равновесия между оста-

точным и диффузионно-подвижным водородом. Выражение Ориани для явного коэффициента диффузии водорода дано в уравнении (18):

$$D_{app} = D_{latt} \frac{c_L}{c_L + c_T(1 - \Theta_T)}, \quad (18)$$

где c_L — концентрация водорода в решетке, c_T — концентрацию водорода в местах расположения ловушек, Θ_T — доля занятых ловушек.

Койева [43] оспаривал предположение Ориани о том, что основой для локального равновесия между подвижными и захваченными скоплениями водорода является постоянство энергии активации диффузии вплоть до мест скопления ловушек. Он утверждал, что, так как диффузия контролирует скорость приближения к равновесию, то очевидно, коэффициент диффузии не может быть получен из предполагаемого равновесного состояния. Поэтому Койева получил выражение для коэффициента диффузии на основе модели, которая учитывает изменение энергии активации диффузии вблизи ловушек, ΔE . Если $E = 0$, то его выражение совпадает с выражением Ориани. Наконец, Койева исследовал различия в ловушках и параметры выхода из мест скоплений для четырехгранной или восьмигранной ОЦК решетки.

О положительном эффекте, вызванном мелкодисперсными и равномерно распределенными необратимыми ловушками, сообщалось Луппо и Овьеро-Гарсиа [44]. Исследуя сталь ASTM A-516 G60 после различных видов термической обработки они пришли к выводу о том, что существует прямая связь между восприимчивостью к водородной хрупкости и количеством десорбированного водорода, предполагая, что диффузионно-подвижный водород в большей степени способствует охрупчиванию металла, по сравнению с остаточным (заклученном в коллекторах). Луппо и Овьеро-Гарсиа [44] отметили, что гетерогенно распределенные обратимые ловушки в закаленной стали, такие как мартенситные рейки и границы исходных аустенитных зерен, способствуют локализации водорода, что в конечном счете приводит к высокой водородочувствительности стали. При закалке стали ASTM A-516 G60 от 453 K на скоплениях дислокаций в мартенсите происходит сегрегация мелких и равномерно распределенных карбидных частиц (ϵ -карбидов). Было показано [44], что эти мелкие ϵ -карбиды, проявляя себя в качестве необратимых водородных ловушек, в дополнение к уменьшению плотности дислокаций после закалки, повышают стойкость стали к водородному охрупчиванию.

Другими словами, обратимые водородные ловушки являются более опасными, чем те, что являются необратимыми. Более того, когда водород накапливается в обратимой ловушке, он способен преодолевать энергетический барьер и мигрировать к соседнему зарождающемуся скоплению ловушек в количествах, достаточных для развития трещины и дальнейшего охрупчивания.

3. Заключение

Одним из наиболее существенных выводов для влияния ловушек на явление охрупчивания является то, что не все ловушки являются потенциальными местами для зарождения трещины. Некоторые свойства ловушек, могут быть использованы при контроле охрупчивания материала. К таким свойствам относятся [42]:

1. высокие концентрации водорода в ловушках, которые могут спровоцировать зарождение трещин;
2. количество ловушек должно быть достаточно многочисленным, чтобы они захватывали водород, который мог бы концентрироваться в более опасных зонах;
3. ловушки должны быть необратимыми, таким образом, чтобы не выпускать водород и тем самым снижать скорость растрескивания;

4. ловушки должны быть равномерно распределены в структуре металла.

На основе вышеуказанных свойств можно сделать вывод о том, что наличие в металлах высокоэнергетических водородных ловушек приводит к снижению диффузионной подвижности водорода, который тем самым исключается из процесса охрупчивания. Дальнейшее развитие теории водородных ловушек является перспективным направлением для создания новых материалов и их использовании в реальных условиях при комплексном воздействии термомеханических и коррозионных факторов, и позволит диагностировать изменение физикомеханических свойств различных материалов при работе в различных коррозионных средах, содержащих водород.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hydrogen interactions with defects in crystalline solids / S.M. Myers, M.I. Baskes, H.K. Birnbaum, J.W. Corbett, G.G. DeLeo, S.K. Estreicher, E.E. Mailer, P. Jena, N.M. Johnson, R. Kirchheim, S.J. Pearton, M.J. Stavola // *Rev. Mod. Phys.* 1992. Vol. 64. № 2. P. 559–617.
2. Сергеев Н.Н., Кутепов С.Н. О взаимодействии водорода с дефектами кристаллической решетки в металлах и сплавах // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки.* 2017. Вып. 4. С. 131–141.
3. Накопление и транспорт водорода в ферритно-мартенситной стали РУСФЕР-ЭК-181 / Е.А. Денисов, Т.Н. Компаниец, М.А. Мурзинова, А.А. Юхимчук (мл.) // *Журнал технической физики.* 2013. Т. 83. № 6. С. 38–44.
4. Развитие повреждаемости и обезуглероживание высокопрочных низколегированных сталей в условиях водородного охрупчивания / Н.Н. Сергеев, А.Н. Чуканов, В.П. Баранов, А.А. Яковенко // *Металловедение и термическая обработка металлов.* 2015. № 2. С. 4–9.
5. Dabah E., Lisitsyn V., Eliezer D. Performance of hydrogen trapping and phase transformation in hydrogenated duplex stainless steels // *Mater. Sci. Eng., A.* 2010. Vol. 527. pp. 4851–4857.
6. Bernstein I.M., Pressouyre G.M. The role of traps in the microstructural control of hydrogen embrittlement of steels // *Hydrogen degradation of ferrous alloys; Editors R.A. Oriani, J.P. Hirth and M. Smialowski. Noyes Publications. New Jersey, 1985. pp. 641–685.*
7. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. An example of the effect of hydrogen trapping on hydrogen embrittlement // *Metall. Trans. A.* 1981. Vol. 12A. P. 835–844.
8. McNabb A., Foster P.K. A new analysis of the diffusion of hydrogen in iron and ferritic steels // *Trans. Met. Soc. AIME.* 1963. Vol. 227. № 3. pp. 618–627.
9. Lee H.G., Lee J.Y. Hydrogen trapping by TiC particles in iron // *Acta Metall.* 1984. Vol. 32. pp. 131–136.
10. Johnson H.H. Hydrogen in iron // *Metall. Trans. A.* 1988. Vol. 19A. P. 691–707.
11. Iino M. Hydrogen-defect interactions and hydrogen-induced embrittlement in iron, steel and other metals // *Proceedings of Conference on Hydrogen and Materials. Beijing, China. 9-13 May 1988. pp. 1–8.*
12. Oriani R.A. The diffusion and trapping of hydrogen in steel // *Acta Metall.* 1970. Vol. 18. pp. 147–157.

13. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. A kinetic trapping model for hydrogen-induced cracking // *Acta Metall.* 1979. Vol. 27. pp. 89–100.
14. Pressouyre G.M. A classification of hydrogen traps in steel // *Metall. Trans. A.* 1979. Vol. 10A. pp. 1571–1573.
15. Hirth J.P. Effects of hydrogen on the properties of iron and steel // *Metall. Trans. A.* 1980. Vol. 11A. pp. 861–890.
16. Pressouyre G.M. Trap theory of hydrogen embrittlement // *Acta Metall.* 1980. Vol. 28. pp. 895–911.
17. Использование водородных ловушек для контроля процесса водородного растрескивания сварных соединений высокопрочных сталей / Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Н.Е. Стариков, О.В. Пантюхин // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки.* 2018. Вып. 4. С. 344–356.
18. Troiano A.R. The role of hydrogen and other interstitials in the mechanical behavior of metals // *Trans. of The ASM.* 1960. Vol. 52. pp. 54–80.
19. Weinstein M., Elliott J.F. Solubility of hydrogen in liquid iron alloys // *Trans. Met. Soc. AIME.* 1963. Vol. 227. № 3. pp. 382–393.
20. Sigworth G.K., Elliot J.F. The thermodynamics of liquid dilute iron alloys // *Met. Sci.* 1974. Vol. 8. pp. 298–310.
21. Mabuchi H., Nakao H. The effects of excess aluminum on mechanical properties of Mn-Mo, Mn-Mo-Ni and Mn-Mo-Ni-Cr steels with regard to solute interactions // *Trans. ISIJ.* 1983. Vol. 23. pp. 504–512.
22. Oates W.A., Flanagan T.B. The Solubility of Hydrogen in Transition Metals and Their Alloys // *Prog. Solid State Chem.* 1981. Vol. 13. № 3, pp. 193–283.
23. Olson D.L., Maroef I., Lensing C., Smith D., Wildeman T., Eberhart M. // in book: *Hydrogen Management in Steel Weldments*; ed. J.L. Davidson and D.L. Olson. Melbourne, Australia, DSTO and WTIA. 1996. pp. 1–19.
24. Iino M. A more generalized analysis of hydrogen trapping // *Acta Metall.* 1982. Vol. 30. pp. 367–375.
25. Hirth J.P. Lothe J. *Theory of dislocations*; 2rid ed. New York: Wiley, 1982. 857 p.
26. Кутепов С.Н. О некоторых аспектах взаимодействия водорода с дислокационными скоплениями в металлах и сплавах // XIV Российская ежегодная конференция молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов» Москва. 17-20 октября 2017 г. / Сб. материалов. М.: ИМЕТ РАН, 2016. С. 42–44.
27. Kirchheim R., Hirth J.P. Hydrogen adsorption at cracks in Fe, Nb and Pd // *Scr. Metall.* 1982. Vol. 16. pp. 475–478.
28. Zhang T.-Y., Hack J. The equilibrium concentration of hydrogen atoms ahead of a mixed mode I-mode III crack tip in single crystal iron // *Metall. Mater. Trans. A.* 1999. Vol. 30A. pp. 155–159.
29. Hirth J.P., Carnahan B. Hydrogen adsorption at dislocations and cracks in Fe // *Acta Metall.* 1978. Vol. 26. pp. 1795–1803.

30. Influence of titanium and carbon contents on the hydrogen trapping of microalloyed steels / R. Valentini, A. Solina, S. Matera, P. Gregorio // *Metall. Mater. Trans. A*. 1996. Vol. 27A. № 12. pp. 3773–3780.
31. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. A quantitative analysis of hydrogen trapping // *Metall. Trans. A*. 1978. Vol. 9A. pp. 1571–1580.
32. Lee H. G. Hydrogen trapping by TiC particles in iron / H. G. Lee, J. Y. Lee // *Acta Metall.* 1984. Vol. 32. pp. 131–136.
33. Lee S.M., Lee J.Y. The trapping and transport phenomena of hydrogen in nickel // *Metall. Mater. Trans. A*. 1986. V. 17A. pp. 181–187.
34. Huang X.Y, Mader W., Kirchheim R. Hydrogen and oxygen at metal/oxide interfaces // *Acta Metall. et Mater.* 1991. Vol. 39. № 5. pp. 893–907.
35. McLellan R.B. Thermodynamics and diffusion behavior of interstitial solute atoms in non-perfect solvent crystals // *Acta Metall.* 1979. Vol. 27. pp. 1655–1663.
36. Fromm E., Gebhardt E. *Gase und Kohlenstoff in Metallen*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
37. Kirchheim, R. Interaction of hydrogen with dislocations in palladium – II. Interpretation of activity results by a Fermi-Dirac distribution / R. Kirchheim // *Acta Metall.* 1981. Vol. 29. № 5. pp. 845–853.
38. Krom A., Bakker A. Hydrogen trapping models in steel // *Metall. Trans. B*. 2000. Vol. 31B. pp. 1475–1482.
39. Власов Н.М., Зазноба В.А. Влияние атомов водорода на подвижность краевых дислокаций // *Физика твердого тела*. 1999. Т. 41. № 3. С. 451–453.
40. Кутепов С.Н. Водородное усиление локализации пластичности в металлах и сплавах // Сб. матер. XIII Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов». М.: ИМЕТ РАН, 2016. С. 40–41.
41. Нагорных И.Л., Бурнышев И.Н. Молекулярно-динамическое моделирование поведения краевой дислокации с водородной атмосферой Коттрелла в альфа-железе // *Химическая физика и мезоскопия*. 2015. Т. 17. № 1. С. 111–116.
42. A study of internal hydrogen embrittlement of steels / G.P. Tiwari, A. Bose, J.K. Chakravartty, S.L. Wadekar, M.K. Totlani, R.N. Arya, R.K. Fotedar // *Mater. Sci. Eng., A*. 2000. A286. pp. 269–281.
43. Koiwa M. Trapping effect in diffusion of interstitial impurity atoms in BCC lattices // *Acta Metall.* 1974. Vol. 22. pp. 1259–1268.
44. Luppo M.I., Ovejero-Garcia J. The influence of microstructure on the trapping and diffusion of hydrogen in a low carbon steel // *Corrosion Science*. 1991. Vol. 32. № 10. pp. 1132–1136.

REFERENCES

1. Myers S.M., Baskes M.I., Birnbaum H.K., Corbett J.W., DeLeo G.G., Estreicher S.K., Mailer E.E., Jena P., Johnson N.M., Kirchheim R., Pearton S.J., Stavola M.J. 1992, “Hydrogen interactions with defects in crystalline solids”, *Rev. Mod. Phys*, Vol. 64. № 2. pp. 559–617.

2. Sergeev N.N., Kutepov S.N. 2017, "On the interaction of hydrogen with crystal lattice de-fects in metals and alloys", *Izvestiya Tula State University. Technical sciences*, vol. 4. pp. 131–141.
3. Denisov E.A., Companietz T.N., Murzinova M.A., Yukhimchuk A.A. 2013, "Accumulation and transport of hydrogen in ferrite-martensitic steel RUSFER-EK-181", *Journal of Technical Physics*, vol. 83. No. 6. pp. 38–44.
4. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. 2015, "Development of damage and decarburization of high-strength low-alloy steels under conditions of hydrogen embrittlement", *Metallurgy and heat treatment of metals*, No. 2. pp. 4-9.
5. . Dabah E., Lisitsyn V., Eliezer D. 2010, "Performance of hydrogen trapping and phase transformation in hydrogenated duplex stainless steels", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. 527. pp. 4851–4857.
6. Bernstein I.M., Pressouyre G.M. 1985, "The role of traps in the microstructural control of hydrogen embrittlement of steels", *Hydrogen degradation of ferrous alloys*, Noyes Publications. New Jersey, pp. 641–685.
7. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. 1981, "An example of the effect of hydrogen trapping on hydrogen embrittlement", *Metall. Trans*, Vol. 12A. pp. 835–844.
8. McNabb A., Foster P.K. 1963, "A new analysis of the diffusion of hydrogen in iron and ferritic steels", *Trans. Met. Soc. AIME*, Vol. 227. № 3. pp. 618–627.
9. Lee H.G., Lee J.Y. 1984, "Hydrogen trapping by TiC particles in iron", *Acta Metall*, Vol. 32. pp. 131–136.
10. Johnson H.H. 1988, "Hydrogen in iron", *Metall. Trans*, Vol. 19A. pp. 691–707.
11. Iino M. 1988, "Hydrogen-defect interactions and hydrogen-induced embrittlement in iron, steel and other metals", *Proceedings of Conference on Hydrogen and Materials*. Beijing, pp. 1–8.
12. Oriani R.A. 1970, "The diffusion and trapping of hydrogen in steel", *Acta Metall*, Vol. 18. pp. 147–157.
13. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. 1979, "A kinetic trapping model for hydrogen-induced cracking", *Acta Metall*, Vol. 27. pp. 89–100.
14. Pressouyre G.M. 1979, "A classification of hydrogen traps in steel", *Metall. Trans*, Vol. 10A. pp. 1571–1573.
15. Hirth J.P. 1980, "Effects of hydrogen on the properties of iron and steel", *Metall. Trans*, Vol. 11A. pp. 861–890.
16. Pressouyre G.M. 1980, "Trap theory of hydrogen embrittlement", *Acta Metall*, Vol. 28. pp. 895–911.
17. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Gvozdev A.E., Starikov N.E., Pantyukhin O.V. 2018, "The use of hydrogen traps to control the process of hydrogen cracking of welded joints of high-strength steels", *Izvestiya Tula State University. Technical sciences*, Issue 4. pp. 344–356.
18. Troiano A.R. 1960, "The role of hydrogen and other interstitials in the mechanical behavior of metals", *Trans. of The ASM*, Vol. 52. pp. 54–80.
19. Weinsten M., Elliott J.F. 1963, "Solubility of hydrogen in liquid iron alloys", *Trans. Met. Soc. AIME*, Vol. 227. № 3. pp. 382–393.

20. Sigworth G.K., Elliot J.F. 1974, "The thermodynamics of liquid dilute iron alloys", *Met. Sci.*, Vol. 8. pp. 298–310.
21. Mabuchi H., Nakao H. 1983, "The effects of excess aluminum on mechanical properties of Mn-Mo, Mn-Mo-Ni and Mn-Mo-Ni-Cr steels with regard to solute interactions", *Trans. ISIJ*. Vol. 23. pp. 504–512.
22. Oates W.A., Flanagan T.B. 1981, "The Solubility of Hydrogen in Transition Metals and Their Alloys", *Prog. Solid State Chem*, Vol. 13. № 3, pp. 193–283.
23. Olson D.L., Maroef I., Lensing C., Smith D., Wildeman T., Eberhart M. 1996, in book: *Hydrogen Management in Steel Weldments*, Melbourne, Australia, DSTO and WTIA. pp. 1–19.
24. Iino M. 1982, "A more generalized analysis of hydrogen trapping", *Acta Metall*, Vol. 30. pp. 367–375.
25. Hirth J.P. Lothe J. 1982, *Theory of dislocations*; 2rid ed. New York: Wiley. 857 p.
26. Kutepov S.N. 2016, "On some aspects of the interaction of hydrogen with dislocation clusters in metals and alloys", *XIV Russian Annual Conference of Young researchers and postgraduates "Physico-chemistry and technology of inorganic materials"*, *Collection of materials*. pp. 42–44.
27. Kirchheim R., Hirth J.P. 1982, "Hydrogen adsorption at cracks in Fe, Nb and Pd", *Scr. Metall*, Vol. 16. pp. 475–478.
28. Zhang T.-Y., Hack J. 1999, "The equilibrium concentration of hydrogen atoms ahead of a mixed mode I-mode III crack tip in single crystal iron", *Metall. Mater. Trans*, Vol. 30A. pp. 155–159.
29. Hirth J.P., Carnahan B. 1978, "Hydrogen adsorption at dislocations and cracks in Fe", *Acta Metall*, Vol. 26. pp. 1795–1803.
30. Valentini R., Solina A., Matera S., Gregorio P. 1996, "Influence of titanium and carbon contents on the hydrogen trapping of microalloyed steels", *Metall. Mater. Trans*, Vol. 27A. № 12. pp. 3773–3780.
31. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. 1978, "A quantitative analysis of hydrogen trapping", *Metall. Trans*, Vol. 9A. pp. 1571–1580.
32. Lee H.G., Lee J Y. 1984, "Hydrogen trapping by TiC particles in iron", *Acta Metall*, Vol. 32. pp. 131–136.
33. Lee S.M., Lee J.Y. 1986, "The trapping and transport phenomena of hydrogen in nickel", *Metall. Mater. Trans*, V. 17A. pp. 181–187.
34. Huang X.Y, Mader W., Kirchheim R. 1991, "Hydrogen and oxygen at metal/oxide interfaces", *Acta Metall. et Mater*, Vol. 39. № 5. pp. 893–907.
35. McLellan R.B. 1979, "Thermodynamics and diffusion behavior of interstitial solute atoms in non-perfect solvent crystals", *ActaMetall*, Vol. 27. pp. 1655–1663.
36. Fromm E., Gebhardt E. 1976, *Gase und Kohlenstoff in Metallen*. Berlin. 711 p.
37. Kirchheim, R. 1981, "Interaction of hydrogen with dislocations in palladium – II. Interpretation of activity results by a Fermi-Dirac distribution", *Acta Metall*, Vol. 29. № 5. pp. 845–853.
38. Krom A., Bakker A. 2000, "Hydrogen trapping models in steel", *Metall. Trans*, Vol. 31B. pp. 1475–1482.

39. Vlasov N.M., Zaznoba V.A. 1999, "The influence of hydrogen atoms on the mobility of edge dislocations", *Solid State Physics*, Vol. 41. No. 3. pp. 451–453.
40. Kutepov S.N. 2016, "Hydrogen enhancement of plasticity localization in metals and alloys", *Collection of Materials. XIII Russian Annual Conference of Young Researchers and Postgraduates "Physico-chemistry and technology of inorganic materials"*, pp. 40–41.
41. Nagornykh I.L., Burnyshev I.N. 2015, "Molecular dynamic modeling of the behavior of a marginal dislocation with a Cottrell hydrogen atmosphere in alpha iron", *Chemical physics and mesoscopy*, Vol. 17. No. 1. pp. 111–116.
42. Tiwari G.P., Bose A., Chakravartty J.K. , Wadekar S.L., Totlani M.K., Arya R.N., Fotedar R.K., 2000, "A study of internal hydrogen embrittlement of steels", *Mater. Sci. Eng.*, A286. pp. 269–281.
43. Koiwa M. 1974, "Trapping effect in diffusion of interstitial impurity atoms in BCC lattices", *Acta Metall*, Vol. 22. pp. 1259–1268.
44. Luppo M.I., Ovejero-Garcia J. 1991, "The influence of microstructure on the trapping and diffusion of hydrogen in a low carbon steel", *Corrosion Science*, Vol. 32. № 10. pp. 1132–1136.

Получено: 29.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 378.14

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-258-268

**Изучение и использование рекурсивных алгоритмов
в подготовке учителя информатики**

Ю. М. Мартынюк, В. С. Ванькова, С. В. Даниленко

Мартынюк Юлия Михайловна — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juliamart@ya.ru

Ванькова Валентина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: vsvankova@gmail.com

Даниленко Софья Валерьевна — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: sv.danilenko@gmail.com

Аннотация

В статье обосновывается значимость изучения рекурсии студентами направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование профиля Информатика, а также студентами второй и девятой укрупненных групп, связанных с ИТ-направлениями. Анализируются работы Есаяна А. Р., составляющие методологическую и теоретическую базу обучения студентов Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого в области построения и использования рекурсивных алгоритмов. Приводится обзор актуальных исследований в области формирования и развития математической культуры будущих педагогов и специалистов ИТ-направлений посредством изучения рекурсии, методических особенностей изучения рекурсивных алгоритмов как основы развития мировоззрения и научно-исследовательских навыков студентов, примеров эффективности использования рекурсивных построений и функций при решении практико-ориентированных задач.

Авторами описана логика изучения основ рекурсии, принципы отбора содержания, необходимого для изучения данной темы будущими педагогами и специалистами ИТ-направлений. Предлагаемое содержание занятий основывается не только на теоретическом изучении базовых понятия данной предметной области, но и рассмотрении убедительных неопровержимых доказательств существования и красоты рекурсивных объектов различной природы. Изучение практического материала и решение задач предлагается выстраивать в соответствии с дидактическим принципом «от простого к сложному»: от самых простых для восприятия рекурсивных алгоритмов до эффективных алгоритмов сортировки и поиска на динамических структурах данных. Данный подход, по мнению авторов, позволяет студентам оценить значимость и эффективность рекурсивных методов обработки информации и сформировать профессиональные компетенции разработки и применения оптимальных алгоритмов решения практико-ориентированных задач.

Ключевые слова: Рекурсия, рекурсивный алгоритм, рекурсивная функция, оптимальный алгоритм, эффективность, обработка информации, программирование, педагогическое образование, подготовка учителя информатики, математическая культура.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Ю. М. Мартынюк, В. С. Ванькова, С. В. Даниленко. Изучение и использование рекурсивных алгоритмов в подготовке учителя информатики // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 258–268.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 378.14

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-258-268

**Study and use of recursive algorithms
in computer science teacher training**

Ju. M. Martynyuk, V. S. Vankova, S. V. Danilenko

Martynyuk Julia Mikhailovna — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: juliamart@ya.ru

Vankova Valentina Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: vsvankova@gmail.com

Danilenko Sofya Valerievna — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: sv.danilenko@gmail.com

Abstract

The article substantiates the importance of studying recursion by students of the 44.03.05 Pedagogical education profile of Informatics, as well as by students of the second and ninth enlarged groups associated with IT areas. The works of Esayan A.R. are analyzed, which form the methodological and theoretical basis for teaching students of the Tula State Pedagogical University in the field of construction and use of recursive algorithms. An overview of current research in the field of the formation and development of the mathematical culture of future teachers and specialists in IT areas through the study of recursion, methodological features of the study of recursive algorithms as the basis for the development of the worldview and research skills of students, examples of the effectiveness of the use of recursive constructions and functions in solving practice-oriented tasks.

The authors describe the logic of studying the basics of recursion, the principles for selecting the content necessary for the study of this topic by future teachers and specialists in IT areas. The proposed content of the classes is based not only on the theoretical study of the basic concepts of this subject area, but also on the consideration of convincing irrefutable evidence of the existence and beauty of recursive objects of various nature. The study of practical material is proposed to be built in accordance with the didactic principle "from simple to complex": from the simplest recursive algorithms for perception to efficient sorting and search algorithms on dynamic data structures. This approach, according to the authors, allows students to evaluate the significance and effectiveness of recursive methods of information processing and form professional competencies in the development and application of optimal algorithms for solving practice-oriented problems.

Keywords: Recursion, recursive algorithm, recursive function, optimal algorithm, efficiency, information processing, programming, teacher education, computer science teacher training, mathematical culture.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Ju. M. Martynyuk, V. S. Vankova, S. V. Danilenko, 2022, "Study and use of recursive algorithms in computer science teacher training", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 258–268.

1. Введение

Актуальность.

Классический труд «Искусство программирования» математика и признанного эксперта в области компьютерных наук Дональда Кнута, по задумке автора, должен состоять из семи томов и двенадцати глав, одна из которых, на сегодняшний день еще не опубликованная, носит название «Рекурсия» [1]. Вместе с тем, особое внимание, которое Д. Кнут решил уделить рекурсивным алгоритмам в своей фундаментальной работе, которую в 1999 году признали одной из двенадцати лучших физико-математических монографий двадцатого столетия, доказывает особую значимость рекурсии в математике и программировании, как впрочем и в жизни вообще.

Изученность проблемы.

В 2001 году в свет выходит учебное пособие Альберта Рубеновича Есаяна «Обучение алгоритмизации на основе рекурсии» [2]. Пособие ориентировано на студентов педагогических вузов и имеет рекомендации УМО по направлениям педагогического образования Министерства образования РФ для использования в учебном процессе по специальности 030100 – «Информатика». Чуть позже состоится защита докторской диссертации А. Р. Есаяна по специальности 13.00.02 Теория и методика обучения и воспитания (информатика), в которой во главу угла был поставлен все тот же краеугольный вопрос: Почему учитель информатики должен изучать рекурсию? Элегантное доказательство гипотезы исследования расширило его рамки и позволило стать той базой, на которой основывается вся методологическая и теоретическая база обучения студентов нашего вуза построению рекурсивных алгоритмов [3]. Стоит отметить, что в данном случае речь идет не только о студентах направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование профиль Информатика, но и о студентах второй и девятой укрупненных групп, связанных с ИТ-направлениями.

Будучи основателем кафедры информатики и вычислительной техники в стенах Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Альберт Рубенович в каждой своей новой работе обязательно отдавал должное рекурсивным алгоритмам, отмечая их внутреннюю красоту и вычислительную мощь в тех случаях, когда традиционные итерационные механизмы не дают ожидаемого результата [4;5;6]. «Влюбленность» в рекурсию передалась от Альберта Рубеновича его сподвижникам и ученикам. На протяжении многих лет на кафедре под его непосредственным руководством были выполнены диссертационные исследования, защищены дипломные и курсовые работы, в каждой из которых отдавалась дань рекурсии.

Сегодня, вопросам изучения рекурсии при подготовки педагогических кадров, уделяется большое внимание. Так, в работах Добровольской Н. Ю., Гумерова А. Э., Мачковой Н. В., отмечается актуальность, описываются методические особенности изучения рекурсивных алгоритмов как основы развития научно-исследовательских навыков студентов [7;8]. Необходимость формирования и развития математической культуры будущих педагогов и специалистов ИТ-направлений, значимость рекурсии в данном процессе и организационные особенности ее изучения рассматриваются в работах Мирзоева М. С., Мадудина В. Н., Морозовой Е. В., Сафроновой И. В. и др. [9;10;11]. Различные аспекты применения рекурсивных методов при решении практико-ориентированных задач раскрыты в исследованиях Сергеева Р. С., Жукова А. О. и др. [12;13].

Целесообразность разработки темы.

Чем же хороша рекурсия? Почему при изучении и построении эффективных алгоритмов она столь важна и необходима? В поисках ответов на эти вопросы обратимся к упомянутому выше учебному пособию, в котором приводятся не только примеры решения классических задач рекурсивным способом, но и рассматривается математическая составляющая рекурсивных рассуждений и алгоритмов, а также дидактическая сторона затрагиваемых вопросов. «Более точно мы хотим показать, что на совокупность правил решения задач рекурсивными методами можно смотреть как на некую конкретную математическую реализацию метода Декарта. Это, на наш взгляд, важно не только в историческом, гуманистическом и философском аспектах, но и имеет несомненный дидактический смысл». [14, с. 67] Кроме того, А. Р. Есаян доказывает методологическую и практическую значимость для рекурсивных вычислений метода математической индукции, как особого вида дедуктивных умозаключений. Не секрет, что метод математической индукции играет важную роль не только в математике, но и в дидактике. Убедительные выкладки по отечественному и зарубежному опыту обучения рекурсии, приведенные в данном пособии и связанные с такими именами, как, уже упомянутый ранее Д. Кнут, а также Ф. Л. Бауэр, Г. Гооз, Д. Баррон, А. П. Ершов, Н. Вирт, Ч. Хоар, Дж. Маккарти, А. Г. Кушниренко, С. А. Абрамов и др., дают основание утверждать, что изучение рекурсии, как мощного инструмента построения более экономных, логически выверенных, прозрачных и естественных алгоритмов дает ощутимый результат при решении задач, в которых взаимодействуют рекурсивные по своей природе объекты (непрерывные дроби, степенные ряды, фракталы, возвратные последовательности, арифметические операции и т.п.). Подобного рода задачи достаточно часто решают представители многих профессий: учитель математики и информатики, программист, инженер, аналитик и др.

Научная новизна исследования

состоит в определении содержания, необходимого для изучения основ рекурсии будущими педагогами и специалистами ИТ-направлений, с целью повышения качества подготовки и формирования навыков применения оптимальных алгоритмов решения практико-ориентированных задач.

Целью исследования

является развитие у студентов способности понимать сущность и значение рекурсивных методов обработки информации, осознания того, что фундаментальное математическое знание является основой компьютерных наук.

Для достижения поставленной цели были определены следующие задачи: подобрать содержание и выстроить логику изучения теоретических основ рекурсии; разработать содержание практических занятий, позволяющих оценить значимость и эффективность решения задач рекурсивным методом.

Теоретическая и практическая значимость

исследования определяется обоснованием необходимости отбора содержания для обучения будущих педагогов и ИТ-специалистов рекурсивным методам решения задач с целью развития их профессиональных компетенций и навыков исследовательской деятельности.

2. Основная часть

Содержательная сторона изучения основ рекурсии и рекурсивных процессов подробно представлена в трех частях учебного пособия А. Р. Есаяна «Рекурсия в информатике» [15]. Данное содержание представлено девятнадцатью основными разделами, среди которых матрицы, фракталы, сортировки, возвратные последовательности, системы счисления, классические многочлены, перебор с возвратом, финансовые функции и др. В этих разделах не только собраны основные теоретические сведения, но и представлено достаточное количество интересных задач, побуждающих студентов при их рассмотрении находить дополнительные материалы, которые затем, нередко, переходят в курсовые и выпускные квалификационные работы. На лекционных занятиях по изучению рекурсии авторы статьи в обязательном порядке анализируют со студентами базовые понятия данной предметной области, к которым относятся: параметризация исходной задачи, база рекурсии, декомпозиция, рекурсивный процесс, рекурсивный стек, дерево рекурсивных вызовов, глубина рекурсии, динамическая рекурсивная база, отложенные вычисления, рекурсивная триада и т.д. Являясь педагогами и по образованию, и по призванию, следуя основным дидактическим принципам, сформулированным К. Д. Ушинским, в современных условиях цифровизации всех сфер жизни общества авторы организуют учебную деятельность будущих учителей и программистов таким образом, чтобы в сетевом пространстве ими были собраны убедительные неопровержимые доказательства существования и красоты рекурсивных объектов различной природы: от ветки дерева и детской песенки про море до множества Мандельброта и мудрости Конфуция. После такой работы студентов не нужно убеждать в необходимости серьезного внимания к рекурсивным алгоритмам, изучение которых авторы выстраивают в соответствии с дидактическим принципом «от простого к сложному».

В начальной точке располагаются самые простые для восприятия алгоритмы вычисления факториала натурального числа, наибольшего общего делителя двух целых неотрицательных чисел (алгоритм Евклида), а также алгоритмы, моделирующие основные арифметические операции: сложения, вычитания, умножения и деления. При этом, алгоритмы моделирования арифметических операций иллюстрируют понятия прямой и косвенной рекурсии. Например, рекурсивная функция моделирования операции сложения (синтаксис языка C++):

```
int sum(int a, int b)
{
    if (b==0) return a;

    else return sum(++a,--b);
}
```

представляет собой пример прямой рекурсии и служит основой для формирования функции моделирования операции умножения, иллюстрирующей понятие косвенной рекурсии:

```
int mult(int a, int b)
{
    if (b==0) return 0;

    else return sum(mult(a,--b),a);
}
```

```
}
```

Рекурсивные функции вычисления факториала числа и вычисления наибольшего общего делителя двух целых неотрицательных чисел (алгоритм Евклида) помогают разобраться с отложенными вычислениями и оптимизацией рекурсии. Первая функция (синтаксис языка Паскаль) предполагает отложенные вычисления, тогда как вторая представляет собой пример оптимизации рекурсии:

```
function fact(a:integer):longint;
```

```
begin
```

```
    if a=0 then fact:=1
```

```
    else fact:=fact(a-1)*a;
```

```
end;
```

```
function nod(a,b:integer):integer;
```

```
begin
```

```
    if b=0 then nod:=a
```

```
    else nod:=nod(b,a mod b);
```

```
end;
```

На следующем этапе детально изучается рекурсивный алгоритм вычисления элемента обратной последовательности Фибоначчи по его порядковому номеру (пример функции приведен в синтаксисе языка C++):

```
int fib(int n)
```

```
{
```

```
    if ((n==0)&&(n==1)) return 1;
```

```
    else return fib(n-1)+fib(n-2);
```

```
}
```

Здесь появляется возможность рассмотрения понятия глубины рекурсии, исследования дерева рекурсивных вызовов с его взрывами и каскадной рекурсией, анализа действий по созданию и использованию динамической рекурсивной базы, которая открывает путь к созданию эффективных, с точки зрения быстродействия и использования памяти, программ. Одной из таких программ может быть решена классическая задача о вычислении биномиальных коэффициентов, которые знакомы и школьникам, и студентам по треугольнику Паскаля и биному Ньютона. На этапе построения информационной модели студенты демонстрируют навыки работы с динамическими двумерными массивами, что служит индикатором высокого

уровня развития профессиональных навыков не только будущего учителя информатики, но и будущего программиста.

Еще одна область применения рекурсивных алгоритмов – это задачи сортировки и поиска. Быстрая и бинарная пирамидальная сортировки, сортировки слияниями, перебор с возвратом, бинарный поиск составляют тот необходимый минимум, который требует детального изучения с целью осознания красоты и эффективности данных алгоритмов по сравнению с их итерационными аналогами. Приведем пример функций, реализующих алгоритм бинарной пирамидальной сортировки (синтаксис языка C++):

```
void shift(int l, int r, int *x)
{
    int p1, p2, t;
    p1=2*l+1;
    p2=p1+1;
    if (p1<=r)
    {
        if (p2<=r)
            if (*(x+p2)>*(x+p1)) p1=p2;
        if (*(x+l)<*(x+p1))
        {
            t=*(x+l);
            *(x+l)=*(x+p1);
            *(x+p1)=t;
            shift(p1, r, x);
        }
    }
}

void build(int k, int r, int *x)
{

```

```
    shift(k, r, x);  
  
    if (k > 0) build(k-1, r, x);  
}
```

```
void sort(int r, int *x)  
{  
  
    int t;  
  
    t = *x;  
  
    *x = *(x+r);  
  
    *(x+r) = t;  
  
    shift(0, r-1, x);  
  
    if (r > 1) sort(r-1, x);  
}
```

Следует отметить, что трудоемкость данного алгоритма сопоставима с величиной $O(n * \log(n))$, что существенно меньше трудоемкости алгоритмов медленных сортировок ($O(n^2)$).

Понятие пирамиды и бинарного дерева поиска требуют хорошего знания динамических иерархических структур данных, использование которых в последнее время постоянно расширяется.

Дальнейшее развитие навыков использования рекурсии в прикладных и классических задачах погружает нас в область задач теории чисел. Это алгоритмы распознавания простых, совершенных, автоморфных и дружественных чисел, простых чисел Мерсенна, чисел Армстронга и др. При изучении данных алгоритмов строятся не только красивые рекурсивные функции, но и расширяются рамки общего кругозора, ведь у каждого из выбранных чисел есть своя увлекательная история. Как есть такая же история у задачи о Ханойских башнях и задачи Иосифа Флавия, решение которых неизменно вызывает интерес у будущих учителей и ИТ-специалистов.

3. Заключение

Представленное содержание отнюдь не охватывает всего многообразия рекурсивных объектов и алгоритмов. Достаточно сказать, что фракталы, финансовые функции, алгоритмы сжатия данных изучаются будущими специалистами только в рамках самостоятельной работы. Кроме того, в качестве тем для индивидуальных сообщений реферативного характера выбираются классические функции теории рекурсии: функции Маккарти, Кадью, Аккермана, приближение к основанию натурального логарифма по алгоритму Ламберта и др. Однако,

основы, заложенные при изучении указанного минимума теоретической базы и практических задач, позволяют расширять рамки знания и развивать умения по составлению эффективных рекурсивных функций, что является необходимым условием формирования профессиональных компетенций будущего педагога, инженера, ИТ-специалиста. Изучение рекурсии позволяет не только по-новому взглянуть на основы программирования, но и почувствовать внутреннюю гармонию, красоту и изящество рекурсивных объектов в природе, обществе, жизни вообще.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования / Пер с англ.; под общ. ред. Ю. В. Козаченко. М.: Вильямс, 2007. 712 с.
2. Есаян А. Р. Обучение алгоритмизации на основе рекурсии: учеб. пособие для студентов пед. вузов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2001. 215 с.
3. Есаян А. Р. Теория и методика обучения алгоритмизации на основе рекурсии в курсе информатики педагогического вуза: дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) Тула, 2001. 363 с.
4. Есаян А. Р. Знания, умения и навыки, связанные с рекурсией. // Педагогика как наука и как учебный предмет: тез. докладов меж-дунар. научн.-практ. конф. – Тула: изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2000. - С.100-104.
5. Есаян А. Р. Рекурсия как общеобразовательная ценность // Образование как ценность: сб. науч. тр. аспирантов и докторантов. Тула: изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 1998. С. 21-35.
6. Есаян А. Р. Решение задач с помощью рекурсии // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Всероссийской научной конференции. – Тула: изд-во ТулГУ, 2000. С. 140-141
7. Добровольская Н. Ю., Гумеров А. Э. Изучение рекурсивных алгоритмов с применением метода исследований // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П. А. Ларичева. – Вологда: изд-во: ИП Киселев А. В., 2017. С.317-319
8. Мачкова Н. В. Развивающее обучение и рекурсия // II Международная научно-исследовательская конференция по информатике и информационным и коммуникационным технологиям “INFO-эксперт”-2016: сборник научно-исследовательских работ. – Елец: Фонд содействия развитию интернет-медиа, ИТ-образования, человеческого потенциала “Лига интернет-медиа”, 2016. – С. 83-87.
9. Мирзоев М. С. Межпредметные связи математических дисциплин с информатикой как основа формирования математической культуры будущего учителя информатики // Преподаватель XXI век. 2008. № 3. С.7-15.
10. Мирзоев М. С. Рекурсивный метод как основа формирования и развития математической культуры будущих учителей информатики // Наука и школа. 2007. № 1. С.33-35.
11. Мадудин В. Н., Морозова Е. В., Сафронова И. В. Особенности содержания математических дисциплин при подготовке бакалавров прикладной информатики // Бакалавриат прикладной информатики: практика реализации основной образовательной программы:

монография. – Челябинск: Уральский государственный университет физической культуры, 2020. С.109-115.

12. Сергеев Р. С. Рекурсия как феномен моделирования объектов и явлений реального мира // Инженерная мысль: сборник докладов V Городской научно-практической конференции, посвященной году науки и технологий. – Казань: Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, 2021. С. 83-85.
13. Жуков А. О. Прогнозирование распространения COVID-19 на основе рекурсивных моделей // European Scientific Conference: сборник статей XX Международной научно-практической конференции. – Пенза: Наука и Просвещение, 2020. С.45-48.
14. Есаян А. Р. Обучение алгоритмизации на основе рекурсии: Учеб. пособие для студентов пед. Вузов. – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2001. 216 с.
15. Есаян А. Р. Рекурсия в информатике: Учебное пособие для студентов педагогических вузов: В 4 частях Тула: изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2000.

REFERENCES

1. Knut D. E., 2007, The Art of Programming / Translated from English; under total ed. Yu. V. Kozachenko. Moscow: Williams, 712 p.
2. Esayan A. R., 2001, "Teaching algorithmization based on recursion: textbook. allowance for students ped. universities." Tula: Publishing house of TSPU im. L. N. Tolstoy, 215 p.
3. Esayan A. R., 2001, Theory and methods of teaching algorithmization based on recursion in the course of informatics of a pedagogical university: dis. ... Dr. ped. Sciences: 13.00.02 - theory and methodology of training and education (by areas and levels of education) Tula, 363 p.
4. Esayan A. R., 2000, "Knowledge, skills and abilities related to recursion." // Pedagogy as a science and as a subject: abstract. reports of inter-dun. scientific-practical conf. - Tula: publishing house of the TSPU named after. L. N. Tolstoy, - P. 100-104.
5. Esayan A. R., 1998, "Recursion as a general educational value" // Education as a value: Sat. scientific tr. graduate students and doctoral students. Tula: publishing house of TSPU im. L.N. Tolstoy, pp. 21-35.
6. Esayan A. R., 2000, "Solving problems using recursion" // Modern problems of mathematics, mechanics, informatics: abstracts of the All-Russian Scientific Conference. - Tula: publishing house of TulGU, pp. 140-141.
7. Dobrovolskaya N. Yu., Gumerov A. E., 2017, "The study of recursive algorithms using the research method" // Tasks in teaching mathematics, physics and informatics: theory, experience, innovations: materials of the II International scientific and practical conference dedicated to the 125th anniversary of P. A. Larichev. - Vologda: publishing house: IP Kiselev A. V., P.317-319
8. Machkova N. V., 2016, "Developmental learning and recursion" // II International Research Conference on Informatics and Information and Communication Technologies "INFO-expert": collection of research papers. - Yelets: Foundation for the Promotion of the Development of Internet Media, IT Education, Human Potential "Internet Media League". - pp. 83-87.
9. Mirzoev M. S., 2008, "Interdisciplinary connections of mathematical disciplines with informatics as the basis for the formation of the mathematical culture of the future teacher of informatics" // Lecturer XXI century, № . 3. pp. 7-15.

10. Mirzoev M. S., 2007, "Recursive method as a basis for the formation and development of the mathematical culture of future informatics teachers" // Science and School, № 1. pp. 33-35.
11. Madudin V. N., Morozova E. V., Safronova I. V., 2020, "Features of the content of mathematical disciplines in the preparation of bachelors of applied informatics" // Bachelor of applied informatics: the practice of implementing the main educational program: monograph. - Chelyabinsk: Ural State University of Physical Culture, pp.109-115.
12. Sergeev R. S., 2021, "Recursion as a phenomenon of modeling objects and phenomena of the real world" // Engineering thought: collection of reports of the V City scientific and practical conference dedicated to the year of science and technology. - Kazan: Kazan State Technical University. A.N. Tupolev, pp. 83-85.
13. Zhukov A. O., 2020, "Predicting the spread of COVID-19 based on recursive models" // European Scientific Conference: collection of articles of the XX International Scientific and Practical Conference. - Penza: Science and Education, pp.45-48.
14. Esayan A. R., 2001, "Learning algorithmization based on recursion: Proc. allowance for students ped. universities." - Tula: Publishing House of the TSPU named after. L. N. Tolstoy, 216 p.
15. Esayan A. R., 2000, "Recursion in Informatics: A textbook for students of pedagogical universities: In 4 parts", Tula: publishing house of the TSPU. L. N. Tolstoy.

Получено: 01.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-269-290

Развитие концептуальных положений качественной теории¹

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhinu@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению эволюции основных положений качественной теории, под знаком которой происходило развитие всей математики XX в. В развитии качественной теории можно выделить несколько этапов с четко выраженными тенденциями: становление качественной теории, когда сложились новые подходы, новый язык и система понятий (конец XIX – 20-е гг. XX в.); следующий этап – широкое привлечение методов топологии и функционального анализа, вероятностных представлений и расширение качественной теории с выделением самостоятельных областей (конец 1920-х – середина XX в.); с середины XX в. по настоящее время – современный этап. Он выделяется тем, что в качественной теории воплотилось представление о математике как единой науке. Качественная теория вобрала в себя идеи и методы самых разных разделов (топологии, функционального анализа, теории групп Ли и др.). Объединяющая роль качественной теории заключается в том, что в ней воплощаются две культуры в математике, одна из них направлена на решение задач, а другая – на построение и осмысление теорий. В этом отношении качественная теория не просто конкретный раздел, а своеобразный подход к математическим проблемам. Особенностью современного этапа является еще невиданное сближение с областью приложений, особенно с физикой. Физика является не просто потребителем, она стимулировала кардинальные изменения самой математики. Становится трудно провести различимую границу между некоторыми разделами математики и теоретической физики. Качественная теория преобразила облик всей математики и ее приложений.

Ключевые слова: качественная теория, топология, топологическая инвариантность, динамическая система, локальное и глобальное описание.

Библиография: 72 названия.

Для цитирования:

Р. Р. Мухин. Развитие концептуальных положений качественной теории // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 269–290.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402 А.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-269-290

Development of the conceptual provisions of the qualitative theory²

R. R. Mukhin

Mukhin Ravil' Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The work is devoted to the study of the evolution of the main provisions of the qualitative theory, under the sign of which the development of all mathematics of the twentieth century took place. In the development of qualitative theory there are several stages with clearly defined trends: the formation of a qualitative theory, when new approaches, a new language and a system of concepts were formed (late 19th – 20s of the 20th century); the next stage is the widespread use of methods of topology and functional analysis, probabilistic representations and the expansion of qualitative theory with the allocation of independent areas (late 1920s – mid-twentieth century); from the middle of the twentieth century to the present – the modern stage. It is distinguished by the fact that the idea of mathematics as a single science was embodied in the qualitative theory. Qualitative theory has absorbed the ideas and methods of various branches (topology, functional analysis, the theory of Lie groups, etc.). The unifying role of a qualitative theory is that it embodies two cultures in mathematics, one of them is aimed at solving problems, and the other – at building and comprehending theories. In this respect, qualitative theory is not just a specific branch, but a peculiar approach to mathematical problems. A feature of the present stage is the still unprecedented convergence with the field of applications, especially with physics. Physics is not just a consumer, it has stimulated fundamental changes in mathematics itself. It becomes difficult to draw a distinguishable boundary between some branches of mathematics and theoretical physics. Qualitative theory has transformed the face of all mathematics and its applications.

Keywords: qualitative theory, topology, topological invariance, dynamical system, local and global description.

Bibliography: 72 titles.

For citation:

R. R. Mukhin, 2022, “Development of the conceptual provisions of the qualitative theory”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 269–290.

1. Введение

Эволюция качественной теории имеет длительную историю и здесь можно выделить несколько этапов. Эти этапы не следует понимать в явно хронологическом отношении, а больше как констатацию доминирующих тенденций.

Представления качественного характера постепенно складывались в математике Нового времени, это предыстория качественной теории. Но рождение собственно качественной теории происходит в конце XIX в. Далее, с последних двух десятилетий XIX до конца 20-х гг.

²The work was supported by the RFBR grant No. 20-011-00402 A.

XX в. происходит рождение качественной теории и ее становление. В следующий период (конец 1920-х гг. середина XX в.) качественная теория не только становится отдельной областью математики, но из нее самой выделяются самостоятельные разделы со своими задачами и методами исследования. И следующий, современный этап начался в конце 1950-х гг. и продолжается до настоящего времени. Здесь качественные методы охватили всю математику и вышли за ее пределы.

2. Предыстория

Качественная теория является закономерным результатом развития математики XIX в., которое определяется всей совокупностью политических, экономических, социальных условий того времени, изменением места и роли математики в обществе. Содержание математики XVIII в. заключается, главным образом, в освоении идейного наследия математики XVII в., когда в трудах Р. Декарта, П. Ферма, И. Ньютона, В.Г. Лейбница был заложен фундамент новой математики. XIX в. ознаменовался также переворотом в науке, сопоставимый с тем, что произошло в XVII в. Наука совершенно преобразилась, кардинальным образом изменилось миропонимание. XIX в. получил от предыдущего века новые разделы, составившие затем большие области математики, а также аналитическую и небесную механику, ставшие главными потребителями аналитических методов и источником задач, оказывающих мощное стимулирующее воздействие на развитие математики. Но что касается основ математики, тут все было зыбко и ненадежно. Преобладал подход, во многом навеянный непосредственным восприятием. Считалось, что любая непрерывная функция имеет производную, каждая ограниченная функция интегрируема. Не было ясного понимания предела, вопросов сходимости и т.д. Все это потребовало глубокого реформирования математического анализа. Развернувшаяся в 20-40-е гг. XIX в. реформа заложила новые каноны математической строгости и обоснованности. Утверждалась методология, направленная на выявление условий и границ применимости каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования, в частности, теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений, и четкое различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о разрешимости той или иной задачи. В то время Н. Х. Абелем была доказана неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени (1826), П. Ванцелом – невозможность с помощью циркуля и линейки решения известных еще с античности задач об удвоении куба и трисекции угла (1837). В высшей степени такой подход к строгости проявляется у К. Вейерштрасса («вейерштрассовская строгость»).

Идеи качественного характера носились в воздухе. Как пример можно привести теорию Ш. Штурма о колебаниях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка (1836) [1]. Но общая четкая постановка задач качественного характера, отдельного выделения таких задач является заслугой А. Пуанкаре [2, С. 163].

3. Рождение и становление качественной теории

Качественная теория зародилась из нескольких источников. Под качественной теорией поначалу понималась качественная теория дифференциальных уравнений. Одной из самых острых неразрешенных проблем в течение всей истории математики Нового времени являлось интегрирование дифференциальных уравнений. Во многом питательной средой здесь служили задачи механики и физики. Несмотря на известные успехи, возможности проинтегрировать уравнения в квадратурах оставались весьма ограниченными. Здесь наметилось несколько путей. С одной стороны, разрабатывались практические методы, когда с помощью разложения в ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений можно было получить

решения с требуемой степенью точности. Такой подход, несмотря на всю его во многих практически важных случаях достаточность, оставался внутренне неудовлетворительным. Это отчетливо видно в свете описанной выше реформы математического анализа. Другой подход был предложен С. Ли на основе созданной им теории непрерывных групп преобразований, где он попытался распространить идеи Э. Галуа по решению алгебраических уравнений на дифференциальные уравнения. Теория групп и алгебр Ли занимает в современной математике огромное место, но не разрешило в полной мере задачу интегрирования дифференциальных уравнений.

Старые методы оказались исчерпанными, требовались новые идеи. Пуанкаре предложил другой путь и поставил задачу качественного исследования дифференциальных уравнений. Основы качественной теории были изложены им в серии четырех мемуаров *Mémoire sur les courbes définies par une équations différentielle* («О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», 1881-1886) [3]. В начале первого мемуара Пуанкаре четко формулирует проблему:

«В громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям» [3, С. 11].

Качественные методы выявляют топологию всего множества решений, упор делается на решения как единого целого, а не индивидуальных решений, выражаемых конкретными функциями. В постановке задачи и разработке качественной теории интегрирования дифференциальных уравнений у Пуанкаре практически не было предшественников. Можно отметить связь теоретико-функциональных идей Б. Римана с качественной теорией, в которой геометрия стала способом рассуждений. Создание качественной теории явилось революционным шагом, сами основатели качественной теории не осознавали в полной мере разрыва с традициями классической математики, это была новая математика и для нее открылось целое поле приложений. Оказалось, что математика может быть иной, чем только исследование аналитических структур. Но такое понимание пришло лишь десятилетия спустя.

Другой источник качественной теории – теория устойчивости. Она имеет длительную историю. Но современная теория устойчивости сложилась, начиная с труда А. М. Ляпунова *Общая задача об устойчивости движения* (1892) [4]. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Далее он рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть невозмущенным, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [4, С. 28-29].

Бросается в глаза отход от традиционного подхода, подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях всего множества траекторий посредством привлечения возмущенного движения.

На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

для всех векторов $x(t)$ таких, что $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Отметим концептуальную важность введенных понятий *устойчивости* и *неустойчивости*. Понятие неустойчивости обрело первостепенное значение и содержательность в целом ряде научных направлений и было понято лишь позднее, в XX в. Науку XIX в. можно отнести к «эпохе устойчивости».

Еще одним источником качественной теории является старая, восходящая еще к Ньютону, проблема фигур равновесия вращающейся жидкой массы, которая привела к теории нелинейных интегральных уравнений. А. Эддингтон указывал, что «одна из самых глубоких загадок Вселенной заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов» [5]. С этих позиций становится ясной актуальность задачи о фигурах равновесия, которая остается труднейшей задачей математики и механики до настоящего времени и, видимо, не имеет общего решения. К. Маклорен (1742) уточнил результаты Ньютона, и нашел фигуры равновесия, представляющие эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена). Совершенно новый и неожиданный результат получил К. Г. Якоби. Он показал, что трехосный эллипсоид с тремя неравными осями, также может быть фигурой равновесия (эллипсоиды Якоби) [6]. Это было совершенно неожиданно, противоречило интуиции – фигура равновесия, не являющаяся телом вращения! Эллипсоиды Маклорена и Якоби представляют первое приближение, и видимо, это побудило Пуанкаре внимательно посмотреть, как формируются новые фигуры равновесия при наложении возмущения. Так появилось понятие бифуркации (1885) [7, Р. 49–50], когда происходит разделение качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. Понятие бифуркации имеет ключевое значение не только в качественной теории, а в общенаучном смысле.

Понятие бифуркации заняло центральное место в исследованиях Ляпунова по фигурам равновесия. Это привело его к исследованию нелинейных интегральных уравнений. Тогда, на рубеже веков интегральные уравнения являлись новым предметом для математики, до этого они встречались лишь как единичные примеры. Логика развития науки обычно следует пути от простого к сложному. В случае интегральных уравнений эта привычная логика оказалась нарушенной. Теория линейных и нелинейных интегральных уравнений зародилась и развивалась параллельно в одно и то же время в конце XIX – начале XX в. Нелинейные интегральные уравнения явились еще одним, менее известным, источником качественной теории и составляют ее заметную часть [8]. В теории нелинейных интегральных уравнений выкристаллизовался целый ряд понятий и методов качественного подхода. Среди них понятие бифуркации, со всей очевидностью показавшее принципиальное отличие нелинейных систем от линейных.

На первый план в качественной теории вышли геометрические представления, и совершенно закономерно, что с самого начала широко использовались понятия и методы другой области качественного характера – топологии. В. Г. Лейбниц в письме Х. Гюйгенсу (1679) высказал идею, реализация которой привела позднее к созданию топологии:

«Я полагаю, что нам нужен еще иной геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm) как Алгебра выражает величину» [9, С. 198].

Лейбниц ввел и сам термин *analysis situs* (анализ положения), так до XX в. называли топологию. Но до XIX в. идея выделения «геометрии положения», как предмета отдельного изучения от «геометрии величины» (по выражению К. Ф. Гаусса) не привлекала математиков. Выдающееся место в создании топологии принадлежит Б. Риману, который фактически заложил основы топологии поверхностей в своей работе об абелевых функциях [10]. Совершенно отчетливо предмет топологии определен в *Эрлангенской программе* Ф. Клейна: отыскание того, что остается неизменным при преобразованиях, составленных из бесконечно малых деформаций [11, С. 420]. На современном языке это означает изучение свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся при гомеоморфизмах (топологическая эквивалентность). Таким образом, предметом топологии является изучение топологических инвариантов.

Первый такой инвариант, один из важнейших, был найден еще Л. Эйлером [12] – эйлерова характеристика. До Пуанкаре видное место в создании топологии занимают еще Э. Бетти [13] и К. Жордан [14, 15].

Что касается Пуанкаре, то общепризнано, что он является главным основателем этой области. Изучение глобального поведения интегральных кривых на поверхностях и переход к исследованию систем дифференциальных уравнений высших порядков послужили для Пуанкаре мощным побудительным мотивом для разработки ряда основных положений топологии в работе *Analysis situs* (1895) и в пяти дополнениях к ней [16]. Идейное наследие Пуанкаре не исчерпано до сих пор. Появление качественной теории и топологии в одно и то же время и даже в трудах одного и того же человека не случайно, между этими двумя областями имеется глубокое внутреннее единство.

Создание новых разделов математики, в том числе и названных двух выше, было бы невозможным без теории множеств. И хотя вскоре выявились порожденные ею парадоксы, показавшие пределы возможностей логических построений, теория множеств стала фундаментом всей математики (вспомним высказывание Д. Гильберта: «Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором»).

Помимо топологии, качественная теория опирается и на только что появившийся функциональный анализ. Упомянем лишь некоторые главные события, имеющих общематематическое значение. Понятие функционала – конец XIX – начало XX в. (С. Пинкерле, В. Вольтерра, Ж. Адамар) [17]. Особо надо отметить работы М. Фреше [18], [19] и Д. Гильберта [20], которые пришли к идее бесконечномерного функционального пространства – одного из самых фундаментальных понятий математики XX в. Идеи Фреше не сразу были восприняты математическим сообществом. Ранее даже многомерная геометрия поначалу вызывала острое неприятие. Гильберту принадлежит первый пример конкретного функционального пространства – гильбертова пространства, одного из оснований функционального анализа. Следующим принципиальным шагом явилось построение теории полных линейных нормированных пространств – банаховых пространств [21]. Венчает построение здания функционального анализа *Теория линейных операций* С. Банаха [22], в которой результаты многих математиков из разных стран представлены как единое целое, появилась новая область математики.

4. Дальнейшая эволюция качественной теории

В 1920-е гг. качественная теория разделилась на две ветви, которые превратились в две большие отдельные области: теорию операторных уравнений и теорию динамических систем, как стали называть позднее собственно качественную теорию. Функционально-аналитические методы составляют фундамент современного анализа, в том числе, теории операторных уравнений. Как это всегда бывает с появлением новой области, активно стали искать бесконечномерные обобщения уже известных математических задач. Для операторных уравнений особое значение имеют теоремы существования решений, что представляет качественную задачу. Такой задачей, к примеру, является, отнесенная институтом Клея к нерешенным проблемам тысячелетия, проблема турбулентности. Для трехмерных уравнений Навье-Стокса неизвестно не только ни одного турбулентного решения, но даже неизвестно, существует ли оно. Исследование многих классов уравнений сводится к доказательству существования и методов нахождения неподвижных точек отображения f множества X в себя, т.е. такой точки $x \in X$, чтобы $f(x) = x$. В зависимости от свойств отображения f и множества X созданы различные принципы неподвижной точки, и наиболее известным является принцип Шаудера. Задача о неподвижной точке имеет топологический характер и принцип Шаудера берет свое начало из теоремы Брауэра, которая явилась одним из первых применений алгебраической топологии для подобного рода задач. Л. Брауэр доказал теорему о существовании по крайней мере одной

неподвижной точки при непрерывном отображении f n -мерного симплицального комплекса в себя, такого, что $f(x) = x$ [23]. Ю. Шаудер обобщил этот результат на случай банахова пространства [24, 25]. Принцип Шаудера позволяет установить наличие неподвижных точек у вполне непрерывного оператора при отображении ограниченного непрерывного замкнутого множества на свою часть. Через несколько лет Ж. Лере и Ю. Шаудер предложили более рафинированный метод (принцип Лере-Шаудера), позволяющий найти подходы к сложным уравнениям с частными производными высших порядков [26].

События принципиального характера связаны с собственно качественной теорией, которая после значительных изменений превратилась в теорию динамических систем. Теория динамических систем широко использует методы топологии, функционального анализа и теории вероятностей. Теория вероятностей обрела зримые очертания после появления труда Якоба Бернулли *Ars Conjectandi (Искусство предположений, 1713)* [27]. Однако права гражданства в математике теория вероятностей получила лишь после решения А. Н. Колмогоровым [28, 29] 6-й проблемы Гильберта, который отнес аксиоматизацию теории вероятностей к числу важнейших задач математики.

Основателями теории динамических систем являются А. Пуанкаре и Дж. Биркгоф, у последнего она уже обрела четкие контуры. Важным рубежом явился colloquium математиков в университете Чикаго (1920), на котором Биркгоф прочел цикл лекций *Динамические системы*. В лекциях Биркгофа принципиальное значение имело широкое применение для исследования динамических систем топологических методов. Несколько позднее в своем труде *Динамические системы* Биркгоф выдвинул программу, в которой в полной общности ставится задача изучения динамических систем (программа Пуанкаре-Биркгофа):

«Конечной целью теории движения динамической системы должно служить качественное определение всех возможных типов движения и взаимоотношений между этими движениями» [30, С. 194].

До самого конца XIX в. идеалом научного подхода являлось рациональное описание природы, которая представлялась царством порядка. Неупорядоченность, неустойчивость относили к несовершенству наших знаний. У Биркгофа принципиально иное видение. Он, в отличие от традиционного подхода, не выделяет отдельно устойчивые движения, они у него находятся в ряду всех движений. Сложные движения обретают равные права с регулярными движениями. Сами сложные движения можно разделить на классы соответственно их сложности, ввести таким образом иерархию сложности. Фактически начал складываться новый взгляд на мир. Развитие этих идей вместе с другой чертой качественной теории – изучение системы в целом, глобальное рассмотрение привело к новому разделу теории динамических систем – эргодической теории.

5. Эргодическая теория

Исходным пунктом эргодической теории явилась фундаментальная физическая проблема обоснования статистической механики. Известно, какая острая полемика разгорелась в конце XIX в. по поводу оснований кинетической теории. В основе полемики лежала идея, не утратившая привлекательности до нашего времени: выразить кинетические закономерности, исходя из уравнений классической механики. Однако последовательное проведение этой линии приводило к глубоким парадоксам. Для их разрешения Л. Больцман сформулировал *эргодическую гипотезу*, суть которой состояла в том, что в изолированной системе фазовая траектория пройдет через каждую точку гиперповерхности постоянной энергии. Иными словами, в эргодической системе временные средние значения физических величин равны их фазовым статистическим средним. Первая эргодическая теорема принадлежит Пуанкаре [31, Т. 2. С. 130-158]. Эта теорема о возвращении утверждает, что любая точка системы $p \in \Omega$, где

Ω – пространство динамической системы, пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения (за исключением начальных условий нулевой меры). Эргодическая теория строится на основе теории меры. Система будет эргодической по отношению к мере μ , если для любого отображения f инвариантного множества $A \subset \Omega$, $f^{-1}(A) = A$, оно является метрически транзитивным, т.е. либо A , либо $\Omega \setminus A$ имеют меру 0 [32].

В русле идей Пуанкаре лежат основополагающие результаты Дж. фон Неймана [33] и Дж. Биркгофа [34]. Фон Нейман доказал статистическую эргодическую теорему, но Биркгофу принадлежит более сильный результат – индивидуальная эргодическая теорема о равенстве временных и фазовых средних, которое имеет место тогда и только тогда, когда пространство метрически транзитивно.

К эргодическим теоремам примыкает важнейший результат Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова об инвариантной мере: в компактном фазовом пространстве динамической системы существует инвариантная мера (теорема Крылова-Боголюбова) [35]. Они установили способы построения инвариантной меры для широкого класса динамических систем, у которых не существует интегрального инварианта в отличие от гамильтоновых систем.

В широком смысле под эргодичностью понимают сложное поведение динамических систем, наличие у них статистических свойств. В более узком отношении эргодическая система демонстрирует простейший вариант сложного поведения и открывают иерархию таких систем. Помимо эргодического движения, имеется более сложный вид движения – *перемешивание* (Дж. В. Гиббс) [36], [37]. Из наличия перемешивания следует эргодичность, тогда как обратное неверно. Развитие этих идей привело В. А. Рохлина к понятию перемешивания n -го порядка [38], новому инварианту динамических систем. Таким образом, складывается иерархия движений по их сложности: эргодичность, перемешивание, перемешивание второго порядка и т.д.

Несмотря на успехи эргодической теории, решить проблему обоснования статистической механики с ее помощью не удалось. Задача сводится к установлению метрической транзитивности. Однако преобразования с инвариантной мерой оказались столь сложны, что установить метрическую транзитивность удалось лишь в самых простых случаях. Эргодическая теория стала развиваться как область математики, и она сосредоточилась на решении своих собственных задач. Центральной проблемой эргодической теории является классификация преобразований, что выводит на первый план вопрос изоморфизма: при каких условиях можно считать, что два преобразования с инвариантной мерой относятся к одному метрическому типу?

В период своего становления, как самостоятельного раздела математики, эргодическая теория пользовалась в основном функционально-аналитическими представлениями. В работах Колмогорова [39, 40] уже происходит явное смещение акцентов с функционально-аналитического подхода на вероятностные представления. С этого времени был разрушен традиционный взгляд, что естественным языком эргодической теории является функционально-аналитический язык. Между теорией вероятностей и теорией динамических систем существует глубокая внутренняя связь. К Колмогорову восходит идея об использовании преобразования пространства с инвариантной мерой и разбиений пространства на конечное число множеств в качестве модели стационарного случайного процесса. Теория измеримых разбиений вместе с теорией информации и теорией вероятностей послужила тем фундаментом, на котором Колмогоров создал раздел эргодической теории, известный сейчас как энтропийная теория динамических систем. Я. Г. Синай вспоминал, что Колмогоров предложил понятие энтропии, которое должно помочь различать динамические системы "вероятностного" и "детерминированного" происхождения. Тогда не было известно нетривиальных примеров динамических систем, для которых это можно было бы сделать [41].

Основы энтропийной теории изложены Колмогоровым в двух статьях [39, 40], существенной уточнение в определение внес Синай [42]. Основным понятием является энтропия измеримого разбиения A пространства M с мерой μ на конечное или счётное число множеств A_1 ,

$A_2, \dots$, которая даётся формулой

$$H(A) = - \sum_k \mu(A_k) \log \mu(A_k),$$

где сумма берётся по всем элементам разбиения A , имеющим положительную меру, что можно интерпретировать на языке теории вероятностей как среднее значение информации, полученной после испытания. Стационарный случайный процесс можно описать с помощью автоморфизма T , определенного на пространстве M с мерой и измеримой функцией P на M . Тогда сложное испытание, состоящее из последовательности испытаний $A, TA, \dots, T^n A$, эквивалентно одному испытанию, описываемому разбиением ξ_T^n . Энтропия Колмогорова-Синая (КС-энтропия или метрическая энтропия) $h(T)$ определяется как верхняя грань на множестве конечных измеримых разбиений ξ

$$h(t) = \sup \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n).$$

Энтропию $h(T)$ можно также представить как оценку сложности системы в среднем. Она описывает максимально возможную скорость создания информации преобразованием T с помощью конечных разбиений пространства состояний. КС-энтропия представляет принципиально новый инвариант, позволяющий разделить системы с разными значениями энтропии на подклассы, что позволяет говорить об их неизоморфности. Принципиальный результат заключается в том, что случайные явления и классические динамические системы оказалось можно описывать *на одном и том же языке*.

Кроме того, Колмогоров ввел важное и плодотворное понятие К-систем для характеристики ослабления статистических связей в случайном процессе на отдаленных друг от друга промежутках времени. С этой точки зрения К-системы соответствуют случайным процессам с самыми слабыми свойствами регулярности [39]. Положительность энтропии К-систем в противоположность детерминированным системам с нулевой энтропией отражает в инвариантной форме разделение динамических систем на стохастические и детерминированные.

Кульминационным пунктом взлета теории динамических систем, который происходил начиная с 1960-х гг., является открытие сложного поведения систем с небольшим числом степеней свободы – динамического хаоса. В основе этого явления лежит не особый физический механизм, а оно обусловлено свойствами решений уравнений, что имеет универсальный характер и не ограничивается лишь физическими системами. Энтропия Колмогорова-Синая служит мерой экспоненциальной скорости сближения или разбегания траекторий динамической системы. Количественной характеристикой неустойчивости траекторий являются показатели Ляпунова. Было ясно, что должна существовать связь энтропии с показателями Ляпунова. Длительные поиски завершились работой Я. Б. Песина [43], установившего, что для диффеоморфизма T многообразия M , сохраняющего меру μ энтропия $h(T)$ равна

$$h(T) = - \int \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x) \chi_i(x) d\mu(x)$$

где $q_i(x)$ – кратность соответствующего значения показателя Ляпунова $\chi_i(x)$, $k(x)$ – число различных отрицательных значений показателя. Поскольку энтропия динамической системы гораздо более трудно вычислима, чем показатели Ляпунова, данное выражение дает возможность более простого расчета энтропии.

6. Качественная теория в математике второй половины XX века

Эргодическая теория является не только важным инструментом исследования поведения решений дифференциальных уравнений, но она стала составной частью идеологии качествен-

ного подхода. В своем известном докладе на Международном конгрессе математиков в 1954 г. [44] Колмогоров сформулировал проблему программного характера о развитии теории динамических систем: выяснение путей применения основных концепций и результатов теории динамических систем для решения задач механики. Как оказалось, эта программа не ограничивается лишь одной механикой, а имеет общий характер. Главный тезис заключается в том, что теория динамических систем дала сильный импульс для развития математики в целом. Она вошла в центр притяжения различных разделов, когда вступают во взаимодействие и переплетаются самые разные математические дисциплины, что позволяет найти подходы к старым нерешенным и новым задачам.

Другим направлением, выделенным Колмогоровым, является качественное аналитическое исследование возмущенных интегрируемых систем. Задачу поставил еще Пуанкаре в контексте общих вопросов динамики и считал ее столь значительной, что отнес ее к основной проблеме механики [31, Т. 1. С. 34]. Дело в том, что ряды теории возмущений являются расходящимися, и традиционное рассмотрение лишь нескольких первых членов помимо того, что не позволяет изучить некоторые важные теоретические вопросы, является внутренне неудовлетворительным. Требуется изучение всего ряда, задача имеет глобальный характер. Расходимость обусловлена не неудачным методом, а лежит в существе дела. В последующие десятилетия неоднократно предпринимались попытки решения задачи (А. Пуанкаре, М. Борн, К. Зигель и др.), но успеха добиться не удалось. Колмогоров пришел к этой задаче в поисках ответа на вопрос, какие могут быть эргодические множества в динамических системах классической механики и какие из них имеют положительную меру? В результате была создана теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (теория КАМ) [44]-[46] – одно из ярких достижений математики ушедшего века. Главный результат заключается в установлении того, что при наложении возмущения существует множество положительной меры, которое распадается на инвариантные торы с квазипериодическим движением на них. Другими словами, разбиение области на инвариантные торы оказывается устойчивым к малым возмущениям.

Все эти результаты теории динамических систем быстро вошли в обиход физики (физика плазмы, ускорительная техника и др.). Сама же теория динамических систем разделилась на целый ряд разделов и направлений (симплектическая геометрия, гиперболическая теория, конформная динамика и др.) [47]-[49]. Кульминационным событием развития теории динамических систем в XX в. стали открытие упоминавшегося выше динамического хаоса и создание теории точно интегрируемых систем.

В формировании математики XX в. определяющее значение имели два принципа: симметрии и качественного описания. Математическая теория симметрии составляет предмет теории групп. Эти два принципа совершенно по-другому высветили вопросы интегрирования уравнений.

Интегрирование дифференциальных уравнений является центральной проблемой математики с самого начала создания анализа бесконечно малых. До середины XIX в. понятие интегрируемости считалось самым собой разумеющимся, пока оно не было поколеблено работами Э. Бура [50] и Ж. Лиувилля [51, 52]. К Пуанкаре восходит идея, что возможны различные определения интегрируемости и система дифференциальных уравнений может быть лишь более или менее интегрируемой [30, С. 255]. Интегрируемость связывается с наличием интегралов движения, обусловленных присутствием той или иной симметрии. Здесь требуется не локальное изучение, а рассмотрение системы в целом, и на первый план выступают топологические соображения. Так, в системе с двумя степенями свободы пространством положений является поверхность M , гомеоморфное сфере с некоторым k – числом приклеенных ручек, k – топологический инвариант, род поверхности. При $k \geq 2$, когда M не гомеоморфна сфере S^2 или тору T^2 , система неинтегрируема. В этом случае замкнутая аналитическая поверхность не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы [53, 54]. Произошло смещение акцентов. Вопросы неинтегрируемости стали отдельным направлением

ем исследований теории дифференциальных уравнений. Насколько нетривиальны эти задачи, указывает следующий факт. Была распространена идея, принадлежащая Ф. Клейну и А. Зоммерфельду, что при известном большом наборе частных решений с помощью интерполирования можно получить представление о свойствах решений в общем случае. Но, к примеру, при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в его фазовом пространстве всегда имеются зоны квазислучайного движения, наличие которых никак нельзя вывести из факта существования бесконечного числа периодических или квазипериодических движений [54, С. 18].

Но вот другой полюс того же ряда вопросов. Согласно одной старой работе Э. Ферми [55] любая нелинейность в системах с достаточно большим числом степеней свободы приводит к полному разрушению интегралов движения и система становится неинтегрируемой. Хотя доказательство Ферми было не совсем убедительным и вызвало критику со стороны математиков, весьма распространенным было убеждение в универсальности свойства нелинейных систем, когда под действием возмущения происходит разрушение квазипериодического движения на торах и требуется переход к статистическому описанию. Оказалось, что это представление несправедливо. Согласно теории КАМ (1954), разрушению подвергаются резонансные торы, мера которых мала, а нерезонансные торы лишь деформируются, оставаясь топологически торами. С другой стороны, в те же годы (1955) Ферми совместно с Дж. Пастой и С. Уламом решил проверить свою гипотезу об эргодичности неинтегрируемой нелинейной системы, в качестве которой была выбрана цепочка из 64 осцилляторов, с помощью начинавшихся распространяться ЭВМ. Вычислительный эксперимент, вопреки ожиданию, продемонстрировал устойчивый квазипериодический характер без заметных признаков эргодичности (проблема Ферми-Паста-Улама) [56]. Эта задача в непрерывном пределе приводит к уравнению Кортвега де Фриза, для которого были обнаружены решения частицеподобного типа – солитоны (М. Крускал, Н. Забуски, 1965) [57]. В дальнейшем решения солитонного типа были обнаружены у других нелинейных уравнений, что привело к созданию теории солитонов (см., например, [58]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики, возродился интерес к классическому разделу математики – к интегрируемым системам. Было найдено большое количество точно решаемых нелинейных систем, важных с точки зрения физики, и их число постоянно растет.

Постепенно сложилось понимание, что нелинейные явления – это особый мир, во многом непривычный, где не срабатывает интуиция, у него предельно широкая область проявления – от математики и физики до экономики, социальной области и психологии. Традиционный мир линейных представлений является лишь приближением с определёнными границами применимости.

Одной из главных тенденций математики второй половины прошлого века стало невиданное по своей интенсивности углубление связей между топологией, качественной теорией, функциональным анализом, теорией вероятностей, алгебраической геометрией, теорией групп Ли и другими разделами, что привело к единому подходу – качественным методам в решении самых разнообразных задач, и приобрело общематематическое значение. При качественном подходе изменился сам объект исследования, когда расширилось понимание глобального описания: переход от отдельной системы ко всему множеству систем. Отсюда следует усиление внимания к классификации объектов, к критерию их «одинаковости», к отношениям эквивалентности. Совершенно естественным явилось обобщение на увеличение размерности (от кривых и поверхностей к n -мерным многообразиям, к функциям с бесконечным числом переменных и т.д.). Глубоко укоренившееся традиционное видение принципиально неограниченной точности описания с помощью классического анализа сменилось пониманием ограниченности этого подхода случаями устойчивости системы к малым возмущениям. Произошло осознание того факта, что случайная величина не просто отражает неполноту нашего знания, а представляет первичное понятие, лежащее в основе мироздания. Эти кардинальные измене-

ния привели к многочисленным последствиям и представляют одну из главных особенностей математики XX в.

Значительное место в указанных процессах заняла новая постановка старых, давно сформулированных задач. В качестве не просто примера, явившимся заметным событием в русле названных математических тенденций, и таким событием, которое само формировало эти тенденции, назовем теорию индекса Атья-Зингера. Это не только одно из крупнейших достижений математики XX в., оно примечательно еще тем, что отчетливо показывает, как тесно переплелись современная математика и современная теоретическая физика.

Под индексом оператора понимается соотношение между его аналитическими и топологическими инвариантами. Отдельные примеры индексов известны еще с XIX в. К ним относится формула Гаусса-Бонне, связывающая гауссову кривизну K двумерного компактного риманова многообразия ω и геодезической кривизны k_g границы $\partial\omega$ с его эйлеровой характеристикой $\chi(\omega)$

$$\int_{\omega} K d\sigma + \int_{\partial\omega} k_g ds = 2\pi\chi(\omega)$$

К простейшему случаю индекса относится классическая теорема Пуанкаре о распределении особых точек кривых, определяемых дифференциальными уравнениями [3.С.145]

$$N + F - C = 2 - 2p$$

где N – число узлов, F – число фокусов, C – число седел, p – род поверхности. Другим, более сложным, примером является теорема Римана-Роха, связывающего число мероморфных функций с заданными полюсами с родом поверхности. Обобщения теоремы Римана-Роха легли в основу современной алгебраической геометрии.

На современном языке формула индекса устанавливает связь между аналитическим индексом линейного оператора $D : L_0 \rightarrow L_1$, где L_0, L_1 – топологические векторные пространства, и топологическим индексом, представляющего некоторую характеристику оператора D и пространств L_0, L_1 . Вопрос об индексе для общего эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии, как общематематическая проблема, был поставлен И. М. Гельфандом [59]. Побудительным мотивом явились краевые задачи для линейных эллиптических уравнений. Гельфанд исходил из топологических соображений, отмечая, что наиболее важные свойства в целом решений этих задач обычно сохраняются при небольших деформациях задачи и должны быть гомотопическими инвариантами. Изучение этих инвариантов открывает общий путь для всего многообразия краевых задач.

Индекс эллиптического оператора D можно определить как разность нулевых мод D и сопряженного оператора D^+ [60, С. 171]

$$\gamma(D) = \dim \ker D - \dim \ker D^+$$

При непрерывном изменении эллиптического оператора индекс оператора не меняется. М. Атья и И. Зингер показали, что индекс можно вычислить с помощью топологических методов (теория индекса Атья-Зингера) [61]. Теория индекса является важным инструментом для установления особенностей устройства сложных нелинейных систем.

Первоначальное доказательство было очень сложным. В дальнейшем удалось добиться некоторых упрощений (М. Атья, И. Зингер, Р. Ботт, В. К. Патоди), но новый, значительно все упрощающий подход удалось найти после работ Э. Виттена по доказательству неравенств Морса и формулы Лефшеца, исходя из физических соображений – представлений суперсимметрии, связывающих бозонные и фермионные поля. Сама идея для использования того же подхода для доказательства теоремы об индексе была реализована американским физиком Л. Альваресом-Гауме [62, 63].

Теория индекса сопоставляет целое число эллиптическому оператору на компактном гладком многообразии. Зингер видел обобщение теории на новые ситуации: негладкие многообразия, многообразия специального типа и т.д. [64]. В этом направлении много было сделано математиками из разных стран. Однако теория индекса вошла еще в инструментарий теоретической физики. В частности, теорема об индексе связана с оператором Дирака, занимающего важное место в калибровочной теории. Атья вспоминал, что ему с Зингером пришлось самим «открыть» оператор Дирака, зная они о нем раньше, их работа по теории индекса значительно бы облегчилась [65]. Сам Атья внес огромный вклад, чтобы самые новые математические достижения стали достоянием физики, что подчеркнуто в решении Норвежской Академии Наук о присуждении Абелевской премии за 2004 г. М. Атья и И. Зингеру:

«За открытие и доказательство теоремы об индексе, которая соединила топологию, геометрию и анализ, и за их выдающуюся роль в наведении новых мостов между математикой и теоретической физикой» [66].

Одной из главных черт эволюции взглядов о месте математики является новое понимание взаимоотношения математики и физики. Современная физика не просто активно использует новейшие математические достижения, но беспрецедентно усилилась тенденция, когда физика формирует прогресс самой математики, причем в самых абстрактных ее областях. В некоторых областях уже трудно различима граница между математикой и теоретической физикой. Яркой иллюстрацией является работа английского математика С. Дональдсона [67, 68].

Дональдсон показал, что 4-мерная геометрия является намного более богатой, чем это традиционно считалось, и она содержит структуры с совершенно неожиданными свойствами. Дональдсон воспользовался новым инструментом, позаимствованным из теоретической физики – уравнениями Янга-Миллса, которые лежат в основе современной квантовой теории поля. Уравнения Янга-Миллса представляют глубокое нелинейное обобщение уравнений Максвелла и связаны с неабелевыми калибровочными группами. В евклидовой метрике существуют решения этих уравнений, представляющие большой физический интерес – инстантонные решения, которые и были положены Дональдсоном в основу его рассмотрения. Он построил квадратичную форму (полиномы Дональдсона) и классификацию 4-мерных многообразий свел к изучению алгебраических свойств этих полиномов. Полученные Дональдсоном инварианты являются весьма тонким инструментом, позволяющие различать гомеоморфные и диффеоморфные многообразия. Дональдсон получил фундаментальный результат: существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия, и это нельзя обнаружить традиционными топологическими методами. Здесь прослеживается ситуация, сложившейся в XIX в., когда появившиеся примеры непрерывных, но недифференцируемых функций, привели математический мир, по словам Н. Бурбаки, в состояние растерянности [69, С. 26]. Как тогда, так и в случае с многообразиями Дональдсона, геометрическая интуиция подверглась сильным испытаниям.

7. Вычислительный эксперимент

Еще одной из черт математики второй половины XX в. является переосмысление принципов применения вычислительной техники, которое выразилось в новом методе научного исследования – вычислительном эксперименте. Создание ЭВМ в первую очередь связано с именем Дж. фон Неймана, он же был и среди главных идеологов их использования. Фон Нейман пришел к выводу, что аналитические методы дошли до своего предела, с их помощью нельзя получить даже качественную информацию о поведении решений нелинейных уравнений. Выход фон Нейман видел в применении только что появившихся ЭВМ. Часто не различают вычислительный эксперимент и компьютерное моделирование, хотя иногда различие может быть чисто терминологическим. Но все же компьютерное моделирование больше направлено

на получение ответов на конкретные вопросы: решение уравнений, расчет параметров крыла самолета и т.д., и при этом оно опирается на сложившийся теоретический фундамент. Кроме того, при компьютерном моделировании еще до проведения расчетов имеется возможность оценки того, что должно получиться. Главное отличие вычислительного эксперимента заключается в его эвристическом характере (это подчеркивали еще фон Нейман и Улам), когда варьированием параметров, начальных условий и т.д. стараются выяснить устройство модели в целом выделением качественных характеристик, элементов внутренней структуры, особенностей поведения и т.д. В вычислительном эксперименте могут рассматриваться ситуации, когда сами теоретические положения не являются твердо установленными. В этом случае может проявиться принципиально новое, как, например, один из первых вычислительных экспериментов привел к проблеме Ферми-Паста-Улама, затрагивающего вопрос о природе статистических законов. Этот путь привел к одному из самых значительных достижений математики ушедшего века – открытию солитонов. С помощью вычислительного эксперимента выбираются направления для дальнейших аналитических исследований. Вычислительный эксперимент стал методом исследования не только в физике, но и в математике. Появился даже термин «экспериментальная математика». Самый известный здесь результат – доказательство теоремы о четырех красках, труднейшей топологической задачи, пришедшей еще из XIX в. (В. Хакен, К. Апфель, 1976).

8. Заключение

Конец XIX – начало XX в. относится к переломным рубежам в истории науки. За короткий временной промежуток ее достижения привели к кардинальным изменениям в представлениях о картине мира и места в ней человека. Классическая наука исповедовала веру в неограниченные возможности человеческого разума. Открытия в науке, в первую очередь в физике, поколебали сложившиеся представления о мире и традиционный стиль мышления. Сформировалась квантово-релятивистская картина мира. В биологии утвердилась идея дискретности в наследовании и формировании генетических структур. Коренные изменения коснулись и других наук. Рождение, эволюция оказались присущи и Вселенной как целому. Все это оказало глубокое воздействие и на математику. Развитие математики происходит под воздействием прагматических потребностей, она объясняет законы природы, но есть внутренний имманентный двигатель ее прогресса. Он заключается в сущности человека, потребности творить, то, что делает человека человеком, и математическое творчество находится в том же ряду. Эти два разных понимания предназначения науки составили известную дискуссию между Ж. Фурье и К.Г. Якоби. Под знаком этих утверждений развивалась и математика XX в., добавив сюда значительно усилившиеся потребности со стороны техники, инженерии, военно-промышленного комплекса, а также из нетрадиционной сферы приложений – гуманитарной области.

Становление качественной теории с некоторой долей условности можно отнести с конца XIX до 20-х гг. XX в., причем в логическом, а не в строго хронологическом отношении. Тогда сложились новые подходы, новый язык и новая система понятий. Радикальный поворот не мог произойти сразу и в первые десятилетия качественной теории в ней присутствует дух и традиционные методы классической математики. И в дальнейшем качественная теория не порывает полностью с классической математикой. Качественное рассмотрение имеет содержательный характер лишь при его дополнении количественным исследованием.

Главной чертой следующего периода (конец 1920-х гг. – середина XX в.) развития качественной теории, которая стала самостоятельным разделом, является расширение теории с выделением самостоятельных разделов и широкое привлечение методов топологии и функционального анализа – новых областей математики, также преимущественно качественного

характера – и вероятностных методов.

Современный этап развития качественной теории, который определим с середины прошлого века до настоящего времени, выделяется тем, что в ней воплотилась одна из сущностей математики – математики как единой науки. Математика представляет единый организм и ее жизнеспособность обусловлена связностью ее частей. Именно это позволяет математике охватить самые разные стороны человеческой деятельности. Объединяющая роль качественной теории заключается еще в том, что в ней воплощаются две культуры в самой математике. Одна из них направлена на решение задач, а другая – на построение и осмысление теорий. В этом отношении качественная теория не просто конкретный раздел, а своеобразный подход к математическим проблемам. Качественная теория наводит мосты между самыми разными разделами математики. Другой особенностью современного этапа является невиданное ранее тесное сближение математики, в том числе, качественной теории, с областью приложений, особенно с физикой. Становится трудно провести различимую границу между некоторыми разделами математики и теоретической физики. Эти границы весьма условны, по словам М. Атья, такое разделение следует понимать больше в административном смысле [70, Р. 66]. Представления качественной теории, топологии, геометрии, теории групп Ли охватили не только квантовую теорию, но и классическую механику и классическую электродинамику.

Значение качественного подхода усиливается тем обстоятельством, что в современной фундаментальной физике главным инструментом, дающим количественные результаты, остается теория возмущений. Теория возмущений прекрасно работает в квантовой электродинамике, позволяя получить количественные данные с огромной точностью совпадающие с результатами эксперимента. Это обусловлено малостью константы взаимодействия ($\alpha \approx 1/137$), что приводит к быстро сходящимся выражениям. Для сильного взаимодействия это уже не так, и про получающиеся количественные величины можно говорить лишь о тенденции согласия с экспериментальными результатами. При этих условиях значение возможности получения качественной информации трудно переоценить. Качественная теория представляет не просто новую математику, но новую математику для физики, механики, экономики, гуманитарных наук. В приложениях математики особую сложность представляют гуманитарные науки вследствие разобщенности понятий, кардинального различия объектов исследования, крайней трудности формализации. Качественный подход остается главным, нередко единственным методом исследования. Насколько он может быть продуктивным, дает понимание хода процесса (исторического, социального, культурного и др.) по И. Пригожину [71] и Ю. М. Лотману [72].

В широком смысле качественная теория дает новое видение мира на уровне парадигмы, поскольку устройство мира дается на языке физических величин и геометрических образов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sturm Ch.F. Mémoire sur une classe équations à différences partielles // J. Math. Pures et Appl. 1836.V. 1. Pp. 373–444.
2. Демидов С., Петрова С. С., Симонов Н. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX в. М.: Наука, 1987. С. 80–183.
3. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. Pp. 151–217. Рус. перевод: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Ляпунов А. М. Избр. труды: работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 27–298.

5. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures // archive: 1409.1823.
6. Jacobi C. G. Über die Figur des Gleichgewichts // Ann. Phys. Chem. 1834. Bd. 33. Pp. 229–233; Gesammelte Werke. V. 2. Berlin : Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.
7. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. T. 7. Pp. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.
8. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков // Чебышевский сборник, 2021. Т. 22, В. 3. С. 312–345.
9. Лейбниц В. Г. Избранные отрывки из математических сочинений // УМН. 1948. Т. 3. В. 1 (23). С. 165–204.
10. Риман Б. Теория абелевых функций // Б. Риман. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. С. 88–138.
11. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических представлений (“Эрлангенская программа”) // Об основаниях геометрии. Под ред. А. П. Нордена. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 399–434.
12. Euler L. Elementa doctrinae solidorum (1758) // Euler Archive. 230. Pp. 109–141.
13. Betti E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni // Ann. Math. Pura Appl. 1870. V. 2/4. Pp. 140–158.
14. Jordan C. Sur la deformation des surfaces // J. Math. Pures et Appl. 1866. II sér. T. 11. Pp. 1–5.
15. Jordan C. Course d'Analyse. V. III. Paris, 1867. Pp. 587–594.
16. Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytechniques. - II sér. 1895. Cahier 1. - Pp. 1–121. / Рус. пер.: // А. Пуанкаре. Избр. труды: В 3 т. / Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 454–734.
17. Медведев Ф. А. Основоположники функционального анализа // Истор.- мат. исслед. 1973. В. XVIII. С. 55–70.
18. Frechét M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass // Comp. Ren. Acad. Sci. 1904. V. 139. Pp. 848–850.
19. Frechét M. Sur la quelques points du Calcul fonctionnel // Rend. Circ. Math. Palermo. 1906. V. 22. Pp. 1–74.
20. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen III // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1905. S. 307–338.
21. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. T. 3. Pp. 123–181.
22. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932. 259 p.
23. Brouwer L. E. J. Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // J. Math. Ann. 1910. Bd. 69. S. 176–180.

24. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. 1927. Bd. 26. S. 47–65, 417–431.
25. Schauder J. Über lineare, vollstetige Operationen // Studia. Math. 1930. Bd. 2. S. 183–196.
26. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionelles // Ann. Ec. Norm. Sup. 1934. V. 3 (51). Pp. 43–78.
27. Бернулли Я. О законе больших чисел. М.: Наука, 1986. 176 с.
28. Колмогоров А.Н. Общая теория меры и исчисление вероятностей // Коммун. академия, Сб. работ матем. раздела. 1929. Т. 1. С. 8–21.
29. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer-Verl., 1933. 62 S.
30. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
31. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. // Избр. труды: В 3 т. / М.: Наука, 1971. Т. 1. 772 с.; 1972. Т. 2. 998 с.
32. Hopf E. Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. IV + 835 S. То же : Хопф Э. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. В. 1. С. 113–182.
33. Neumann J. von. Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. V. 18. Pp. 70–82.
34. Birkhoff G. D. Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. V. 17. Pp. 650–660.
35. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. V. 38. Pp. 65–113. / Рус. пер. в кн.: Н.Н.Боголюбов. Избр. труды. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1969. С. 411–463.
36. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики // Дж. В. Гиббс. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350–509.
37. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
38. Рохлин В. А. Обобщение сохраняющего меру преобразования, не являющегося перемешиванием // ДАН СССР. 1949. Т. 13. С. 329–340.
39. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 861–864.
40. Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 754–755.
41. Синай Я. Г. Письменное сообщение от 26.03.2007.
42. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 768–771.
43. Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32. В. 4. С. 55–112.

44. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Proc. Intern. Congr. Math. 1954. Amsterdam. V. 1. P. 315–333. / То же в кн.: А. Н. Колмогоров. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 316–332.
45. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. Pp. 1824–1831.
46. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. В. 5. С. 13–40.
47. Аносов Д. В. О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74–192.
48. Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.
49. Йоккоз Ж. К. Недавнее развитие динамики // Международный конгресс математиков в Цюрихе. Избран. доклады. М.: Мир, 1999. С. 349–380.
50. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 185–200.
51. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. Pp. 1–13, 36.
52. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précédent de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 201–202.
53. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.
54. Козлов В. В. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 430 с.
55. Fermi E. Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261–265. / Рус. пер.: Э. Ферми. Науч. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115–123.
56. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955. / Рус. пер.: Э. Ферми. Науч. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647–656.
57. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. Pp. 240–243.
58. Солитоны. М.: Мир, 1983. 408 с.
59. Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях // УМН. 1960. Т. 15. В. 3 (93). С. 121–132.
60. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М.: URSS, 400 с.
61. Atiyah M., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. AMS. 1963. V. 69. N 3. Pp. 422–433.
62. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161–173.

63. Монастырский М. И. Современная математика в отблеске медалей Филдса. М.: Янус-К, 2000. 200 с.
64. Singer I. M. Future extensions of index theory and elliptic operators // *Prosp. Math. Ann. Math. Soc.* 1971. N 70. Pp. 171–185.
65. Atiyah M. The Dirac equation and geometry // *Paul Dirac. The Man and his Work.* Cambridge: CUP, 1998. Pp. 108–124.
66. Atiyah and Singer Receive 2004 Abel Prize // *Notices AMS.* 2004. V. 51. N 6. Pp. 649–650.
67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // *Bull. AMS.* 1983. V. 8. Pp. 81–83.
68. Donaldson S., Kronheimer P. *The Geometry of Four- Manifolds.* Oxford: OUP, 1990. 440 p.
69. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. литературы, 1963. 292 с.
70. Atiyah M. Trends in Pure Mathematics // *Proc. 3rd Int. Congr. In Math. Education.* 1977. Pp. 61–74.
71. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. М.: Наука, 1985. 328 с.
72. Лотман Ю. М. Семиосфера. С.-Петербург: «Искусство—СПБ», 2000. 704 с.

REFERENCES

1. Sturm Ch. F. Mémoire sur une classe équations à différences partielles // *J. Math. Pures et Appl.* 1836. V. 1. Pp. 373–444.
2. Demidov S. S., Petrova S. S., Simonov N. N. Ordinary differential equations // *Mathematics of XIX century.* М.: Nauka, 1987. Pp. 80–183 (in Russian).
3. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3.* 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; *Sér. 4.* 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. Pp. 151–217
4. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion // *Lyapunov A. M. Select. works: works on the stability of motion.* Moscow: Nauka, 2007. Pp. 27–298 (in Russian).
5. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures // *archive:* 1409.1823.
6. Jacobi C. G. Über die Figur des Gleichgewichts // *Ann. Phys. Chem.* 1834. Bd. 33. S. 229–233; *Gesammelte Werke.* V. 2. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.
7. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // *Acta Math.* 1885. T. 7. Pp. 259–380; *Oeuvres de Henri Poincaré.* T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.
8. Bogatov E. M., Mukhin R. R. On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics // *Chebyshevskii sbornik,* V. 22. N 3. Pp. 312–345 (in Russian).
9. Leibniz W. G. Selected passages from mathematical writings // *Russian Mat. Survey.* 1948. V. 3. Issue 1 (23). Pp. 165–204 (in Russian).

10. Riemann B. Theorie der Abel'schen Functionen // Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. 1892. S. 88–144.
11. Klein F. A Comparative Review of Recent Researchers in Geometry // Bull. New York Math. Soc. 1893. V. 2. N 10. Pp. 215–240.
12. Euler L. Elementa doctrinae solidorum (1758) // Euler Archive. 230. Pp. 109–141.
13. Betti E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni // Ann. Math. Pura Appl. 1870. V. 2/4. Pp. 140–158.
14. Jordan C. Sur la deformation des surfaces // J. Math. Pures et Appl. 1866. II sér. T. 11. Pp. 1–5.
15. Jordan C. Course d'Analyse. V. III. Paris, 1867. Pp. 587–594.
16. Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytechniques. II sér. 1895. Cahier 1. Pp. 1–121.
17. Medvedev F. A. Founders of functional analysis // Histor.-mat. Research. 1973. V. XVIII. Pp. 55–70 (in Russian).
18. Frechét M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass // Comp. Ren. Acad. Sci. 1904. V. 139. Pp. 848–850.
19. Frechét M. Sur la quelques points du Calcul fonctionnel // Rend. Circ. Math. Palermo. 1906. V. 22. Pp. 1–74.
20. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen III // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1905. S. 307–338.
21. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. T. 3. Pp. 123–181.
22. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932. 259 p.
23. Brouwer L. E. J. Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // J. Math. Ann. 1910. Bd. 69. S. 176–180.
24. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. 1927. Bd. 26. S. 47–65, 417–431.
25. Schauder J. Über lineare, vollstetige Operationen // Studia. Math. 1930. Bd. 2. S. 183–196.
26. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Ann. Ec. Norm. Sup. 1934. V. 3 (51). Pp. 43–78.
27. Bernoulli J. Ars Conjectandi. Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713. 358 p.
28. Kolmogorov A. N. General measure theory and probability calculus // Kommun. Academy, Ser. works of math. sec. 1929. V. 1. Pp. 8–21 (in Russian).
29. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer-Verl., 1933. 62 S.
30. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 P.
31. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars T. 1. 1892. 382 p; T. 2. 1893. 476 P.

32. Hopf E. Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. IV + 835 S.
33. Neumann J. von. Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. V. 18. Pp. 70–82.
34. Birkhoff G.D. Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. V. 17. Pp. 650–660.
35. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. V. 38. Pp. 65–113.
36. Gibbs J.W. Elementary principles in statistical mechanics. N.Y.: C. Schribner, 1902. 207 p.
37. Zaslavsky G.M. Stochasticity of dynamical systems. M.: Nauka, 1984. 272 p. (in Russian).
38. Rokhlin V.A. A generalization of a measure-preserving transformation that is not a mixing // Rep. Acad. Sci. USSR. 1949. T. 13. Pp. 329–340 (in Russian).
39. Kolmogorov A.N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces // Rep. Acad. Sci. USSR. 1958. № 5. Pp. 861–864 (in Russian).
40. Kolmogorov A.N. On entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms // Rep. Acad. Sci. USSR. 1959. T. 124. № 4. Pp. 754–755 (in Russian).
41. Sinai Ya. G. Written communication on 26.03.2007.
42. Sinai Ya. G. On the concept of the entropy of dynamical systems // Rep. Acad. Sci. USSR. 1959. T. 124. № 4. Pp. 768–771 (in Russian).
43. Pesin Ya.B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // Russian Mat. Survey. 1977. T. 32. V. 4. Pp. 55–112 (in Russian).
44. Kolmogorov A.N. General theory of dynamical systems and classical mechanics // Selected works of A.N. Kolmogorov. V. 1. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. Pp. 355–375.
45. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. Pp. 1824–1831.
46. Arnold V.I. Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the conservation of conditionally periodic motions with a small change in the Hamilton function // Russian Mat. Survey. 1963. T. 18. V. 5. Pp. 13–40 (in Russian).
47. Anosov D.V. On the development of the theory of dynamical systems over the last quarter of a century // Student readings of the MK IMU. Issue. 1. M.: MTsNMO, 2000. Pp. 74–192 (in Russian).
48. Anosov D.V. Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution // Mathematical events of the twentieth century. Springer, 2006. Pp. 1–17.
49. Yoccoz J.-C. Recent developments in Dynamics // Proc. Int. Congress Mathematicians, V. 1, 2. Zurich: Birkhauser, 1995. Pp. 246–265.
50. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 185–200.
51. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. Pp. 1–13, 36.

-
52. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précédent de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 201–202.
53. Kozlov V. V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russian Mat. Survey. 1983. T. 38. V. 1. Pp. 3–67 (in Russian).
54. Kozlov V. V. Symmetry, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. Izhevsk: Udmurt Univ. Publ. House, 1995. 430 p. (in Russian).
55. Fermi E. Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261–265.
56. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955.
57. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. Pp. 240–243.
58. Solitons. M.: Mir, 1983. 408 p. (in Russian).
59. Gelfand I. M. On elliptic equations // Russian Mat. Survey. 1960. T. 15. V. 3 (93). Pp. 121–132. (in Russian).
60. Shvartz A. S. Quantum field theory and topology. M.: Nauka, 1989. 400 p. (in Russian).
61. Atiyah M., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. AMS. 1963. V. 69. N 3. Pp. 422–433.
62. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161–173.
63. Monastyrsky M. I. Modern Mathematics in the Reflection of the Fields Medals. M.: Janus-K, 2000. 200 p. (in Russian).
64. Singer I. M. Future extensions of index theory and elliptic operators // Prosp. Math. Ann. Math. Soc. 1971. N 70. Pp. 171–185.
65. Atiyah M. The Dirac equation and geometry // Paul Dirac. The Man and his Work. Cambridge: CUP, 1998. Pp. 108–124.
66. Atiyah and Singer Receive 2004 Abel Prize // Notices AMS. 2004. V. 51. N 6. Pp. 649–650.
67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // Bull. AMS. 1983. V. 8. Pp. 81–83.
68. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four- Manifolds. Oxford: OUP, 1990. 440 p.
69. Bourbaki N. Essays on the history of mathematics. M.: Foreign Literature Publ House, 1963. 292 p. (in Russian).
70. Atiyah M. Trends in Pure Mathematics // Proc. 3rd Int. Congr. In Math. Education. 1977. Pp. 61–74.
71. Prigogine I. From being to becoming : time and complexity in the physical sciences. San Francisco : W. H. Freeman, 1980. 262 p.
72. Lotman Yu. M. Semiosphere. St. Petersburg: Art-SPB, 2000. 704 p. (in Russian).

Получено: 23.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 37.014.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-291-304

Методология имитационного моделирования педагогических систем

Е. Н. Надеждин, И. Л. Федотенко, Е. Е. Смирнова

Надеждин Евгений Николаевич — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: en-hope@yandex.ru

Федотенко Инна Леонидовна — доктор педагогических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: fedotenko@tsput.ru

Смирнова Елена Евгеньевна — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: eesmirn@yandex.ru

Аннотация

Развитие и внедрение в повседневную практику инновационных образовательных технологий традиционно осуществляются на основе положений и рекомендаций классической педагогической науки. В статье предлагается концепция методологии имитационного моделирования педагогических систем, в которую интегрированы положения системного подхода, педагогики и психологии высшей школы, методы исследования операций и теории моделирования сложных систем. Выделены особенности педагогической системы как объекта исследования. Раскрыта сущность предлагаемой методологии имитационного моделирования и дана краткая характеристика актуальных прикладных задач, которые могут эффективно решаться на её основе.

Ключевые слова: педагогическая система, методология, вузовская подготовка ИТ-специалистов, качество обучения, модель, имитационное моделирование.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

Е. Н. Надеждин, И. Л. Федотенко, Е. Е. Смирнова. Методология имитационного моделирования педагогических систем // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 291–304.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 37.014.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-291-304

Methodology of simulation modeling of pedagogical systems

Е. Н. Надеждин, И. Л. Федотенко, Е. Е. Смирнова

Nadezhdin Evgeny Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: en-hope@yandex.ru

Fedotenko Inna Leonidovna — doctor of pedagogical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: fedotenko@tspu.ru

Smirnova Elena Evgenievna — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: eesmirn@yandex.ru

Abstract

The development and introduction of innovative educational technologies into everyday practice are traditionally carried out on the basis of the provisions and recommendations of classical pedagogical science. The article proposes a concept of the methodology of simulation modeling of pedagogical systems, which integrates the provisions of the system approach, pedagogy and psychology of higher education, methods of operations research and the theory of modeling complex systems. The features of the pedagogical system as an object of research are highlighted. The essence of the proposed methodology of simulation modeling is revealed and a brief description of actual applied tasks that can be effectively solved on its basis is given.

Keywords: pedagogical system, methodology, university training of IT specialists, quality of training, model, simulation modeling.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

Е. Н. Надеждин, И. Л. Федотенко, Е. Е. Смирнова, 2022, “Methodology of simulation modeling of pedagogical systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 291–304.

Посвящается 85-летию со дня рождения
Альберта Рубеновича Есяяна

1. Введение

Одним из ведущих методов научного познания сложных явлений и процессов окружающего мира выступает моделирование [1, 2].

В педагогической науке метод моделирования нашел отражение в трудах ряда исследователей: В. Г. Афанасьева, С. А. Бешенкова, Б. А. Глинского, В. М. Монахова, И. Б. Новик, Е. И. Смирнова, В. А. Штофф и др. Многообразие прикладных задач педагогической науки и образовательной практики определило широкий спектр математических моделей.

Примем за основу определение термина «моделирование», предложенное Г. В. Суходольским, который понимает его «как процесс создания иерархии моделей, в которой некоторая

реально существующая система моделируется в различных аспектах и различными средствами» [3].

Обобщая существующие подходы и точки зрения, понятие «Модель» представим как искусственно созданный объект в виде априорно заданной формальной схемы, который, будучи подобным исследуемому объекту (или явлению), отображает и воспроизводит в более простом и обобщенном виде структуру, основные свойства, взаимосвязи и отношения между элементами этого объекта.

Установившаяся и принятая в отечественной науке классификация математических моделей представлена в работе [2].

Практическая ценность моделирования как метода педагогического исследования связана с реализацией известных принципов: комплексность, объективность, определенность, stochasticность, преемственность, вариативность, многомерность, целостность, единство задач функционирования и управления, наглядность и др. Набор указанных положений и принципов во многом определяют тип модели, её возможности и функционал. К настоящему времени накоплен значительный опыт успешного применения метода моделирования в педагогических исследованиях [4-6]. Однако, как показала практика, каноническая модель психолого-педагогического проектирования сегодня не в полной мере отвечает социально-политическим реалиям и современным вызовам и нуждается в дальнейшем развитии.

Целью статьи является обоснование концепции методологии имитационного моделирования педагогических систем, отражающую системное применение метода математического моделирования как методологического базиса для формализованного представления, анализа и прогностической оценки эффективности педагогических инноваций в условиях цифровой образовательной среды.

2. Педагогические системы

Объектом исследования в нашей работе выступает педагогическая система (ПС). В. П. Беспалько определил педагогическую систему как *«определенную совокупность взаимосвязанных средств, методов и процессов, необходимых для создания организованного, целенаправленного и преднамеренного педагогического влияния на формирование личности с заданными качествами»* [4].

Нам также близка позиция Н. В. Кузьминой, которая подчеркивает, что педагогическая система – это множество взаимосвязанных функциональных и структурных компонентов, подчиняемых реализации общей цели, то есть получению определенного педагогического результата.

Следуя рекомендациям авторов работ [5, 6], педагогическая система понимается нами как совокупность взаимосвязанных и взаимозависимых научно-обоснованных методов, процессов и образовательных технологий, необходимых для создания организованного, целенаправленного и адресного влияния на развитие у личности качеств и компетенций, востребованных индивидом, социумом, государством.

Большинство исследователей выделяет следующие структурные элементы ПС: ценности, цели, функции, содержание, средства коммуникации, субъекты и объекты образовательного процесса (организаторы, педагоги, обучающиеся).

Педагогическая система имеет достаточно чёткие границы, отделяющие ее от других систем, определенный компонентный состав, организацию, то есть целесообразное упорядочение элементов, устойчивые связи и отношения между элементами, содержание (сущность, закономерности, основные свойства и качества), динамические свойства, а также внешние и внутренние функции.

С позиций системного подхода ПС должна рассматриваться как составная часть (элемент) более крупной социальной системы, отражающая её характерные социальные, культурные,

исторические и другие особенности. В свою очередь, внутри педагогической системы можно выделить в качестве более частных подсистем: дидактические, воспитательные, развивающие и образовательные.

Как показали наши исследования, на фоне современных достижений информатизации образования прослеживается устойчивая тенденция повышения технологичности функционирования ПС, которая приобретает качественно новые системные свойства и дидактические возможности. При этом возрастает степень субъектности ее участников, наблюдается постепенный отход от линейного и одномерного понимания характера педагогического процесса.

Специфика системного подхода в педагогике позволила преодолеть примитивизм, механистичность, прямолинейность представлений о причинах, способах, условиях и путях решения педагогических проблем образования, воспитания, обучения и развития всех субъектов образовательного процесса.

Для ПС характерно стремление к стабилизации: система пытается разрешить внутренние и внешние противоречия, чтобы избежать дезинтеграции и сохранить свою целостность. ПС функционирует в ситуации вертикальной и горизонтальной полифункциональности, то есть, преемственности в этапах, формах, средствах, методах и приемах решения образовательных и воспитательных задач с элементами их усложнения и модернизации. Горизонтальная многофункциональность понимается как обогащение содержания воспитательной работы в структуре единства ее компонентов (нравственное, гражданское, эстетическое воспитание и т.д.). Дополнительно отметим, что в современных ПС имеют место механизмы взаимной адаптации: система вынуждает преподавателя приспосабливаться к саморазвивающейся личности обучающегося, который, в свою очередь, адаптируется к особенностям педагога.

У ПС появляются новые качества, которые отсутствуют у её составных компонентов. Так, по мнению В. А. Сластенина, при комплексном изучении ПС необходимо акцентировать внимание на изучении *«множества взаимосвязанных структурных компонентов, объединенных единой образовательной целью развития личности и функционирующих в целостном педагогическом процессе»* [7]. Все элементы ПС (ценности, цели, средства, субъекты, объекты и т.д.) тесно взаимосвязаны, и каждый из них может изменить свое состояние, только отражая изменения, происходящие в другом элементе.

Для инновационных ПС, реализуемых в цифровой образовательной среде, характерными особенностями являются высокий уровень организации, индетерминизм относительно множества внутренних и внешних факторов, трансформация межкомпонентных связей и повышение степени их информатизации. В силу этого можно констатировать – в на текущем этапе эволюции классическая модель ПС трансформируется в высокоорганизованную динамическую систему с признаками интеллектуальной информационной системы. Формализованное изучение ПС должно осуществляться на базе рекомендаций системного подхода и современной теории управления [8].

3. Применение технологии функционального моделирования

В интересах структурирования, содержательного описания и выявления особенностей объекта исследования воспользуемся известной технологией функционального моделирования информационных систем в нотации IDEF0 [9].

На рисунке 1 представлена контекстная диаграмма педагогической системы избранного направления подготовки магистратуры.

На рисунке 2 представлена диаграмма 1-го уровня декомпозиции объекта исследования. В интересах упрощения схемы и удобства формального анализа компонент «Профессорско-преподавательский состав» (ППС) вынесен за контур педагогической системы. Отметим также, что модуль итоговой аттестации и оценки уровня компетентности магистрантов введен в

состав функционального блока «Обучающиеся».

Как показал анализ, объект исследования обладает комплексом специфических свойств (наличие множества компонентов разной природы, многообразие связей, многоаспектность, неопределенность условий обучения и др.), что дает основание отнести его к классу сложных динамических систем (СДС) [8]. Кроме того, отметим, что ПС является открытой информационной системой, взаимодействующей с другими системами образовательной среды и подверженной воздействию внутренних и внешних факторов различной физической и психической природы. В силу указанной специфики построить аналитическую модель ПС в замкнутом виде не представляется возможным. Поэтому при обосновании научно-методического подхода к исследованию ПС основное внимание уделим методу имитационного моделирования (МИМ) [1].

К основным достоинствам метода имитационного моделирования относятся [10]: универсальность, высокая гибкость, удобство алгоритмизации, масштабируемость, корректное представление и учет качественных факторов, возможность статистической обработки и контроля достоверности результатов моделирования. Вычислительная схема МИМ использует идею многократного повторения вычислительного эксперимента с математической моделью объекта, эмулирующей воздействие факторов стохастической природы, пошаговой фиксации и последующей компьютерной обработки результатов на базе известных методов математической статистики. Конечной целью и результатом имитационного моделирования в нашем случае является определение многомерного закона распределения вероятностей показателя качества обучения и его статистических характеристик.

4. Концепция имитационного моделирования

Нами предложена концепция исследования педагогической системы вузовской подготовки ИТ-специалистов (уровень магистратуры) по направлениям 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» на основе метода имитационного моделирования в контексте комплексного применения информационных и коммуникационных технологий в образовательном процессе. Далее – это *концепция методологии имитационного моделирования педагогической системы* (КИМ ПС).

Описание концепции методологии имитационного моделирования представим в виде трех-элементной модели, включающей: блок оснований концепции, блок основных положений и блок реализации концепции (см. рисунок 3).

Целью разработки методологии имитационного моделирования ПС является теоретическое обоснование единого научно-методического подхода к проблеме повышения качества подготовки ИТ-специалистов через идентификацию, формальное представление и имитационное моделирование реального образовательного процесса на основе комплексного применения положений, методов и алгоритмов теории исследования операций, имитационного моделирования и дискретной математики.

Методология определяет теоретическую платформу, комплекс научно-методических средств и инструментов, необходимых и достаточных для корректной математической постановки и численного решения задач исследования компонентов (и связей между ними) ПС вузовской подготовки магистрантов. Методология опирается на современную парадигму целостного образовательного процесса, теоретический базис которой составляют известные концептуальные подходы: компетентностный, системно-деятельностный, междисциплинарный, полисубъектный, информационный, синергетический, аксиологический и др.

Методологическую основу формализованного исследования педагогической системы методом имитационного моделирования составляет системно-деятельностный и компетентностный

подходы [5, 11].

Главная гипотеза концепции предлагаемой методологии имитационного моделирования ПС (см. рисунок 3) состоит в том, что образовательный процесс с заданной степенью приближения может быть представлен комплексом моделей, использующих классические математические схемы, наиболее адекватные частным задачам исследования, выделенным при декомпозиции предметной области. Сопряжение комплекса моделей осуществляется через специализированный процессор-посредник – цифровой блок анализа и синхронизации.

Таким образом, методология имитационного моделирования обобщает известные положения и принципы специальной теории подобия автоматизированных информационных систем [12] на задачи исследования ПС методом имитационного моделирования.

Общие функции имитационного моделирования как способа исследования ПД включают: а) анализ, обобщение и систематизацию априорной информации о системе; б) формальное описание системы (или процесса) в рамках используемой математической схемы; в) выявление закономерностей, их интерпретацию и объяснение; г) проверку адекватности модели; д) статистическую оценку характеристик исследуемой системы и прогнозирование её поведения.

Основные положения методологии имитационного моделирования ПС являются результатом развития и конкретизации известных принципов моделирования сложных систем с учетом специфики предметной области педагогики [13, 14, 15].

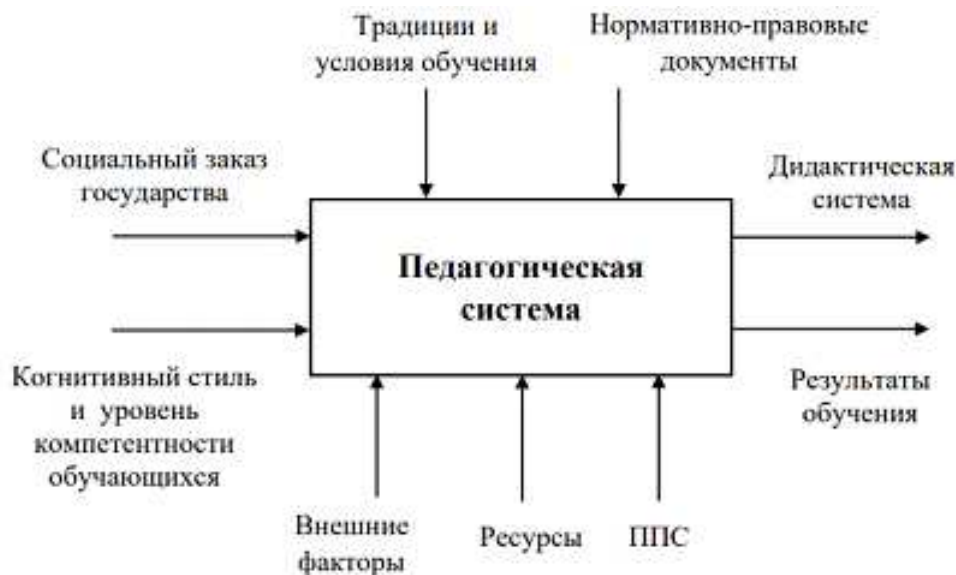


Рис 1: Контекстная диаграмма объекта исследования – педагогической системы

Данные положения определяют:

1. декомпозицию предметной области и целей исследования в контексте методологии системного подхода;
2. подобие модели реальной системе и соответствие решаемой задаче;
3. методику упрощения при сохранении существенных свойств системы;
4. механизм поиска компромисса между сложностью модели и точностью результатов моделирования;
5. многовариантность реализации элементов модели;
6. определение баланса погрешностей различных видов;

7. выбор схемы компьютерной реализации с использованием известных методов и инструментальных программных средств;
8. алгоритмы контроля достоверности и корректировки результатов моделирования с учетом дополнительной информации;
9. методы и средства представления (визуализации) и интерпретации результатов.

Многолетние исследования в контексте актуальных проблем психологии высшей школы, подтверждают значительную корреляцию результатов обучения магистрантов с уровнем и характером их мотивации (социальной и познавательной), с особенностями профессиональной направленности личности [16-20]. Учитывая, что образовательный процесс в университете (в соответствии с Законом «Об образовании в Российской Федерации», № 273-ФЗ) осуществляется в интересах личности, социума и государства, кроме социального заказа должны приниматься во внимание особенности образовательного пространства (гетерогенность, инклюзивность состава обучающихся, многонациональный состав, разные культуры, конфессии). Широкая палитра личностных и профессиональных ценностей предполагает целенаправленную коррекцию основных компонентов образовательного процесса (целей, отбор методов и средств, содержания обучения).



Рис 2: Функциональная модель педагогической системы (диаграмма 1-го уровня)

Методология имитационного моделирования ПС реализуется через разработку специализированного комплекса математических моделей и алгоритмов (КМА), ориентированного на компьютерное решение задач исследования (моделирования, анализа и синтеза) ПС и её компонентов. На рисунке 4 представлена укрупненная структура КМА.



Рис 3: Структура концепции методологии имитационного моделирования

В составе ядра КМА выделены: комплекс моделей типовых задач исследования; блок нормативно-правовых документов, регламентирующих процесс разработки или модификации ПС; база данных, которая используется для хранения исходных данных, промежуточных и окончательных результатов исследования; комплекс моделей и алгоритмов идентификации; комплекс алгоритмов оценки и прогнозирования; комплекс алгоритмов дискретной оптимизации; вспомогательные алгоритмы и процедуры; блок управления; интеллектуальный интерфейс с блоком анализа и синхронизации.

Архитектура и характеристики КМА допускают его интегрирование с электронными образовательными ресурсами, сервисами и инструментами в составе информационной образовательной среды университета.

Учитывая широкие возможности и потенциал КМА в вопросах поддержки формализованного решения актуальных задач педагогического проектирования, связанных с разработкой и модификацией инновационных педагогических систем, предложенный базовый вариант КМА можно отнести к группе проблемно-ориентированных информационных систем. Идея создания проблемно-ориентированных информационно-вычислительных систем (ПОИВС) для аналитической поддержки процесса обучения ИТ-специалистов в системе высшего образования была обоснована в трудах профессора Я.А. Ваграменко [21], а затем получила развитие в работах профессора Н.М. Добровольского и его учеников.

Опираясь на накопленный опыт педагогических исследований [10,11], дадим краткую характеристику основных прикладных задач, которые могут быть формализованы и решены на основе представленной методологии имитационного моделирования ПС.



Рис 4: Структура комплекса математических моделей и алгоритмов (КМА)

ЗАДАЧА 1. Задача идентификации аналитической модели.

В задачах факторного анализа образовательного процесса к центральным является вопрос корректной параметрической идентификации аналитической модели функционала результатов обучения $Q = Q(a_1, \dots, a_n)$, где $a_1, \dots, a_n$ – изменяемые параметры (факторы). В силу известных дидактических особенностей получение математического описания объекта исследования в замкнутой форме, как правило, затруднительно. Рациональный подход состоит в использовании аппарата регрессионного анализа результатам педагогического эксперимента в интересах построения многофакторной регрессионной модели функционала $Q = Q(a_1, \dots, a_n)$ [8].

ЗАДАЧА 2. Анализ показателей качества обучения в условиях разработанной образовательной технологии.

Во многих случаях оценка качества известной дидактической системы может быть сведена к формулировке и решению задачи статистического анализа динамической системы с вычислением интегрального функционала потерь. Функционал потерь здесь можно интерпретировать как меру отклонения сформированных у обучающегося профессиональных компетенций от нормативных значений. Учитывая, что число параметров, характеризующих свойства компонентов и связей в дидактической системе $m \gg 1$, можно утверждать, что оцениваемый показатель будет представлять собой кратный интеграл специального вида.

Содержательная постановка задачи кратного численного интегрирования имеет следующий вид.

Пусть требуется вычислить интеграл вида $\int_D f(x) \cdot dx$, где D – область в n -мерном евклидовом пространстве, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка этого пространства, dx – элементарный объем. Задача приближенного вычисления кратного интеграла и оценки показателя эффективности дидактической системы решается на основе численных методов кратного интегрирования.

Для приближённого вычисления интегрального функционала заданной структуры необ-

ходимо использовать численные методы интегрирования, например, известный метод комбинированных сеток, разработанный профессором Н.М. Коробовым и его учениками [22].

Отдельную группу методов решения задач анализа качества обучения составляют методы дискретных потоковых систем, которые можно считать обобщением классических моделей массового обслуживания с учетом нелинейности и асинхронности информационных подпроцессов в контуре ПС. Традиционно исследование технологических процессов в ПС осуществляют с позиций теории марковских и полумарковских процессов [23]. Представляется перспективным для оценки и прогнозирования характеристик ПС использование математического аппарата расширенных временных сетей Петри [24].

ЗАДАЧА 3. *Оптимизация педагогической системы.*

Известно, что основная цель современной ПС – формирование гармонично развитой, профессионально подготовленной, социально-активной, творческой личности. Оптимизация ПС призвана определить её структуру, содержание компонентов и оптимальные связи между ними. Традиционно в процессе оптимизации ПС стремятся осуществить: комплектование и конкретизацию задач; генерализацию и координацию содержания, отбор методов, форм и средств обучения и воспитания. По результатам исследования формируют рекомендации, направленные на выбор структуры, дифференциацию обучения, выбор темпа и обеспечение условий обучения. Для численного решения оптимизационных задач, как показала практика, наиболее удачными являются методы сетевого планирования и управления [10], а также методы целочисленного программирования в сетевой постановке [11].

5. Выводы

1. На этапе критического анализа текущего состояния национальной системы высшего образования и отказа от догм Болонской системы представляется актуальным проведение прикладных научных исследований, направленных на создание методологии, математического аппарата и инструментария в интересах реформирования и повышения качества вузовской подготовки кадрового резерва для цифровой экономики.
2. Разработка методологии имитационного моделирования педагогической системы университета с применением ИКТ позволит сформировать научно-обоснованную платформу для системных исследований инновационных образовательных технологий, выявления их дидактического потенциала и обоснования оптимальных механизмов внедрения в образовательный процесс. Это, безусловно, будет способствовать повышению качества подготовки ИТ-специалистов.
3. Реализация комплекса гетерогенных математических моделей, использующих идею имитационного моделирования, в составе математического обеспечения ПОИВС позволит повысить объективность прогностических оценок характеристик перспективных педагогических систем и выявить наиболее эффективные технологии подготовки ИТ-специалистов, адекватные запросам современного информационного общества.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука / пер. с англ. М.: Мир, 1978. – 302 с.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учебник. – 7-е изд. – М.: Изд-во «Юрайт», 2015. – 343 с.

3. Суходольский Г.В., Структурно-алгоритмический анализ и синтез деятельности. – Л.: ЛГУ, 1976. – 120 с.
4. Беспалько В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 154 с.
5. Софронова Н. В., Горохова Р. И. Моделирование педагогических систем: монография. – Чебоксары: Чувашский гос. пед. ун-т, 2011. – 174 с.
6. Образование и педагогика: теория, методология, опыт: монография / Ж.В. Мурзина, О.Л. Богатырева. – Чебоксары: ИД «Среда», 2020. – 188 с.
7. Сластенин В. А., Подымова Л. С. Педагогика: Инновационная деятельность. – М.: Магистр, 1997. – 221 с.
8. Волкова В.Н. Системный анализ и принятие решений: словарь-справочник. Учеб. пособие для вузов /Под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. – М.: Высш. шк., 2004. – 616 с.
9. Черемных С. В. Моделирование и анализ систем. IDEF-технологии: практикум / С.В. Черемных, И.О. Семенов, В.С. Ручкин. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 192 с : ил. – (Прикладные информационные технологии).
10. Надеждин Е. Н, Смирнова Е. Е. Методы моделирования и оптимизации интегрированных систем управления организационно-технологическими процессами в образовании: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – 250 с.
11. Надеждин Е. Н., Смирнова Е. Е. Исследование интегрированных систем управления качеством обучения: монография. – Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 306 с.
12. Надеждин Е. Н. Метод моделирования по аналогии в задачах проектной эффективности автоматизированных систем организационного управления. Депон. ФГАУ ГНИИ ИТТ «Информика». – Москва, 2014. – 16 с. – Библиогр. 22 назв. – Русс. – Деп. в ВИНТИ 05.09.2014 г.; № 245-В 2014.
13. Методы моделирования образовательных процессов [Текст]: монография / [С. Ш. Палфёрова, С. А. Крылова, Н. Н. Кошелева и др.]. – Самара: Вектор, 2018. – 99 с.
14. Камалеева А. Р., Нургазизова Э. Ф. Теоретические основы моделирования педагогических систем // Вестник ЮУрГГПУ. 2010. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/teoreticheskie-osnovy-modelirovaniya-pedagogicheskikh-sistem> (дата обращения: 05.10.2022).
15. Новикова М. Г., Федотенко И. Л. Моделирование процесса формирования профессиональной направленности студентов вуза // Мир науки. Психология и педагогика. – 2020. – № 3. Т. 8. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/68PDMN320.pdf> .
16. Федотенко И.Л., Новикова М.Г. Формирование профессиональной направленности бакалавров экономики в университете на основе взаимодействия с работодателями// Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. 2020. – № 2 (54). – С. 130-134.
17. Федотенко И. Л., Бояджиева Н. Двадесет години научни форуми в България на асоциацията на професорите от славянските страни (АПСС) // Pedagogika-Pedagogy. Bulgarian Journal of Education Research and Practice “АЗ.Буки”. -2021. Volume 93. – Number 1. Sofia. – С. 139-145.

18. Федотенко И. Л., Тарантей Л. М. Психологическая безопасность образовательной среды как теоретический и эмпирический феномен/ Сборник статей «Наука – образование – профессия: системный личностно-развивающий подход»; Под общ. ред. Л.М. Митиной. – М.: Изд-во «Перо», 2019. – С.68-70.
19. Федотенко И. Л., Тимохина А. В. Исследование рисков профессиональной направленности студентов в образовательном процессе университета // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2020. – № 11 (ноябрь). – С. 53–65. – URL: <http://e-koncept.ru/2020/201081.htm>.
20. Федотенко И. Л., Югфельд И. А. Социально-психологические риски в гетерогенной образовательной среде университета // Social inclusion in the special education Student-teacher-environment, Uniwersytet przyrodniczo-humanistyczny w Siedlcach, Siedlce. Польша, 2018. – С. 15-25.
21. Ваграменко Я. А. Информационные технологии и модернизация образования // Информационные технологии и методология обучения точным наукам: Труды Симпозиума Академии информатизации образования. – М., 2002. – С. 8-13.
22. Добровольский Н. М., Головнёв Ю. Ф., Надеждина Е. Е. Вычисление многократных интегралов на основе квадратурных формул с комбинированными сетками // Изв. ТулГУ. Сер.: Проблемы управления электротехническими объектами. Сб. тр. 2-й Всерос. научно-практ. конф., 24-25 окт. metricconverterProductID2002 г2002 г.- Тула: Изд-во ТулГУ, 2002. – Вып. 2. – С.142-143.
23. Надеждин Е.Н., Смирнова Е.Е. Вероятностное моделирование информационного процесса в системе дистанционного обучения // Педагогическая информатика. – 2013. – № 4. – С.93-108.
24. Надеждин Е.Н. Методика операционного моделирования организационно-технологических процессов в базе расширенных временных сетей Петри/ депон. ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого». – Тула, 2014.- 16 с. 3 ил. – Библиогр. 16 назв. – Русс. – Деп. в ВИНТИ 15.08.2014 г.; № 235-В2014. Бюллетень публикаций № 9, 2014 г.

REFERENCES

1. Shannon R., 1978, “Simulation modeling of systems - art and science” // translated from English М.: Mir – 302 p.
2. Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A., 2015, “System modeling: textbook” – 7th ed. – Moscow: Publishing House «Yurayt», 2015. – 343 p.
3. Sukhodolsky G.V., 1976, “Structural and algorithmic analysis and synthesis of activity” – L.: LSU – 120 p.
4. Bepalko V. P., 1989, “The components of pedagogical technology” // V. P. Bepalko. – М.: Pedagogy – 154 p.
5. Sofronova N. V., Gorokhova R. I., 2011, “Modeling of pedagogical systems: monograph” – Cheboksary: Chuvash State Pedagogical University. – 174 p.
6. Zh.V. Murzina, O.L. Bogatyreva, “Education and pedagogy: theory, methodology, experience: monograph” // – Cheboksary: ID «Wednesday», 2020. –188 p.

7. Slastenin V.A., Podymova L.S., 1997, "Pedagogy: Innovative activity" – M.: Magister – 221 p.
8. Volkova V.N., 2004, "System analysis and decision-making: dictionary-reference. Textbook for universities" // Edited by V. N. Volkova, V. N. Kozlov. – M.: Higher School – 616 p.
9. Cheremnykh S.V., 2006, "Modeling and analysis of systems. IDEF-technologies: practicum" // S.V. Cheremnykh, I.O. Semenov, B.C. Ruchkin. – M.: Finance and Statistics – 192 p. : ill. – (Applied information technologies).
10. Nadezhdin E.N., Smirnova E.E., 2013, "Methods of modeling and optimization of integrated management systems of organizational and technological processes in education: monograph" – Tula: TulSU Publishing House, 2013. – 250 p.
11. Nadezhdin E.N., Smirnova E.E., 2016, "Research of integrated learning quality management systems: monograph" – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 306 p.
12. Nadezhdin E.N., 2014, "Method of modeling by analogy in problems of design efficiency of automated organizational management systems". Depon. FGOU GNII ITT «Informatics». – Moscow – 16 p. – Bibliogr. 22 titles. – Russ. – Dep. in VINITI 05.09.2014; № 245-In 2014.
13. S. S. Palferova, S. A. Krylova, N. N. Kosheleva, etc., 2018, "Methods of modeling educational processes [Text]: monograph" // – Samara: Vector – 99 p.
14. Kamaleeva A.R., Nurgazizova E.F., 2010, "Theoretical foundations of modeling pedagogical systems" // The Bulletin of the YUrGGPU. 2010. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/teoreticheskie-osnovy-modelirovaniya-pedagogicheskikh-sistem> (accessed: 05.10.2022).
15. Novikova M.G., Fedotenko I.L., 2020, "Modeling of the process of formation of professional orientation of university students" // The world of science. Psychology and pedagogy. – № 3. Volume 8. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/68PDMN320.pdf> .
16. Fedotenko I.L., Novikova M.G., 2020, "Formation of professional orientation of bachelors of economics at the University on the basis of interaction with employers" // Scientific notes. Electronic scientific journal of Kursk State University. –№ 2 (54). – pp. 130-134.
17. Fedotenko I., Boyadzhieva N., 2021, "Dvadeset godini nauchni forumi in Bulgaria na asociatiata na professorite from slavyanskite strani (APSS)" // Pedagogika-Pedagogy. Bulgarian Journal of Education Research and Practice "AZ.Buki". Vol. 93. – № 1. Sofia. – Pp. 139-145.
18. Fedotenko I.L., Tarantey L.M., 2019, "Psychological safety of the educational environment as a theoretical and empirical phenomenon" / Collection of articles «Science – education – profession: a systematic personality-developing approach»; Under the general editorship of L.M. Mitina. – M.: Publishing House «Pen». – pp. 68-70.
19. Fedotenko I. L., Timokhina A.V., 2020, "Research of risks of professional orientation of students in the educational process of the university" // Scientific and methodological electronic journal «Concept» – № 11 (November). – pp. 53–65. – URL: <http://e-koncept.ru/2020/201081.htm> .
20. Fedotenko I.L., Yugfeld I.A., 2018, "Socio-psychological risks in the heterogeneous educational environment of the university" // Social inclusion in the special education Student-teacher-environment, Uniwersytet przyrodniczo-humanistyczny w Siedlcach, Siedlce. Poland – pp. 15-25.
21. Vagramenko Ya.A., 2002, "Information technologies and modernization of education" // Information technologies and methodology of teaching exact sciences: Proceedings of the Symposium Academy of Informatization of Education. – M. – pp. 8-13.

22. Dobrovolsky N.M., Golovnev Yu.F., Nadezhdina E.E., 2002, "Calculation of multiple integrals based on quadrature formulas with combined grids" // Izv. TulaSU. Ser.: Problems of control of electrotechnical objects. Sat. tr. 2-nd All-Russian Scientific and Practical Conference, October 24-25. metricconverterProductID2002 g2002- Tula: TulaSU Publishing House, 2002. – Iss. 2. – pp. 142-143.
23. Nadezhdin E.N., Smirnova E.E., 2013, "Probabilistic modeling of the information process in the distance learning system" // Pedagogical informatics. – 2013. – № 4. – pp. 93-108.
24. Nadezhdin E.N., 2014, "Methodology of operational modeling of organizational and technological processes in the basis of extended temporary Petri nets/depon". FGBOU HPE «Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy». – Tula, .- 16 p. 3 ill. – Bibliogr. 16 titles. – Russ. – Dept. in VINITI 15.08.2014; № 235-In2014. Bulletin of Publications № 9.

Получено: 14.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-305-319

Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием¹

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Нгуен Тхи Шанг — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием. Полагается, что пластина помещена в безграничную идеальную жидкость, а падающая звуковая волна является гармонической и генерируется точечным источником.

Аналитическое решение поставленной задачи получено на основе известного решения задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием и с использованием интегрального представления сферической волны в виде разложения по плоским волнам.

Нахождение поля смещений в неоднородном слое сведено к решению краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов частотных характеристик отраженного и прошедшего акустических полей.

Ключевые слова: отражение и прохождение звука, сферическая звуковая волна, однородная упругая пластина, неоднородное покрытие.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 305–319.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-305-319

Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating²

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Nguyen Thi Sang — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

In paper the problem of spherical sound wave reflection and transmission through a homogeneous isotropic elastic plate with a continuously inhomogeneous in thickness elastic coating is considered. It is believed that the plate is placed in an infinite ideal fluid, and the incident sound wave is harmonic and is generated by point source.

An analytical solution of the posed problem is obtained on the basis of the known solution of the problem about the passage of plane sound waves through plate with a continuously inhomogeneous coating and using integral representation of a spherical wave in the form of an expansion on flat waves.

Finding the displacement field in an inhomogeneous layer is reduced to solving boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order.

The results of numerical calculations of frequency characteristics are presented for reflected and transmitted acoustic fields.

Keywords: reflection and transmission of sound, spherical sound wave, homogeneous elastic plate, inhomogeneous coating.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2022, "Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 305–319.

1. Введение

Отражение и прохождение звука через плоские однородные изотропные упругие пластины с непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалось в ряде работ. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим однородным плоским слоем с неоднородным по толщине упругим покрытием решена в [1]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [2]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с теплопроводными жидкостями, решены в [3]. В [4 - 6] исследовано влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия

²Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия. В [4] полагалось, что пластина граничит с идеальными жидкостями, а в [5, 6] — с вязкими жидкостями. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [7]. В [8] получено решение задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием.

В работах, упомянутых выше, первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако, как правило, источник звука находится на конечном удалении от рассеивателя. Поэтому необходимо учитывать криволинейность фронта падающей волны, что оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием исследовано в [9]. В [10, 11] решены задачи о прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис. 1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1 , ρ_2 и скорости звука c_1 , c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает монохроматическая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, координаты которого (x_i, y_i, z_i) . Без ограничения общности положим, что

$$x_i = 0; \quad y_i = 0; \quad z_i = -z_0.$$

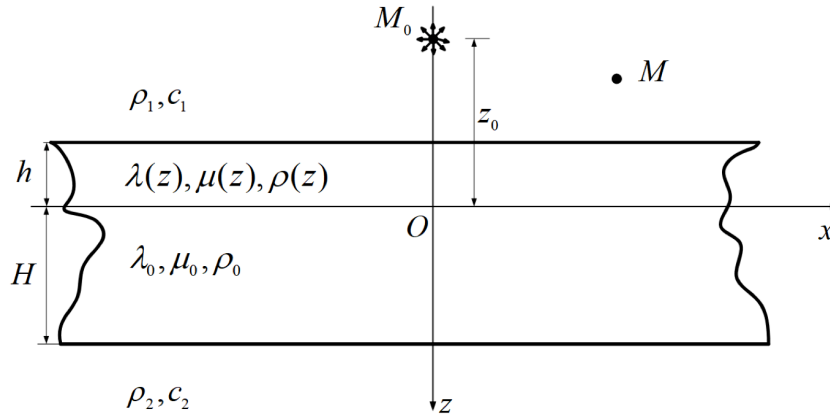
Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = A \frac{\exp[i(k_1 R - \omega t)]}{R}, \quad (1)$$

где A — амплитуда волны; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; ω — круговая частота; $R = |r - r_0|$; r и r_0 — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и с точкой $M_0(0, 0, -z_0)$, определяющей положение источника, соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Рис. 1: Геометрия задачи

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.



3. Математическая модель задачи

Рассматриваемая задача является трехмерной. Все искомые величины зависят от координат x, y, z .

Распространение звуковых волн в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta \psi_j + k_j^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где ψ_1 и ψ_2 — потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн; $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $z > H$ ($j = 2$); $\psi = \psi_0 + \psi_1$ — потенциал скорости полного акустического поля в полупространстве $z < -h$. При этом скорость частиц жидкости v_j и акустическое давление p_j в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$v_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad v_2 = \text{grad} \psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [12]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad} \Psi + \text{rot} \Phi,$$

где

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы осей x, y и z прямоугольной декартовой системы координат.

Компоненты вектора $\mathbf{u}^0$ выражаются через функции Φ_x, Φ_y и Φ_z следующим образом:

$$u_x^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}, \quad u_y^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}, \quad u_z^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \quad (4)$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [13], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho(z) u_x, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho(z) u_y, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho(z) u_z,\end{aligned}\tag{5}$$

где u_x , u_y и u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0 и составляющими вектора смещения $\mathbf{u}^0$ в однородной упругой пластине устанавливается на основе обобщенного закона Гука [13]. Связь между σ_{ij} и составляющими вектора $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии имеет аналогичный вид.

Решения дифференциальных уравнений (2), (3), (5) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = -h: \quad -i\omega u_z = v_{1z}, \quad \sigma_{zz} = -p_1, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0,\tag{6}$$

$$z = H: \quad -i\omega u_z^0 = v_{2z}, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2, \quad \sigma_{xz}^0 = 0, \quad \sigma_{yz}^0 = 0.\tag{7}$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$z = 0: \quad u_x = u_x^0, \quad u_y = u_y^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^0.\tag{8}$$

4. Аналитическое решение задачи

Прежде всего отметим, что векторное уравнение в (3) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора Φ . В результате (3) представляет собой систему четырех уравнений Гельмгольца относительно четырех скалярных функций. Граничные условия задачи полностью определяют лишь три функции. Поэтому решение системы содержит некоторый произвол. Чтобы полностью определить четыре искомых функции при подчинении граничным условиям, необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Этим условием может служить равенство

$$\operatorname{div} \Phi = 0.\tag{9}$$

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора Φ будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца, а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения (9), из которого следует

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}.\tag{10}$$

Представим потенциал скорости падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [12, 14]

$$\psi_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_0(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma, \quad (11)$$

где

$$\tilde{\psi}_0(\xi, \varsigma) = A \frac{i}{2\pi\chi_1} e^{i(\xi x + \varsigma y + \chi_1 |z + z_0|)}, \quad (12)$$

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}.$$

При $z > -z_0$ формула (12) принимает вид

$$\tilde{\psi}_0(\xi, \varsigma) = I(\xi, \varsigma) e^{i(\xi x + \varsigma y + \chi_1 z)}, \quad (13)$$

где

$$I(\xi, \varsigma) = A \frac{i}{2\pi\chi_1} e^{i\chi_1 z_0}.$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (11), определяемое (12), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на пластину с покрытием. Потенциал скорости такой волны определяется выражением

$$\psi_{0pl} = A_0 \exp[i(k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}(z + h))], \quad (14)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_{1y} = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на оси координат x , y , z ; $|\mathbf{k}_1| = k_1$; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (13) и (14) находим, что ξ соответствует k_{1x} , ς — k_{1y} , а $I(\xi, \varsigma)$ — $A_0 e^{ik_{1z}h}$. Поэтому решение задачи (2), (3), (5)–(8) можно найти, воспользовавшись решением задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием.

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\tilde{\psi}_0(\xi, \varsigma)$, потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ в покрытии определяются формулами, аналогичными в случае падения плоской волны с потенциалом ψ_{0pl} , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины ψ_j ($j = 1, 2$), Ψ , Φ , $\mathbf{u}$ подлежат определению путем интегрирования $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ по ξ и ς .

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным покрытием в случае произвольного падения.

4.1. Отражение и преломлении плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругую пластину с неоднородным покрытием

Пусть из полупространства $z < -h$ на слой с покрытием падает под произвольным углом плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой определяется выражением (14). Определим волновые поля в пластине и вне ее. Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl .

Потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн ψ_{1pl} и ψ_{2pl} , являющиеся решениями уравнений Гельмгольца, будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{1pl} &= A_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1y}y - k_{1z}(z + h))], \\ \psi_{2pl} &= A_2 \exp[i(k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}(z - H))], \end{aligned} \quad (15)$$

где k_{2x}, k_{2y}, k_{2z} — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_2$ на оси x, y и z ; $|\mathbf{k}_2| = k_2$; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [14] $k_{2x} = k_{1x}$; $k_{2y} = k_{1y}$.

Потенциалы смещения в упругой однородной пластине, являющиеся решениями соответствующих уравнений Гельмгольца, будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_{pl} &= B_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{ly}y + k_{lz}z)] + B_2 \exp[i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)], \\ \Phi_{xpl} &= C_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)] + C_2 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)], \\ \Phi_{zpl} &= D_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)] + D_2 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)],\end{aligned}\quad (16)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$. При этом $k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}$, $k_{ly} = k_{\tau y} = k_{1y}$.

Подставим выражения для Φ_{xpl} и Φ_{zpl} из (16) в (10) и проинтегрируем по y . Получим

$$\begin{aligned}\Phi_{ypl} &= -(k_{\tau x}/k_{\tau y})(C_1 + D_1) \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)] + \\ &+ (k_{\tau x}/k_{\tau y})(-C_2 + D_2) \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)].\end{aligned}\quad (17)$$

Коэффициенты A_j, B_j, C_j и D_j ($j = 1, 2$) в выражениях (15)–(17) подлежат определению из граничных условий.

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$, а от координаты y — $\exp(ik_{1y}y)$. Поэтому составляющие вектора $\mathbf{u}_{pl}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned}u_{xpl} &= U_1(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y), \\ u_{ypl} &= U_2(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y), \\ u_{zpl} &= U_3(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y).\end{aligned}\quad (18)$$

Подставляя выражения (18) в уравнения (5), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad (19)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — матрицы третьего порядка;

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ 0 & \mu' & ik_{1y}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & ik_{1y}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho & -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & i\mu'k_{1x} \\ -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & i\mu'k_{1y} \\ i\lambda'k_{1x} & i\lambda'k_{1y} & -\mu(k_{1x}^2 + k_{1y}^2) + \omega^2\rho \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь штрихи обозначают производные по координате z .

Подставим выражения (15)–(18) в граничные условия. В результате получим выражения для коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) и шесть условий для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (19):

$$\begin{aligned}A_1 &= A_0 + (\omega/k_{1z})U_3(-h), \\ A_2 &= (-i\omega/k_{2z})[k_{lz}(B_1e_{1l} - B_2e_{2l}) - (k_{1x}^2 + k_{1y}^2)(C_1e_{1\tau} + C_2e_{2\tau})/k_{1y} - \\ &\quad - k_{1x}k_{\tau z}(E_1e_{1\tau} - E_2e_{2\tau})/k_{1y}, \\ B_j &= b_{j1}U_1(0) + b_{j2}U_2(0) + b_{j3}U_3(0), \quad C_j = c_{j1}U_1(0) + c_{j2}U_2(0) + c_{j3}U_3(0), \\ D_j &= d_{j1}U_1(0) + d_{j2}U_2(0) + d_{j3}U_3(0) \quad (j = 1, 2),\end{aligned}\quad (20)$$

$$(\mathbf{AU}' + \mathbf{EU})_{z=-h} = \mathbf{G}, \quad (\mathbf{AU}' + \mathbf{FU})_{z=0} = 0. \quad (21)$$

Выражения для коэффициентов e_{jl} , $e_{j\tau}$, b_{jn} , c_{jn} , d_{jn} ($j = 1, 2; n = 1, 2, 3$) и элементов матриц $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ приводить не будем из-за их громоздкости.

Из формул (20) следует, что коэффициенты в выражениях (15) и (16) могут быть вычислены лишь после определения значений функции $U_1(z)$, $U_2(z)$ и $U_3(z)$ на поверхностях неоднородного слоя при $z = -h$ и $z = 0$.

Для определения поля смещений в упругом неоднородном слое необходимо решить краевую задачу (19), (21).

Получим решение этой задачи методом степенных рядов так, как это сделано в [15].

Предположим, что функции ρ , λ и μ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^R \rho^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^R \lambda^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \mu(r) = \sum_{k=0}^R \mu^{(k)}(z + h/2)^k,$$

где R — степень многочленов.

Приближенное аналитическое решение краевой задачи (19), (21) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^6 T_l U_n^l(z), \quad U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2, 3). \quad (22)$$

Коэффициенты T_l ($l = 1, 2, \dots, 6$) определяются из системы шести линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^6 T_l (\mathbf{AU}^{l'} + \mathbf{EU}^l)_{z=-h} &= \mathbf{G}, \\ \sum_{l=1}^6 T_l (\mathbf{AU}^{l'} + \mathbf{FU}^l)_{z=0} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l, U_3^l)^T$.

Коэффициенты $U_n^{l(s)}$ ($n = 1, 2, 3; l = 1, 2, \dots, 6$) разложений (22) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} U_1^{l(0)} &= \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_3^{l(0)} = \delta_{3l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{4l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{5l}, \quad U_3^{l(1)} = \delta_{6l}, \\ U_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2A_{nn}^{(0)})]^{-1} \sum_{q=1}^3 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\} \\ &\quad (s = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $R_1 = \min(R, s)$;

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= A_{22}^{(k)} = \mu^{(k)}; \quad A_{12}^{(k)} = A_{13}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = A_{23}^{(k)} = A_{31}^{(k)} = A_{32}^{(k)} = 0; \quad A_{33}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}; \\ B_{11}^{(k)} &= B_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad B_{13}^{(k)} = B_{31}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\ B_{23}^{(k)} &= B_{32}^{(k)} = ik_{1y}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = 0; \quad B_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}); \\ C_{11}^{(k)} &= -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho; \quad C_{12}^{(k)} = C_{21}^{(k)} = -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu); \\ C_{13}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho; \end{aligned}$$

$$C_{23}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad C_{31}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)};$$

$$C_{32}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad C_{33}^{(k)} = -(k_{1x}^2 + k_{1y}^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

4.2. Определение волновых полей в случае сферической падающей волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом (13) потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ в покрытии определяются соответствующими формулами (15)–(18), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны с потенциалом ψ_{0pl} , в которых следует заменить k_{1x} на ξ , k_{1y} на ς , A_0 на $I(\xi, \varsigma)e^{-ik_{1z}h}$.

В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \tilde{A}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_1(z + h))], \\ \tilde{\psi}_2 &= \tilde{A}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_2(z - H))], \\ \tilde{\Psi} &= \tilde{B}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_l z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_l z)], \\ \tilde{\Phi}_x &= \tilde{C}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)], \\ \tilde{\Phi}_y &= -(\xi/\varsigma) \left(\tilde{C}_1 + \tilde{D}_1 \right) \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \\ &\quad + (\xi/\varsigma) \left(-\tilde{C}_2 + \tilde{D}_2 \right) \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)], \\ \tilde{\Phi}_z &= \tilde{D}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \tilde{D}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)], \\ \tilde{u}_x &= \tilde{U}_1(z, \xi, \varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y), \\ \tilde{u}_y &= \tilde{U}_2(z, \xi, \varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y), \\ \tilde{u}_z &= \tilde{U}_3(z, \xi, \varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y), \end{aligned}$$

где

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= I(\xi, \varsigma)e^{-i\chi_1 h} + (\omega/\chi_1)\tilde{U}_3(-h, \xi, \varsigma), \\ \tilde{A}_2 &= (-i\omega/\chi_2)[\chi_l(\tilde{B}_1\tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2\tilde{e}_{2l}) - (\xi^2 + \varsigma^2)(\tilde{C}_1\tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2\tilde{e}_{2\tau})/\varsigma - \xi\chi_\tau(\tilde{E}_1\tilde{e}_{1\tau} - \tilde{E}_2\tilde{e}_{2\tau})/\varsigma], \\ \tilde{B}_j &= \tilde{b}_{1j}\tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{b}_{2j}\tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{b}_{3j}\tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma), \\ \tilde{C}_j &= \tilde{c}_{1j}\tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{c}_{2j}\tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{c}_{3j}\tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma), \\ \tilde{D}_j &= \tilde{d}_{1j}\tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{d}_{2j}\tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{d}_{3j}\tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma) \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Кроме того, указанные замены k_{1x} на ξ , k_{1y} на ς и A_0 на $I(\xi)e^{-i\xi h}$ следует произвести и в элементах матриц **B**, **C**, **E**, **F**, **G** краевой задачи (19), (21) для нахождения $\tilde{U}_n(z, \xi, \varsigma)$ ($n = 1, 2, 3$).

Согласно (22) будем иметь

$$\tilde{U}_n(z, \xi, \varsigma) = \sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \tilde{U}_n^l(z, \xi, \varsigma), \quad \tilde{U}_n^l(z, \xi, \varsigma) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2, 3),$$

где

$$\tilde{U}_1^{l(0)} = \delta_{1l}; \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad \tilde{U}_3^{l(0)} = \delta_{3l}; \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{4l}; \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{5l}; \quad \tilde{U}_3^{l(1)} = \delta_{6l};$$

$$\tilde{U}_n^{l(s+2)} = -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^3 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \tilde{B}_{nq}^{(k)}] \tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)} \tilde{U}_q^{l(s-k)} \}$$

$$(s = 0, 1, \dots);$$

$$\tilde{B}_{11}^{(k)} = \tilde{B}_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{B}_{12}^{(k)} = \tilde{B}_{21}^{(k)} = 0; \quad \tilde{B}_{13}^{(k)} = \tilde{B}_{31}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)});$$

$$\tilde{B}_{23}^{(k)} = \tilde{B}_{32}^{(k)} = i\varsigma(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \quad \tilde{B}_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)});$$

$$\tilde{C}_{11}^{(k)} = -\xi^2(\lambda + 2\mu) - \varsigma^2\mu + \omega^2\rho; \quad \tilde{C}_{12}^{(k)} = \tilde{C}_{21}^{(k)} = -\xi\varsigma(\lambda + \mu);$$

$$\tilde{C}_{13}^{(k)} = i\xi(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{22}^{(k)} = -\xi^2\mu - \varsigma^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho;$$

$$\tilde{C}_{23}^{(k)} = i\varsigma(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{31}^{(k)} = i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)};$$

$$\tilde{C}_{32}^{(k)} = i\varsigma(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{33}^{(k)} = -(\xi^2 + \varsigma^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

Коэффициенты $\tilde{T}_l$ ($l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) определяются из системы уравнений

$$\sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}^{l'} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=-h} = \tilde{\mathbf{G}},$$

$$\sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}_n^{l'} + \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=0} = 0,$$

где $\tilde{\mathbf{U}}^l(z, \xi, \varsigma) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l, \tilde{U}_3^l)^T$.

Штрихи означают дифференцирование по z .

Чтобы обеспечить ограниченность $\tilde{\psi}_1$ при $z \rightarrow -\infty$ выбор знака корня $\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ осуществим из условия $\text{Im}\chi_1 \geq 0$, а для ограниченности $\tilde{\psi}_2$ при $z \rightarrow \infty$ потребуем выполнения условия $\text{Im}\chi_2 \geq 0$, то есть

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_1^2, \quad \chi_1 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_1^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_1^2;$$

$$\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_2^2, \quad \chi_2 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_2^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_2^2.$$

Величины $\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$, $\chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ определяются по формулам

$$\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_l^2, \quad \chi_l = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_l^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_l^2;$$

$$\chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_\tau^2, \quad \chi_\tau = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_\tau^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_\tau^2.$$

При рассеянии сферической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы ψ_j ($j = 1, 2$), Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z и компоненты вектора смещения u_x , u_y , u_z в неоднородном покрытии находятся путем интегрирования по ξ и ς в бесконечных пределах величин $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$, $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ соответственно.

Так для потенциалов скоростей отраженной и прошедшей волн ψ_j ($j = 1, 2$) будем иметь

$$\psi_j(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma \quad (j = 1, 2). \quad (23)$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

5. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ и $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при расположении источника в точке M_0 с координатами $(x = 0, y = 0, z = -z_0)$. Точки наблюдения M_1 и M_2 в отраженном и прошедшем акустических полях имели координаты $(x = 0, y = 0, z = -2H)$ и $(x = 0, y = 0, z = 2H)$ соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1 = k_2$, $\rho_1 = \rho_2$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \tilde{\rho} f(z), \quad \lambda = \tilde{\lambda} f(z), \quad \mu = \tilde{\mu} f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right) \quad (a_1 = 1), \quad f_2(z) = a_2 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5 \right] \quad (a_2 = 6/11).$$

Множитель a_j ($j = 1, 2$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ и $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$. Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия.

Расчеты показывают существенное отличие частотных характеристик для разных законов неоднородности материала покрытия.

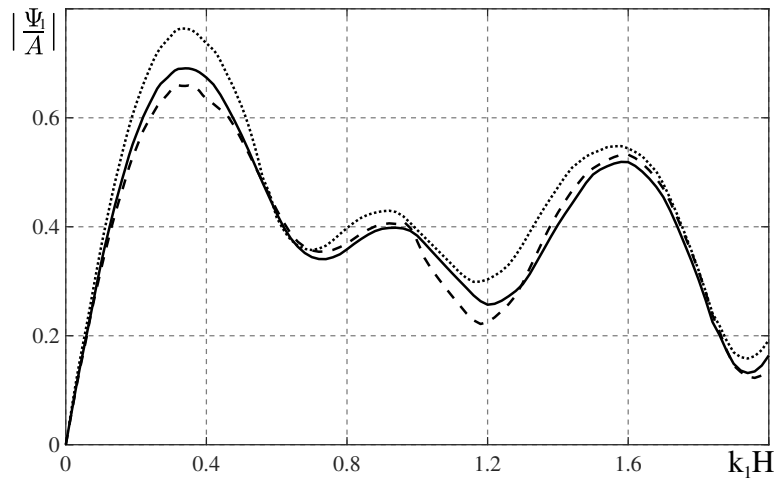


Рис. 2: Зависимость $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$

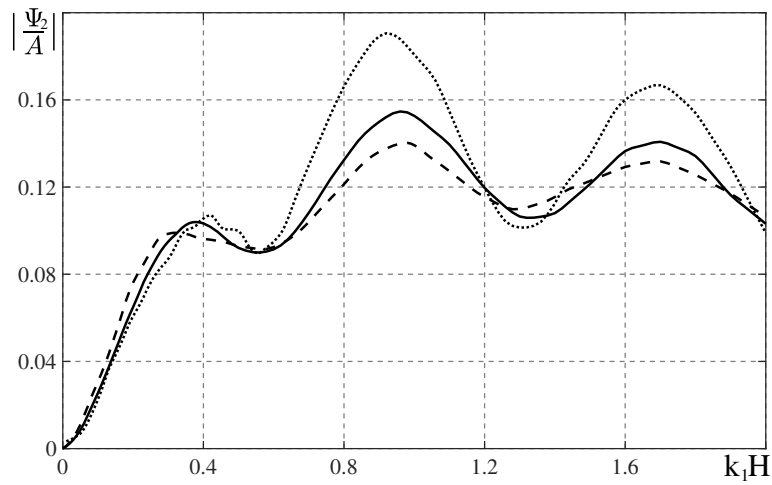


Рис. 3: Зависимость $\left|\frac{\psi_2}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H при $z_0 = 10H$

На рис. 4 и рис. 5 приведены частотные характеристики $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ для линейного закона неоднородности при разном удалении источника от пластины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям, когда $z_0 = 5H; 10H; 100H$.

При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается сильное изменение частотной зависимости, что проявляется в изменении уровней и сдвиге резонансных частот. По мере удаления точечного источника от пластины происходит увеличение осцилляции частотных зависимостей.

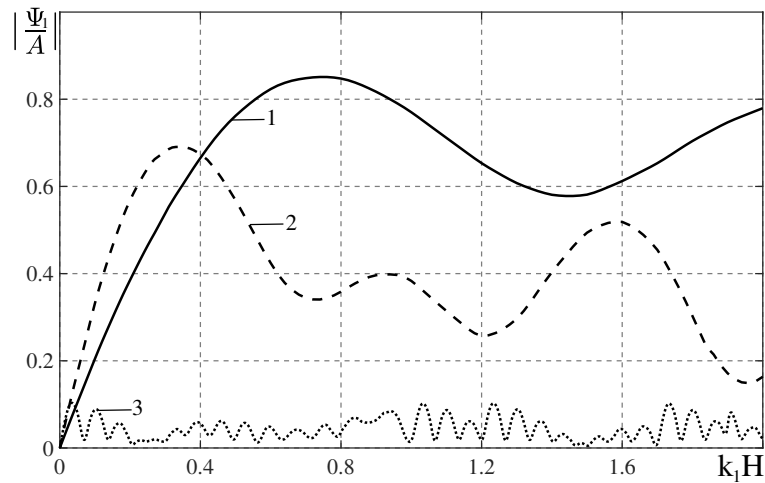


Рис. 4: Зависимость $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

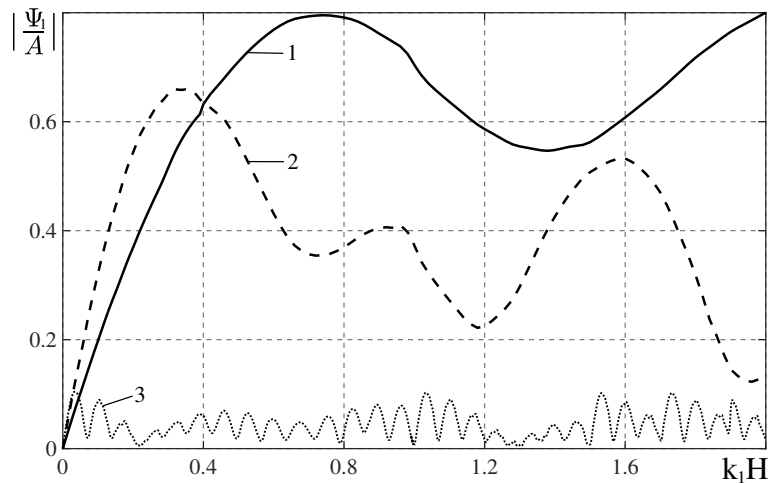


Рис. 5: Зависимость $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для квадратичного закона неоднородности при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении звуковой волны, излучаемой точечным источником, через однородную упругую пластину с покрытием, выполненным из функционально-градиентного материала.

В случае, когда геометрия фронта падающей волны не совпадает с геометрией тела, непосредственное решение дифракционной задачи оказывается весьма затруднительным. Приведенный выше подход к решению задачи позволил избежать необходимости решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями.

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука путем выбора законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Используя полученное решение прямой задачи можно найти решение обратной задачи об определении параметров неоднородности материала покрытия, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства пластины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
2. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
3. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
4. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.

5. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.
6. Нгуен Т. Ш. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.
7. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.
8. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 423 – 437.
9. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 312 – 327.
10. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
11. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика, 2014. № 2. С. 36 – 47.
12. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
15. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Определение поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.

REFERENCES

1. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
2. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, “Modeling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no. 4, pp. 339 – 344.
3. Larin, N. V. 2016, “Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].
4. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, “About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 6, pp. 362 – 372, [in Russian].

5. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
6. Nguyen, T. S. 2021, "About reflection and transmission of a plane sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 5, pp. 404 – 414, [in Russian].
7. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7, pp. 83 – 92, [in Russian].
8. Tolokonnikov, L. A. & Tolokonnikov, L. A. 2021, "Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423 – 437, [in Russian].
9. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2022, "Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 312 – 327, [in Russian].
10. Piquette J. C. 1988, "Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, No. 4, pp. 1284 – 1294.
11. Shushkevich G. Ch. & Kiselyova N. N. 2014, "Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell", *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].
12. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
13. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
14. Brekhovskikh, L. M. 1973, "Waves in Layered Media", Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2020, "Determination of the displacement field in an inhomogeneous coating of an elastic plate when passing through her plane sound wave *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 310 – 321, [in Russian].

Получено: 14.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-320-336

Тензорная теория деформационной повреждаемости

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин

Тутышкин Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор, Управление научно-исследовательских работ; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Травин Вадим Юрьевич — кандидат технических наук, АО “НПО “Сплав” им. А. Н. Ганичева” (г. Тула).

e-mail: travin.vu@mail.ru

Аннотация

На основе физической концепции порообразования, зарождения и роста пор формулируются обобщенные определяющие соотношения тензорной модели пластической повреждаемости металлов, основанной на трех инвариантах. Мультипликативное разложение тензора метрического преобразования и термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводят к симметричному тензору повреждаемости второго ранга с ясным физическим смыслом. Его первый инвариант определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатацией материала вследствие роста пор, второй инвариант девиаторного тензора - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов, третий инвариант девиаторного тензора описывает влияние на повреждаемость вида напряженного состояния (угла Лоде), в том числе, влияние поворота главных осей тензора напряжения (изменение угла Лоде). Введение трех составляющих мер с соответствующим физическим смыслом позволяет отобразить кинетический процесс деформационной повреждаемости эквивалентным параметром в трехмерном векторном пространстве, включая критериальные условия для пластического разрушения. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, может оказаться полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением.

Ключевые слова: основные уравнения, определяющие соотношения, пластичность, напряжения, деформации, физико-структурные параметры, повреждаемость, диссипация энергии, поверхность нагружения.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Тензорная теория деформационной повреждаемости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 320–336.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-320-336

Tensor theory of deformation damage

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich — doctor of technical sciences, professor, Department of Research; Tula State University (Tula).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Travin Vadim Yuryevich — candidate of technical sciences, JSC “NPO A. N. Ganichev “SPLAV” (Tula).

e-mail: travin.vu@mail.ru

Abstract

On the basis of the physical concept of pore formation, origin and growth of pores, generalized determining relations of the tensor model of plastic damage of metals based on three invariants are formulated. The multiplicative decomposition of the metric transform tensor and the thermodynamic formulation of the defining relations lead to a symmetric damage tensor of the second rank with a clear physical meaning. Its first invariant determines the damage associated with the plastic dilatance of the material due to pore growth, the second invariant of the deviant tensor - damage associated with a change in the shape of defects, the third invariant of the deviant tensor describes the effect on the damage of the type of stress state (Lode angle), including the effect of the rotation of the main axes of the stress tensor (change of the Lode angle). The introduction of three component measures with the corresponding physical meaning allows the kinetic process of deformation damage to be represented by an equivalent parameter in a three-dimensional vector space, including the criterion conditions for plastic destruction. A measure of plastic damage based on three invariants can be useful in assessing the quality of the mesostructure of metal products obtained by pressure treatment methods.

Keywords: basic equations, defining relation, plasticity, stresses, strains, physical and structural parameters, damage, energy dissipation, loading surface.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin, 2022, “Tensor theory of deformation damage”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 320–336.

1. Введение

В работах [1, 2], на основе физической концепции роста и изменения формы пор при больших пластических деформациях, сформулированы потенциал диссипации и определяющие соотношения пластической повреждаемости металлов. Математическая структура потенциала диссипации соответствует термодинамически согласованной теории о мультипликативном разложении тензора метрического преобразования [3, 4]. Вводятся два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов). Термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводит к симметричному тензору повреждаемости второго ранга (ω) с ясным физическим смыслом.

Его первый инвариант ($I_1(\omega) = \omega_k^k$) определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор. А второй инвариант $I_2(\tilde{\omega}) = (1/2)\tilde{\omega}_p^j\tilde{\omega}_j^p$ девиаторного тензора $\tilde{\omega}$ (мера $I_2^{1/2}(\tilde{\omega}) = [(1/2)\tilde{\omega}_p^j\tilde{\omega}_j^p]^{1/2}$) - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов. Введение двух нормированных параметров (ω_1 и ω_2) с соответствующим физическим смыслом позволяет определить эквивалентную меру $\omega_{eq}(\omega_1, \omega_2)$ деформационной повреждаемости, включая критериальные условия для пластического разрушения. Однако в этих работах не принимался во внимание третий инвариант $I_3(\tilde{\omega}) = (1/3)\tilde{\omega}_k^j\tilde{\omega}_p^k\tilde{\omega}_j^p$ девиаторного тензора $\tilde{\omega}$ (мера $I_3^{1/3}(\tilde{\omega}) = [(1/3)\tilde{\omega}_k^j\tilde{\omega}_p^k\tilde{\omega}_j^p]^{1/3}$), который имеет такое же равноправное значение, как и первый ($I_1(\omega)$) и второй ($I_2(\tilde{\omega})$) инварианты. Совместное влияние трех инвариантов на пластическое разрушение подтверждается экспериментальными исследованиями ряда авторов [5-14]. Модель пластического разрушения, учитывающая зависимость как от гидростатического напряжения, так и от угла Лоде, основывается на использовании трехмерного годографа $\varepsilon_{if}(\bar{\sigma}, \phi_\sigma)$. Экспериментальные объемные диаграммы пластического разрушения $\varepsilon_{if}(\bar{\sigma}, \phi_\sigma)$, построенные на основе системы разнотипных опытов для ряда конструкционных металлических материалов, показывают зависимость предельной эквивалентной деформации ε_{eqf} от параметра трехосности напряженного состояния $ST = \sigma_H/\sigma_{eq}$ и угла Лоде $\phi_\sigma = (1/3)\arccos\left\{-3\sqrt{3}I_3(s)/2I_2^{3/2}(s)\right\}$, где σ_H - гидростатическое напряжение, σ_{eq} - эквивалентное напряжение фон Мизеса, s - девиаторный тензор напряжения. Определяющие соотношения повреждаемости содержат материальные функции, определяемые экспериментальными методами. Их определение для изучаемых материалов в задаваемых условиях деформирования является, как правило, трудной экспериментальной задачей. Количественная оценка мер повреждаемости (степени деструкции) деформируемого материала и достоверное прогнозирование его пластического разрушения (предельного состояния повреждаемости) требует определения материальных функций на макро- и мезоуровнях в зависимости от инвариантных параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) и микроструктурных параметров материала. В этом отношении очень важное значение имеют работы с важными экспериментальными результатами [12, 15, 13, 1, 2].

Далее формулируются обобщенные определяющие соотношения тензорной модели деформационной повреждаемости металлических материалов при больших пластических деформациях, основанной на трех инвариантах. Вводятся три нормированные меры $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ ($d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$), соответствующие трем инвариантам тензора скорости (приращения) поврежденности $\dot{\omega}$ ($d\omega$). Кинетический процесс деформационной повреждаемости отображается в трехмерном векторном пространстве (с ортонормированным базисом $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) эквивалентным вектором $d\vec{\omega}_{eq} = d\omega_1\vec{u}_1 + d\omega_2\vec{u}_2 + d\omega_3\vec{u}_3$. Мера эквивалентной повреждаемости за конечный период времени t $\omega_{eq} = \int_t |d\vec{\omega}_{eq}|$. По определяющим соотношениям проводились расчеты с использованием экспериментально определенных материальных функций пластической дилатансии и девиаторной деформации на мезоуровне, а также трехмерной диаграммы пластичности для малоуглеродистой низколегированной стали. Материальные функции определялись из опытов на растяжение, сжатие и сдвиг с использованием сканирующей электронной микроскопии, что позволило варьировать угол Лоде в полном диапазоне его значений $0 \leq \phi \leq \pi/3$. Для построения трехмерной диаграммы пластичности в диапазоне значений параметра трехосности напряженного состояния $-1 \leq ST \leq 1$ и угла Лоде $0 \leq \phi \leq \pi/3$ использовались как свои, так и систематизированные опубликованные экспериментальные данные. Сравнение расчетов показывает существенное влияние третьего инварианта (угла Лоде) на эквивалентную повреждаемость. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, может оказаться полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением. Во многих процессах объемной штамповки деформируемый материал испытывает непропорциональное нагружение, сопровождающееся поворотом глав-

ных осей тензора напряжения и соответствующим изменением угла Лоде.

Рассмотрим используемые кинематические соотношения. Две точки зрения Эйлера и Лагранжа на описание кинематики сплошной среды используются в дальнейшем как равноправные и эквивалентные. Так как закон движения сплошной среды $x_i = x_i(\xi_i, t)$ в независимых переменных Лагранжа ξ_i ($i = 1, 2, 3$) можно разрешить относительно этих переменных $\xi_i = \xi_i(x_i, t)$, т.е. перейти к независимым переменным Эйлера x_i и наоборот [14]. При этих преобразованиях соблюдается инвариантность закона движения сплошной среды (независимость от выбора системы координат).

Пластические деформации обрабатываемых металлов в технологических процессах ОМД достигают 70...90% и в $\approx 10^2$ раз превосходят упругие деформации. Поэтому в определяющие соотношения входят только пластические деформации. Соответственно девиатор приращения деформации $D_{de} = D_{de}^p$ и девиатор ее скорости $D_{\dot{e}} = D_{\dot{e}}^p$. Целесообразность использования модели жестко-пластического материала при анализе процессов ОМД обоснована в работах Р. Хилла [16], В.В. Соколовского [17], Л.М. Качанова [18], Д.Д. Ивлева [19]. В связи с определением деформаций на макро- и мезоуровнях вводятся в рассмотрение тензоры приращения деформации и ее скорости на макро-уровне: $T_{de}, T_{\dot{e}}$ и мезоуровне: $T_{d\bar{e}}, T_{\dot{\bar{e}}}$. Соответствующими буквами будут обозначаться их (например, ковариантные) компоненты: $d\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, d\bar{\varepsilon}_{ij}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$, в том числе, шаровые $d\varepsilon_{kk}, \dot{\varepsilon}_{kk}, d\bar{\varepsilon}_{kk}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{kk}$ и девиаторные $d\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, d\bar{\varepsilon}_{ij}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$, а также эквивалентные меры $d\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, \varepsilon_i, d\bar{\varepsilon}_i, \dot{\bar{\varepsilon}}_i, \bar{\varepsilon}_i$. Использование ковариантных компонент тензоров приращения деформации и ее скорости является удобным при формулировке основных соотношений для напряженно-деформированного состояния и повреждаемости. Ковариантные компоненты тензоров приращения деформации и ее скорости, определяемые в дальнейшем через компоненты метрического тензора, имеют ясный геометрический смысл. Для их определения и последующей формулировки определяющих соотношений тензорной модели пластической повреждаемости, в том числе обработки экспериментальных данных по пластическому деформированию опытных образцов, используются геометрические модели макро- и мезоэлементов [1, 2].

Для определения ковариантных компонент тензоров приращения деформации и ее скорости используются известные кинематические соотношения [20]. Применительно к изучаемой проблеме пластической повреждаемости эти кинематические соотношения были рассмотрены в работах [21, 22, 1]. Кратко приведем необходимые пояснения. Конфигурации макроэлемента позволяет определять большие деформации материала в процессах пластического течения тензором метрического преобразования

$$T_E = E_{\cdot j}^i \kappa_i \otimes \kappa^j = \overset{\circ}{E}{}^{ik} E_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, \quad (1)$$

где κ_i - векторы базиса сопутствующей системы координат ξ_i (жестко связанной с деформируемым телом).

При описании больших пластических деформаций, характерных для технологических процессов, часто используется тензор логарифмических деформаций Генки:

$$T_{\varepsilon_{\ln}} = \frac{1}{2} \lg E = \frac{1}{2} (\ln E)_{\cdot j}^i \kappa_i \otimes \kappa^j = \varepsilon_{\cdot j}^i \kappa_i \otimes \kappa^j. \quad (2)$$

Для независимого определения симметричного тензора скорости деформации ($T_{\dot{\varepsilon}}$) используется несимметричная объективная норма Олдройда для тензора метрического преобразования

$T_{\dot{E}} = g^{\overset{\circ}{ik}} \dot{g}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j$. Тогда тензор скорости деформации:

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2} T_E^{-1} T_{\dot{E}} = \frac{1}{2} g^{\overset{\circ}{ik}} \dot{g}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j = \dot{\varepsilon}_{\cdot j}^i \kappa_i \otimes \kappa^j \quad (3)$$

соответствует смешанному эквиваленту нормы тензора Альманси.

Многие процессы пластического деформирования характеризуются сложным (непропорциональным) нагружением деформируемого материала. Сложное (непропорциональное) нагружение, в соответствии с законом пластического течения, сопровождается поворотом главных осей тензора приращения деформации относительно сопутствующей системы координат ξ_i (жестко связанной с деформируемым телом). Это обстоятельство приводит к изображению пути деформации в пространстве $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ сложной траекторией (s), не совпадающей с прямолинейной траекторией для простого нагружения. Эквивалентная (накапливаемая) деформация (параметр Одквиста) при сложном (непропорциональном) нагружении определяется интегрированием по пути деформации s [16]:

$$\varepsilon_i = \int_s \dot{\varepsilon}_i dt = \int_s d\varepsilon_i, \quad (4)$$

где эквивалентная скорость и приращение деформации

$$\dot{\varepsilon}_i = \sqrt{(2/3)(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji} - \dot{\varepsilon}_{ii}\dot{\varepsilon}_{jj})}, d\varepsilon_i = \sqrt{(2/3)(d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ji} - d\varepsilon_{ii}d\varepsilon_{jj})}. \quad (5)$$

Путь деформации оказывает влияние на годограф разрушения. А. Бенцера [23] убедительно показал это влияние при моделировании пластической деформации материала, содержащего периодическое распределение первоначально сферических пор.

На мезоуровне вводятся аналогичные кинематические соотношения [21, 22, 1]. Соответственно для мезоэлемента вводятся тензор метрического преобразования $T_{\widehat{\varepsilon}}$, тензор логарифмических деформаций $T_{\widehat{\varepsilon}_{\text{in}}}$ и тензор скорости деформации $T_{\dot{\varepsilon}}$. Рассеянные по макрообъему $V_{<0:\otimes>}$ поры имеют различные исходные и текущие размеры и форму, а также положение главных осей. Поэтому экспериментальные измерения изменяющихся размеров совокупности пор в пределах макрообъема за период времени Δt приводят к рассеянным значениям тензора приращения деформации мезоэлементов $T_{\Delta\widehat{\varepsilon}} = T_{\dot{\varepsilon}} \Delta t$ и, соответственно, их эквивалентной деформации $\widehat{\varepsilon}_i$. В связи с этим возникает необходимость определения наиболее вероятных (модальных) значений величин $\Delta\widehat{\varepsilon}_{ij}$ и $\widehat{\varepsilon}_i$ по экспериментально определяемым распределениям величин $\Delta\widehat{\varepsilon}_{ij}$ и $\widehat{\varepsilon}_i$. Модальные значения тензора $T_{\Delta\widehat{\varepsilon}}$ и, соответственно, интенсивности деформации $\widehat{\varepsilon}_i$ являются мерами, ассоциированными по отношению к N -совокупности пор

в пределах макроэлемента. Они будут также являться локальными характеристиками деформации макроэлемента на мезоуровне.

Кристаллическая структура деформированных металлов на каждой стадии пластической деформации характеризуется определенной плотностью и расположением дислокаций и микродефектов (микропор и микротрещин). Пластическая деформация связана с развитием дислокаций в кристаллической структуре, тогда как деформационная повреждаемость вызвана размножением и ростом микродефектов. Эти диссипативные процессы отчетливо различаются по своей природе и, что существенно, в том, как они влияют на макромеханические свойства металлоизделий, получаемых ОД. Следовательно, для моделирования процессов пластического формоизменения целесообразно вводить два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов). В связи с этим для модели жестко-пластического повреждаемого материала используется следующее мультипликативное разложение тензора метрического преобразования E :

$$E = E_P E_d, E_P = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \overset{*}{E}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, E_d = \overset{*}{E}{}^{ik} E_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, \quad (6)$$

где E_{ij}^* - метрика основных векторов промежуточной конфигурации, которая представляет фиктивное состояние при фиксированных величинах внутренних переменных.

Составляющая E_p описывает пластическую деформацию, связанную с физическими механизмами скольжения; другая часть E_d описывает деформацию, связанную с диссипативным ростом и формоизменением мезоэлементов (оболочек с порой). Зависимость для тензора скорости деформации (3), с учетом мультипликативного разложения тензора метрического преобразования (6), принимает следующий вид:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} E_p^{-1} \dot{E}_p + \frac{1}{2} E^{-1} E_p \dot{E}_d = \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_d. \quad (7)$$

Используемая идея деградации метрических коэффициентов, как соответствующих критериев развивающейся повреждаемости, была обоснована в работе [3]. Следуя работе Баммана и Солянки [4], вводятся эффективные неповрежденные конфигурации, которые характеризуют поведение фиктивного неповрежденного материала. Представленное отображение аналогично принципу эквивалентной деформации, означающего, что любое определяющее уравнение в деформациях для поврежденного материала может быть получено таким же образом, как и для неповрежденного материала, за исключением того, что обычное напряжение заменяется эффективным напряжением [22]. Эффективное напряжение было определено Ю.Н. Работновым как напряжение, отнесенное к поверхности, которая эффективно сопротивляется нагрузке (т.е. к эффективной площади сечения, которая снижается из-за образования пор) [24].

Необходимым условием обоснованности определяющих соотношений деформационной повреждаемости является их термодинамическая согласованность. Определяющие соотношения для внутренних переменных ($\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{r}, \dot{\omega}_{ij}$) следуют из потенциала диссипации (F), являющегося выпуклой функцией ассоциированных переменных ($-s_{ij}, R, -Y_{ij}$) (Таблица). Из второго закона термодинамики (неравенства Клаузиуса-Дюгема) следует условие выпуклости потенциала диссипации в пространстве ассоциированных переменных:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial s_{ij}}, \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R}, \dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y_{ij}}, \quad (8)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ - компоненты девиаторного тензора скорости деформации $\dot{\epsilon}$ (на макроуровне); $\dot{r}$ - параметр изотропного упрочнения; $\dot{\omega}_{ij}$ - компоненты тензора скорости повреждаемости $\dot{\omega}$; s_{ij} - компоненты девиаторного тензора напряжения s ; R - параметр напряжений при изотропном упрочнении; Y_{ij} - компоненты тензора Y , характеризующего скорость высвобождения плотности энергии, связанной с ростом и изменением формы пор; $\dot{\lambda}$ - пластический множитель.

Согласно опубликованным качественным экспериментам [1, 2], потенциал F строится в виде суммы:

$$F = \Phi + \Omega, \quad (9)$$

где Φ - пластический потенциал; Ω - потенциал повреждаемости.

Соотношения (8) с учетом (9) принимают следующий вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}, \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}}. \quad (10)$$

Следуя Л.М. Качанову [18] в качестве пластического потенциала Φ принимается функция текучести Мизеса:

$$f(s_{ij}, R) = (1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_y^2 = 0, \tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}, \quad (11)$$

где τ_y, σ_y - соответственно, предел текучести при сдвиге и при одноосном состоянии.

Таблица 1: Переменные состояния и диссипативные функции

Внутренние переменные состояния	Ассоциированные переменные	Диссипативные функции
Девиаторный тензор скорости пластической деформации, $\dot{\epsilon}$	Девиаторный тензор напряжения, $-s$	Диссипация, вызванная пластической энергией формоизменения, $\dot{w}_p = s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$
Параметр изотропного упрочнения, $\dot{r}$	Параметр напряжений при изотропном упрочнении, R	Скорость изменения плотности накопленной энергии, $\dot{w}_s = R\dot{r}$
Тензор скорости повреждения, $\dot{\omega}$	Тензор скорости высвобождения плотности энергии, $-\mathcal{Y}$	Диссипация, вызванная повреждаемостью, $\dot{w}_D = Y_{ij}\dot{\omega}_{ij}$

Пластический множитель

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\tau_y}, \quad (12)$$

где $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{(2/3) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}}$ - скорость эквивалентной деформации на макроуровне (отнесенной к макроэлементу пластической среды).

При определении НДС будем учитывать изотропное упрочнение, характерное для больших пластических деформаций при обработке давлением. Сопряженной силой изотропного упрочнения является параметр напряжений $R = \sqrt{(1/2) s_{ij} s_{ji}} = \tau_y$. Параметр R определяет изменение радиуса цилиндра пластичности, описываемого уравнением (12) в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Параметр изотропного упрочнения

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial [(1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_y^2]}{\partial (\tau_y)} = 2\dot{\lambda} \tau_y = \dot{\epsilon}_i \sqrt{3}. \quad (13)$$

Потенциал повреждаемости порами Ω для модели жестко-пластического тела определяет диссипацию, связанную с пластической дилатансией вследствие роста объема пор и изменения формы мезоэлементов. Скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с ростом поры, является квадратичной функцией первого инварианта $I_1 \left(\dot{\hat{\epsilon}} \right)$ тензора скорости деформации $\dot{\hat{\epsilon}}$ мезоэлемента:

$$\dot{w}_v = \hat{\sigma}_H \dot{\hat{\epsilon}}_{kk} = \frac{1}{3\lambda} \left(\dot{\hat{\epsilon}}_{kk} \right)^2 = \frac{1}{3\lambda} I_1^2 \left(\dot{\hat{\epsilon}} \right) = \frac{1}{3\lambda} \left(\dot{\hat{\epsilon}}_{11} + \dot{\hat{\epsilon}}_{22} + \dot{\hat{\epsilon}}_{33} \right)^2, \quad (14)$$

где $\hat{\sigma}_H$ - гидростатическое напряжение; $\dot{\hat{\epsilon}}_{kk}, k = 1, 2, 3$ - линейные компоненты тензора $T_{\hat{\epsilon}}$.

Используемая связь $\dot{\hat{\epsilon}}_{kk} = 3\dot{\lambda} \hat{\sigma}_H$ на мезоуровне соответствует условию текучести Р. Грина [25]:

$$AI_2(\hat{s}) + BI_1^2(\hat{\sigma}) = \tau_y^2, \quad (15)$$

где A, B - материалы функции; $\hat{\sigma}, \hat{s}$ - тензор и девиаторный тензор напряжений; τ_y - предел текучести сплошного материала (при $f = 0$).

Скорость дилатансии, ассоциированная с условием текучести Р. Грина:

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{18B}{A} \frac{\sqrt{I_2(\dot{\hat{e}})}}{\sqrt{I_2(\hat{s})}} \hat{\sigma}_H = \frac{18B}{A} \dot{\lambda} \hat{\sigma}_H. \quad (16)$$

Скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с изменением формы поры, является линейной функцией второго инварианта $I_2(\dot{\hat{e}})$ девиаторного тензора скорости деформации $\dot{\hat{e}}$ мезоэлемента:

$$\dot{w}_{sh} = \hat{s}_{ij} \dot{\hat{e}}_{ij} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \dot{\hat{e}}_{ij} \dot{\hat{e}}_{ji} = \frac{2}{\dot{\lambda}} I_2(\dot{\hat{e}}) = \frac{3}{2\dot{\lambda}} \dot{\varepsilon}_i^2 \quad (17)$$

где $\hat{s}_{ij}$, $\dot{\hat{e}}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ - компоненты девиаторных тензоров $\hat{s}$ и $\dot{\hat{e}}$.

Рассеянные по макрообъему $V_{<0:\textcircled{a}>}$ поры имеют различные исходные и текущие размеры и форму, а также положение главных осей. Поэтому экспериментальные измерения изменяющихся размеров совокупности пор в пределах $V_{<0:\textcircled{a}>}$ за период времени Δt приводят к рассеянным значениям тензора приращения деформации мезоэлементов $\Delta \hat{\varepsilon} = \dot{\hat{\varepsilon}} \Delta t$, девиаторного тензора $\Delta \hat{e} = \dot{\hat{e}} \Delta t$ и, соответственно, их инвариантов $I_1(\Delta \hat{\varepsilon})$, $I_2(\Delta \hat{e})$. В связи с этим возникает необходимость определения наиболее вероятных (модальных) значений функций $I_1^2(\Delta \hat{\varepsilon})$, $I_2(\Delta \hat{e})$ по экспериментально определяемым распределениям величин $I_1^2(\Delta \hat{\varepsilon})$, $I_2(\Delta \hat{e})$. Модальные значения тензоров $\Delta \hat{\varepsilon}$, $\Delta \hat{e}$ являются мерами приращения деформации, ассоциированными по отношению к N -совокупности пор в пределах макроэлемента пластической среды. Они будут также являться локальной характеристикой приращения деформации макрообъема на мезоуровне. Потенциал повреждаемости порами, с учетом соблюдения одинаковой размерности с пластическим потенциалом $\Phi \equiv f(s_{ij}, R) = (1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_y^2$,

$$\Omega = \frac{1}{2\dot{\lambda}} (\dot{w}_v + \dot{w}_{sh}) = \frac{1}{2\dot{\lambda}^2} \left(\frac{1}{3} I_1^2(\dot{\hat{\varepsilon}}) + 2I_2(\dot{\hat{e}}) \right) = \frac{1}{2\dot{\lambda}^2} \left(\frac{1}{3} (\dot{\varepsilon}_{kk})^2 + \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ji} \right). \quad (18)$$

Тензор Y характеризует скорость высвобождения плотности энергии, связанной с ростом и изменением формы мезоэлементов, и является линейной функцией тензора скорости деформации мезоэлементов:

$$Y_{ij} = k_Y \frac{1}{\dot{\lambda}} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (19)$$

где k_Y - нормирующий множитель.

Зависимость (18), с учетом линейной функции тензора скорости деформации мезоэлементов (19), принимает следующий вид:

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{k_Y^2} Y_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{k_Y} \quad (20)$$

где Y_{kk} - шаровые компоненты тензора Y ; $\tilde{Y}_{ij}$ - компоненты девиаторного тензора $\tilde{Y}$.

Потенциал повреждаемости (20) и ассоциированная переменная в виде $Y_{ij} = (k_Y / \dot{\lambda}) \dot{\varepsilon}_{ij}$, в соответствии с третьим уравнением (10), определяют тензор скорости повреждаемости $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{k_Y^2} Y_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{k_Y}. \quad (21)$$

Условие выпуклости потенциала диссипации F в пространстве ассоциированных переменных приводит к условию выпуклости потенциала Ω в пространстве ассоциированной переменной $-Y_{ij}$.

Разложим тензор приращения поврежденности $d\omega$ на шаровый тензор $tr d\omega = d\omega_{kk}^k$ и девиаторный тензор $dev d\omega = d\omega - (1/3)tr d\omega = d\tilde{\omega}$, где $d\omega_{kk}^k$ - первый инвариант тензора $d\omega$. Девиаторный тензор скорости повреждаемости $\dot{\tilde{\omega}}$ имеет два инварианта (второй $I_2(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p$ и третий $I_3(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p$), вообще говоря, отличные от нуля. В соответствии с дифференциальным уравнением (21), инварианты тензора скорости повреждаемости $\dot{\omega}$ являются линейными функциями соответствующих инвариантов тензора скорости мезодеформаций $\dot{\tilde{\epsilon}}$:

$$I_1(\dot{\omega}) = \dot{\omega}_k^k = \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k}{k_Y}, I_2(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p = \frac{(1/2)\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p}{k_Y^2},$$

$$I_3(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p = \frac{(1/3)\dot{\tilde{\epsilon}}_k^j \dot{\tilde{\epsilon}}_p^k \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p}{k_Y^3}. \quad (22)$$

В соответствии с зависимостями (22), разложение тензора приращения поврежденности $d\omega$ на шаровый и девиаторный тензор, а также их инварианты имеют ясный физический смысл. Первый инвариант $I_1(d\omega) = d\omega_k^k = \dot{\omega}_k^k dt$ описывает приращение поврежденности, связанное с изменением объема пор. Второй инвариант $I_2(d\tilde{\omega})$ девиатора $d\tilde{\omega}$ (линейная мера $I_2^{1/2}(d\tilde{\omega}) = [(1/2)d\tilde{\omega}_p^j d\tilde{\omega}_j^p]^{1/2} = [(1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p]^{1/2} dt$) описывает приращение поврежденности, связанное с изменением формы пор. Третий инвариант $I_3(d\tilde{\omega})$ (линейная мера $I_3^{1/3}(d\tilde{\omega}) = [(1/3)d\tilde{\omega}_k^j d\tilde{\omega}_p^k d\tilde{\omega}_j^p]^{1/3} = [(1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p]^{1/3} dt$), как выясним дальше, описывает влияние фазового угла девиатора (угла Лоде $\phi_{\dot{\omega}}$) на развитие (торможение) процесса повреждаемости. Подобное представление кинетического процесса повреждаемости позволяет ввести для его оценки три меры $(d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3)$, соответствующие трем приведенным инвариантам. Следующие меры $(d\omega_1$ и $d\omega_2)$, соответствующие приведенным первому и второму инвариантам, были введены и использовались в расчетах деформационной повреждаемости и пластического разрушения [21, 1, 2]:

$$d\omega_1 = I_1(d\omega) = I_1(\dot{\omega})dt = \dot{\omega}_k^k dt = \frac{I_1(\dot{\tilde{\epsilon}})}{k_Y} dt = \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k}{k_Y} dt,$$

$$d\omega_2 = \sqrt{6}I_2^{1/2}(d\tilde{\omega}) = \sqrt{6}I_2^{1/2}(\dot{\tilde{\omega}})dt = \left(3d\tilde{\omega}_p^j d\tilde{\omega}_j^p\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{6}I_2^{1/2}(\dot{\tilde{\epsilon}})}{k_Y} = \frac{\left(3\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p\right)^{1/2}}{k_Y} dt, \quad (23)$$

где $\sqrt{6}$ - коэффициент термодинамической эквивалентности (соответствия) мер $d\omega_2$ и $d\omega_1$, значение которого соответствует структуре потенциала Ω .

Меры $d\omega_2$ и $d\omega_1$ связаны со структурой термодинамического потенциала Ω , так как соответствующие им инварианты $I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$ и $I_2(\dot{\tilde{\epsilon}})$ определяют скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с объемной деформацией $(\dot{w}_v)$ и деформацией формоизменения $(\dot{w}_{sh})$ мезоэлементов в пределах RVE . Соотношение $\dot{w}_{sh} / \dot{w}_v = (d\omega_2)^2 / (d\omega_1)^2 = 6I_2(\dot{\tilde{\epsilon}}) / I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$ выполняется только при коэффициенте термодинамической эквивалентности мер, равном $\sqrt{6}$.

Из связи мер $d\omega_1$ и $d\omega_2$ со структурой термодинамического потенциала Ω через соответствующие им инварианты $I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$ и $I_2(\dot{\tilde{\epsilon}})$ следует, что компоненты $\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k$ и $\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j$ шарового и девиаторного тензора скорости мезодеформаций являются действительными аргументами по отношению к мерам $d\omega_1$ (или $\dot{\omega}_1$) и $d\omega_2$ (или $\dot{\omega}_2$). Соответствующий мере $d\omega_3$ третий инвариант

$I_3(\dot{\epsilon})$ девиатора скорости мезодеформаций не является количественной мерой деформации, не определяет скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с объемной деформацией или деформацией формоизменения мезоэлементов, и, соответственно, не входит в структуру потенциала Ω . В этом смысле компоненты $\dot{\epsilon}_{\cdot p}^j$ скорости мезодеформаций не могут быть действительным аргументом по отношению к мере $d\omega_3$ (или $\dot{\omega}_3$). Компоненты $\dot{\epsilon}_{\cdot p}^j$ являются мнимым аргументом по отношению к мере $d\omega_3$ (или $\dot{\omega}_3$):

$$d\omega_3 = \frac{\sqrt{6}[(1/3)i\dot{\epsilon}_{\cdot k}^j i\dot{\epsilon}_{\cdot p}^k i\dot{\epsilon}_{\cdot j}^p]}{k_Y} dt = \frac{\sqrt{6}iI_3^{1/3}(\dot{\epsilon})}{k_Y} dt = \sqrt{6}iI_3^{1/3}(\dot{\omega}) dt \quad (24)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Введем вектор приращения эквивалентной повреждаемости $d\vec{\omega}_eq$ в трехмерном комплексном векторном пространстве с ортонормированным базисом u_1, u_2, u_3 :

$$d\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = d\omega_1 u_1 + d\omega_2 u_2 + d\omega_3 u_3 \quad (25)$$

Его модуль является мерой приращения эквивалентной повреждаемости за период времени dt :

$$\begin{aligned} d\omega_{eq} &= \left[(d\omega_1)^2 + (d\omega_2)^2 + (d\omega_3)^2 \right]^{1/2} = \left[I_1^2(\dot{\omega}) + 6(I_2(\dot{\omega}) + i^2 I_3^{2/3}(\dot{\omega})) \right]^{1/2} dt = \\ &= \left[I_1^2(\dot{\epsilon}) + 6(I_2(\dot{\epsilon}) - I_3^{2/3}(\dot{\epsilon})) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y} \end{aligned} \quad (26)$$

Накопленная повреждаемость за конечный период времени t :

$$\omega_{eq} = \int_t \dot{\omega}_{eq} dt = \int_{\omega_{eq}} d\omega_{eq}. \quad (27)$$

Для выяснения физического смысла меры $d\omega_3$ используем известную зависимость для угла Лоде $\phi_{\dot{\epsilon}}$ [18]:

$$\frac{3\sqrt{3}I_3(\dot{\epsilon})}{2I_2^{3/2}(\dot{\epsilon})} = -\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}}. \quad (28)$$

Зависимости (24) и (26), с учетом известной функции угла Лоде, принимают следующий вид:

$$d\omega_3 = -\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3} i \frac{I_2^{1/2}(\dot{\epsilon})}{k_Y} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{1/3} dt, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} d\omega_{eq} &= [d\omega_v^2 + d\tilde{\omega}^2]^{1/2} = [\dot{\omega}_v^2 + \dot{\omega}^2]^{1/2} dt = \left[I_1^2(\dot{\epsilon}) + 6 \left(I_2(\dot{\epsilon}) - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} I_2(\dot{\epsilon}) (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y} = \\ &= \left[\left(\dot{\epsilon}_{\cdot k}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\epsilon}_{eq}^2 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $d\omega_v = d\omega_1$ - приращение повреждаемости, описываемое шаровым тензором $tr d\omega$; $d\tilde{\omega} = (d\omega_2^2 + d\omega_3^2)^{1/2}$ - приращение повреждаемости, описываемое девиаторным тензором $dev d\omega = d\omega - (1/3) tr d\omega = d\tilde{\omega}$.

Положительная инвариантная величина $f(\phi_{\dot{\epsilon}}) = \left(1 - (\sqrt[3]{4}/3) (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right)^{1/2}$ ($\approx 0.686 \leq f(\phi_{\dot{\epsilon}}) \leq 1$) учитывает влияние на повреждаемость фазового угла девиатора скорости мезодеформаций (угла Лоде $\phi_{\dot{\epsilon}}$), связанного с третьим инвариантом $I_3(\dot{\epsilon})$ зависимостью (29). Фазовый угол девиатора определяет вид деформированного состояния мезоэлемента (рис. 1).

$$\omega_v = \int_t \frac{\dot{\varepsilon}^{k\cdot}}{k_Y} dt = \int_{\varepsilon^{k\cdot}} \frac{d\varepsilon^{k\cdot}}{k_Y}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_t \dot{\varepsilon}_{eq} \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\varepsilon})^{2/3} \right)^{1/2} \frac{dt}{k_Y} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{\varepsilon_{eq}} \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\varepsilon})^{2/3} \right)^{1/2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{k_Y} \quad (31)$$

образуют действительное векторное подпространство (действительную плоскость, выделяемую в ранее введенном комплексном векторном пространстве для параметров $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) и позволяют определить эквивалентную повреждаемость, как текущую длину дуги повреждаемости s_ω (рис. 2):

$$\omega_{eq} = \int_{s_\omega} ds_\omega, \quad (32)$$

где элемент дуги ds_ω определяется как модуль вектора приращения эквивалентной повреждаемости $ds_\omega = d\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = (\dot{\omega}_v^2 + \dot{\tilde{\omega}}^2)^{1/2} dt = (d\omega_v^2 + d\tilde{\omega}^2)^{1/2}$.

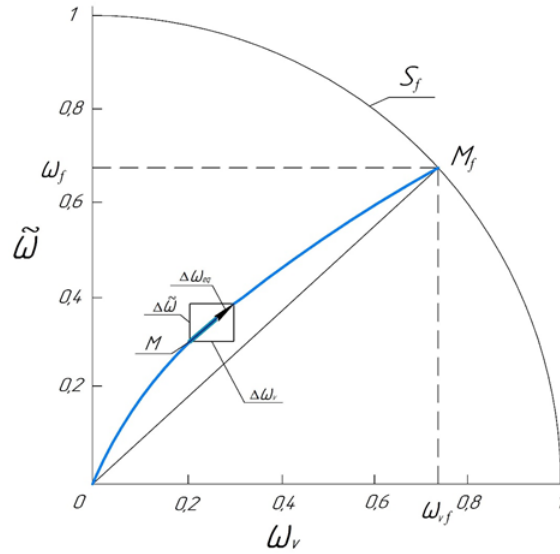


Рис 2: Отображение эквивалентной повреждаемости ω_{eq} в фазовой плоскости $\omega_v, \tilde{\omega}$

Отображение кинетического процесса роста повреждаемости в плоскости $\omega_v, \tilde{\omega}$ криволинейной траекторией s_ω (рис. 2) характерно для непропорционального роста мезодеформаций при непропорциональном нагружении, когда происходит поворот главных осей тензора напряжений и, в соответствии с законом пластического течения $(10)_1$, тензора приращения деформаций, а также (в соответствии с соотношением $(10)_3$), и тензора приращения повреждаемости относительно материальных слоев деформируемого тела. Угол Лоде, как фазовый угол девиаторного тензора, существенно изменяется при непропорциональном нагружении, так как изменяется и соотношение между главными компонентами тензора (точка С на диаграмме Мора перемещается и угол ϕ изменяется, рис. 1). Процесс непропорционального роста повреждаемости удобно рассматривать состоящим из нескольких этапов, в пределах каждого из которых параметры ω_v и $\tilde{\omega}$ растут пропорционально. Эта процедура эквивалентна замене дуги повреждаемости OM_f хордовой линией, а интеграла (32) суммой

$$\omega_{eq} = \int_{s_\omega} ds_\omega = \sum_{j=1}^m \Delta\omega_{eqj}, \quad \Delta\omega_{eqj} = (\Delta\omega_{vj}^2 + \Delta\tilde{\omega}_j^2)^{1/2}, \quad (33)$$

где $\Delta\omega_{vj}$, $\Delta\tilde{\omega}_j$, $\Delta\omega_{eqj}$ - приращения мер на j -м этапе.

При пропорциональном росте повреждаемости фазовый угол девиаторов $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\omega}$ (углы Лоде $\phi_{\dot{\epsilon}}$ и $\phi_{\dot{\omega}}$) не изменяется, так как компоненты тензоров $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\omega}$ изменяются пропорционально параметру, определяющему процесс деформации (повреждаемости), и поворота главных осей тензоров $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\omega}$ не происходит. В этом случае процесс повреждаемости отображается в плоскости параметров $\omega_v, \tilde{\omega}$ прямолинейной траекторией OM_f (рис. 2), и эквивалентная мера повреждаемости в текущий момент

$$\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = \sqrt{\omega_v^2 + \tilde{\omega}^2}, \quad (34)$$

где интегральные зависимости (31) для компонент ω_v и $\tilde{\omega}$ имеют конечную форму:

$$\omega_v = \frac{\bar{\epsilon}_{\cdot k}^{k\cdot}}{k_Y}, \tilde{\omega} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\bar{\epsilon}_{eq}}{k_Y} \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right)^{1/2}. \quad (35)$$

В качестве нормирующего множителя k_Y принимается следующая интегральная величина к моменту макроразрушения t_f :

$$k_Y = \int_{t_f} \left[\left(\dot{\bar{\epsilon}}_{\cdot k}^{k\cdot} \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\bar{\epsilon}}_{eq}^2 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} dt \quad (36)$$

или при пропорциональном нагружении

$$k_Y = \left[\left(\bar{\epsilon}_{\cdot kf}^{k\cdot} \right)^2 + \frac{9}{2} \bar{\epsilon}_{eqf}^2 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2}, \quad (37)$$

где $\bar{\epsilon}_{\cdot kf}^{k\cdot}$, $\bar{\epsilon}_{eqf}$ - объемная эквивалентная девиаторная деформация МЕ к моменту разрушения.

2. Заключение

Прогнозирование пластической повреждаемости является очень существенным технологическим фактором, особенно при изготовлении металлоизделий с качественной мезоструктурой и высокими эксплуатационными свойствами (испытывающих интенсивные силовые нагрузки, высокие скорости деформации, физико-химические воздействия). Повреждаемость металлов при больших конечных пластических деформациях связана главным образом с образованием, ростом и коалесценцией пор. При больших пластических деформациях в направлении полос сдвига происходит коалесценция пор с образованием пустот большого размера. В свою очередь эти пустоты являются источниками полос локализованной деформации и могут приводить к пластическому разрушению материала [26]. Мера деформационной повреждаемости во многих работах связывается с объемной фракцией пор (или пластической дилатансией вследствие изменения объемной фракции пор). Момент макроразрушения связывается с достижением критической величины объемной фракции пор (пластической дилатансии). Подобные модели вполне удовлетворительно описывают развитие повреждаемости в процессах с умеренным пластическим формоизменением материала (небольшими девиаторными деформациями), в которых происходит в основном изменение объема пор (но не их формы). Во многих технологических процессах пластического формоизменения обрабатываемый металл испытывает большие по величине девиаторные деформации. Пory при больших пластических деформациях приобретают вытянутую или сплюснутую, в зависимости от напряженно-деформированного состояния, эллипсоидальную форму. При этом пространственная ориентация главных осей мезоэллипсоида оказывается связанной с направлениями главных деформаций $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ малой частицы материала, содержащей пору (мезоэлемента, представляющего собой материальную оболочку с одной порой). Таким образом металлические материалы обладают тензорными свойствами деформационной повреждаемости. Экспериментальные

исследования свидетельствуют о существенном влиянии изменения формы пор на развитие деформационной повреждаемости и пластическое разрушение материала. Неучёт тензорных свойств повреждаемости, особенно при больших конечных пластических деформациях, может приводить к существенным погрешностям при решении прикладных задач. Переменные повреждаемости должны иметь не только ясный физический смысл, но и четкую математическую формулировку. Термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводит к симметричному тензору повреждаемости второго ранга (ω) с ясным физическим смыслом. Его первый инвариант определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор, второй инвариант девиаторного тензора - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов, третий инвариант девиаторного тензора описывает влияние на повреждаемость вида напряженного состояния (угла Лоде), в том числе, влияние поворота главных осей тензора напряжения (изменение угла Лоде). Введение трех составляющих мер с соответствующим физическим смыслом позволяет отобразить кинетический процесс деформационной повреждаемости эквивалентным параметром в трехмерном векторном пространстве, включая критериальные условия для пластического разрушения. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, является полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. CityTutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R., Zapara M.A. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // International Journal of Plasticity. 2014. Vol. 59. P. 133–151.
2. Tutyshkin N.D., Lofink P., Мьller W.H., Wille R., Stahn O. Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants // International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2017. Vol. 29. № 1. P. 251-269.
3. Врњиг М. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics // International Journal of Plasticity. 2003. Vol. 19. P. 1679–1713.
4. Bammann D.J., Solanki K.N. On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material // International Journal of Plasticity. 2010. Vol. 26. P. 775-793.
5. Тutyшкин Н. Д., Трегубов В. И. Связанные задачи теории повреждаемости деформируемых материалов. /Под ред. Н.Д. Тutyшкина. Тула: ТулГУ–РАРАН, 2016. 267 с.
6. Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В. Ресурс пластичности металлов при обработке давлением. М.: Металлургия, 1984. 144 с
7. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // International Journal of Mechanical Sciences. 2004. Vol. 46. P. 81-98.
8. Bao Y., Wierzbicki T. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture // Journal Engineering. Fracture. Mechanics. 2005. Vol. 72 (7). P. 1049–1069.
9. Xue L. Damage accumulation and fracture initiation of uncracked ductile solids subjected to triaxial loading // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44 (16). P. 5163–5181.
10. Dunand M., Maertens A. P., Luo M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity // International Journal of Plasticity. 2012. Vol. 36. P. 34–49.

11. Luo M., Dunand M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture // International Journal of Plasticity. 2012. V. 32-33. P. 36–58.
12. Khan A.S., Liu H. A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy // International Journal of Plasticity. 2012. Vol. 35. P. 1–12.
13. Brünig M., Gerke S., Hagenbrock V. Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage // International Journal of Plasticity. 2013. Vol. 5. P. 49-65.
14. Danas K., Ponte Castaeda P. Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials // International Journal of Plasticity. 2012. Vol. 49. P. 1325–1342.
15. Hosokawa A., Wilkinson D. S., Kang J., Maire E. Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography // International Journal Acta Materialia. 2013. Vol. 61. P. 1021-1036.
16. Хилл Р. Математическая теория пластичности /Пер. с англ. Э.И. Григолюка. М.: Госуд. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. 407 с.
17. Соколовский В.В. Теория пластичности. - 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
18. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
19. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности.- М.: Наука, 1966.- 232с.
20. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2 т. Т.1. / Л. И. Седов. - 4-е изд., исправл. и доп. М.: Наука, 1984. 528 с.
21. Zapara M.A., Tutyshkin N.D., Myller W.H., Wille R. Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals // International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2012. Vol. 24. P. 697-717.
22. Zapara M.A., CityplaceTutyshkin StateN.D., Myller W.H., Wille R. A study of ductile damage and failure of pure copper – Part II: Analysis of the deep drawing process of a cylindrical shell // Journal of Technische Mechanik. 2012. Vol. 32. P. 631 – 648.
23. Benzerga A., Surovik D., Keralavarma S. On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials – Analysis // International Journal of Plasticity. 2012. Vol. 37. P. 157–170.
24. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
25. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // International Journal of Mechanical Sciences. 1972. Vol. 14. P. 215-224.
26. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твёрдых тел. М.: Metallurgiya, 1971. 264 с.

REFERENCES

1. Tutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R., Zapara M.A., 2014, "Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments", *International Journal of Plasticity*, Vol. 59, p.p. 133–151.
2. Tutyshkin N.D., Lofink P., Мьller W.H., Wille R., Stahn O., 2017, "Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants", *International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 29, № 1. p.p. 251-269.
3. Вьrnig M., 2003, "An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics", *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, p.p. 1679–1713.
4. Bammann D.J., Solanki K.N., 2010, "On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material", *International Journal of Plasticity*, Vol. 26, p.p. 775-793.
5. Tutyshkin N.D., Tregubov V.I., 2016, "Related problems of the theory of hardness of deformable materials", Ed. N.D. Tutyshkin, *Tula: Toole. state. Un-t - RARAN*, 267 p. (In Russian)
6. Bogatov A.A., Mizhiritsky O.I., Smirnov S.V., 1984, "Resource of ductility of metals in pressure processing", *M.: Metallurgy*, 144 p. (In Russian)
7. Bao Y., Wierzbicki T., 2004, "On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, p.p. 81-98.
8. Bao Y., Wierzbicki T., 2005, "On the cut-off value of negative triaxiality for fracture", *Journal Engineering. Fracture. Mechanics*, Vol. 72 (7), p.p. 1049–1069.
9. Xue L., 2007, "Damage accumulation and fracture initiation of uncracked ductile solids subjected to triaxial loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 5163–5181.
10. Dunand M., Maertens A. P., Luo M., Mohr D., 2012, "Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity", *International Journal of Plasticity*, Vol. 36, p.p. 34–49.
11. Luo M., Dunand M., Mohr D., 2012, "Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture", *International Journal of Plasticity*, V. 32-33, p.p. 36–58.
12. Khan A.S., Liu H., 2012, "A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy", *International Journal of Plasticity*, Vol. 35, p.p. 1–12.
13. Вьrnig M., Gerke S., Hagenbrock V., 2013, "Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage", *International Journal of Plasticity*, Vol. 5, p.p. 49-65.
14. Danas K., Ponte Castaceda P., 2012 "Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials", *International Journal of Plasticity*, Vol. 49, p.p. 1325–1342.
15. Hosokawa A., Wilkinson D. S., Kang J., Maire E., 2013, "Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography", *International Journal Acta Materialia*, Vol. 61, p.p. 1021-1036.

16. Hill R., 1956, “Mathematical Theory of Plasticity”, Per. from the English E.I. Grigolyuk, M.: State. Publishing House of Technical Theorists. lit-ra, 407 p. (In Russian)
17. Sokolovsky V.V., 1969. “The Theory of Plasticity”, 3rd edition, revised and supplemented, M.: *Higher School*, 608 p. (In Russian)
18. Kachanov L.M., 1969, “Fundamentals of plasticity theory”, M.: *Science*, 420 p. (In Russian)
19. Ivlev D.D., 1966, “The Theory of Ideal Plasticity”, M.: *Science*, 232p. (In Russian)
20. Sedov L. I., 1984, “Mechanics of a continuous environment”, In 2 vols, Vol.1, 4th ed., Fixed. and supplement, M.: *Science*, 528 p. (In Russian)
21. Zapara M.A., Tutyshkin N.D., Мӱller W.H., Wille R., 2012, “Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals”, *International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 24, p.p. 697-717.
22. Zapara M.A., CityplaceTutyshkin StateN.D., Мӱller W.H., Wille R., 2012, “A study of ductile damage and failure of pure copper – Part II: Analysis of the deep drawing process of a cylindrical shell”, *Journal of Technische Mechanik*, Vol. 32. p.p. 631 – 648.
23. Benzerga A., Surovik D., Keralavarma S., 2012, “On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials – Analysis”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 37, p.p. 157–170.
24. Rabotnov Yu.N., 1987, “Introduction to the Mechanics of Destruction”, M.: *Science*, 80 p. (In Russian)
25. Green R.J., 1972, “A plasticity theory for porous solids”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 14, p.p. 215-224.
26. Ekobori T., 1971, “Physics and mechanics of destruction and strength of solid bodies”, M.: *Metallurgy*, 1971, 264 p. (In Russian)

Получено: 17.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-337-347

**К 90-летию юбилею профессора Александра Сергеевича
Симонова (04.09.1932 – 20.02.2013)**

Н. М. Добровольский, И. В. Денисов, И. В. Добрынина, Е. В. Манохин

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

*e-mail: emanfinun@mail.ru***Аннотация**

Данная статья посвящена девяностолетию со дня рождения профессора, доктора педагогических наук Александра Сергеевича Симонова, более пятнадцати лет возглавлявшего кафедру математического анализа Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого. В ней приводятся биографические данные, освещается научная деятельность, приводится список основных научных работ.

Ключевые слова: математический анализ, математические модели экономики, биография, юбилей.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. М. Добровольский, И. В. Денисов, И. В. Добрынина, Е. В. Манохин. К 90-летию юбилею профессора Александра Сергеевича Симонова (04.09.1932 – 20.02.2013) // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 337–347.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-337-347

To the 90th anniversary of Professor Alexander Sergeevich Simonov (04.09.1932 - 20.02.2013)

N. M. Dobrovolsky, I. V. Denisov, I. V. Dobrynina, E. V. Manokhin

Dobrovolsky Nikolay Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Denisov Igor Vasil'evich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia (Moscow).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Manokhin Evgeny Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Abstract

This article is devoted to the ninetieth anniversary of the birth of Professor, Doctor of Pedagogical Sciences Alexander Sergeevich Simonov, who headed the Department of Mathematical Analysis of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University for more than fifteen years. It provides biographical data, highlights scientific activities, and provides a list of the main scientific works.

Keywords: mathematical analysis, mathematical models of economics, biography, anniversary.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. M. Dobrovolsky, I. V. Denisov, I. V. Dobrynina, E. V. Manokhin, 2022, "To the 90-th anniversary of Professor Alexander Sergeevich Simonov (04.09.1932 - 20.02.2013)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 337–347.

1. Основные факты биографии

Симонов Александр Сергеевич родился 4 сентября 1932 г. в г. Москве. В 1951 году поступил на физико-математический факультет Тульского государственного педагогического института. Окончил в 1955 году, получил специальность – преподаватель математики средней школы.

По распределению А. С. Симонов оказался в сельской средней школе Хабаровского края, где он проработал с 1955 по 1956 годы учителем математики.

Затем последовала работа в различных институтах этого края. С 1956г. по 1961 г. он – ассистент кафедры высшей математики Хабаровского железнодорожного института.



Рис 1: А. С. Симонов (первый на снимке) в кругу семьи

В 1961 г. А. С. Симонов поступил в аспирантуру Хабаровского пединститута.

Руководитель – Леонид Моисеевич Лихтарников. Из аспирантуры Хабаровского пединститута он был командирован в Воронежский университет, где в 1966 г. под руководством профессора Селима Григорьевича Крейна защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему: "Обобщенные решения с повышенной гладкостью квазилинейных эллиптических уравнений". В последующем он продолжил работу в хабаровских вузах: 1964 г. – старший преподаватель кафедры математического анализа, 1969 г. – заведующий кафедрой. В 1968 г. ему присвоено звание доцента [1].

С 1971 по 2013 годы А. С. Симонов работал в Тульском государственном педагогическом институте (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого. В 1971–1982 годах и в 2002–2008-е годы Александр Сергеевич возглавлял кафедру математического анализа.

В 1985 г. преподавал математику в республике Куба. В 90-е годы работал в Тульском областном институте усовершенствования учителей заведующим кафедрой естественно-математических дисциплин.

В 2001 году защитил диссертацию «Математические модели экономики в школьном курсе математики» по специальности 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания на соискание ученой степени доктора педагогических наук (научный консультант – Г.В. Дорофеев). В 2002 г. присвоено ученое звание профессора.

Был требователен к себе и к студентам. Оказывал большую помощь студентам, желающим более глубоко овладеть математическими дисциплинами.

Александр Сергеевич вёл систематическую и очень плодотворную научную работу. Под его руководством вели научную работу отдельные студенты, которые впоследствии стали учеными. Подготовил к поступлению в аспирантуру по математическому анализу И.В. Денисова (который стал доктором физико-математических наук, в 1996–2002 годах возглавлял кафедру математического анализа [2]).

А.С. Симонов был высокообразованным и интеллигентным человеком, в работе и взаи-

моотношениях с коллегами и студентами - принципиальным, требовательным, открытым к общению. Александр Сергеевич всегда щедро делился своими обширными знаниями.

А.С. Симонова увлекала не только наука, педагогическая деятельность, но и литература, искусство, спорт. Он пользовался большим авторитетом и уважением студентов и преподавателей.

На протяжении всей своей научно-педагогической деятельности профессор А.С. Симонов активно занимался научно-методической работой, им опубликовано более 110 научных и научно-методических работ. Научные и педагогические успехи А.С. Симонова отмечены рядом поощрений и наград: Значок "Отличник народного просвещения"; Значок "Отличник просвещения СССР"; Почетная грамота департамента образования Тульской области.

Александр Сергеевич Симонов скончался 20 февраля 2013 года после болезни в г. Туле.

2. Научная работа

В 1966 и 1970 году вышли работы [3], [4]. В первой работе рассматривались квазилинейные уравнения с линейной главной частью, для которых доказывались теоремы существования решений повышенной гладкости. При этом существенно использовались теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых линейным эллиптическим оператором, а также предполагаемая сильная эллиптичность оператора.

Вторая работа содержала информацию о третьей Дальневосточной математической школе, организованной Хабаровским педагогическим институтом. Другие сочинения А.С. Симонова того периода были посвящены методу Фурье для одного интегро-дифференциального уравнения эллиптического типа, априорным оценкам для интегро-дифференциальных уравнений, существовании решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений.

Позже научные интересы перешли в область популяризации математических знаний и математические модели экономики в школьном курсе математики (см. [5]). А.С. Симонов много публиковался в журнале «Математика в школе».

Общее направление исследований, проведенных А.С. Симоновым, связано с изучением возможностей, предоставляемых многочисленными и глубокими связями математики и экономики [5–39]. По его мнению, это способствовало развитию у учащихся интереса к изучению математики, выяснению ее тесных связей с реальными задачами современной рыночной экономики, многими из которых должен владеть каждый человек независимо от сферы его интересов. Это помогало становлению экономической культуры, экономической грамотности и экономической этики учащихся. Разработанный А.С. Симоновым принцип имплантации экономического содержания в круг решаемых в школе математических задач, а также рассмотрение вопросов интеграции экономических и математических знаний в процессе составления, анализа и решения задач, позволил обновить набор задач, решаемых в 7-11 классах. Это удалось сделать за счет замены части «безыдейных», устаревших или неинтересных задач на новые задачи, имеющие ярко выраженное экономическое содержание. Поскольку математический аппарат при этом не изменялся (менялся только объект, к которому он прилагался), то на математическую подготовку это не влияло, а экономическая составляющая школьного курса математики становилась более содержательной и действенной. При этом ученик впервые сталкивался с триадой «экономика - математика - экономика» и начинал понимать, каким образом экономические задачи переводятся на математический язык. Далее эти задачи решаются всем известными, а если это необходимо, то и новыми методами математики и вычислительной техники. Затем полученные с помощью математического инструментария результаты вновь истолковываются в экономических терминах, давая советы, рекомендации, перечисляя сценарии развития экономических процессов и т. д.

Основные результаты научной деятельности А.С. Симонова, связанной с математическими моделями экономики в школьном курсе математики заключаются в следующем (см.[40]):

- выяснена особая роль межпредметных связей математики с экономикой по сравнению с другими межпредметными связями математики, что позволило говорить о новом подходе к реализации важнейшего принципа практической и прикладной направленности обучения математике и ликвидации формализма в ее усвоении;
- показаны большие возможности курса математики общеобразовательной школы для экономического развития и воспитания школьников, формирования экономического образа мышления и установления тесных связей математики с реальной жизнью;
- обоснована роль изучения математических моделей экономики для развития математического мышления, развития интереса к изучению математики, установлена связь математики с решением практических задач, выдвигаемых жизнью, обоснована концепция применения знаний учащихся в области математики для формирования экономического мышления в процессе решения специальным образом сконструированных задач;
- установлено, что большинству понятий и тем школьного курса математики 7-11 классов можно дать экономическую интерпретацию, в частности, указан экономический смысл таких понятий, как производная, сумма членов бесконечно убывающей прогрессии, решение систем уравнений, интеграл и т. д.;
- сконструирована и разработана экономическая составляющая школьного курса математики как новая содержательно-методическая линия в обучении математике;
- разработана система модульных экономических дополнений к основным темам курсов алгебры 7-9 и алгебры и начал анализа 10-11 классов;
- разработана система новых для школьного курса математики задач, содержащих задачи с реальным экономическим содержанием, достаточным для организации работы в классе, для контрольных, самостоятельных и домашних заданий, включающих в себя и элементы исследовательской, творческой деятельности учащихся;
- разработана система методических материалов в помощь учителю, позволяющая изучать простейшие математические модели экономики на уровне 7-11 классов;
- в программах по математике для 7-11 классов выделена система вариативных экономических модулей к инвариантным составляющим основных разделов программ;
- разработан спецкурс и факультатив «Экономика на уроках математики» для учащихся и студентов младших курсов и спецкурс «Основы математических знаний и их математический анализ» - для старшеклассников, обучающихся в классах с экономической ориентацией и студентов;
- выяснено, что имплантация экономической линии может оказать влияние на решение вопросов распределения отдельных тем курса математики, как по классам, так и по ступеням обучения.

Александр Сергеевич активно выступал с докладами на многочисленных конференциях и семинарах (в том числе: на заседаниях секции средней школы Московского математического общества (1997 г.) и отделов математического и экономического образования ИОСО РАО (Москва, 1998 г.), на Международной конференции «Квалификация на учителе – реальности и перспективы» (Варна, 1998 г.), на международной научно-практической конференции

«Динамика педагогического образования: от института к университету» (Тула, 1998 г.), на Международной конференции «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (Могилев, 1999 г.), на XVII Всероссийском семинаре преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Подготовка будущего учителя к работе в классах с углубленным изучением математики» (Калуга, 1998 г.), на научно-практической конференции ИОСО РАО «Взаимосвязь дидактики и частных методик» (Москва, 1999 г.), на 52-х Герценовских чтениях «Проблемы и перспективы развития методики обучения математике» (СПб, 1999 г.), на Всероссийской научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2000 г.), на IV Колмогоровских чтениях (Москва, 2004 г.) и других).

Александр Сергеевич Симонов активно занимался научной деятельностью до самой смерти [41-43].

3. Заключение

Математика и педагогика для Александра Сергеевича Симонова были главными ценностями, которым он посвятил свою жизнь и творчество. Открытость и дружелюбие, неизменное внимание к каждому, кто встречался на его пути, высокий профессионализм определили отношение коллег, у которых Александр Сергеевич пользовался огромным уважением. Чувство глубокой благодарности за добрые дела и светлая память о выдающемся ученом, педагоге, научном руководителе и просто замечательном человеке сохраняется в сердцах его коллег, учеников, друзей и близких.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов И.В., Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Чубариков В.Н. К 80-летию Александра Сергеевича Симонова // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 3. С. 111-115.
2. Денисов И.В. Пути развития математического анализа в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого (к 70-летию образования кафедры математического анализа) // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 5. С. 270–306.
3. Крейн С.Г., Симонов А.С. Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Доклады АН СССР. 1966. Т.167, № 6. С. 1226–1229.
4. Лихтарников Л.М., Симонов А.С. Третья Дальневосточная математическая школа // УМН. 1970. Т. 25, № 3. С. 278.
5. Виленкин Н.Я., Симонов А.С., Сурвилло Г.С., Кудрявцев А.И. Алгебра – 9: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. // Рекомендовано главным управлением развития общего среднего образования Мин-ва образования РФ. Включено в федеральный комплект учебников. М.: Просвещение, 1996. - 384 с.
6. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С., Кудрявцев А.И. Алгебра-9: Учебное пособие для классов с углубленным изучением математики (1996, 1998, 1999). М.: Просвещение, 1996. - 383 с.
7. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Программа по математике для 10-11 классов с гуманитарным уклоном. Новая модель школы. Диалектика и экономика. М.: Авангард, 1992. - С.248-251.
8. Симонов А.С. Экономика на уроках математики. М.: Школа-Пресс, 1999. - 156 с.

9. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Алгебра-10: Учебное пособие по математике для классов с углубленным изучением гуманитарных дисциплин. Ч.1. Новосибирск: Наука, 1992. - 81 с.
10. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Алгебра-10: Учебное пособие по математике для классов с углубленным изучением гуманитарных дисциплин. Ч.II. Абакан, 1993 - 165 с.
11. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Логика. Множества. Отношения. Ч.1. Абакан, 1991. - 32 с.
12. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Логика. Множества. Отношения. Ч.II. Абакан, 1991. - 37 с.
13. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Логика. Множества. Отношения. Ч.III. Абакан, 1991. - 39 с.
14. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Тригонометрические функции. Абакан, 1992. - 45 с.
15. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Показательная и логарифмическая функции. Абакан, 1992. - 33 с.
16. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Элементы интегрального исчисления. Абакан, 1992. - 36 с.
17. Симонов А.С. О некоторых особенностях курса математики. Тула: Лицей на Пушкинской, 1994. № № 2-3.
18. Симонов А.С., Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. Степени и корни. - Абакан, 1995. - 66 с.
19. Симонов А.С., Дубовенко Л.В., Жданова Л.И. Математика в экономических классах. Тула.: Лицей на Пушкинской, 1995. № № 4-5. С. 36-38.
20. Симонов А.С. О содержании и структуре учебного пособия «Алгебра-9» // Материалы конференции профессорско-преподавательского состава ТГПУ им. Л.Н. Толстого. Тула, 1994. С. 142.
21. Симонов А.С. Экономические задачи на уроках математики // Учебно-метод. приложение. «Первое сентября», 1997. № 4. - С. 1-8.
22. Симонов А.С. Экономические задачи на уроках математики // Учебно-метод. приложение. «Первое сентября», 1997. № 5. - С. 9-16.
23. Симонов А.С. Экономические задачи на уроках математики // Учебно-метод. приложение. «Первое сентября», 1997. № 6. С. 16-26.
24. Симонов А.С. О математических моделях экономики в школьном курсе математики. // Математика в школе, 1997. № 5. С. 72-75.
25. Симонов А.С. О некоторых вопросах содержания и методики преподавания элементов экономики в школьном курсе математики // Тульская школа, 1997. № 3. С. 35-40.
26. Симонов А.С. Парабола безопасности // Математика в школе, 1998. № 1. С. 83-90.
27. Симонов А.С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике // Математика в школе, 1998. № 3. - С. 27-31.

28. Симонов А.С. Проценты и банковские расчеты // Математика в школе, 1998. № 4. С. 37-45.
29. Симонов А.С. Сложные проценты // Математика в школе, 1998. № 5. С. 30-42.
30. Симонов А.С. Сегодняшняя стоимость завтрашних платежей // Математика в школе, 1998. № 6. С. 32-34.
31. Симонов А.С. Математические модели экономики в подготовке учителя математики // Международная конференция «Квалификация учителей реальность и перспективы». Варна, 1998. С. 136-143.
32. Симонов А.С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике. Тула: Лицей на Пушкинской, 1998. № № 8-10.
33. Симонов А.С. Математические модели в экономике и экономическое образование будущих учителей // Международная научно.-практическая конференция «Динамика педагогического образования: от института к университету». Тула, 1998. С. 268-270.
34. Симонов А.С. Экономическое образование школьников на основе математических моделей экономики в школьном курсе математики // Подготовка будущего учителя к работе в классах с углубленным изучением математики. Калуга, 1998. С. 138.
35. Симонов А.С. О воспитании экономической культуры школьников в процессе изучения математики // Математическое образование: современное состояние и перспективы. Могилев, 1999. С. 173.
36. Симонов А.С. Формирование экономического мышления студентов педагогического университета при изучении математических дисциплин // Проблемы и перспективы развития методики обучения математике. СПб, 1999. С. 131.
37. Симонов А.С. Об одном способе введения понятия производной // Математика в школе, 1999. № 4. С. 56-63.
38. Симонов А.С. Об одном дидактическом принципе и экономической составляющей школьного курса математики / Взаимосвязь дидактики и частных методик в обучении. М., 1999. С. 23-25.
39. Симонов А.С. О непрерывном экономическом образовании в системе «Школа Вуз - Школа» // Современные проблемы математики, механики, информатики. Тула, 2000. С. 178-179.
40. Симонов А.С. Математические модели экономики в школьном курсе математики. Диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук. Тула, 2000. - 328 с.
41. Горин Е.А., Симонов А.С. Памяти Леонида Моисеевича Лихтарникова // Математика в школе. 2008. № 6. С. 77.
42. Добровольская Л.П., Добровольский Н.М., Симонов А.С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9. № 1. С. 185-223.
43. Добровольский Н.Н., Киселева О.В., Симонов А.С. Граничные функции класса $E_2^2(1, \pi^2/6)$ для сеток Смоляка // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. № 2. С. 11-28.

REFERENCES

1. Denisov I. V., Dobrovol'skii N. M., Rebrova I. Yu., Chubarikov V. N., "To the 80th anniversary of Alexander Sergeyevich Simonov", *Chebyshevskii Sbornik*, 2012. vol 13, no 3. pp. 111–115
2. Denisov I. V. Ways of development of mathematical analysis at the Tolstoy Tula State Pedagogical University (to the 70th anniversary of the formation of the Department of Mathematical Analysis) // *Chebyshevskii Sbornik*, 2021. vol. 22, No. 5. pp. 270-306.
3. Krein S. G., Simonov A. S. "A theorem of homeomorphisms and quasilinear equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1966. vol 167 no 6, pp. 1226–1229
4. Likhtarnikov L. M., Simonov A. S., "Third Far-Eastern Mathematical School", *Uspekhi Mat. Nauk*, 1970. Vol 25, no 3. P. 278
5. Vilenkin N. Ya., Simonov A. S., Survillo G. S., Kudryavtsev A. I. Algebra – 9: A textbook for students of schools and classes with in-depth study of mathematics. / Recommended by the General Directorate for the Development of General Secondary Education of the Ministry of Education of the Russian Federation. Included in the federal set of textbooks. M.: Enlightenment, 1996. - 384 p.
6. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S., Kudryavtsev A.I. Algebra-9: Textbook for classes with advanced study of mathematics (1996, 1998, 1999). Moscow: Prosveshchenie, 1996. - 383 p.
7. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Mathematics program for grades 10-11 with a humanitarian bias. A new school model. Dialectics and economics. M.: Avangard, 1992. - p.248-251.
8. Simonov A.S. Economics in mathematics lessons. M.: School Press, 1999. - 156 p.
9. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Algebra-10: A textbook in mathematics for classes with in-depth study of humanities. Part 1. Novosibirsk: Nauka, 1992. - 81 p.
10. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Algebra-10: A textbook on mathematics for classes with in-depth study of humanities. Part II. Abakan, 1993 - 165 p.
11. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Logic. Sets. Relations. Part 1. Abakan, 1991. - 32 p.
12. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Logic. Sets. Relations. Part II. Abakan, 1991. - 37 p.
13. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Logic. Sets. Relations. Ch.Sh. Abakan, 1991. - 39 p.
14. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Trigonometric functions. Abakan, 1992. - 45 p.
15. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Exponential and logarithmic functions. Abakan, 1992. - 33 p.
16. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Elements of integral calculus. Abakan, 1992. - 36 p.
17. Simonov A.S. On some features of the mathematics course. Tula: Lyceum on Pushkinskaya, 1994. № № 2-3.
18. Simonov A.S., Vilenkin N.Ya., Survillo G.S. Degrees and roots. -Abakan, 1995. - 66 p.

19. 203. Simonov A.S., Dubovenko L.V., Zhdanova L.I. Mathematics in economic classes. Tula.: Lyceum on Pushkinskaya, 1995. No. 4-5. pp. 36-38.
20. Simonov A.S. About the content and structure of the textbook "Algebra-ra-9" // Materials of the conference of the teaching staff of TSPU named after L.N. Tolstoy. Tula, 1994. p. 142.
21. Simonov A.S. Economic problems in mathematics lessons // Uchebno-metod. application. "The First of September", 1997. No. 4. - pp. 1-8.
22. Simonov A.S. Economic problems in mathematics lessons // Uchebno-metod. application. "The first of September", 1997. No. 5. - pp. 9-16.
23. Simonov A.S. Economic problems in mathematics lessons // Uchebno-metod. application. "The First of September", 1997. No. 6. pp. 16-26.
24. Simonov A.S. On mathematical models of economics in the school course of mathematics. // Mathematics at School, 1997. No. 5. pp. 72-75.
25. Simonov A.S. On some issues of the content and methodology of teaching elements of economics in the school course of mathematics // Tula School, 1997. No. 3. pp. 35-40.
26. Simonov A.S. Safety parabola // Mathematics at School, 1998. No. 1. pp. 83-90.
27. Simonov A.S. Some applications of geometric progression in economics // Mathematics at school, 1998. No. 3. - pp. 27-31.
28. Simonov A.S. Percentages and bank calculations // Mathematics at school, 1998. No. 4. pp. 37-45.
29. Simonov A.S. Compound percentages // Mathematics at school, 1998. No. 5. pp. 30-42.
30. Simonov A.S. Today's cost of tomorrow's payments // Mathematics at school, 1998. No. 6. pp. 32-34.
31. Simonov A.S. Mathematical models of economics in the preparation of a mathematics teacher // International. conference "Teacher qualification reality and prospects". Varna, 1998. pp. 136-143.
32. Simonov A.S. Some applications of geometric progression in economics. Tula: Lyceum on Pushkinskaya, 1998. No. 8-10.
33. Simonov A.S. Mathematical models in economics and economic education of future teachers // International scientific.-practical conference "Dynamics of pedagogical education: from institute to university". Tula, 1998. pp. 268-270.
34. Simonov A.S. Economic education of schoolchildren on the basis of mathematical models of economics in the school course of mathematics // Preparing a future teacher to work in classrooms with in-depth study of mathematics. Kaluga, 1998. p. 138.
35. Simonov A.S. About the education of economic culture of schoolchildren in the process of studying mathematics // Mathematical education: current state and prospects. Mogilev, 1999. p. 173.
36. Simonov A.S. Formation of economic thinking of pedagogical University students in the study of mathematical disciplines // Problems and prospects for the development of methods of teaching mathematics. St. Petersburg, 1999. p. 131.

37. Simonov A.S. About one way of introducing the concept of derivative // Mathematics at school, 1999. N° 4. pp. 56-63.
38. Simonov A.S. About one didactic principle and the economic component of the school mathematics course / The interrelation of didactics and private methods in teaching. M., 1999. pp. 23-25.
39. Simonov A.S. On continuous economic education in the "School - School - School" system // Modern problems of mathematics, mechanics, computer science. Tula, 2000. pp. 178-179.
40. Simonov A.S. Mathematical models of economics in the school course of mathematics. Dissertation for the degree of Doctor of Pedagogical Sciences. sciences'. Tula, 2000. - 328 p.
41. Gorin E.A., Simonov A.S. In memory of Leonid Moiseevich Likhtarnikov // Mathematics at school. 2008. No. 6. P. 77.
42. Dobrovolskaya L.P., Dobrovolsky N.M., Simonov A.S. On the error of approximate integration overmodified grids // Chebyshevsky Sbornik., 2008. Vol. 9. No. 1. pp. 185-223.
43. Dobrovolsky N.N., Kiseleva O.V., Simonov A.S. Boundary functions of class $E_2^2(1, \pi^2/6)$ for Smolyak grids // Proceedings of Tula State University. Natural sciences. 2011. No. 2. pp. 11-28.

Получено: 27.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022

Памяти Александра Васильевича Михалёва

Некролог



(8.11.1940–27.10.2022)

27 октября 2022 года на 82-м году жизни после тяжелой болезни скончался выдающийся советский и российский математик, заведующий кафедрой теоретической информатики, профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор МИХАЛЁВ Александр Васильевич. Российская наука потеряла признанного специалиста в области математики и информатики, талантливого педагога и замечательного человека.

Александр Васильевич Михалёв родился 8 ноября 1940 года в г. Брянске. После окончания школы с золотой медалью, он в 15 лет поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. С этого момента вся дальнейшая жизнь Александра Васильевича связана с Московским государственным университетом. После окончания университета в 1961 году он продолжил обучение в аспирантуре под руководством профессора кафедры высшей алгебры Льва Анатольевича Скорнякова. В 1965–1966 годах Александр Васильевич прошел годичную стажировку в Колумбийском университете в Нью Йорке под руководством признанных специалистов в теории категорий и гомологической алгебре С. Эйленберга и С. Маклейна. С 1966 года он начал работать на кафедре высшей алгебры сначала в должности ассистента, затем доцента, а с 1992 года профессора. В 1967 году защитил кандидатскую диссертацию «Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей», а в 1990 году – докторскую диссертацию «Эндоморфизмы модулей и мультипликативное строение колец».

Широчайший кругозор и математическая эрудиция позволяли Александру Васильевичу Михалёву получать результаты и задавать направления исследования в самых разных областях математики, таких как гомологическая алгебра, дифференциальная алгебра, компьютерная алгебра, теория кодирования, алгебраическая К-теория, алгебраическая теория меры, математическое моделирование, основания математики.

Среди наиболее значительных результатов А.В. Михалёва отметим следующие:

решение проблемы Бэра–Капланского об описании изоморфизмов и антиизоморфизмов колец и полугрупп эндоморфизмов модулей, близких к свободным;

решение проблемы Шрайера–Ван дер Вардена об автоморфизмах линейных и унитарных групп над кольцами (с И. З. Голубчиком);

развитие мультипликативной классификации колец;

построение теории ортогонально полных алгебраических систем с приложениями в теории колец и модулей (с К. И. Бейдаром);

решение проблемы Херстейна о лиевских изоморфизмах первичных колец с инволюцией (с К. И. Бейдаром, У. Мартиндейлом);

развитие теории размерностных дифференциальных и разностных многочленов Гильберта–Эйнштейна–Колчина (с Е. В. Панкратьевым и А. В. Левиным);

построение гомологической классификации моноидов (с Л. А. Скорняковым и У. Кнауэром);

построение продолжений топологий с топологических колец и топологических пространств переменных на кольца многочленов, групповые и полугрупповые кольца (с В. И. Арнаутовым);

создание теории рекуррентных последовательностей многих переменных над кольцами и модулями (с А. А. Нечаевым);

решение проблемы Рисса–Радона об интегральном представлении мер на произвольном топологическом пространстве (с В. К. Захаровым);

развитие теории математических систем и уровней основания математики (с В. К. Захаровым);

решение проблемы Мальцева об элементарной эквивалентности для линейных и алгебраических групп (с К. И. Бейдаром и Е. И. Буниной);

построение математических моделей управления воздушным движением.

А. В. Михалёв был замечательным педагогом и организатором науки. Он являлся руководителем (соруководителем) специальных научных семинаров: «Научно-исследовательский семинар по алгебре», «Кольца, модули и матрицы», «Теоретическая информатика», «Математические методы информатики». За долгие годы работы им прочитаны основные курсы лекций по алгебре, линейной алгебре и высшей алгебре для студентов механико-математического факультета. Разработаны и прочитаны специальные курсы «Теория колец», «Кольца и модули», «Топологические кольца и модули», «Теория колец и гомологическая алгебра», «Алгебраическая К-теория», «Компьютерная алгебра», «Компьютерная линейная алгебра», «Дополнительные главы теоретической информатики, алгебраические структуры», «Теория категорий и ее приложения», «Квантовая информатика».

Помимо получения собственных результатов, Александр Васильевич играл огромную роль в организации исследований по множеству разных направлений. Им создана одна из крупнейших научных математических школ, под его руководством подготовлено и защищено свыше 100 кандидатских и 16 докторских диссертаций, в которых решены известные математические проблемы и созданы новые научные направления.

Александр Васильевич всегда мог воодушевить своих учеников, настроить на дальнейшую упорную работу. Часто именно его неослабевающий интерес вдохновлял молодых математиков и позволял получить серьезные продвижения. Потрясающая харизма Александра Васильевича покоряла студентов с первой лекции. Многие его слушатели после такого знакомства с алгеброй, практически не представляли себе другой области специализации...

Александр Васильевич опубликовал около 500 работ, среди которых научные и обзорные статьи, монографии, учебники и учебные пособия, перевел на русский язык несколько фундаментальных научных монографий.

А. В. Михалёв являлся главным редактором серии монографий, учебников и учебных пособий «Основы информатики и математики» и журнала «Фундаментальная и прикладная математика», членом редколлегии ведущих российских и международных математических журналов: «Труды семинара им. И. Г. Петровского», «Математические вопросы криптографии», «Интеллектуальные системы. Теория и приложения», «Чебышевский сборник», «Algebra

and Discrete Mathematics», «Sarajevo Journal of Mathematics», «Asian–European Journal of Mathematics», «Groups–Complexity–Cryptology», «Discussiones Mathematicae–General Algebra and Applications», «Eurasian Mathematical Journal». Многие годы работал в РЖ «Математика» ВИНТИ РАН.

Следует отметить и организационную работу Александра Васильевича: 35 лет с 1979 по 2014 годы он возглавлял лабораторию вычислительных методов механико-математического факультета МГУ, был генеральным директором Центра новых информационных технологий МГУ с момента основания в 1989 году по 2013 год, проректором МГУ (1999–2009); руководителем-организатором и деканом факультета дополнительного образования (1999–2013), а в 2013 году стал первым заведующим кафедрой теоретической информатики механико-математического факультета МГУ, был членом Ученого Совета МГУ, экспертного совета ВАК, РФФИ и РГНФ, а также членом Ученого Совета механико-математического факультета и членом правления Московского математического общества. По существу, для Александра Васильевича не было неподъемных проектов. Когда обстоятельства требовали сделать что-то новое, он всегда мог собрать команду и реализовать это с превосходным качеством.

А. В. Михалёв является лауреатом премии Совета Министров СССР (1982), лауреатом премии Президента РФ в области образования (2005), лауреатом премии имени М.В. Ломоносова (2004). Ему были присвоены звания «Заслуженный деятель науки РФ» (2003), «Почетный работник высшего профессионального образования РФ» (2005), «Заслуженный профессор Московского университета» (2005).

Список научных трудов А. В. Михалёва можно найти в системе «Истина» МГУ: https://istina.msu.ru/profile/av_mikhalev/.

Все, кто знал Александра Васильевича Михалёва, будут помнить его как замечательного математика, прекрасного педагога, организатора науки и просто очень хорошего человека. Он всегда останется в нашей памяти Математиком и Учителем с большой буквы.

*И. Н. Балаба, С. С. Демидов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский,
И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов, Ю. В. Нестеренко, И. Ю. Реброва,
А. Л. Семенов, А. А. Фомин, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков.*

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 23 Выпуск 5

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Заместители главного редактора

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственные секретари

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Члены редколлегии

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН и НАН Украины (Украина).

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 23 Issue 5

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis», National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» of MES and NAS of Ukraine (Ukraine).

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 23 Issue 5

Congratulations to Academician Vladimir Petrovich Platonov with discussion gold medals named after P. L. Chebyshev 2022	5
S. N. Askhabov. Volterra integral equation with power nonlinearity	6
Yu. A. Basalov. On critical lattices of the unit sphere	20
A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov. On the uniform distribution of remainders in the expression of real numbers over a multiplicative system numbers	38
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii. Some results for weighted Bernstein–Nicol’skii constants	45
N. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii. Entropy for some monoids of natural numbers	57
D. A. Ilyukhin. The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes	72
M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova. On simultaneous approximations to the logarithms of primes	87
A. S. Orevkova. Reducing smooth functions to normal forms near critical points	101
A. V. Rodionov. The Ritz method for solving partial differential equations using number-theoretic grids	117
N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol’skii, N. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii. On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas	130
BRIEF MESSAGES	
A. V. Begunts, D. V. Goryashin. On the intersection of two homogeneous Beatty sequences...	145
A. Kh. Galstyan. About the continuity of one operation with convex compacts in finite–dimensional normed spaces	152
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
E. V. Ageev, V. O. Podanov, A. E. Ageeva, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva. Dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-titanium-cobalt hard alloy in kerosene	161
E. M. Bogatov, A. V. Korenev, I. S. Mikhailov. On the design of scientific awareness systems in the field of the history of mathematics using multi-agent technologies	172
A. D. Breki, V. A. Yakhimovich, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I. A. Shulgin, E. B. Sedakova, Yu. G. Barabanshchikov, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva. Empirical mathematical model of change in the actual contact area of metals depending on the friction path	188
A. D. Breki, D. V. Zimin, S. G. Chulkin, A. A. Moskalets, I.A. Shulgin, E.B. Sedakova, Yu.V. Galyshchev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva. Regularities of sliding friction of grey cast iron bodies in lubricating media depending on the sliding speed	198

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin. Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction by elastic bodies.....	206
A. O. Ivanov, G. V. Nosovskiy, V. A. Kibkalo, M. A. Nikulin, F. Yu. Popelensky, D. A. Fedoseev, I. V. Gribushin, V. V. Zlobin, S. S. Kuzin, I. L. Mazurenko. Recognition of anomalies of an a priori unknown type	227
S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev , O. V. Kuzovleva, D. S. Klementyev. On the behavior of hydrogen in metal alloys	241
Ju. M. Martynyuk, V. S. Vankova, S. V. Danilenko. Study and use of recursive algorithms in computer science teacher training	258
R. R. Mukhin. Development of the conceptual provisions of the qualitative theory	269
E. N. Nadezhdin, I. L. Fedotenko, E. E. Smirnova. Methodology of simulation modeling of pedagogical systems	291
L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen. Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating	305
N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin. Tensor theory of deformation damage	320
MEMORABLE DATES	
N. M. Dobrovolsky, I. V. Denisov, I. V. Dobrynina, E. V. Manokhin. To the 90-th anniversary of Professor Alexander Sergeevich Simonov (04.09.1932 - 20.02.2013)	337
To memory of Alexander Vasilyevich Mikhalev	348
РЕДКОЛЛЕГИЯ	351
THE EDITORIAL BOARD	355
TABLE OF CONTENTS	359