

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXIII

Выпуск 4 (85)

Тула

2022

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 23 Выпуск 4

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. К юбилею заслуженного профессора Московского университета Владимира Анатольевича Левина	6
Н. Ф. Алексиадис. Рациональные A -функции с рациональными коэффициентами	11
М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка	20
Д. В. Горбачев. Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье — Данкля и его обобщения	39
В. А. Горелик, Т. В. Золотова. Полный метод чебышевской интерполяции в задаче построения линейной регрессии	52
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q	64
Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева. Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей	77
В. И. Иванов. Лебегова ограниченность потенциала Рисса для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье с радиальными кусочно-степенными весами	92
В. И. Иванов. Обобщенные экстремальные задачи Юдина для многочленов	105
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем	115
У. С. Рахмонов, З. К. Матякубов. Формула Карлемана в матричных областях Зигеля	126
О. С. Щербаков. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея»	136
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Д. В. Горбачев. Весовое неравенство Карлемана для дробного градиента	152
Д. В. Горбачев, И. А. Мартыанов. Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере	157
Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений	162
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические	170
А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Т. А. Морозова. Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов	178

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

- А. В. Волков, Е. В. Березина, А. С. Парфенов, Т. В. Михайловская, И. Е. Мишина, А. Е. Гвоздев. О применении математического метода анализа размерностей к тесту шестиминутной ходьбы 188
- Н. В. Ингтем. Исследование Коши по подстановкам 198
- Л. А. Кабанова. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций 211
- А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов. История зарождения и развития металлургической отрасли и ее влияние на мировую промышленность 233
- В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. Э. Белкин. Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций 251
- В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Д. Р. Бирюков. Точное решение задачи о поэтапной деформации многослойного цилиндра из несжимаемого гипопругого материала 262
- В. А. Левин, В. В. Козлов, Е. Д. Комолова, А. В. Филатова, М. А. Карцев. Оценка сходимости метода спектральных элементов в САЕ Fidesys на основе точного решения задачи Ламе для упругопластических материалов с помощью системы регрессионного автоматизированного тестирования 272
- В. А. Левин, К. Ю. Крапивин. Теоретический и численный анализ локализации пластических деформаций в изотропных дилатирующих неассоциативных средах в условиях плоской деформации 285
- В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, П. А. Васильев. Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода 308
- Р. Р. Мухин. Эволюция основных положений теории устойчивости 327
- С. А. Скобельцын. Определение параметров неоднородности анизотропного внешнего слоя упругого шара по рассеянию плоской звуковой волны 350
- Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием 368
- М. Я. Яковлев, А. А. Семькин, В. А. Левин. Метод и некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био горных пород 382

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

- Н. М. Добровольский, Е. В. Манохин, И. В. Добрынина, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. К 85-летию Ашота Енофовича Устяна 394
- А. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, С. Н. Кутепов, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин, О. В. Кузовлева, И. В. Минаев, А. Н. Чуканов, Д. В. Малий, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Гвоздев Александр Евгеньевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ТГПУ им. Л. Н. Толстого — яркий представитель научной школы сверхпластичности металлических систем М. Х. Шоршорова 405

РЕДКОЛЛЕГИЯ	421
THE EDITORIAL BOARD	425
TABLE OF CONTENTS	429

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-6-10

**К юбилею заслуженного профессора Московского университета
Владимира Анатольевича Левина**

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский,
И. Ю. Реброва, А. В. Родионов

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Родионов Александр Валерьевич — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В работе даётся краткий обзор научной деятельности профессора Владимира Анатольевича Левина.

Ключевые слова: пакет Фидесис.

Библиография: 1 название.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. К юбилею заслуженного профессора Московского университета Владимира Анатольевича Левина // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 4, С. 6–10.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-6-10

**To the anniversary of the Honored Professor of Moscow University
Vladimir Anatolyevich Levin**

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Rodionov Alexander Valerievich — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

The paper gives a brief overview of the scientific activities of Professor Vladimir Anatolyevich Levin.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, TDP-shape, the modules Tue , couple Tue , linear-fractional transformation of the second kind.

Bibliography: 1 title.

For citation:

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2022, "To the anniversary of the Honored Professor of Moscow University Vladimir Anatolyevich Levin", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 6–10.



Владимир Анатольевич Левин

Заслуженного профессора Московского университета, заслуженного деятеля науки РФ, почетного работника Высшего профессионального образования РФ, профессора кафедры «Вычислительная механика» механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова Владимира Анатольевича Левина связывает с Тульским государственным педагогическим университетом им. Л. Н. Толстого достаточно долгие плодотворные научно-технические отношения. К предыдущему юбилею В. А. Левина вышел специальный номер нашего журнала (583 страниц, 32 статьи, 92 автора, из которых 4 академика РАН, 14 член-корреспондентов РАН, 9 директоров профильных институтов, 7 заместителей директоров институтов; по счастливому совпадению это был первый номер нашего журнала индексируемый в базе Скопус). В нем была опубликована статья его коллег¹, в которой были перечислены наиболее важные научно-практические результаты В. А. Левина².

Остановимся конспективно на двух наиболее важных достижениях В. А. Левина.

В фундаментальной науке это теория многократного наложения больших деформаций, позволяющая решать при больших деформациях новые классы статических и динамических задач, в которых дискретно или непрерывно в процессе нагружения изменяются границы (включая связность области, занимаемой телом), граничные условия, свойства части материала тела, в частности, при больших деформациях описывать процесс нагружения, в котором изменяется масса тела путем удаления или добавления его частей из того же или иного материала.

В прикладной науке основной результат В. А. Левин — пакет Фидесис. В. А. Левин первым из ученых-механиков в нашей стране как организатор и научно-технический руководитель создал промышленный пакет для прочностного инженерного анализа Фидесис. Пакет Фидесис, кроме стандартного промышленного использования в процессе моделирования на стадии проектирования и анализе результатов мониторинга при эксплуатации, является современным инструментом для внедрения фундаментальных научных результатов в промышленность.

¹Левин В. Ал., Лохин В. В., Морозов Е. М., Чубариков В. Н. К юбилею профессора Московского университета Владимира Анатольевича Левина, Чебышевский сборник, т. 18, в. 3 с. 10-14, 2017

²К этому юбилею подготовлен номер журнала *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Издательство Springer. Название спецвыпуска: *Nonlinear Computational Mechanics*. Журнал индексируется (входит в первый квартиль Q1) в базах данных *Web of Science Core Collection* и *Scopus*,

Поэтому приведем далее так же конспективно то, что рассказали его ученики и коллеги о новых результатах в данных направлениях. Теория многократного наложения была обобщена на случай для тел из упругопластического и вязкоупругопластического материала, ранее рассматривались тела из упругого и вязкоупругого материала. Для таких материалов обобщены и основные ранее полученные результаты. Получены новые точные решения задач теории многократного наложения больших деформаций, наиболее интересный из них — точное решение задачи о соединении секторов цилиндра, становящихся после деформирования плоскими. Теория внедрена в пакет Фидесис.

Так же в пакете и облачном сервисе на его основе реализован наукоемкий результат научной группы В. А. Левина, позволивший реализовать уникальную возможность проводить расчеты, когда конструкторская (САД)-модель содержит «конструкторский брак» (зазоры и нахлесты), это иногда на порядок уменьшает время работы инженера–расчетчика.

На уровне альфа-версий на базе пакета Фидесис созданы новые специализированные решения для прочностного анализа: «Импланты» для стоматологии, «Решатель на основе воксельной модели» (позволяет проводить прочностное моделирование при наличии результатов компьютерной томографии, включая «Цифровой керн»), «Метаматериалы», «Лавины». Значительно расширен функционал специализированного решения «Геомеханика», включая пороупругопластичность.

Существенно расширен функционал модуля пакета «Композит», появилась возможность проводить моделирование для оценки эффективных линейно–упругих характеристик неоднородных материалов (с возможностью учёта предварительного нагружения); коэффициентов температурного расширения; коэффициентов теплопроводности; разработана альфа-версия оценки тепловые свойства с учётом преднагружения.

Появился модуль для оптимизации. Развивается направление, связанное с созданием синтетических данных при использовании искусственного интеллекта (для машинного обучения) для различных отраслей промышленности. Интеграция пакета Фидесис с пакетами для проектирования и инженерного анализа позволила проводить моделирование метановыделения пласта, моделирования движения механизмов с учетом деформаций, автоматическую передачу геологической модели в Фидесис для проведения геомеханического анализа.

Рост научной группы В. А. Левина позволил открыть в г. Туле обособленный филиал компании Фидесис, укомплектовав его высококвалифицированными специалистами.

Компания стала резидентом Технологической долины МГУ им. М. В. Ломоносова. В рамках мегагранта на мехмате МГУ при кафедре «Вычислительная механика» создана лаборатория «Вычислительная гидро-геомеханика и физическая химия в задачах моделирования миграции глубинных поровых флюидов», научные результаты которой внедряются в пакет Фидесис.

Главный редактор и его заместитель практически в одно время учились с юбиляром в физико-математической школе-интернате при МГУ (Сейчас СУНЦ МГУ имени А. Н. Колмогорова), поэтому видели его дальнейшую научную деятельность. У каждого серьезного ученого есть научные оппоненты, научные баталии. В случае В. А. Левина Теория многократного наложение больших деформаций и расширяющиеся возможности ее применения в промышленности мешала ряду специалистов. Удивляло, что В. А. Левин никогда не нападал на оппонентов, старательно избегал порой демагогических дискуссий, стараясь получить научно-технический результат, показывающий его правоту. Любимое высказывание (а иногда и тост) В. А. Левина: «Я благодарен своим научным противникам, а иногда и врагам (когда привлекались к выяснению научной истины не только научные аргументы), благодаря им получены большинство основных результатов, ускорила научно-техническая карьера».

Два примера.

Далекие 80-е годы 20 века. Стандартное замечание, особенно при защите докторской диссертации (если результат перекрывает направление развития научной школы), о единственно-

сти и сходимости для нелинейных задач, для которых таких доказательств и до сих пор нет. Теория обобщена для тел из вязко-упругого материала, впервые для нелинейных задач механики разработана система численно-аналитических вычислений для ЭВМ, впервые сформулированы и решены задачи при конечных деформациях о росте трещины ненулевой толщины и очень важно переход на работу в МГУ.

Почти наше время. Создан пакет Фидесис, научная группа выросла на момент начала его создания до 22 человек, получена серия точных решений при больших деформациях задач о соединении нагруженных тел, пакет Фидесис адаптирован для моделирования аддитивных технологий. Это ответ на желание доказать с использованием не научных аргументов, что раз ваша теория позволяет, в том числе, решать при конечных деформациях задачи о принудительно росте тел (перекрывает другое научное направление), диссертации ваших учеников не будут утверждены, у них не будет научной карьеры, а вам попробуем запретить научное руководство.

С учетом изменений за время с предыдущего юбилея и в личной жизни юбиляра, у него родились двое детей, и он стал официально главой многодетной семьи, теперь он отец шестерых детей и дед внука и внучки, редакция искренне желает ему долгой плодотворной активной научной работы, дальнейшего развития и внедрения пакета Фидесис в промышленность, продуктивной педагогической деятельности и радостей в личной жизни.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. Ал., Лохин В. В., Морозов Е. М., Чубариков В. Н. К юбилею профессора Московского университета Владимира Анатольевича Левина // *Чебышевский сборник*, 2017, Т. 18, вып. 3. С. 10-14.

REFERENCES

1. Levin V. Al., Lokhin V. V., Morozov E. M., Chubarikov V. N., 2017, "To the anniversary of Professor Vladimir Anatolyevich Levin of Moscow University" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, no. 3, pp. 10–14.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19

Рациональные A -функции с рациональными коэффициентами¹

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: alexsiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

В статье рассматривается функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции и для этой системы исследуется специальный случай проблемы полноты, который представляет особый интерес — полные системы минимальной мощности, т.е. полные системы, состоящие из одной единственной рациональной функции; такие функции назовем A -функциями (аналог функции Шеффера в двузначной логике).

Автором этой статьи было установлено, что

- *существует A -функция;*
- *мощность множества всех A -функций равно c_0 ;*
- *найден конкретные A -функции.*

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, функция Шеффера, рациональная функция, A -функция.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Ф. Алексиадис. Рациональные A -функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19.

¹Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19

Rational A -functions with rational coefficients

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Filippovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of rational functions with rational coefficients endowed with the superposition operation. We investigate the special case of the completeness problem which is of a particular interest, namely obtaining complete systems of minimum cardinality, i.e. complete systems consisting of a single rational function (such functions are referred to as A -functions and are analogues of Schaeffer stroke in Boolean logic).

The main results of the paper are the following:

- *there exists an A -function;*
- *the cardinality of the set of all A -functions equals c_0 ;*
- *a number of examples of A -functions are presented explicitly.*

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, Schaeffer function, rational function, A -function.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. Ph. Aleksiadis, 2022, “Rational A -functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 11–19.

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о рациональных A -функциях, сделанного в мае 2021 года на XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева [1].

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут в принципе рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика функциональных систем обширна. К числу основных задач для функциональных систем относятся проблемы полноты и выразимости, о базисах, о синтезе и анализе, о тождественных преобразованиях и другие.

При исследовании проблемы полноты одной из основных задач является задача о минимальных полных системах, т.е. задача о полных системах, состоящих из одной единственной функции. В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов типа существования A -функции, а также в отсечении негативных ситуаций, когда указанной функции нет.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7] и [11].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые “моменты”.

Функциональная система (ф.с.) \mathbf{F} – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F , при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F .

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F , которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O . Множество $[A]$ называется *замыканием множества A* .

Множество A ($A \subseteq F$) называется *замкнутым* в функциональной системе \mathbf{F} , если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом*.

Множество A ($A \subseteq F$) называется *полным* в функциональной системе \mathbf{F} , если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Функциональной система \mathbf{F} называется *конечно-порожденной*, если в \mathbf{F} существует конечная полная система.

$\mathbf{F} = (F, O)$ называется *функциональной системой счетной мощности*, если F счетное множество.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. \mathbf{F} , т.е. $[A] = F$.*

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [14]), 3-значная логика (Яблонский [12]), 4-значная логика (Мальцев [8]), k -значная логика (Розенберг [15], Саломая [9], Слупецкий [16], Яблонский [13]), автоматные функции (Бабин [4], Кудрявцев [6], Часовских [10]), счетнозначные логики (Гаврилов [5]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стало традицией).

Функция $f \in F$ называется *A -функцией*, если система $\{f\}$ является полной. Другими словами, функция $f \in F$ называется *A -функцией*, если из этой одной функции можно получить все функций из F с помощью конечного числа применения операций из O .²

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных (включая 0).

Q — множества всех рациональных чисел.

c_0 — мощность счетного множества.

\equiv — обозначим, по определению, тождественно равно.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Основной текст статьи

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n ; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, при этом $h(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами*.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Пришло время определить основной объект нашего исследования — функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами \mathbf{F}_{RQ} — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рацио-

²Раньше автор этой статьи вместо термина “А-функция” употреблял термин “универсальная функция”. Но после того, как начал исследовать функциональную систему рекурсивных функций, а как известно в теории рекурсивных функций термин “универсальная функция” уже существует, он хорошо известен и по содержанию имеет другой смысл, то логично ввести новый термин (что и было сделано, например, в статьях [2] и [3]).

нальными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- перестановку переменных,
- переименования переменных (без отождествления),
- отождествления переменных,
- введение фиктивной переменной,
- удаление фиктивной переменной,
- подстановку одной функции в другую.

Заметим, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

Целью настоящей работы является исследование задачи об A -функциях в функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} :³

- существует ли A -функция?
- найти число A -функций;
- найти конкретные A -функции.

ТЕОРЕМА 1. *В функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} система функций*

$$\left\{1, x - y, xy, \frac{x}{y} (y \neq 0)\right\}$$

является полной системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$B = \left\{1, x - y, xy, \frac{x}{y} (y \neq 0), \right\}$$

а через

$$f(x, y) \equiv x - y, g(x, y) \equiv xy, h(x, y) \equiv \frac{x}{y}.$$

Сначала получим все константы из Q . Имеем

$$f(x, x) = 0; i(x) \equiv f(0, x) = -x;$$

$$f_1(x, y) \equiv f(x, i(y)) = x + y;$$

$$f_1(1, 1) = 2, f_1(1, 2) = 3, f_1(1, 3) = 4, \dots$$

$$i(1) = -1, i(2) = -2, i(3) = -3, \dots$$

Итак, мы получили все целые числа. Из этих чисел и функции $h(x, y)$ с помощью операции суперпозиции можно получить все рациональные числа.

Теперь построим все мономы с рациональными коэффициентами, отличные от константы, т.е. rq -функции вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ где c — произвольное рациональное число, отличное

³Задача о A - функциях имеет смысл для конечно-порожденных функциональных систем, каковым и является рассматриваемая ф.с. \mathbf{F}_{RQ} (ниже см. следствия 1 теоремы 1).

от нуля, n — произвольное положительное целое число, а k_1, k_2, \dots, k_n — произвольные натуральные числа (в том числе и 0), при этом $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ (т.е. имеем хотя бы одну существенную переменную). Очевидно, что из функции $g(x, y)$ и константы 1 с помощью операций суперпозиции можно получить любой моном вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ (в том числе и тождественную функцию $f(x) = x$). Далее, подставляя в функцию $g(x, y)$ вместо x константу c , а вместо y — моном $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, мы получим rq -моном $cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$.

Ясно, что из функции $f_1(x, y)$ с помощью операций суперпозиции можно получить любую линейную функцию вида $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ($m \geq 2$). Поскольку любой полином с рациональными коэффициентами является конечной суммой rq -мономов, то, если в подходящей линейной функции $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ вместо ее переменных подставим соответствующие rq -мономы, то получим желаемый полином с рациональными коэффициентами.

Далее, из полиномов с рациональными коэффициентами и функции $h(x, y)$ с помощью операций суперпозиций можно получить любую рациональную функцию с рациональными коэффициентами.

Таким образом, из функций множества B с помощью операций суперпозиции можно получить все функции из F_{RQ} , поэтому $[B] \supseteq F_{RQ}$. Но, с другой стороны, поскольку $B \subset F_{RQ}$, то в силу свойства оператора замыкания $[B] \subseteq F_{RQ}$. Следовательно, $[B] = F_{RQ}$, т.е. B является полной системой в \mathbf{F}_{RQ} .

Теорема доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. \mathbf{F}_{RQ} является конечно-порожденной функциональной системой.

СЛЕДСТВИЕ 2. \mathbf{F}_{RQ} является функциональной системой счетной мощности.

Так как ф.с. \mathbf{F}_{RQ} является конечно-порожденной (в силу следствия 1 теоремы 1), то имеет смысл рассмотреть вопрос об A -функциях.

ТЕОРЕМА 2. rq -функция

$$f(x, y, z, t, u, v) = (t - u) \cdot \frac{x}{v} + xz - yz + z + 1$$

является A -функцией в функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что система $\{f\}$ является полной, т.е. $[\{f\}] = F_{RQ}$. Имеем

$$g(x, y, z) \equiv f(x, y, z, t, v) = xz - yz + z + 1;$$

$$h(x) \equiv g(x, x, x) = x + 1; g(x, h(x), x) = 1;$$

$$h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 4;$$

$$g(1, 3, 2) = -1; g(1, 1, -1) = 0;$$

$$g_1(x, y) \equiv g(x, y, 1) = x - y + 2;$$

$$g_2(x, y, z) \equiv g_1(g_1(x, y), z) = x - y - z + 4;$$

$$g_3(x, y) \equiv g_2(x, y, 4) = x - y;$$

$$g_4(x, y) \equiv g(x, 0, y) = xy + y + 1;$$

$$g_6(x, y) \equiv g_3(g_4(x, y), h(y)) = xy;$$

И еще получим одну функцию $\frac{x}{y}$.

$$g_7(x, y) \equiv f(x, 0, 0, 1, 0, y) = \frac{x}{y} + 1.$$

$$g_8(x, y) \equiv g_3(g_7(x, y), 1) = \frac{x}{y}.$$

Итак, $[f(x, y, z, t, u, v)]$ содержит подсистему

$$\{1, x - y, xy, \frac{x}{y} (y \neq 0)\},$$

которая является полной в силу теоремы 1. Следовательно, система $\{f(x, y, z, t, u, v)\}$ является полной в функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} .

Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 3. *В функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} существует счетное число A -функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что rq -функция

$$g(x, y, z, t, u, v, w, x_1, \dots, x_n) \equiv f(x, y, z, t, u, v) + (v - w)h(x_1, \dots, x_n),$$

где $f(x, y, z, t, u, v)$ — A -функция из теоремы 2, а $h(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная rq -функция, является A -функцией в функциональной системе \mathbf{F}_{RQ} . Действительно,

$$g(x, y, z, t, u, v, v, x_1, \dots, x_n) = f(x, y, z, t, u, v).$$

Итак, число A -функций не меньше c_0 . Но, с другой стороны, это число не может быть больше c_0 , так как функциональная система \mathbf{F}_{RQ} является счетной мощности (в силу следствия 2 теоремы 1).

Теорема доказана. \square

3. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: доказано, что существует счетное число A -функций, из каждой из них с помощью операций суперпозиции можно получить все рациональные функции с рациональными коэффициентами; более того, приведены конкретные примеры таких функций.

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Галатенко за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О рациональных A -функциях с рациональными коэффициентами // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва (Тула, 18–22 мая 2021 года). Тула, 2021. С. 93–97.
2. Алексиадис Н. Ф. О существовании рекурсивных A -функций // Вестник МЭИ. 2011. № 6. С. 109–111.
3. Алексиадис Н. Ф., Тхан Тун Аунг Об одной рекурсивной A -функции // Труды XXI международной научно-технической конференции “Информационные средства и технологии”. (Москва, 19–21 ноября 2013 г.) — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. Т. 3. С. 96–101.
4. Бабин Д.Н. О задаче полноты для автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 82–83.

5. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5-64.
6. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами // В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45-74.
7. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
8. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд-во Наука, 1976. 388 с.
9. Саломеа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т.8. С. 7-32.
10. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151-154.
11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.
12. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153–1156.
13. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
14. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton. 1941.
15. Rosenberg Y. Uber die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Aademie Ved. v. 80, №4. P. 393,1970.
16. Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar — toscowych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102-128.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2021, “Rational A -functions with rational coefficients“, *Proc. 19th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“*, pp. 97-101.
2. Aleksiadis, N. Ph. 2011, “On the existence of recursive A -functions“, *Vestnik MPEI*, no. 6, pp. 109-111.
3. Aleksiadis, N. Ph., & Than Htun Aung 2013, “On the recursive A -function“, *Proceedings of the XXI International Scientific and Technical Conference ‘Information tools and Technologies’*, vol. 3, pp. 96-101.
4. Babin, D. N. 2020, “On the completeness problem for automata“, *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 23(4), pp. 82-83.
5. Gavrilov, G. P. 1965, “On functional completeness in countable logic“, *Problems of cybernetics*, vol. 15, pp. 5-64.
6. Kudryavtsev, V. B. 1965, “On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata“, *Problems of cybernetics*, vol. 13, pp. 45-74.

7. Kudryavtsev, V. B. 1982, "Functional systems ", Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.
8. Maltsev, A. I. 1976, "Selected works". vol. II — Moscow: Publishing House "Nauka", 388 p.
9. Salomaa, A. 1963, "Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain", II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.
10. Chasavskikh, A. A. 2018, "The problem of completeness in classes of linear automata", *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 22(2), pp. 151-154.
11. Yablonsky, S. V. 1986, "Introduction to discrete mathematics", Moscow.:Science, 384 p.
12. Yablonsky, S. V. 1954, "On functional completeness in three-digit calculus", *DAN USSR*, vol. 95(6), pp. 1153–1156.
13. Yablonsky, S. V. 1958, "Functional constructions in k -valued logic", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol.51, pp. 5–142.
14. Post, E. 1941, "Two-valued iterative systems of mathematical logic". — Princeton.
15. Rosenberg, Y. 1970, "Über die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken". *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acedemie Ved.*, v. 80, №4, p. 393.
16. Slupecki, J. 1939, Kriterium pelnosci wielowar — tosciwych systemow logiki zdan. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 25.04.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-20-38

Целочисленная аппроксимация отрезка

М. М. Галламов

Галламов Мансур Муллагаянович — кандидат физико-математических наук, участник семинара Никольского (МИАН) (г. Москва).

e-mail: gallamov@gmail.com

Аннотация

Пусть OXY — декартова система координат с целочисленной решёткой, единичные квадраты которой раскрашены в шахматном порядке. Целочисленная аппроксимация отрезка AB задается с помощью клетчатой области S_{AB} из (раскрашенных) клеток, внутренность каждого из которых имеет непустое пересечение с AB . Если P_{AB}^{\pm} — правая и левая замкнутые полуплоскости, определяемые прямой l_{AB} посредством точки A и B , то $S_{AB}^{\pm} = S_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ — его правая и левая области. (Внутри S_{AB} нет целых точек.) Ломанные $L^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ из S_{AB}^{\pm} с концами A^{\pm} и B^{\pm} и целыми вершинами — правая и левая (целочисленными) аппроксимациями отрезка AB — концы выбираются из вершин крайних клеток. Если l_{AB} параллельна одной из осей координат, то полагаем $S_{AB} = \emptyset$ и тогда аппроксимация отрезка AB есть минимальный отрезок с целыми концами, содержащий AB . Такие аппроксимации строятся с помощью алгоритма “вытягивания носов”, который представляет собой геометрическую интерпретацию цепной дроби углового коэффициента прямой l_{AB} . На основании этого метода построения получена точная формула для вычисления числа целых точек внутри произвольного треугольника, а также частично решена задача С. В. Конягина о шахматной раскраске: Если $U(t)$ множество всех раскрашенных клеток из треугольника, отсекаемого прямой $f_t: y = -\alpha x + t$, $\alpha, t > 0$, то разность $u(t)$ между большими и черными клетками из $U(t)$ для каждого положительного иррационального α не ограничена ни снизу, ни сверху, когда $t \rightarrow \infty$.

Решение получено для чисел вида: $e^{\pm 1}$, $\text{tg}^{\pm 1}$, $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1}$, $[a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$, $[a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$, где верхний индекс плюс (минус) указывает на четность (нечетность) элемента цепной дроби, определяемой α .

Метод построения аппроксимации отрезка был применен при решении задачи о шахматной раскраске для чисел $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $[a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]$, a_{2n+1}^- и $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]$, если ограничено

$$2^{k-1}b_3b_9 \cdots b_{6(k-1)+3} + \cdots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1,$$

для некоторых $b_n = \left\lfloor \frac{a_n^- - 1}{2} \right\rfloor$, представляющих целую часть $\frac{a_n^- - 1}{2}$. Так при $b_n = 0$ цепная дробь $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ключевые слова: Задача С. В. Конягина о шахматной раскраске, прямая с иррациональным угловым коэффициентом и шахматная раскраска, цепная дробь, геометрическая интерпретация цепной дроби, алгоритм “вытягивания носов”, целочисленная решётка, аппроксимация отрезка количество целых точек внутри треугольника.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-20-38

Integer approximation of a segment

M. M. Gallamov

Gallamov Mansur Mullagayanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Participant of the Nikolsky Seminar (MIAN) (Moscow).

e-mail: gallamov@gmail.com

Abstract

Let OXY be a Cartesian coordinate system with an integer lattice whose unit squares are staggered. The integer approximation of the segment AB is given using the cellular domain \mathbb{S}_{AB} of (colored) cells, the interior of each of which has a non-empty intersection with AB . If P_{AB}^{\pm} — right and left closed half-planes defined by the line l_{AB} by the point A and B , then $\mathbb{S}_{AB}^{\pm} = \mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ — its right and left areas. (There are no integer points inside \mathbb{S}_{AB} .) Polyline $L^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ from \mathbb{S}_{AB}^{\pm} with ends A^{\pm} and B^{\pm} and whole vertices — right and left by (integer) approximations of the segment AB — the ends are selected from the vertices of the extreme cells. If l_{AB} is parallel to one of the coordinate axes, then we assume $\mathbb{S}_{AB} = \emptyset$ and then approximation of the segment AB is minimum segment with integer ends containing AB . Such approximations are constructed using the algorithm “pulling noses”, which is a geometric interpretation of the chain fraction of the angular coefficient of the straight line l_{AB} . Based on this construction method, an exact formula for calculating the number of integer points inside an arbitrary triangle is obtained, and the problem of S.V. Konyagin is partially solved. about chess coloring: If $U(t)$ is the set of all colored cells from a triangle cut off by a straight line $f_t: y = -\alpha x + t$, $\alpha, t > 0$, then the difference $u(t)$ between white and black cells from $U(t)$ for every positive irrational α is bounded neither from below nor from above when $t \rightarrow \infty$. The solution is obtained for numbers of the form: $e^{\pm 1}, \text{tg}^{\pm 1}, [a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1}, [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}, [a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$, where the superscript plus (minus) indicates on the parity (odd) of the element of the continued fraction defined by α .

The method of constructing an approximation of the segment was used to solve the problem of chess coloring for the numbers $\frac{\sqrt{5}+1}{2}, [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots], a_{2n+1}^-$ and $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]$, if limited

$$2^{k-1}b_3b_9 \cdots b_{6(k-1)+3} + \cdots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1,$$

for some $b_n = \left\lfloor \frac{a_n^- - 1}{2} \right\rfloor$ representing the whole part of $\frac{a_n^- - 1}{2}$. So for $b_n = 0$ the chain fraction is $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Keywords: S.V.Konyagin’s problem about chess coloring, a straight line with an irrational angular coefficient and chess coloring, a chain fraction, a geometric interpretation of a chain fraction, an algorithm for “pulling noses an integer lattice, an approximation of a segment the number of integer points inside a triangle..

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. M. Gallamov, 2022, “Integer approximation of a segment”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 20–38.

OXY — правоориентированная прямоугольной системе координат, I_{OXY} — её первый квадрант, \mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[x]$ — целая часть числа x , $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число не меньше x . Объект, у которого координаты целые числа, назовем *целым объектом*.

1. Немного о геометрии цепных дробей

Рассмотрим вещественное число α и разложение его модуля $|\alpha|$ в цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, $a_0 \in \mathbb{N}_0$ и $a_n \in \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}_0$, тогда $\alpha = \text{sgn} \alpha [a_0; a_1, a_2, \dots]$, где $\text{sgn} \alpha$ — его знак. Цепная дробь числа α при рациональном α конечна (что будем оговаривать отдельно) и иррациональном бесконечна. Подходящую дробь порядка n цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ запишем в виде

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \frac{p_N}{q_N} = \alpha, \quad N \in \widehat{\mathbb{N}}_0, \quad (1)$$

где второе равенство — подходящая дробь максимального порядка для рационального $|\alpha|$. Согласно [1] – [6] имеем

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \\ p_0 &= a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, & q_0 &= 1, q_1 = a_1, & n &\in \widehat{\mathbb{N}}_{0,0}; \\ p_{-2} &= 0, q_{-2} = 1, & p_{-1} &= 1, q_{-1} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

причем p_n и q_n взаимно простые числа и

$$p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} = (-1)^{n-1}, \quad n \in \widehat{\mathbb{N}}_{0,0}, \quad (3)$$

которое с геометрической точки зрения говорит о том, что если на векторах $\bar{e}_{n+2} = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}$ и $\bar{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$, приложенных к произвольной целой точке, построить параллелограмм, то он содержит целые точки только в виде своих вершин. Это следует из указанной выше взаимной простоты и формулы Пика из [8] – [7]. Числитель p_{n-1} и знаменатель q_{n-1} подходящей дроби $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ порядка $n-1$ цепной дроби числа α задают соответственно ординату и абсциссу вектора, определяемого алгоритмом “вытягивания носов”:

$$\bar{e}_{n+2}(0; 0) = \bar{e}_n(0; 0) + a_{n-1} \bar{e}_{n+1}(0; 0) = q_{n-1} \bar{e}_1(0; 0) + p_{n-1} \bar{e}_2(0; 0) = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}_{(0;0)}, \quad \bar{e}_1 = \overline{(1; 0)}, \quad \bar{e}_2 = \overline{(0; 1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

приложенного к точке $O = (0; 0)$, см. [10]. Здесь $(p_{n-1}; q_{n-1})$ — координаты вектора \bar{e}_{n+2} , точка $(0; 0)$ у каждого из векторов, а также нижний индекс указывают на точку их приложения. Второе равенство из (4) имеет место в силу (2). В дальнейшем, если у вектора не указана точка его приложения, то считается, что он приложен к точке $(0; 0)$.

Пусть прямая $l_\alpha : y = \alpha x$, $\alpha > 0$, тогда с увеличением порядка $n-1$ подходящей дроби (1) вектор \bar{e}_{n+2} становятся длиннее и его конец ближе к прямой l_α по сравнению с предыдущим, а прямая l_α всегда лежит между двумя соседними векторами последовательности $\{\bar{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, члены которой определяются (4). Вектор $\bar{e}_{N+3} = \overline{(q_N; p_N)} \in l_\alpha$, а остальные $\bar{e}_{2m-1} = \overline{(q_{2m-4}; p_{2m-4})}$ находится под l_α и принадлежит прямоугольному треугольнику $\Delta_{q_{2m-4}} = OB_{q_{2m-4}} B_{X, q_{2m-4}}$, $B_{X, q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; 0)$, $B_{q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; \alpha q_{2m-4})$, а его конец $B_{q_{2m-4}}^+ = (q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in B_{q_{2m-4}} B_{X, q_{2m-4}}$ и $[\alpha q_{2m-4}] = p_{2m-4}$ для всех допустимых m . Вектор $\bar{e}_{2m} = \overline{(q_{2m-3}; p_{2m-3})} \notin \Delta_{q_{2m-3}}$ и лежит над l_α .

Если $k \bar{e}_{2m}$ приложить к концу $B_{q_{2m-4}}^+$ вектора \bar{e}_{2m-1} , то ломанная $L(O, M_k^+) = \bar{e}_{2m-1} \cup k \bar{e}_{2m}$ $(q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in \Delta_{q_{2m-4} + k q_{2m-3}}$ для $k = 1, 2, \dots, a_{2m-2}$. Из (3) и $p_{2m-3} > 0$ следует, что $[\alpha(q_{2m-4} + k q_{2m-3})] = p_{2m-4} + k p_{2m-3}$, $L(O, M_k^+)$ лежит под прямой $l_{OM_k^+}$, проходящей через O и M_k^+ , и внутри многоугольника $OM_k M_k^+ L(O, M_k^+)$ нет целых точек, где $M_k = l_\alpha \cap \{x = q_{2m-4} + k q_{2m-3}\}$. Отметим, что $L(O, M_k^+)$ состоит из двух звеньев и на ней находятся $k+2$ целых точек. С ростом k конец вектора $k \bar{e}_{2m} q_{2m-4}; p_{2m-4}$ приближается к l_α . Минимум достигается при $k = a_{2m-2}$ и при этом этот вектор остается в $\Delta_{q_{2m-4} + a_{2m-2} q_{2m-3}}$.

В случае отрицательного углового коэффициента α прямой l_α меняем направление оси OX на противоположное, получаем положительный углового коэффициента. Если же $\alpha = 0$, то

нет необходимости проводить какие-нибудь преобразования, ибо $l_\alpha = OX$. Прделав необходимые построение в преобразовано системе координат, а затем перейдя к исходной получим построения аналогичные для случая $\alpha > 0$.

Цепная дробь, определяемfz числом α из интервала $(0, 1)$, обладает свойством $[0; a_0, a_1, \dots]^{-1} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Вследствие чего после перемены осей координат между собой получим систему координат, в которой угловой коэффициент, определяемый этой цепной дробью, будет больше единицы.

2. Аппроксимации отрезка. Количество целых точек внутри треугольнике

Пусть Pr_X, Pr_Y — ортогональные проекции соответственно на OX и OY , AB — отрезок такой, что $Pr_X AB, Pr_Y AB$ — нецелые точки, l_{AB} — прямая, определяемая A и B , а P_{AB}^\mp — замкнутые полуплоскости, лежащие соответственно слева и справа от l_{AB} при движении от A к B . *Клетчатая область* есть множество единичных квадратов из OXY с целыми вершинами. Если \mathfrak{M} — множество в OXY с непустой внутренностью, то *его клетчатой областью* назовем максимальную клетчатую область $\mathbb{M} \subset \mathfrak{M}$. *Клетчатой областью отрезка AB* — минимальную клетчатую область $\mathbb{S}_{AB} \supset AB, \mathbb{S}_{AB}^\pm = \mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^\pm$ — *его правой и левой (клетчатой) областью отрезка AB* . Целые точки области \mathbb{S}_{AB} лежат только на её границе \mathbb{S}_{AB} . Обозначим через $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ ломанную, полученную из ломанной $\mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^\pm$ удалением крайних звеньев в случае, если они содержат нецелые вершины, где A^\pm и B^\pm — концы ломанной $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$. $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ назовем соответственно *правой и левой ступенчатой (целочисленной) аппроксимацией отрезка AB* . Ломанные $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ из \mathbb{S}_{AB}^\pm с концами A^\pm и B^\pm и целыми вершинами называются — *правой и левой (целочисленной) аппроксимацией отрезка AB* . Если $Pr_X AB$ ($Pr_Y AB$) — целая точка, то полагаем $\mathbb{S}_{AB} = \emptyset$ и тогда *аппроксимация отрезка AB* будет *минимальный отрезок с целыми концами, содержащий AB* . $L^\mp(B^\mp, A^\mp)$ ($= L^\pm(A^\pm, B^\pm)$) будут соответственно *Левой и правой аппроксимацией отрезка BA* — здесь правое (левое) определяется также через движение от B к A .

Пусть $Pr_X \mathbb{S}_{AB} = [q^b, q^e]$ и $Pr_Y \mathbb{S}_{AB} = [p^b, p^e]$, тогда $\mathbb{R}_{AB} = Pr_X^{-1}([q^b, q^e]) \cap Pr_Y^{-1}([p^b, p^e])$ назовем *клетчатым прямоугольником отрезка AB* . Многоугольники $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ ($\supset P_{AB}^\pm$), отсекаемый от \mathbb{R}_{AB} аппроксимацией $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ — соответственно *правым и левым клетчатым треугольником отрезка AB* . Если L^\pm аппроксимация отрезка AB без вертикальных звеньев и $L_i^\pm = (q_i^\pm; p_i^\pm)$, $i = 0, 1, \dots, k^\pm + 1$, — её вершины, то число внутренних целых точек I_{L^\pm} из \mathbb{R}_{L^\pm} определяется соответствующим уравнением

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k^+} \left| \frac{p_i^+ + p_{i+1}^+}{2} - p^b \right| |q_{i+1}^+ - q_i^+| &= I_{L^+} + \frac{k^+ + |p_0^+ - p_{k^++1}^+| + |q_0^+ - q_{k^++1}^+| - 1}{2}, \\ \sum_{i=0}^{k^-} \left| p^e - \frac{p_i^- + p_{i+1}^-}{2} \right| |q_{i+1}^- - q_i^-| &= I_{L^-} + \frac{k^- + |p_0^- - p_{k^-+1}^-| + |q_0^- - q_{k^-+1}^-| - 1}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где левая и правая части есть площади соответственно \mathbb{R}_{L^+} и \mathbb{R}_{L^-} — каждая левая равна сумме площадей трапеций, образующих соответствующий из них, а правая вычислена согласно формуле Пика. Из построений $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ следует

Предложение 1. *Если AB — такой отрезок, что $Pr_X AB, Pr_Y AB$ — нецелые точки, а AC^+BC^- , прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами и диагональю AB , то количество целых внутренних точек I_{ABC^\pm} треугольников ABC^\pm равно числу $I_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ таких же точек клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$, определяемый произвольной аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ отрезка AB без вертикальных звеньев.*

Расположение произвольно фиксированного треугольника ABC в минимальном прямоугольнике \mathbb{V}_{ABC} с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащем ABC , возможно следующее: 1) Две стороны ABC есть сторона \mathbb{V}_{ABC} . 2) Одна сторона ABC — сторона

\mathbb{V}_{ABC} или — диагональ \mathbb{V}_{ABC} , а оставшееся вершина принадлежит внутренности одной из сторон \mathbb{V}_{ABC} . 3) Одна из вершин ABC совпадает с вершиной \mathbb{V}_{ABC} , а оставшиеся вершины лежат внутри смежных сторон \mathbb{V}_{ABC} . 4) Сторона ABC есть диагональ \mathbb{V}_{ABC} , а оставшееся вершина лежит внутри \mathbb{V}_{ABC} . Характерное расположение здесь заключается в том, что в каждом из случаев 1) — 3) дополнение $(ABC)_i^c$ к внутренности из ABC в \mathbb{V}_{ABC} состоит из одного, двух и трех прямоугольных треугольников соответственно. В случае 4) вначале из вершины, лежащей внутри \mathbb{V}_{ABC} , опустим перпендикуляры на стороны \mathbb{V}_{ABC} таким образом, что они не пересекали ABC . Вследствие чего $(ABC)_4^c$ будет состоять из трех прямоугольных треугольника и одного прямоугольника. Количество внутренних точек прямоугольных треугольников с вертикальными и горизонтальными катетами вычисляется с помощью предложения 1. Вследствие чего справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть ABC — треугольник в OXY , V_{ABC} — минимальный прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащий ABC , ∂V_{ABC} — граница V_{ABC} , $(ABC)^c$ — дополнение к ABC в V_{ABC} , $I_{V_{ABC}}$ и $I_{(ABC)^c}$ — количества внешних целых точек соответственно из V_{ABC} и $(ABC)^c$, а $I_{\partial ABC}$ — число целых точек на границе ∂V_{ABC} треугольника ABC без учета его целых вершин, принадлежащих ∂V_{ABC} . Тогда количество I_{ABC} целых внутренних точек из ABC определяется равенством: $I_{ABC} = I_{V_{ABC}} - I_{(ABC)^c} - I_{\partial ABC}$

Для нахождения внутренних целых точек $I_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ отрезка AB , определяемого $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ достаточно уметь строить $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ без вертикальных звеньев. Такое построение основано на геометрической интерпретации цепных дробей из [11] — [12] и алгоритме (4).

3. Построение аппроксимации отрезка без вертикальных звеньев

Введем следующее обозначение: $(l_1 + f(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}); l_2 + f(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})) = (l_1 + f(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}); l_2 + p \rightarrow q)$, $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0$ и $\sigma_n = \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$.

3.1. Лемма об аппроксимации отрезка

Из (4) при $n = 2m - 1$ и $n = 2m'$ а также сложения векторов по правилу треугольника получаем

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2) &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + a_{2m-2} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) = \\ &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + \sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m'+2}(l'_1; l'_2) &= a_{2m'-1} \bar{e}_{2m'+1}(l'_1; l'_2) + \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1} q_{2m'-2}; l'_2 + \\ &+ a_{2m'-1} p_{2m'-2}) = \sum_{k'=0}^{a_{2m'-1}-1} \bar{e}_{2m'+1}(l'_1 + k' q_{2m'-2}; l'_2 + k' p_{2m'-2}) + \\ &+ \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1} q_{2m'-2}; l'_2 + a_{2m'-1} p_{2m'-2}). \end{aligned} \quad (7)$$

Дальнейшее разложение осуществим следующим образом. В крайних частях (6) и (7) заменим m на $m - 1$, m' на $m - 1$ и $(l'_1; l'_2)$ на $(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q)$, $k \in \sigma_{2m-2}$. Правые части вновь полученных равенств подставим в правую часть второго равенства (6), тогда получим новое представление $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ через векторы с меньшими индексами: $2m - 3$, $2m - 2$ и $2m - 1$, в котором нет слагаемых в виде произведения элемента цепной дроби на вектор с одним из указанных индексов, что является результатом второго шага процесса представления $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ через векторы с меньшими индексами, чем на первом шаге. Результатом первого шага является равенство, образованное крайними частями в (6). Отсутствие указанных произведений важно, ибо оно дает отсутствие целых точек внутри любого многоугольника \mathbb{M}_k^+ , образованного вектором $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ и каждой из ломанных $L_k^+((l_1; l_2), (l_1 + q_{2m-2}; l_2 + p_{2m-2}))$,

составленной из векторов-слагаемых с точками их приложения, взятых в естественном порядке из правой крайней части любого вновь полученного представления вектора $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ на k -ом шаге, в силу (3), взаимной простоты p_n и q_n при произвольном допустимом n и теоремы Пика. После любого шага каждый вектор-слагаемое из предыдущего представления разлагается в сумму векторов с индексами на одну и две единицы меньше, чем разлагаемый вектор, посредством (6) и (7) при соответствующей замене точек приложения. Этот процесс завершится на K -ом шаге, в результате которого получается представление $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ в виде суммы векторов с индексами 1 и 2, приложенных к соответствующим точкам. Вершины многоугольника \mathbb{M}_k^+ при любом $k = 1, 2, \dots, K$ целые и $\mathbb{M}_{k-1}^+ \subset \mathbb{M}_k^+$, $\mathbb{M}_0^+ = \emptyset$. Ломанная $L_K^+((l_1; l_2), (l_1 + q_{2m-2}; l_2 + p_{2m-2}))$ состоит только из вертикальных и горизонтальных звеньев, любая её пара соседних звеньев образует угол, 90° или 270° , определяемый внутренностью \mathbb{M}_K^+ .

Аналогично построим процесс представления $\bar{e}_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ через векторы с меньшими индексами и без слагаемых в виде произведения элемента цепной дроби на вектор с помощью (6) и (7) при подходящем выборе точек приложения соответствующих векторов. В итоге получим множество многоугольников \mathbb{M}_k^- и ломанных $L_k^-((l'_1; l'_2), (l'_1 + q_{2m-1}; l'_2 + p_{2m-1}))$, $k = 1, 2, \dots, K$, с такими же свойствами, что при построении первого процесса.

Пусть $(l_1; l_2) = (l'_1; l'_2) = (0; 0)$ и $m = m'$, тогда первые равенства из (6) и (7) представляют собой алгоритмом “вытягивания носов”. Ломанная $L_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ принадлежит $\Delta_{q_{2m-2}}$ и лежит под l_α , а $L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — над l_α , предполагается, что $\bar{e}_{2m+1}(0; 0), \bar{e}_{2m+2}(0; 0) \notin l_\alpha$. Внутри многоугольника $OL_k^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-1}^-L_k^-(O, B_{2m-1}^-)$ нет целых точек по тем же причинам, что и выше. На последнем K -ом шаге многоугольник $\mathbb{S}_{OB} = OL_K^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-1}^-L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ является окружением отрезка OB , где $B_{2m-2}^- = (q_{2m-2}; p_{2m-2} + 1)$ и $B = l_\alpha \cap B_{2m+2}^+B_{2m-2}^-$, а $L_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ и $L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — правая и левая ступенчатые аппроксимации отрезка OB .

ЛЕММА 1. Пусть $B = (x; y)$ — произвольно фиксированная точка прямой $l_\alpha : y = \alpha x$ такая, что $x \geq q_2$, а $B^+ = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor)$ и $B^- = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor + 1)$. Тогда найдутся правая $L^+(O, B^+)$ и левая $L^-(O, B^-)$ аппроксимации отрезка OB без вертикальных звеньев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем для иррационального α . Пусть индекс у $\bar{e}_{2m+1}(0; 0) = \overline{(q_{2m-2}; p_{2m-2})}$ такой, что $q_{2m-2} \geq \lceil x \rceil > q_{2m-4}$, причем $m \geq 2$. При $q_{2m-2} = \lceil x \rceil$ имеем $L^+(O, B^+) = L_{2m+1}^2 = \bar{e}_{2m+1}(0; 0)$. Для $q_{2m-2} > \lceil x \rceil > q_{2m-4}$ воспользуемся представлением $\bar{e}_{2m+1}(0; 0)$ посредством (6), которое дает последовательность из векторов-слагаемых

$$\bar{e}_{2m-1}(0; 0), \bar{e}_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}), \bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + (a_{2m-3} - 1)q_{2m-3}; p \rightarrow q). \quad (8)$$

Любые i_1 её первых членов образуют ломанную $\hat{L}_{2m-1, 2m}^{i_1+1}$ с не более, чем двумя звеньями и ровно $i_1 + 1$ целыми точками на ней, а точка $(q_{2m-3}; p_{2m-3})$ есть средняя вершина, либо крайняя. Последовательность (8) является результатом, завершающим первый этап процесса построения в общем случае ломанной $L^+(O, B^+)$. Обозначим через $\overleftarrow{I}_{1; 2m+1}$ замкнутый справа интервал $(q_{2m-4}, q_{2m-2}]$, содержащий $\lceil x \rceil$.

Второй этап этого процесса начинается с поиска $\overleftarrow{I}_{2; 2m} (\subset \overleftarrow{I}_{1; 2m+1})$ с помощью векторов с индексом $2m$ из (8). Из $\lceil x \rceil \in \overleftarrow{I}_{1; 2m+1}$ следует, что найдется такой $(k_{2m} + 2)$ -ый член $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ из (8) для некоторого $k_{2m} (\in \sigma_{2m-2})$, что его абсциссы крайних точек дают $(q_{2m-4} + (1 + k_{2m})q_{2m-3}, q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) = \overleftarrow{I}_{2; 2m} (\ni \lceil x \rceil)$, а следовательно

$$q_{2m-3} \geq \lceil x \rceil - q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0. \quad (9)$$

Из $q_{2m-3} = \lceil x \rceil$ получаем $L^+(O, B^+) = L_{2m+1, 2m}^{2, k_{2m}+1} = \hat{L}_{2m-1, 2m}^{k_{2m}+3}$ с тремя вершинами и $k_{2m} + 3$ целыми точками. При $k_{2m} = a_{2m-2}$ аппроксимацию $L_{2m+1, 2m}^{2, a_{2m-2}}$ вполне заменяется L_{2m+1}^2 , без

всякого ущерба, так как сумма звеньев первой дает вторую согласно (6) — в итоге мы пришли к результату полученному на предыдущем этапе. Первый нижний индекс у $L_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}+1}$ указывает на то, что при разложении $\bar{e}_{2m+1}(0;0)$ посредством (6) получается последовательность (8), из которой выбирается описанным выше способом $(k_{2m}+2)$ -ой член $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3};p \rightarrow q)$ — о чем говорят индексы $2m$, верхние индексы 2 и $k_{2m}+1$ говорят о количестве целых точек приобретенных соответственно на первом и втором этапах.

Рассмотрим случай, когда $m=2$ и первое неравенство в (9) строгое. Из (7) следует, что $\bar{e}_4(q_0;p_0) = a_1\bar{e}_3(q_0;p_0) + \bar{e}_2((a_1+1)q_0;p \rightarrow q)$, а поэтому концевая точка $B^+ = ([x]; [y])$ искомой аппроксимации совпадает с одной из внутренних целых точек вектора-слагаемого $a_1\bar{e}_3(q_0;p_0)$ или концевой точкой другого вектора-слагаемого. Следовательно, у этой аппроксимации последнее звено состоит либо не менее, чем одного вектора с индексом три, либо вектора-звена $\bar{e}_2(a_1+1)q_0;p \rightarrow q)$. Так как мы строим аппроксимацию без вертикальных звеньев, то в последнем случае заменив два последних звена вектором $\bar{e}_4(q_0;p_0)$, вследствие чего получим нужную аппроксимацию $L_{5,4}^{2,a_1+1} = L^+(O, B^+)$. Впредь, если при построении $L^+(O, B^+)$ требуется разложение $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$, приложенного к $(\cdot; \cdot)$, то с помощью (7) будем поступать аналогично.

Пусть система (9) состоит из строгих неравенств. Тогда вектор $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3};p \rightarrow q)$ разложим посредством (7) при $m' = m-1$ и $(l'_1; l'_2) = (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$, вследствие чего получаем последовательность из векторов-слагаемых:

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{2m-1}(q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-1}(q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; \\ &p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-1}((a_{2m-3} - 1)q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ &\bar{e}_{2m-2}(a_{2m-3} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (10)$$

Любые i_2 её первых членов дают ломанную $\hat{L}_{2m-1,2m-2}^{i_2+1}$, что есть завершение второго этапа процесса $L^+(O, B^+)$ в общем случае.

Третий этап начинается с поиска непересекающихся подмножеств $\overleftarrow{I}_{3;2m-1}, I_{3;2m-2}$ ($\subset \overleftarrow{I}_{2;2m}$) с помощью векторов с индексами $2m-1$ и $2m-2$ из (10), где отсутствие стрелки указывает на то, что правый конец интервала не включен. Каждое из этих подмножеств может содержать $[x]$. Среди векторов из (10) найдется такой вектор, что абсциссы его крайних точек такие, что

$$\begin{aligned} &q_{2m-4} \geq [x] - k_{2m-1}q_{2m-4} - (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) > 0 \text{ или} \\ &q_{2m-5} > [x] - a_{2m-3}q_{2m-4} - (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

при некотором $k_{2m-1} = k' \in \sigma_{2m-3}$. Посредством (10) определяются $\overleftarrow{I}_{3;2m-1}$ и $I_{3;2m-2}$. Векторами из (10), дающими (11), являются соответственно

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{2m-1}(k_{2m-1}q_{2m-4} + (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}); p \rightarrow q), \\ &\bar{e}_{2m-2}(a_{2m-3}q_{2m-4} + (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}); p \rightarrow q) \end{aligned} \quad (12)$$

При равенстве в (11) конец первого вектора из (12) совпадает с B^+ и поэтому

$$L^+(O, B^+) = L_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}+1} = \tilde{L}_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}} \cup \hat{L}_{2m-1,2m-2}^{k_{2m-1}+1}$$

с $k_{2m} + k_{2m-1} + 3$ целыми точками, где $\tilde{L}_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}}$ ломанная, полученная из аппроксимации $L_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}+1}$ удалением разлагаемого вектора $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3};p \rightarrow q)$ на предыдущем этапе и заключен между её последними двумя целыми точками. Тильда впредь будет нести подобную нагрузку.

При строгом неравенстве в (11) имеем ломанные $\tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}}$ и $\tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2}^{2,k_{2m},a_{2m-3}}$, каждая из которых может привести к $L^+(O, B^+)$ — все зависит какому из двух непересекающихся открытых интервалов $I_{3;2m-1}, I_{3;2m-2}$ принадлежит $[x]$. Разложение векторы из (12) по

формулам (6) и (7) дает две последовательности из векторов-слагаемых:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}((k_{2m-1} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6} + (k_{2m-1} + \\ 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6} + q_{2m-5} + (k_{2m-1} + 1) \\ q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6} + (a_{2m-4} - \\ 1)q_{2m-5} + (k_{2m-1} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}((a_{2m-3} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-3}(q_{2m-6} + (a_{2m-3} + \\ 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-3}(a_{2m-5} - 1)q_{2m-6} + (a_{2m-3} + \\ 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-4}(a_{2m-5}q_{2m-6} + (a_{2m-3} + 1) \\ q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (14)$$

Любые $i_{3,1}$ и $i_{3,2}$ их первые члены образуют соответственно ломанные $\hat{L}_{2m-3,2m-2}^{i_{3,1}}$ и $\hat{L}_{2m-3,2m-4}^{i_{3,2}}$, чем завершается третий этап.

Четвертый этап начинается с поиска непересекающихся подмножеств $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-3}$, $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-2} \subset \overleftarrow{I}_{3,2m-1}$ и $\overleftarrow{I}_{3,2;2m-2}$, $I_{3,2;2m-4} \subset I_{3,2m-2}$, содержащих $[x]$. Последовательности (13) и (14) дают соответственно по паре систем:

$$\begin{aligned} q_{2m-6} \geq [x] - (1 + k_{2m-1})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0, \quad q_{2m-5} \geq \\ [x] - q_{2m-6} - k_{2m-2}q_{2m-5} - (1 + k_{2m-1})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0, \\ q_{2m-6} \geq [x] - k_{2m-3}q_{2m-6} - (1 + a_{2m-3})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0, \\ q_{2m-7} > [x] - a_{2m-5}q_{2m-6} - (1 + a_{2m-3})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

для некоторых $k_{2m-2} \in \sigma_{2m-4}$ и $k_{2m-3} \in \sigma_{2m-5}$. Эти системы определяют $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-3}$, $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-2}$ и $\overleftarrow{I}_{3,2;2m-3}$, $I_{3,2;2m-4}$. Каждое двойное неравенство из (15) задаются соответственно 1-ым, $(k_{2m-2} + 2)$ -ым членами из (13) и $(k_{2m-3} + 1)$ -ым, $(a_{2m-5} + 1)$ -ым членами из (14), а именно

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}(k_{2m-1}q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6} + k_{2m-2}q_{2m-5} + (k_{2m-1} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ \bar{e}_{2m-3}(k_{2m-3}q_{2m-6} + a_{2m-3}q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q) \\ \bar{e}_{2m-4}(a_{2m-5}q_{2m-6} + a_{2m-3}q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q) \end{aligned} \quad (16)$$

При равенстве в каждом неравенств из (15) имеем соответственно

$$\begin{aligned} L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-1,2m-3}^{2,k_{2m},k_{2m-1},1} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-2}^1, \\ L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-1,2m-2}^{2,k_{2m},k_{2m-1},k_{2m-2}+2} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-2}^{k_{2m-2}+2}, \\ L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-2,2m-3}^{2,k_{2m},a_{2m-3},k_{2m-3}+1} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2}^{2,k_{2m},a_{2m-3}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-4}^{k_{2m-3}+1}. \end{aligned}$$

Число целых точек каждой из возможных аппроксимаций равно сумме её верхних индексов.

При строгих неравенствах каждый из векторов в (16) представляем через (6) и (7) описанным выше методом. Вследствие чего получаем четыре последовательности из векторов-слагаемых подобно (13) и (14), что завершает четвертый этап. В этом случае мы имеем четыре возможных ломанные

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1,2m-3}^{2,k_{2m},k_{2m-1},0}, \quad \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1,2m-2}^{2,k_{2m},k_{2m-1},k_{2m-2}+1} \\ \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-3,k_{2m-3}}^{2,k_{2m},a_{2m-3},k_{2m-3}}, \quad \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2,2m-4}^{2,k_{2m},a_{2m-3},a_{2m-5}} \end{aligned}$$

Любая из них может быть достроена до аппроксимаций $L^+(O, B^+)$ описанным выше методом. Выбор такой ломанной зависит от принадлежности $[x]$ к одному из открытых непересекающихся интервалов $I_{3,1;2m-3}$, $I_{3,1;2m-2}$, $I_{3,2;2m-3}$, $I_{3,2;2m-4}$. Далее, каждый раз, переходя от предыдущего этапа к последующему, как и раньше, с небольшими вариациями после некоторого m -го этапа, приходим к совокупности последовательностей, завершающим очередной

этап. Любая из них состоит из векторов с индексами 3 и 4, причем каждая из этих векторов непосредственно может привести только к одной единственной аппроксимации $L^+(O, B^+)$ без вертикальных звеньев. Что является индуктивным заключением первой части леммы 1, к установлению которого и перейдем.

Произвольная из завершающих последовательностей на каждом этапе состоит из векторов с индексами: $2s - 1$ и $2s$ или $2t - 1$ и $2t - 2$. В первом случае векторы $\bar{e}_{2s-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2s}(\cdot; \cdot)$ входят в такую последовательность соответственно один раз и a_{2s-2} раза. Во втором $\bar{e}_{2t-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2t-2}(\cdot; \cdot) - a_{2t-3}$ раза и один раз. Абсцисса $[x]$ последней вершины B^+ искомой аппроксимации согласно нашему методу принадлежит интервалу, замкнутому справа, и определяемому одним из указанных выше векторов. Вследствие чего имеем одну из пар опорных векторов: $\bar{e}_{2s-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2s}(k_{2s}q_{2s-3} + \cdot; p \rightarrow q)$ или $\bar{e}_{2t-1}(k_{2t-1}q_{2t-4} + \cdot; p \rightarrow q)$ и $\bar{e}_{2t-2}(a_{2t-1}q_{2t-4} + \cdot; p \rightarrow q)$ при подходящем выборе $k_{2s} \in \sigma_{2s-2}$ и $k_{2t-1} \in \sigma_{2t-3}$. Каждый из таких опорных векторов разлагается по формуле (6) или (7) — как это делали прежде, что дает совокупность последовательности, завершающих этап. Поэтому на последующем этапе число опорных векторов вдвое больше векторов такого же сорта, чем на предыдущем. Это будет происходить до тех пор, пока один из опорных векторов не будет равен $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$. что случится на m -ом этапе, при этом минимальный и максимальные индексы у векторов такого типа на этом этапе равны 4 и $m+2$. Теперь с $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$ поступаем также, как с $\bar{e}_4(q_0; p_0)$ в первом абзаце после (9), чтобы не появились вертикальные звенья и после чего он не участвует в построении последовательностей, завершающих этап. Таким образом поступаем на каждом очередном этапе, а при появлении векторов в таких последовательностях с индексом три переходим к строению $L^+(O, B^+)$ с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в первом абзаце после (9), конечно при условии, что $[x]$ принадлежит соответствующему интервалу, замкнутому справа. Вследствие чего они также не участвуют в образовании последовательностей завершающих этап. В итоге на $2(m+1)$ -ом этапе придем к индуктивному заключению, а затем с векторами, имеющими индексы 3 и 4, поступаем, как и выше, чем завершается доказательство существования правой аппроксимативно отрезка OB без вертикальных звеньев.

Построение левой аппроксимации $L^-(O, B^-)$ отрезка OB без вертикальных звеньев при иррациональном α проводится аналогично, как и $L^+(O, B^+)$, только для этого необходимо преобразовать формулы (6) и (7) через замену $2m$ на $2m+1$. Вследствие чего звенья ломанной $L^-(O, B^-)$ будут лежать над l_α , а поэтому $B^- = ([x]; [y] + 1)$.

Доказательство данной леммы для рационального α . В этом случае на l_α лежит бесконечно много целых точек, а поэтому OB может принадлежать некоторые из них. Если целых точек внутри OB нет, то построение требуемых аппроксимаций осуществляем, как при иррациональном α . В противном случае выберем ближайшую целую точку O^* к B и возьмем её за начало новой системы координат с базисными векторами $\bar{e}_1(O^*)$ и $\bar{e}_2(O^*)$. Затем построим правую и левую аппроксимации $L^\pm(O^*, B^\pm)$ отрезка O^*B без вертикальных звеньев, как при иррациональном α . Требуемые аппроксимации $L^\mp(O, B^\pm) = OO^* \cup L^\mp(O^*, B^\pm)$, чем завершается доказательство леммы. \square

Метод построения правой и левой аппроксимаций отрезка AB без вертикальных звеньев в лемме 1 дает координаты всех их целых вершин, а поэтому мы можем вычислить количество целых внутренних точек посредством (5) правого и левого клетчатых треугольников отрезка OB .

3.2. Аппроксимации отрезка

ТЕОРЕМА 2. *Если AB — отрезок в OXY такой, что $Pr_X AB$ и $Pr_Y AB$ не являются целыми точками, то существует правая и левая аппроксимации отрезка AB без вертикальных звеньев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из множества ближайших целых точек от правой (левой) ступенчатой

аппроксимации $S^+(A^+, B^+)$ ($S^-(A^-, B^-)$) отрезка AB до L_{AB} выберем любую из них, например, O^+ (O^-). Если O^+ принадлежит l_{AB} , то положим $O^* = O^+ = O^-$. Точку O^* возьмем в качестве начала новой системы координат $O^*X^*Y^*$, оси которой параллельны OX и OY вплоть до возможного совпадения, с таким ортонормированным базисом $\bar{e}_1^*(O^*)$ и $\bar{e}_2^*(O^*)$, что сам отрезок AB или его часть O^*A лежат в первой четверти I_A^* системы $O^*X^*Y^*$. Далее на основании леммы 1 строим правую и левую аппроксимации отрезка, лежащего в I_A^* , которая будут полными или частичными аппроксимациями отрезка AB — все зависит от $AB \cap I_A^*$. При $AB \cap I_A^* = AB$ построенные аппроксимации будут удовлетворять данной теореме, а при $AB \cap I_A^* = O^*A$ правая и левая аппроксимации $L^\pm(O^*, A^\pm)$ отрезка O^*A будут частичными. Для построения полных аппроксимаций отрезка AB без вертикальных звеньев поступим следующим образом. Изменим направление $\bar{e}_1^*(O^*)$ и $\bar{e}_2^*(O^*)$ на противоположное, тогда O^*B принадлежал первой четверти, которая в $O^*X^*Y^*$ является третьей четвертью. Тогда в силу леммы 1 правая и левая аппроксимации $L^\pm(O^*, B^\pm)$ отрезка O^*B дают требуемые аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm) = L^\pm(O^*, A^\pm) \cup L^\pm(O^*, B^\pm)$.

В случае, когда $O^+, O^- \notin l_{AB}$ поступаем так — проводим через O^\pm соответственно прямые l_{AB}^\pm параллельные l_{AB} . Параллелограмм, высекаемый l_{AB}^+ и l_{AB}^- из клетчатой области S_{AB} отрезка AB может содержать целые точки в виде вершин ступенчатой аппроксимации только на своих сторонах $A'^+B'^+$ и $A'^-B'^-$, определяемых соответственно l_{AB}^+ и l_{AB}^- . Аналогично, как и выше строим правую и левую аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ соответственно отрезков $A'^\pm B'^\pm$ без вертикальных звеньев. Согласно методу построению аппроксимаций целые точки на стороне $A'^\pm B'^\pm$, если таковы есть, будут вершинами $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$, а поэтому внутри многоугольника $L^+(A^+, B^+)B^+B^-L^-(A^-, B^-)A^-A^+$, которому принадлежит AB , нет целых точек. Вследствие чего получаем требуемые аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ отрезка AB , что доказывает данную теорему.

□

Ломанные из леммы 1 с учетом теоремы 2 вполне могут быть взяты для доказательства предложения 1.

4. Вычисления разности между белыми и черными клетками прямоугольного треугольника $OA(t)B(t)$

Разделы 4–6 составляют вторую часть статьи, в которой рассматриваются клетчатые области с раскрашенными единичными квадратами в шахматном порядке и $\alpha (> 0)$ считается фиксированным иррациональным числом.

Пусть единичные квадраты целочисленной решетки из первого квадранта I_{OXY} в OXY раскрашены в шахматном порядке, $f_{t,OXY} : y = -\alpha \cdot x + t, t > 0$, — семейство прямых и $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. При каждом t прямая $f_{t,OXY}$ отсекает от I_{OXY} треугольник $\Delta(t) = OA(t)B(t)$, $A(t) = OX \cap f_{t,OXY}$, $B(t) = OY \cap f_{t,OXY}$.

ТЕОРЕМА 3. *Разность $u(t)$ между белыми и черными клетками из $\Delta(t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху, когда $t \rightarrow \infty$.*

Данная теорема представляет собой задачу, поставленную в [13].

4.1. Рекуррентные формулы для клетчатых областей $E_n(l_1; l_2)$ и их разностей $\epsilon_n(l_1; l_2)$

В дальнейшем нижний индекс у объекта в виде обозначения системы координат говорит, что этот объект берется из указанной системы координат, но индекс, равный $A(\alpha q)e_1e_2$, для

удобства записи в основном будем опускать, ибо почти всюду мы работаем в системе координат $A(\alpha q)e_1e_2$.

Множество из раскрашенных клеток $\Delta(\alpha q)$ обозначим $\mathbf{U}(\alpha q)$, $q \in \mathbb{N}$, а $A(\alpha q)e_1e_2$ — новую систему координат с началом $A(\alpha q) = (q; 0)_{OXU}$ и ортонормированным базисом $\bar{e}_1(q; 0)_{OXU}$ и $\bar{e}_2(q; 0)_{OXU}$, и осью абсцисс $A(\alpha q)e_1$, противоположно направленной OX , осью ординат $A(\alpha q)e_3$ сонаправлена с OY , угловая раскрашенная клетка K_O из первого квадранта I_{OXU} белая.

Цвет угловой раскрашенной клетки $K_{A(\alpha q)}$ из $I_{A(\alpha q)e_1e_2}$ определится через

$$K_{A(\alpha q)} = \begin{cases} 1, & q = 2q' - 1, \\ -1, & q = 2q', \end{cases} \quad q' \in \mathbb{N} \quad (17)$$

— в первом случае $K_{A(\alpha q)}$ белая, а во втором черная, так как K_O белая.

Пусть $(l_1; l_2)$ — целая точка с неотрицательными координатами в $A(\alpha q)e_1e_2$, а $K_{(l_1; l_2)}(q)$ — раскрашенная клетка, у которой точка $(l_1; l_2)$ является ближайшей вершиной к $A(\alpha q)$. По $(l_1; l_2)$ клетка $K_{(l_1; l_2)}(q)$ определяется однозначно, поэтому $(l_1; l_2)$, назовем её *координатами*.

Клетке $K_{(l_1; l_2)}(q)$ припишем единицу, если она белая и минус единицу в противном случае, откуда с учетом (17) имеем

$$\begin{aligned} K_{(l_1; l_2)}(q) &= (-1)^{q+1+l_1+l_2}, \\ K_{(l_1; l_2)}(2q' - 1) &= (-1)^{l_1+l_2}, \quad K_{(l_1; l_2)}(2q') = (-1)^{1+l_1+l_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для четностей чисел введем следующее обозначение:

$$2l = l^+ = \oplus, \quad 2l + 1 = l^- = \ominus, \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

Верхние индексы, отражающие четность и нечетность числа, их используем в тех случаях, когда для нас важны четность и величина числа одновременно, а \oplus и \ominus —, когда на результат влияет только четность. Над символами \oplus и \ominus можно совершать операции сложения и умножения по тем же правилам, что и над целыми числами, только результатом будет не число, а его четность. Если алгебраическое выражение состоит из членов в виде целых чисел и символов четности, то эти числа заменяем их четностью и совершают заданные операции.

Выберем вектор $\bar{d} = \overline{(d_1; d_2)}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_0$, целую точку $(l_1; l_2)$ такие, что вектор $\bar{d}(l_1; l_2) = \overline{(d_1; d_2)}_{(l_1; l_2)}$, приложенный к $(l_1; l_2)$ и принадлежит $I_{OXU} \cap I_{A(\alpha q)e_1e_2}$. Тогда через $\mathbf{D}(l_1; l_2) = \mathbf{D}(\bar{d}(l_1; l_2))$ обозначим клетчатую область, образованную раскрашенными клетками из $I_{A(\alpha q)e_1e_2}$, ограниченную OY , прямыми: $e_2 = l_2$, $e_2 = l_2 + d_2$ и $\overline{(d_1; d_2)}_{(l_1; l_2)}$. $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ однозначно определяется $\bar{d}(l_1; l_2)$, который назовем *определяющим вектором области $\mathbf{D}(l_1; l_2)$* , а разность $\delta(l_1; l_2)$ между её белыми и черными клетками — её *разностью*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Разность $\delta(l_1; l_2)$ клетчатой области $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ с определяющим вектором $\overline{(d_1; d_2)}_{(l_1; l_2)}$ при фиксированных его координатах зависит только от четностей l_1 и l_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что если $l_1^\pm = m_1^\pm$ и $l_2^\pm = m_2^\pm$ у определяющих векторов $\overline{(d_1; d_2)}_{(l_1; l_2)}$ и $\overline{(d_1; d_2)}_{(m_1; m_2)}$ соответственно $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ и $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ при фиксированных d_1 и d_2 , то $\delta(l_1; l_2) = \delta(m_1; m_2)$. При параллельном перемещении $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ или $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ в $I_{OXU} \cap I_{A(\alpha q)e_1e_2}$ на одну единицу вдоль $A(\alpha q)e_1$ или $A(\alpha q)e_2$ каждая раскрашенная клетка из этих областей меняет цвет на противоположный. Если $l_1 \geq m_1$, то переместим $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ на вектор $(l_1 - m_1; l_2 - m_2)$ с четными координатами. Вследствие чего клетчатая область $(l_1 - m_1; l_2 - m_2) + \mathbf{D}(m_1; m_2)$ накроет часть $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ (при равенстве они совпадут), причем белые клетки с белыми, а черные с черными. Ненакрытая часть $\mathbf{D}(l_1; l_2)$

является прямоугольником, горизонтальная сторона которого имеет четную длину, а поэтому $\delta(l_1; l_2) = \delta(m_1; m_2)$, что доказывает данное предположения.

□

Векторы (6) при $2m = n + 1$ определяют клетчатые области

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+2}(l_1; l_2) &= \mathbf{E}_{n+2}(\bar{e}_{n+2}(l_1; l_2)), \quad \mathbf{E}_n(l_1; l_1) = \mathbf{E}_n(\bar{e}_n(l_1; l_2)), \\ a_{n-1}\mathbf{E}_{n+1}(l_1 + q_{n-2}; l_2 + p_{n-2}) &= \mathbf{E}_{n+1}(a_{n-1}\bar{e}_{n+1}(l_1 + q_{n-3}; l_2 + p_{n-3})), \\ a_{n-1}\mathbf{E}_{n+1}(l_1; l_2) &= \mathbf{E}_{n+1}(a_{n-1}\bar{e}_{n+1}(l_1; l_2)), \quad \mathbf{E}_n(l_1 + a_{n-1}q_{n-2}; \\ l_2 + a_{n-1}p_{n-2}) &= \mathbf{E}_n(\bar{e}_n(l_1 + a_{n-1}q_{n-2}; l_2 + a_{n-1}p_{n-2})). \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что клетчатые области вида $k\mathbf{E}_l(m_1; m_2)$, $k \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$, из (20) обладают следующим свойством

$$\begin{aligned} k\mathbf{E}_l(m_1; m_2) &= \cup_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j; m_2 + p_{l-3}j), \\ \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j_1; m_2 + p_{l-3}j_2) \cap \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j_2; m_2 + p_{l-3}j_1) &= \emptyset, \\ j_1, j_2 &= 0, 1, \dots, k-1; \quad j_1 \neq j_2. \end{aligned} \quad (21)$$

(6) и (7) при $m' = m$ и $(l'_1; l'_2) = (l_1; l_2)$ дают рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) &= \\ \mathbf{E}_{2m-1}(l_1; l_2) \cup a_{2m-2}\mathbf{E}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}), & \\ \mathbf{E}_{2m-1}(l_1; l_2) \cap a_{2m-2}\mathbf{E}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2m+2}(l_1; l_2) &= \\ a_{2m-1}\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) \cup \mathbf{E}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + a_{2m-1}p_{2m-2}), & \\ a_{2m-1}\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) \cap \mathbf{E}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + a_{2m-1}p_{2m-2}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (23)$$

При $l_1; l_2) = A(\alpha q) = (q; 0)_{OXY} = (0; 0)$, тогда из рассуждений в первом абзаце после (4) для $n = 2m + 1$ для клетчатой области $\mathbf{U}(\alpha q)$ треугольника $\Delta(\alpha q)$ получаем: $\mathbf{U}(\alpha q) \cap \mathbf{E}_n(0; 0) = \mathbf{E}_n(0; 0)$, $q > q_{2m-2}$.

Выразим правую часть из (7) при $m' = m$ и $(l'_1; l'_2) = (l'_1; l'_2)$ через $\bar{e}_{2m-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2m}(\cdot; \cdot)$ с помощью правой части (6), тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+2}(l_1; l_2) &= \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \bar{e}_{2m+1}(l_1 + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) + \bar{e}_{2m}(l_1 + \\ a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) &= \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \bar{e}_{2m-1}(l_1 + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) + \\ \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3} + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) &+ \\ \bar{e}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) & \end{aligned} \quad (24)$$

Из (6), (21) – (24) и предложения 2 вытекает, что разности $\epsilon_{2m+1}(l_1; l_2)$ и $\epsilon_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ соответственно клетчатых областей $\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_1)$ и $\mathbf{E}_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon_{2m+1}(l_1; l_2) &= \epsilon_{2m-1}(l_1; l_2) + \sum_{j=0}^{a_{2m-2}-1} \epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}j; l_2 + \\ p \rightarrow q) &= \epsilon_{2m-1}(l_1; l_2) + (b_{2m-2} + 1)\epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) + \\ (b_{2m-2} + \delta_{\oplus, a_{2m-2}^{\pm}}) &\epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{2m+2}(l'_1; l'_2) &= \sum_{j=0}^{a_{2m-1}-1} \epsilon_{2m+1}(l'_1 + q_{2m-2}j; l'_2 + p_{2m-2}j) + \epsilon_{2m}(l'_1 + \\ a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) &= (b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m+1}(l'_1; l'_2) + (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^{\pm}}) \\)\epsilon_{2m+1}(l'_1 + q_{2m-2}; l'_2 + p_{2m-2}) &+ \epsilon_{2m}(l'_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) = \\ (b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m-1}(l'_1; l'_2) &+ (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^{\pm}})\epsilon_{2m-1}(l'_1 + q_{2m-2}; l'_2 + \\ p_{2m-2}) &+ (b_{2m-2} + 1)(b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4}; l'_2 + p_{2m-4}) + (b_{2m-2} + \\ \delta_{\oplus, a_{2m-2}^{\pm}})(b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}; l'_2 + p \rightarrow q) &+ (b_{2m-2} + 1) \\ (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^{\pm}}) &\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) + (b_{2m-2} + \\ \delta_{\oplus, a_{2m-2}^{\pm}})(b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^{\pm}}) &\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3} + q_{2m-2}; l'_2 + \\ p \rightarrow q) &+ \epsilon_{2m}(l'_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (26)$$

где $b_n = \lfloor \frac{a_n-1}{2} \rfloor$, а $\delta_{\circ, \bullet}, \circ, \bullet \in \{\oplus, \ominus\}$ обозначим символ Кронекера, который равен 1 при $\circ = \bullet$, а в противном случае -0 .

В силу предложения 2 имеет смысл ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \epsilon_n^{++} &= \epsilon_n(l_1^+; l_2^+) = \epsilon_n(\oplus; \oplus), & \epsilon_n^{-+} &= \epsilon_n(l_1^-; l_2^+) = \epsilon_n(\ominus; \oplus), \\ \epsilon_n^{+-} &= \epsilon_n(l_1^+; l_2^-) = \epsilon_n(\oplus; \ominus), & \epsilon_n^{--} &= \epsilon_n(l_1^-; l_2^-) = \epsilon_n(\ominus; \ominus), \end{aligned} \quad (27)$$

$n = 2m + 1, 2m + 2$, а $\widehat{\epsilon}_n$ — четверка последовательных членов $\epsilon_n^{++}, \epsilon_n^{-+}, \epsilon_n^{+-}, \epsilon_n^{--}$ последовательности $\{\widehat{\epsilon}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Каждый последующий её член вычисляется через восемь её предыдущих при известных четностях параметров: $a_{2m-2}, a_{2m-1}, p_{2m-4}, p_{2m-3}, p_{2m-2}, q_{2m-4}, q_{2m-3}, q_{2m-2}$, ибо задано $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ и есть (2).

Пусть l_1 и l_2 заданы в (25) и (26), тогда их четности известны. Правые части из (25) и (26) есть линейные комбинации относительно компонент из

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{2m-1, 2m} &= (\widehat{\epsilon}_{2m-1}, \widehat{\epsilon}_{2m})^\tau = \\ &(\epsilon_{2m-1}^{++}, \epsilon_{2m-1}^{-+}, \epsilon_{2m-1}^{+-}, \epsilon_{2m-1}^{--}, \epsilon_{2m}^{++}, \epsilon_{2m}^{-+}, \epsilon_{2m}^{+-}, \epsilon_{2m}^{--})^\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

взятых в том же порядке, где τ — операция транспонирования. Рассмотрим матрицу $B_{2m+1, 2m+2}$ размера 8×8 , первые четыре строки и оставшиеся которой есть коэффициенты линейной комбинации соответственно из (25) и (26) относительно компонент из крайней правой части в (28), взятых в порядке их следования, когда $(l_1; l_2)$ принимают значения из упорядоченного множества: $(\oplus; \oplus), (\ominus; \oplus), (\oplus; \ominus), (\ominus; \ominus)$. Тогда крайние части из (25) и (26) в матричном виде представимы следующим образом:

$$\bar{\epsilon}_{2m+1, 2m+2} = B_{2m+1, 2m+2} \bar{\epsilon}_{2m-1, 2m} \quad (29)$$

с начальными условиями

$$\bar{\epsilon}_{1, 2} = (\widehat{\epsilon}_1, \widehat{\epsilon}_2)^\tau = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)^\tau, \quad q = 2q', \quad (30)$$

$$\bar{\epsilon}_{1, 2} = (\widehat{\epsilon}_1, \widehat{\epsilon}_2)^\tau = (0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0)^\tau, \quad q = 2q' + 1, \quad (31)$$

так как $\epsilon_1(l_1; l_2) = 0$ и $\mathbf{E}_2(l_1; l_2) = \cup_{j=l_1}^{q-1} K_{(j; l_2)}(q)$. Из последнего следует, что $\epsilon_2(l_1; l_2)$ зависит от цветов крайних клеток $K_{(l_1; l_2)}(q)$ и $K_{(q-1; l_2)}(q)$, цвета которых в силу (18) определяется четностью q при фиксированных l_1 и l_2 , что и дает числовые значения в (30) и (31), которые не зависят от конкретного α .

Матрица $B_{2m+1, 2m+2}$ есть блочная матрица вида:

$$B_{2m+1, 2m+2} = \begin{pmatrix} B_{11; 2m-1} & B_{12; 2m} \\ B_{21; 2m-1} & B_{22; 2m} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Эти блоки есть матрицы $B_{11; 2m-1}$ и $B_{21; 2m-1}$ размера 4×4 , образованные коэффициентами при $\widehat{\epsilon}_{2m-1}$ соответственно из первых и последних четырех равенств в (29). Аналогично образуются $B_{21; 2m}$ и $B_{22; 2m}$ из коэффициентов при $\widehat{\epsilon}_{2m}$ также в (29). В силу (25) блок $B_{11; 2m-1} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4$ при любом α .

4.2. Достаточные условия, при которых теорема 3 справедлива

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $L^- = L(A(\alpha q), B^-(\alpha q))$ — левая аппроксимация отрезка $A(\alpha q)B(\alpha q)$ из леммы 1 после замены OXY на $A(\alpha q)e_1e_2$, а $L_i = (Q_i; P_i)$, $i = 0, 1, \dots, k+1$, — её вершины, $L_0 = A\alpha q$ и $L_{k+1} = B^-(\alpha q)$, тогда разность клетчатой области $U(\alpha q)$ треугольника $\Delta(\alpha q)$ задаются формулой:

$$u(\alpha q) = \sum_{i=0}^k \lambda_i(Q_i; P_i), \quad (33)$$

где $\lambda_i(Q_i; P_i)$ — разность клетчатой области с определяющим вектором $\overline{L_i L_{i+1}}(Q_i; P_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая аппроксимации L^- принадлежит $\Delta(\alpha q)$ в силу её построения, а в силу определения аппроксимации отрезка следует, что внутри многоугольника $A(\alpha q)B(\alpha q)L^-B^-(\alpha q)$ нет целых точек. Поэтому $U(\alpha q) = L^-$, где L^- — клетчатая область многоугольника \mathbb{L}^- , отсекаемого от $\Delta(\alpha q)$ аппроксимацией L^- , откуда имеем $u(\alpha q) = \lambda^-$ для их разностей. Согласно методу построения L^- из леммы 1 каждый её вектор-звено $\overline{L_i L_{i+1}}(Q_i; P_i) = \sum_{j=0}^{k_j} \bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ в общем случае, где $\bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ — последовательно приложенные друг к другу, коллинеарных векторов каждый из которых с точкой его приложения находится по (6) или (24). Отсюда $\lambda_i(Q_i; P_i) = \sum_{j=0}^{k_j} \epsilon_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$, где $\epsilon_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ — разности клетчатых областей с определяющим вектором $\bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$. Эти разности вычисляются с помощью (25) или (26). Теперь суммирования по всем $\lambda_i(Q_i; P_i)$, получаем (33). \square

Пусть $A(\alpha Q_i)$ — начало системы координат $A(\alpha Q_i); e_1 \bar{e}_2$, $L_i^-(\alpha Q_i)$ — левая аппроксимация отрезка $A(\alpha Q_i)B(\alpha Q_i)$, как в предложении 3, и $u(\alpha Q_i)$ — разность клетчатой области $U(\alpha Q_i)$ треугольника $\Delta(\alpha Q_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если \mathcal{A} — множество положительных иррациональных чисел таких, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ найдется строго возрастающая последовательность $\{Q_{\alpha,i}\}_{i=1}^{\infty}$ положительных чисел, для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = \infty$ ($\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = -\infty$), то при любом фиксированном $\alpha (\in \mathcal{A})$ справедлива теорема 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы 3 об неограниченности сверху, очевидно. Неограниченность снизу следует из замены $\{Q_{\alpha,i}\}_{i=1}^{\infty}$ на $\{Q_{\alpha,i} + 1\}_{i=1}^{\infty}$, ибо $u(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1)) \leq -u(\alpha Q_{\alpha,i}) + 1$, так как $U(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1))$ получается из $U(\alpha Q_{\alpha,i})$ при параллельном сдвиге $A(\alpha Q_{\alpha,i})e_1 e_2$ на $(-1; 0)$, при этом раскрашенные клетки из $U(\alpha Q_{\alpha,i})$ поменяют цвет на противоположный, а к ней добавится полоса из клеток — с белой нижней клеткой —, прилегающих к OY , содержащаяся в $\Delta(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1))$. Эти факты устанавливаются аналогичным методом, как при доказательстве предложения 2 и при получения начальных условий (30).

Для $\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = -\infty$ доказательство аналогично. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\alpha \in \mathcal{A}$ из предложения 4, то $\alpha^{-1} \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая $f_{t, OXY} : y = -\alpha \cdot x + t$ в системе координат $OX'Y'$ при $OX' = OY$ и $OY' = OX$ будет иметь вид: $f_{t', OX'Y'} : y' = -\alpha^{-1} \cdot x' + t'$, а поэтому $u(t) = u'(t')$, где $u(t)$ и $u'(t')$ разности соответственно совпадающих клетчатых областей $U(t)$ в OXY и $U'(t')$ в $OX'Y'$ вплоть до раскраски, отсекаемого треугольника одной и той же прямой. Из $u(t) = u'(t')$ следует справедливость данного предложение \square

5. Доказательство теоремы 3 для $\alpha = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, \dots]$

Это доказательство будет основано на предложении 4.

5.1. Последовательность $\{\bar{e}_{2m+1, 2m+2}^{\varphi}\}_{m=0}^{\infty}$

Для вычисления каждой из разностей $\epsilon_n^{\varphi}(l_1; l_2)$ применим рекуррентную формулу (29) с начальными условиями (30). Вследствие чего потребуется нахождения каждого из блоков $B_{12; 2m}$, $B_{21; 2m}$ и $B_{22; 2m}$ в (32) для $\alpha = \varphi$.

С этой целью введем понятие периодичности по четности аргументов последовательности $\{\bar{e}_{2m+1, 2m+2}^{\varphi}\}_{m=0}^{\infty}$ при произвольно заданных α и $(l_1; l_2)$, которая определяется с помощью (29). В связи, с чем нам необходимо знать четности аргументов разностей из крайних правых частей в (25) и (26). Эти четности при фиксированных α и $(l_1; l_2)$ зависят от a_{2m-2} , a_{2m-1} , p_{2m-4} ,

$p_{2m-3}, p_{2m-2}, q_{2m-4}, q_{2m-3}, q_{2m-2}$, посредством которых образуем упорядоченный набор

$$f_{2m} = \langle (q_{2m-4}^{\pm}; p_{2m-4}^{\pm})_{2m-4,1}, (q_{2m-3}^{\pm}; p_{2m-3}^{\pm})_{2m-3,2}, \\ (q_{2m-2}^{\pm}; p_{2m-2}^{\pm})_{2m-2,3}, (a_{2m-2}^{\pm}, a_{2m-1}^{\pm})_{2m-1,4} \rangle.$$

из четностей входящих в него величин. Эти наборы составляют последовательность $\{f_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$.

DEFINITION 1. Последовательность $\{\bar{e}_{2m+1,2m+2}\}_{m=0}^{\infty}$, определяемая (29), называется T -периодической по четности переменных аргументов относительно m из крайних правых частей в (25) и (26) или просто периодической по четности аргументам, если $f_{2m+T} = f_{2m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$ при минимальном $T \in \mathbb{N}$.

Из (2) при $a_n = 1$ следует, что $p_n = F_{n+1}$ и $q_n = F_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, где F_n — такие числа Фибоначчи, что $F_0 = F_1 = 1$. Отсюда получаем, что последовательность $\{F_n^{\pm}\}_{n=0}^{\infty}$ из четностей чисел Фибоначчи трехпериодична: $F_{3m}^- = F_{3m+1}^- = \ominus$, $F_{3m+2}^+ = \oplus$, $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда компоненты наборов $f_{2m}^{\varphi} = f_{2m}$ для $m = 3k+1, 3k+2, 3k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$, задаются равенствами:

$$\begin{aligned} f_{6k+2}^{\varphi} &= \langle (\ominus; \oplus)_{6k-2,1}, (\oplus; \ominus)_{6k-1,2}, (\ominus; \ominus)_{6k,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+1,4} \rangle, \\ f_{6k+4}^{\varphi} &= \langle (\ominus; \ominus)_{6k,1}, (\ominus; \oplus)_{6k+1,1}, (\oplus; \ominus)_{6k+2,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+3,4} \rangle, \\ f_{6k+6}^{\varphi} &= \langle (\oplus; \ominus)_{6k+2,1}, (\ominus; \ominus)_{6k+3,1}, (\ominus; \oplus)_{6k+4,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+5,4} \rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следует, что $\{\bar{e}_{2m+1,2m+2}^{\varphi}\}_{m=0}^{\infty}$ 6-периодична по четности аргументов. Поэтому каждая из матриц $B_{2m+1,2m+2}^{\varphi}$ ($= B_{2m+1,2m+2}$) для $m = 3k+1, 3k+2, 3k+3$ имеет одинаковую структуру. причем элементы матрицы $B_{2m+1,2m+2}^{\varphi}$ отличаются от элементов матрицы $B_{2m'+1,2m'+2}^{\varphi}$ только индексами при $m = m' \bmod 3$, а так как $b_n = \lfloor \frac{a_n-1}{2} \rfloor = 0$, то они совпадают и состоят из 0 и 1.

Из (25) и (26) при $m = 3k+1|_{k=0}$ для $\alpha = \varphi$ с учетом первого равенства в (34) имеем $\epsilon_3^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_1^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_2^{\mp\pm, \varphi}$ и $\epsilon_4^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_1^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_2^{\mp\pm, \varphi} + \epsilon_2^{\mp\mp, \varphi}$, тогда блоки

$$B_{12;2}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{21;1}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;2}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Также из (25) и (26) при $m = 3k+2|_{k=0}$ с учетом только второго равенства в (34) получаем $\epsilon_5^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_3^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_4^{\mp\mp, \varphi}$ и $\epsilon_6^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_3^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_4^{\mp\mp, \varphi} + \epsilon_4^{\pm\mp, \varphi}$, поэтому

$$B_{12;4}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & o & 0 & 1 \\ o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & o \\ 1 & 0 & o & 0 \end{pmatrix}, B_{21;3}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;4}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Аналогично для $m = 3k+3|_{k=0}$ с учетом третьего равенства из (34) получаем $\epsilon_7^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_5^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_6^{\pm\mp, \varphi}$ и $\epsilon_8^{\pm\pm, \varphi} = \epsilon_5^{\pm\pm, \varphi} + \epsilon_6^{\pm\mp, \varphi} + \epsilon_6^{\mp\pm, \varphi}$, следовательно

$$B_{12;6}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{21;5}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;6}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Отсюда с учетом (29), и (32) для $k \in \mathbb{N}_0$ имеем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \bar{e}_{6k+3,6k+4}^{\varphi} &= B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = (1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)^{\tau} \\ \bar{e}_{6k+5,6k+6}^{\varphi} &= B_{6k+5,6k+6}^{\varphi} B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)^{\tau}, \\ \bar{e}_{6k+7,6k+8}^{\varphi} &= B_{6k+7,6k+8}^{\varphi} B_{6k+5,6k+6}^{\varphi} B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)^{\tau}, \end{aligned} \quad (38)$$

с начальными условиями (30) для $\{\bar{\epsilon}_{2m+1,2m+2}^\varphi\}_{m=0}^\infty$. Вследствие чего компоненты крайних частей дают двадцать четыре подпоследовательности

i	3	4	5	6	7	8
ϵ_{6k+i}^{++}	1	0	1	1	0	0
ϵ_{6k+i}^{+-}	0	0	0	0	0	1
ϵ_{6k+i}^{+}	-1	0	-1	-1	0	0
ϵ_{6k+i}^{-}	0	0	0	0	0	-1

(39)

С помощью первых равенств из (25) и (26) выберем разности из этой таблицы с такими свойствами, что их сумма с увеличением числа слагаемых неограничено увеличивалась. Этот метод выбора аналогичен методу, применяемому в лемме 1 для выбора таких векторов, что абсцисса конечной точка аппроксимируемого отрезка принадлежала проекции этого вектора на OX .

Ниже обозначение $\bar{\xi}_n^{\pm\pm,\varphi}$ говорит о том, что $\epsilon_n^{\pm\pm,\varphi}$ на следующем шаге разлагается через одно из первых равенств из (25) или (26) — все зависит от четности n . С помощью первых равенств (25) и (26) с учетом результатов таблицы (39) для любого $m \in \mathbb{N}$ построим последовательность разложений разностей в сумму разностей с меньшими с меньшими индексами:

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_{6m+5}^{++,\varphi} &\Rightarrow \epsilon_{6m+3}^{++,\varphi} + \bar{\xi}_{6m+4}^{--,\varphi} \Rightarrow 1 + \epsilon_{6m+3}^{--,\varphi} + \bar{\xi}_{6(m-1)+8}^{++,\varphi} \Rightarrow \dots \Rightarrow 1 + \bar{\xi}_{6(m-1)+5}^{++,\varphi} \\
 &\Rightarrow 1 + \epsilon_{6(m-1)+3}^{++,\varphi} + \bar{\xi}_{6(m-1)+3}^{--,\varphi} + \bar{\xi}_{6(m-2)+8}^{++,\varphi} \Rightarrow \dots \Rightarrow 2 + \bar{\xi}_{6(m-2)+5}^{++,\varphi} \Rightarrow \dots \\
 &\dots \Rightarrow m - 1 + \epsilon_{6(m-(m-1))+3}^{++,\varphi} + \bar{\xi}_{6(m-(m-1))+3}^{--,\varphi} + \bar{\xi}_{6(m-(m-1)-1)+8}^{++,\varphi} \Rightarrow \\
 &\qquad\qquad\qquad m + \epsilon_3^{++,\varphi} + \epsilon_3^{--,\varphi} + \epsilon_2^{++,\varphi} \Rightarrow m + 1.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=0}^m (\epsilon_{6(m-k)+3}^{++,\varphi} + \epsilon_{6(m-k)+3}^{--,\varphi}) = m + 1.
 \tag{41}$$

Слагаемые под суммой являются разностями клетчатых областей, с такими, например, определены векторами:

$$\begin{aligned}
 &\bar{e}_{6m+3}^\varphi(0; 0), \bar{e}_{6m+3}^\varphi(q_{6m}^{\varphi,-}; p_{6m}^{\varphi,-}), \bar{e}_{6(m-1)+3}^\varphi(2q_{6m}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-1)+3}^\varphi(2 \\
 &q_{6m}^{\varphi,-} + q_{6(m-1)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-2)+3}^\varphi(2 \sum_{k=0}^1 q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-2)+3}^\varphi(2 \\
 &\sum_{k=0}^1 q_{6(m-k)}^{\varphi,-} + q_{6(m-2)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \dots, \bar{e}_3^\varphi(2 \sum_{k=0}^{m-1} q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \\
 &\bar{e}_3^\varphi(2 \sum_{k=0}^{m-1} q_{6(m-k)}^{\varphi,-} + q_0^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_2^\varphi(2 \sum_{k=0}^m q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p).
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Совокупность этих векторов является ломанной $L(A(\varphi Q_{\varphi,m}), B^*)$ с началом $A(\varphi Q_m^\varphi) = (0; 0)$ и концом $B^* = (Q_m^\varphi; 2 \sum_{k=0}^m p_{6(m-k)}^{\varphi,-} + p_{-1}^{\varphi,-})$, где $Q_m^\varphi = 2 \sum_{k=0}^m q_{6(m-k)}^{\varphi,-}$. Применяя метод построения левой аппроксимации из леммы 1 получаем, что ломанная $L(A(\varphi Q_m^\varphi), B^*)$ есть левая аппроксимация отрезка $A(\varphi Q_m^\varphi)B(\varphi Q_m^\varphi)$, а поэтому внутри многоугольника $A(\varphi Q_m^\varphi)L(A(\varphi Q_m^\varphi))B^* B(\varphi Q_m^\varphi)$ нет целых точек. Следовательно, разность $u(\varphi Q_{\varphi,m})$ клетчатой области треугольника $A(\varphi Q_{\varphi,m})B(\varphi Q_{\varphi,m})$ равна $m + 1$, тогда в силу предложения 4 справедлива теорема 3 для $\alpha = \varphi$.

6. Заключение

Множество $\mathcal{A} = \{e^{\pm 1}, \text{tg}^{\pm 1}, [a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1} (\neq \frac{\sqrt{5\pm 1}}{2}), [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}, [a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}\}$ удовлетворяет предложению 4.

Если $\alpha_1 = e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots]$, $a_{\alpha_1, 3m-1} = 2m$, $a_{\alpha_1, 3m-2} = a_{\alpha_1, 3m} = 1$, $m \in \mathbb{N}$, то положим $Q_{\alpha,k} = Q_{\alpha_1,k} = q_{\alpha_1, 3+6k}^+$. Левая аппроксимация $L_{\alpha_1}(A(\alpha_1 q_{\alpha_1, 6+6k}), B^-(\alpha_1 q_{\alpha_1, 6+6k})) = \bar{e}_{\alpha_1, 6+6k}(Q_{\alpha_1, k}^+; 0)_{OXUY}$, тогда в силу предложения 3 разность $u(\alpha_1 Q_{\alpha_1, k}) = \epsilon_{\alpha_1, 6+6k}(Q_{\alpha_1, k}^+; 0)$ клетчатой области $\mathbf{U}(q_{\alpha_1, 3+6k}^+)$ треугольника $\Delta(\alpha_1 q_{\alpha_1, 3+6k}^+)$. На основании вычислений, проделанных с

помощью (29), имеем: $\epsilon_{\alpha_1, 6+6k}(q_{\alpha_1, 3+6k}^+; 0) = k + 1$, следовательно, $e \in \mathcal{A}$, а вследствие предложения 5 и $e^{-1} \in \mathcal{A}$.

При $\alpha_2 = \text{tg } 1 = [1; 1, 1, 3, \dots]$, $a_{\alpha_2, 2m} = 1$, $a_{\alpha_2, 2m+1} = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, возьмем $Q_{\alpha_2, k} = q_{\alpha_2, 1+6k}$, а в качестве левой аппроксимации: $L_{\alpha_2}(A(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}), B^-(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k})) = \bar{e}_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0)_{OXU}$ и поэтому $u(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}^-) = \epsilon_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0)$. Первые равенства из (25) и (26) дают рекуррентную формулу $\epsilon_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0) = \epsilon_{\alpha_2, 4+6(k-1)}^{++} + 3k$ с начальным условием $\epsilon_{\alpha_2, 4}^{++} = 0$. Отсюда $u(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}^-) = 3k^2$, что дает $\text{tg}^{\pm 1} 1 \in \mathcal{A}$.

Всюду ниже обозначение $b_n = \lfloor \frac{a_n - 1}{2} \rfloor$ для каждого абзаца задается элементом цепной дроби, рассматриваемой в этом абзаце.

Так как

$$\epsilon_{6(k+1)+3}^{++,-} = 2^{k-1} b_3 b_9 \cdots b_{6(k-1)+3} + \cdots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1, \quad \epsilon_3^{++,-} = 1.$$

Если b_i такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_{6k+3}^{++,-} = \infty$, то выбирая

$$Q_{\alpha_3, k} = q_{\alpha_3, 6k}^- + 1, \quad L_{\alpha_3} A(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k}), B^-(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k}) = \bar{e}_{\alpha_3, 6k+3}(Q_{\alpha_3, k}^+; 0)_{OXU},$$

получаем, что $u^-(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k}) = \epsilon_{6k+3}^{++,-}$ и поэтому $\alpha_3^{\pm 1} \in \mathcal{A}$. Если же b_i такие, что $\epsilon_{6k+3}^{++,-}$ ограничены, то применим метод накопления положительных величин, который применяли при доказательстве при $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

В случае $\alpha_4 = [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]$ ненулевыми разностями являются $\epsilon_{2m+2}^{-\pm+} = \pm 1$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$ при четном q . Применяя тот же метод что и для $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ получаем последовательность $\{Q_{\alpha_4, k}^+\}_{k=1}^\infty$ с $Q_{\alpha_4, k}^+ = \sum_{i=4}^{2k} q_{2k-i}^-$, которая дает $u^+(Q_{\alpha_4, k}^+) = -k$ и, следовательно, $\alpha_4^{\pm 1} \in \mathcal{A}$,

Для $\alpha_5 = [a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]$ разности $\epsilon_{4k+3}(q_{\alpha_5, 4k}^-; 0)_{OXU} = \sum_{i=1}^k (b_{4i-2} + 1)$. Отсюда $Q_{\alpha_5, k} = q_{\alpha_5, 4k}^-$ и $L_{\alpha_5}(A(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k}), B^-(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k})) = \bar{e}_{\alpha_5, 4k}(q_{\alpha_5, 4k}^-; 0)_{OXU}$, что влечет $u(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k}) = \sum_{i=1}^k (b_{4i-2} + 1)$ и $\alpha_5^{\pm 1} \in \mathcal{A}$.

Часть изложенных здесь результатов анонсирована в [14] – [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я., 1978, 4-ое изд. *Цепные дроби*. Наука, Москва, 112 с.
2. Бухштаб А. А., 1966. *Теория чисел*. Просвещение, Москва, 376 с.
3. Нестеренко Ю. В., 2008. *Теория чисел*. Издательский центр “Академия”, Москва, 272 с.
4. Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М., 1983, *Очерк о цепных дробях*. // Квант, Москва, № 5, 16–20 с., № 6, 26–30 с.
5. Михалович Ш. Х., 1967. *Теория чисел*. Высшая школа, Москва, 336 с.
6. Александров П. С, Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. (редакторы), 1951. *Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. Арифметика*. Москва – Ленинград, ГТЛ, 448 с.
7. Васильев Н. Б., 1974. *Вокруг формулы Пика* // Квант, Москва, № 12, С.39–43
8. Вавилов В. В., Устинов А. В., 2006, *Многоугольники на решетках*. МЦНМО, Москва, 72 с.
9. Grunbaum, Branko, and G. C. Shephard., 2001. *Pick's Theorem*. // The American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 2, Mathematical Association of America, 1993, pp. 150–61,

10. Арнольд В. И., 2001. *Ценные дроби*. МЦНМО, Москва, 40 с.
11. Дэвенпорт Г., 1965, *Высшая арифметика. Введение в теорию чисел*. Наука, Москва, 176 с.
12. Клейн Ф., 1987, 4-ое издание. *Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика. Алгебра. Анализ* Наука, Москва, Том I, 432 с.
13. Khovanova T., Konyagin S. 2011 *Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors*. arXiv:1104.0441v1 [math.CO] (4 Apr 2011), pp.1–20.
14. Галламов М. М. *Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.
15. Галламов М. М. *Прямые $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Наума Ильича Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров Аскольда Ивановича Виноградова, Александра Васильевича Малышева и Бориса Фаддевича Скубенко. Тула, 23–29 сентябрь 2019 г. С. 142–245.
16. Галламов М. М. *Прямые $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$ с четными a_n^+ и нечетными $a_n^- = a (\neq 1)$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVIII Международной конференции, посвященная столетию со дня рождения профессоров Бориса Максимовича Бредихина, Василия Ильича Нечаева и Сергея Борисовича Стечкина. Тула, 23–26 сентября 2020 г. С. 261–265.
17. Галламов М. М. *Целочисленная аппроксимация отрезка* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XXI Международной конференции, посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы. Тула, 17–21 мая 2022 г. С. 235–238.

REFERENCES

1. Khinchin A. Ya., 1978, 4 izd. *Zepnyie drobi* [The continued fractions]. Nauka, Moscow, pp. 112.
2. Bukhshtab A. A., 1966. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Prosveschenit, Moscow, pp. 376.
3. Nesterenko Yu. V., 2008. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Izdatel'skiy zentr "Akademiya", Moscow, pp. 272.
4. Nesterenko Yu. V., Nikishin E. N., 1983, *Очерк о ценных дробях*. // Kvant, Moscow, no. 5, pp. 16–20, no. 6, pp. 26–30.
5. Mikhailovich Sh. Kh., 1967. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Vyishaya shkola, Moscow, pp.336.
6. Aleksandrov P. S, Markushevich A. I., Rhinchin A. Ya. (redaktoryi), 1951. *Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. Арифметика* [Encyclopedia of elementary mathematics. Book 1. Arithmetic]. Moscow – Leningrad, TTL, pp. 448.
7. Vasil'ev N. B., 1974. *The circumformula for Pick* // Kvant, Moscow, no. 12, pp.39–43

8. Vavilov V. V., Ustinov A. V., 2006, *Mnogougol'niki nf reshetkakh* [The polygons an lattices]. NZNMO, Moscow, pp.72.
9. Grunbaum, Branko, and G. C. Shephard., 2001. *Pick's Theorem.* // The American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 2, Mathematical Association of America, 1993, pp. 150–61,
10. Arnol'd V. I., 2001. *Zepnyie drobi* [The continued fractions]. NZNMO, Moscow, pp. 40.
11. Davenport H. ., 1965, *The higher arithmetic. An introduction to the theory of numbers.* Harper torchbooks? the science library. Harper & Brothers, New York, pp. 176.
12. Klein F., 1987, 4-ое издание. *Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика. Алгебра. Анализ* [Elementary mathematics in terms of higher. Arithmetic. Algebra. Analysis] Nauka, Moscow, Vol. I, pp. 432.
13. Khovanova T., Konyagin S. 2011 *Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors.* arXiv:1104.0441v1 [math.CO] (4 Apr 2011), pp.1–20.
14. Gallamov M. M. *Straight line $y = e \cdot x + t$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, priloghenuya i problemy istorii». Materialyi XVI Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 80-letiyu so dnya roghdeniya professora Misheelya Deza. Tula, 13–18 maya 2019 g. S. 247–250.
15. Gallamov M. M. *Straight line $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + t$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, priloghenuya i problemy istorii». Materialyi XVII Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 100-letiyu so dnya roghdeniya professora Nauma П'cha Fel'dmana, 90-letiyu so dnya roghdeniya professorov Askol'da Ivanovicha Vinogradova, Aleksandra* Vasil'evicha Malysheva i Borisa Faddeevicha Skubenko. Tula, 23–29 sentyabr' 2020 g.
16. Галламов М. М. *Straight line $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$ s chetnymi a_n^+ i nechetnymi $a_n^- = a (\neq 1)$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, priloghenuya i problemy istorii». Materialyi XVIII Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 100-letiyu so dnya roghdeniya professorov Borisa Maksimovicha Bredihina, Vasikiya Iikicha Nechatva i Sergeya Borisovicha Stechkina. Tula, 23–26 sentyabrya 2020 g. S. 261–265.
17. Gallamov M. M. *Zelochislennaya approksimaziya otreska* /// «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, priloghenuya i problemy istorii». Materialyi XXI Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 85-letiyu so dnya roghdeniya professora A. A. Karazuby. Tula, 17–21 maya 2022 g. S. 235–238.

Получено: 07.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-39-51

Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье — Данкля и его обобщения¹

Д. В. Горбачев (г. Тула)

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Классический результат Хаусдорфа–Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1, 2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q}]$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди–Литлвуда.

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1, \infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Voas (1972) предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{-\gamma} f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Lifyand и S. Tikhonov (2011) доказали многомерную гипотезу Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f : $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \|_p \asymp \| |\cdot|^{-\gamma} f \|_p$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана E. Lifyand и S. Tikhonov (2008). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана L. De Carli, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov и S. Tikhonov (2016) обобщили данные результаты были на случай (κ, a) -обобщенного преобразования Фурье. A. Debernardi (2019) изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса рассматривалась для функций на полуоси. В данной работе она изучается на всей оси. Для этого рассматривается интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Также показывается, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ, a) -обобщенного преобразования Фурье, при $a = 2$ дающее преобразование Данкля. В итоге имеем

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_{\kappa, a}(f) \|_{p, \kappa, a} \asymp \| |\cdot|^{-\gamma} f \|_{p, \kappa, a},$$

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

где $\gamma \in (\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a} + \frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p})$, $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Ключевые слова: неравенство Фурье, гипотеза Боаса, неравенство Харди, неравенство Беллмана, преобразование Данкля, обобщенное преобразование Фурье.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев. Гипотеза Боаса на оси для преобразования Фурье — Данкля и его обобщения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 39–51.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-39-51

Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization²

D. V. Gorbachev (Tula)

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

The question of integrability of the Fourier transform and other integral transformations $\mathcal{F}(f)$ on classes of functions in weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ is a fundamental problem of harmonic analysis. The classical Hausdorff–Young result says that if a function f from $L^p(\mathbb{R}^d)$ with $p \in [1, 2]$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. For $p > 2$ the Fourier transform in the general situation will be a generalized function. The Fourier transform can be defined as an usual function for $p > 2$ by considering the weighted spaces $L^p(\mathbb{R}^d)$. In particular, the classical Pitt inequality implies that if $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ and function f is integrable in $L^p(\mathbb{R}^d)$ with power weight $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, then its Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ belongs to the space $L^q(\mathbb{R}^d)$ with weight $|x|^{-q\gamma}$. The case $p = q$ corresponds to the well-known Hardy–Littlewood inequality.

The question arises of extending the conditions for the integrability of the Fourier transform under additional conditions on the functions. In the one-dimensional case, G. Hardy and J. Littlewood proved that if f is an even nonincreasing function tending to zero and $f \in L^p(\mathbb{R})$ for $p \in (1, \infty)$, then $\mathcal{F}(f)$ belongs to $L^p(\mathbb{R})$ with weight $|x|^{p-2}$. R. Boas (1972) suggested that for a monotone function f the membership $|\cdot|^{-\gamma-\delta} f \in L^p(\mathbb{R})$ is equivalent to $|\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ if and only if $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. The one-dimensional Boas conjecture was proved by Y. Sagher (1976).

D. Gorbachev, E. Lifyand and S. Tikhonov (2011) proved the multidimensional Boas conjecture for radial functions, moreover, on a wider class of general monotone non-negative radial functions f : $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \|_p \asymp \| |\cdot|^{-\gamma-\delta} f \|_p$ if and only if $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, where $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. For radial functions, the Fourier transform is expressed in terms of the Bessel transform of half-integer order, which reduces to the classical Hankel transform and includes the cosine and sine Fourier transforms. For the latter, the Boas conjecture was proved by E. Lifyand and S. Tikhonov (2008). For the Bessel–Hankel transform with an arbitrary order, the Boas conjecture was proved by L. De Carli, D. Gorbachev and S. Tikhonov (2013). D. Gorbachev, V. Ivanov and S. Tikhonov (2016) generalized these results to the case of (κ, a) -generalized

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Fourier transform. A. Debernardi (2019) studied the case of the Hankel transform and general monotone alternating functions.

So far, the Boas conjecture has been considered for functions on the semiaxis. In this paper, it is studied on the entire axis. To do this, we consider the integral Dunkl transform, which for even functions reduces to the Bessel–Hankel transform. It is also shown that the Boas conjecture remains valid for the (κ, a) -generalized Fourier transform, which gives the Dunkl transform for $a = 2$. As a result, we have

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_{\kappa, a}(f) \|_{p, \kappa, a} \asymp \| |\cdot|^{\gamma-\delta} f \|_{p, \kappa, a},$$

where $\gamma \in (\frac{d_{\kappa, a}}{p} - \frac{d_{\kappa, a} + \frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa, a}}{p})$, $\delta = d_{\kappa, a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa, a} = 2\kappa + a - 1$.

Keywords: Fourier inequality, Boas conjecture, Hardy inequality, Bellman inequality, Dunkl transform, generalized Fourier transform.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2022, “Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 39–51.

1. Введение

Вопрос интегрируемости преобразования Фурье, Данкля и других интегральных преобразований $\mathcal{F}(f)$ на классах функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ является фундаментальной проблемой гармонического анализа. Это обусловлено важными приложениями в функциональном анализе, уравнениях в частных производных, теории приближений (см., например, наши недавние работы [5, 8, 9] и библиографию там).

Классический результат Хаусдорфа–Юнга говорит, что если функция f из $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1, 2]$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. При $p > 2$ преобразование Фурье в общей ситуации будет обобщенной функцией. Определить преобразование Фурье как обычную функцию при $p > 2$ можно за счет рассмотрения весовых пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$. В частности, из классического неравенства Питта следует, что если $p, q \in (1, \infty)$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q})$ и функция f интегрируема в $L^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом $|x|^{p(\gamma-\delta)}$, то ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$ с весом $|x|^{-q\gamma}$. Случай $p = q$ отвечает известному неравенству Харди–Литлвуда. Данные результаты для преобразования Фурье подробно изложены в работе [1], для интегральных преобразований из задачи Штурма–Лиувилля в [12].

Возникает вопрос о расширении условий интегрируемости преобразования Фурье при дополнительных условиях на функции. В одномерном случае G. Hardy и J. Littlewood доказали, что если f — четная невозрастающая стремящаяся к нулю функция и $f \in L^p(\mathbb{R})$ для $p \in (1, \infty)$, то $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ с весом $|x|^{p-2}$. R. Boas [2] предположил, что для монотонной функции f принадлежность $|\cdot|^{\gamma-\delta} f \in L^p(\mathbb{R})$ эквивалентна $|\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \in L^p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in (-\frac{1}{p'}, \frac{1}{p})$. Одномерная гипотеза Боаса была доказана Y. Sagher [15].

В работе [11] доказана многомерная гипотеза Боаса для радиальных функций, причем на более широком классе обобщенно монотонных неотрицательных радиальных функций f : для $1 < p < \infty$ имеем

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}(f) \|_p \asymp \| |\cdot|^{\gamma-\delta} f \|_p \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $\gamma \in (\frac{d}{p} - \frac{d+1}{2}, \frac{d}{p})$, где $\delta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$. Эквивалентность (1) означает, что если конечна правая часть, то преобразование Фурье определено как функция и ограничено в весовой норме. И, наоборот, если преобразование Фурье определено как функция (здесь

требуется дополнительное условие интегрируемости функции, см. [11]) и ограничено в весовой норме, то весовая норма функции ограничена.

Для радиальных функций преобразование Фурье выражается через преобразование Бесселя полуцелого порядка, которое сводится к классическому преобразованию Ханкеля и включает косинус- и синус-преобразования Фурье. Для последних гипотеза Боаса доказана в работе [13] (см. также [6, 14]). Для преобразования Бесселя–Ханкеля с произвольным порядком гипотеза Боаса доказана в работе [4]. Ее решение имеет тот же вид, что и (1), только нужно взять преобразование Бесселя–Ханкеля порядка $\frac{d}{2} - 1$, использовать норму $L^p(\mathbb{R}_+, x^{d-1} dx)$ и считать, что $d \geq 1$ не обязательно целое. В [7] данные результаты были обобщены на случай (κ, a) -обобщенного преобразования Фурье. А. Debernardi [3] изучил случай преобразования Ханкеля и обобщенно монотонных знакопеременных функций.

До сих пор гипотеза Боаса по-прежнему рассматривалась для функций на полуоси. Интересно доказать ее в случае всей оси. Для этого рассмотрим интегральное преобразование Данкля, которое для четных функций сводится к преобразованию Бесселя–Ханкеля. Основным утверждением работы является теорема 1. В разделе 4 также будет показано, что гипотеза Боаса остается справедливой для (κ, a) -обобщенного преобразования Фурье.

Через c, C, C_1, \dots будем обозначать положительные константы, которые не зависят от существенных параметров и могут меняться от места к месту, $C(a)$ означает константу, зависящую от параметра a .

2. Гипотеза Боаса для преобразования Данкля

Пусть $\kappa \geq 0$. Преобразование Данкля на оси определяется равенством

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x), \quad y \in \mathbb{R},$$

где

$$d\mu_\kappa(x) = \frac{|x|^{2\kappa} dx}{2^{\kappa+1/2} \Gamma(\kappa + 1/2)}, \quad e_\kappa(t) = j_{\kappa-1/2}(t) + \frac{it}{2\kappa + 1} j_{\kappa+1/2}(t),$$

$j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) t^{-\alpha} J_\alpha(t)$ — нормированная условием $j_\alpha(0) = 1$ функция Бесселя порядка α . Заметим, что для обратного преобразования Данкля имеем $\mathcal{F}_\kappa^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_\kappa(f)(-x)$.

При $\kappa = 0$ получаем $e_\kappa(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ и случай преобразования Фурье. Для четных функций $f(x) = f(-x)$ имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = 2 \int_{\mathbb{R}_+} f(x) j_{\kappa-1/2}(xy) d\mu_\kappa(x), \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда при $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$ в силу $j_{-1/2}(t) = \cos t$ и $j_{1/2}(t) = t^{-1} \sin t$ выводятся косинус- и синус-преобразования Фурье соответственно.

Отметим, что нормированная функция Бесселя $j_\alpha(\lambda t)$ является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля на полуоси со степенным весом

$$\frac{1}{t^{2\alpha+1}} \frac{d}{dt} \left(t^{2\alpha+1} \frac{d}{dt} j_\alpha(\lambda t) \right) = -\lambda^2 j_\alpha(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad j'_\alpha(0) = 0.$$

В отличие от этого ядро преобразования Данкля $e_\kappa(\lambda t)$ является собственной функцией на всей оси для дифференциально-разностного оператора Данкля

$$T_\kappa f(t) = f'(t) + \frac{\kappa}{t} (f(t) - f(-t)),$$

а именно

$$T_\kappa e_\kappa(\lambda t) = i\lambda e_\kappa(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad e_\kappa(0) = 1.$$

По аналогии с четным случаем (см. [11]) введем класс $BV_{loc,0}$ функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ локально ограниченной вариации, таких что $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Функцию $f \in BV_{loc,0}$ назовем обобщенно монотонной ($f \in GM$), если для всех $t > 0$

$$\int_{|x| \geq t} |df(x)| \leq C \int_{|x| \geq t/c} \frac{|f(x)|}{|x|} dx < \infty. \quad (2)$$

Здесь $C > 0$ и $c > 1$ — некоторые константы, зависящие от f .

Заметим, что интеграл Римана–Стилтьеса $\int g(x) |df(x)|$ понимается как предел интегральных сумм $\sum_k g(x_k) |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$.

Функции GM ограничены вне окрестности нуля, так как, например, при $t > 0$

$$|f(t)| = \left| \int_t^\infty df(x) \right| \leq \int_t^\infty |df(x)| < \infty.$$

Если функция $f(x)$ неубывает при $x \leq 0$ и невозрастает при $x \geq 0$, то $f \in GM$, так как

$$\begin{aligned} \int_t^\infty |df(x)| &= f(t), & \int_{-\infty}^{-t} |df(x)| &= f(-t), \\ \int_{t/c}^\infty \frac{|f(x)|}{|x|} dx &\geq \int_{t/c}^t \frac{|f(x)|}{|x|} dx \geq f(t) \int_{t/c}^t \frac{dx}{x} = f(t) \ln c, \\ \int_{-\infty}^{-t/c} \frac{|f(x)|}{|x|} dx &\geq \int_{-t}^{-t/c} \frac{|f(x)|}{|x|} dx \geq f(-t) \int_{-t}^{-t/c} \frac{dx}{|x|} = f(-t) \ln c, \end{aligned}$$

что влечет условие (2).

Пусть $L^p(\mathbb{R}, d\mu_\kappa)$ — пространство функций с нормой $\|f\|_{p,\kappa} = (\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_\kappa)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|f\|_{\infty,\kappa} = \text{ess sup}_{\mathbb{R}} |f|$. Рассмотрим вопрос весовой интегрируемости преобразования Данкля для обобщенно монотонных функций в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_\kappa)$. Напомним, что для четных функций имеем изученный в работе [4] случай преобразования Бесселя–Ханкеля. Следующая основная теорема решает гипотезу Боаса для неотрицательных обобщенно монотонных функций. В ней $d_\kappa = 2\kappa + 1$ — размерность Данкля.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\kappa \geq 0$, $\delta = d_\kappa(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$.

Пусть функция $f \in GM$. Тогда

(а) Если

$$\gamma \in \left(\frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa + 1}{2}, \frac{d_\kappa}{p} \right) \quad (3)$$

и $\| |\cdot|^{-\gamma} f \|_{p,\kappa} < \infty$, то

$$\int_{|x| \leq 1} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^\kappa |df(x)| < \infty, \quad (4)$$

преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция и $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} < \infty$.

(б) Пусть выполнено (4). Тогда $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля. Если при этом $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$, $f \geq 0$ и $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} < \infty$, то $\| |\cdot|^{-\delta} f \|_{p,\kappa} < \infty$.

(с) Условие (3) является необходимым для выполнения (а) и (б) одновременно.

Заметим, что по сравнению с [11, 4] в теорему включены крайние случаи $p = 1, \infty$.

3. Доказательство теоремы 1

Будем действовать по схеме работ [11, 4]. Вначале установим ряд лемм.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in BV_{loc,0}$ удовлетворяет условию (4). Тогда ее преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ существует в смысле главного значения, непрерывно вне окрестности нуля и оценивается для всех $y \neq 0$ как

$$|\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| \leq C \left(\int_{|x| \leq 1/|y|} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \frac{1}{|y|^{\kappa+1}} \int_{|x| \geq 1/|y|} |x|^\kappa |df(x)| \right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{|x| \leq 1/|y|} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x) + \int_{|x| \geq 1/|y|} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x).$$

Так как на оси $|e_\kappa(t)| \leq 1$, то

$$\left| \int_{|x| \leq 1/|y|} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x) \right| \leq C \int_{|x| \leq 1/|y|} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx.$$

Покажем, что

$$\left| \int_{|x| \geq 1/|y|} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x) \right| \leq \frac{C}{|y|^{\kappa+1}} \int_{|x| \geq 1/|y|} |x|^\kappa |df(x)|.$$

Сделаем это только при $x, y > 0$, в остальных случаях действуем аналогично.

Имеем

$$\int_{1/y}^{\infty} f(x) e_\kappa(-xy) d\mu_\kappa(x) = C \int_{1/y}^{\infty} f(x) e_\kappa(-xy) x^{2\kappa} dx = C \int_{1/y}^{\infty} f(x) dK_y(x), \quad (6)$$

где

$$K_y(x) = \int_0^x e_\kappa(-\xi y) \xi^{2\kappa} d\xi = \frac{1}{y^{2\kappa+1}} \int_0^{xy} e_\kappa(-\xi) \xi^{2\kappa} d\xi, \quad xy \geq 1. \quad (7)$$

Для $t = xy$ находим

$$\begin{aligned} \int_0^t e_\kappa(-\xi) \xi^{2\kappa} d\xi &= \int_0^t \left(j_{\kappa-1/2}(\xi) - \frac{i\xi}{2\kappa+1} j_{\kappa+1/2}(\xi) \right) \xi^{2\kappa} d\xi \\ &= C_1 \int_0^t J_{\kappa-1/2}(\xi) \xi^{\kappa+1/2} d\xi - iC_2 \int_0^t J_{\kappa+1/2}(\xi) \xi^{\kappa+1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть

$$\psi(t) = \int_0^t J_{\alpha+b}(s) s^{\alpha+1} ds, \quad \alpha \geq -1/2, \quad b \geq 0.$$

В [4, лемма 3.1] установлено, что $|\psi(t)| \leq Ct^{\alpha+1/2}$ для $t \geq 1$. Отсюда и из (8) выводим

$$\left| \int_0^t e_\kappa(-\xi) \xi^{2\kappa} d\xi \right| \leq Ct^\kappa, \quad t \geq 1,$$

что по (7) влечет

$$|K_y(x)| \leq \frac{C(xy)^\kappa}{y^{2\kappa+1}}, \quad xy \geq 1. \quad (9)$$

Оценим теперь интегралы из (6). Имеем

$$\int_{1/y}^{\infty} f(x) dK_y(x) = f(x)K_y(x) \Big|_{1/y}^{\infty} - \int_{1/y}^{\infty} K_y(x) df(x).$$

Здесь

$$|K_y(1/y)| = \frac{1}{y^{2\kappa+1}} \left| \int_0^1 e_{\kappa}(-\xi) \xi^{2\kappa} d\xi \right| = \frac{C}{y^{2\kappa+1}},$$

откуда

$$|f(1/y)K_y(1/y)| = \left| \int_{1/y}^{\infty} df(x) \right| |K_y(1/y)| \leq \frac{C}{y^{\kappa+1}} \int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa} |df(x)|.$$

Далее по (9) и (4)

$$|f(x)K_y(x)| \leq \frac{Cx^{\kappa}}{y^{\kappa+1}} \int_x^{\infty} |df(u)| \leq \frac{C}{y^{\kappa+1}} \int_x^{\infty} u^{\kappa} |df(u)| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\left| \int_{1/y}^{\infty} K_y(x) df(x) \right| \leq \frac{C}{y^{\kappa+1}} \int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa} |df(x)|.$$

Таким образом,

$$\left| \int_{1/y}^{\infty} f(x) e_{\kappa}(-xy) d\mu_{\kappa}(x) \right| \leq \frac{C}{y^{\kappa+1}} \int_{1/y}^{\infty} x^{\kappa} |df(x)|.$$

Неравенство (5) установлено. Оно влечет существование преобразования Данкля $\mathcal{F}_{\kappa}(f)$ в смысле главного значения (с несвязанными пределами в нуле и бесконечности) и его непрерывность вне окрестности нуля. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть неотрицательная функция $f \in BV_{loc,0}$ удовлетворяет условию (4). Тогда для $a > 0$

$$\int_{1 \leq |ax| \leq 2} \frac{f(x)}{|x|} dx \leq C \int_{|y| \leq 2a} |\mathcal{F}_{\kappa}(f)(y)| |y|^{2\kappa} dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [4, лемма 3.2] построена четная непрерывная функция $K: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (ядро типа Фейера), зависящая от параметра $a > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\text{supp } K \subset [-2a, 2a], \quad K(t) \leq K(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}_{\kappa}(K)(s) = C(\kappa) a^{2\kappa+1} j_{\kappa+1/2}^2(as), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_{\kappa}(K)(s) \geq ca^{2\kappa+1}, \quad 1 \leq |as| \leq 2.$$

Здесь учтена взаимосвязь между преобразованиями Данкля и Бесселя–Ханкеля для четных функций. Из свойств нормированной функции Бесселя следует, что

$$\mathcal{F}_{\kappa}(K)(s) \leq C, \quad |as| \leq 1, \quad \mathcal{F}_{\kappa}(K)(s) \leq C|s|^{-2\kappa-2}, \quad |as| \geq 1.$$

Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы. Тогда по лемме 1 для нее определено непрерывное преобразование Данкля. Далее из самосопряженности преобразования Данкля следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}_{\kappa}(K)(x) d\mu_{\kappa}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\kappa}(f)(y) K(y) d\mu_{\kappa}(y).$$

Для обоснования этого равенства достаточно доказать, что интегралы сходятся абсолютно. Для правого интеграла это следует из ограниченности носителя K . Из свойств $\mathcal{F}_{\kappa}(K)$ и ограниченности f вне окрестности нуля левый интеграл с точностью до константы оценивается

$$\int_{|x| \leq 1} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)| |x|^{-2} dx < \infty.$$

Из свойств K следует, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\kappa(f)(y) K(y) d\mu_\kappa(y) \right| \leq C \int_{|y| \leq 2a} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| |y|^{2\kappa} dy.$$

С учетом неотрицательности f

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}_\kappa(K)(x) d\mu_\kappa(x) \geq ca^{2\kappa+1} \int_{1 \leq |ax| \leq 2} f(x) |x|^{2\kappa} dx \geq c \int_{1 \leq |ax| \leq 2} \frac{f(x)}{|x|} dx.$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3 ([11]). Если $t > 0$, $\nu \geq 0$, $f \in GM$, $\int_{|x| \geq t/c} |x|^{\nu-1} |f(x)| dx < \infty$, то

$$\int_{|x| \geq t} |x|^\nu |df(x)| \leq C \int_{|x| \geq t/c} |x|^{\nu-1} |f(x)| dx,$$

где $c > 1$ — константа функции из GM-условия (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в [11] не приведено прямое доказательство этого факта, сделаем это. Достаточно ограничиться случаем $\nu > 0$, $x > 0$. Тогда, используя GM-условие (2), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_t^\infty x^\nu |df(x)| &= - \int_t^\infty x^\nu d \int_x^\infty |df(u)| \\ &= t^\nu \int_t^\infty |df(u)| - \lim_{x \rightarrow \infty} x^\nu \int_x^\infty |df(u)| + \nu \int_t^\infty x^{\nu-1} \int_x^\infty |df(u)| dx \\ &\leq C \left(t^\nu \int_{t/c}^\infty u^{-1} |f(u)| du + \lim_{x \rightarrow \infty} x^\nu \int_{x/c}^\infty u^{-1} |f(u)| du + \int_t^\infty x^{\nu-1} \int_{x/c}^\infty u^{-1} |f(u)| du dx \right) \\ &\leq C \left(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1} |f(u)| du + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x/c}^\infty u^{\nu-1} |f(u)| du + \int_{t/c}^\infty \int_x^\infty u^{-1} |f(u)| dx^\nu \right) \\ &= C \left(\int_{t/c}^\infty u^{\nu-1} |f(u)| du + (t/c)^\nu \int_{t/c}^\infty u^{-1} |f(u)| du + \int_{t/c}^\infty u^{\nu-1} |f(u)| du \right) \leq C \int_{t/c}^\infty u^{\nu-1} |f(u)| du. \end{aligned}$$

Лемма 3 установлена.

ЛЕММА 4. Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in GM$ и $\| |\cdot|^{\gamma-\delta} f \|_{p,\kappa} < \infty$ то условие (4) выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично случаю четных функций [4, замечание 3.1]). По лемме 3

$$\begin{aligned} I &= \int_{|x| \leq 1} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^\kappa |df(x)| \leq C \left(\int_{|x| \leq 1} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \int_{|x| \geq 1/c} |x|^{\kappa-1} |f(x)| dx \right) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{2\kappa}}{(1+|x|)^{\kappa+1}} |f(x)| dx = C \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\kappa+1}} d\mu_\kappa(x), \end{aligned}$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$I \leq C \left\| \frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}} \right\|_{p',\kappa} \| |x|^{\gamma-\delta} f \|_{p,\kappa}.$$

Здесь с учетом (3)

$$d_\kappa \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) - \frac{d_\kappa}{p} < \delta - \gamma < d_\kappa \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) - \frac{d_\kappa}{p} + \frac{d_\kappa + 1}{2}$$

или

$$-\frac{2\kappa+1}{p'} < \delta - \gamma < -\frac{2\kappa+1}{p'} + \kappa + 1.$$

При $p' = \infty$ это влечет ограниченность функции $\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}}$. При $p' < \infty$ в окрестности нуля

$$J = \left(\frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}} \right)^{p'} |x|^{2\kappa} \asymp |x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa},$$

что интегрируемо в силу $(\delta - \gamma)p' + 2\kappa > -1$. В окрестности бесконечности имеем

$$J \asymp |x|^{(\delta-\gamma)p'+2\kappa-(\kappa+1)p'},$$

что также интегрируемо в силу $(\delta - \gamma)p' + 2\kappa - (\kappa + 1)p' < -1$.

Таким образом, $\left\| \frac{|x|^{\delta-\gamma}}{(1+|x|)^{\kappa+1}} \right\|_{p',\kappa} < \infty$ при $1 \leq p' \leq \infty$. Лемма 4 доказана.

Теперь докажем части (а)–(с) теоремы 1 для $f \in GM$, $1 \leq p \leq \infty$.

(а) Пусть $\| |\cdot|^{-\delta} f \|_{p,\kappa} < \infty$. Тогда по лемме 4

$$\int_{|x| \leq 1} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^\kappa |df(x)| < \infty,$$

откуда по лемме 1 получаем, что преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения как непрерывная вне окрестности нуля функция.

Покажем, что $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} < \infty$. Для этого воспользуемся весовыми неравенствами Харди и Беллмана для меры Данкля [9, теорема 3.1]: для $1 \leq p \leq \infty$

$$\| |x|^{-\alpha} H_{|x|} f \|_{p,\kappa} \leq C \| |x|^{d_\kappa - \alpha} f \|_{p,\kappa}, \quad \alpha > \frac{d_\kappa}{p},$$

$$\| |x|^{-\alpha} B_{|x|} f \|_{p,\kappa} \leq C \| |x|^{d_\kappa - \alpha} f \|_{p,\kappa}, \quad \alpha < \frac{d_\kappa}{p},$$

где интегральные операторы Харди H и Беллмана B определяются равенствами

$$H_{|x|} f = \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_\kappa(y), \quad B_{|x|} f = \int_{|y| \geq |x|} f(y) d\mu_\kappa(y).$$

Отсюда с помощью замены переменного для соответствующих α получаем

$$\| |x|^{\alpha-2d_\kappa/p} H_{1/|x|} f \|_{p,\kappa} \leq C \| |x|^{d_\kappa - \alpha} f \|_{p,\kappa}, \quad \| |x|^{\alpha-2d_\kappa/p} B_{1/|x|} f \|_{p,\kappa} \leq C \| |x|^{d_\kappa - \alpha} f \|_{p,\kappa}. \quad (10)$$

По леммам 1, 3

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| &\leq C \left(\int_{|x| \leq 1/|y|} |f(x)| |x|^{2\kappa} dx + \frac{1}{|y|^{\kappa+1}} \int_{|x| \geq 1/|y|} |x|^\kappa |df(x)| \right) \\ &\leq C \left(\int_{|x| \leq 1/|y|} |f(x)| d\mu_\kappa(x) + \frac{1}{|y|^{\kappa+1}} \int_{|x| \geq 1/(c|y|)} |x|^{-\kappa-1} |f(x)| d\mu_\kappa(x) \right) \\ &\leq C (H_{1/|y|} f + |y|^{-\kappa-1} B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1} f)), \end{aligned}$$

откуда

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} \leq C (\| |y|^{-\gamma} H_{1/|y|} f \|_{p,\kappa} + \| |y|^{-\gamma-\kappa-1} B_{1/(c|y|)}(|\cdot|^{-\kappa-1} f) \|_{p,\kappa}).$$

Воспользуемся (10) с $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma > \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора H и $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} - \gamma - \kappa - 1 < \frac{d_\kappa}{p}$ в случае оператора B . Отсюда $\frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2} < \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$, что влечет условие (3). Теперь вспоминая, что $\delta = d_\kappa(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}) = d_\kappa(\frac{2}{p} - 1)$, находим

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} \leq C (\| |x|^{d_\kappa - (2d_\kappa/p - \gamma)} f \|_{p,\kappa} + \| |x|^{d_\kappa - (2d_\kappa/p - \gamma - \kappa - 1) - \kappa - 1} f \|_{p,\kappa}) \leq C \| |x|^{\gamma - \delta} f \|_{p,\kappa}.$$

Часть (а) установлена.

(b) Пусть выполнено (4). Тогда по лемме 1 преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa(f)$ определено в смысле главного значения и непрерывно вне окрестности нуля.

Далее пусть $f \geq 0$ и $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} < \infty$. Покажем, что $\| |x|^{\gamma - \delta} f \|_{p,\kappa} < \infty$. Для этого воспользуемся несложно проверяемыми неравенствами (см. также [4])

$$f(x) \leq \int_{|u| \geq |x|} |df(u)| \leq C \int_{|u| \geq |x|/c} \frac{f(u)}{|u|} du \leq C \int_{|u| \geq |x|/(2c)} \int_{|u| \leq |v| \leq 2|u|} \frac{f(v)}{|v|} dv \frac{du}{|u|}.$$

Отсюда по лемме 2

$$f(x) \leq C \int_{|u| \geq |x|/(2c)} \int_{|y| \leq 2|u|} |\mathcal{F}_\kappa(f)(y)| d\mu_\kappa(y) \frac{du}{|u|} = CB_{|x|/(2c)}(|u|^{-d_\kappa} H_{2/|u|} \mathcal{F}_\kappa(f)).$$

Вновь воспользуемся неравенствами Харди и Беллмана. Для $\alpha = \delta - \gamma < \frac{d_\kappa}{p}$

$$\| |x|^{\gamma - \delta} f \|_{p,\kappa} \leq C \| |u|^{d_\kappa - \alpha} (|u|^{-d_\kappa} H_{2/|u|} \mathcal{F}_\kappa(f)) \|_{p,\kappa} = C \| |u|^{\gamma - \delta} H_{2/|u|} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa}.$$

Здесь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$, что шире $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - \frac{d_\kappa+1}{2}$, так как $d_\kappa \geq 1$. Теперь для $\alpha = \frac{2d_\kappa}{p} + \gamma - \delta > \frac{d_\kappa}{p}$

$$\| |u|^{\gamma - \delta} H_{2/|u|} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} \leq C \| |x|^{d_\kappa - \alpha} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa} = C \| |x|^{-\gamma} \mathcal{F}_\kappa(f) \|_{p,\kappa},$$

где вновь $\gamma > \frac{d_\kappa}{p} - d_\kappa$. Часть (b) установлена.

Часть (с) вытекает из того факта, что для четных функций имеем случай преобразования Бесселя–Ханкеля, где необходимость условия (3) доказана в работе [4].

Теорема 1 доказана.

4. Случай (κ, a) -обобщенного преобразования Фурье

Теорему 1 несложно обобщить на случай одномерного (κ, a) -обобщенного (деформированного) преобразования Фурье (см. [7])

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a} \int_{\mathbb{R}} f(x) B_{\kappa,a}(x, y) |x|^{2\kappa+a-2} dx,$$

где $\kappa \geq 0$, $a > 0$, $2\kappa + a > 1$ и ядро $B_{\kappa,a}(x, y) = b_{\kappa,a}(xy)$,

$$b_{\kappa,a}(t) = j_{\frac{2\kappa-1}{a}} \left(\frac{2}{a} |t|^{\frac{a}{2}} \right) + \frac{\Gamma(\frac{2\kappa-1}{a} + 1)}{\Gamma(\frac{2\kappa+1}{a} + 1)} \frac{t}{(ai)^{\frac{2}{a}}} j_{\frac{2\kappa+1}{a}} \left(\frac{2}{a} |t|^{\frac{a}{2}} \right).$$

При $a = 2$ имеем преобразование Данкля.

Пусть $\frac{2\kappa-1}{a} \geq -\frac{1}{2}$. Случай четных GM-функций изучен в работе [7], где обобщенное преобразование Фурье сводится к деформированному преобразованию Бесселя–Ханкеля

$$\mathcal{F}_{\kappa,a}(f)(y) = c_{\kappa,a} \int_{\mathbb{R}} f(x) j_{\frac{2\kappa-1}{a}} \left(\frac{2}{a} |xy|^{\frac{a}{2}} \right) |x|^{2\kappa+a-2} dx.$$

В этом случае гипотеза Боаса при выполнении условий как в теореме 1 кратко записывается в виде

$$\| |\cdot|^{-\gamma} \mathcal{F}_{\kappa,a}(f) \|_{p,\kappa,a} \asymp \| |\cdot|^{-\delta} f \|_{p,\kappa,a}, \quad \gamma \in \left(\frac{d_{\kappa,a}}{p} - \frac{d_{\kappa,a} + \frac{a}{2}}{2}, \frac{d_{\kappa,a}}{p} \right),$$

где $\delta = d_{\kappa,a}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})$, $d_{\kappa,a} = 2\kappa + a - 1$.

Нетрудно проверить, следуя доказательству теоремы 1, что гипотеза Боаса остается верной, если функция не обязательно четная и ГМ-условие определено аналогично (2). Для этого достаточно проверить свойства ограниченности ядра в окрестности нуля и нужного асимптотического поведения его первообразной в окрестности бесконечности, которое может быть выведено как при доказательстве леммы 1. При $|t| \leq 1$ ограниченность $e_{\kappa,a}(t)$ при $\frac{2\kappa-1}{a} \geq -\frac{1}{2}$ вытекает из ограниченности нормированной функции Бесселя, а при $|t| \geq 1$ имеем

$$\left| \int_0^t b_{\kappa,a}(\xi) |\xi|^{2\kappa+a-2} d\xi \right| \leq C \left(\left| \int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa-1}{a}}(\xi) \xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1} d\xi \right| + \left| \int_0^{\frac{2}{a}|t|^{\frac{a}{2}}} J_{\frac{2\kappa+1}{a}}(\xi) \xi^{\frac{2\kappa-1}{a}+1} d\xi \right| \right) \leq C |t|^{\frac{d_{\kappa,a}-\frac{a}{2}}{2}}.$$

В заключении скажем, что интересно изучить случай $\frac{2\kappa-1}{a} < -\frac{1}{2}$, когда требуется более детальное изучение свойств ядра обобщенного преобразования Фурье. Некоторые результаты в этом направлении содержатся в недавней работе [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benedetto J.J., Heinig H.P. Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations // J. Fourier Anal. Appl. 2003. Vol. 9. P. 1–37.
2. Boas R.P. The integrability class of the sine transform of a monotonic function // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 365–369.
3. Debernardi A. The Boas problem on Hankel transforms // J. Fourier Anal. Appl. 2019. Vol. 25. P. 3310–3341.
4. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, no. 2. P. 762–774.
5. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Weighted gradient inequalities and unique continuation problems // Calc. Var. Partial Dif. 2020. Vol. 59, no. 3. Article 89.
6. Dyachenko M., Lifyand E., Tikhonov S. Uniform convergence and integrability of Fourier integrals // Jour. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 372. P. 328–338.
7. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // Int. Math. Res. Notices. 2016. Vol. 23. P. 7179–7200.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. Article 105462.
9. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Anal. 2021. Vol. 55. P. 513–538.
10. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. On the kernel of the (κ, a) -generalized Fourier transform // arXiv:2210.15730. 2022.

11. Gorbachev D., Lifyand E., Tikhonov S. Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in \mathbb{R}^n // *J. d'Anal. Math.* 2011. Vol. 114. P. 99–120.
12. Gorbachev D., Lifyand E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for integral transforms // *Indiana Univ. Math. J.* 2018. Vol. 67, no. 5. P. 1949–2003.
13. Lifyand E., Tikhonov S. Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms // *C.R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2008. Vol. 346. P. 1137–1142.
14. Lifyand E., Tikhonov S. Two-sided weighted Fourier inequalities // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*. 2012. Vol. XI. P. 341–362.
15. Sagher Y. Integrability conditions for the Fourier transform // *J. Math. Anal. Appl.* 1976. Vol. 54. P. 151–156.

REFERENCES

1. Benedetto, J.J. & Heinig, H.P. 2003. “Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations”, *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 1–37.
2. Boas, R.P. 1972. “The integrability class of the sine transform of a monotonic function”, *Studia Math.*, vol. 44, pp. 365–369.
3. Debernardi, A. 2019. “The Boas problem on Hankel transforms”, *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 25, pp. 3310–3341.
4. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2013. “Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 408, no. 2, pp. 762–774.
5. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Weighted gradient inequalities and unique continuation problems”, *Calc. Var. Partial Dif.*, vol. 59, no. 3, article 89.
6. Dyachenko, M., Lifyand, E. & Tikhonov, S. 2010. “Uniform convergence and integrability of Fourier integrals”, *Jour. Math. Anal. Appl.*, vol. 372, pp. 328–338.
7. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2016. “Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform”, *Int. Math. Res. Notices*, vol. 23, pp. 7179–7200.
8. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. “Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting”, *J. Approx. Theory*, vol. 258, article 105462.
9. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2021. “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Potential Anal.*, vol. 55, pp. 513–538.
10. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2022. “On the kernel of the (κ, a) -generalized Fourier transform”, *arXiv:2210.15730*.
11. Gorbachev, D., Lifyand, E. & Tikhonov, S. 2011. “Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in \mathbb{R}^n ”, *J. d'Anal. Math.*, vol. 114, pp. 99–120.
12. Gorbachev, D., Lifyand, E. & Tikhonov, S. 2018. “Weighted norm inequalities for integral transforms”, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 67, no. 5, pp. 1949–2003.
13. Lifyand, E. & Tikhonov, S. 2008. “Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms”, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 346, pp. 1137–1142.

14. Lifyand, E. & Tikhonov, S. 2012. “Two-sided weighted Fourier inequalities”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, vol. XI, pp. 341–362.
15. Sagher, Y. 1976. “Integrability conditions for the Fourier transform”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 54, pp. 151–156.

Получено: 07.07.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.85

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63

Полный метод чебышевской интерполяции в задаче построения линейной регрессии

В. А. Горелик, Т. В. Золотова

Горелик Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, ФИЦ ИУ РАН; профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: vgor16@mail.ru

Золотова Татьяна Валерьяновна — доктор физико-математических наук, профессор, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).

e-mail: tgold11@mail.ru

Аннотация

Рассматривается линейная задача регрессионного анализа в предположении наличия шумов в выходной и входных переменных. Эта задача аппроксимации может интерпретироваться как несобственная задача интерполяции, для которой требуется оптимальным образом скорректировать положения исходных точек в пространстве данных так, чтобы они все лежали на одной гиперплоскости. Для оценки меры коррекции исходных данных используется минимаксный критерий, поэтому предлагаемый подход может быть назван полным методом чебышевской аппроксимации (интерполяции). Он приводит к нелинейной задаче математического программирования, которая сводится к решению конечного числа задач линейного программирования. Это число зависит экспоненциально от количества параметров, поэтому предлагаются некоторые методы преодоления данной проблемы. Полученные результаты иллюстрируются практическими примерами, основанными на реальных данных, а именно, проанализирован показатель рождаемости в Федеральных округах РФ в зависимости от таких факторов, как численность городского населения, доходы и инвестиции. Построены линейные регрессионные зависимости для двух и трех признаков. На эмпирическом факте статистической устойчивости (сохранение знаков коэффициентов) продемонстрирована возможность сокращения перебора задач линейного программирования.

Ключевые слова: обработка данных, линейная регрессия, матричная коррекция, чебышевская аппроксимация, задача линейного программирования.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. А. Горелик, Т. В. Золотова. Полный метод чебышевской интерполяции в задаче построения линейной регрессии // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 52–63.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.85

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63

The total method of Chebyshev interpolation in the problem of constructing a linear regression

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova

Gorelik Victor Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, FRC CSC RAS; professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: vgor16@mail.ru

Zolotova Tatiana Valerianovna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: tgold11@mail.ru

Abstract

A linear problem of regression analysis is considered under the assumption of the presence of noise in the output and input variables. This approximation problem may be interpreted as an improper interpolation problem, for which it is required to correct optimally the positions of the original points in the data space so that they all lie on the same hyperplane. The minimax criterion is used to estimate the measure of correction of the initial data; therefore, the proposed approach can be called the total method of Chebyshev approximation (interpolation). It leads to a nonlinear mathematical programming problem, which is reduced to solving a finite number of linear programming problems. This number depends exponentially on the number of parameters, therefore, some methods are proposed to overcome this problem. The results obtained are illustrated with practical examples based on real data, namely, the birth rate in the Federal Districts of the Russian Federation is analyzed depending on factors such as urban population, income and investment. Linear regression dependencies for two and three features are constructed. Based on the empirical fact of statistical stability (conservation of signs of the coefficients), the possibility of reducing the enumeration of linear programming problems is demonstrated.

Keywords: data processing, linear regression, matrix correction, minimax criterion, linear programming problem.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova, 2022, “The total method of Chebyshev interpolation in the problem of constructing a linear regression”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 52–63.

1. Введение

Методы коррекции несобственных и неустойчивых задач получили в настоящее время широкое распространение. Матричная коррекция (по совокупности всех исходных данных) применяется к несовместным системам линейных алгебраических уравнений и неравенств и несобственным задачам линейного программирования ([1-5]). Использование методов коррекции в задачах обработкой экспериментальных данных при наличии шумов во входных и выходных данных привели к появлению полного метода наименьших квадратов (TLS в англоязычной терминологии).

Задачу регрессионного анализа можно рассматривать как несобственную задачу интерполяции, которая заключается в построении функции $f : X \rightarrow Y$ из некоторого фиксированного класса функций Φ , такой, что поверхность, ею описываемая, точно проходит через имеющиеся точки исходных данных $(x^1, y^1), \dots, (x^m, y^m)$, т. е.

$$y^i = f(x^i), \quad i = 1, \dots, m, \quad f \in \Phi.$$

В связи с тем, что данные зачастую получены экспериментальным путем, задача становится несобственной (не имеющей решения). В этом случае рассматривается задача оптимальной коррекции (аппроксимации). Необходимо найти функцию, которая вместе с некоторым набором данных $[X_H, y_h]$ является решением задачи интерполяции, и этот набор данных является «ближайшим» к исходным точкам $[X, y]$ среди всех допустимых параметров, при которых задача интерполяции имеет решение. Эта задача аппроксимации формализуется введением некоторой матричной нормы и нахождением минимальной по данной норме матрицы коррекции $[X_H, y_h] - [X, y]$.

Если в качестве меры аппроксимации используется метрика l_2 (евклидова норма вектора и норма Фробениуса матрицы), то получаем полный метод наименьших квадратов. Он имеет вероятностное обоснование как метод максимального правдоподобия при использовании гипотезы нормального распределения ошибок как при измерении векторного аргумента x , так и значений функции y .

Нормальный закон распределения часто используется при моделировании случайных процессов. Это объясняется и удобством его применения при исследовании случайных процессов, и полезными свойствами нормального закона (например, устойчивостью). Видимо поэтому большинство современных работ по регрессионному анализу посвящено различным обобщениям и модификациям полного метода наименьших квадратов (см., например, [6-12]) и меньше внимания уделяется другим мерам аппроксимации.

Однако в ряде случаев, распределения случайных показателей отличаются от нормального. Отклонение гипотезы «нормальности» связано с тем, что значение коэффициента вытянутости (эксцесса) больше у статистических распределений, которые соответствуют реальным данным. Известно, что коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент.

Это обстоятельство позволяет говорить о том, что такие распределения случайных величин имеют «тяжелые хвосты», т. е. соответствующая плотность распределения медленно убывает при $|x| \rightarrow \infty$ по сравнению с нормальной плотностью. Отклонение от нормального (гауссова) распределения случайных величин наблюдается в финансово-экономической области и характерно, например, для обменных курсов валют, для цен и доходностей акций. Это подтверждается как видом эмпирических плотностей (гистограмм), так и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормального распределения [13].

Если распределение шумов в статистических данных отличается от нормального распределения, то метод наименьших квадратов теряет свое вероятностное обоснование. При этом в полной форме он достаточно сложен в вычислительном плане (приводит к нахождению собственных векторов или сингулярному разложению матриц).

В работе [5] было показано, что метод максимального правдоподобия при использовании гипотезы экспоненциального распределения шумов приводит к полиэдральной норме l_1 , а метод построения линейной регрессии сводится при этом к решению совокупности задач линейного программирования. В работе [14] эти результаты были обобщены на задачу совместного преобразования данных и аппроксимации, что приводит к новому классу задач параметрической коррекции.

В данной работе предлагается использование минимаксного критерия аппроксимации, т. е. использование нормы l_∞ матрицы коррекции. Так как минимаксный критерий принято связывать с именем П.Л. Чебышева, то предлагаемый подход естественно назвать полным методом чебышевской аппроксимации.

2. Задача коррекции несовместной системы линейных уравнений в метрике l_∞

Рассмотрим в качестве вспомогательной задачу коррекции несовместной системы линейных уравнений $Bz = c$, где вектор z имеет размерность n , вектор c – размерность m , матрица B имеет размерность $m \times n$. Несовместная система обычно является переопределенной, т.е. $m > n$. Обозначим компоненты вектора c через c_i , строки матрицы B – через b^i , $i = 1, \dots, m$.

Введем матрицу H и вектор h соответствующих размерностей так, что система $(B+H)z = c + h$ становится совместной, т.е. множество ее решений Z непусто. Поставим задачу минимальной коррекции как задачу минимизации некоторой нормы расширенной матрицы $\bar{H} = [-h \ H]$ при условии $Z \neq \emptyset$:

$$\min_{z, H, h} \{ \|[-h \ H]\| \mid (B+H)z = c + h \}. \quad (1)$$

Матрица \bar{H} имеет размерность $m \times (n+1)$. Обозначим ее элементы через h_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$, строки матрицы \bar{H} – через h^i .

Норма l_∞ матрицы по определению есть

$$\|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Для того, чтобы получить решение задачи (1) в данной норме, найдем выражение этой нормы через векторные нормы. Для этого нам будет полезно следующее определение.

Обобщенная φ, ψ – норма произвольной матрицы A есть

$$\|A\|_{\varphi, \psi} = \max_{z \neq 0} \frac{\psi(Az)}{\varphi(z)},$$

где φ, ψ – некоторые векторные нормы. Покажем, что норма матрицы A в метрике l_∞ является частным случаем обобщенной матричной нормы, а именно,

$$\|A\|_{1, \infty} = \|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Действительно, по определению

$$\|A\|_{1, \infty} = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_1} = \max_{z \neq 0} \frac{\max_i \left| \sum_j a_{ij} z_j \right|}{\sum_j |z_j|}$$

(для краткости здесь соответствующие нормы векторов обозначены 1 и ∞). Очевидно, данную задачу на максимум отношения можно заменить на условный экстремум:

$$\max_i \left| \sum_j a_{ij} z_j \right| \rightarrow \max_z, \quad \sum_j |z_j| = 1.$$

Максимум линейной функции достигается в вершинах допустимого множества, поэтому при фиксированном i максимум по z выражения $\sum_j a_{ij} z_j$ равен $\max_j |a_{ij}| = |a_{ij_0}|$ и достигается на векторе z , у которого $z_{j_0} = \text{sign}(a_{ij_0})$, а все остальные компоненты равны нулю. Впрочем, речь идет о максимизации модуля суммы, поэтому можно положить $z_{j_0} = 1$. Далее, так как операции взятия максимума переставимы, то равенство $\|A\|_{1, \infty} = \|A\|_{l_\infty}$ доказано.

В работе [4] доказано, что минимум нормы $\|A\|_{\varphi, \psi}$ у матрицы A , являющейся при фиксированном z решением системы уравнений $Az = b$, равен

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(b)}{\varphi(z)}.$$

Применим этот результат для уравнения $(B + H)z = c + h$ задачи (1). Преобразуем уравнение к виду

$$[-h \ H](1, z) = c - Bz.$$

Тогда минимальное значение обобщенной нормы расширенной матрицы коррекции, для которой некоторое фиксированное z удовлетворяет условию в задаче (1), есть

$$\|[-h \ H]\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(c - Bz)}{\varphi(1, z)}.$$

Таким образом, при фиксированном z минимальная в этой метрике норма расширенной матрицы равна

$$\max_{ij} |h_{ij}| = \frac{\max_{1 \leq i \leq m} |c_i - b^i z|}{1 + \sum_{j=1}^n |z_j|}. \quad (2)$$

Задача минимальной коррекции (1) при этом сводится к минимизации отношения в правой части (2) по переменной z :

$$h^0 = \min_z \frac{\max_{1 \leq i \leq m} |c_i - b^i z|}{1 + \sum_{j=1}^n |z_j|}.$$

Далее применим этот результат к решению задачи построения линейной регрессии.

3. Полная задача построения линейной регрессии в метрике l_∞

Математическая постановка задачи построения линейной регрессии заключается в следующем. Исходные данные, описывающие зависимость величины y от вектора переменных x , представляют собой множество точек $(x_1^1, \dots, x_n^1, y^1), \dots, (x_1^m, \dots, x_n^m, y^m)$. Эти данные представим в виде информационной матрицы

$$[-y \ X] = \begin{pmatrix} -y^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ -y^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y^m & x_1^m & \dots & x_n^m \end{pmatrix}.$$

Рассматривается задача построения по заданным m точкам такой аффинной функции от n переменных $f: R^n \rightarrow R$ вида

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0 = \langle a, x \rangle + a_0, \quad (3)$$

что максимальный из модулей отклонений по всем координатам всех точек от определяемой ею гиперплоскости минимален. Сформулируем соответствующую задачу коррекции системы линейных уравнений. Условие принадлежности точек $(x^1, y^1), \dots, (x^m, y^m)$ некоторой гиперплоскости L можно записать как

$$\langle a, x^i \rangle + a_0 = y^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

или в матричной форме

$$[X \ e] \cdot \bar{a} = y, \quad (4)$$

где $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)^T$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^m$, $\bar{a} = (a, a_0)^T \in R^{n+1}$, X – матрица размера $m \times n$, строками которой являются векторы x^i .

Если через заданные точки нельзя провести гиперплоскость, то полученная система линейных уравнений (4) несовместна. Задача минимальной коррекции данной системы в норме l_∞ будет иметь следующий вид:

$$h^0 = \inf_{H, h, \bar{a}} \{ \|[-h \ H]\|_{l_\infty} \mid [X + H \ e] \bar{a} = y + h \}. \quad (5)$$

Задача (5) представляет собой задачу коррекции несовместной системы линейных уравнений. Правда в отличие от рассмотренного в предыдущем разделе случая здесь последний столбец, соответствующий фиктивной переменной, является фиксированным, однако это легко учитывается при применении формулы (2). Сформулируем теорему для критерия минимума полиэдральной нормы l_∞ матрицы коррекции, позволяющую получить решение задачи построения регрессии такого типа, т.е. нахождения оптимального значения коэффициентов \bar{a}^0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть в пространстве признаков R^n даны m точек $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, а в пространстве R множество ответов y^1, \dots, y^m , и не существует аффинной функции (3) такой, что $y^i = f(x^i)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда задача нахождения минимального изменения информационной матрицы параметров $[-y \ X]$ в смысле минимума нормы l_∞ , в результате которого интерполяционная аффинная функция существует, эквивалентна задаче математического программирования

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \min_{u, v, q, q_0}, \\ u &\geq vy^i - x^i q - q_0, \quad i = 1, \dots, m, \\ u &\geq -vy^i + x^i q + q_0, \quad i = 1, \dots, m, \\ v + \sum_{j=1}^n |q_j| &= 1, \\ u &\geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Если существует решение задачи (6) (u^0, v^0, q^0, q_0^0) такое, что $v^0 \neq 0$, то

$$h^0 = u^0, \quad a^0 = \frac{q^0}{v^0}, \quad a_0^0 = \frac{q_0^0}{v^0}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем формулу (2) для несовместной системы (4):

$$h^0 = \min_{a, a_0} \frac{\max_{1 \leq i \leq m} |y^i - x^i a - a_0|}{1 + \sum_{j=1}^n |a_j|}.$$

Введем в рассмотрение скалярные переменные $v = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n |a_j|}$, $q_0 = va_0$, вектор $q = va$ и скалярную переменную u , удовлетворяющую условиям

$$u \geq vy^i - x^i q - q_0, \quad u \geq -vy^i + x^i q + q_0, \quad i = 1, \dots, m.$$

При этом выполняются условия $u \geq 0$ и $v \geq 0$, но переменные q и q_0 могут иметь, вообще говоря, любой знак. В соответствии с формулой (2) необходимо минимизировать в новых переменных величину

$$\max_{1 \leq i \leq m} |vy^i - x^i q - q_0|,$$

что эквивалентно минимизации переменной u при заданных на нее ограничениях. Таким образом, получаем задачу математического программирования (6), а с учетом введенных замен переменных и формулы (7). Теорема доказана. \square

Задача (6) не является задачей линейного программирования. Сложность решения полученной задачи математического программирования связана с наличием модулей некоторых переменных. В случае рассмотрения нормы l_1 эта сложность преодолевалась сравнительно легко и привела, в конечном счете, к решению $2n$ задач линейного программирования [5]. Для задачи (6) дело обстоит несколько сложнее. Поэтому рассмотрим некоторые методы решения этой проблемы.

Задачу (6) также можно свести к решению конечного числа задач линейного программирования. Это можно сделать следующим способом. Предположим, что мы знаем априорно знаки коэффициентов регрессии, т.е. знаки компонент вектора \bar{a} . Тогда мы можем ввести для них новые переменные, которые совпадают с исходными переменными для положительных компонент и противоположного знака для отрицательных компонент. Это эквивалентно тому, что соответствующие столбцы матрицы X меняют знак, а все коэффициенты регрессии считаются неотрицательными. Тогда в задаче (6) элементы данных столбцов информационной матрицы меняют знаки, а модули просто исчезают.

Если из каких-то априорных соображений мы можем судить о знаках коэффициентов линейной регрессии, то задача (6) просто сводится к решению одной задачи линейного программирования. Однако в общем случае мы должны перебрать все возможные варианты знаков коэффициентов и из всех получающихся задач линейного программирования выбрать ту, которая дает наименьшее значение невязки u^0 .

Таким образом, в общем случае задача (6) сводится к решению 2^n задач линейного программирования, т.е. рост экспоненциальный. Что можно сказать по этому поводу? Вообще говоря, число параметров (признаков) обычно на много меньше числа данных ($n \ll m$). При 10-20 параметрах проблемы перебора положительных и отрицательных значений коэффициентов нет. Кроме того, из содержательного смысла параметров зачастую можно судить хотя бы о части знаков коэффициентов. Если некоторые из них очевидны, то перебор уменьшается. Более подробно мы обсудим этот вопрос ниже при рассмотрении практических примеров. В общем же случае можно использовать метод ветвей и границ.

4. Построение демографического тренда в Российской Федерации

Рассмотрим практические пример, основанные на реальных данных, взятых с сайта Росстат [15]. Мы будем анализировать показатель рождаемости в Федеральных округах в зависимости от таких факторов, как численность городского населения, доходы и инвестиции. В таблице 1 приведены данные за 2019 год по Федеральным округам РФ: коэффициент рождаемости, удельный вес городского населения, доходы населения, инвестиции в области здравоохранения и социальных услуг.

Введем переменные x_1, x_2, x_3 – численность городского населения, доходы и инвестиции соответственно. По исходным данным, представленным в таблице 1, построим регрессионную зависимость в метрике l_∞ сначала от двух переменных: численности городского населения x_1 и доходов x_2 .

Таблица 1: Анализируемые социально-экономические показатели по регионам РФ за 2019 г.

Федеральные округа	Общий коэффициент рождаемости (число родившихся на 1000 чел. населения)	Удельный вес городского населения (в %)	Среднедушевые доходы (в месяц, тыс. руб.)	Инвестиции в области здравоохранения и социальных услуг (млрд. руб.)
Центральный	9.3	82.3	46.9	91.3
Северо-Западный	9.6	84.9	37.9	26.6
Южный	9.8	62.8	29.9	31.6
Северо-Кавказский	13.7	50.3	24.4	14.7
Приволжский	9.6	72.2	28.3	41.9
Уральский	10.9	81.6	36.9	28.8
Сибирский	10.4	74.3	27.2	33.6
Дальневосточный	11.1	72.9	37.9	24.3

Таблица 2: Результаты вычислений при нахождении решения задачи (6) для двух переменных

u^0	v^0	q^0		q_0^0
		Знаки компонент вектора q^0	Значения компонент вектора q^0	
2.3	1	++	(0, 0)	12.7
1.443	1.009	-+	(-0.103, 0.095)	16.554
2	1.049	+ -	(0, -0.049)	14.913
1.584	1.082	--	(-0.082, 0)	18.742

Информационная матрица имеет вид

$$[-y \quad X] = \begin{pmatrix} -y^1 & x_1^1 & x_2^1 \\ -y^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ -y^3 & x_1^3 & x_2^3 \\ -y^4 & x_1^4 & x_2^4 \\ -y^5 & x_1^5 & x_2^5 \\ -y^6 & x_1^6 & x_2^6 \\ -y^7 & x_1^7 & x_2^7 \\ -y^8 & x_1^8 & x_2^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.3 & 82.3 & 46.9 \\ -9.6 & 84.9 & 37.9 \\ -9.8 & 62.8 & 29.9 \\ -13.7 & 50.3 & 24.4 \\ -9.6 & 72.2 & 28.3 \\ -10.9 & 81.6 & 36.9 \\ -10.4 & 74.3 & 27.2 \\ -11.1 & 72.9 & 37.9 \end{pmatrix}.$$

Для этой информационной матрицы задача (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \min_{u,v,q_0,q_1,q_2}, \\ u &\geq vy^i - (x_1^i q_1 + x_2^i q_2) - q_0, \quad i = 1, \dots, 8, \\ u &\geq -vy^i + (x_1^i q_1 + x_2^i q_2) + q_0, \quad i = 1, \dots, 8, \\ v &+ |q_1| + |q_2| = 1, \\ u &\geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Решение данной задачи с модулями вектора переменных q предполагает решение 2² = 4 задач линейного программирования, которые получаются путем перебора знаков компонент вектора переменных q . Результаты решения 4 задач линейного программирования представлены в таблице 2.

Определяем минимальное из четырех значение целевой функции и соответствующий набор оптимальных значений переменных:

$$u^0 = 1.443, v^0 = 0.009, q^0 = (-0.103, 0.077), q_0^0 = 16.554.$$

Вычисляя по формулам (7) коэффициенты регрессии

$$a^0 = \frac{q^0}{v^0} = \frac{(-0.103, 0.077)}{0.009} = (-0.103, 0.094),$$

$$a_0^0 = \frac{q_0^0}{v^0} = \frac{16.554}{0.009} = 16.415,$$

получаем уравнение регрессии

$$y = -0.103x_1 + 0.094x_2 + 16.415.$$

Построим регрессионную зависимость в метрике l_∞ от трех переменных, значения которых представлены в таблице 1.

Информационная матрица примет вид

$$[-y \ X] = \begin{pmatrix} -y^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ -y^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ -y^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ -y^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ -y^5 & x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 \\ -y^6 & x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 \\ -y^7 & x_1^7 & x_2^7 & x_3^7 \\ -y^8 & x_1^8 & x_2^8 & x_3^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.3 & 82.3 & 46.9 & 91.3 \\ -9.6 & 84.9 & 37.9 & 26.6 \\ -9.8 & 62.8 & 29.9 & 31.6 \\ -13.7 & 50.3 & 24.4 & 14.7 \\ -9.6 & 72.2 & 28.3 & 41.9 \\ -10.9 & 81.6 & 36.9 & 28.8 \\ -10.4 & 74.3 & 27.2 & 33.6 \\ -11.1 & 72.9 & 37.9 & 24.3 \end{pmatrix}.$$

Для этой информационной матрицы получаем задачу (6):

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \min_{u, v, q_0, q_1, q_2, q_3}, \\ u &\geq vy^i - (x_1^i q_1 + x_2^i q_2 + x_3^i q_3) - q_0, \quad i = 1, \dots, 8, \\ u &\geq -vy^i + (x_1^i q_1 + x_2^i q_2 + x_3^i q_3) + q_0, \quad i = 1, \dots, 8, \\ v &+ |q_1| + |q_2| + |q_3| = 1, \\ u &\geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Решение данной задачи с модулями вектора переменных q предполагает решение $2^3 = 8$ задач линейного программирования, которые получаются путем перебора знаков компонент вектора переменных q . Результаты решения 8 задач линейного программирования представлены в таблице 3.

Определяем минимальное из восьми значение целевой функции и соответствующий набор оптимальных значений переменных:

$$u^0 = 1.207, v^0 = 0.97, q^0 = (-0.099, 0.202, -0.074), q_0^0 = 13.202.$$

Вычисляя по формулам (7) коэффициенты регрессии

$$a^0 = \frac{q^0}{v^0} = \frac{(-0.099, 0.202, -0.074)}{0.97} = (-0.102, 0.209, -0.076),$$

$$a_0^0 = \frac{q_0^0}{v^0} = \frac{13.202}{0.97} = 13.607,$$

Таблица 3: Результаты вычислений при нахождении решения задачи (6) для трех переменных

u^0	v^0	q^0		q_0^0
		Знаки компонент вектора q^0	Значения компонент вектора q^0	
2.2	1	+++	(0, 0, 0)	11.5
1.437	1.008	-++	(-0.145, 0.136, 0)	16.328
2.052	1.016	+ - +	(0, -0.016, 0)	12.273
1.812	1.061	++ -	(0, 0, -1.061)	13.618
1.601	1.103	+ - -	(0, -0.057, -0.047)	15.589
1.207	0.97	- + -	(-0.099, 0.202, -0.074)	13.202
1.528	1.198	- - +	(-0.098, 0, 0)	18.460
1.395	1.115	- - -	(-0.087, 0, -0.028)	18.676

получаем уравнение регрессии

$$y = -0.102x_1 + 0.209x_2 - 0.076x_3 + 13.607.$$

При сравнении результатов построения уравнения регрессии для двух и трех переменных (факторов) обращает на себя внимание тот факт, что коэффициенты при соответствующих переменных близки по абсолютным значениям, а главное – совпадение их знаков. Этот факт не является удивительным, т. к. положительное или отрицательное влияние каждого фактора должно быть устойчивым, хотя это утверждение не является строгим. Данное эмпирическое утверждение можно использовать для сокращения вычислительных процедур. Если последовательно увеличивать количество параметров, то в предположении постоянства знака коэффициента для каждого фактора на следующем шаге достаточно решать две задачи (положительное и отрицательное значение коэффициента при добавляемом факторе). При такой последовательной процедуре построения регрессии от n переменных достаточно решать $2n$ задач линейного программирования вместо 2^n . В примере построения уравнения регрессии с тремя переменными достаточно решить задачи со знаками коэффициентов $(-++)$ и $(+ - -)$, а всего с учетом примера с двумя переменными – 6 задач.

5. Заключение

В данной работе была рассмотрен подход к построению линейной регрессии как несобственной задачи интерполяции, основанный на матричной коррекции системы линейных уравнений, выражающей условие принадлежности всех точек пространства исходных данных одной гиперплоскости. В качестве меры коррекции (аппроксимации) использована норма матрицы l_∞ . В геометрической интерпретации это означает минимизацию максимума модулей отклонений от гиперплоскости всех точек по всем координатам. Данный подход в вычислительном плане приводит к решению совокупности задач линейного программирования, однако в общем случае их число растет экспоненциально с ростом числа параметров. Предложены некоторые способы преодоления этой сложности. Приведен пример построения демографического тренда по реальным данным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eremin I. I. Theory of linear optimization. Inverse and ill-posed problems series. VSP: Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, 2002.

2. Горелик В. А. Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физика. 2001. Т. 41, № 11. С. 1697-1705.
3. Горелик В. А., Ерохин В. И. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. М.: ВЦ РАН, 2004.
4. Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006.
5. Горелик В. А., Трёмбачева О. С. Решение задачи линейной регрессии с использованием методов матричной коррекции в метрике l_1 // Журн. вычисл. матем. и матем. физика. 2016, т. 56, №2. С. 202-207.
6. Back A. The matrix-restricted total least squares problem // Signal Process. 2007. Vol. 87, №10. P. 2303-2312.
7. Hnětynková I., Plešinger M., Sima D. M., Starakoš Z., Van Huffel S. The total least squares problem in $AX \approx B$: A new classification with the relationship to the classical works // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2011. Vol. 32, issue 3. P. 748-770.
8. Hnětynková I., Plešinger M., Žáková J. On TLS formulation and core reduction for data fitting with generalized models // Linear Algebra and Its Applications. 2019. Vol. 577. P. 1-20.
9. Hnětynková I., Plešinger M., Žáková J. Solvability classes for core problems in matrix total least squares minimization // Applications of Mathematics. 2019. Vol. 64, issue 2. P. 103-128.
10. Markovsky I., Van Huffel S. Overview of total least-squares methods // Signal Processing. 2007. Vol. 87, issue 10. P. 2283-2302.
11. Meng L., Zheng B., Wei Y. Condition numbers of the multidimensional total least squares problems having more than one solution // Numerical Algorithms. 2020. Vol. 84, issue 3. P. 887-908.
12. Shklyar S. Consistency of the total least squares estimator in the linear errors-in-variables regression // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2018. Vol. 5, issue 3. P. 247-295.
13. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: МЦНМО, 2016.
14. Gorelik V. A., Zolotova T. V. Method of parametric correction in data transformation and approximation problems // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). 2020. Vol. 12422. P. 122-133.
15. Регионы России. Социально-экономические показатели 2019, <https://rosstat.gov.ru>. Дата обращения: 30 октября 2021.

REFERENCES

1. Eremin, I. I. 2002, *Theory of linear optimization. Inverse and ill-posed problems series*, VSP, Utrecht, Boston, Koln, Tokyo.
2. Gorelik, V. A. 2001, "Matrix correction of a linear programming problem with inconsistent constraints", *Computational mathematics and mathematical physics*, vol. 11, no. 41, pp. 1615-1622.

3. Gorelik, V. A., Erohin, V. I. 2004, *Optimal matrix correction of inconsistent systems of linear algebraic equations by minimal Euclidean norm*, CC RAS, Moscow.
4. Gorelik, V. A., Erokhin, V. I., Pechenkin, R. V. 2006, *Numerical methods for correcting improper linear programming problems and structural systems of equations*, CC RAS, Moscow.
5. Gorelik, V. A., Trembacheva, O. S. 2016, "Solution of the Linear Regression Problem Using Matrix Correction Methods in the l_1 Metric", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 56, no. 2, pp. 200-205.
6. Back A. 2007, "The matrix-restricted total least squares problem", *Signal Process*, vol. 87, no. 10, pp. 2303-2312.
7. Hnětynková I., Plešinger M., Sima D.M., Starakoš Z., Van Huffel S. 2011, "The total least squares problem in $AX \approx B$: A new classification with the relationship to the classical works", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 32, issue 3, pp. 748-770.
8. Hnětynková I., Plešinger M., Žáková J. 2019. "On TLS formulation and core reduction for data fitting with generalized models", *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 577, pp. 1-20.
9. Hnětynková I., Plešinger M., Žáková J. 2019. "Solvability classes for core problems in matrix total least squares minimization", *Applications of Mathematics*, vol. 64, issue 2, pp. 103-128.
10. Markovsky I., Van Huffel S. 2007 "Overview of total least-squares methods", *Signal Processing*, vol. 87, issue 10, pp. 2283-2302.
11. Meng L., Zheng B., Wei Y. 2020. "Condition numbers of the multidimensional total least squares problems having more than one solution", *Numerical Algorithms*, vol. 84, issue 3, pp. 887-908.
12. Shklyar S. 2018. "Consistency of the total least squares estimator in the linear errors-in-variables regression", *Modern Stochastics: Theory and Applications*, vol. 5, issue 3, pp. 247-295.
13. Shiryaev A. N. 2016, *Fundamentals of stochastic financial mathematics*, vol. 1, Facts, Models, MTSNMO, Moscow.
14. Gorelik V. A., Zolotova T. V. 2020, "Method of parametric correction in data transformation and approximation problems", *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 12422, pp.122-133.
15. Regions of Russia. Socio-economic indicators 2019, <https://rosstat.gov.ru> (accessed 30 October 2021).

Получено: 13.07.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-64-76

Обратная задача для основного моноида типа q^1

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе для произвольного основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q решается обратная задача, то есть нахождение асимптотики для функции распределения элементов моноида $M(\mathbb{P}(q))$, исходя из асимптотики распределения псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q .

Для решения этой задачи рассматриваются два гомоморфизма основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q и задача о распределении сводится к аддитивной задаче Ингама.

Показано, что для этого класса моноидов понятие степенной плотности не работает. Введено новое понятие C логарифмической θ -степенной плотности.

Показано, что любой моноид $M(\mathbb{P}(q))$ для последовательности псевдопростых чисел $\mathbb{P}(q)$ типа q имеет оценки сверху и снизу для функции распределения элементов основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q .

Показано, что если C логарифмическая θ -степенная плотность для основного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ типа q существует, то $\theta = \frac{1}{2}$ и для константы C справедливы неравенства $\pi\sqrt{\frac{1}{3\ln q}} \leq C \leq \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$.

Полученные результаты аналогичны ранее полученным авторами при решении обратной задачи для моноидов, порожденных произвольной экспоненциальной последовательностью простых чисел типа q .

Для основных моноидов $M(\mathbb{P}(q))$ типа q остается открытым вопрос о существовании C логарифмической $\frac{1}{2}$ -степенной плотности и величине константы C .

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, экспоненциальная последовательность простых, основной моноид $M(\mathbb{P}(q))$ типа q , C логарифмическая θ -степенная плотность.

Библиография: 32 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для основного моноида типа q // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 4, С. 64–76.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-21-00544

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-64-76

The inverse problem for a basic monoid of type q^2

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the paper for an arbitrary basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q the inverse problem is solved, that is, finding the asymptotics for the distribution function of the elements of the monoid $M(\mathbb{P}(q))$, based on the asymptotics of the distribution of pseudo-prime numbers $\mathbb{P}(q)$ of type q .

To solve this problem, we consider two homomorphisms of the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q and the distribution problem reduces to the additive Ingham problem.

It is shown that the concept of power density does not work for this class of monoids. A new concept of C logarithmic θ -power density is introduced.

It is shown that any monoid $M(\mathbb{P}(q))$ for a sequence of pseudo-simple numbers $\mathbb{P}(q)$ of type q has upper and lower bounds for the element distribution function of the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q .

It is shown that if C is a logarithmic θ -power density for the main monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q exists, then $\theta = \frac{1}{2}$ and for the constant C the inequalities are valid $\pi \sqrt{\frac{1}{3 \ln q}} \leq C \leq \pi \sqrt{\frac{2}{3 \ln q}}$.

The results obtained are similar to those previously obtained by the authors when solving the inverse problem for monoids generated by an arbitrary exponential sequence of primes of type q .

For basic monoids $M(\mathbb{P}(q))$ of the type q , the question remains open about the existence of a C logarithmic $\frac{1}{2}$ -power density and the value of the constant C .

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, exponential sequence of primes, the basic monoid $M(\mathbb{P}(q))$ of type q , C logarithmic θ -power density.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The inverse problem for a basic monoid of type q ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 64–76.

²Acknowledgments: This work was prepared under a grant from the RSF № 22-21-00544.

1. Введение

В работе [15] начато систематическое изучение дзета-функций моноидов натуральных чисел и законов распределения простых элементов в этих моноидах. В этой работе дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $q \geq 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ называется экспоненциальной типа q , если выполняются соотношения $q \leq p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ ($\nu \geq 2$).

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым (см. [30]), для любого $q \geq 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел типа q .

В работе [15] было дано определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_A). \quad (1)$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α -плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leq \sigma_A \leq 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [28], [30]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Пусть $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $M(PE_q)$ — моноид натуральных чисел, образованный с помощью PE_q . В работе [15] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q дзета-ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE_q)|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.

В работе [21] была высказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функции $\zeta(M(PE_q)|\alpha)$, которая была доказана в работе [18]. Тем самым было установлено, что для этой дзета-функции её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

В работе [16] доказана теорема о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x , которое будем обозначать через $\pi_{P(M)}(x)$. В общем случае это непросто задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q и моноида $M(PE_q)$ можно дать удовлетворительный ответ.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ типа q для количества простых элементов в моноиде $M(PE_q)$, не превосходящих x , справедливо равенство

$$\pi_{PE_q}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE_q}(x),$$

где $0 \leq \theta_{PE_q}(x) = \left\{ \frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} + \left\{ \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} < 2$ при $q^n \leq x < q^{n+1}$.

В работе [17] было дано определение σ -последовательности \mathbb{P}_σ простых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Последовательность \mathbb{P}_σ простых чисел называется σ -последовательностью, если

$$\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}$$

и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства

$$n^\sigma \leq p_n < (n+1)^\sigma. \quad (2)$$

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [29], стр. 66).

ТЕОРЕМА 3. Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x , для которого выполнены неравенства

$$x^3 \leq p_x \leq (x+1)^3. \quad (3)$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^\sigma \leq p_{x,\sigma} \leq (x+1)^\sigma. \quad (4)$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ -последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geq 3$.

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ -последовательности \mathbb{P}_σ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ -последовательности \mathbb{P}_σ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. В работе [17] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. При $x > N_\sigma$: σ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \quad (5)$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Теоремы 2 и 4 непосредственно связаны с тематикой работ Б. М. Бредихина [2]–[10]. Следуя этим работам, определим функции $\nu_{M(PE_q)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE_q)}(x) = \sum_{n \in M(PE_q), n \leq x} 1, \quad \nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_\sigma), n \leq x} 1.$$

В работе [26] решена обратная задача для функций $\nu_{M(PE_q)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$, т. е. нахождение асимптотики для этих функций, зная асимптотики для функций $\pi_{PE_q}(x)$ и $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. Доказана следующая теорема.

В работе [20] введено понятие основного моноида типа q и показано, что для этого моноида $M(\mathbb{P}(q))$, в котором все простые элементы суть псевдопростые числа образующие множество $\mathbb{P}(q) = \{q^n p_n | n \geq 1\}$ p_n — n -ое простое число, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Существует $n_1 = n_1(q) \geq n_0$ такое, что при $x \geq q^{n_1} n_1 \ln n_1$ справедливы оценки для $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$:

$$\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = \frac{\ln x - \ln \ln x + \ln \ln q - \ln(\ln \ln x - \ln \ln q)}{\ln q} + \theta(x), \quad |\theta(x)| \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 6. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}(q))|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

Целью данной работы будет решение обратной задачи для произвольного основного моноида типа q .

2. Вспомогательные леммы

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, $P(M)$ — множество его простых элементов и функции $\nu_M(x)$, $\pi_{P(M)}(x)$ заданы равенствами

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M, n \leq x} 1, \quad \pi_{P(M)}(x) = \sum_{r \in P(M), r \leq x} 1.$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\nu_M(x) \ln x = \int_1^x \nu_M(u) \frac{du}{u} + \sum_{k \geq 1} \sum_{r \in P(M), r \leq x} \nu_M\left(\frac{x}{r^k}\right) \ln r. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26] \square

ЛЕММА 2. *Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q . Справедливо неравенство³*

$$\prod_{p_j^{(q)} \leq x} \left(1 - \frac{1}{p_j^{(q)}}\right)^{-1} = \exp\left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q} \ln\left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right)\right)\right), \quad (7)$$

где $x \geq p_1^{(q)} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26]. \square

ЛЕММА 3. *Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q . Справедливо неравенство*

$$\nu_{M(PE_q)}(x) \leq x \exp\left(\frac{\ln p_1^{(q)}}{\ln q} \ln\left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 (p_1^{(q)})^k} - O\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p_1^{(q)}}\right)\right)\right), \quad (8)$$

где $x \geq p_1^{(q)} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [26]. \square

ЛЕММА 4. *Пусть $q \geq 2$ и $PE_q = \{p_1^{(q)}, p_2^{(q)}, \dots, p_n^{(q)}, \dots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $n_q = \pi(q) + 1$, тогда для любого $j \geq n_q$ справедливо неравенство $q^j p_j > p_j^{(q)}$. При $x \geq q^{n_q}$ справедливо неравенство $\pi_{M(PE_q)}(x) \geq \pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $j \geq n_q$ имеем $p_j > q$. Отсюда следует, что $q^j p_j > q^{j+1} > p_j^{(q)} \geq q^j$ и первое утверждение доказано.

При $1 \leq j < n_q$ имеем $p_j \leq q$. Отсюда следует, что $q^j < q^j p_j \leq q^{j+1}$ и справедливо равенство $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(q^{n_q-1}) = n_q - 2$.

Пусть теперь $q^k \leq x < q^{k+1}$ и $k \geq n_q$, тогда $\pi_{M(PE_q)}(x) = k$ либо $k - 1$. Пусть $n_{q,k}$ — максимальный номер j такой, что $j \leq k$, $p_j \leq q^{k-j}$, тогда

$$q^{n_{q,k}} p_{n_{q,k}} \leq q^k, \quad q^{n_{q,k}+1} p_{n_{q,k}+1} > q^k, \quad q^{n_{q,k}+2} p_{n_{q,k}+2} > q^{k+1}.$$

³Здесь и далее, как обычно, $\exp(x) = e^x$.

Отсюда следует, что $\pi_{M(\mathbb{P}(q))}(x) = n_{q,k}$ либо $n_{q,k} + 1$. Так как $q^{k-1}p_{k-1} > q^k$, то $n_{q,k} < k - 1$ и, следовательно, второе утверждение леммы доказано. \square

Мы видим, что в данном случае подход Б. М. Бредихина не работает, так как мы заведомо имеем случай для моноидов $M(PE_q)$ и $M(\mathbb{P}(q))$, когда отсутствует степенная θ -плотность, так как при степенной плотности невозможны асимптотические формулы из теорем 2 и 5. Далее мы будем опираться на аддитивную теорему Ингама, но нам удастся получить только две асимптотические оценки сверху и снизу.

3. О двух гомоморфизмах основного моноида типа q

Пусть G — произвольная свободная коммутативная мультипликативная полугруппа с нейтральным элементом e и со счетным числом образующих элементов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$, множество которых будем обозначать через $\Omega(G)$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид \mathbb{N} натуральных чисел, обладающий тем свойством, что в полугруппе G имеется только конечное число элементов g с $N(g) \leq x$ для любого вещественного x . Обозначим через M его образ. Это будет мультипликативный моноид натуральных чисел $M = N(G)$. Вслед за Б. М. Бредихиным (см. [2]), рассмотрим дзета-функцию полугруппы G

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_G,$$

где σ_G — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции полугруппы G .

В силу мультипликативности гомоморфизма имеет место разложение в эйлерово произведение

$$\zeta_G(\alpha) = P_G(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha(\omega_\nu)}\right)^{-1}$$

в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_G$.

Рассмотрим дзета-функцию моноида $M = N(G)$

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции моноида $M = N(G)$.

Вообще говоря, $\zeta_G(\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Дело в том, что

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g \in G} \frac{1}{N^\alpha(g)} = \sum_{n \in M} \frac{|N^{-1}(n)|}{n^\alpha},$$

где $N^{-1}(n) = \{g \in G | N(g) = n\}$ — прообраз натурального числа n при гомоморфизме $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид \mathbb{N} натуральных чисел, а $|N^{-1}(n)|$ — количество элементов в этом прообразе, которое конечно в силу ограничений на гомоморфизм $N(g)$.

Таким образом, равенство дзета-функций возможно только в случае изоморфизма G и $M = N(G)$.

Следующее важное обстоятельство связано с тем, что $P(M)$ — множество простых элементов мультипликативного моноида M , вообще говоря, не совпадает с образом множества образующих элементов полугруппы G : $P(M) \subset N(\Omega(G))$.

Напомним, что если через $P(M|\alpha)$ обозначается эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Таким образом, возможны следующие ситуации:

$$\zeta(M|\alpha) \neq P(M|\alpha), \quad P(M|\alpha) \neq P_G(\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-|N^{-1}(r)|}.$$

Рассмотрим в качестве G мультипликативный моноид $M(\mathbb{P}(q))$ — основной моноид типа q , где $q \geq 2$ — любое натуральное число. Определим два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ в мультипликативный моноид \mathbb{N} натуральных чисел:

$$N_1 : M(\mathbb{P}(q)) \rightarrow \mathbb{N} : N_1 \left(\prod_{\nu=1}^n (q^\nu p_\nu)^{\beta_\nu} \right) = q^{\sum_{\nu=1}^n \nu \beta_\nu},$$

$$N_2 : M(\mathbb{P}(q)) \rightarrow \mathbb{N} : N_2 \left(\prod_{\nu=1}^n (q^\nu p_\nu)^{\beta_\nu} \right) = q^{\sum_{\nu=1}^n 2\nu \beta_\nu}.$$

Обозначим через $M_1(q)$ образ мультипликативного моноида $M(\mathbb{P}(q))$ при гомоморфизме N_1 , а через $M_2(q)$ при гомоморфизме N_2 . Непосредственно из определения следует, что

$$M_1(q) = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}, \quad M_2(q) = \{1, q^2, q^4, q^6, \dots\}.$$

Отсюда сразу следует, что $P(M_1(q)) = \{q\}$ и $P(M_2(q)) = \{q^2\}$.

Определим функции $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)), N_1(n) \leq x} 1, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}(q)), N_2(n) \leq x} 1.$$

ЛЕММА 5. *Справедливы неравенства:*

для любого $n \in M(\mathbb{P}(q))$ имеем $N_1(n) \leq n \leq N_2(n)$,

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \leq \nu_{M(\mathbb{P}(q))}(x) \leq \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = \prod_{j=1}^m (q^j p_j)^{\beta_j}$, тогда, так как $q^j \leq q^j p_j \leq q^{2j}$, имеем неравенства

$$N_1(n) = q^{\sum_{j=1}^m j \beta_j} \leq n \leq q^{\sum_{j=1}^m 2j \beta_j} = N_2(n).$$

Отсюда сразу вытекает двустороннее неравенство для функции $\nu_{M(q^j)}(x)$. \square

Обозначим через $p_1(n)$ количество решений в неотрицательных целых числах $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots$ диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + r \cdot x_r + \dots,$$

а через $p_2(n)$ количество решений диофантова уравнения

$$n = 2(1 \cdot x_1 + \dots + r \cdot x_r + \dots).$$

Ясно, что $p_2(2n) = p_1(n)$ и $p_2(2n+1) = 0$.

Положим

$$P_1(x) = \sum_{n \leq x} p_1(n), \quad P_2(x) = \sum_{n \leq x} p_2(n).$$

Очевидно, что

$$P_2(x) = \sum_{2n \leq x} p_1(n) = P_1\left(\frac{x}{2}\right).$$

ЛЕММА 6. *Справедливы равенства*

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{2 \ln q}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $N_1(n) = q^m$, то $m = \sum_{\nu=1}^n j_\nu \beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(\mathbb{P}(q))$, таких что $N_1(n) = q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(n) = q^m \leq x$ следует, что $m \leq \frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано.

Аналогично, если $N_2(n) = q^{2m}$, то $m = \sum_{\nu=1}^n j_\nu \beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(\mathbb{P}(q))$, таких что $N_2(n) = q^{2m}$, в точности равно $p_2(2m)$. Так как из $N_2(n) = q^{2m} \leq x$ следует, что $m \leq \frac{\ln x}{2 \ln q}$, то второе равенство доказано. \square

4. Следствия из аддитивной теоремы Ингама

Нам потребуется следующая аддитивная теорема Ингама (см. [27], стр. 180), которую мы приведём в сокращённой форме.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ — данная последовательность вещественных чисел, причём*

$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$

где $N(u)$ — количество чисел λ_ν , не превосходящих u , и

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v} dv = b \ln u + c + o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$. Для вещественного l пусть будет $p(l)$ — количество решений уравнения

$$l = r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + \dots$$

в целых $r_\nu \geq 0$.

Обозначим для вещественного u

$$P(u) = \sum_{l < u} p(l),$$

где суммирование ведётся по дискретному множеству чисел l , для которых $p(l) \neq 0$.

Тогда при $u \rightarrow \infty$

$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-(b+\frac{1}{2})\alpha} u^{(b+\frac{1}{2})(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При $x \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$P_1(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln 2\frac{\ln x}{\ln q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), тогда $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$, $B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и (см. [27], стр. 181)

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_1(x) = P(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),1}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln 2\frac{\ln x}{\ln q}.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 2. При $x \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$P_2(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}}, \quad \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x}{\ln q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущего следствия имеем:

$$P_2(x) = P_1\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}x}},$$

$$\nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{2\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}},$$

$$\ln \nu_{M(\mathbb{P}(q)),2}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln q}} - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \frac{\ln x}{\ln q}.$$

□

5. Заключение

В работе [6] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Из следствий 1–2 видно, что это понятие не работает в случае основных моноидов типа q . В работе [26] было дано естественное новое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ -степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M, n \leq x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из следствия 1–2 следует, что любой основной моноид $M(\mathbb{P}(q))$, если имеет C логарифмическую θ -степенную плотность, то $\theta = \frac{1}{2}$, а для константы C справедливы неравенства

$$\pi \sqrt{\frac{1}{3 \ln q}} \leq C \leq \pi \sqrt{\frac{2}{3 \ln q}}.$$

Таким образом, остается открытым вопрос о существовании логарифмической $\frac{1}{2}$ -степенной плотности и, если она существует, то о величине константы C .

В заключение авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
2. Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ ”, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.
3. Б. М. Бредихин, “Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп”, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.
4. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.
5. Б. М. Бредихин, “О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп”, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.
6. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.
7. Б. М. Бредихин, “Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией”, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.
8. Б. М. Бредихин, Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.
9. Б. М. Бредихин, О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 – 612.

10. Б. М. Бредихин, О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.
11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
12. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
13. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
14. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.
15. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
16. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
17. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
18. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
19. Н. Н. Добровольский, “Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера”, Матем. заметки, 109:3 (2021), 464–469
20. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).
21. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о “заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
22. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
23. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.
24. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
25. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
26. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

27. А. Г. Постников Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
28. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
29. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.
30. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
31. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.
32. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.
2. Bredikhin, B.M., 1960, "The remainder term in the asymptotic formula for the function $\nu_G(x)$ ", *Izvestiya vuzov Matematika*, no. 6, pp. 40–49.
3. Bredikhin, B.M., 1960, "An elementary solution of inverse problems on bases of free semigroups", *matematicheskiiy sbornik*, 50(92):2, pp. 221–232.
4. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", *Doklady Akademii nauk SSSR*, 118:5, pp. 855–857.
5. Bredikhin, B.M., 1958, "On power densities of some subsets of free semigroups", *Izvestiya vuzov Matematika*, no. 3, pp. 24–30.
6. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", *matematicheskiiy sbornik*, 46(88):2, pp. 143–158.
7. Bredikhin, B.M., 1956, "An example of a finite homomorphism with a bounded adder function", *UMN*, 11:4(70), pp. 119–122.
8. Bredikhin, B.M., 1956, "Some questions of the theory of characters of commutative semigroups", *Trudy 3-go Vsesoyuznogo matematicheskogo s'yezda*, vol. 1, Moskva, izdatel'stvo akademii nauk SSSR, no. 3.
9. Bredikhin, B.M., 1954, "On adder functions of characters of numerical semigroups", *DAN* 94, pp. 609 – 612.
10. Bredikhin, B.M., 1953, "On the characters of numerical semigroups with a rather rare base", *DAN* 90, pp. 707–710.
11. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
12. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
13. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

14. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
15. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
16. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 142–150.
17. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
18. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.
19. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.
20. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
21. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
22. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.
23. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.
24. Postnikov, A. G., 1971, *Introduction to analytical number theory* Izd-vo "Nauka", Moskva, 416 p.
25. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.
26. Trost E., 1959, "Prime numbers", *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 136 p.
27. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
28. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIz, — 204 p.
29. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей¹

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Матвеева Елизавета Александровна — Центр творческого развития и гуманитарного образования (г. Суворов, Тульская область).

e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Аннотация

В работе вводится новое понятие — система совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Проводится параллельное изложение элементов теории полиномов Туэ для одной алгебраической иррациональности и основ теории для системы совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Сформулирована гипотеза об аналоге теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j -ого порядка, через которые выражаются все остальные. Для системы двух квадратичных иррациональностей, например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, найдены системы совместных основных полиномов порядка не ниже 0-го, 1-го и 2-го. Доказана теорема об общем виде пары основных полиномов Туэ произвольного порядка n для квадратичной иррациональности \sqrt{c} , где c — бесквадратное натуральное число.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, остаточные дроби, цепные дроби, пара Туэ, система совместных полиномов Туэ.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева. Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 4, С. 77–91.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта

№19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities²

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Matveeva Elizabeth Alexandrovna** — Center for Creative Development and Humanitarian Education (Suvorov, Tula Region).*e-mail: morozova.tspu@gmail.com***Abstract**

The paper introduces a new concept — a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities. A parallel presentation of the elements of the theory of Thue polynomials for one algebraic irrationality and the foundations of the theory for a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities is carried out. A hypothesis is formulated about an analogue of the theorem of M. N. Dobrovolsky (Sr.) that for each order of j there are two main Thue polynomials of the j th order, through which all the others are expressed. For a system of two quadratic irrationalities, for example, $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, systems of joint basic polynomials of order no lower than 0, 1 and 2 are found. A theorem is proved on the general form of a pair of basic Thue polynomials of arbitrary order n for quadratic irrationality \sqrt{c} , where c is a square-free natural number.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, Tye pair, a system of joint Tye polynomials.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva, 2022, "Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 77–91.

1. Введение

Полиномы Туэ были введены в работе [6] и использовались А. Туэ для оценки снизу скорости приближения иррационального числа α рациональными дробями $\frac{p}{q}$. В работах [1] и [4] строилась систематическая теория полиномов Туэ и были построены основные полиномы Туэ для кубических и биквадратичных иррациональностей. В работе [3] был рассмотрен вопрос о нахождении основных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей. В данной работе для одного класса квадратичных иррациональностей этот вопрос решён полностью.

²The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of a scientific project

No.19-41-710004_p_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

Цель настоящей работы — рассмотреть новое понятие — система совместных основных полиномов Туэ произвольного порядка для двух вещественных квадратичных иррациональностей.

Всё изложение будет вестись для случая двух целых алгебраических иррациональностей. Например, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$. Поэтому определения, которые мы рассмотрим ниже, будут отличаться от тех, что даны в работах [1] — [6].

2. Матричные разложения

В работе [4] В. Д. Подсыпанин рассмотрел одно обобщение понятия непрерывной дроби, которое он назвал матричным разложением. В этой работе он получил матричные разложения иррациональностей третьей и четвертой степени. Мы рассмотрим обобщение этого понятия на случай двух иррациональностей.

Пусть

$$\prod_{k=0}^n \begin{pmatrix} a_k & c_k & e_k \\ b_k & d_k & f_k \\ g_k & h_k & m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & C_n & E_n \\ B_n & D_n & F_n \\ G_n & H_n & M_n \end{pmatrix}.$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{M_n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{M_n} = \beta,$$

то пишут

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & c_k & e_k \\ b_k & d_k & f_k \\ g_k & h_k & m_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

и называют формулу (1) матричным совместным разложением системы чисел α и β .

Пусть далее

$$\begin{aligned} T_{n,j}(t) &= (t - \alpha)^n V_{n,j}(t) = A_{n,j}(t) - \alpha B_{n,j}(t) \quad (j = 1, 2, 3); \\ U_{n,j}(t) &= (t - \beta)^n W_{n,j}(t) = C_{n,j}(t) - \beta B_{n,j}(t) \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Разделив обе части равенства (2) на $B_{n,j}(t)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} - \alpha &= (t - \alpha)^n \frac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} \quad (j = 1, 2, 3); \\ \frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} - \beta &= (t - \beta)^n \frac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Если при фиксированном t , отношения $\frac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ и $\frac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ ($j = 1, 2, 3$) возрастают не быстрее показательной функции от n , то при достаточно малом $|t - \alpha|$ и $|t - \beta|$ правые части (2) стремятся к нулю при возрастании n , и мы можем утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} = \alpha \quad (|t - \alpha| < \delta), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)} = \beta \quad (|t - \beta| < \delta \quad (j = 1, 2, 3)). \quad (4)$$

Поэтому мы можем написать матричное разложение системы алгебраических чисел α и β в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,1}(t) & A_{0,2}(t) & A_{0,3}(t) \\ C_{0,1}(t) & C_{0,2}(t) & C_{0,3}(t) \\ B_{0,1}(t) & B_{0,2}(t) & B_{0,3}(t) \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) & Q_{k,3}(t) \\ R_{k,1}(t) & R_{k,2}(t) & R_{k,3}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) & P_{k,3}(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Разложение (5) существенно отличается от разложения (1) тем, что содержит рациональный параметр t и девять последовательностей многочленов, зависящих от t . При этом первое из равенств (4) выполняется в окрестности точки α , а второе — в окрестности точки β .

Такие разложения будем называть *совместными многочленными матричными разложениями*.

Если удастся найти такое $a > 1$, что $\left| \frac{V_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)} \right| < a^n$ ($\nu = 1, 2, 3$) для t , лежащих в интервал $|t - \alpha| < \frac{1}{a}$, и $\left| \frac{W_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)} \right| < a^n$ ($\nu = 1, 2, 3$) для t , лежащих в интервал $|t - \beta| < \frac{1}{a}$, то в системе этих интервалов многочленное матричное разложение сходится к системе α, β .

3. Определения и необходимые сведения

Прежде всего напомним некоторые определения приведённые в работе [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Полиномом Туэ n -го порядка для целого алгебраического числа α называются полиномы $T_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, где $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^n$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^n$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{n+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$.

Ясно, что существуют полиномы Туэ любого порядка. Действительно, если целое алгебраическое число α является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлен $f(x)$ является унитарным, неприводимым, примитивным многочленом. Поэтому любой целочисленный многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Таким образом, полиномы $T_{n,1}(t) = f^n(t)$ и $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)$ — тривиальные полиномы Туэ порядка n .

Из предыдущего раздела видно, что полиномы Туэ могут использоваться для построения многочленных матричных разложений, сходящихся к α . При этом очевидно, что тривиальные полиномы Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные полиномы Туэ любого порядка n .

В работе [1] М. Н. Добровольский доказал следующие важные свойства полиномов Туэ.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого порядка n существуют два основных полинома Туэ $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ таких, что любой полином Туэ k -го порядка с $k \geq n$ имеет вид:*

$$T_k(t) = M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t),$$

где $M_{k,n}(t)$ и $N_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2. *Если для полиномов*

$$T_{j_1,1}(t, \alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t), \quad T_{j_2,2}(t, \alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t)$$

порядка не ниже n имеет место

$$P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = f^n(t)c_n,$$

где c_n — целое число не равное нулю, то полиномы $T_{j_1,1}(t, \alpha)$, $T_{j_2,2}(t, \alpha)$ являются основными для порядка n .

Пользуясь этими свойствами, В. Д. Подсыпанин в работе [4] дает следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка n , а $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка $n + 1$, то формулы

$$\begin{cases} T_{n+1,1}(t) = Q_{n,1}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,1}(t)T_{n,2}(t) \\ T_{n+1,2}(t) = Q_{n,2}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,2}(t)T_{n,2}(t) \end{cases} \quad (6)$$

называются формулами перехода от полиномов n -го порядка к полиномам $n + 1$ -го.

Многочлены $Q_{n,1}$, $Q_{n,2}$, $P_{n,1}$, $P_{n,2}$ называются многочленами перехода. Матрица

$$\begin{pmatrix} Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \\ P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \end{pmatrix}$$

— матрицей перехода, её определитель — определителем перехода.

Числа $\tilde{\alpha}_{n,1} = \frac{P_{n,1}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ и $\tilde{\alpha}_{n,2} = \frac{P_{n,2}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ — множителями перехода.

В этой же работе В. Д. Подсыпанин доказывает следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если полиномы $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$, получаемые по формуле (6), являются основными, то

$$Q_{n,1}(t)P_{n,2}(t) - P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) = K_n f(t),$$

где $K_n \neq 0$ и не зависит от t .

И обратно.

Как отмечал В. Д. Подсыпанин в работе [4] "Общих методов для нахождения этих последовательностей неизвестно. Сам Туэ нашёл полиномы, носящие его имя, только для $\alpha = \sqrt[3]{a}$. Путём некоторых преобразований к этому виду были приведены полиномы Туэ для иррациональностей третьей степени Зигелем [5], а для иррациональностей четвертой степени с равным нулю кубическим инвариантом Кречмером [2]."

Введем теперь следующие обозначения

$$\begin{aligned} f(t) &= t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m; & f(\alpha) &= 0, \\ \alpha_1 &= \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_m & \text{— корни } f(t); \\ \omega_i &= t - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); & \omega_1 &= \omega; \quad \delta_i = \alpha - \alpha_i \quad (i = 2, 3, \dots, m), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega + \delta_i \quad (i = 2, 3, \dots, m), \\ f(t) &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m = \omega(\omega + \delta_2) \dots (\omega + \delta_m) = \\ &= \omega^m + A_1 \omega^{m-1} + \dots + A_{m-1} \omega, \end{aligned}$$

где A_i — основные симметрические функции от δ_i .³ Из формулы Тейлора для многочленов

$$f(t) = f(\alpha) + \sum_{\nu=1}^m \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (t - \alpha)^\nu = \sum_{\nu=1}^m \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (t - \alpha)^\nu$$

³ $A_1 = \delta_2 + \dots + \delta_m$, $A_2 = \delta_2 \delta_3 + \dots + \delta_2 \delta_m + \dots + \delta_{m-1} \delta_m = \sum_{2 \leq i < j \leq m} \delta_i \delta_j$, \dots ,

$A_{m-1} = \delta_2 \dots \delta_m$.

вытекает, что

$$A_\nu = \frac{f^{(m-\nu)}(\alpha)}{(m-\nu)!} = C_m^{m-\nu} \alpha^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{m-\mu}^{m-\nu} a_\mu \alpha^{\nu-\mu} \quad (\nu = 1, \dots, m-1).$$

Применительно к квадратичной иррациональности $\alpha = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$, где c — бесквадратное натуральное число, имеем

$$f(t) = t^2 - c, \quad \omega = t - \sqrt{c}, \quad \delta = 2\sqrt{c}, \quad A_1 = 2\sqrt{c}, \quad f(t) = \omega^2 + 2\sqrt{c} \cdot \omega.$$

Рассмотрим теперь полиномы со следующими свойствами

1. Они являются симметрическими многочленами относительно ω_i .
2. Их степень не превосходит $m-1$.

Такие полиномы В. Д. Подсыпанин называет *критическими*.

Нетрудно видеть, что если критические полиномы рассматривать как функции от t , то они имеют рациональные коэффициенты.

Если же их рассматривать как функции от ω , то коэффициенты будут целыми рациональными выражениями от A_i .

Основное свойство критических полиномов следующее:

ТЕОРЕМА 4. *Существует один и только один критический полином, имеющий в разложении по степеням ω данный свободный член*

$$Y(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}).$$

4. Система совместных полиномов Туэ для двух иррациональностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Системой совместных полиномов Туэ n -го порядка для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^n$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^n$; $U_n(t)$ делится на $(t - \beta)^n$, $U_n(t) = W_n(t)(t - \beta)^n$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{n+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ не делится на $(t - \beta)^{n+1}$, $W_n(\beta) \neq 0$.

Ясно, что существуют системы совместных полиномов Туэ любого порядка для целых алгебраических чисел α и β . Действительно, если иррациональное число является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, а β — корень минимального многочлена с целыми коэффициентами $h(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлены $f(x)$ и $h(x)$ являются унитарными, неприводимыми, примитивными многочленами. Поэтому любой многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$, а любой многочлен $C_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \beta)^n$, будет иметь вид $h^n(t)c(t)$ и $(h(t), c(t)) = 1$, $c(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Таким образом, пары полиномов $T_{n,1}(t) = f^n(t)$, $U_{n,1}(t) = h^n(t)$; $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,2}(t) = -\beta f^n(t)h^n(t)$ и $T_{n,3}(t) = f^n(t) - \alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,3}(t) = h^n(t) - \beta f^n(t)h^n(t)$ — тривиальные системы совместных полиномов Туэ порядка n .

Из второго раздела видно, что системы совместных полиномов Туэ могут использоваться для построения совместных многочленных матричных разложений, сходящихся к α и β . При этом очевидно, что тривиальные системы совместных полиномов Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные системы совместных полиномов Туэ любого порядка n .

Из условия $(t - \alpha)^n | T_n(t)$, а $(t - \alpha)^{n+1} \nmid T_n(t)$ следует, что $(t - \alpha) \left| \frac{d^\nu T_n(t)}{dt^\nu} \right.$ при $\nu = 0, \dots, n-1$ и $(t - \alpha) \nmid \frac{d^n T_n(t)}{dt^n}$.

Так как $P(t) - \alpha Q(t) = P(t) - tQ(t) + (t - \alpha)Q(t)$, то соотношение $(t - \alpha) | P(t) - \alpha Q(t)$ эквивалентно соотношению $f(t) | P(t) - tQ(t)$.

Отсюда следует, что пара полиномов $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$ и $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$ является системой совместных полиномов Туэ n -го порядка для целых алгебраических чисел α и β тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2n + 2$ условий

$$f(t) \left| \frac{d^\nu A_n(t)}{dt^\nu} - t \frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu} \right., \quad h(t) \left| \frac{d^\nu C_n(t)}{dt^\nu} - t \frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu} \right. \quad (\nu = 0, \dots, n-1)$$

и

$$f(t) \nmid \frac{d^n A_n(t)}{dt^n} - t \frac{d^n B_n(t)}{dt^n}, \quad h(t) \nmid \frac{d^n C_n(t)}{dt^n} - t \frac{d^n B_n(t)}{dt^n}.$$

Дадим модификацию определения 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Системой совместных полиномов Туэ порядка не ниже n -го для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;
2. $T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^k$, $T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^k$; $U_n(t)$ делится на $(t - \beta)^m$, $U_n(t) = W_n(t)(t - \beta)^m$;
3. $T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{k+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ не делится на $(t - \beta)^{m+1}$, $W_n(\beta) \neq 0$;
4. $\min(k, m) \geq n$.

Ясно, что следующие три пары полиномов Туэ являются системой совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого: $T_{0,1}(t) = 1$, $U_{0,1}(t) = 0$; $T_{0,2}(t) = 0$, $U_{0,2}(t) = 1$; $T_{0,3}(t) = -\alpha$, $U_{0,3}(t) = -\beta$, причём любая пара совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого $T_0(t)$, $U_0(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} T_0(t) &= a(t) - \alpha b(t) = a(t)T_{0,1}(t) + c(t)T_{0,2}(t) + b(t)T_{0,3}(t), \\ U_0(t) &= c(t) - \beta b(t) = a(t)U_{0,1}(t) + c(t)U_{0,2}(t) + b(t)U_{0,3}(t). \end{aligned}$$

Нетрудно задать соответствие между парами совместных полиномов Туэ и тройками Туэ:

$$T(t) = a(t) - \alpha b(t), U(t) = c(t) - \beta b(t) \longleftrightarrow (a(t), c(t), b(t)) \in \mathbb{Z}^3.$$

Отсюда следует, что множество пар совместных полиномов Туэ и множества троек Туэ являются изоморфными свободными $\mathbb{Z}[t]$ модулями ранга 3.

Естественно предположить, что справедлив аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. Для любого порядка n существуют три системы совместных основных полинома Туэ $T_{n,\nu}(t)$ и $U_{n,\nu}(t)$ ($\nu = 1, 2, 3$) порядка не ниже n такие, что любая система совместных полиномов Туэ порядка не ниже k -го с $k \geq n$ имеет вид:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)T_{n,3}(t), \\ U_k(t) &= M_{k,n}(t)U_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)U_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)U_{n,3}(t), \end{aligned}$$

где $M_{k,n}(t)$, $N_{k,n}(t)$ и $K_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Если $T_{n,\nu}(t) = a_{n,\nu}(t) - \alpha b_{n,\nu}(t)$, $U_{n,\nu}(t) = c_{n,\nu}(t) - \beta b_{n,\nu}(t)$, ($\nu = 1, 2, 3$) и

$$T_k(t) = a_k(t) - \alpha b_k(t), \quad U_k(t) = c_k(t) - \beta b_k(t),$$

то справедливо матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a_k(t) & c_k(t) & b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{k,n}(t) & N_{k,n}(t) & K_{k,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,1}(t) & c_{n,1}(t) & b_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) & c_{n,2}(t) & b_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) & c_{n,3}(t) & b_{n,3}(t) \end{pmatrix}.$$

5. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка

Следуя работе [4] В. Д. Подсыпанина найдем основные многочлены до 2-го порядка для любого α .

Начнем с многочленов нулевого порядка.

Таковыми многочленами очевидно являются 1 и $-\alpha$.

Однако, В. Д. Подсыпанин предлагает пользоваться при переходах критическими многочленами, поэтому возьмём:

$$T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -A_1 = -a_1 - m\alpha, \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned} P_{0,1}(t) &= 1, & Q_{0,1}(t) &= 0; \\ P_{0,2}(t) &= -a_1, & Q_{0,2}(t) &= m. \end{aligned}$$

Первый переход осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} mT_{1,1}(t) = (m\omega + A_1)T_{0,1}(t) + T_{0,2}(t), \\ mT_{1,2}(t) = ((m\omega + A_1)f'(t) - m^2f(t))T_{0,1}(t) + f'(t)T_{0,2}(t). \end{cases} \quad (8)$$

Определитель перехода будет равен $f(t)$, то есть полученные многочлены будут основными многочленами первого порядка.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} \omega + \frac{A_1}{m} & \frac{1}{m} \\ (\omega + \frac{A_1}{m})f'(t) - mf(t) & \frac{f'(t)}{m} \end{vmatrix} = f(t).$$

Множители перехода равны $\tilde{\alpha}_{0,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{0,2} = +A_{m-1}$.

Произведя вычисления, получим $T_{1,1}(t) = \omega = t - \alpha_1$,

$$T_{1,2}(t) = -\omega (A_1\omega^{m-2} + 2A_2\omega^{m-3} + \dots + (m-1)A_{m-1}). \quad (9)$$

Второй переход осуществляется по формулам

$$\begin{cases} mT_{2,1}(t) = & (m-1)f'(t) T_{1,1}(t) + & T_{1,2}(t), \\ mT_{2,2}(t) = (m-1)(m^2f(t) - (m\omega + A_1)f'(t)) T_{1,1}(t) - (m\omega + A_1) T_{1,2}(t). \end{cases} \quad (10)$$

Определитель второго перехода будет равен $(m-1)f(t)$, то есть $T_{2,1}(t)$ и $T_{2,2}(t)$ — основные многочлены второго порядка.

Множители второго перехода равны $\tilde{\alpha}_{1,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{1,2} = A_1$.

Проведя вычисления получим:

$$\begin{aligned} T_{2,1}(t) &= \omega^2 ((m-1)\omega^{m-2} + (m-2)A_1\omega^{m-3} + \dots + A_{m-2}), \\ T_{2,2}(t) &= \omega^2 (A_1\omega^{m-2} + (2mA_2 - (m-2)A_1^2)\omega^{m-3} + \dots + \\ &\quad + (m(m-1)A_{m-1} - A_1A_{m-2})). \end{aligned} \quad (11)$$

Следующий переход получить в общем виде не удаётся. Он оказывается существенно различным для разных α .

Подставив значение начальных многочленов и первых переходных многочленов в формулу (5), В. Д. Подсыпанин нашёл несколько первых множителей разложения.

Обозначим $m\omega + A_1 = Q(t)$; $Q(t)f'(t) - m^2f(t) = S(t)$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & -S(t) \\ 1 & -Q(t) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Перемножив две первые матрицы и добавив после четвёртой матрицы произведение

$$\begin{pmatrix} m & -a_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

и перемножив четвертую и пятую матрицы, мы получим более изящный вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} t & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) были основой в работе В. Д. Подсыпанина для получения разложений для $m = 3$ и 4 .

6. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $m = 2$, $f(t) = t^2 - c$, $c \in \mathbb{N}$, $d = 4c > 0$ и $\alpha = \frac{\sqrt{d}}{2} = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$ — сопряжённые квадратические вещественные иррациональности, корни неприводимого многочлена $f(t)$.

Для числа α последовательно находим основные многочлены Туэ:

нулевого порядка

$$\begin{aligned} T_{0,1}(t) &= 1, & T_{0,2}(t) &= \alpha, \\ P_{0,1}(t) &= 1, & Q_{0,1}(t) &= 0, \\ P_{0,2}(t) &= 0, & Q_{0,2}(t) &= 1; \end{aligned}$$

первого порядка

$$\begin{aligned} T_{1,1}(t) &= \omega = t - \alpha, & T_{1,2}(t) &= c - \alpha t, \\ P_{1,1}(t) &= t, & Q_{1,1}(t) &= 1, \\ P_{1,2}(t) &= c, & Q_{1,2}(t) &= t; \end{aligned}$$

второго порядка

$$\begin{aligned} T_{2,1}(t) &= \omega^2 = t^2 + c - 2\alpha t, \\ P_{2,1}(t) &= t^2 + c, & Q_{2,1}(t) &= 2t, \\ T_{2,2}(t) &= \omega^2 \cdot (-\alpha) = 2ct - \alpha(t^2 + c), \\ P_{2,2}(t) &= 2ct, & Q_{2,2}(t) &= t^2 + c. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что справедливы матричные равенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Естественно предположить, что общий вид основных многочленов Туэ порядка n для квадратичной иррациональности α можно задать матричным равенством

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}^n.$$

Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_{0,1}(t) &= 1, & T_{0,2} &= -\sqrt{c}; \\ \begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}, & \left| \begin{matrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{matrix} \right| &= t^2 - c, \\ T_{1,1}(t) &= t - \sqrt{c}, & T_{1,2} &= c - t\sqrt{c}; \\ \begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}, & \left| \begin{matrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{matrix} \right| &= (t^2 - c)^2, \\ T_{2,1}(t) &= t^2 + c - 2t\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^2, & T_{2,2}(t) &= 2ct - (t^2 + c)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^2; \\ \begin{pmatrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + 3ct & c(3t^2 + c) \\ 3t^2 + c & t^3 + 3ct \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\left| \begin{matrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{matrix} \right| = (t^2 - c)^3,$$

$$T_{3,1}(t) = t^3 + 3ct - (3t^2 + c)\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^3, \quad T_{3,2}(t) = c(3t^2 + c) - (t^3 + 3ct)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^3.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть c — безквадратное натуральное число и квадратичная иррациональность $\alpha = \sqrt{c}$ — корень унитарного, неприводимого примитивного многочлена $f(x) = x^2 - c$, тогда для основных многочленов Туэ порядка n справедливо равенство

$$\begin{aligned} T_{n,1}(t) &= t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j - \sqrt{c} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j = (t - \sqrt{c})^n, \\ T_{n,2}(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} - \sqrt{c} \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) = -\sqrt{c} (t - \sqrt{c})^n; \\ P_{n,1}(t) &= t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j, \quad P_{n,2}(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1}, \\ Q_{n,1}(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j, \quad Q_{n,2}(t) = t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j, \\ P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) - P_{n,2}(t)Q_{n,1}(t) &= (t^2 - c)^n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведём по индукции.

При $n = 0$ имеем:

$$P_{0,1}(t) = 1, \quad P_{0,2}(t) = 0, \quad Q_{0,1}(t) = 0, \quad Q_{0,2}(t) = 1, \quad T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -\sqrt{c}$$

и

$$P_{0,1}(t)Q_{0,2}(t) - P_{0,2}(t)Q_{0,1}(t) = 1,$$

поэтому утверждение теоремы справедливо.

Пусть $n \geq 0$ и утверждение теоремы справедливо, то есть

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} \\ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j & t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим многочленную матрицу

$$\begin{pmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Последовательно получим

$$\begin{aligned} P_{n+1,1}(t) &= t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} = \\ &= t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n+1-2j} c^j + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_n^{2j-1} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2j} t^{n+1-2j} c^j, \\ P_{n+1,2}(t) &= c \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j \right) + t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} t^{n-2j} t^{n-2j} c^{j+1} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} t^{n-2j} c^{j+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2j+1} t^{n+1-2j-1} c^{j+1}, \\
Q_{n+1,1}(t) &= t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j = \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j} c^j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1-1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{n+1-2j-1} t^{n+1-2j-1} c^j, \\
Q_{n+1,2}(t) &= c \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^{j+1} + t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{n-2j} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} C_{n+1}^{n+1-2j} t^{n+1-2j} c^j, \\
P_{n+1,1}(t)Q_{n+1,2}(t) - P_{n+1,2}(t)Q_{n+1,1}(t) &= \begin{vmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & c \\ 1 & t \end{vmatrix} = (t^2 - c)^n (t^2 - c) = (t^2 - c)^{n+1}
\end{aligned}$$

и теорема полностью доказана. \square

7. Системы совместных полиномов Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $1 < a < b$ — два бесквадратных натуральных числа, например $a = 2$, $b = 3$, и $\alpha = \sqrt{a}$, $\beta = \sqrt{b}$.

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) & P_{0,3}(t) \\ R_{0,1}(t) & R_{0,2}(t) & R_{0,3}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) & Q_{0,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{1,1}(t) & P_{1,2}(t) & P_{1,3}(t) \\ R_{1,1}(t) & R_{1,2}(t) & R_{1,3}(t) \\ Q_{1,1}(t) & Q_{1,2}(t) & Q_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \\
\begin{vmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = (t^2 - a)(t^2 - b).$$

Мы получаем пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого:

$$\begin{aligned}
T_{1,1}(t) &= t - \alpha, & U_{1,1}(t) &= t - \beta; \\
T_{1,2}(t) &= a - \alpha t = -\alpha(t - \alpha), & U_{1,2}(t) &= t^2 - \beta t = t(t - \beta); \\
T_{1,3}(t) &= t^2 - \alpha t = t(t - \alpha), & U_{1,3}(t) &= b - \beta t = -\beta(t - \beta).
\end{aligned}$$

Перейдём, теперь, к получению пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого. Если $T_2(t) = P_2(t) - \alpha Q_2(t)$, $U_2(t) = R_2(t) - \alpha Q_2(t)$ — пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого, то справедливы следующие четыре соотношения:

$$t^2 - a \mid P_2(t) - tQ_2(t), \quad t^2 - b \mid R_2(t) - tQ_2(t), \quad (14)$$

$$t^2 - a \mid P_2'(t) - tQ_2'(t), \quad t^2 - b \mid R_2'(t) - tQ_2'(t). \quad (15)$$

Из соотношений (14) следует, что

$$P_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - a)g(t), \quad R_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - b)g_1(t), \quad g(t), g_1(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Отсюда следует, что

$$P_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg(t) + (t^2 - a)g'(t), \quad R_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg_1(t) + (t^2 - b)g_1'(t).$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$t^2 - a \mid Q_2(t) + 2tg(t), \quad t^2 - b \mid Q_2(t) + 2tg_1(t).$$

Таким образом, имеем:

$$Q_2(t) = (t^2 - a)p(t) - 2tg(t) = (t^2 - b)q(t) - 2tg_1(t), \quad p(t), q(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Располагая по степеням t , получим уравнение

$$t^2(p(t) - q(t)) + 2t(g_1(t) - g(t)) = ap(t) - bq(t)$$

в целых многочленах $p(t)$, $q(t)$, $g(t)$ и $g_1(t)$.

Положим $p(t) = tp_1(t) + c$, $q(t) = tq_1(t) + d$, $g_2(t) = g_1(t) - g(t)$, получим

$$t^3(p_1(t) - q_1(t)) + t^2(c - d) + t(2g_2(t) - ap_1(t) + bq_1(t)) = ac - bd.$$

Отсюда следует, что $c = \frac{b}{(a,d)}f$, $d = \frac{a}{(a,b)}f$ и f — любое целое число. Далее получим:

$$t^2(p_1(t) - q_1(t)) + t \frac{b-a}{(a,d)}f = ap_1(t) - bq_1(t) - 2g_2(t).$$

Используя матрицу перехода от системы совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 1-ого к системе совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 2-ого, получим:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) \\ n_{1,1}(t) & n_{1,2}(t) & n_{1,3}(t) \\ k_{1,1}(t) & k_{1,2}(t) & k_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} tm_{1,1}(t) + an_{1,1}(t) + t^2k_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + an_{1,2}(t) + t^2k_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + an_{1,3}(t) + t^2k_{1,3}(t) \\ tm_{1,1}(t) + t^2n_{1,1}(t) + bk_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + t^2n_{1,2}(t) + bk_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + t^2n_{1,3}(t) + bk_{1,3}(t) \\ m_{1,1}(t) + tn_{1,1}(t) + tk_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) + tn_{1,2}(t) + tk_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) + tn_{1,3}(t) + tk_{1,3}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$P_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + an_{1,\nu}(t) + t^2k_{1,\nu}(t), \quad R_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + t^2n_{1,\nu}(t) + bk_{1,\nu}(t), \\ Q_{2,\nu}(t) = m_{1,\nu}(t) + tn_{1,\nu}(t) + tk_{1,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Условия на полиномы Туэ порядка не ниже второго запишутся следующим образом:

$$(t - \alpha)^2 \mid P_{2,\nu}(t) - \alpha Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \alpha)^2 Q_{2,\nu}(t) + P_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + a}{2t} Q_{2,\nu}(t), \\ (t - \beta)^2 \mid R_{2,\nu}(t) - \beta Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \beta)^2 Q_{2,\nu}(t) + R_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + b}{2t} Q_{2,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Это даёт общий вид для пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$T(t) = Q(t) \frac{t^2 + a}{2} + (t^2 - a)^2 P(t) - \alpha t Q(t) = (t - \alpha)^2 \left(\frac{Q(t)}{2} + (t + \alpha)^2 P(t) \right),$$

$$U(t) = Q(t) \frac{t^2 + b}{2} + (t^2 - b)^2 R(t) - \beta t Q(t) = (t - \beta)^2 \left(\frac{Q(t)}{2} + (t + \beta)^2 R(t) \right).$$

Поэтому матрицу системы основных полиномов Туэ порядка не ниже второго можно задать так:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + a & t^2 + a + (t^2 - a)^2 & t^2 + a \\ t^2 + b & t^2 + b & t^2 + b + (t^2 - b)^2 \\ 2t & 2t & 2t \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{vmatrix} = 2t(t^2 - a)^2(t^2 - b)^2.$$

После вычислений находим матрицу перехода от системы основных полиномов Туэ порядка не ниже первого к системе основных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$\begin{pmatrix} 0 & t(t^2 - a) & t(t^2 - b) \\ 1 & 1 + a - t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b - t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & t(t^2 - a) & t(t^2 - b) \\ 1 & 1 + a - t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b - t^2 \end{vmatrix} = 2t(t^2 - a)(t^2 - b).$$

8. Заключение

Сравнивая формулы для основных полиномов Туэ для одной квадратичной иррациональности и для основных полиномов системы совместных полиномов Туэ двух квадратичных иррациональностей, мы видим, что переход к системе совместных полиномов Туэ гораздо сложнее. В частности, на сегодняшний момент трудно сформулировать гипотезу о виде матриц перехода. Ясно, что вид этих матриц может зависеть от порядка системы совместных полиномов Туэ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский М. Н. О разложении иррациональностей третьей степени в непрерывные дроби // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 4 — 24.
2. В. А. Кречмар О верхнем пределе числа представлений целого числа некоторыми бинарными формами четвертой степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1939. Т. 3, вып. 3. С. 289–302.
3. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : Материалы XIII Международной конференции, Тула, 15–17 апреля 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 161-168.
4. Подсыпанин В. Д. О многочленах Туэ и разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 25 — 69.
5. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., 1929, Phys.-Math. Klasse. PP. 1–70.

6. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // *J. reine ang. Math.* 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

REFERENCES

1. Dobrovolskii M. N. 2010 "On the decomposition of irrationalities of the third degree into continuous fractions" *Chebyshevsky Sb.* vol. XI, №. 4 (36). pp. 4–24.
2. V. A. Kretschmar 1939, "On the upper limit of the number of representations of an integer by some binary forms of the fourth degree", *Izv. AN USSR. Ser. matem.* Vol. 3, issue 3. pp. 289–302.
3. E. A. Morozova 2015, "Tue polynomials for quadratic irrationalities", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications : Proceedings of the XIII International Conference, Tula, April 15-17, 2015 / Tolstoy Tula State Pedagogical University. – Tula: Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, – pp. 161-168.*
4. Podsypanin V. D. 2010 "On Thue polynomials and the expansion of irrationalities of the fourth degree into a continued fraction" *Chebyshevskii sbornik.* T. XI, vol. 4 (36). pp. 25–69.
5. Siegel C. L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen", *Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., Phys.-Math. Klasse.* PP. 1–70.
6. Thue A. 1910. "Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen", *J. reine ang. Math.* Vol. 135. PP. 284–305.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-92-104

**Лебегова ограниченность потенциала Рисса для
($k, 1$)-обобщенного преобразования Фурье с радиальными
кусочно-степенными весами¹**

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом $|x|^{-1}v_k(x)$, где $v_k(x)$ — вес Данкля, действует ($k, 1$)-обобщенное преобразование Фурье. Гармонический анализ в этих пространствах важен, в частности, в задачах квантовой механики. Недавно для ($k, 1$)-обобщенного преобразования Фурье был определен потенциал Рисса и для него доказано (L^p, L^q)-неравенство с радиальными степенными весами, являющееся аналогом известного неравенства Стейна — Вейса для классического потенциала Рисса. В работе этот результат обобщается на случай радиальных кусочно-степенных весов. Ранее аналогичное неравенство было доказано для потенциала Данкля — Рисса.

Ключевые слова: ($k, 1$)-обобщенное преобразование Фурье, потенциал Рисса.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Лебегова ограниченность потенциала Рисса для ($k, 1$)-обобщенного преобразования Фурье с радиальными кусочно-степенными весами // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 92–104.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-92-104

**Lebesgue boundedness of Riesz potential for ($k, 1$)-generalized
Fourier transform with radial piecewise power weights²**

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

In spaces with weight $|x|^{-1}v_k(x)$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight, there is the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform. Harmonic analysis in these spaces is important, in particular, in problems of quantum mechanics. Recently, for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform, the Riesz potential was defined and the (L^p, L^q) -inequality with radial power weights was proved for it, which is an analogue of the well-known Stein–Weiss inequality for the classical Riesz potential and the Dunkl–Riesz potential. In the paper, this result is generalized to the case of radial piecewise power weights. Previously, a similar inequality was proved for the Dunkl–Riesz potential.

Keywords: $(k, 1)$ -generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

V. I. Ivanov, 2022, “Lebesgue boundedness of Riesz potential for $(k, 1)$ -generalized Fourier transform with radial piecewise power weights”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 92–104.

1. Введение

Пусть \mathbb{R}^d — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, \mathbb{S}^{d-1} — единичная евклидова сфера в \mathbb{R}^d , Δ — оператор Лапласа, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2} dx$ — нормированная мера Лебега, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu)^{1/p}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,y \rangle} dx$$

— преобразование Фурье.

Введем обозначение $A \lesssim B$, если $A \leq CB$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Как обычно, для $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E .

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)|x - y|^{\alpha-d} d\mu(y) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x)|y|^{\alpha-d} d\mu(y), \tag{1}$$

где $0 < \alpha < d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d - \alpha)/2)$, и $\tau^y f(x) = f(x + y)$ — оператор сдвига.

Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha} \mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2} f) = |\cdot|^\alpha \mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса (1) является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

(L^p, L^q) -ограниченность потенциала Рисса с радиальными степенными весами записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha f(x) \|_q \leq \mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \| |x|^\beta f(x) \|_p, \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

Необходимые и достаточные условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ известны.

Теорема А. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d$. Константа $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ конечна тогда и только тогда, когда $\gamma < \frac{d}{q}$, $\beta < \frac{d}{p}$, $\alpha \geq d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ и $\alpha - \gamma - \beta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Достаточность условий в теореме А была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвудом [1] для $d = 1$, С.Л. Соболевым [2] для $d > 1$ и $\gamma = \beta = 0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [3] в общем случае. Необходимость условий в теореме А установлена в [4].

Одним из важных обобщений преобразования Фурье является преобразование Данкля \mathcal{F}_k (см. [5, 6]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля определили С. Тангавелу и Ю. Шу [7].

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R , $G(R) \subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a : a \in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a, x) = 0$, $k : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G .

Пусть

$$v_k(x) = \prod_{a \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}, \quad d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $\langle k \rangle = \sum_{a \in R_+} k(a)$, $\lambda_k = d/2 - 1 + \langle k \rangle$, $d_k = 2\lambda_k + 2$ — обобщенная размерность пространства \mathbb{R}^d с весом $v_k(x)$, $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $1 \leq p < \infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p, d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_k \right)^{1/p} < \infty$,

$$T_j f(x) = D_j f(x) + \sum_{a \in R_+} k(a) (a, e_j) \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a, x)}, \quad j = 1, \dots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k = \sum_{j=1}^d T_j^2$ — лапласиан Данкля.

Обобщенная экспонента или ядро Данкля $e_k(x, y)$ является единственным решением системы

$$T_j f(x) = i y_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \quad f(0) = 1.$$

Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x, y)}$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x).$$

Если $k \equiv 0$, то \mathcal{F}_0 совпадает с преобразованием Фурье \mathcal{F} . Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$.

М. Реслер (см. [6]) определила оператор обобщенного сдвига τ^y , $y \in \mathbb{R}^d$, для преобразования Данкля равенством

$$\mathcal{F}_k(\tau^y f)(z) = e_k(y, z) \mathcal{F}_k(f)(z), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k),$$

или

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(y, z) e_k(x, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z).$$

Если $k \equiv 0$, то $\tau^y f(x) = f(x + y)$ совпадает с обычным сдвигом.

С. Тангавелу и Ю. Шу [7] определили потенциал Данкля–Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha - d_k} d\mu_k(y), \quad (2)$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha - d_k/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d_k - \alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f) = |\cdot|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)$.

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала Данкля–Рисса и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ примет вид

$$\| |x|^{-\gamma} I_{\alpha}^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k) \| |x|^{\beta} f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

Аналог теоремы А для потенциала (2) установлен в [8, 9]. Там же можно найти предшествующие результаты.

Теорема В. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. Константа $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ конечна при $p = q$ или при $p < q$ и $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ тогда и только тогда, когда $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p}$ и $\alpha - \gamma - \beta = d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$.

Вопрос о необходимости условия $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ при $p < q$ и функции кратности $k \neq 0$ остается открытым.

Как видим, в теореме В размерность d заменяется на обобщенную размерность d_k .

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| \leq 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x), \quad u_{\beta}(x) = |x|^{\beta_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2} \chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции. Рассмотрим для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ неравенство

$$\| u_{-\gamma}(x) I_{\alpha}^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k) \| u_{\beta}(x) f(x) \|_{p, d\mu_k} \tag{3}$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ и $1 < p \leq q < \infty$.

В [4] доказано следующее утверждение.

Теорема С. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. Константа $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ конечна при $p = q$ или при $p < q$ и $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}, \\ \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2. \end{aligned}$$

Дальнейшее обобщение преобразования Фурье и Данкля получено в [10]. Бен Саид, Кобаши и Орстед [10] определили a -деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a} \Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двухпараметрическое семейство унитарных операторов $\mathcal{F}_{k,a}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_{k,a} \right)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k, a) -обобщенным преобразованием Фурье. В спектральной форме

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\left(\frac{i\pi}{2a} (2\lambda_k + a)\right) \exp\left(\frac{i\pi}{2a} \Delta_{k,a}\right), \tag{4}$$

где

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx, \quad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2} v_k(x), \quad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a} v_{k,a}(x) dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k \rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства \mathbb{R}^d с весом $v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (4) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (4) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (4) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье.

Важный случай обобщенного преобразования Фурье получается при $a = 1$. Оно может быть записано как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x, y) f(y) d\mu_{k,1}(y)$$

с непрерывным симметричным ядром $B_k(x, y)$.

Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$ и $f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ определен Бен Саидом и Делевалом [11] (см. также [12]) равенством:

$$\mathcal{F}_{k,1}(\tau^y f)(z) = B_k(y, z) \mathcal{F}_{k,1}(f)(z).$$

Но он также как и оператор сдвига для преобразования Данкля не является положительным оператором и его L^p -ограниченность известна только при $p = 2$.

В [13, 14] в качестве оператора сдвига предложен оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x) d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1} v_{k,1}(y') dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [13] доказано, что оператор (5) положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leq p \leq \infty$. Здесь под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$.

Потенциал Рисса для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ определен в [15] как интегральный оператор

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) |y|^{\alpha-d_{k,1}} d\mu_{k,1}(y), \quad (6)$$

где $0 < \alpha < d_{k,1}$ и $\gamma_\alpha^{k,1} = \Gamma(\alpha)/\Gamma(d_{k,1} - \alpha)$.

Как для потенциалов Рисса и Данкля–Рисса для него справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1} f) = |\cdot|^{-\alpha} \mathcal{F}_{k,1}(f).$$

Потенциал (6) может быть записан с помощью оператора сдвига (5)

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} \int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha-d_{k,1}} d\nu_{\lambda_{k,1}}(t), \quad (7)$$

где

$$d\nu_{\lambda_{k,1}}(r) = b_{\lambda_{k,1}} r^{2\lambda_k} dr, \quad b_{\lambda_{k,1}}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r} r^{2\lambda_k} dr = \Gamma(2\lambda_k + 1).$$

Из (7) следует положительность потенциала (6).

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала (6) и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ имеет вид

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha^{k,1} f(x) \|_{q, d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_1(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k) \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_{k,1}}. \quad (8)$$

В [15] доказано утверждение, аналогичное теореме В, только обобщенная размерность d_k в нем заменяется на обобщенную размерность $d_{k,1}$.

Теорема D. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d_{k,1} > 1$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$. Константа $\mathbf{c}_1(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ конечна при $p = q$ или при $p < q$, $\alpha \geq d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ тогда и только тогда, когда $\gamma < \frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta < \frac{d_{k,1}}{p'}$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Наша цель — доказать аналог теоремы D для кусочно-степенных весов. Запишем аналог неравенства (8) для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u_{-\gamma}(x)I_{\alpha}^{k,1}f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_1(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)\|u_{\beta}(x)f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d_{k,1} > 1$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$. Константа $\mathbf{c}_1(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ конечна при $p = q$ или при $p < q$, $\alpha \geq d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \gamma_1 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_{k,1}}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_{k,1}}{p}, \\ \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \gamma_2 + \beta_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание. Теоремы D и 1 справедливы и при $d_{k,1} = 1$, то есть в этих теоремах можно предполагать $d_{k,1} \geq 1$.

2. Представление потенциала Рисса для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье

Потенциал Рисса (6) для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ можно записать в виде

$$I_{\alpha}^{k,1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Phi_{\alpha}(x, y) d\mu_{k,1}(y), \quad (11)$$

где

$$\Phi_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} s^{d_{k,1}-\alpha-1} \tau^x(e^{-s|\cdot|})(y) ds \quad (12)$$

(см. [15]).

Лемма 1 [15]. Для ядра $\Phi_{\alpha}(x, y)$ выполняются следующие свойства:

1. $\Phi_{\alpha}(x, y) = \Phi_{\alpha}(y, x)$;
2. $\Phi_{\alpha}(rx', ty') = r^{\alpha-d_{k,1}}\Phi_{\alpha}(x', (t/r)y')$;
3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_{\alpha}(rx', ty') d\sigma_{k,1}(x') = (\Phi_{\alpha})_0(r, t)$, где

$$(\Phi_{\alpha})_0(r, t) := (\gamma_{\alpha}^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} \int_0^{\pi} (r + t - 2\sqrt{rt} \cos \varphi)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2} \varphi d\varphi;$$

4. $\Phi_{\alpha}(x, y) = (\gamma_{\alpha}^k)^{-1} \tau^y(|\cdot|^{\alpha-d_{k,1}})(x)$ или, эквивалентно,

$$\gamma_{\alpha}^{k,1}\Phi_{\alpha}(x, y) = V_k \left(\int_{-1}^1 \left(|x| + |y| - \sqrt{2|x||y|(1 + \langle x', \cdot \rangle)} u \right)^{\alpha-d_{k,1}} d\psi_{\lambda_{k-1/2}}(u) \right) (y'),$$

где

$$c_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1/2)}, \quad d\psi_{\lambda_k-1/2}(u) = c_{\lambda_k-1/2}(1-u^2)^{\lambda_k-1} du,$$

V_k — положительный оператор сплетения в гармоническом анализе Данкля, имеющий представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) d\mu_x^k(\xi)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты

$$O^x = \{gx : g \in G\}$$

(см. [6]).

3. Лебегова ограниченность операторов Харди и Беллмана с радиальными кусочно-степенными весами

Изучим (L^p, L^q) -ограниченность с радиальными кусочно-степенными весами вспомогательных операторов Харди и Беллмана:

$$Hf(x) = \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_{k,1}(y), \quad Bf(x) = \int_{|y| \geq |x|} f(y) d\mu_{k,1}(y).$$

Нас интересуют неравенства для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \|u_{-\mathbf{a}}(x)Hf(x)\|_{q, d\mu_{k,1}} &\leq \mathbf{c}_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k) \|u_{\mathbf{b}}(x)f(x)\|_{p, d\mu_{k,1}}, \\ \|u_{-\mathbf{a}}(x)Bf(x)\|_{q, d\mu_{k,1}} &\leq \mathbf{c}_B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k) \|u_{\mathbf{b}}(x)f(x)\|_{p, d\mu_{k,1}} \end{aligned}$$

с конечными константами $\mathbf{c}_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k)$, $\mathbf{c}_B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k)$ и $1 < p \leq q < \infty$.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Константа $\mathbf{c}_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k)$ конечна тогда и только тогда, когда

$$b_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad a_2 > \frac{d_{k,1}}{q}, \quad a_1 + b_1 \leq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) \leq a_2 + b_2. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $r = |x|$. Радиальную функцию $u_{-\mathbf{a}}(x)$ можно записать так

$$u_{-\mathbf{a}}(x) = |x|^{-a_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{-a_2} \chi_{B_1^c}(x) = r^{-a_1} \chi_{[0,1]}(r) + r^{-a_2} \chi_{[1,\infty)}(r) = (u_{-\mathbf{a}})_0(r).$$

В [4] установлено, что при доказательстве неравенств для оператора Харди с радиальными весами достаточно ограничиться радиальными функциями. На радиальных функциях мы приходим к эквивалентному неравенству

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(r^{\frac{2\lambda_k}{q}} (u_{-\mathbf{a}})_0(r) \int_0^r f_0(t) dt \right)^q dr \right)^{1/q} \\ &\lesssim \mathbf{c}_H(a, b, p, q, d, k) \left(\int_0^\infty \left(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}} (u_{\mathbf{b}})_0(r) f_0(r) \right)^p dr \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие конечности константы в последнем неравенстве известно (см., например, [16], [17, Section 1], [18, Introduction]):

$$\sup_{0 < r < \infty} A(r) = \sup_{0 < r < \infty} \left(\int_r^\infty \left(r^{\frac{2\lambda_k}{q}} (u_{-\mathbf{a}})_0(r) \right)^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r \left(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}} (u_{\mathbf{b}})_0(r) \right)^{-p'} dr \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Если $0 < r \leq 1$, то

$$A(r) \asymp \left(\int_r^1 t^{-a_1 q + 2\lambda_k} dt + \int_1^\infty t^{-a_2 q + 2\lambda_k} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^r t^{-b_1 p' + 2\lambda_k} dt \right)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-a_2 q + 2\lambda_k} dt < \infty, \quad \int_0^1 t^{-b_1 p' + 2\lambda_k} dt < \infty,$$

или $a_2 > \frac{d_{k,1}}{q}$, $b_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r) \asymp r^{-b_1 + d_{k,1}/p'} \left(1 + r^{-a_1 + d_{k,1}/q} \right) = r^{-b_1 + d_{k,1}/p'} + r^{-a_1 - b_1 + d_{k,1}(1/p' + 1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0 < r \leq 1} A(r)$ вытекает условие $a_1 + b_1 \leq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$.

Если $r \geq 1$, то

$$\begin{aligned} A(r) &\asymp \left(\int_r^\infty t^{-a_2 q + 2\lambda_{k,1}} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^1 t^{-b_1 p' + 2\lambda_{k,1}} dt + \int_1^r t^{-b_2 p' + 2\lambda_{k,1}} dt \right)^{1/p'} \\ &\asymp r^{-a_2 + d_{k,1}/q} \left(1 + r^{-b_2 + d_{k,1}/p'} \right) = r^{-a_2 + d_{k,1}/q} + r^{-a_2 - b_2 + d_{k,1}(1/p' + 1/q)}. \end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r \geq 1} A(r)$ вытекает условие $a_2 + b_2 \geq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$.

Простой анализ полученных условий приводит к (13). \square

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Константа $c_B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, p, q, d, k)$ конечна тогда и только тогда, когда

$$b_2 > \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad a_1 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad a_1 + b_1 \leq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) \leq a_2 + b_2. \quad (14)$$

Доказательство. Проводится аналогично. Необходимое и достаточное условие конечности константы в неравенстве для оператора Беллмана (см., например, [16], [17, Section 1], [18, Introduction]) будет выглядеть так

$$\sup_{0 < r < \infty} \left(\int_0^r \left(r^{\frac{2\lambda_k}{q}} (u_{-\mathbf{a}})_0(r) \right)^q dr \right)^{1/q} \left(\int_r^\infty \left(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}} (u_{\mathbf{b}})_0(r) \right)^{-p'} dr \right)^{1/p'} < \infty.$$

Если $0 < r \leq 1$, то

$$A(r) \asymp \left(\int_0^r t^{-a_1 q + 2\lambda_k} dt \right)^{1/q} \left(\int_r^1 t^{-b_1 p' + 2\lambda_k} dt + \int_1^\infty t^{-b_2 p' + 2\lambda_k} dt \right)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-b_2 p' + 2\lambda_k} dt < \infty, \quad \int_0^1 t^{-a_1 q + 2\lambda_k} dt < \infty,$$

или $a_1 < \frac{d_{k,1}}{q}$, $b_2 > \frac{d_{k,1}}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r) \asymp r^{-a_1 + d_{k,1}/q} \left(1 + r^{-b_1 + d_{k,1}/p'} \right) = r^{-a_1 + d_{k,1}/q} + r^{-a_1 - b_1 + d_{k,1}(1/p' + 1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0 < r \leq 1} A(r)$ вытекает условие $a_1 + b_1 \leq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$.

Если $r \geq 1$, то

$$\begin{aligned} A(r) &\asymp \left(\int_0^1 t^{-a_1q+2\lambda_{k,1}} dt + \int_1^r t^{-a_1q+2\lambda_{k,1}} dt \right)^{1/q} \left(\int_r^\infty t^{-b_2p'+2\lambda_{k,1}} dt \right)^{1/p'} \\ &\asymp r^{-b_2+d_{k,1}/p'} \left(1 + r^{-a_2+d_{k,1}/q} \right) = r^{-b_2+d_{k,1}/q} + r^{-a_2-b_2+d_{k,1}(1/p'+1/q)}. \end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r \geq 1} A(r)$ вытекает условие $a_2 + b_2 \geq d_{k,1} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$.

Простой анализ полученных условий приводит к (14). \square

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \geq 0$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$ и выполнены условия (10) теоремы 1.

Разобьем оператор (11) с ядром (12) на сумму трех линейных операторов

$$I_\alpha^k f(x) = J_1 f(x) + J_2 f(x) + J_3 f(x),$$

где

$$\begin{aligned} J_1 f(x) &= \int_{|y| \leq |x|/2} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_{k,1}(y), \quad J_2 f(x) = \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_{k,1}(y), \\ J_3 f(x) &= \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_{k,1}(y). \end{aligned}$$

Оценка $J_1 f$. Так как

$$(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})^2 \leq |x|^2 + |y|^2 - \sqrt{2|x||y|(1 + \langle x', \cdot \rangle)} u \leq (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2,$$

то при $|y| \leq |x|/2$ из свойства 4 леммы 1 $\Phi_\alpha(x, y) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}}$. Следовательно,

$$J_1 f(x) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}} \int_{|y| \leq |x|/2} f(y) d\mu_{k,1}(y) = |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x/2).$$

Кусочно-степенной вес обладает слабой однородностью

$$c_1(\lambda) u_{-\gamma}(x) \leq u_{-\gamma}(\lambda x) \leq c_2(\lambda) u_{-\gamma}(x), \quad \lambda > 0,$$

поэтому по теореме 2

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x) J_1 f(x)\|_{q, d\mu_{k,1}} &\asymp \|u_{-\gamma}(x) |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x/2)\|_{q, d\mu_{k,1}} \\ &\asymp \|u_{-\gamma}(x) |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x)\|_{q, d\mu_{k,1}} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_{k,1}} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_{k,1}}{q'}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Оценка $J_2 f$. Аналогично, при $|y| \geq 2|x|$, $\Phi_\alpha(x, y) \asymp |y|^{\alpha-d_{k,1}}$. Следовательно,

$$J_2 f(x) \asymp \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) |y|^{\alpha-d_{k,1}} d\mu_{k,1}(y) = \int_{|y| \geq 2|x|} g(y) d\mu_{k,1}(y) = Bg(2x),$$

где $g(y) = f(y)|y|^{\alpha-d_{k,1}}$. Необходимо найти условия, когда имеет место неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x)Bg(2x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|u_{\beta}(x)|x|^{d_{k,1}-\alpha}g(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

По теореме 3

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x)Bg(2x)\|_{q,d\mu_{k,1}} &\asymp \|u_{-\gamma}(x)Bg(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \\ &\lesssim \|u_{\beta}(x)|x|^{d_{k,1}-\alpha}g(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha - \beta_2 < \frac{d_{k,1}}{p}, \quad \gamma_1 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Оценка J_3f . Остается показать, что при выполнении условий (10) и при $p < q$ условия $\alpha \geq d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ справедливо неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|u_{\beta}(x)f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \quad (15)$$

Вначале докажем неравенство

$$\|\chi_{B_1}(x)u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|u_{\beta}(x)f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \quad (16)$$

Неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$\|\chi_{B_1}(x)u_{-\gamma}(x)J_3(u_{-\beta}f)(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Учитывая, что при $|x| \leq 1$, $u_{-\gamma}(x) \asymp |x|^{-\gamma_1}$, $u_{-\beta}(x) \asymp |x|^{-\beta_1}$, запишем последнее неравенство в виде

$$A := \|\chi_{B_1}(x)|x|^{-\gamma_1-\beta_1}J_3f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Так как

$$d_{k,1} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} \right) > \alpha - d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \text{ или } d_{k,1} > \alpha,$$

то существует пара (γ_0, β_0) такая, что

$$\gamma_0 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \beta_0 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \gamma_0 + \beta_0 = \alpha - d_{k,1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \geq \gamma_1 + \beta_1.$$

Поэтому, применяя теорему D для пары (γ_0, β_0) , получим

$$\begin{aligned} A &\leq \left(\int_{|x| \leq 1} \left(|x|^{-\gamma_0-\beta_0} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y)\Phi_{\alpha}(x,y) d\mu_{k,1}(y) \right)^q d\mu_{k,1}(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|x|^{-\gamma_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_{\alpha}(x,y) d\mu_{k,1}(y) \right)^q d\mu_{k,1}(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что неравенство (8) может быть записано в эквивалентной форме

$$\||x|^{-\gamma}I_{\alpha}^{k,1}(|\cdot|^{-\beta}f)(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_1(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k) \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Неравенство (16) доказано.

Докажем неравенство

$$\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|u_{\beta}(x)f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \quad (17)$$

Оно эквивалентно неравенству

$$\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3(u_{-\beta}f)(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Из условия $|x| \geq 1$ вытекает $u_{-\gamma}(x) \asymp |x|^{-\gamma_2}$, $u_{-\beta}(x) \asymp |x|^{-\beta_2}$, поэтому последнее неравенство можно записать так

$$A := \|\chi_{B_1^c}(x)|x|^{-\gamma_2-\beta_2}J_3f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Так как

$$\alpha - \frac{d_{k,1}}{q'} + \alpha - \frac{d_{k,1}}{p} < \alpha - d_{k,1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \text{ или } \alpha < d_{k,1},$$

то существует пара (γ_0, β_0) такая, что

$$\alpha - \gamma_0 < \frac{d_{k,1}}{q'}, \quad \alpha - \beta_0 < \frac{d_{k,1}}{p}, \quad \gamma_0 + \beta_0 = \alpha - d_{k,1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Для нее также $\gamma_0 < \frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta_0 < \frac{d_{k,1}}{p'}$ и по теореме D для пары (γ_0, β_0)

$$\begin{aligned} A &\leq \left(\int_{|x| \geq 1} \left(|x|^{-\gamma_0-\beta_0} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y)\Phi_{\alpha}(x,y) d\mu_{k,1}(y) \right)^q d\mu_{k,1}(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|x|^{-\gamma_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_{\alpha}(x,y) d\mu_{k,1}(y) \right)^q d\mu_{k,1}(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \end{aligned}$$

Неравенство (17) также доказано. Из (16), (17) вытекает неравенство (15). Теорема 1 полностью доказана. \square

5. Заключение

Для потенциалов Рисса в случаях $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье и преобразования Данкля доказаны (L^p, L^q) -неравенства типа Стейна–Вейса с радиальными кусочно-степенными весами. Следующий шаг будет состоять в доказательстве неравенств Стейна–Вейса для произвольных радиальных и не радиальных весов, удовлетворяющих условиям Макенхаута. В случае $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье остается также открытым вопрос о необходимости в неравенстве Стейна–Вейса условия $\alpha \geq d_{k,1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ при $p < q$. Этот вопрос открыт и для потенциала Данкля–Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol.27. P. 565–606.
2. Soboleff S. On a theorem in functional analysis // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1938. Vol. 4(46), no.3. P. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n -dimensional Euclidean space // *J. Math. Mech.* 1958. Vol. 7, no. 4. P. 503–514.
4. Горбачев Д.В, Иванов В.И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // *Чебышевский сборник*. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 131–147.
5. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // *Contemp. Math.* 1992. Vol. 138. P. 123–138.
6. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in *Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag. 2003. Vol. 1817. P. 93–135.
7. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // *J. Comput. Appl. Math.* 2007. Vol. 199. P. 181–195.
8. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // *Potential Analysis*. 2021. Vol. 55, no. 5. P. 555–605.
10. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // *Compos. Math.* 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.
11. Ben Saïd S., Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform // *Journal of Functional Analysis*. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // *International Mathematics Research Notices*. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.
13. Иванов В.И. Ограниченный оператор сдвига для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21, вып. 4, с. 85–96.
14. Иванов В.И. Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22, № 4. С. 136–152.
15. Иванов В.И. Потенциал Рисса для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22, вып. 4, С. 114–135.
16. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // *J. London Math. Soc.* 1996. Vol. 54, no 2. P. 89–101.
17. Kufner A., Opic B. *Hardy-type inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.
18. Kufner A., Persson L. E. *Weighted inequalities of Hardy type*. Singopure-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E., 1928, "Some properties of fractional integrals, I", *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.
2. Soboleff S., 1938, "On a theorem in functional analysis", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 4(46), no. 3, pp. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G., 1958, "Fractional integrals on n -dimensional Euclidean space" , *J. Math. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 503–514.
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.
5. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.
6. Rösler M., 2003, "Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
7. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform" , *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
8. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform" , *Preprint CRM, Barcelona*, no. 1238, pp. 1–28.
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 21, "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform" , *Potential Analysis*, vol. 55, no. 5, pp. 555–605.
10. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.
11. Ben Saïd S., Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.
13. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.)
14. Ivanov V. I., 2021, "Properties and application of a positive translation operator for $(k, 1)$ -generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 136–152. (In Russ.)
15. Ivanov V. I., 2021, "Riesz potential for $(k, 1)$ -generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 114–135. (In Russ.)
16. Sinnamon G, Stepanov V. D., 1996, "The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ " , *J. London Math. Soc.*, vol. 54, no. 2, pp 89–101.
17. Kufner A., Opic B., 1990, "Xardy-type inequalities" , Pitman Research Notes in Mathematics Series, Harlow: Longman Scientific and Technical, 333 p.
18. Kufner A., Persson L. E., 2003, "Weighted inequalities of Xardy type" , *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

Получено: 15.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-105-114

Обобщенные экстремальные задачи Юдина для многочленов¹

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Изучаются две экстремальные задачи В.А. Юдина для алгебраических многочленов в более общей постановке. В первой задаче среди многочленов с неотрицательными коэффициентами разложения по ортогональным многочленам на отрезке $[-1, 1]$, у которых несколько последовательных моментов и производных в точке -1 равны нулю, ищется многочлен с максимальным отрезком неотрицательности. Случаи решения задачи описываются в терминах свойства Крейна. Во второй задаче среди многочленов с нулевыми граничными условиями и нулевыми первыми двумя моментами на отрезке $[-1, 1]$ ищется многочлен с минимальным симметричным относительно нуля отрезком, на котором он неотрицателен, а вне него отрицателен. Для второй задачи получено полное решение.

Ключевые слова: весовая функция, ортогональные многочлены, моменты, граничные условия, экстремальные задачи.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Обобщенные экстремальные задачи Юдина для многочленов // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 105–114.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-105-114

Generalized extremal Yudin problems for polynomials²

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

Two extremal problems of V.A. Yudin for polynomials in a more general setting are studied. In the first problem, among polynomials with nonnegative expansion coefficients in orthogonal polynomials on a segment $[-1, 1]$, for which several successive moments and derivatives at the point -1 are equal to zero, a polynomial with a maximum non-negativity segment is searched. The cases of the solving of the problem are described in terms of the Krein property. In the second problem, among polynomials with zero boundary conditions and zero first two moments on the segment $[-1, 1]$, a polynomial with a minimum segment symmetric about zero on which it is nonnegative and nonpositive outside is searched. For the second problem, a complete solution was obtained.

Keywords: weighted function, orthogonal polynomials, moments, boundary conditions, extremal problems.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

V.I. Ivanov, 2022, "Generalized extremal Yudin problems for polynomials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 105–114.

1. Введение

В 2022 году талантливому и самобытному математику В. А. Юдину исполнилось бы 75 лет. Важным направлением в его творчестве было исследование экстремального расположения точек на многообразиях в задачах дискретной математики и численного анализа. В этих исследованиях у него сложился весьма плодотворный метод постановки экстремальных задач для алгебраических многочленов, тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Ему не обязательно было решать эти задачи, для приложений важно было предложить экстремальную или близкую к ней функцию. Хотя решение этих задач имеет и самостоятельный интерес. В настоящей работе исследуются две задачи Юдина (см. [1, 2]) в более общей постановке.

Пусть $\sigma(x): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным числом точек роста, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, Π_n — множество алгебраических многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, Π — множество всех алгебраических многочленов, $\mu_k(p) = \int_{-1}^1 x^k p(x) d\sigma(x)$ — k -й момент многочлена $p \in \Pi$ на $[-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ относительно меры $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta d\sigma(x)$ и нормированных условием $U_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$, $\{t_{1,n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma), \dots, t_{n,n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $U_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, занумерованные в порядке убывания. При $\alpha = \beta = 0$ верхние индексы опускаем. Если $\sigma(x) = x$, то получаем систему многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ (см. [3, 4]). Нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ обозначаем $\{t_{1,n}^{(\alpha, \beta)}, \dots, t_{n,n}^{(\alpha, \beta)}\}$.

Разложим многочлен $p \in \Pi$ в сумму Фурье по системе $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}$:

$$p(x) = \sum_{\nu} d_{\nu}^{(\alpha, \beta)} a_{\nu} U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad a_{\nu} = \int_{-1}^1 p(x) U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} d\sigma(x), \quad (1)$$

где

$$(d_{\nu}^{(\alpha, \beta)})^{-1} = \int_{-1}^1 (U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x))^2 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} d\sigma(x).$$

Пусть $\Pi_p(\{U_n^{(\alpha, \beta)}\})$ — множество многочленов, для которых в разложении (1) все коэффициенты $a_{\nu} \geq 0$. Для системы $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}$ выполнено свойство Крейна, если $U_k^{(\alpha, \beta)} U_l^{(\alpha, \beta)} \in \Pi_p(\{U_n^{(\alpha, \beta)}\})$

для любых $k, l \in \mathbb{N}$. Известно, что для многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ свойство Крейна выполняется, если $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ (см. [4, 1.5]).

Задача Юдина 1 [1]. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n \cap \Pi_p(\{U_n\})$, удовлетворяющих условию $\mu_0(p) = 0$, найти величину

$$B_n(\sigma) = \sup\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \geq 0, -1 \leq x \leq \lambda\}.$$

В задаче 1 В.А. Юдин [1] получил оценку $B_{2q}(\sigma) \leq t_{2,q+1}(\sigma)$ и в качестве экстремального предложил правильный многочлен (2). Для многих систем ортогональных многочленов задача 1 решена в [5].

ТЕОРЕМА А. Пусть $n = 2q$. Если для системы $\{U_n\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma) = t_{2,q+1}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{2q}^*(x) = \frac{U_{q+1}^2(x)}{(x - t_{1,q+1}(\sigma))(x - t_{2,q+1}(\sigma))}. \quad (2)$$

Пусть $n = 2q + 1$. Если для системы $\{U_n^{(0,1)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma) = t_{2,q+1}^{(0,1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{2q+1}^*(x) = \frac{(1+x)(U_{q+1}^{(0,1)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,1)}(\sigma))(x - t_{2,q+1}^{(0,1)}(\sigma))}.$$

Из теоремы А решение задачи 1 для многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ получается при $\alpha \geq \beta + 1$. Мы рассматриваем следующее обобщение задачи 1.

Обобщенная задача Юдина 1. Пусть $m, l \in \mathbb{Z}_+$. Среди всех многочленов

$$p \in \Pi_n \cap \Pi_p(\{U_n\}),$$

удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(p) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad p^{(i)}(-1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, l-1,$$

найти величину

$$B_n(\sigma, m, l) = \sup\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \geq 0, -1 \leq x \leq \lambda\}.$$

Если $m = 0$ или $l = 0$, то соответствующих условий на многочлены в обобщенной задаче 1 нет. Так как нетривиальные многочлены из $\Pi_p(\{U_n\})$ в 1 принимают положительные значения, то в этой точке граничные условия не ставятся.

Случаи решения обобщенной задачи 1 содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \leq q, l \in \mathbb{Z}_+$. Если $n = 2q - m + 1$, для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma, m, l) = t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1+x)^l (U_{q+1}^{(0,l)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma))}. \quad (3)$$

Если $n = 2q - m + 2$, для системы $\{U_n^{(0,l+1)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma, m, l) = t_{m+1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1+x)^{l+1} (U_{q+1}^{(0,l+1)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma))}. \quad (4)$$

Если $U_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, то $U_n^{(0,l)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta+l)}(x)$ (см. [4, 1.5] и условие Крейна для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено при $\alpha \geq \beta + l$. Таким образом, для многочленов Якоби теорема 1 справедлива при $\alpha \geq \beta + l$, если $n = 2q - m + 1$, и при $\alpha \geq \beta + l + 1$, если $n = 2q - m + 2$.

Условия на системы ортогональных многочленов в теореме 1 еще далеки от окончательных. Например, при $n = 2q - m + 1$ и $m = q$,

$$p_n^*(x) = (1+x)^l U_{q+1}^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\})$$

без каких-либо условий на систему, так как $(1+x)U_{q+1}^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l-1)}\})$ (см. [4, лемма 4.1]) и далее можно применить индукцию по l . Аналогичное утверждение верно и при $n = 2q - m + 2$, $m = q$.

Доказательство неотрицательности коэффициентов разложения многочленов (3), (4) основано на работе [6], в которой для любой системы ортогональных многочленов установлено включение

$$\frac{U_{q+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x - t_{1,q+1}^{(\alpha,\beta)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(\alpha,\beta)}(\sigma))} = \sum_{\nu=0}^{q-m} d_\nu a_\nu U_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\}). \quad (5)$$

Доказательство неотрицательности коэффициентов разложения многочленов по ортогональным многочленам или неотрицательности преобразования Фурье при интегральном представлении целых функций экспоненциального типа требует весьма тонкой техники. Наиболее развита эта техника для целых функций экспоненциального типа (см., например, работы [7, 8, 9]).

Задача Юдина 2 [2]. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-1}^1 x^j p(x) (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx = 0, \quad j = 0, 1, \quad d \geq 2,$$

найти величину

$$A_n(d) = \inf\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \leq 0, \lambda \leq |x| \leq 1; \quad p(x) \geq 0, 0 \leq |x| \leq \lambda\}.$$

В задаче 2 при $n = 4q - 2$ в качестве экстремального многочлена В.А. Юдин [2] предложил правильный многочлен

$$p_{4q-2}^*(x) = \frac{(P_{2q}^{(\frac{d-3}{2}, \frac{d-3}{2})}(x))^2}{(t_{q,2q}^{(\frac{d-3}{2}, \frac{d-3}{2})})^2 - x^2}.$$

Так как в задаче 2 допустимые многочлены могут иметь только одну переменную знака на $[0, 1]$, то в обобщении задачи 2 мы не можем усиливать условия ортогональности, но можем добавлять граничные условия.

Обобщенная задача Юдина 2. Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(x)$ — четная весовая функция, $d\sigma(x) = \omega(x) dx$. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \mu_0(p) = \mu_1(p) = 0, \quad p^{(i)}(-1) = p^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ p^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (6)$$

найти величину

$$A_n(\sigma, k, l) = \inf\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \leq 0, \lambda \leq |x| \leq 1; \quad p(x) \geq 0, \quad 0 \leq |x| \leq \lambda\}.$$

Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d\sigma(x) = \omega(x) dx$, $\{R_n^{(k,l)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ относительно меры $(1-x^2)^k x^{2l} d\sigma(x)$ и нормированных условием $R_n^{(k,l)}(1) = 1$, $\{\rho_{1,n}^{(k,l)}(\sigma), \dots, \rho_{n,n}^{(k,l)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $R_n^{(k,l)}(x)$, занумерованные в порядке убывания. При $l = 0$, $R_n^{(k,0)}(x) = U_n^{(k,k)}(x)$ и $\rho_{i,n}^{(k,0)}(\sigma) = t_{i,n}^{(k,k)}(\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 2$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^k x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2]$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] + 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^{k+1} x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $n = 4q - 2$ или $n = 4q - 1$, то

$$A_n(\sigma, 0, 0) = t_{q,2q}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{U_{2q}^2(x)}{t_{q,2q}^2(\sigma) - x^2}.$$

Если $n = 4q$ или $n = 4q + 1$, то

$$A_n(\sigma, 0, 0) = t_{q,2q}^{(1,1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)(U_{2q}^{(1,1)}(x))^2}{(t_{q,2q}^{(1,1)}(\sigma))^2 - x^2}.$$

2. Доказательство теорем 1,2

Доказательство теоремы 1. Пусть $n = 2q - m + 1$ и для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено свойство Крейна. В [10] решена обобщенная экстремальная задача 1 без условия принадлежности многочленов множеству $\Pi_p(\{U_n\})$. Многочлен (3) является экстремальным в ней, поэтому в обобщенной задаче 1 справедлива оценка $B_n(\sigma, m, l) \leq t_{m+1, q+1}^{(0,l)}(\sigma)$. Остается проверить, что многочлен (3) принадлежит множеству $\Pi_p(\{U_n\})$. Согласно (5) многочлен

$$\frac{U_{q+1}^{(0,l)}(x)}{(x - t_{1, q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1, q+1}^{(0,l)}(\sigma))} \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l)}\}).$$

Применяя свойство Крейна, получим, что и многочлен

$$\frac{(U_{q+1}^{(0,l)}(x))^2}{(x - t_{1, q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1, q+1}^{(0,l)}(\sigma))} \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l)}\}).$$

Остается заметить, что $(1+x)^l U_n^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\})$.

Случай $n = 2q - m + 2$ разбирается аналогично с заменой l на $l + 1$. Теорема 1 доказана.

□

Пусть $\omega(t)$ — интегрируемая неотрицательная весовая функция на $[0, 1]$, $d\sigma(t) = \omega(t) dt$, $\{V_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[0, 1]$ относительно меры $(1-t)^{\alpha} t^{\beta} d\sigma(t)$ и нормированных условием $V_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$, $\{\tau_{1, n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma), \dots, \tau_{n, n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $V_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, занумерованные в порядке убывания.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Задача 3. Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 p(t) d\sigma(t) = 0, \quad p^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad p^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1,$$

найти величину

$$C_n(\sigma, k, l) = \inf\{\mu \in [0, 1]: p(t) \leq 0, \quad \mu \leq t \leq 1; \quad p(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \mu\}.$$

Для ее решения квадратурную формулу Маркова–Эрмита на отрезке $[-1, 1]$ (см. [10]) запишем для отрезка $[0, 1]$.

ЛЕММА. Пусть $N = k + l$. Для любого многочлена $p \in \Pi_{2q+N-1}$ справедлива квадратурная формула Маркова–Эрмита

$$\int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i,1} p^{(i)}(1) + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_{i,2} p^{(i)}(0) + \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)), \quad (7)$$

где $(-1)^{k-1} \gamma_{k-1,1} > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, q$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = k + l$. Если $n = 2q + N - 1$, то

$$C_n(\sigma, k, l) = \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(t) = \frac{(1-t)^k t^l (V_q^{(k,l)}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma) - t}. \quad (8)$$

Если $n = 2q + N$, то

$$C_n(\sigma, k, l) = \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(t) = \frac{(1-t)^{k+1} t^l (V_q^{(k+1,l)}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma) - t}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2q + N - 1$, $p \in \Pi_n$ — допустимый в задаче многочлен. Предположим, что $C_n(\sigma, k, l) < \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma)$. Применяя квадратурную формулу Маркова Эрмита (7), получим

$$0 = \int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)) \leq 0. \quad (10)$$

Отсюда $\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)$, $i = 1, \dots, q$, — двойные нули многочлена $p(t)$ и он имеет $2q + N$ нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство $C_n(\sigma, k, l) \geq \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma)$. Остается заметить, что многочлен (8) допустимый, например, ортогональность единице вытекает из (10) и он это неравенство превращает в равенство.

Пусть $n = 2q + k + l$, $p \in \Pi_n$ — допустимый в задаче многочлен. Предположим, что $C_n(\sigma, k, l) < \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$. Так как

$$p(t) = \frac{p^{(k)}(1)}{k!} (t-1)^k (1+o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow 1,$$

то из условия $p(t) \leq 0$ в левой полуокрестности 1 вытекает $(-1)^k p^{(k)}(1) \leq 0$, поэтому применяя квадратурную формулу Маркова Эрмита для $N = (k+1) + l$ и учитывая, что $\text{sign } \gamma_{k,1} = (-1)^k$, получим

$$0 = \int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \gamma_{k,1} p^{(k)}(1) + \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k+1,l)}(\sigma)) \leq 0.$$

Отсюда $\tau_{i,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$, $i = 1, \dots, q$, — двойные нули многочлена $p(t)$, $p^{(k)}(1) = 0$, и он имеет $2q + N + 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство $C_n(\sigma, k, l) \geq \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$. Остается заметить, что многочлен (9) допустимый и он это неравенство превращает в равенство. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если для многочлена $p(x) \in \Pi_n$ выполнены условия (6) и $p(x) \leq 0$ при $\lambda \leq |x| \leq 1$, $p(x) \geq 0$ при $0 \leq |x| \leq \lambda$, то и для многочлена $p(-x)$ выполнены условия (6) и $p(-x) \leq 0$ при $\lambda \leq |x| \leq 1$, $p(-x) \geq 0$ при $0 \leq |x| \leq \lambda$. Аналогичные свойства выполнены и для многочлена $p_e(x) = (p(x) + p(-x))/2$. Следовательно, в обобщенной задаче 2 можно ограничиться четными многочленами $p(x) = q(x^2)$, $q \in \Pi_{[\frac{n}{2}]}$. Условия (6) для многочлена $q(t)$ примут вид:

$$\int_{-1}^1 p(x^2) \omega(x) dx = \int_0^1 q(t) \omega(t^{1/2}) t^{-1/2} dt = 0,$$

$$q^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad q^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, [(l+1)/2] - 1,$$

$$q(t) \leq 0 \quad \text{при } \sqrt{\lambda} \leq t \leq 1, \quad q(t) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \sqrt{\lambda}.$$

Таким образом,

$$A_n^2(\sigma, k, l) = C_{[\frac{n}{2}]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]),$$

где

$$d\sigma_1(t) = \omega(t^{1/2})t^{-1/2} dt.$$

Так как при $s \neq r$

$$\int_0^1 V_s^{(k,l)}(t)V_r^{(k,l)}(t)\omega(t^{1/2})t^{-1/2} dt = \int_{-1}^1 V_s^{(k,l)}(x^2)V_r^{(k,l)}(x^2)\omega(x) dx = 0,$$

то

$$R_{2s}^{(k,l)}(x) = V_s^{(k,l)}(x^2) \quad \text{и} \quad (\rho_{i,2s}^{(k,l)}(\sigma))^2 = \tau_{i,s}^{(k,l)}(\sigma_1), \quad i = 1, \dots, s.$$

Остается применить теорему 3.

Если $[n/2] = 2q+k+[(l+1)/2]-1$, то $n = 4q+2k+2[(l+1)/2]-2$ или $n = 4q+2k+2[(l+1)/2]-1$. По теореме 3

$$C_{[\frac{n}{2}]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]) = \tau_{q,q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma_1) = (\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2.$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{[\frac{n}{2}]}^*(t) = \frac{(1-t)^k t^{[(l+1)/2]} (V_q^{(k,[(l+1)/2])}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma_1) - t}.$$

Следовательно, если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 2$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^k x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Если $[n/2] = 2q+k+[(l+1)/2]$, то $n = 4q+2k+2[(l+1)/2]$ или $n = 4q+2k+2[(l+1)/2]+1$. По теореме 3

$$C_{[\frac{n}{2}]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]) = \tau_{q,q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma_1) = (\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2.$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{[\frac{n}{2}]}^*(t) = \frac{(1-t)^{k+1} t^{[(l+1)/2]} (V_q^{(k+1,[(l+1)/2])}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma_1) - t}.$$

Следовательно, если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2]$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] + 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^{k+1} x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Теорема 2 доказана.

3. Заключение

В [5] первая обобщенная задача Юдина решена также для многочленов Гегенбауэра ($\alpha = \beta$), если $l = 0$, $m = 1$. Решение основано на том, что при $m = 1$ в разложении (5) коэффициенты a_ν не только положительны, но и монотонно убывают. Было бы интересно доказать это свойство коэффициентов в разложении (5) для произвольного m .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин В. А. Код и дизайн // Дискрет. матем. 1997. Т. 9, № 2. С. 3–11.
2. Юдин В. А. Распределение точек дизайна на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 5. С. 205–224.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
4. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. 196 с.
5. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Одна экстремальная задача для многочленов, связанная с кодами и дизайнами // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 4. С. 508–513.
6. Cohn H., Kumar A. Universally optimal distribution of points on spheres // J. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 20, no. 1. P. 99–148.
7. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, no. 2. P. 249–252.
8. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, no. 2. P. 253–257.
9. Gorbachev D., Ivanov V. I., Tikhonov S. Uncertainty Principles for Eventually Constant Sign Bandlimited Functions // SIAM J. Math. Anal. 2020. Vol. 52, no. 5. P. 4751–4782.
10. Иванов В. И. Экстремальные задачи Юдина–Эрмита для многочленов // Матем. заметки. 2021. Т. 110, № 5. С. 789–795.

REFERENCES

1. Yudin V. A., 1997, "Code and design", *Discrete Math. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 147–155.
2. Yudin V. A., 2005, "Distribution of the points of a design on the sphere", *Izv. Math.*, vol. 69, no. 5, pp. 1061–1079.
3. Szegö G., 1959, "Orthogonal polynomials", *New York: Amer. Math. Soc.*, 440 p.
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2022, "Lectures on quadrature formulas and their application in extremal problems", *Tula: Tula State University*, 196 p. (In Russ.)
5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2000, "An extremum problem for polynomials related to codes and designs", *Math. Notes.*, vol. 67, no. 4, pp. 433–438.
6. Cohn H., Kumar A., 2000, "Universally optimal distribution of points on spheres", *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 20, no. 1, pp. 99–148.

7. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 249–252.
8. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2. pp. 253–257.
9. Gorbachev D., Ivanov V.I., Tikhonov S., 2020, "Uncertainty Principles for Eventually Constant Sign Bandlimited Functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 52, no. 5. pp. 4751–4782..
10. Ivanov V.I., 2021, "Yudin–Hermite Extremal Problems for Polynomials", *Math. Notes.*, vol. 110, no. 5, pp. 799–805.

Получено: 15.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем¹

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется модель Рамсея — Касса — Купманса. Мы рассматриваем вспомогательную систему дифференциальных уравнений, которая аналогична системе, возникающей в случае постоянства стационарной нормы сбережения. Нами обнаружено, что системы этого класса решаются в квадратурах. Это позволяет найти приближенные решения системы, описывающую исходную модель.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, стационарная нормы сбережения.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // *Чебышевский сборник*, 2022, т. 23, вып. 4, с. 115–125.

¹Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article is devoted to the Ramsey–Kass–Koopmans model. We consider an auxiliary system of differential equations, which is analogous to the system that arises in the case of constancy of the stationary rate of savings. We found that systems of this class are solved in quadrature. This allows us to find approximate solutions to the system describing the original model.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, stationary savings rate.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 115–125.

1. Введение и основной результат

В модели Рамсея — Касса — Купманса (см. [1]–[13]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Система уравнений (1) является автономной, то есть при записи её в более кратком виде

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^\alpha - C - x_1K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C - x_2C. \end{cases} \quad (2)$$

временная переменная t в правые части системы (2) не входит. Это даёт возможность, отправляясь от начальных условий

$$C(0) = C_0, \quad K(0) = K_0, \quad (3)$$

и решая систему по соответствующим приближённым формулам, достигнув при некотором значении времени t_1 состояния

$$C(t_1) = C_1, \quad K(t_1) = K_1, \quad (4)$$

решать далее систему, осуществив сдвиг по времени, по тем же приближённым формулам, но с новыми начальными условиями (4).

Нами обнаружено, что системы более общего вида

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^\alpha - bC - x_1K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C - x_2C. \end{cases} \quad (5)$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, но при наличии специальной связи между "экономическими" константами x_1, x_2, α , состоящей в выполнении равенства

$$x_2 = \alpha x_1, \quad (6)$$

допускают решение в квадратурах. Более того (это особенно важно!), полученные нами интегральные формулы, выражающие решения задачи Коши (3), (5) при условии (6), не очень сложны.

Равенство $x_2 = \alpha x_1$ рассматривалось в ряде публикаций (см. [9], [14], [16] и ссылки там), поскольку, при его выполнении функция нормы сбережения является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (1) в квадратурах даже при выполнении связи $x_2 = \alpha x_1$ между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также, из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

Существенным обстоятельством, которое, по нашему мнению, поможет получать приближенные аналитические выражения для решения задачи Коши (2), (3) в общем случае значений констант x_1, x_2 (при отсутствии связи $x_2 = \alpha x_1$), является то, что мы нашли решение в квадратурах именно системы (5) с произвольным значением параметра b , но, правда, при наличии связи (6). Мы предлагаем следующий метод приближённого решения задачи Коши (2), (3) в аналитической форме.

Положим

$$x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad \xi = \alpha x_1 - x_2, \quad b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}. \quad (7)$$

Если мы имеем общий случай ($\delta \neq 0$ и, значит $x_3 \neq x_1$), то от системы (2) переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^\alpha - bC - x_3K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C - x_2C. \end{cases} \quad (8)$$

после чего решаем в квадратурах задачу Коши (3), (8). Полному решению данной задачи посвящается п. 2 из нашей работы. Тем самым, мы трансформируем первое уравнение системы (2), изменив константу x_1 на x_3 и введя параметр b согласно (7) таким образом, что во-первых, полученная система допускает аналитическое и не слишком сложное по своей форме решение, а во-вторых, начальные значения правой части первого уравнения исходной системы (2) и правой части первого уравнения системы (8), несмотря на трансформацию самого уравнения, совпадают. Последнее обстоятельство влечёт за собой "малое" отличие решения задач Коши (2), (3) и (3), (8). Это подтверждают численные эксперименты.

В соответствующий момент времени t_1 (о задаче его определения мы скажем ниже), когда различие между решениями упомянутых задач подойдёт к допустимому ограничению, мы скорректируем систему (8), заменив её новой. Для этого найдём значения (4) и определим новое значение параметра b по аналогии с (7):

$$b = b_1 = 1 + \frac{\xi K_1}{\alpha C_1}.$$

Затем решим задачу Коши для систем уравнений (8) со значением b_1 и начальными условиями $K(0) = K_1$, $C(0) = C_1$. Сдвиг по времени осуществляется без труда ввиду отмеченной выше автономности рассматриваемых систем. Далее продолжаем указанный процесс, в соответствующий момент времени t_2 находя значения $K(t_2)$, $C(t_2)$, b_2 и т.д.

Что же касается определения моментов времени, когда становится пора переходить к новой системе, меняя значение параметра b , то мы приходим к важной теоретической задаче оценки разности между решениями задач Коши (2), (3) и (3), (8) в какой-либо метрике. Эта проблема требует отдельного исследования, которому мы собираемся посвятить отдельные публикации.

Завершая введение, изложим план решения в квадратурах задачи Коши (3), (8), реализованный ниже в п.2,3. Прежде всего мы от функций K , C переходим к функциям

$$v(t) = K(t)e^{x_3 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}. \quad (9)$$

Благодаря равенству $x_3 = x_2/\alpha$ система уравнений (8) переходит в значительно более простую систему уравнений на функции (9), из которой выводится обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$, явно решаемое в элементарных функциях. Далее мы находим множество значений w — оно определяется значением параметра θ и начальными условиями (3). В итоге выписывается интегральная формула для функции $w(t)$, из которой явно определяется обратная к w функция — зависимость t от w . Она имеет достаточно простой вид:

$$\int_{C_0}^w \varphi(u) du = \lambda(e^{\varkappa t} - 1), \quad \text{где } \varkappa = x_3 - x_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) x_2, \quad (10)$$

φ — явно указанная элементарная функция, λ — постоянная, выражающаяся через α , a , θ , \varkappa . Соотношение (10) даёт возможность также определить максимальный временной отрезок, на котором существует решение исследуемой системы.

2. Нахождение зависимости $v(w)$ после перехода к функциям (9). Область значений функции w

Согласно (9) имеем (для краткости не пишем аргумент t у функций K , C , v , w)

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \frac{d}{dt}(ve^{-x_3 t}) = \dot{v}e^{-x_3 t} - x_3 ve^{-x_3 t} = \dot{v}e^{-x_3 t} - x_3 K, \\ \dot{C} &= \frac{d}{dt}(we^{-x_2 t}) = \dot{w}e^{-x_2 t} - x_2 we^{-x_2 t} = \dot{w}e^{-x_2 t} - x_2 C. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\dot{K} + x_3 K = \dot{v} e^{-x_3 t}, \quad \dot{C} + x_2 C = \dot{w} e^{-x_2 t}. \quad (11)$$

Ввиду (11) система (8) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v} e^{-x_3 t} = aK^\alpha - bC = av^\alpha e^{-\alpha x_3 t} - bwe^{-x_2 t}, \\ \dot{w} e^{-x_2 t} = \theta^{-1} \alpha a K^{\alpha-1} C = \theta^{-1} \alpha av^{\alpha-1} we^{-(\alpha-1)x_3 - x_2} t. \end{cases} \quad (12)$$

После умножения первого уравнения системы (12) на $e^{x_3 t}$, а второго — на $e^{x_2 t}$, учитывая обозначение (10), получим следующую систему уравнений на функции v и w :

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^\alpha - bw)e^{x_3 t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1} \alpha av^{\alpha-1} we^{x_2 t}. \end{cases} \quad (13)$$

Разделим первое уравнение системы (13) а второе, учитывая равенство

$$\frac{\dot{v}}{\dot{w}} = \frac{dv}{dt} : \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dw}.$$

Получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$:

$$\frac{dv}{dw} = \theta \frac{av^\alpha - bw}{\alpha aw} v^{1-\alpha} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{v}{w} - \frac{\theta b}{\alpha a} v^{1-\alpha}. \quad (14)$$

Добавим, что начальные условия (3) вместе с формулами перехода (9) от функций K, C к функциям v, w дают задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием $v(C_0) = K_0$.

Уравнение (14) входит в класс уравнений Бернулли. Такое уравнение решается стандартными известными методами. Сначала уравнение (14) сводится к линейному неоднородному уравнению введением функции $y(w) = v^\alpha(w)$. Тогда

$$v = y^{1/\alpha}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy}{dw}, \quad y(C_0) = K_0^\alpha. \quad (15)$$

Подставив выражения (15) в уравнение (14), получим задачу Коши

$$y'(w) = \frac{\theta y}{w} - \frac{\theta b}{a}, \quad y(C_0) = K_0^\alpha. \quad (16)$$

Наконец, введя функцию $z(w) = y(w)w^{-\theta}$, придём к задаче Коши

$$z'(w) = -\frac{\theta b}{a} w^{-\theta}, \quad z(C_0) = K_0^\alpha C_0^{-\theta}, \quad (17)$$

которая решается непосредственно интегрированием:

$$\begin{aligned} z(w) &= \frac{K_0^\alpha}{C_0^\theta} + \frac{\theta b}{a} \cdot \frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta \neq 1, \\ z(w) &= \frac{K_0^\alpha}{C_0} + \frac{\theta b}{a} \cdot \ln \frac{C_0}{w}, \quad \theta = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что $z(w)$ единообразно можно выразить через функцию полезности

$$U(C) = U_\theta(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}, & C > 0, \quad \theta \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \\ \ln C, & \theta = 1, \end{cases} \quad (18)$$

применяемую в различных экономических моделях (см. [9], [13], [16]):

$$z(w) = K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta b}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (19)$$

Из (19), (17), (15) получаем зависимость

$$v(w) = \left(K_0^\alpha \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \frac{\theta b w^\theta}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)) \right)^{1/\alpha}. \quad (20)$$

По смыслу задачи $K(t)$ и $C(t)$ должны быть положительными, а вместе с ними, ввиду (9), положительными являются $v(t)$ и $w(t)$. Из второго уравнения системы (13) следует, что положительность v и w влечёт за собой возрастание функции $w(t)$. Из начального условия $w(0) = C(0) = C_0$ и возрастания $w(t)$ заключаем, что в зависимости (20) w заведомо лежит на луче $[C_0, +\infty)$, а есть ли для w ограничение сверху — предстоит выяснить.

Несложный анализ показывает, что при $\theta \in (0, 1]$ функция $w(t)$ должна быть ограниченной. Действительно, перепишем зависимость (20) в следующей форме:

$$av^\alpha(w) = aK_0^\alpha \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta b w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (21)$$

Поскольку функция av^α должна быть положительной, то положительной должна быть правая часть равенства (21), а это равносильно неравенству (здесь, как и ранее, мы используем производственную функцию Кобба-Дугласа $f(K) = aK^\alpha$)

$$U_\theta(w) - U_\theta(C_0) < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta}. \quad (22)$$

В случае $\theta \in (0, 1)$ из (22) и (18) находим

$$\frac{w^{1-\theta} - C_0^{1-\theta}}{1-\theta} < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta} \iff w^{1-\theta} < C_0^{1-\theta} + \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{b C_0^\theta} = C_0^{1-\theta} \left(1 + \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{C_0} \right).$$

Отсюда окончательно получаем следующую границу сверху для значений функции $w(t)$, в случае, когда параметр θ лежит на интервале $(0; 1)$:

$$w < C_0 \left(1 + \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{C_0} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}. \quad (23)$$

В случае $\theta = 1$ из (18) и (22) находим

$$\ln \left(\frac{w}{C_0} \right) < \frac{f(K_0)}{b C_0} \iff w < C_0 \exp \left(\frac{f(K_0)}{b C_0} \right). \quad (24)$$

Если же $\theta > 1$, то наличие (или отсутствие) ограничения сверху для функции $w(t)$ зависит от начальных условий (3). Действительно, неравенство (22) с учётом (18) можно переписать в следующей равносильной форме:

$$\frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{\theta - 1} < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta}. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться в том, что левая часть (25) возрастает по переменной w , а предел её при $w \rightarrow +\infty$ равен $C_0^{1-\theta}/(1-\theta)$. Поэтому при условии

$$\frac{C_0^{1-\theta}}{\theta - 1} \leq \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta} \iff b C_0 \leq \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0) \quad (26)$$

неравенство (25) заведомо выполняется при любом $w \in [C_0, +\infty)$. Если же

$$bC_0 > \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0) \quad (27)$$

то из (25) выводим следующую верхнюю границу для w :

$$w < C_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0}} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}}. \quad (28)$$

Итогом рассмотрений параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Между функциями $v(t)$ и $w(t)$, выражающимися через решение $(K(t), C(t))$ задачи Коши (3), (8) (значение параметра b является произвольным положительным числом) по формулам (9), имеется зависимость (20). Функция $w(t)$ превосходит C_0 во всех точках, кроме $t = 0$, а верхняя граница для значений $w(t)$ задана неравенствами (23) и (24) в случае $\theta \in (0, 1)$ и $\theta = 1$ соответственно. В случае $\theta > 1$ при условии*

$$bC_0 \leq \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0)$$

функция $w(t)$ может неограниченно возрастать, а если $bC_0 > (1 - 1/\theta)f(K_0)$, то верхняя граница для $w(t)$ задается неравенством (28).

Завершая параграф, уместно упомянуть ограничения на начальные условия (3), а также на функции $C(t)$ и $K(t)$, принятые в этой тематике. Функция $f(K) = aK^\alpha$ называется производственной функцией Кобба-Дугласа, а $s(t) = 1 - C(t)/f(K(t))$ нормой валового сбережения [9]. Величина $s(t)$ должна быть положительной, а это равносильно выполнению неравенства

$$C(t) < f(K(t)) = aK^\alpha(t). \quad (29)$$

Поэтому рассматриваются задачи Коши (1), (3) с дополнительным ограничением на начальные условия

$$C_0 < f(K_0). \quad (30)$$

В случае, когда $\alpha x_1 = x_2$ (функция нормы сбережения постоянна, и, значит, в формулах (9) $x_3 = x_1$, а в системе (8) параметр $b = 1$) условие (29) равносильно условию

$$w(t) < f(v(t)). \quad (31)$$

В нашей работе [7] мы изучили вопрос, какому ограничению сверху (естественно, более сильному, чем указанному в теореме 1) должна удовлетворять функция $w(t)$, чтобы выполнялось неравенство (31). Заметим, что требование (31) означает (при $b = 1$), что не только вторая компонента решения $(v(t), w(t))$ системы (13), но и первая должна быть возрастающей функцией. По аналогии с этим для общего случая (b произвольно) мы будем рассматривать ограничение

$$bw(t) < f(v(t)), \quad (32)$$

которое согласно первому уравнению системы (13) влечёт за собой возрастание функции v . В частности, мы требуем, чтобы начальные условия удовлетворяли неравенству

$$bC_0 < f(K_0). \quad (33)$$

3. Решение системы в квадратурах. Выражение функции, обратной к w через разность значений специальной функции. Максимальный временной промежуток существования решения

Полученная в предыдущем параграфе зависимость $v(w)$ (20), будучи подставлена во 2-е уравнение системы (13), позволяет явно найти в интегральной форме обратную функцию к $w(t)$, то есть выразить t как функцию w . Действительно, разделив переменные во 2-м уравнении (напомним, что постоянная выражается через параметры исходной системы (8) по формуле $\varkappa = (1/\alpha - 1)x_2$)

$$\dot{w} = \theta^{-1} \alpha a v^{\alpha-1} w e^{\varkappa t}$$

системы (13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{w} (v(w))^{1-\alpha} = \frac{\alpha a}{\theta} e^{\varkappa t} dt$$

Это уравнение интегрируется с учётом начального условия $w(0) = C_0$ и тождества (20) следующим образом:

$$\int_{C_0}^w \left(K_0^\alpha \left(\frac{u}{C_0} \right)^\theta + \frac{\theta b u^\theta}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(u)) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{du}{u} = \frac{\alpha a}{\theta \varkappa} (e^{\varkappa t} - 1). \quad (34)$$

Умножив обе части соотношения (34) на $a^{1/\alpha-1}$ и сделав в интеграле замену переменной $u = C_0 z$, получим более удобную форму записи решения:

$$\int_1^{w/C_0} \left(f(K_0) z^\theta - \theta b z^\theta C_0^\theta (U_\theta(z C_0) - U_\theta(C_0)) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z} = \frac{\alpha a^{1/\alpha}}{\theta \varkappa} (e^{\varkappa t} - 1). \quad (35)$$

Согласно (18) имеем

$$C_0^{\theta-1} (U_\theta(z C_0) - U_\theta(C_0)) = U_\theta(z), \quad \theta, C_0, z \in (0; +\infty). \quad (36)$$

Тождество (36) после несложных преобразований соотношения (35) помогает в итоге выразить t через w :

$$t = \frac{1}{\varkappa} \ln \left(1 + \frac{\theta \varkappa}{\alpha a^{1/\alpha}} J_\theta \left(\frac{w}{C_0}; \alpha \right) \right), \quad (37)$$

где

$$J_\theta(Z; \alpha) = \int_1^Z \left(f(K_0) z^\theta - \theta b z^\theta C_0 U_\theta(z) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z}. \quad (38)$$

Формулы (37), (38), (20) дают решение системы дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями $v(0) = K_0$, $w(0) = C_0$ в интегральной форме. Перейдя от функций $v(t)$, $w(t)$ к функциям $K(t)$, $C(t)$ (см. (9)), мы получим решение задачи Коши (3), (8). Трудности возникают при попытке найти более простое аналитическое выражение $t(w)$ чем (37), поскольку интеграл $J_\theta(Z; \alpha)$ при $\alpha \in (0; 1) \setminus \cup_{n=2}^{+\infty} \{1/n\}$ не является элементарной функцией верхнего предела интегрирования z (кроме некоторых случаев, когда $f(K_0)$ и C_0 связаны специальными соотношениями). Интегралы $J_\theta(Z; \frac{1}{2})$, $J_\theta(Z; \frac{1}{3})$ и т.д. несложно вычисляются, но, как известно из теории экономического моделирования (см. [15] и [9]), производственная функция $f(K) = aK^\alpha$ при $\alpha \leq 2/3$ даёт экономически неэффективную модель, и такие значения показателя α не рассматриваются. Всё же, по мнению авторов, значения $\alpha \in [1/2; 2/3]$ могут представлять теоретический интерес. Поэтому приведём значение $J_\theta(Z; \frac{1}{2})$.

При $\theta \neq 1$ имеем

$$\begin{aligned} J_\theta \left(Z; \frac{1}{2} \right) &= \int_1^Z \left(f(K_0) z^\theta - \theta b C_0 z^\theta \cdot \frac{z^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \frac{dz}{z} = \\ &= \int_1^Z \left(\left(f(K_0) + \frac{\theta}{1-\theta} b C_0 \right) z^{\theta-1} - \frac{\theta b C_0}{1-\theta} \right) dz = \\ &= \left(f(K_0) + \frac{\theta}{1-\theta} b C_0 \right) \frac{Z^\theta - 1}{\theta} - \frac{\theta b C_0}{1-\theta} (Z - 1), \quad (39) \end{aligned}$$

а интегрирование возможно при любом значении $Z \geq 1$, если $\theta > 1$ и $f(K_0) > \frac{\theta}{\theta-1} b C_0$, а в других случаях имеются ограничения (см. теорему 1)

$$\begin{aligned} 1 \leq Z \leq \left(1 - \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{f(K_0)}{b C_0} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta > 1, \quad \frac{f(K_0)}{b C_0} < \frac{\theta}{\theta - 1}, \\ 1 \leq Z \leq \left(1 + \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{f(K_0)}{b C_0} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1). \end{aligned} \quad (40)$$

В частности, выражение (39), если в него подставить верхние границы для переменной z из (40) даёт максимально возможное (при $\theta \in (0; 1)$ или при $\theta \in (1; +\infty)$, если $f(K_0)/(b C_0) < \frac{\theta}{\theta-1}$) значение интеграла $J_\theta \left(Z; \frac{1}{2} \right)$. Если его подставить в (37), то получится максимальное значение временного промежутка, на котором существует решение при рассматриваемых значениях параметров.

При $\theta = 1$ имеем

$$J_1 \left(Z; \frac{1}{2} \right) = \int_1^Z (f(K_0) - b C_0 \ln z) dz = (Z - 1)(f(K_0) + b C_0) - b C_0 Z \ln Z,$$

а длина максимального временного промежутка, на котором существует решение, равна (если $\alpha = 1/2$, то $\varkappa = x_2$)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\varkappa} \ln \left(1 + \frac{2\varkappa}{a^2} J_1 \left(\exp \left(\frac{f(K_0)}{b C_0} \right); \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{x_2} \ln \left(1 + \frac{2x_2}{a^2} \left(b C_0 \exp \left(\frac{f(K_0)}{b C_0} \right) - f(K_0) - b C_0 \right) \right). \end{aligned}$$

В дальнейших работах мы собираемся более детально исследовать экономические модели со значениями параметров α и θ , востребованные в различных приложениях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

5. Козко А.И., Лузина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.
6. Козко А.И., Лузина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
7. Козко А.И., Лузина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Vol 23(1), С. 118-129. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129>.
8. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model. http://ciiep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
9. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
10. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>.
11. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.
12. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
13. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
14. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.
15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.
16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press*. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press*. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey–Kass–Koopmans problem with logarithmic utility function“, *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>

4. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey–Kass–Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey–Kass–Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.
6. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey–Kass–Koopmans problem“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
8. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model“, 2018, http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
9. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>.
11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, “When Economic Growth is Less than Exponential“, *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.
12. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>.
13. Romer, D. 2006, “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.
14. Robert J. Barro. 1999, “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.
16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.

Получено: 22.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.55

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-126-135

Формула Карлемана в матричных областях Зигеля

У. С. Рахмонов, З. К. Матякубов

Рахмонов Уктам Содикович — доцент, Ташкентский государственный технический университет (г. Ташкент, Узбекистан).

e-mail: uktam_rakhmonov@mail.ru

Матякубов Зокирбек Кадамович — аспирант, Хорезмская академия Мамуна (г. Хорезм, Узбекистан).

e-mail: zokirbek.1986@mail.ru

Аннотация

Верхняя полуплоскость не является ограниченной областью, но формулы Карлемана для нее играют важную роль в дальнейшем изложении. В данной работе найдена формула Карлемана для матричных областях Зигеля.

Ключевые слова: Классические области, Формула Карлемана, граница Шилова, ядро Коши, матричный единичный диск, область Зигеля.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

У. С. Рахмонов, З. К. Матякубов. Формула Карлемана в матричных областях Зигеля // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 126–135.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.55

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-126-135

Carleman's formula for the matrix domains of Siegel

U. S. Rakhmonov, Z. K. Matyakubov

Rakhmonov Uktam Sodikovich — associate professor, Tashkent State Technical University (Tashkent, Uzbekistan).

e-mail: uktam_rakhmonov@mail.ru

Zokirbek Kadamovich Matyakubov — postgraduate student, Khorezm Academy of Mamun (Khorezm, Uzbekistan).

e-mail: zokirbek.1986@mail.ru

Abstract

The domain of Siegel first type is not a bounded domain, but Carleman’s formulas for it play an important role in the further presentation. In this paper, the Carleman formula for the Siegel domain is found.

Keywords: Classical domains, Carleman’s formula, Shilov boundary, Cauchy kernel, matrix unit disc, Siegel domain.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

U. S. Rakhmonov, Z. K. Matyakubov, 2022, “Carleman’s formula for the matrix domains of Siegel”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 126–135.

1. Introduction, preliminaries and problem statement

Integral representations of holomorphic functions play an important role in the classical theory of functions of one complex variable and in multidimensional complex analysis. They solve the classical problem of restoring at points in the domain D a holomorphic function that behaves quite well when approaching the ∂D boundary, by its values on ∂D or on the S –Shilov boundary. Along with this classical problem, we can naturally consider the following: to restore a holomorphic function in D by its values on a certain set $M \subset \partial D$ that does not contain S . Of course, M must be the uniqueness set for the class of holomorphic functions under consideration.

The first result in the direction of solving such a problem was obtained by T. Carleman in 1926 for the domain $D \subset \mathbb{C}$ of one special form [1]. His idea of introducing a «quenching» function into the Cauchy integral formula was developed by G. M. Goluzin and V. I. Krylov in 1933 in relation to simply connected flat domains [2]. Their method provided for the construction of some auxiliary holomorphic function depending on the set M , which was possible for simply connected domains $D \subset \mathbb{C}$, but, generally speaking, it is no longer possible for multi-connected regions in \mathbb{C} or for domains in \mathbb{C}^n , $n > 1$.

In 1935, E. Cartan proved that there are only six possible types of irreducible, homogeneous, bounded, symmetric domains. Of these, $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}, \mathfrak{R}_{III}$ and \mathfrak{R}_{IV} are called classical domains (see [3]):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_I &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0 \right\}, \\ \mathfrak{R}_{II} &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{III} &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = -Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{IV} &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1 \right\}. \end{aligned}$$

The dimensions of these regions are $mk, m(m + 1)/2, m(m - 1)/2, n$, respectively.

All these domains are biholomorphically nonequivalent, so the complex analysis for them is constructed differently.

For symmetric domains, the Carleman formulas are obtained in [4]. The proofs from [4] are not transferred to Siegel domains, since there is no point in the Siegel domain through which a sufficiently powerful family of complex lines can be drawn that intersect the backbone of D along a curve (in symmetric domains, such a point is point 0). Therefore, in the work [5], the value of the holomorphic function is restored not in the domain, but on the backbone D .

Currently, the study of integral representations of holomorphic functions and their applications in matrix balls associated with the classical domains mentioned above has become one of the topical issues. In [6], holomorphic automorphisms for a matrix ball of the first type are described. Integral formulas for the matrix ball of the second type were obtained by G. Khudayberganov and

Z. Matyakubov [7], [8], and the third type were studied by G. Khudayberganov, U. Rakhmonov and integral formulas [9], [10] were found.

In [11], the volumes of a matrix ball of the third type and a generalized Lie ball are calculated. The full volumes of these regions are necessary to find the kernels of integral formulas for these regions (Bergman, Cauchy-Seguet, Poisson kernels, etc. (see [8], [12])). In [13], holomorphic and pluriharmonic functions for classical domains of the first Cartan type were determined, and the Laplace and Hua Lo-Ken operators were also studied. Moreover, a relationship was established between these operators.

In this paper [20], prove a criterion for plurisubharmonic functions in terms of integral mean by complex ellipsoids. Moreover, by using the criterion, prove an analogue of Blaschke–Privalov theorem for plurisubharmonic functions. In [21] is discussed the problem of the holomorphic extendability of a function to a matrix ball, given on a piece of its skeleton. For this purpose complete orthonormal systems in the matrix ball are used. In this paper [22] is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains. In this paper [23], the automorphisms of the matrix ball associated with the classical domains of the second type are described, and also the properties of the second type matrix ball $B_{m,n}^{(2)}$ are studied.

In this paper, the Carleman formula for the Siegel domain is found.

Consider the space m^2 of complex variables, denoted by \mathbb{C}^{m^2} . In some questions, it is convenient to represent the points Z of this space in the form of square $[m \times m]$ -matrices, i.e. in the form of $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$. With this representation of points, the space \mathbb{C}^{m^2} will be denoted by $\mathbb{C}[m \times m]$.

The domain of Siegel first type is not a bounded domain, but Carleman's formulas for it play an important role in the further presentation. In this paper, we consider Carleman formulas in Siegel matrix domains.

Let \mathfrak{R}_{II} a classical domain of the second type according to the classification of E. Cartan, defined as a set

$$\mathfrak{R}_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I - Z\bar{Z} > 0\},$$

where Z of a symmetric matrix of order m (I – unit $[m \times m]$ -matrix). The boundary \mathfrak{R}_{II} consists of a set

$$\partial\mathfrak{R}_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \det(I - Z\bar{Z}) = 0, \quad I - Z\bar{Z} \geq 0\},$$

that is, from the set of matrices Z , for which the matrix $I - Z\bar{Z}$ is a nonnegatively definite, but not positively definite Hermitian matrix (its eigenvalues are nonnegative and at least one of them is zero). On the border there is a set of

$$S_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : Z\bar{Z} = I\},$$

which is called the skeleton of \mathfrak{R}_{II} (note that S_{II} is the Shilov boundary for \mathfrak{R}_{II} (see [14, page 95])). It is clear that S_{II} is the set of all unitary $[m \times m]$ -matrices (the set of unitary matrices of order m is usually referred to the $U(m)$). It should be noted that the set of matrices

$$\{Z : \det(I - Z\bar{Z}) = 0\}$$

contains a limited component distinguished by the condition $I - Z\bar{Z} \geq 0$, and an unlimited for $I - Z\bar{Z} \leq 0$. These components intersect in the skeleton S_{II} .

Let the set be $M \subset S_{II}$ and $\mu(M) > 0$, where μ is the normalized Lebesgue measure by S_{II} .

We parametrize S_{II} in the following way: $U = e^{i\phi}u$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $u \in SU(m)$, where $SU(m)$ is a group of special unitary matrices, i.e. $\det u = 1$. Since $\det U = e^{im\phi} \det u = e^{im\phi}$, the set $\{U : U = \lambda u, |\lambda| = 1\}$, $u \in SU(m)$ intersects the set of elements of the group $SU(m)$ at exactly m roots of unity $e^{im\phi} = 1$.

LEMMA 1 (SEE. [14]). *Haar's measure $d\mu$ of the manifold S_{II} can be written as $d\mu = h(u)d\varphi d\mu_0(u)$, where $d\mu_0$ is a normalized Lebesgue measure on $SU(m)$, and h is a smooth positive function on $SU(m)$.*

We introduce the set

$$M_{0,u} = \{U : U \in M, U = \lambda u, \lambda = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, u \in SU(m),$$

$$M'_0 = \{u : u \in SU(m), m_1 M_{0,u} > 0\}.$$

where m_1 is Lebesgue measure. By Fubini's theorem $\mu_0(M'_0) > 0$. We denote

$$\psi_0(U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{0,u}} \frac{\eta + \lambda d\eta}{\eta - \lambda \eta}, \quad \varphi_0 = \exp \psi_0.$$

Hardy class $H^1(\mathfrak{R}_{II})$ consists of all functions f that are holomorphic in the domain \mathfrak{R}_{II} for which

$$\|f\|_{H^1} = \sup_{0 < r < 1} \int_{S_{II}} |f(rZ)| d\mu < \infty,$$

here $rZ = (rz_{11}, rz_{12}, \dots, rz_{mm})$.

LEMMA 2 (SEE. [14]). Let $f \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$. Then the following formula is valid

$$f(0) = \frac{m}{\int d\mu_1} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{M'_0} f(U) \left[\frac{\varphi_0(U)}{\varphi_0(0)} \right]^j d\mu_U.$$

Let $\varphi_A(Z)$ is an automorphism of \mathfrak{R}_{II} , which transforms point A to 0 (see [3]). We denote

$$\mu_A(K) = \mu_1(\varphi_A^{-1}(K)),$$

$$M_{A,\omega} = \{U : U \in M, U = \varphi_A^{-1}(\lambda \varphi_A^{-1}(\omega))\}, |\lambda| = 1, \omega \in S_A = \varphi_A(SU(m)),$$

$$M'_A = \{\omega : \omega \in S_A, m_1 M_{A,\omega} > 0\},$$

$$\psi_A(U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{A,\omega}} \frac{\eta + \lambda d\eta}{\eta - \lambda \eta}, \quad \varphi_A = \exp \psi_A,$$

(ψ_A depends on U , because λ and ω are functions U).

THEOREM 1 (SEE. [4]). Let $f \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$. Then for any point $A \in \mathfrak{R}_{II}$ the following Carleman's formula holds

$$f(A) = \frac{m}{\int d\mu_A} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{M'_A} f(U) \left[\frac{\varphi_A(U)}{\varphi_A(A)} \right]^j H(A, \bar{U}) d\mu_U,$$

where $H(A, \bar{U})$ — is Cauchy kernel for the classical domain of the second type.

2. Main results

Matrix upper half-plane is the domain (Siegel)

$$D_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m \times m] : \text{Im } W > 0\}$$

where $W = \|w_{jk}\|$, $(j, k = 1, \dots, m)$ -symmetric matrix of order m , the elements of which are complex numbers of the \mathbb{C} , where $\text{Im } W$ is defined as

$$\text{Im } W = \frac{1}{2i}(W - \bar{W}).$$

Obviously, the matrix $\text{Im}W$ is Hermitian: its elements $h_{jk} = \frac{1}{2i}(w_{jk} - \bar{w}_{jk})$ satisfy the conditions $\bar{h}_{jk} = h_{kj}$, and in particular, $h_{jj} = \text{Im}w_{jj}$ are real. The inequality $H > 0$ for Hermitian matrix H means that it is positive definite, i.e. all its eigenvalues are positive.

On ∂D_{II} we define a set

$$\Gamma_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m \times m] : \text{Im}W = 0\},$$

which is called a skeleton of the domain D_{II} . It consists of all Hermitian matrices of order m .

Similarly to Lemma 10.1 and Theorem 10.3 from [16], the following is proved

LEMMA 3. Transform $W = \Phi(Z)$ (Cayley transform), where

$$W = \Phi(Z) = i(I + Z)(I - Z)^{-1}, \quad (1)$$

is a biholomorphic maps \mathfrak{R}_{II} to D_{II} , while S_{II} goes to Γ_{II} .

PROOF. First, we prove that for $Z \in \mathfrak{R}_{II}$, the matrix $I - Z$ is non-degenerate. First of all, we note that the condition $I - Z\bar{Z} > 0$ implies $Z \neq 0$.

Let $w - m$ be a dimensional column vector and

$$(I - Z)w = 0.$$

Then $w = Zw$, from where $w^* = w^*\bar{Z}$. Further,

$$w^*w = w^*\bar{Z}Zw \text{ and } w^*(I - \bar{Z}Z)w = 0.$$

Since the conditions

$$I - Z\bar{Z} > 0 \text{ and } I - \bar{Z}Z > 0$$

are equivalent (see [3]), then the left part of the last equality for $w \neq 0$ is positive definite. Hence, $w = 0$. This means the non-degeneracy of the matrix $I - Z$, i.e. the existence of $(I - Z)^{-1}$ and the holomorphy of the map Φ in the domain \mathfrak{R}_{II} .

Next, from (1) we find:

$$\begin{aligned} \text{Im}W &= \frac{1}{2i}(W - W^*) = \frac{1}{2i} \left[i(I + Z)(I - Z)^{-1} + i(I - \bar{Z})^{-1}(I + \bar{Z}) \right] = \\ &= \frac{1}{2}(I - \bar{Z})^{-1} \left[(I - \bar{Z})(I + Z) + (I + \bar{Z})(I - Z) \right] (I - Z)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}(I - \bar{Z})^{-1} \left[I + Z - \bar{Z} - \bar{Z}Z + I - Z + \bar{Z} - \bar{Z}Z \right] (I - Z)^{-1} = \\ &= (I - \bar{Z})^{-1} \left[I - \bar{Z}Z \right] (I - Z)^{-1}. \end{aligned}$$

It can be seen from this that for non-degeneracy $I - Z$, Hermitian matrices

$$\text{Im}W \text{ and } I - \bar{Z}Z$$

simultaneously positively defined. We proved that F maps \mathfrak{R}_{II} to D_{II} .

From (1) we can find the inverse mapping $Z = \Phi^{-1}(W)$:

$$Z = (W + iI)^{-1}(W - iI). \quad (2)$$

For $W \in D_{II}$, the matrix $W + iI$ is non-degenerate (this is proved as above). Therefore, the mapping Φ^{-1} is holomorphic in D_{II} . It can also be seen from (1) that for $W \in D_{II}$, the matrix $I - Z$ is non-degenerate, therefore, $I - Z\bar{Z} > 0$, i.e. Φ^{-1} maps D_{II} to \mathfrak{R}_{II} .

So, the mapping Φ biholomorphically maps \mathfrak{R}_{II} to D_{II} , and it is clear from (2) that it converts S_{II} to Γ_{II} .

The lemma is proved.

Using the transformation of the classical domain of the second type Φ and the automorphism Φ_A that converts the point $A \in \mathfrak{R}_{II}$ to 0 (0-zero matrix of order m) (see [3]), we define the following transformation

$$\Psi_B = \Phi \circ \Phi_A \circ \Phi^{-1}, \quad B = \Phi(A)$$

which is an automorphism of the domain D_{II} , transforming point B of D_{II} to the point iI .

Let \dot{U} element of the volume S_{II} , a \dot{V} element of the volume in Γ_{II} . In [3] is proved the following relation between \dot{U} and \dot{V} under the mapping Φ :

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} (\det(V^2 + I))^{-\frac{m+1}{2}} \dot{V}, \quad (3)$$

where $V \in \Gamma_{II}$. Since $V^* = V$ and

$$\begin{aligned} \det(V^2 + I) &= \det(V - iI) \det(V + iI) = \\ &= \overline{\det(V + iI)} \det(V + iI) = |\det(V + iI)|^2, \end{aligned}$$

(3) can be written as

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\det(V + iI)|^{-(m+1)} \dot{V}. \quad (4)$$

To consider multidimensional analogues of Carleman formulas, it is desirable to expand the class of functions for which these formulas are true in the matrix upper half-plane D_{II} (Siegel domain).

The class of holomorphic functions in D_{II} we denote as $A(D_{II})$. Let $f \in A(D_{II})$ and

$$\frac{f(W)}{\det^2(W + iI)} \in H^1(\Gamma_{II}), \quad (5)$$

i.e. by definition, there is such a $C_1 > 0$, what, the relation is fulfilled

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(rW)}{\det^2(rW + iI)} \right| d\mu_V = \\ = \int_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(V)}{\det^2(V + iI)} \right| d\mu_V < C_1 < +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Now, using the mapping (1) and the relations (3) and (4), we get the following equalities:

$$\begin{aligned} \int_{S_{II}} \left| f \left(i(I + U)(I - U)^{-1} \right) \right| d\mu_U = \\ = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_{\Gamma_{II}} \left| f(V) |\det(V + iI)|^{-(m+1)} \right| d\mu_V = \\ = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(V)}{\det^2(V + iI)} \cdot |\det(V + iI)|^{-m+1} \right| d\mu_V. \end{aligned} \quad (7)$$

By the relation (6) the integral of the fraction of the first the factor is bounded and since there is a $V + iI$ -non-degenerate matrix under integral, i.e. (7) available then converges and integral (7) is bounded.

It follows from this that there is $C_2 > 0$,

$$\int_{S_{II}} \left| f \left(i(I+U)(I-U)^{-1} \right) \right| d\mu_U < C_2,$$

i.e.

$$f \left(i(I+Z)(I-Z)^{-1} \right) \in H^1(S_{II}). \quad (8)$$

Therefore, for (8) is true if and only if (5) is true. Note that the scalar version of the above relation is presented in [15, p. 147].

THEOREM 2. *If the function $f \in A(D_{II})$ satisfies the condition (5) and the set $\tilde{M} \in \partial D_{II}$ has positive Lebesgue measure, then the following Carleman's formula is true*

$$\begin{aligned} f(W) &= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2}} \times \\ &\times \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\tilde{M}} f(V) \left[\frac{\tilde{\varphi}(V)}{\tilde{\varphi}(W)} \right]^j \frac{d\mu_V}{\det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W) \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)}, \end{aligned} \quad (9)$$

where the limit is uniform on compact subsets ∂D_{II} , and $V \in \tilde{M}$.

PROOF. Let $F(Z) = f(i(I+Z)(I-Z)^{-1})$, then $F(Z) \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$ and the Carleman formula is valid

$$F(Z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M F(U) \left[\frac{\varphi(U)}{\varphi(Z)} \right]^j \frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)},$$

where M —the image of \tilde{M} when mapping $Z = (W+iI)^{-1}(W-iI)$ of the Siegel domain to a classical domain of the second type.

Next, consider the inverse mapping on (1)

$$Z = (W+iI)^{-1}(W-iI), \quad U = (V+iI)^{-1}(V-iI),$$

and make the following calculations:

$$\begin{aligned} I - ZU^* &= I - (W+iI)^{-1}(W-iI)(\bar{V}+iI)(\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= (W+iI)^{-1} [(W+iI)(\bar{V}-iI) - (W-iI)(\bar{V}+iI)] (\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= (W+iI)^{-1} [W\bar{V} - iW + i\bar{V} + I - W\bar{V} - iW - i\bar{V} - I] (\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= 2i(W+iI)^{-1} [\bar{V} - W] (\bar{V}-iI)^{-1}, \end{aligned}$$

and the condition (3) holds

$$d\mu_U = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\det(V+iI)|^{-(m+1)} d\mu_V.$$

Calculations show that

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)} &= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI) \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-iI)}{(2i)^{\frac{m(m+1)}{2}} \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W)} \cdot \frac{2^{\frac{m(m+1)}{2}} d\mu_V}{\left| \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI) \right|^2} = \\ &= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\frac{m(m+1)}{2}} \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W) \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)} d\mu_V. \end{aligned}$$

Next, φ plays the role of $\tilde{\varphi}$ for the set M . By the theorem of M. A. Lavrentiev (see [17]) M is a set of also positive Lebesgue measure, such that the harmonic measure M passes into the harmonic measure \tilde{M} , therefore, φ will pass into $\tilde{\varphi}$, and we come to the formula (9).

The theorem is proved.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. T.Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris: Gauthier-Villars (1926), pp. 3–6.
2. G. M. Golusin, W. J. Krylow, *Verallgemeinerung einer Formel von Carleman und ihre Anwendung zur analytischen Fortsetzung*, Mat. Sb., 40:2 (1933), 144–149.
3. Хуа Л. К. *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях* // М.: ИЛ, 1959. 163 с.
4. А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, *Аналоги формулы Карлемана для классических областей*, Матем. заметки, 45:3 (1989), 87–93.
5. А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, *Многомерные формулы Карлемана в областях Зигеля*, Изв. вузов. Матем., 1990, 3, 44–49.
6. С. Косбергенов, *О формуле Карлемана для матричного шара*, Изв. вузов. Матем., 1999, 1, 76–79.
7. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, Z.Q.Matyakubov, *Integral formulas for some matrix domains*, Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, pp. 89-95.(2016).
8. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *The Bergman and Cauchy-Szego kernels for matrix ball of the second type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 7:3, pp. 305-310.(2014).
9. G.Khudayberganov, B.P.Otemuratov, U.S.Rakhmonov, *Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 11:1, 40-45.(2018).
10. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type*, Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 264, pp. 101-108, Springer, Cham.(2017).
11. U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev, *On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls*, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 29:4 (2019), 548–557
12. G. Khudayberganov, J. Abdullayev, *Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains $\tau^+(n-1)$ and \mathbb{R}_{IV}^n* , Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **13:5**, 559-567(2020).
13. G.Khudayberganov, A.M.Khalknazarov, J.Sh.Abdullayev, *Laplace and Hua Luogeng operators*, Russian Math. (Iz. VUZ), 64:3 (2020), 66–71.
14. Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Новосибирск: Наука. 1990. - 248 с.
15. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p* . М.: Мир. 1984. 368 с.
16. Худайбергенов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов, *Анализ в матричных областях*, Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 292 с.
17. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, М.: Гостехиздат, 1950. – 338 с.

18. Jonibek Sh. Abdullayev. *An analogue of Bremermann's theorem on finding the Bergman kernel for the Cartesian product of the classical domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$ and $\mathfrak{R}_{II}(n)$* , Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., 2020, no. 3, 88–96.
19. G.Khudayberganov, J.Sh.Abdullayev. *The boundary Morera theorem for domain $\tau^+(n-1)$* , Ufimsk. Mat. Zh., 13:3 (2021), pp. 196–210.
20. K.Rakhimov, Sh.Shopulatov. *A mean value criterion for plurisubharmonic functions*, Complex Variables and Elliptic Equations, (2021) DOI:10.1080/17476933.2021.1954623.
21. G.Khudayberganov, J.Sh.Abdullayev. *Holomorphic continuation into a matrix ball of functions defined on a piece of its skeleton*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 296–310.
22. J.Sh.Abdullayev. *Estimates the Bergman kernel for classical domains E. Cartan's*, Chebyshevskii sbornik, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 21–32.
23. Uktam S. Rakhmonov, Jonibek Sh. Abdullayev, *On properties of the second type matrix ball $B_{m,n}^{(2)}$ from space $\mathbb{C}^n[m \times m]$* , J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 15:3 (2022), pp. 329–342.

REFERENCES

1. T.Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris: Gauthier-Villars (1926), pp. 3–6.
2. G. M. Golusin, W. J. Krylow, *Verallgemeinerung einer Formel von Carleman und ihre Anwendung zur analytischen Fortsetzung*, Mat. Sb., 40:2 (1933), 144–149.
3. Hua Luogeng, *Harmonic analysis of functions of several complex variables, in classical domains*, Moscow, IL, 1963 (in Russian).
4. A.M.Kytmanov, T.N.Nikitina, *Analogs of Carleman's formula for classical domains*, Math. Notes, 45:3 (1989), 243–248.
5. A.M.Kytmanov, T.N.Nikitina, *Multidimensional Carleman formulas in Siegel domain*, Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:3 (1990), 50–56.
6. S.Kosbergenov, *On the Carleman formula for a matrix ball*, Russian Math. (Iz. VUZ), 43:1 (1999), 72–75.
7. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, Z.Q.Matyakubov, *Integral formulas for some matrix domains*, Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, pp. 89-95.(2016).
8. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *The Bergman and Cauchy-Szego kernels for matrix ball of the second type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 7:3, pp. 305-310.(2014).
9. G.Khudayberganov, B.P.Otemuratov, U.S.Rakhmonov, *Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 11:1, 40-45.(2018).
10. G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type*, Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 264, pp. 101-108, Springer, Cham.(2017).

11. U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev, *On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:4 (2019), 548–557
12. G. Khudayberganov, J. Abdullayev, *Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains $\tau^+(n-1)$ and \mathfrak{R}_{IV}^n* , Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **13:5**, 559-567(2020).
13. G.Khudayberganov, A.M.Khalknazarov, J.Sh.Abdullayev, *Laplace and Hua Luogeng operators*, Russian Math. (Iz. VUZ), 64:3 (2020), 66–71.
14. L. A. Aizenberg, *Carleman Formulas in complex analysis*, Novosibirsk, Nauka, 1990 (in Russian).
15. P. Kusiś, *Introduction to the theory of spaces H^p* . М.: Мир. 1984. 368 с.
16. G. Khudayberganov, A. M. Kytmanov, B. A. Shaimkulov, *Analysis in matrix domains*, Monograph. Krasnoyarsk, Siberian Federal University, 2017 (in Russian).
17. I. I. Privalov, *Boundary properties of analytic functions*, М.: Gostekhizdat, 1950. – 338 с.
18. Jonibek Sh. Abdullayev. *An analogue of Bremermann's theorem on finding the Bergman kernel for the Cartesian product of the classical domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$ and $\mathfrak{R}_{II}(n)$* , Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., 2020, no. 3, 88–96.
19. G. Khudayberganov, J. Sh. Abdullayev. *The boundary Morera theorem for domain $\tau^+(n-1)$* , Ufimsk. Mat. Zh., 13:3 (2021), pp. 196–210.
20. K. Rakhimov, Sh. Shopulatov. *A mean value criterion for plurisubharmonic functions*, Complex Variables and Elliptic Equations, (2021) DOI:10.1080/17476933.2021.1954623.
21. G. Khudayberganov, J. Sh. Abdullayev. *Holomorphic continuation into a matrix ball of functions defined on a piece of its skeleton*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 296–310.
22. J. Sh. Abdullayev. *Estimates the Bergman kernel for classical domains E. Cartan's, Chebyshevskii sbornik*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 21–32.
23. Uktam S. Rakhmonov, Jonibek Sh. Abdullayev, (2022), *On properties of the second type matrix ball $B_{m,n}^{(2)}$ from space $\mathbb{C}^n[m \times m]$* , J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 15:3, pp. 329–342.

Получено: 06.11.2021

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151

**Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника
дерева типа «змея»¹**

О. С. Щербаков

Щербаков Олег Сергеевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Аннотация

В данной работе изучаются минимальные заполнения конечных метрических пространств (объект, возникший как обобщение понятий кратчайшего дерева и минимального заполнения в смысле Громова). Как известно, вес минимального заполнения данного типа может быть найден как решение задачи линейного программирования или с помощью так называемых мультиобходов. Связь между этими двумя подходами можно проследить, перейдя к двойственной задаче линейного программирования: рациональные точки выпуклого многогранника, который строится по типу заполнения, соответствуют мультиобходам. Данная работа посвящена изучению таких многогранников. Показано, что их вершины соответствуют неприводимым мультиобходам. Получена описание многогранника и явная формула веса для минимального параметрического заполнения бинарного дерева типа «змея».

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное заполнение, линейное программирование, двойственность, выпуклые многогранники.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

О. С. Щербаков. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея» // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 136–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151

**Polytopos of Binary Trees, Structure of the Polytop
for the «Snake-type»-Tree**

O. S. Shcherbakov

Shcherbakov Oleg Sergeevich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

¹Исследование выполнено в рамках Научно образовательной школы МГУ «Математические методы анализа сложных систем».

Abstract

In the paper minimal fillings of finite metric spaces are investigated. This object appeared as a generalization of the concepts of a shortest tree and a minimal filling in the sense of Gromov. It is known that the weight of a minimal filling of a given type can be found by linear programming and by so-called multitours technique. A relation between these two approaches can be demonstrated using duality in linear programming, namely, rational points of the polytop constructed by the dual problem correspond to multitours. The paper is devoted to investigation of such polytopes, It is shown that the vertices of the polytop are in one-to-one correspondence with irreducible multitours. A description of the polytop and an explicit formula for the weight of the minimal filling of the «snake-type» binary tree is obtained.

Keywords: finite metric space, minimal filling, linear programming, duality, convex polytopes.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

O. S. Shcherbakov 2022, “Polytopes of Binary Trees, Structure of the Polytop for the «Snake-type» Tree”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 136–151.

1. Введение

Широко известна классическая задача Штейнера о поиске сети минимальной длины, соединяющей заданный набор точек на плоскости [1]. Задача Штейнера и её обобщения имеют множество приложений: проектирование транспортных сетей, линий электропередач, беспроводных сетей и т.п. Разные обобщения получаются путём изменения формулировки классической задачи: набор точек рассматривается в каких-либо метрических пространствах, изучаются различные аналоги длины, вводятся некоторые ограничения на сети.

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства поставлена и подробно описана в [2] (краткое введение в [3] или [4]). Это — одно из обобщений, с одной стороны задачи Штейнера о кратчайшей сети, с другой — задачи Громова о минимальном заполнении гладкого риманова многообразия. Развитию сюжета задачи о минимальном заполнении посвящены работы [6], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Отметим, что теория минимальных заполнений позволяет получать новые оценки на отношении Штейнера [14], [15].

Задача состоит в поиске взвешенного дерева наименьшего веса, соединяющего данное метрическое пространство (т.е. точки метрического пространства вкладываются в множество вершин графа) так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве. В ходе решения задачи приходится иметь дело с т.н. задачей минимального параметрического заполнения (ЗМПЗ), в такой постановке фиксируется граф (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях.

Ещё в работе [2] отмечена связь ЗМПЗ с задачей линейного программирования, однако подробное исследование дано в статье [3]. В работе [4] получена формула веса минимального заполнения в терминах так называемых мультиобходов. Несмотря на то, что не дано точных рецептов по поиску этих мультиобходов, разработана техника работы с мультиобходами, введено понятие неприводимых мультиобходов. Так же показано, что неприводимых мультиобходов конечное число. Формула веса минимального параметрического заполнения использует только неприводимые мультиобходы.

В работе [3] поиск формулы веса минимального параметрического заполнения осуществляется в терминах задачи линейного программирования. Задача о поиске минимального параметрического заполнения рассматривается как классическая задача линейного программирования (КЗЛП), затем следует переход к двойственной задаче (ДЗ). Как известно, КЗЛП и ДЗ разрешимы или не разрешимы одновременно (в рассматриваемом случае разрешимы),

и минимум целевой функции на допустимом множестве в КЗЛП совпадает с максимумом целевой функции в ДЗ на допустимом множестве в ДЗ. В ДЗ допустимое множество строится по бинарному дереву — это многогранник \mathbf{X} , который не зависит от метрического пространства (в отличие от допустимого множества в классической задаче), а зависит только от типа заполнения, то есть от структуры графа. Вершины многогранника \mathbf{X} соответствуют некоторым мультиобходам, а произвольному мультиобходу соответствует некоторая точка многогранника. Вес заполнения рассматривается как целевая функция в КЗЛП. Значение минимального веса совпадает с максимумом целевой функции ДЗ, который достигается на одной из вершин многогранника \mathbf{X} . Существует известный рецепт вычисления вершин многогранного множества в задачах линейного программирования (например подробно описан в [5]), но вычислительные трудности на современных ПК начинаются уже для 8 точечных метрических пространств.

В настоящей работе

- установлена биекция между множеством неприводимых мультиобходов и множеством вершин многогранника \mathbf{X} ;
- доказано, что формула веса минимального параметрического заполнения полученная в работах [4] и [3] не может быть улучшена;
- в явном виде найдено строение всех мультиобходов, в том числе неприводимых, для бинарного дерева определённого типа (так называемая “змея”) с произвольным количеством вершин, и найдена формула веса минимального заполнения этого типа, имеющая вид минимума линейных функций от расстояний между точками исходного конечного метрического пространства.

2. Необходимые определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Бинарное дерево — связный ациклический простой конечный граф, у которого все вершины имеют степень 1 или 3.*

Далее $G = (V, E)$ — бинарное дерево, V — множество его вершин, E — множество рёбер.

Внутренние вершины — вершины степени 3.

Граничные вершины — вершины степени 1. Множество граничных вершин дерева G обозначим ∂G .

w

Пусть $|\partial G| = m$, тогда по индукции $|E| = 2m - 3$.

Рассмотрим конечное псевдометрическое пространство (M, ρ) , $|M| = m \geq 3$. Пусть $\partial G = M$, тогда будем говорить, что дерево G затягивает M .

Пусть $\partial G = M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, обозначим e_k ребро инцидентное вершине v_k (оставшиеся $m - 3$ ребра занумеровываются в зависимости от типа бинарного дерева).

2.1. Мультиобходы бинарных деревьев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Мультициклический порядок кратности l на множестве M из m элементов — это отображение $\sigma : \mathbb{Z}_{lm} \rightarrow M$, такое, что*

1. $\forall n \in \mathbb{Z}_{lm} \quad \sigma(n+1) \neq \sigma(n)$

2. $\forall v \in M \quad |\sigma^{-1}(v)| = l.$

Будем говорить, что $\sigma(n+1)$ следует за $\sigma(n)$ в мультициклическом порядке σ . Отождествив точки M с их номерами, мультициклический порядок будем обозначать $(i_1 i_2 \dots i_{lm})$, где $i_{k+1} = \sigma(k)$, подобно обычным циклам в перестановках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Мультиперметр мультициклического порядка σ кратности l на псевдометрическом пространстве M — это число, определенное формулой:*

$$p(M, \sigma) = \frac{1}{2l} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{lm}} \rho(\sigma(n), \sigma(n+1))$$

Удаление любого ребра e_k бинарного дерева разбивает его на 2 компоненты связности, которые индуцируют дизъюнктное разбиение множества граничных вершин (и их номеров)

$$M = M_k^{(1)} \sqcup M_k^{(2)}$$

Путь от вершины v_i в v_j обозначим² $\vec{\Gamma}_{ij}$ заметим, что такой путь — единственный. Обозначим Γ_{ij} путь с точностью до направления. Путь, соединяющий граничные вершины, будем называть *граничным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Множество всех граничных путей мультициклического порядка обозначим Γ^σ : $\Gamma^\sigma := \{\Gamma_{\sigma(n)\sigma(n+1)} : n \in \mathbb{Z}_{lm}\}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Кратность направленного пути $\vec{\Gamma}_{ij}$ в мультициклическом порядке σ — это целое неотрицательное число $\vec{\omega}_{ij} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{lm}} \text{Indicator}\{(\sigma(n) = i) \wedge (\sigma(n+1) = j)\}$.*

Кратность пути Γ_{ij} , соответственно $\omega_{ij} := \vec{\omega}_{ij} + \vec{\omega}_{ji}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Мультиобход бинарного дерева G кратности l с множеством граничных вершин $M = \partial G$ — это мультициклический порядок σ на M , такой, что для всякого ребра e_k существует ровно l граничных путей в мультиобходе из $M_k^{(1)}$ в $M_k^{(2)}$ и столько же обратно.*

Множество всех мультиобходов и множество l -обходов дерева G обозначим $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}_l(G)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Мультиграф мультиобхода. Для мультиобхода $\sigma \in \mathcal{T}(G)$ определим вспомогательный граф с кратными ребрами (мультиграф) без петель G^σ , множество вершин G^σ совпадает с M . Кратность ребра, соединяющего произвольные вершины, $v_i v_j$ определим равной ω_{ij} , т.е. множество ребер графа G^σ совпадает с множеством Γ^σ граничных путей.*

В [4] (Предложение 2.5) доказан полезный технический результат:

ЛЕММА 1. *Пусть w произвольная внутренняя (степени 3) вершина графа G , и $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, тогда через каждую пару инцидентных вершине w рёбер проходит ровно l граничных путей из Γ^σ .*

2.2. Линейная алгебра мультиобходов

Данный раздел — краткое изложение необходимых понятий, введенных в §3 работы [4] и работе [3].

Рассмотрим векторное пространство $V = V(M)$, базисные векторы которого $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ соответствуют множеству M . Введем пространство $U = \text{Sym}^2 V / \{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i, 1 \leq i \leq m\}$. В пространстве U определим базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{(m-1)m}\}$, базисные векторы \mathbf{v}_{ij} соответствуют

²Обозначение $\vec{}$ подчёркивает направление от i к j

неупорядоченным парам различных вершин M . Заметим, что $\dim U = \binom{m}{2}$. Далее считаем базис \mathfrak{B} фиксированным. Превратим пространство U в евклидово, определив стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в базисе \mathfrak{B} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Вектор w^σ мультиобхода σ . По мультиобходу $\sigma \in \mathcal{T}(G)$ построим вектор $w^\sigma \in U$, координаты вектора в базисе \mathfrak{B} определяем равными кратностям ребер графа G^σ :

$$w^\sigma = (\omega_{12}, \dots, \omega_{ij}, \dots, \omega_{(m-1)m})^T$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Мультиобходы σ и τ называют эквивалентными, если их векторы совпадают: $w^\sigma = w^\tau$. В терминах вспомогательных графов $\sigma \sim \tau$, если $G^\sigma = G^\tau$.

Результат факторизации множеств $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}_l(G)$ будем обозначать $\tilde{\mathcal{T}}(G)$ и $\tilde{\mathcal{T}}_l(G)$ соответственно.

Определим векторное пространство $W = \mathbb{R}^{|E|}$ и зафиксируем в нём базис $\mathfrak{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{2m-3}\}$, соответствующий рёбрам графа G . Определим линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow W$ на базисных векторах:

$$\mathcal{A} \mathbf{v}_{ij} = \sum_{k=1}^{2m-3} \text{Indicator}\{e_k \in \Gamma_{ij}\} \mathbf{e}_k$$

Матрица A линейного оператора \mathcal{A} в указанных базисах представляет собой матрицу разрезов полного графа $K(M)$, построенную по бинарному дереву G . Подробнее, удаление любого ребра из бинарного дерева разбивает его на 2 компоненты связности и соответственно разбивает на 2 части множество граничных вершин M , семейство рёбер с концами в разных частях образуют т.н. разрез графа $K(M)$, соответствующий этому разбиению. Столбцы матрицы индексированы парами $ij : 1 \leq i < j \leq m$ и соответствуют неупорядоченным парам различных вершин M , то есть ребрам графа $K(M)$. Строки матрицы A соответствуют рёбрам дерева G . Элемент a_k^{ij} матрицы A из k строки и ij столбца определён следующим образом:

$$a_k^{ij} = \begin{cases} 1 & e_k \in \Gamma_{ij} \\ 0 & e_k \notin \Gamma_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

В [3] (Лемма 2.2) доказано, что:

ЛЕММА 2. Матрица A максимального ранга, $\text{rang } A = 2m - 3$.

Определяем вектор $\mathbb{I} = (1, 1, \dots, 1)^T \in W$.

Следующий результат доказан в статьях [4] (теорема 3.3) и [3] (лемма 2.5)

ТЕОРЕМА 1. Пусть w^σ вектор l -обхода $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, тогда $\mathcal{A} w^\sigma = 2\mathbb{I}$.

Для любого вектора $u \in U$, координаты которого целые неотрицательные числа, такого, что $\mathcal{A} u = 2\mathbb{I}$, $l \in \mathbb{N}$, существует l -обход $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, такой, что $w^\sigma = u$.

2.3. Аддитивная полугруппа мультиобходов

Используя теорему 1, в [4] определяется сумма $\sigma_1 + \sigma_2$ мультиобходов σ_1 и σ_2 и произведение $n\sigma$ мультиобхода σ на натуральное число n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Сумма. По σ_1 и σ_2 строятся векторы мультиобходов w^{σ_1} и w^{σ_2} , по теореме 1 строится мультиобход τ , такой, что $w^\tau = w^{\sigma_1} + w^{\sigma_2}$, далее $\sigma_1 + \sigma_2 := \tau$.

Согласно замечанию 3.12 в [4], кратность мультиобхода τ равна сумме кратностей мультиобходов σ_1 и σ_2 .

Ввиду очевидного равенства $w^{\sigma_1+\sigma_2} = w^{\sigma_1} + w^{\sigma_2}$, сразу будем рассматривать операцию сложения на фактормножестве $\tilde{\mathcal{T}}$:

$$+ : \tilde{\mathcal{T}}_{l_1}(G) \times \tilde{\mathcal{T}}_{l_2}(G) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{l_1+l_2}(G)$$

В силу ассоциативности и коммутативности сложения векторов получаем, что $(\tilde{\mathcal{T}}, +)$ — аддитивная полугруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Умножение на натуральное число. По теореме 1 строится мультиобход τ , такой, что $w^\tau = n \cdot w^\sigma$, $n \cdot \sigma := \tau$.*

Согласно замечанию 3.17 в [4], кратность мультиобхода τ в n раз больше кратности мультиобхода σ . Для векторов мультиобходов выполнено: $w^{n\sigma} = nw^\sigma$. Заметим, что $n\sigma \sim \underbrace{\sigma + \sigma + \dots + \sigma}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Мультиобход σ называют неприводимым, если справедлива импликация*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\sigma \sim \sigma_1 + \sigma_2 \implies \exists k \quad \sigma_1 \sim k\sigma, \sigma_2 \sim (n - k)\sigma$$

и приводимым в противном случае.

Множество классов эквивалентности неприводимых мультиобходов обозначим $\tilde{\mathcal{T}}'(G)$

2.4. Многогранники бинарных деревьев

В статье [3] показано, что с матрицей разрезов A бинарного дерева G можно связать выпуклый многогранник $\mathbf{X} = \mathbf{X}(G) := \{x = (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m})^T \in U : Ax = \mathbb{I}, x_{ij} \geq 0\}$.

Далее $U_{\geq 0} := \{x \in U : x \geq 0\}$. Пусть x_0, x — произвольные точки многогранника, тогда $A(x - x_0) = 0$, получаем:

$$\mathbf{X} = \{x_0 + \ker A\} \cap U_{\geq 0} \tag{2}$$

ЛЕММА 3. *Размерность многогранника \mathbf{X} равна $\binom{m-2}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из представления (2) следует, что $\dim \mathbf{X} = \dim \ker A$. Используя лемму 2 найдем $\dim \ker A = \dim U - \dim \operatorname{im} A = \frac{1}{2}(m^2 - 5m + 6)$ \square

Число строк матрицы A равно количеству рёбер бинарного дерева G . Строки матрицы можно рассматривать как функционалы (ковекторы), их будем обозначать как ребра $e_k \in U^*$.

Стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задает изоморфизм³ $U^* \cong U$, ввиду этого будем отождествлять ковекторы с соответствующими им векторами, и действие ковектора e на векторе x будем обозначать $\langle e, x \rangle$. В U^* фиксируем базис, двойственный базису \mathfrak{B} . В таких обозначениях условие $Ax = \mathbb{I}$ переписывается в виде системы из $2m - 3$ уравнений:

$$\langle e_k, x \rangle = 1 \quad k = 1, \dots, 2m - 3 \tag{3}$$

Векторы e_k при $1 \leq k \leq m$ соответствуют ребрам, инцидентным граничным вершинам v_k дерева G . Координаты вектора $e_k = (a_k^{12}, \dots, a_k^{(m-1)m})$ определены равенством (1). Из произвольной граничной вершины $v_k \in V$ через ребро e_k проходят все пути Γ_{kj} ($j \neq k$) и не проходит ни один из путей Γ_{ij} где $i \neq k$ и $j \neq k$ одновременно, получаем, что

$$a_k^{ij} = \begin{cases} 1 & i = k \text{ или } j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq m$$

³ $\varkappa : U^* \rightarrow U$
 $\varkappa : e \mapsto y$ здесь вектор y определен условием $\forall x \in U \quad e(x) = \langle y, x \rangle$

Что удобно записать в виде:

$$a_k^{ij} = \delta_k^i + \delta_k^j \quad (4)$$

Каждый вектор e_k задает ортогональную ему аффинную гиперплоскость H_k :

$$H_k := \{x \in U \quad : \quad \langle e_k, x \rangle = 1\}$$

Пусть $\Pi := \bigcap_{k=1}^{2m-3} H_k$, ясно, что $\Pi = x_0 + \ker \mathcal{A}$. В таких обозначениях получаем $\mathbf{X} = \Pi \cap U_{\geq 0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Усы бинарного дерева — это пара его граничных вершин, имеющих общую смежную вершину. Также усам называется соответствующая пара соседних ребер, инцидентных этим граничным вершинам.*

Про координаты многогранника \mathbf{X} соответствующие усам получим следующие утверждение:

ЛЕММА 4. *Пусть граничные вершины v_i и v_j образуют усы, тогда $x_{ij} = \frac{1}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности занумеруем вершины усов $v_i = v_1$ и $v_j = v_2$ и рассмотрим рёбра e_1 e_2 инцидентные вершинам v_1, v_2 и e_k третье смежное ребро, тогда

$$\begin{aligned} e_1 &= (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \\ e_k &= (\underbrace{0, 1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Из системы уравнений (3) имеем $\langle e_1 + e_2 - e_k, x \rangle = 1$,

$$\langle (2, 0, 0, \dots, 0), (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m})^T \rangle = 1$$

откуда следует утверждение. \square

Существует критерий [5] того, что точка многогранника является вершиной (угловой точкой):

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дано множество (необязательно многогранник) $\mathbf{Y} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = b, x \geq 0\}$, где \mathbb{R}^n — стандартное n -мерное евклидово пространство, A — матрица $m \times n$ ранга r , $A \neq 0$, b — вектор из \mathbb{R}^m . Обозначим столбцы матрицы A_1, A_2, \dots, A_n , условие $Ax = b$ переписывается в виде*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = b$$

Для того, чтобы точка x была угловой, необходимо и достаточно, чтобы нашлись линейно-независимые столбцы $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$, такие что:

$$A_{j_1}x_{j_1} + A_{j_2}x_{j_2} + \dots + A_{j_r}x_{j_r} = b$$

причём $x_{j_k} \geq 0$, а все остальные $x_i = 0$.

Для рассматриваемого многогранника \mathbf{X} коэффициенты матрицы A равны 0 и 1, в частности лежат в поле \mathbb{Q} , откуда получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все вершины многогранника \mathbf{X} имеют рациональные неотрицательные координаты.*

2.5. Мультиобходы и многогранники

Следующее утверждение сразу вытекает из теоремы 1:

СЛЕДСТВИЕ 2. Если дан l -обход $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, то $\frac{1}{2l}w^\sigma \in \mathbf{X}$.

Точки многогранника \mathbf{X} , имеющие рациональные координаты в базисе \mathfrak{B} обозначим $\mathbf{X}_\mathbb{Q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Точка мультиобхода. По l -обходу $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$ определяем точку многогранника $x^\sigma := \frac{1}{2l}w^\sigma \in \mathbf{X}$. Вектор w^σ имеет рациональные координаты, таким образом определено отображение:

$$\chi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{X}_\mathbb{Q} \quad \chi : \sigma \mapsto x^\sigma$$

И, соответственно, определено отображение:

$$\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbf{X}_\mathbb{Q} \quad \tilde{\chi} : \tilde{\sigma} \mapsto x^\sigma$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Из определений получаем формулы:

$$x^{n\sigma} = x^\sigma$$

$$\sigma_1 \in \mathcal{T}_{l_1}(G), \sigma_2 \in \mathcal{T}_{l_2}(G) \implies x^{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{l_1}{l_1 + l_2} x^{\sigma_1} + \frac{l_2}{l_1 + l_2} x^{\sigma_2}$$

Точка $x^{\sigma_1 + \sigma_2}$ делит отрезок $[x^{\sigma_1}; x^{\sigma_2}]$ в отношении $l_1 : l_2$.

Аналогично:

$$x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p} = \frac{l_1}{l_1 + \dots + l_p} x_1^\sigma + \dots + \frac{l_p}{l_1 + \dots + l_p} x_p^\sigma$$

Точка $x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p}$ является выпуклой комбинацией (строго внутренней) точек $x_1^\sigma, \dots, x_p^\sigma$, в частности, если точки $x_1^\sigma, \dots, x_p^\sigma$ аффинно независимы, то кратности l_1, \dots, l_p мультиобходов $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ являются барицентрическими координатами точки $x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p}$.

Объединяя предыдущее:

$$x^{n_1\sigma_1 + \dots + n_p\sigma_p} = \frac{n_1 l_1}{n_1 l_1 + \dots + n_p l_p} x_1^\sigma + \dots + \frac{n_p l_p}{n_1 l_1 + \dots + n_p l_p} x_p^\sigma \quad (5)$$

В статье [4] доказана (теорема 3.27):

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — бинарное дерево, $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — все его неприводимые мультиобходы крайностей l_1, \dots, l_s соответственно. Тогда для любого решения x уравнения $Ax = \mathbb{I}$, такого, что все $x_{ij} \geq 0$ найдутся неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, в сумме дающие 1, такие, что

$$x = \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{2l_k} w^{\sigma_k}$$

ЛЕММА 5. Любая точка многогранника \mathbf{X} с рациональными координатами — точка мультиобхода, иными словами отображения χ и $\tilde{\chi}$ сюръективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x точка многогранника \mathbf{X} с рациональными координатами, l — наибольший общий делитель знаменателей, тогда $u = 2lx$ — целочисленный вектор и $Au = 2\mathbb{I}$, согласно теореме 1 существует l -обход σ такой, что $w^\sigma = u$. Получаем $x = \frac{1}{2l}w^\sigma = x^\sigma$. \square

3. Неприводимые мультиобходы и вершины многогранника

Оказывается, что вершины многогранника $\text{Vert}(\mathbf{X}(G))$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности неприводимых мультиобходов $\tilde{\mathcal{T}}'(G)$:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — все неприводимые мультиобходы (попарно неэквивалентные) и $x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s}$ соответствующие им точки многогранника \mathbf{X} , тогда $x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s}$ — множество всех вершин многогранника \mathbf{X} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\tilde{\mathcal{N}}$ — множество классов мультиобходов, кратных неприводимым, т.е. мультиобходов вида $n\sigma_i$, $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \in \tilde{\mathcal{T}}'$. Оставшиеся классы приводимых мультиобходов обозначим как $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{T}} \setminus \tilde{\mathcal{N}}$. Через \mathcal{N} и \mathcal{S} обозначаем множества мультиобходов, соответствующие классам $\tilde{\mathcal{N}}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$.

Множество вершин многогранника обозначим $\mathcal{V} = \text{Vert}(\mathbf{X})$, а множество остальных рациональных точек многогранника обозначим $\mathcal{W} = \mathbf{X}_{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{V}$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_p\} = \mathcal{V}$ и $x \in \mathcal{W}$ и пусть σ — произвольный мультиобход, такой что $x = x^\sigma$, такой мультиобход существует, поскольку отображение χ сюръективно (лемма 5). Покажем, что σ приводим.

По следствию 2 вершины имеют рациональные координаты, следовательно:

1. существуют мультиобходы τ_1, \dots, τ_p , такие, что $x_1 = x^{\tau_1}, \dots, x_p = x^{\tau_p}$;
2. для точки с рациональными координатами можно выбрать коэффициенты выпуклой комбинации рациональными:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

Поскольку точка x отлична от вершин, то выпуклая комбинация нетривиальна. Оставим только $\alpha_i > 0$, и без ограничения общности, выбирая соответствующую нумерацию вершин, считем $\alpha_1, \dots, \alpha_q > 0$:

$$x^\sigma = \alpha_1 x^{\tau_1} + \dots + \alpha_q x^{\tau_q} \quad 2 \leq q \leq p, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}_{> 0}$$

Пусть кратности мультиобходов $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_q$ равны соответственно k, k_1, \dots, k_q , тогда предыдущее равенство записывается в виде:

$$\frac{1}{2k} w^\sigma = \frac{\alpha_1}{2k_1} w^{\tau_1} + \dots + \frac{\alpha_q}{2k_q} w^{\tau_q}$$

Поскольку $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{> 0}$, то $\alpha_i = \frac{b_i}{c_i}$ где b_i и c_i натуральны и взаимнопросты. Домножим рассматриваемое равенство на число $2kk_1 \dots k_q c_1 \dots c_q$, получим:

$$nw^\sigma = n_1 w^{\tau_1} + \dots + n_q w^{\tau_q} \quad n, n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N}$$

Последнее равенство означает что мультиобход $\sigma \notin \mathcal{N}$, значит $\sigma \in \mathcal{S}$, то есть $\chi^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{S}$, что означает $\tilde{\chi}^{-1}(\mathcal{W}) \subset \tilde{\mathcal{S}}$.

Пусть l -обход σ не кратен неприводимому мультиобходу, т.е. $\sigma \in \mathcal{S}$, тогда

$$n\sigma \sim n_1 \sigma_{i_1} + \dots + n_q \sigma_{i_q} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq s \quad n, n_k \in \mathbb{N} \quad q \geq 2$$

Без ограничения общности выберем нумерацию мультиобходов так, что $i_1 = 1, \dots, i_q = q$. Пусть l_1, \dots, l_q — кратности соответствующих мультиобходов.

Используя формулу (5) из следствия 3, получаем:

$$x^\sigma = \frac{n_1 l_1}{n_1 l_1 + \dots + n_q l_q} x^{\sigma_1} + \dots + \frac{n_q l_q}{n_1 l_1 + \dots + n_q l_q} x^{\sigma_q}$$

Что переписывается в виде:

$$x^\sigma = \alpha_1 x^{\sigma_1} + \dots + \alpha_q x^{\sigma_q} \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0$$

Точка x^σ представлена нетривиальной выпуклой комбинацией точек $x^{\sigma_1} \dots x^{\sigma_q}$ значит x^σ — не вершина.

Получили, что $\chi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{W}$, значит $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{W}$. Из доказанных включений $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{W}$, учитывая сюръективность $\tilde{\chi}$ получаем $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{V}$.

Если σ кратен неприводимому мультиобходу σ_i , тогда согласно следствию 3 получаем $x^\sigma = x^{n\sigma_i} = x^{\sigma_i}$, следовательно $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{M}}) = \tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{T}}')$. Осталось заметить, что если $\tilde{\sigma}_i \neq \tilde{\sigma}_j$, то $x^{\sigma_i} \neq x^{\sigma_j}$, то есть ограничение отображения $\tilde{\chi}$ на $\tilde{\mathcal{T}}'$ сюръективно, следовательно $\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{T}}' \rightarrow \mathcal{V}$ — биекция.

□

Количество вершин многогранника \mathbf{X} , используя теорему 2, может быть оценено сверху числом C_m^{2m-3} , получаем:

СЛЕДСТВИЕ 4. Множество неприводимых мультиобходов $\mathcal{T}(G)$ конечно. $|\tilde{\mathcal{T}}'| \leq C_m^{2m-3}$.

Результат совпадает со следствием 3.25 из [4].

4. О формуле веса минимального параметрического заполнения

Рассмотрим линейный функционал $\rho_M \in U^*$, построенный по псевдометрическому пространству M :

$$\rho_M(x) := \sum_{i < j} \rho_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

Согласно замечанию 3.2 из [4] или леммы 2.5 из [3] значение функционала ρ_M на точке многогранника x^σ равна его мультипериметру:

$$p(M, \sigma) = \rho_M(x^\sigma)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратное, по функционалу $\rho = (\rho_{12}, \dots, \rho_{(m-1)m}) \in U^*$ координаты которого неотрицательны и удовлетворяют неравенству треугольника можно построить псевдометрическое пространство, если к тому же все его координаты положительны, то пространство будет метрическим.

Формула веса минимального параметрического заполнения псевдометрического пространства M получена в работе [4] в терминах мультиобходов. Обозначив вес минимального параметрического заполнения типа G пространства M через $\text{mpf}(M, G)$, запишем его формулу:

$$\text{mpf}(M, G) = \max_{\sigma \in \tilde{\mathcal{T}}'(G)} p(M, \sigma)$$

Естественно возникает вопрос: на любом ли неприводимом мультиобходе может достигаться максимум? Можно ли из формулы удалить какие-либо мультиобходы? Как показывает следующая теорема — нельзя.

ТЕОРЕМА 5. Для любого неприводимого мультиобхода σ существует метрическое пространство M , такое, что для любого τ , такого, что $\tau \not\sim \sigma \quad \forall n$ выполнено строгое неравенство $\rho(M, \sigma) > \rho(M, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4 x^σ – вершина многогранника \mathbf{X} . Далее $\tau \not\sim \sigma \implies x^\tau \neq x^\sigma$.

Рассмотрим аффинную оболочку многогранника $\Pi = \text{Aff}(X)$, ясно, что $\Pi \parallel \ker \mathcal{A}$. Пусть F_1, F_2, \dots, F_n – все гипергрani (грani коразмерности 1 в Π) многогранника примыкающие к вершине x^σ . Для каждой гипергрani F_i определен ортогональный ей вектор $f_i \in \ker \mathcal{A}$ такой, что $x^\sigma + \alpha f_i \notin \mathbf{X}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ (Неформально говоря, вектор направлен вне многогранника).

Рассмотрим строго внутренний единичный⁴ вектор конуса $f \in \text{Cone}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, то есть $f := \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ и $\alpha_i > 0$. Аффинная гиперплоскость $x^\sigma + f^\perp$ проходит только через вершину многогранника x^σ .

Найдем $\eta = (\eta_{12}, \dots, \eta_{(m-1)m}) := e_1 + \dots + e_m$. Поскольку все $e_i \perp \Pi$, то $\eta \perp \Pi$. Вычислим произвольную координату η_{ij} :

$$\eta_{ij} = \sum_{k=1}^m a_k^{ij} = \sum_{k=1}^m (\delta_k^i + \delta_k^j) = 2$$

Получаем $\eta = 2\mathbb{J}$, где $\mathbb{J} := (1, 1, \dots, 1) \in U^*$, следовательно $\mathbb{J} \perp \Pi$.

Рассмотрим функционал $\xi = (\xi_{12}, \dots, \xi_{(m-1)m}) := \mathbb{J} + \varepsilon f$. Заметим, что $f \in \ker \mathcal{A}$, откуда $\mathbb{J} \perp f$. Покажем, что аффинная гиперплоскость $x^\sigma + \xi^\perp$ проходит только через вершину многогранника x^σ . Предположим противное, тогда найдется ненулевой вектор $v \in \xi^\perp$, такой, что $x^\sigma + v = x_0 \in \mathbf{X}$. Получаем, что:

$$0 = \langle \xi, v \rangle = \langle \mathbb{J} + \varepsilon f, v \rangle = \underbrace{\langle \mathbb{J}, v \rangle}_0 + \langle \varepsilon f, v \rangle \implies v \in f^\perp$$

Откуда $x^\sigma + v = x_0 \in x^\sigma + f^\perp$, но $x^\sigma + f^\perp \cap \mathbf{X} = x^\sigma$ – противоречие.

Поскольку f – единичный вектор, то $f_{ij} \leq 1$. заметим, что при $\varepsilon < \frac{1}{3}$ для любых координат вектора ξ выполнено строгое неравенство: $\xi_{ik} < \xi_{ij} + \xi_{jk}$ и все координаты строго положительны. Согласно замечанию после формулы (6) построим искомое метрическое пространство.

□

Заметим, что функционалу \mathbb{J} соответствует метрическое пространство (M, ρ) с дискретной метрикой $\rho_{ij} = 1 - \delta_{ij}$.

5. Теорема о строении многогранника для дерева “змеи”

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Змея – бинарное дерево ровно с двумя усами.

Обозначим внутренние вершины змеи w_1, w_2, \dots, w_{m-2} . Вершина w_1 инцидентна первой паре усов (v_1, v_2) , вершина w_{m-2} инцидентна второй паре усов (v_{m-1}, v_m) .

ТЕОРЕМА 6. Все неприводимые мультиобходы змеи (с точностью до выбора направления) исчерпываются 1-обходами вида:

$$(12i_1i_2 \dots i_p (m-1) t j_q j_{q-1} \dots j_1) \quad \text{или} \quad (12i_1i_2 \dots i_p t (m-1) j_q j_{q-1} \dots j_1) \quad (7)$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, $j_1 < j_2 < \dots < j_q$ и $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} = \{3, 4, \dots, m-2\}$, $p + q = m - 4$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

⁴Относительно стандартной нормы в U

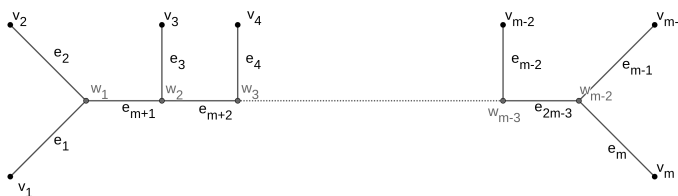


Рис. 1: Обязательно нужна подпись к рисунку

Иными словами, множество $\{3, 4, \dots, (m - 2)\}$ разбивается на два (возможно пустых) подмножества $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ и каждому такому разбиению соответствуют обходы $(12I(m - 1)mJ)$ и $(12Im(m - 1)J)$.

Доказательство теоремы разобьём на две леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\Gamma_{ij} \in \Gamma^\sigma$, то $\sigma = (\dots ij \dots)$ или $\sigma = (\dots ji \dots)$.

Конструктивно восстановим 1-обход, по последовательности граничных путей, каждая вершина v_j имеет степень 2 в графе обхода G^σ , следовательно существуют ровно две различные вершины v_i и v_k , отличные от v_j , такие что $\Gamma_{ij}, \Gamma_{jk} \in \sigma$, и нет других путей в v_j .

$\Gamma_{ij}, \Gamma_{jk} \in \sigma \implies \sigma = (\dots ijk \dots)$ или $\sigma = (\dots kji \dots)$.

Обход будем восстанавливать последовательно, присоединяя по одной вершине, первый и последний известный номер вершины в цикле и саму вершину будем называть *крайними* восстанавливаемой части. Например, в предыдущем случае номера i и k крайние.

ЛЕММА 6. С точностью до выбора направления 1-обходы змеи имеют вид (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный 1-обход σ .

Из леммы 4 $x_{12} = \frac{1}{2}$, то есть путь $\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$ и $\omega_{12} = 1$.

$\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$, значит $\sigma = (12 \dots)$ или $\sigma = (21 \dots)$, выберем первый случай, т.к. второй получается из него изменением направления обхода.

Рассмотрим разбиение $M_{m+1}^{(1)} \sqcup M_{m+1}^{(2)}$ соответствующие ребру e_{m+1} , где выберем $M_{m+1}^{(1)} = \{v_1, v_2\}$.

Согласно лемме 1 ровно 1 путь из путей Γ^σ проходит через пару рёбер (e_3, e_{m+1}) инцидентных вершине w_2 , следовательно существует ровно один путь из v_3 в $M_{m+1}^{(1)}$, это или Γ_{13} или Γ_{23} .

Получаем альтернативу, возможен один из двух вариантов:

$$\sigma = (12 \dots 3) \quad \text{или} \quad \sigma = (123 \dots) \tag{1}$$

Рассмотрим разбиение порожденное удалением ребра e_{m+k} : $M = M_{m+k}^{(1)} \sqcup M_{m+k}^{(2)}$, где $M_{m+k}^{(1)} = \{v_1, v_2 \dots v_{k+1}\}$. Применяя лемму 1 получаем, что существует ровно один путь из v_{k+2} в $M_{m+k}^{(1)}$. Очевидно, что он ведёт в один из концов восстанавливаемой части.

Так, на следующем шаге, из v_4 существует 1 путь в $M_{m+2}^{(1)}$, учитывая (1), получаем 4 возможных варианта:

- $\sigma = (124 \dots 3)$;
- $\sigma = (12 \dots 43)$;
- $\sigma = (1234 \dots)$;
- $\sigma = (123 \dots 4)$.

Рассматривая далее $v_5, v_6 \dots v_{m-2}$ – вершины, не принадлежащие усам, число возможных обходов каждый раз удваивается.

Построение завершается рассмотрением пары (v_{m-1}, v_m) и ребра e_{2m-3} , поскольку в силу леммы 4 $x_{(m-1)m} = \frac{1}{2}$, то есть $\Gamma_{(m-1)m} \in \sigma$, возможны 2 варианта или пара $(m-1, m)$ или пара $(m, m-1)$ замыкает обход. \square

Заметим, что каждая вершина змеи от v_3 до v_{m-2} могла добавляться к восстанавливаемому обходу двумя способами, а так же в обходе был выбор части $(m-1, m)$ или $(m, m-1)$, получаем количество обходов.

СЛЕДСТВИЕ 5. Обходов (1-обходов) змеи с t граничными вершинами 2^{m-3} .

ЛЕММА 7. У змеи нет неприводимых мультиобходов кратности $l \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим произвольный мультиобход σ кратности $l \geq 2$, докажем что он имеет эквивалентный обход τ , представимый в виде суммы 1-обходов. Для этого изучим вспомогательный граф G^σ .

Из леммы 4 получаем $x_{12} = \frac{1}{2}$, следовательно вершины v_1, v_2 соединены ребром кратности l : $\omega_{12} = l$.

Начнем строить мультиобход τ с $\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$, пара (12) должна встречаться l раз в σ :

$$\tau = (\underbrace{\dots 12 \dots \dots 12 \dots \dots * * * \dots 12 \dots}_{l})$$

Рассмотрим разбиение $M_{m+1}^{(1)} \sqcup M_{m+1}^{(2)}$ соответствующие ребру e_{m+1} , где выберем $M_{m+1}^{(1)} = \{v_1, v_2\}$.

Согласно лемме 1 ровно l путей в σ проходит через пару рёбер (e_3, e_{m+1}) инцидентных вершине w_2 , следовательно существует ровно l путей из v_3 в $M_{m+1}^{(1)}$, это пути вида Γ_{13} кратности ω_{13} или Γ_{23} кратности ω_{23} .

В качестве обхода возьмем:

$$\tau = (\underbrace{\dots 123 \dots 123 \dots * * * \dots 123 \dots}_{\omega_{23}} \underbrace{\dots 312 \dots 312 \dots * * * \dots 312 \dots}_{\omega_{13}})$$

Рассмотрим разбиение порожденное удалением ребра e_{m+k} : $M = M_{m+k}^{(1)} \sqcup M_{m+k}^{(2)}$ ($M_{m+k}^{(1)} = \{v_1, v_2 \dots v_{k+1}\}$). Применяя лемму 1 получаем, что в τ существует l путей из v_{k+2} в $M_{m+k}^{(1)}$.

Продолжаем процедуру восстановления, добавляя к каждой известной части мультиобхода τ по вершине, слева или справа, в зависимости от соответствующего количества путей в σ .

Построение завершается рассмотрением ребра e_{2m-3} и пары (v_{m-1}, v_m) .

Вновь применяя лемму 4 получим $x_{(m-1)m} = \frac{1}{2}$, следовательно вершины v_{m-1}, v_m соединены ребром кратности $\omega_{(m-1)m} = l$ в G^σ . Получаем, что $\Gamma_{(m-1)m}$ входит в мультиобход σ ровно l раз. К каждой известной части вида $(j_q \dots j_2 j_1 1 2 i_1 i_2 \dots i_p)$ добавляется соответствующая пара $(m-1, m)$ или $(m, m-1)$ слева или справа.

Осталось заметить, что построенный обход τ есть сумма обходов из леммы 6.

\square

СЛЕДСТВИЕ 6. Многогранник змеи с t граничными вершинами имеет ровно 2^{t-3} вершин.

Пример. Обходу $\sigma = (123 \dots t)$ соответствует вершина

$$x = \frac{1}{2} \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)}_{m-1}, \dots, \underbrace{1, 0, 0, 1, 0, \dots, 1}_{m-2}, \underbrace{1, 0, 0, 1, 0}_{m-1}, \underbrace{1}_{m-1}$$

Данной вершине соответствует мультипериметр мультиобхода

$$P(M, \sigma) = \rho_{12} + \rho_{23} + \dots + \rho_{(m-1)m} + \rho_{1m}$$

Для произвольного построенного обхода из теоремы 5 имеем:

$$P((12i_1 i_2 \dots j_1)) = \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{j_1 1}$$

Из теоремы 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Формула веса минимального параметрического заполнения для графа типа змея:

$$\frac{1}{2} \max_{I \sqcup J} \{ \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{i_p (m-1)} + \rho_{(m-1)m} + \rho_{mj_q} + \dots + \rho_{j_1 1}; \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{i_p m} + \rho_{m(m-1)} + \rho_{mj_q} + \dots + \rho_{j_1 1} \} \quad (8)$$

Здесь индексы $i_1 < \dots < i_p \in I$ и $j_1 < \dots < j_q \in J$ представляют собой дизъюнктное разбиение множества $\{3, \dots, (t-2)\} = I \sqcup J$, а максимум берется по всевозможным таким разбиениям.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 5. С. 65-118.
3. Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2022. pp. 165-182.
4. Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб., 2013. Т.204, №9. С.51-72.
5. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020.
6. Иванов А.О., Тужилин А.А. Еремин А.Ю. и др. Минимальные заполнения псевдометрических пространств // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, 2011. Т.27. С.83-105.
7. Иванов А. О., Овсянников З. Н., Стрелкова Н. П., Тужилин А. А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2012. №5. С.3-8.
8. Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для многообразий // Матем. заметки, 2003. Т.74, №3. С.387-395.

9. Овсянников З.Н. Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно // *Фунд. и прикл. матем.* 2013. Т.18, № 2. С.153-156.
10. Беднов Б. Б. Длина минимального заполнения пятиточечного метрического пространства // *Вестн. Моск. унив., Матем. Мех.* 2017. №6. С.3-8.
11. Беднов Б. Б. О множестве точек Штейнера четырех элементов в пространстве Линденштраусса // *Вестн. Моск. унив., Матем. мех.* 2019. №6. С.3-8.
12. Беднов Б. Б. Длина минимального заполнения типа звезды // *Матем. сб.* 2016. Т.207, №8. С.31-46.
13. Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // *Матем. сб.*, 2014. Т.205, №4. С.3-20.
14. Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа // *Матем. заметки*, 2014. Т.96, №1. С.126-137.
15. Рублева О.В. Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения // *Вестн. Моск. унив., Матем. Мех.* 2012. №2. С.8-11.

REFERENCES

1. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extreme Networks Theory* // Moscow, Izhevsk: IKI, 2003.
2. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem // *Sbornik: Mathematics* 2012. vol. 203, № 5. pp. 65-118.
3. Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics.* Birkhäuser, Cham. 2022. pp. 165-182.
4. Eremin A.Yu. A formula for the weight of a minimal filling of a finite metric space. *Sbornik: Mathematics* 2013. vol. 204, №9. pp.51-72.
5. Vasilyev F.P., Ivanitskiy A.Y. *In-Depth Analysis of Linear Programming* // Dordrecht: Springer, 2001.
6. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Eremin A.Yu. Minimal filling of a pseudometric space // *Seminar on tensor and vector analysis with applications in geometry, mechanics and physics*, 2011. Vol.27. pp.83-105
7. Ivanov A.O., Ovsyannikov Z.N., Strelkova N.P., Tuzhilin A.A. One-dimensional minimal fillings with negative edge weights // *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2012. vol.67. pp.189-194.
8. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Cieslik D. Steiner Ratio for Manifolds // *Math. Notes* 2003. vol.74, №3. pp.387-395.
9. Ovsyannikov Z.N. An open family of sets that have several minimal fillings // *Fundamental and Applied Mathematics*, 2013. Vol.18. №2, pp.153-156.
10. The length of minimal filling for a five-point metric space // *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2017. vol.72. pp.221-225.

-
11. Bednov B. B. The set of geometric medians for four-element subsets in Lindenstrauss spaces // Moscow University Mathematics Bulletin 2019. №6. С.215-220.
 12. Bednov B. B. The length of a minimal filling of star type // Sb. Math., 2016. Т.207, №8. С.1064-1078.
 13. Bednov B. B., Borodin P. A. Banach spaces that realize minimal fillings // Sb. Math., 2014. vol.205, №4. С.459-475.
 14. Pakhomova A.S. A Continuity Criterion for Steiner-Type Ratios in the Gromov-Hausdorff Space // Math. Notes, 2014. vol.96, №1. pp.130-139.
 15. Rubleva O.V. The additivity criterion for finite metric spaces and minimal fillings // Moscow University Mathematics Bulletin, 2012. vol.67. pp.52-54.

Получено: 13.05.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-152-156

Весовое неравенство Карлемана для дробного градиента¹

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Доказывается весовое неравенство Карлемана для дробного градиента

$$\|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{-\gamma} f\|_q \leq C \|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{-\gamma-\delta} \nabla^\alpha f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0.$$

При $\alpha = 1$ оно было доказано Л. Де Карли, Д. Горбачевым и С. Тихоновым (2020). Приведено приложение неравенства Карлемана для доказательства свойства единственности продолжения слабого решения дифференциального неравенства с потенциалом $|\nabla^\alpha f| \leq V|f|$ в весовом пространстве Соболева.

Ключевые слова: неравенство Карлемана, дробный градиент, преобразование Фурье, неравенство Питта, дифференциальное неравенство.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев. Весовое неравенство Карлемана для дробного градиента // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 152–156.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-152-156

Weighted Carleman inequality for fractional gradient²

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

We prove the weighted Carleman inequality for the fractional gradient

$$\|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{-\gamma}f\|_q \leq C\|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{\bar{\gamma}-\delta}\nabla^\alpha f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0.$$

For $\alpha = 1$, it was proved by L. De Carli, D. Gorbachev, and S. Tikhonov (2020). An application of the Carleman inequality is given to prove the weak unique continuation property of a solution of the differential inequality with the potential $|\nabla^\alpha f| \leq V|f|$ in a weighted Sobolev space.

Keywords: Carleman's inequality, fractional gradient, Fourier transform, Pitt's inequality, differential inequality.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2022, "Weighted Carleman inequality for fractional gradient", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 152–156.

В работе [2] доказано следующее параметрическое весовое неравенство типа Карлемана для градиента произвольной финитной бесконечно дифференцируемой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$: для параметра $t \geq 0$

$$\|e^{-t(a, \cdot)}uf\|_q \leq C(t)\|e^{-t(a, \cdot)}v\nabla f\|_p, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad |a| = 1, \quad (1)$$

где u, v — подходящие веса. Здесь и далее через C обозначается положительная константа, которая не зависит от существенных параметров и может изменяться от места к месту, $C(t)$ означает константу, зависящую от параметра t . В (1) константа $C(t)$ не зависит от f и a и ограничена при $t \geq 1$. Отметим, что при $t = 0$, $u = v = 1$ неравенство (1) называется неравенством Пуанкаре–Соболева. Для $t = 0$ и степенных u, v его можно вывести из неравенства Харди–Рейлиха для дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{1/2}$.

Неравенствам Карлемана посвящено большое число работ. Это связано с тем, что они в том числе применяются для доказательства свойства единственности продолжения слабых решений дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. Основное внимание уделялось безвесовому случаю $u = v = 1$. В отличие от этого в работе [2] неравенство (1) было применено для решения проблемы единственности продолжения в весовом случае.

Пусть $\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$ — прямое и обратное преобразования Фурье соответственно. В [2] неравенство (1) доказано при помощи весовых неравенств Питта для преобразования Фурье. Данная идея при $t = 0$ восходит к Н.Р. Heinig [5]. Типичное неравенство Питта имеет вид $\|u\mathcal{F}(f)\|_q \leq C\|vf\|_p$ (см. [1]). Для четных весов u, v здесь можно использовать прямое и обратное преобразования Фурье и перекидывать их из одной части неравенства в другую для функций из классов $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Дадим более простое доказательство неравенства (1) и обобщим его на случай дробного градиента ∇^α , $\alpha > 0$, который определим как мультипликатор $\mathcal{F}(\nabla^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, где $\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha, \dots, \xi_d^\alpha)$. При определении степенной функции комплексного переменного выбираем главное значение логарифма. Эта функция аналитическая почти всюду.

Ограничимся важным наглядным случаем степенных весов $u(x) = |x|^{-\gamma}$, $v(x) = |x|^\beta$. Пусть $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть найдутся параметры $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq r \leq q < \infty$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q}]$, $\bar{\delta} = d(\frac{1}{r} - \frac{1}{p'})$, $\bar{\gamma} = \delta + \alpha - \gamma \in [(\bar{\delta})_+, \frac{d}{r}]$, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{-\gamma}f\|_q \leq C\|e^{-t(a, \cdot)}|\cdot|^{\bar{\gamma}-\delta}\nabla^\alpha f\|_p, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Отметим, что в этом предложении константа C не зависит от t . При $\alpha = 1$ получаем неравенство (1) с соответствующими параметрами. По аналогии с [2] в неравенстве (2) экспоненту $e^{-t\langle a, \cdot \rangle}$ можно заменить на $e^{-t\ell(\cdot)}$, где $\ell(x) = \langle a, x \rangle + b$ — произвольная линейная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством Питта $\| |\cdot|^{-\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(f) \|_{\tilde{q}} \leq C \| |\cdot|^{-\tilde{\delta}} f \|_{\tilde{p}}$, где $1 < \tilde{p} \leq \tilde{q} < \infty$, $\tilde{\delta} = d(\frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}})$, $\tilde{\gamma} \in [(\tilde{\delta})_+, \frac{d}{\tilde{q}}]$ [1].

Пусть функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, тогда ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)(\xi)$ — аналитическая функция в \mathbb{C}^d и $\mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - ita)$. Аналогично

$$\mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} \nabla^\alpha f)(\xi) = (i(\xi - ita))^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita).$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$\begin{aligned} |(i(\xi - ita))^\alpha| &= \left(\sum_{j=1}^d |\xi_j - ita_j|^{2\alpha} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^d (\xi_j^2 + t^2 a_j^2)^\alpha \right)^{1/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^d (\xi_j^2 + t^2 a_j^2) \right)^{\alpha/2} \\ &= C \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 + t^2 \right)^{\alpha/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{\alpha/2} = C |\xi|^\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя эти факты и два раза неравенство Питта, получаем

$$\begin{aligned} \| |\cdot|^{-\gamma} e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f \|_q &\leq C \| |\cdot|^{-\gamma-\delta} \mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f) \|_r = C \| |\cdot|^{-\gamma-\delta} \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \\ &= C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} |\xi|^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \leq C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} (i(\xi - ita))^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \\ &= C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} \nabla^\alpha f)(\xi) \|_r \leq C \| e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{-\tilde{\delta}} \nabla^\alpha f \|_p. \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

В качестве примера, следуя [2], дадим приложение неравенства Карлемана (2) для доказательства свойства единственности продолжения слабого решения дифференциального неравенства с потенциалом в весовом пространстве Соболева $W_0^{p,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^d)$. Оно вводится как замыкание в пространстве обобщенных функций класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ относительно нормы $\|f\|_{W_0^{p,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^d)} = \| |\cdot|^\beta f \|_p + \| |\cdot|^\beta \nabla^\alpha f \|_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в условиях предложения 1 функция $f \in W_0^{p,\alpha,\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}}(\mathbb{R}^d)$ является решением неравенства

$$|\nabla^\alpha f| \leq V|f|,$$

где потенциал $|\cdot|^{-\alpha-d/s} V \in L^s(\text{supp } f)$, $s = (\frac{q}{p})'$. Тогда, если $\text{supp } f \subset \{x \in \mathbb{R}^d: \ell(x) \geq 0\}$, где $\ell(x) = \langle a, x \rangle + b$ — некоторая линейная функция, то $f \equiv 0$ всюду.

При $\alpha = 1$ это предложение доказано в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для краткости $u = |\cdot|^{-\gamma}$, $v = |\cdot|^{-\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}}$. Без ограничения общности можно считать, что $\ell(x) = x_d$, что отвечает $a = (0, \dots, 0, 1)$, $b = 0$. Тогда $f(x) = 0$ при $x_d \leq 0$ и достаточно показать, что $f \equiv 0$ в полосе $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d: 0 < x_d < \varepsilon\}$ для выбранного далее $\varepsilon > 0$. Для этого применим предложение 1 и неравенство Гёльдера. Полагая $S'_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d: x_d \geq \varepsilon\}$ получаем

$$\begin{aligned} \|e^{-tx_d} fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} &\leq C \|e^{-tx_d} \nabla^\alpha f v\|_{L^p(S_\varepsilon)} + C \|e^{-tx_d} \nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \\ &\leq C \|e^{-tx_d} V f v\|_{L^p(S_\varepsilon)} + C e^{-t\varepsilon} \|\nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \\ &\leq C \|V v u^{-1}\|_{L^s(S_\varepsilon \cap \text{supp } f)} \|e^{-tx_d} fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} + C_1 e^{-t\varepsilon}, \end{aligned}$$

где константа C_1 не зависит от t и в нее включен множитель $\|\nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \leq \|\nabla^\alpha f v\|_p < \infty$.

Имеем $vu^{-1} = |x|^{\bar{\gamma}-\bar{\delta}+\gamma} = |x|^{\delta-\bar{\delta}+\alpha}$, где $\delta - \bar{\delta} = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{r'}) - d(\frac{1}{r} - \frac{1}{p'}) = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) = -\frac{d}{s}$. По условию $vu^{-1}V \in L^s(\text{supp } f)$, поэтому можно подобрать достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого будет $C\|Vvu^{-1}\|_{L^s(S_\varepsilon \cap \text{supp } f)} \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\|e^{-tx_d} fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} \leq \frac{1}{2} \|e^{-tx_d} fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} + C_1 e^{-t\varepsilon},$$

или $\frac{1}{2} \|e^{t(\varepsilon-x_d)} fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} \leq C_1$. Если $f \not\equiv 0$ в полосе S_ε , то левая часть неравенства стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, так как в полосе $\varepsilon - x_d > 0$. Но это противоречит правой части, где константа не зависит от t . Отсюда $f \equiv 0$ в S_ε . Предложение 2 доказано.

В заключении скажем, что представляет интерес обобщить неравенство Карлемана на случай дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$, действующего как мультипликатор $\mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2})(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle^{\alpha/2} \mathcal{F}(f)(\xi)$. Здесь уже не работает оценка вида (3).

Также интересен случай пространства $L^p(\mathbb{R}^d)$ с мерой Данкля $d\mu_\kappa$, градиентом ∇_κ и лапласианом Данкля $\Delta_\kappa = \nabla_\kappa^2$. Здесь неравенство Харди–Рейлиха, отвечающее случаю $t = 0$, доказано в работе [4]:

$$\| |x|^{-\gamma} f(x) \|_{q, d\mu_\kappa} \leq C \| |x|^\beta (-\Delta_\kappa)^{\alpha/2} \|_{p, d\mu_\kappa}$$

Однако в случае $t > 0$ замена экспоненты $e^{-t\ell(x)}$ и доказательство аналога неравенства (2) оказываются непростой задачей и перенос предложенного здесь метода сталкивается со сложностями. Также в случае преобразования Данкля недостаточно изучено неравенство Питта (его частные случаи см. в [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benedetto J.J., Heinig H.P. Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations // J. Fourier Anal. Appl. 2003. Vol. 9. P. 1–37.
2. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Weighted gradient inequalities and unique continuation problems // Calc. Var. Partial Dif. 2020. Vol. 59, no. 3. Article 89.
3. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. Article 105462.
4. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Anal. 2021. Vol. 55. P. 513–538.
5. Heinig H.P. Weighted Sobolev inequalities for gradients // Harmonic analysis and applications. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser, Boston, MA, 2006. P. 17–23.

REFERENCES

1. Benedetto, J.J. & Heinig, H.P. 2003. “Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations”, *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 1–37.
2. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Weighted gradient inequalities and unique continuation problems”, *Calc. Var. Partial Dif.*, vol. 59, no. 3, article 89.
3. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. “Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting”, *J. Approx. Theory*, vol. 258, article 105462.
4. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2021. “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Potential Anal.*, vol. 55, pp. 513–538.

5. Heinig, H.P. 2006. “Weighted Sobolev inequalities for gradients”, *Harmonic analysis and applications. Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser, Boston, MA, pp. 17–23.

Получено: 01.10.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-157-161

Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере¹

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Экстремальная задача Дельсарта $A(d, s)$ для сферических s -дизайнов позволяет оценить снизу минимальное число узлов $N(d, s)$ взвешенной квадратурной формулы на сфере S^d . Мы доказываем, что

$$A(3, 4) = 14.560317967882 \dots$$

Отсюда $N(3, 4) \geq 15$. Наша открытая гипотеза состоит в том, что $N(3, 4) = 16$.

Ключевые слова: единичная сфера, сферический дизайн, квадратурная формула, задача Дельсарта.

Библиография: 1 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 157–161.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-157-161

Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere²

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Martyanov Ivan Anatol'evich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

The extremal Delsarte problem $A(d, s)$ for spherical s -designs allows us to estimate from below the minimum number of nodes $N(d, s)$ of a weighted quadrature formula on the sphere \mathbb{S}^d . We prove that

$$A(3, 4) = 14.560317967882\dots$$

Hence $N(3, 4) \geq 15$. Our open conjecture is that $N(3, 4) = 16$.

Keywords: unit sphere, spherical design, quadrature formula, Delsarte problem.

Bibliography: 1 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov, 2022, “Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 157–161.

Введение

В работе [1] решена задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной сфере \mathbb{S}^2 . Для этого развивается метод Арестова–Бабенко. Здесь мы предложим другую версию предложения 2 из этой работы (см. теорему 1) и, как следствие, решим аналогичную задачу для 4-дизайнов на сфере \mathbb{S}^3 (см. предложение 1). Основные принципы решения остаются прежними. Основную библиографию по проблеме см. в [1].

Пусть $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1\}$ — единичная d -сфера, $d \in \mathbb{N}$. Конечно множество узлов $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \subset \mathbb{S}^d$ и положительных весов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, называется дизайном порядка s , если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \int_{\mathbb{S}^d} f(x) dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu f(x^{(\nu)})$$

справедлива для любого алгебраического полинома

$$f(x) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{d+1}=0, 1, 2, \dots \\ k_1 + \dots + k_{d+1} \leq s}} c_{k_1 \dots k_{d+1}} x_1^{k_1} \dots x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

степени не выше s . Важной проблемой дискретной геометрии является нахождение дизайнов порядка s с наименьшим числом узлов, которое обозначим $N(d, s)$. Различают случаи равных и общих весов. В обоих вариантах данная проблема сложная и величина $N(d, s)$ вычислена только в отдельных случаях. В частности, при $d = 2$ она найдена для $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, при $d = 3$ для $s = 0, 1, 2, 3, 11$.

Рассмотрим подробнее случай $d = 3$, $s = 4$. Нами экспериментально был построен взвешенный 4-дизайн из 16 узлов

0.639726	0.0152617	0.595778	0.485352	0.0553634
-0.629721	0.696058	-0.270633	-0.213805	0.0570614
-0.245647	0.183476	-0.946618	0.0995471	0.0573756
-0.866471	0.0634142	0.470147	-0.155462	0.0588697
0.920334	-0.143129	0.155223	-0.32925	0.0589884
-0.250351	-0.390209	0.735751	0.493692	0.0592385
0.433062	-0.384394	-0.73696	-0.348696	0.0596654
0.0522311	-0.196284	0.732337	-0.649943	0.0623637
-0.471544	-0.396094	-0.255867	-0.745176	0.0626609
0.198229	0.487008	-0.160801	-0.835267	0.0634566
0.138091	-0.973979	0.155831	-0.0895129	0.0635595
-0.686782	-0.530328	-0.341251	0.361429	0.0655224
0.0678247	0.75557	0.649959	-0.045453	0.0669076
0.41231	-0.392335	-0.364503	0.737029	0.0687174
0.583212	0.681643	-0.379628	0.226075	0.0698256
-0.331415	0.444335	0.0200545	0.832063	0.0704237

(построчно $(x_1^{(\nu)} x_2^{(\nu)} x_3^{(\nu)} x_4^{(\nu)} \lambda_\nu)$, $\nu = 1, \dots, 16$). К сожалению, нам не удалось найти его аналитическую форму в литературе. Поэтому гипотетически имеем $N(3, 4) \leq 16$.

Из оценки плотных дизайнов Дельсарта–Гёталса–Зейделя следует, что $N(3, 4) \geq 14$. Как известно, в общем случае оценка плотных дизайнов может быть улучшена, если рассмотреть задачу Дельсарта для функций. Напомним основные факты. Пусть $P_k^{(d)}(t) = \frac{P_k^{(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1)}(t)}{P_k^{(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1)}(1)}$ — ортогональные полиномы Якоби–Гегенбауэра. Имеем

$$N(d, s) \geq A(d, s),$$

где

$$A(d, s) = \sup_{f \in F(d, s)} f(1)$$

и $F(d, s)$ — класс непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций вида $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{(d)}(t)$, таких что $f(t) \geq 0$ при $t \in [-1, 1]$, $f(1) > 0$, $f_0 = 1$, $f_k \leq 0$ при $k \geq s + 1$.

Оценку плотных дизайнов влечет решение полиномиальной проблемы

$$\sup_{\substack{f \in F(d, s) \\ f_{s+1} = f_{s+2} = \dots = 0}} f(1) \leq A(d, s).$$

Это дает $A(3, 4) \geq 14$. Разные авторы показали, что $A(3, 4) > 14$, откуда $N(3, 4) \geq 15$. Если окажется, что $A(3, 4) > 15$, то это позволило бы вычислить $N(3, 4)$. Однако справедлив следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеем (все цифры значащие)*

$$A(3, 4) = 14.560317967882 \dots$$

Таким образом, решение задачи Дельсарта дает только $N(3, 4) \geq 15$. Выскажем гипотезу, что $N(3, 4) = 16$.

Для доказательства предложения 1 воспользуемся следующим утверждением, в котором положим $Q(f) = f(1) + \sum_{i=1}^u \rho_i f(\tau_i)$, $K = \{1, \dots, s, k_1, \dots, k_v\}$, $1' = 1$ для $\tau_1 > -1$ и пусто иначе.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть найдутся узлы $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_u < 1$, веса $\rho_1 > 0, \dots, \rho_u > 0$, целые числа $s + 1 \leq k_1 < \dots < k_v$ и полином $g = 1 + \sum_{k \in K} g_k P_k^{(d)} \in F(d, s)$, такие что*

$$Q(P_k^{(d)}) = 0, \quad k \in K, \quad g(\tau_i) = 0, \quad i = 1, \dots, u, \quad g'(\tau_i) = 0, \quad i = 1', 2, \dots, u, \quad (1)$$

$$\tau_i \text{ — единственные нули } g \text{ на } [-1, 1], \quad (2)$$

$$Q(P_k^{(d)}) > 0, \quad k \notin K. \quad (3)$$

Тогда

$$A(d, s) = Q(1)$$

и g — экстремальный полином.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По сравнению с [1, предложение 2] мы немного изменили формулировку и добавили интерполяционное условие на производные экстремального полинома g . Оно естественно вытекает из его неотрицательности. Тогда в узлах $\tau_i \in (-1, 1)$ будут двойные нули. Для $\tau_1 = -1$ достаточности кратности один.

Далее доказательство аналогично: если $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{(d)}$ — произвольная функция из класса $F(d, s)$, то в силу неотрицательности f , неположительности f_k при $k \geq s + 1$ и условий теоремы получаем

$$f(1) \leq f(1) + \sum_{i=1}^u \underbrace{\rho_i f(\tau_i)}_{\geq 0} = Q(f) = \underbrace{f_0 Q(P_0)}_{=Q(1)} + \sum_{k \in K} f_k \underbrace{Q(P_k^{(d)})}_{=0} + \sum_{k \notin K} \underbrace{f_k}_{\leq 0} \underbrace{Q(P_k^{(d)})}_{>0} \leq Q(1).$$

Отсюда $A(d, s) \leq Q(1)$. При этом на полиноме g левое и правое неравенства становятся равенствами. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в [1] при $d = 2$, $s = 4$ оказалось, что $u = v = 4$, $K = \{1, 2, 3, 4, 7, 12, 17, 22\}$, поэтому для нахождения 8 неизвестных ρ_i , τ_i достаточно системы $Q(P_k^{(2)}) = 0$, $k \in K$, из 8 уравнений. Полином g уже может быть найден после. В общей ситуации это может быть не так, что подтверждает текст далее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $d = 3$, $s = 4$. С помощью численных экспериментов по методу [1] вначале находим параметры u , v , K и $1'$, заодно получая грубые значения коэффициентов g_k , $k \in K$, весов ρ_1, \dots, ρ_u и узлов τ_1, \dots, τ_u . Оказывается, что

$$u = 3, \quad v = 1, \quad K = \{1, 2, 3, 4, 7\}, \quad 1' = 1.$$

Далее на основе теоремы 1 (1) коэффициенты g_k , веса ρ_i и узлы τ_i (всего $5 + 3 + 3 = 11$ переменных) находятся с большой точностью (мы использовали 100 знаков после точки) из системы 11 полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами

$$Q(P_k^{(3)}) = 0, \quad k \in K, \quad g(\tau_i) = g'(\tau_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Данная система решается быстро, если в качестве начальных приближений использовать грубые приближения переменных, найденные на предыдущем шаге. Выпишем результат с 10-ю знаками:

$$g_k: 2.65935585558, 4.85186130728, 3.64724886638, 3.56985987663, -1.16800793798,$$

$$\rho_i: 4.31650404208, 1.58599756126, 7.65781636454,$$

$$\tau_i: -0.643762285167, -0.323139939939, 0.299210839445.$$

Интересующая нас величина

$$Q(1) = 14.560317967882814726151620543263 \dots$$

Заметим, что здесь системы $Q(P_k^{(3)}) = 0$, $k \in K$, из 5 уравнений недостаточно для определения 6 неизвестных ρ_i , τ_i .

Факторизуя полином g убеждаемся, что он имеет 6 комплексных нулей в малой (размера 10^{-49}) окрестности узлов τ_i и один нуль $1.335382 \dots$ вне отрезка $[-1, 1]$. Отсюда и из непрерывной зависимости g_k от ρ_i , τ_i следует, что если система (4) в окрестности найденного численного решения имеет единственное действительное аналитическое решение (сертификация решения), то (1) и (2) будут выполнены. Тогда соответствующий аналитический полином g неотрицателен на $[-1, 1]$.

В [1] для сертификации решения использовалась функция `certify` из пакета `HomotopyContinuation.jl`, в которой реализован интервальный метод Кравчука. В нашем случае сертификации прошла успешно и функция `certify` выдала, что в малой окрестности (размера меньше 10^{-7}) существует единственное действительное решение системы (4).

Осталось проверить (3). Достаточно использовать приближенные значения ρ_i, τ_i , если получаемые оценки будут многократно превышать погрешность. Для больших k по аналогии с [1] воспользуемся простой равномерной оценкой полиномов $P_k^{(3)}(t) = \frac{\sin((k+1)\arccos t)}{(k+1)\sqrt{1-t^2}}$. Имеем

$$Q(P_k^{(3)}) = 1 + \sum_{i=1}^3 \rho_i P_k^{(3)}(\tau_i) \geq 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{\sqrt{1-\tau_i^2}} > 1 - \frac{15.4}{k+1} > 0.037, \quad k \geq 15.$$

При $k \leq 14, k \notin K$, непосредственно проверяем, что $Q(P_k^{(3)}) > 0.1$.

Предложение 1 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартьянов И.А. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере S^2 // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 3. С. 154–165.

REFERENCES

1. Martyanov, I.A. 2021. "Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere S^2 ", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 154–165. (In Russ.)

Получено: 01.10.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-162-169

Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений¹

Н. М. Добровольский, А. С. Подолян

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tspu.ru

Подолян Алена Сергеевна — ассистент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Аннотация

Получены новые оценки погрешности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода методом итерации с использованием алгебраических сеток.

Ключевые слова: Интегральное уравнение Фредгольма II рода, метод итерации, алгебраические сетки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 162–169.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-162-169

Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations²

N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tspu.ru

Podolyan Alyona Sergeevna — assistant, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-71004_r_a. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-71004_r_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

Abstract

The new error estimation of the error of the approximate solution of the Fredholm integral equation of the second kind by iteration using algebraic grids are obtained.

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, iteration method, algebraic grids.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

N. M. Dobrovolskii, A. S. Podolyan, 2022, "Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 162–169.

1. Введение

Одним из важных классов интегральных уравнений с теоретической и практической точек зрения является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (1)$$

где $G_s = [0; 1]^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно и на неё воздействует линейный интегральный оператор с ядром $K_s(\vec{t}, \vec{u})$.

Мы будем исследовать уравнение (1) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$ ³. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближенного решения уравнение (1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [1], [2]). Современные результаты в этой области получены в работе [3], на которую мы будем опираться в дальнейшем.

Целью данной работы — получить новые оценки погрешности приближенного решения уравнение Фредгольма второго рода методом итерации с применением алгебраических сеток. Как известно, погрешности приближенного интегрирования для алгебраических сеток имеют на классе E_s^α наилучший порядок, поэтому переход от параллелепипедальных сеток к алгебраическим дает лучшие порядки убывания погрешности.

2. Необходимые сведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1]^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой Π рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

³Определение классов см. [2] стр. 48 — 49.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \quad (2)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \text{ при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (3)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \text{ для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (4)$$

Если выполнены условия (2) и (3), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где } \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leq CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где } c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (5)$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (5) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \quad (k = 1 \dots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \tag{7}$$

где $G_s = [0; 1]^s$. Мы будем исследовать уравнение (7) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q < 1$ и

$$|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(2\alpha))^s}. \tag{8}$$

Тогда уравнение Фредгольма (7) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) = & f(\vec{t}) + \\ & + \sum_{\vec{k}=1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{s\vec{k}}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \end{aligned}$$

и справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) = & f(\vec{t}) + \\ & + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k + \\ & + \frac{q^{n+1} \cdot \Theta \cdot \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1 - q}, \quad \text{где } |\Theta| \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3].

Теперь для вычисления кратных интегралов можно применить квадратурные формулы с алгебраическими сетками. Здесь возможно два разных подхода, которые впервые были описаны М. И. Ляминам [5].

3. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — первый подход

Первый подход основан на том, что для каждой размерности sk , где $k = 1, 2, \dots, n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{sk-1} a_\nu x^\nu + x^{sk}, \tag{9}$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x) = x(x-2)(x-4)\dots(x-2sk+2) - 1.$$

Действительно, согласно задаче 47 из [4] стр. 68 имеем

ТЕОРЕМА 2. Пусть a_1, \dots, a_n — различные целые числа. Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x - a_1)\dots(x - a_n) - 1$$

неприводим над \mathbb{Q} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4] стр. 251.

ЛЕММА 1. Пусть $n = 2m$ — четное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu} + a_{2\mu+1}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m-1),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, на промежутках $(-\infty; a_1)$ и $(a_n; \infty)$ многочлен $P_{1,\vec{a}}(x)$ четной степени имеет по одному корню.

На каждом промежутке $(a_{2\mu}; a_{2\mu+1})$ ($\mu = 1, \dots, m-1$) в силу условия имеется два вещественных корня, поэтому наш многочлен имеет ровно n вещественных корней. \square

ЛЕММА 2. Пусть $n = 2m + 1$ — нечетное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-1} + a_{2\mu}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, на промежутке $(a_n; \infty)$ многочлен $P_{1,\vec{a}}(x)$ нечетной степени имеет один корень.

На каждом промежутке $(a_{2\mu-1}; a_{2\mu})$ ($\mu = 1, \dots, m$) в силу условия имеется два вещественных корня, поэтому наш многочлен имеет ровно n вещественных корней. \square

ТЕОРЕМА 3. Пусть натуральное $n > 1$, $\varepsilon = 2 \left\{ \frac{n}{2} \right\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа, для которых выполнено условие

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-\varepsilon} + a_{2\mu+1-\varepsilon}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m + \varepsilon - 1).$$

Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x - a_1)\dots(x - a_n) - 1$$

неприводим над \mathbb{Q} и все его корни вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из теоремы 2 и лемм 1 и 2. \square

ТЕОРЕМА 4. Если для приближенного вычисления интеграла

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_k(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{sn-1} t}{t^{s\alpha}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, погрешность приближенного вычисления интеграла кратности sk по квадратурной формуле с алгебраической сеткой есть величина порядка

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{\ln^{sk-1} t}{t^{s\alpha}}\right).$$

Отсюда и из теоремы 1 следует доказываемое утверждение. \square

4. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — второй подход

Второй подход связан с использованием башни полей Дирихле:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \dots, \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_m}),$$

где p_m — m -ое простое число и $2^{m-1} < sn \leq 2^m$.

Пусть натуральное l_k выбрано из условия $2^{l-1} < sk \leq 2^l$. Рассмотрим чисто-вещественное кольцо целых алгебраических чисел

$$\mathbb{Z}_l = \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}]$$

и соответствующее чисто-вещественное алгебраическое поле степени 2^l

$$\mathbb{Q}_l = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}).$$

Через $\Lambda_l(t)$ обозначим алгебраическую решётку

$$\Lambda_l(t) = \{\vec{x} = (t\Theta_1, \dots, t\Theta_{2l}) \mid \Theta = \Theta_1 \in \mathbb{Z}_l\},$$

где $\Theta_1, \dots, \Theta_{2l}$ — алгебраически сопряженные числа.

ТЕОРЕМА 5. Если для приближенного вычисления интеграла

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda_l(t)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{2^m-1} t}{t^{2^m\alpha}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, погрешность приближенного вычисления интеграла кратности sk по квадратурной формуле с алгебраической сеткой, соответствующей решётке $\Lambda_l(t)$ есть величина порядка

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{\ln^{2^l-1} t}{t^{2^l\alpha}}\right).$$

Отсюда и из теоремы 1 следует доказываемое утверждение. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Остановимся на вопросе, как применять сетку для размерности 2^l к вычислению интеграла по кубу размерности sk , где $sk < 2^l$.

Пусть нам дана функция $f(\vec{x})$ из класса E_{sk}^α и требуется вычислить интеграл

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Рассмотрим функцию $g(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x} \in G_{sk}$, $\vec{y} \in G_{2^l-sk}$, заданную равенством

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \quad \text{для любого } \vec{y} \in G_{2^l-sk}.$$

Ясно, что

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_{G_{2^l}} g(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}, \quad g(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2^l}^\alpha.$$

Отсюда следует, как применять сетку большей размерности для вычисления кратного интеграла меньшей размерности.

5. Заключение

При втором способе выбора чисто-вещественного алгебраического поля нам приходится использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли в этом случае улучшить оценку погрешности интегрирования и упростить саму квадратурную формулу с весами и алгебраической сеткой?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, N 2. С. 235–238.
2. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
3. Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 83 - 92.
4. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1987. 310 с.
5. Лямин М. И. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции, посвященной

восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25–30 мая 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 351-354.

REFERENCES

1. Korobov N. M. On the approximate solution of integral equations // DAN USSR. 1959. Vol. 128, N 2. pp. 235–238., [in Russian]
2. Korobov N. M. Number-theoretic methods in approximate analysis. (second edition) Moscow: ICNMO, 2004., [in Russian]
3. Rebrov E. D., Selivanov S. V. On the approximate solution of the Fredholm integral equation of the II kind // Izvestiya Tula State University. Natural sciences. Issue 2. — Tula: TulSU Publishing House, 2012. p. 83 - 92., [in Russian]
4. Sadovnichy V. A., Grigoryan A. A., Konyagin S. V. Problems of student mathematical Olympiads. Moscow: Publishing House of Moscow. un-ta. 1987. 310 p., [in Russian]
5. Lyamin M. I. Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications: Materials of the XIII International Conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov, Tula, May 25-30, 2015 / Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy. – Tula: Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, 2015. – pp. 351-354. [in Russian]

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-170-177

Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические¹

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: chev@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок отклонения параллелепipedальной сетки, которая является рациональной сеткой, приближающей алгебраическую сетку квадратичного поля.

Поставлены новые задачи для дальнейших исследований.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепipedальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 170–177.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-170-177

Deviation estimates for rational grids approximating algebraic²

A. N. Kormacheva

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: juska789@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

This paper is devoted to obtaining estimates of the deviation of a parallelepipedal grid, which is a rational grid approximating the algebraic grid of a quadratic field.

New tasks have been set for further research.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. N. Kormacheva, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Deviation estimates for rational grids approximating algebraic", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 170–177.

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [13] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

В 1976 году в работе [17] К. К. Фролова появились алгебраические сетки. В 1979 году в кулуарах после защиты кандидатской диссертации К. К. Фролова одним из авторов была сформулирована задача о приближении алгебраических сеток рациональными.

Решению этой задачи посвящен ряд работ А. Н. Кормачёвой и А. В. Михляевой [10], [15], [16] и другие работы этих авторов.

В 1984 году Н. М. Добровольский получил общие оценки отклонения параллелепипедальных сеток через гиперболический параметр решёток [4].

Цель данной работы — получить оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические для случая квадратичного поля из работы [10].

Все обозначения и определения соответствуют работам [10], [12], в которых приведены необходимые сведения из теории цепных дробей, о скобках Эйлера и о наилучших приближениях второго рода.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

2. Необходимые сведения

Прежде всего сформулируем теорему об оценке отклонения из работы [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть для решётки Λ справедливо неравенство $q(\Lambda) > 1$ для её гиперболического параметра, тогда для отклонения обобщённой параллелепipedальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство

$$D_s(N) \leq 2 \left(4^{s-1} + \frac{2 \det \Lambda}{q(\Lambda)} (11 + 5 \ln \det \Lambda)^s \right), \quad (1)$$

$$N = \det \Lambda + \theta(\Lambda) \left(4^{s-1} + \frac{2 \det \Lambda}{q(\Lambda)} (11 + 5 \ln \det \Lambda)^s \right), \quad (2)$$

где N — количество точек сетки $M(\Lambda)$ и $|\theta(\Lambda)| \leq 1$.

В работе [15] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел \mathbb{Z}_F имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$, $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$.

Рассмотрим разложение \sqrt{p} в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к \sqrt{p} . Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m \sqrt{p} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m \sqrt{p}, -Q_m \sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2 \sqrt{p}$. Нетрудно видеть, что для гиперболического параметра справедливо равенство $q(\Lambda_m(F)) = Q_m^2$.

Отсюда следует, что для алгебраической сетки $M(\Lambda_m(F))$, которая является обобщённой параллелепипедальной сеткой, для её отклонения справедлива оценка

$$D_2(N) \leq 2 \left(4 + 4\sqrt{p}(11 + 5(\ln 2 + 2 \ln Q_m + \ln \sqrt{p})^2) \right),$$

а для количества точек —

$$N = 2Q_m^2 \sqrt{p} + \theta(\Lambda_m(F)) \left(4 + 4\sqrt{p}(11 + 5(\ln 2 + 2 \ln Q_m + \ln \sqrt{p})^2) \right).$$

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$.

Как известно (см. [8], стр.165) множество всех s -мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \Lambda} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \in \Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}|.$$

В работе [10] найдено расстояние $\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ для любого натурального m и простого p вида $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$.

ТЕОРЕМА 2. *При $P_m \geq 2$, $Q_m \geq 2$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p)) = \ln \left(1 + \max \left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

В работе [15] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций, а в работе [16] построен алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций. Центральным моментом в этой работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой. Оптимальный коэффициент a_m по модулю $N_m = 2P_m Q_m$ в этой работе задавался по формуле

$$a_m = \begin{cases} 2P_m Q_{m-1} - 1 & \text{при } m - \text{нечетном,} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1 & \text{при } m - \text{четном.} \end{cases}$$

В работе [9] были доказаны две теоремы о соответствующих цепных дробях.

ТЕОРЕМА 3. *При нечетном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}.$$

ТЕОРЕМА 4. При четном t справедливо равенство

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}}}.$$

3. Множество Быковского для двумерной решётки линейного сравнения

Для решётки решений $\Lambda(a, N)$ решений линейного сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod{N}$ в работе [12] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Для множества Быковского $B(a, N)$ справедливо равенство

$$B^*(a, N) = \{((-1)^m [q_{m+2}, \dots, q_n]_{(n-m-1)}, Q_m^*) \mid m = 0, \dots, n-1\}, \quad B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N).$$

Кроме этого, $r(a, N) = 2n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство

$$q(\Lambda(a, N)) = \min_{0 \leq m \leq n-1} [q_{m+2}, \dots, q_n]_{(n-m-1)} \cdot Q_m^*.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a, N)) \leq a$ для $1 \leq a < N$, $(a, N) = 1$.

Здесь Q_m^* — знаменатель m -ой подходящей дроби к числу $\frac{a}{N}$, а $[q_{m+2}, \dots, q_n]_{(n-m-1)}$ — скобки Эйлера порядка $n - m - 1$.

Если через $a(p)$ обозначить величину максимального неполного частного разложения \sqrt{p} в цепную дробь, то, повторяя рассуждения из работы [12], получим оценку снизу для гиперболического параметра решётки $\Lambda_m(p)$, а именно,

$$q(\Lambda_m(p)) \geq \frac{2P_m Q_m}{a(p) + 2}.$$

Отсюда следует, что для отклонения параллелепipedальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ справедлива оценка

$$D_2(N) \leq 2(4 + 4(a(p) + 2)(11 + 5(\ln 2 + \ln Q_m + \ln P_m)^2)),$$

а для количества точек —

$$N = 2Q_m P_m.$$

Так как параллелепipedальная сетка $M(\Lambda_m(p))$ является рациональной сеткой, приближающей алгебраическую сетку $M(\Lambda_m(F))$, то поставленная цель достигнута.

4. Заключение

Аналогичные утверждения справедливы и для решёток произвольного квадратичного поля, но необходимо рассматривать случаи, как и в работе [11].

В данной тематике возникает несколько вопросов.

Во-первых, можно ли для отклонения параллелепипедальных сеток усилить оценки работы [4] и получить оценки типа оценок Быковского из работ [2] и [3].

Во-вторых, в двумерном случае получены алгоритмы вычисления гиперболического параметра за $O(\ln N)$ от количества точек сетки. Возникает вопрос, а можно ли усилить результаты работ [6] и [7]?

Аналогичный вопрос возникает о возможности переносов результатов работы [5] на большие размерности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
4. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6089–84.
5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устьян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.
6. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.
7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.
8. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
9. Кормачева А. Н. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.
10. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.
11. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
12. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

13. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
14. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
15. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
16. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.
17. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.
2. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.
3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.
4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.
5. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.
6. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.
7. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.
8. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
9. Kormacheva, A. N., 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 293–301.
10. A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.
11. A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

12. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
13. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
14. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
15. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
16. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.
17. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-178-187

Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов¹

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский,
Т. А. Морозова

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Морозова Татьяна Анатольевна — старший преподаватель, МИРЭА — Российский технологический университет (г. Москва).

e-mail: morozova_t@mirea.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок типа оценок Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов.

Намечены пути для получения аналогов оценки Быковского для конечного отклонения параллелепипедальной сетки.

Ключевые слова: функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Т. А. Морозова. Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 178–187.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта

№19-41-710004_p_a. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-178-187

On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: juska789@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Morozova Tatiana Anatolyevna** — senior lecturer, MIREA — Russian Technological University (Moscow).*e-mail: morozova_t@mirea.ru***Abstract**

This work is devoted to obtaining estimates of the type of Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients.

The ways to obtain analogs of the Bykovsky estimate for the finite deviation of the parallelepipedal grid are outlined.

Keywords: quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, T. A. Morozova, 2022, "On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 178–187.

Посвящается 65-летию
Виктора Алексеевича Быковского.

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [9] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки, но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \dots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \dots, a_s)$ набора коэффициентов (a_1, \dots, a_s) . $S_p(z_1, \dots, z_s)$ выражается через сумму³

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \dots + z_s m_s)}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s}, \quad (2)$$

где z_1, \dots, z_s – произвольные целые, $\bar{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m , $p_1 = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$, $p_2 = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (3)$$

Количественной мерой качества набора коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_s параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(p, \vec{a}) = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2, \quad (4)$$

которая равна приближенному значению интеграла от функции $h(\vec{x}) = \frac{3^{s+1}}{p} \prod_{j=0}^s (1 - 2x_j)^2$ по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2 - R_p[h],$$

где $R_p[h]$ – погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(p, \vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^2 \left(\cdot, \frac{\pi^2}{6} \right)$ (подробности см. [11]).

В работе [2] В. А. Быковский получил принципиально новые оценки для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α . Фактически В. А. Быковский получил оценки сверху и снизу для гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения через сумму по конечному множеству минимальных решений, которое мы в своих работах называем множеством Быковского. В работе [3] оценки Быковского были перенесены на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Цель данной работы – получить аналог оценок Быковского для основной меры качества наборов оптимальных коэффициентов и уточнить оценку Быковского для количественной меры качества.

2. Множество Быковского и вспомогательные леммы

Рассмотрим сравнение

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \quad (5)$$

относительно целочисленных переменных m_1, \dots, m_s . Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения (m'_1, \dots, m'_s) , для которого

$$|m'_1| \leq |m_1|, \dots, |m'_s| \leq |m_s|; \quad |m'_1| + \dots + |m'_s| < |m_1| + \dots + |m_s|.$$

³Здесь и далее \sum' означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Множество всех минимальных решений сравнения (5) будем обозначать через $B_N(a_1, \dots, a_s)$.

Нетрудно показать, что при $(|n_1| + 1) \dots (|n_s| + 1) > N$ сравнение (5) имеет хотя бы одно ненулевое решение m_1, \dots, m_s такое, что

$$|m_1| \leq |n_1|, \dots, |m_s| \leq |n_s|.$$

Поэтому для любого минимального решения выполняется неравенство $\overline{m_1} \dots \overline{m_s} \leq N$, где для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$. Отсюда следует конечность $B_N(a_1, \dots, a_s)$ — множества всех минимальных решений. Нетрудно видеть, что для решетки $\Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$ — решений сравнения (5) множество $B_N(a_1, \dots, a_s)$ минимальных решений сравнения совпадает с множеством локальных минимумов $B(\Lambda)$.

Пусть $\vec{m}_j = (m_{1j}, \dots, m_{sj})$ ($1 \leq j \leq r$), $r = r_N(a_1, \dots, a_s)$ есть все минимальные решения для данного набора коэффициентов a_1, \dots, a_s сравнения (5). Величина

$$q_N(a_1, \dots, a_s) = \min_{1 \leq j \leq r} \overline{m_{1j}} \dots \overline{m_{sj}}$$

является гиперболическим параметром решетки $\Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$, а норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с соответствующей параллелепипедальной сеткой выражается через гиперболическую дзета-функцию целочисленной решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$:

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}, \quad (6)$$

где

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

— символ Киробова и $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x .

Периодическая функция $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$ имеет разложение в обычный ряд Фурье вида

$$f(x) = 1 + \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 m^2} e^{2\pi i m x}.$$

В работах [14, 15] доказана лемма о конечном ряде Фурье для функции $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$.

ЛЕММА 1. *Для конечного ряда Фурье*

$$3 \left(1 - 2 \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^2 = \sum_{m=-n_1}^{n_2} C(m) e^{2\pi i \frac{m x}{n}} \quad (x = 0, 1, \dots, n-1) \quad (7)$$

справедливы равенства $n_1 = \left[\frac{n-1}{2} \right]$, $n_2 = \left[\frac{n}{2} \right]$,

$$C(0) = 1 + \frac{2}{n^2}, \quad (8)$$

$$C(m) = \frac{6}{n^2 \sin^2 \pi \frac{m}{n}}, \quad (m \neq 0, -n_1 \leq m \leq n_2). \quad (9)$$

Из этой леммы следует теорема о конечном ряде Фурье для функции $H(p, \vec{a})$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$H(N, \vec{a}) = \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s + \sum_{m_1, \dots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \frac{N^2}{N^2 + 2}, & \text{при } m = 0; \\ \frac{N^2 \sin^2 \pi \frac{m}{N}}{6}, & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad N_1 = \left[\frac{N-1}{2}\right], \quad N_2 = \left[\frac{N}{2}\right].$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a}, \vec{x})$ прямоугольный s -мерный полукрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a}, \vec{x}) = \left\{ \vec{y} \mid \begin{cases} a_\nu \leq y_\nu < a_\nu + \bar{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geq 0 \\ a_\nu < y_\nu \leq a_\nu + \bar{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} (\nu = 1, \dots, s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x})$ — количество точек решётки Λ , лежащих в этом параллелепипеде. В работе [3] доказана следующая лемма:

ЛЕММА 2. *Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det \Lambda > 1$ и для точки \vec{a} и для любого локального минимума $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство*

$$N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x}_j) \leq 1. \quad (10)$$

В работе [3] доказана принципиальная лемма:

ЛЕММА 3. *Пусть \vec{x}_j — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. При $\alpha > 1$ для суммы*

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda, \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s)^\alpha} \quad (11)$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) \leq \frac{2^s \left(1 + \frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^\alpha}.$$

3. Оценка мер качества

Будим использовать покоординатное умножение двух точек: $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \cdot \bar{y}_1, \dots, x_s \cdot \bar{y}_s)$. Полагаем $I_s(N) = [-\left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N}{2}\right]]^s$ и

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s},$$

тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Пусть \vec{x}_j — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R_\Lambda(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство*

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) \leq \frac{2^s}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}} \prod_{\nu=1}^s (\ln N - \ln(2\bar{x}_{\nu j}) + \gamma) \leq \frac{2^s \ln^s N}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}},$$

где γ — константа Эйлера.

Доказательство. Определим величины $k_\nu = \left\lceil \frac{\lceil \frac{N}{2} \rceil}{x_{\nu j}} \right\rceil$, $l_\nu = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}{x_{\nu j}} \right\rfloor$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)$ с $\vec{a} \in \mathbb{Z}^s$, $a_\nu \neq -1, 0$, $-l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu$, ($1 \leq \nu \leq s$):

$$\begin{aligned}
R_\Lambda(\vec{x}_j) &= \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} = \\
&= \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \sum_{\vec{y} \in \Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} \leq \\
&\leq \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{N_\Lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|) \bar{x}_{1j} \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|) \bar{x}_{sj}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}} \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{1}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|) \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)} = \\
&= \frac{1}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=-l_\nu}^{-2} \frac{1}{|a+1|} + \sum_{a=1}^{k_\nu} \frac{1}{a} \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}} \prod_{\nu=1}^s \left(2 \sum_{a=1}^{\frac{N}{2\bar{x}_{\nu j}}} \frac{1}{a} \right) \leq \frac{2^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})} \prod_{\nu=1}^s (\ln N - \ln(2\bar{x}_{\nu j}) + \gamma) \leq \frac{2^s \ln^s N}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}},
\end{aligned}$$

так как $\gamma < \ln 2$, и лемма полностью доказана. \square

Назовём суммой Быковского выражение вида

$$SB_N(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\vec{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{sj})$ ($1 \leq j \leq r$) — все локальные минимумы из $B(\Lambda)$, причём $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$) и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$). Тогда справедливы неравенства

$$2SB_N(a_1, \dots, a_s) \leq S_N(a_1, \dots, a_s) \leq 2^s \ln^s N \cdot SB_N(a_1, \dots, a_s). \quad (12)$$

Доказательство. Действительно, левое неравенство очевидно, так как

$$2SB_N(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}}.$$

Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\begin{aligned}
S_N(a_1, \dots, a_s) &\leq \sum_{j=1}^{r^*} \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ |y_1| \geq |x_{1j}|, \dots, |y_s| \geq |x_{sj}|}} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} = \sum_{j=1}^{r^*} R_\Lambda(\vec{x}_j),
\end{aligned}$$

и утверждение теоремы получается из леммы 4. \square

Положим

$$R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть \vec{x}_j — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство

$$R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим величины $k_{\nu} = \left\lceil \frac{\lceil \frac{N}{2} \rceil}{x_{\nu j}} \right\rceil$, $l_{\nu} = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}{x_{\nu j}} \right\rfloor$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)$ с $\vec{a} \in \mathbb{Z}^s$, $a_{\nu} \neq -1, 0, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu}$, ($1 \leq \nu \leq s$):

$$\begin{aligned} R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) &= \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)} = \\ &= \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \sum_{\vec{y} \in \Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)}. \end{aligned}$$

При $k_{\nu} \geq a_{\nu} > 0$ и $a_{\nu} \cdot \bar{x}_{\nu j} \leq y_{\nu} < (a_{\nu} + 1) \cdot \bar{x}_{\nu j}$ имеем

$$\frac{6}{\pi^2(a_{\nu} + 1)^2 \cdot \bar{x}_{\nu j}^2} \leq \frac{6}{\pi^2 N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1}{\psi(y_{\nu})} = \frac{6}{N^2 \sin^2 \pi \frac{y_{\nu}}{N}} \leq \frac{1,5}{N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1,5}{a_{\nu}^2 \cdot \bar{x}_{\nu j}^2}.$$

При $l_{\nu} \leq a_{\nu} < -1$ и $a_{\nu} \cdot \bar{x}_{\nu j} < y_{\nu} \leq (a_{\nu} + 1) \cdot \bar{x}_{\nu j}$ имеем

$$\frac{6}{\pi^2 a_{\nu}^2 \cdot \bar{x}_{\nu j}^2} \leq \frac{6}{\pi^2 N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1}{\psi(y_{\nu})} = \frac{6}{N^2 \sin^2 \pi \frac{y_{\nu}}{N}} \leq \frac{1,5}{N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1,5}{(a_{\nu} + 1)^2 \cdot \bar{x}_{\nu j}^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{N_{\Lambda}(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j) \cdot (1,5)^s}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|)^2 \bar{x}_{1j}^2 \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)^2 \bar{x}_{sj}^2} \leq \\ &\leq \frac{(1,5)^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2} \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{1}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|)^2 \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)^2} = \\ &= \frac{(1,5)^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=-l_{\nu}}^{-2} \frac{1}{|a+1|^2} + \sum_{a=1}^{k_{\nu}} \frac{1}{a^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{3^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=1}^{\frac{N}{2\bar{x}_{\nu j}}} \frac{1}{a^2} \right) < \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2}, \end{aligned}$$

так как $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6}$, и лемма полностью доказана. \square

Назовём суммой Быковского второго порядка выражение вида

$$SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедлива оценка*

$$\left| H(N, \vec{a}) - \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s \right| \leq \frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}} \cdot SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теоремы 1 и леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} \left| H(N, \vec{a}) - \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s \right| &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)} = \\ &= \sum_{j=1}^r R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \sum_{j=1}^r \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2} = 2 \sum_{j=1}^{r^*} \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})^2} = \frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}} \cdot SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s). \end{aligned}$$

\square

4. Заключение

В работе [4] доказано, что локальное отклонение параллелепипедальной сетки оценивается через основную меру качества

$$\left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}) \tag{13}$$

и следовательно для неё выполняется оценка сверху аналогичная (12).

В работе [4] получено интересное выражение для конечного отклонения параллелепипедальной сетки

$$\begin{aligned} D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} & \left| \sum'_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \right. \\ & \times \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\ & \left. \times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) \right| + \\ & + \theta \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Здесь открываются возможные перспективы по получению аналогов оценки Быковского для конечного отклонения параллелепипедальной сетки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
4. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.
5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устьян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.
6. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.
7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.
8. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
9. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
10. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
12. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
13. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.
14. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом останковки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193 — 201.
15. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1, 2015. С. 22–29.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.
2. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.
3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // *Chebyshevsky Collection*, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.
4. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korob ov grids *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.
5. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyian, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.
6. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", *Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference)*, Tula, Russia.
7. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.
8. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
9. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
10. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
11. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]*, 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
12. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
13. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.
14. Seregina N. K., 2013, "Algorithms of numerical integration with the stopping rule", *TulSU extraction. Natural sciences*. Issue 3. pp. 193 — 201.
15. Seregina N. K., 2015, "On the quantitative measure of the quality of optimal coefficients", *Izvestiya TulSU. Natural sciences*. Issue 1, pp. 22–29.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51-76

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-188-197

О применении математического метода анализа размерностей к тесту шестиминутной ходьбы

А. В. Волков, Е. В. Березина, А. С. Парфенов, Т. В. Михайловская,
И. Е. Мишина, А. А. Е. Гвоздев

Волков Алексей Владимирович — кандидат технических наук, Ивановская государственная медицинская академия (г. Иваново).

e-mail: doc71@mail.ru

Березина Елена Владимировна — доктор технических наук, Ивановская государственная медицинская академия (г. Иваново).

e-mail: elena_berezina@mail.ru

Парфенов Александр Сергеевич — Ивановская государственная медицинская академия (г. Иваново).

e-mail: alsparf@gmail.com

Михайловская Татьяна Валентиновна — кандидат медицинских наук, Ивановская государственная медицинская академия (г. Иваново).

e-mail: tanyadoc8484@mail.ru

Мишина Ирина Евгеньевна — доктор медицинских наук, Ивановская государственная медицинская академия (г. Иваново).

e-mail: mishina-irina@mail.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

Тест с шестиминутной ходьбой (ТШХ) является одним из простых и доступных методов оценки толерантности к физической нагрузке. Вместе с тем до конца еще не изучены вопросы представления и интерпретации его результатов.

Известно, что в случае отсутствия формальных законов явления, может быть применен метод анализа размерности. Этот метод, впервые предложенный Фурье и развитый в работах Рэля, Прандтля, Бакингема и др., довольно успешно применяется в физике, химии, технике, экономике и крайне редко в биологии и медицине.

Суть метода заключается в том, что зависимая величина представляется в виде набора независимых (или слабозависимых) друг от друга переменных. В данной работе представлена общая модель зависимости пройденного человеком расстояния R от 8 переменных: параметров человека (масса, рост, параметр толерантности), времени и характеристик среды (потенциал гравитации, плотность и вязкость воздуха, коэффициент трения покоя подошвы с поверхностью). К общей модели были применены две основные теоремы метода анализа размерностей: теорема о размерности величины и теорема Бакингема (о поиске числа безразмерных комплексов). Трудности, связанные с исследованием общей модели не позволяют формировать зависимости от других величин, которые в эксперименте варьировать значительно сложнее, чем другие, например, управлять плотностью и вязкостью среды, гравитационным потенциалом Земли.

Показана возможность редукции числа переменных модели и формирование системы новых, более простых моделей, которые позволяют явно описывать процесс движения от

всех переменных. В модели введен латентный параметр – степень толерантности человека к движению, который предложено характеризовать как энергетический параметр. Предложен метод его количественной оценки и сравнение людей по этому параметру. С точки зрения оценки динамики изменения толерантности к движению необходимо далее изучать зависимость этого параметра от времени.

Ключевые слова: ТШХ, размерность, модель, оценка латентных параметров.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. В. Волков, Е. В. Березина, А. С. Парфенов, Т. В. Михайловская, И. Е. Мишина, А. Е. Гвоздев. О применении математического метода анализа размерностей к тесту шестиминутной ходьбы // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 188–197.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51-76

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-188-197

On the application of the mathematical method of dimensional analysis to the six-minute walk test

A. V. Volkov, E. V. Berezina, A. S. Parfenov, T. V. Mikhailovskaia,
I. E. Mishina, A. E. Gvozdev

Volkov Alexey Vladimirovich — candidate of technical sciences, Ivanovo State Medical Academy (Ivanovo).

e-mail: doc71@mail.ru

Berezina Elena Vladimirovna — doctor of technical sciences, Ivanovo State Medical Academy (Ivanovo).

e-mail: elena_berezina@mail.ru

Parfenov Alexander Sergeevich — Ivanovo State Medical Academy (Ivanovo).

e-mail: alsparf@gmail.com

Mikhailovskaia Tatiana Valentinovna — candidate of medical sciences, Ivanovo State Medical Academy (Ivanovo).

e-mail: tanyadoc8484@mail.ru

Mishina Irina Evgen'evna — doctor of medical sciences, Ivanovo State Medical Academy (Ivanovo).

e-mail: mishina-irina@mail.ru

Gvozdev Alexander Evgen'evich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

The six-minute walk test (SMWT) is one of the simplest and most widely available methods of assessing exercise tolerance. At the same time, the issues of presentation and interpretation of its results have not been fully studied yet.

It is known that in the case of unavailability of formal laws of the phenomenon, the method of dimensional analysis can be applied. This method, first proposed by Fourier and developed in the works of Rayleigh, Prandtl, Buckingham and others, is quite successfully used in physics, chemistry, engineering, economics and very rarely in biology and medicine.

The essence of the method is that the dependent variable is represented as a set of variables that are independent (or weakly dependent) on each other. This paper presents a general model of the dependence of the distance R traveled by a person on 8 variables: human parameters (mass, height, tolerance parameter), time and environmental characteristics (gravity potential, air density and viscosity, the coefficient of friction of the sole with the surface). Two basic theorems of the dimensionality analysis method were applied to the general model: the dimensionality theorem of the quantity and Buckingham's theorem (about finding the number of dimensionless complexes). Difficulties associated with the study of the general model do not allow us to form dependences on other quantities, which are much more difficult to vary in the experiment than others, for example, to control the density and viscosity of the medium, the gravitational potential of the Earth.

The possibility of reducing the number of model variables and forming a system of new, simpler models that allow explicit description of the motion process from all variables is shown. A latent parameter is introduced into the model, i.e. a degree of tolerance of a person to motion which it is offered to characterize as an energy parameter. A method for its quantitative estimation and comparison of people by this parameter is proposed. In terms of assessing the dynamics of change in motion tolerance, it is necessary to further study the dependence of this parameter on time.

Keywords: SMWT, dimensionality, model, latent parameter estimation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. V. Volkov, E. V. Berezina, A. S. Parfenov, T. V. Mikhailovskaia, I. E. Mishina, A. E. Gvozdev, 2022, "On the application of the mathematical method of dimensional analysis to the six-minute walk test", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 188–197.

1. Введение

Тест с шестиминутной ходьбой (ТШХ) является одним из простых и доступных методов оценки толерантности к физической нагрузке. Первоначально производилась оценка расстояния, пройденного пациентом в течение 6 минут, и результаты учитывались при оценке функционального класса хронической сердечной недостаточности, функционального класса ишемической болезни сердца [1] прогнозирования неблагоприятного исхода сердечно-сосудистых заболеваний [2, 3]. В дальнейшем были предложены формулы для расчета должных значений пройденного расстояния у взрослых здоровых лиц [4, 5, 7] и результаты ТШХ оценивались как процент от должного значения.

Вместе с тем до конца не изучены вопросы представления и интерпретации результатов теста [8]. До сих пор остается неясным, каким образом следует оценивать результаты ТШХ, какой прирост дистанции может быть оценен как оптимальный и каким способом следует отражать результаты ТШХ в протоколе исследования. Еще менее исследованы проблемы, касающиеся оценки динамически результатов ТШХ у одного и того же пациента, например, при проведении реабилитационных программ.

В случае, когда отсутствуют формальные законы, регулирующие процесс, может быть применен метод анализа размерностей, успешно используемый при исследовании явлений физики, химии, техники, но при рассмотрении живых систем (в биологии и, особенно, медицине) он применяется крайне редко. Одним из примеров применения в медицине можно привести использование данного алгоритма для анализа систолического/диастолического давления и ударного объема в сердечно-сосудистой системе [12, 13].

Первые идеи, предсказывающие метод размерного анализа, предложил Фурье, введя термин "размерная однородность физических уравнений" в 1822 году [6]. Первым человеком, применившим эти идеи, был лорд Рэлей в серии своих работ, опубликованных в 70-х и 80-х го-

дах 19 века; его исследования особенно касались процессов течения жидкости. Исследование вязкости жидкости, основанное на размерном анализе (тогда еще не совсем формализованном), также проводилось Прандтлем в первом десятилетии 20-го века. Бакингом, доказал, что уменьшение сложности задачи возможно в виде безразмерных параметров [10, 14].

2. Основной текст статьи

Задача моделирования на первом этапе состоит в том, чтобы как можно полнее задать параметры, определяющие исследуемый процесс. Полнота набора параметров может иметь решающее значение, поскольку это влияет на качество конечного результата. Основная особенность метода позволяет получить существенные знания о зависимости процесса от заданных параметров, исключая при этом необходимость использования сложных, например, дифференциальных уравнений.

Кроме того, он может быть использован для уменьшения числа параметров (часто значительного). Когда метод дополняется разумным числом экспериментальных значений, можно получить явную форму функции - точное или почти точное описание процесса.

Суть метода заключается в том, чтобы представить зависимую величину от других, которые не зависят или слабо зависят друг от друга в некотором диапазоне внешних факторов явления. Это необходимо для того, чтобы провести исследование данной зависимой величины от другой при фиксированных значениях всех остальных.

Само понятие размерности связано с выбором системы основных размерностей. Размерность – качественная характеристика величины, в которых ее значения могут измеряться в разных единицах. Например, размерность длины обозначается как L , а единицами измерения длины могут быть метры, километры, сантиметры, микрометры и т.п. Остальные размерности выражаются через систему основных размерностей, либо через законы, либо через определения этих величин. Например, размерность скорости (обозначается как $[v]$) может быть выражена как отношение размерности длины (L) к размерности времени (T), а именно: $[v] = L \cdot T^{-1}$. Главное в системе основных размерностей – их независимость друг от друга. Другими словами, масса, например, в описанном процессе не должна измеряться ни в единицах длины, ни в единицах времени [11].

В данной работе мы будем использовать привычную в физике систему основных размерностей: M – размерность массы, L – размерность длины, T – размерность времени.

В начале построения более полной модели для ТШХ принимаем, что пройденный человеком путь R можно представить в виде набора независимых размерных величин:

$$R = f(t, g, m, h, \rho, \mu, \varepsilon, k) \quad (1)$$

где t - время движения, g - ускорение свободного падения (характеристика потенциала гравитации планеты), m - масса человека, h - длина ног (или рост человека). Далее идут характеристики среды, в которой движется человек: ρ – плотность среды, μ – кинематическая вязкость среды, k - коэффициент трения покоя подошвы обуви и поверхности движения.

В модель введен некоторый параметр ε , который в ТШХ имеет смысл параметра толерантности к физической нагрузке. С точки зрения размерности будем интерпретировать этот параметр как некоторую характеристику энергетического потенциала человека - величину, которая определяет его энергопотенциал выполнять движение. Это латентный параметр, который проявляет себя в некотором спектре действий жизнедеятельности человека, например, при ходьбе.

Первая теорема анализа размерностей утверждает, что размерность любой величины $[\alpha]$ в системе основных размерностей M, L, T имеет степенной вид:

$$[\alpha] = M^m \cdot L^l \cdot T^t \quad (2)$$

Согласно первой теореме анализа размерностей представим величины модели (1) в системе M, L, T в виде таблицы:

Таблица 1: Размерности параметров модели (1) в системе основных размерностей M, L, T

Величина a	Размерность $[a]$
R	L
t	T
g	$L \cdot T^{-2}$
m	M
h	L
ρ	$M \cdot L^{-3}$
μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
ε	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
k	$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$

Вторая теорема анализа размерностей (ее называют π -теоремой или теоремой Бакингема) утверждает, что любое количественное соотношение между различными величинами может быть представлено в виде функциональной связи между безразмерными комбинациями этих величин [14].

В соответствии с этой теоремой, решая систему трех линейных уравнений (по числу основных размерностей) с девятью неизвестными (по числу величин в формуле (1) и с учетом безразмерности k), найдем основные безразмерные комплексы. Число этих комплексов равно шести:

$$\pi_1 = \frac{R}{h}, \pi_2 = \frac{m}{\rho \cdot h^3}, \pi_3 = \frac{g \cdot t^2}{h}, \pi_4 = \frac{\rho \cdot h^2}{\mu \cdot t}, \pi_5 = \frac{\varepsilon \cdot t}{\mu \cdot h^3}, \pi_6 = k \quad (3)$$

Теорема Бакингема утверждает, что зависимость (1) теперь можно представить иначе:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6), \quad (4)$$

Подставив π_1 в это выражение и выразив R , получим:

$$R = h \cdot \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что, как и указывалось выше, произошла редукция числа переменных: вместо восьми величин можно исследовать зависимость R от пяти безразмерных комплексов.

Как правило, в очень сложных процессах, зависящих от многих параметров, где взаимная зависимость может быть (и обычно является) относительно неясной, исследование с помощью размерного анализа может не дать когнитивно значимых результатов. Этот вывод и подтверждает уравнение (5).

В этом случае прибегают к разного рода упрощениям: сокращению числа переменных в уравнении (1), исходя из некоторых физических соображений, и/или объединению некоторых переменных в один, часто используемый в исследованиях параметр.

Например, можно было бы предположить, что при небольших значениях параметра ε , небольших скоростях движения, наиболее существенную роль в модели может играть вязкость среды, а не ее плотность. Кроме того, часто в подобных исследованиях используют

параметр, который называется индекс массы человека. Но разумнее с учетом тяжести планеты (в данном случае Земли) ввести индекс веса человека, который объединяет массу, рост и ускорение свободного падения планеты в виде:

$$I = \frac{m \cdot g}{h^2} \quad (6)$$

Тогда в выражении (1) можно уменьшить число переменных и записать их:

$$R = f(t, I, \mu, k, \varepsilon) \quad (7)$$

где I – индекс веса человека, с размерностью: $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$. В этом случае число безразмерных комплексов снижается до трех:

$$\pi_1 = R \sqrt[3]{\frac{\mu}{t\varepsilon}}, \pi_2 = \frac{It}{\mu}, \pi_3 = k \quad (8)$$

Применяя теорему Бакингема, получим:

$$R = \sqrt[3]{\frac{t\varepsilon}{\mu}} \cdot \varphi\left(\frac{It}{\mu}, k\right), \quad (9)$$

где φ – неопределенная функция от комплекса π_2 и k .

Далее следует исследование функции (9). Например, можно поставить эксперимент по изучению зависимости R от индекса веса человека (при фиксированном времени $t = 6$ мин) или измерить пройденный путь в зависимости от времени (при всех остальных постоянных величинах в (7)). Интересный вывод уже следует из соотношения (9), а именно: пройденное расстояние зависит как корень кубический из параметра толерантности. Этот вывод, конечно, требует дополнительной экспериментальной проверки.

До получения экспериментальных данных можно предположить, что в ТШХ пройденный путь обратно пропорционален индексу веса I . Гипотеза вполне разумная: чем больше индекс веса человека, тем сложнее ему двигаться и проходить большее расстояние. В этом случае функция φ в (9) примет вид:

$$\varphi\left(\frac{It}{\mu}\right) = A(k) \cdot \frac{\mu}{It}, \quad (10)$$

где $A(k)$ – функция, зависящая от k .

Получить зависимость $A(k)$ можно экспериментально, варьируя коэффициент трения с поверхностью.

С учетом (10) выражение (9) преобразуется к виду:

$$R = A(k) \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu^2\varepsilon}{t^2}} \cdot \frac{1}{I} \quad (11)$$

Полученная зависимость (11) носит явно противоречивый характер по другим переменным. А именно: из (11) следует, что с увеличением времени процесса пройденный путь уменьшается, а с увеличением вязкости среды он увеличивается. Такой результат уже до проведения эксперимента противоречит здравому смыслу. Вывод: гипотеза (10) не справедлива.

Предположим теперь, что функция φ в (9) носит степенной характер по π_2 :

$$\varphi\left(\frac{It}{\mu}\right) = A(k) \cdot \left(\frac{\mu}{It}\right)^n \quad (12)$$

Подставив (12) в (9), получим

$$R = A(k) \cdot \sqrt[3]{\frac{t\varepsilon}{\mu}} \cdot \left(\frac{\mu}{It}\right)^n \quad (13)$$

Собрав показатели степеней одинаковых переменных в (13), получим:

$$R = A(k) \cdot \sqrt[3]{\varepsilon} \cdot \frac{t^{\frac{1-3n}{3}} \cdot \mu^{\frac{3n-1}{3}}}{I^n} \quad (14)$$

С точки зрения физики процесса движения, ясно, что для того, чтобы функция R в выражении (14) с течением времени увеличивала пройденное расстояние, а с увеличением вязкости среды уменьшало его, необходимо, чтобы n удовлетворяло условию:

$$0 < n < \frac{1}{3} \quad (15)$$

Пусть, например, $n = 1/4$, тогда (14) будет иметь вид:

$$R = A(k) \cdot \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\sqrt[4]{I}} \cdot \sqrt[12]{\frac{t}{\mu}} \quad (16)$$

Зависимость (16) можно проверить экспериментально. Для этого нужно, например, провести испытания, в которых можно регулировать некоторые параметры модели. А именно, можно провести исследование по увеличению индекса веса человека, нагружая человека предметами известной массы. В этом случае, как показывает уравнение (16), увеличение массы человека в 2 раза приведет к уменьшению пройденного им расстояния примерно в 1,2 раза. Можно также проверить зависимость R от времени t , коэффициента трения с поверхностью k . В любом случае, если закономерность (16) не подтвердится, то следует либо поменять степенной закон в (12), либо скорректировать модель введением новых параметров процесса.

Представленный выше принцип формирования модели может дать оценку латентному параметру ε . Для этого необходимо, согласно правилу Эйнштейна [6], принять в (16) $A(k) \cdot \sqrt[12]{\frac{t}{\mu}} = 1$. Учитывая это и логарифмируя левую и правую части уравнения (16), переходим к логарифмическим масштабам вида:

$$\ln R = -\frac{1}{4} \ln I + \frac{1}{3} \ln \varepsilon \quad (17)$$

Далее строим линейную зависимость $\ln R = f(\ln I)$, см. рис. 1.

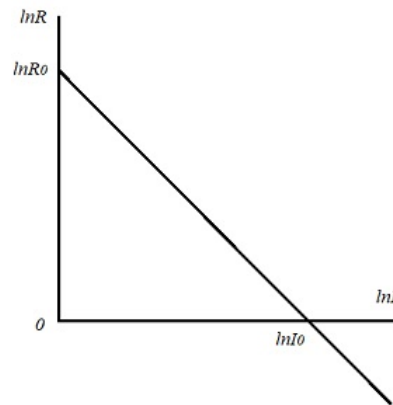


Рис. 1: Зависимость $\ln R = f(\ln I)$

Экстраполируя зависимость (17) на ось $\ln R$ при $\ln I = 0$, получим значение, равное:

$$\frac{1}{3} \ln \varepsilon = \ln R_0 \quad (18)$$

Рассчитывая значение $\ln R_0$ по графику, из формулы (18) находим оценку параметра ε :

$$\varepsilon \sim R_0^3 \quad (19)$$

В соответствии с (19) можно будет рассчитать этот параметр и численно сравнивать людей по уровню готовности к выполнению подобных тестовых упражнений.

Повышение этого параметра со временем может свидетельствовать об оздоровительном эффекте теста, а понижение – о том, что организм человека не приспособился к новым условиям и требуется еще более длительная адаптация к новым нагрузкам.

Как правило, в очень сложных процессах, зависящих от многих параметров, где взаимная зависимость может быть (и обычно является) относительно неясной (т. е. когда трудно с абсолютной уверенностью различать размерно независимые повторяющиеся переменные), редукция с помощью размерного анализа может не дать когнитивно значимых результатов. Такое умение исследователя, как сокращение переменных или их объединение в другие размерные величины, становится некоторым искусством, которое поддерживается его интуицией и собственным опытом.

Неэффективное сокращение числа переменных не единственный недостаток анализа размерности. Другим недостатком является отсутствие дискриминации векторных и скалярных величин, что на практике также может привести к ненужному увеличению числа новых параметров [15]. Эти недостатки размерного анализа являются причиной того, что методу часто помогают другие методы, причем статистические методы являются одними из наиболее популярных [16].

3. Заключение

1. Ввиду отсутствия формальных законов, регулирующих процесс ходьбы, был применен математический метод анализа размерностей.
2. Анализ размерностей может найти применение в медицине, особенно при проведении исследований на больших группах людей.
3. При использовании анализа размерностей важно учитывать существенные параметры процесса, которые приводят к упрощению моделей, а именно к уменьшению числа безразмерных величин.
4. Важным результатом метода является возможность оценки некоторых латентных параметров процесса. В случае теста ТШХ – оценка параметра толерантности человека к физической нагрузке (ε)

Размерный анализ может служить аналитическим инструментом в медицинских науках, в первую очередь на этапе моделирования сложных процессов. Это позволяет исследователю извлекать важные параметры для создаваемой модели. Разработка полной аналитической модели обычно требует дополнительных экспериментов и взаимодействия с экспертами в различных областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аронов Д., М., Бубнова М., Г., Барбараш О., Л., Долецкий А., А., Красницкий В., Б., Лебедева Е., В., Лямина Н., П., Репин А., Н., Свет А., В., Чумакова Г., А. Острый инфаркт миокарда с подъемом сегмента ST электрокардиограммы: реабилитация и вторичная профилактика. Российские клинические рекомендации // CardioСоматика 2014 №1. С. 5-41.
2. Arslan S. et al. Prognostic value of 6-minute walk test in stable outpatients with heart failure. // Texas Hear. Inst. J. 2007. Vol. 34, № 2. P. 166–169.
3. Curtis J.P. et al. The association of 6-minute walk performance and outcomes in stable outpatients with heart failure. // J. Card. Fail. 2004. Vol. 10, № 1. P. 9–14.
4. Enright P.L., Sherrill D.L. Reference equations for the six-minute walk in healthy adults. // Am. J. Respir. Crit. Care Med. 1998. Vol. 158, № 5 Pt 1. P. 1384–1387.
5. Troosters T., Gosselink R., Decramer M. Six minute walking distance in healthy elderly subjects. // Eur. Respir. J. 1999. Vol. 14, № 2. P. 270–274.
6. Gibbins J.C. Dimensional analysis // Dimensional Analysis. London: Springer London, 2011. 1–297 p.
7. Gibbons W.J. et al. Reference values for a multiple repetition 6-minute walk test in healthy adults older than 20 years. // J. Cardiopulm. Rehabil. Vol. 21, № 2. P. 87–93.
8. Mikhailovskaya T. V. et al. Methods of Evaluation of Tolerance yo Physical Activity Based on Six-Minute Walking Test During Outpatient Rehabilitation of Patients with Ischemic Heart Disease // Phys. Rehabil. Med. Med. Rehabil. 2021. Vol. 3, № 1. P. 4–10.
9. Langhaar H.L. Dimensional Analysis and Theory of Models. New York: John Wiley & Son Ltd, 1951. 166 p.
10. Kowalewski W. et al. Perspective of Dimensional Analysis in Medical Science // Stud. Logic, Gramm. Rhetor. 2017. Vol. 51, № 1. P. 19–37.
11. Уздин В.М. Математическое моделирование. Метод анализа размерности. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. 28 p.
12. Stergiopoulos N., Meister J.J., Westerhof N. Determinants of stroke volume and systolic and diastolic aortic pressure. // Am. J. Physiol. 1996. Vol. 270, № 6 Pt 2. P. H2050-9.
13. Westerhof N., Stergiopoulos N., Noble M.I.M. Snapshots of Hemodynamics // Snapshots of Hemodynamics. Boston, MA: Springer US, 2010.
14. Buckingham E. On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations // Phys. Rev. 1914. Vol. 4, № 4. P. 345–376.
15. Madrid C.N., Alhama F. Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory // Int. Commun. Heat Mass Transf. 2006. Vol. 33, № 3. P. 287–294.
16. Rajan K., Suh C., Mendez P.F. Principal component analysis and dimensional analysis as materials informatics tools to reduce dimensionality in materials science and engineering // Stat. Anal. Data Min. ASA Data Sci. J. 2009. Vol. 1, № 6. P. 361–371.

REFERENCES

1. Аронов Д., М., Бубнова М., Г., Барбараш О., Л., Долецкий А., А., Красницкий В., Б., Лебедева Е., В., Лямина Н., П., Репин А., Н., Свет А., В., Чумакова Г., А. Острый инфаркт миокарда с подъемом сегмента ST электрокардиограммы: реабилитация и вторичная профилактика. Российские клинические рекомендации // CardioСоматика 2014 №1. С. 5-41.
2. Arslan S. et al. Prognostic value of 6-minute walk test in stable outpatients with heart failure. // Texas Hear. Inst. J. 2007. Vol. 34, № 2. P. 166–169.
3. Curtis J.P. et al. The association of 6-minute walk performance and outcomes in stable outpatients with heart failure. // J. Card. Fail. 2004. Vol. 10, № 1. P. 9–14.
4. Enright P.L., Sherrill D.L. Reference equations for the six-minute walk in healthy adults. // Am. J. Respir. Crit. Care Med. 1998. Vol. 158, № 5 Pt 1. P. 1384–1387.
5. Troosters T., Gosselink R., Decramer M. Six minute walking distance in healthy elderly subjects. // Eur. Respir. J. 1999. Vol. 14, № 2. P. 270–274.
6. Gibbings J.C. Dimensional analysis // Dimensional Analysis. London: Springer London, 2011. 1–297 p.
7. Gibbons W.J. et al. Reference values for a multiple repetition 6-minute walk test in healthy adults older than 20 years. // J. Cardiopulm. Rehabil. Vol. 21, № 2. P. 87–93.
8. Mikhailovskaya T. V. et al. Methods of Evaluation of Tolerance yo Physical Activity Based on Six-Minute Walking Test During Outpatient Rehabilitation of Patients with Ischemic Heart Disease // Phys. Rehabil. Med. Med. Rehabil. 2021. Vol. 3, № 1. P. 4–10.
9. Langhaar H.L. Dimensional Analysis and Theory of Models. New York: John Wiley & Son Ltd, 1951. 166 p.
10. Kowalewski W. et al. Perspective of Dimensional Analysis in Medical Science // Stud. Logic, Gramm. Rhetor. 2017. Vol. 51, № 1. P. 19–37.
11. Уздин В.М. Математическое моделирование. Метод анализа размерности. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. 28 p.
12. Stergiopoulos N., Meister J.J., Westerhof N. Determinants of stroke volume and systolic and diastolic aortic pressure. // Am. J. Physiol. 1996. Vol. 270, № 6 Pt 2. P. H2050-9.
13. Westerhof N., Stergiopoulos N., Noble M.I.M. Snapshots of Hemodynamics // Snapshots of Hemodynamics. Boston, MA: Springer US, 2010.
14. Buckingham E. On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations // Phys. Rev. 1914. Vol. 4, № 4. P. 345–376.
15. Madrid C.N., Alhama F. Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory // Int. Commun. Heat Mass Transf. 2006. Vol. 33, № 3. P. 287–294.
16. Rajan K., Suh C., Mendez P.F. Principal component analysis and dimensional analysis as materials informatics tools to reduce dimensionality in materials science and engineering // Stat. Anal. Data Min. ASA Data Sci. J. 2009. Vol. 1, № 6. P. 361–371.

Получено: 03.10.21

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(091): 51 01.5(09)(082)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-198-210

Исследование Коши по подстановкам¹

Н. В. Ингтем

Ингтем Наталья Васильевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: nathalia_koulik@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена введению и становлению термина и символа действия «подстановка». В математических исследованиях до Лагранжа никогда не практиковалось переставлять независимые переменные, входящие в заданную функцию. Впервые этот приём встречается у Лагранжа в работе 1771г., посвящённой алгебраическому решению уравнений.

Вандермонд, опубликовавший свою работу в том же 1771г., высказывает идею о необходимости ввести обозначения, упрощающие вычисления и восприятие операций над функциями корней. Однако введенные обозначения не были простыми для понимания и усложнялись с повышением степени уравнения.

Работы Руффини, опубликованные с 1799 по 1813г., имели цель доказать невозможность решения уравнения 5-й степени и представляют, по сути, исследование симметрической группы, представленной значениями функции корней, в виде всевозможных перестановок этих корней. В ходе исследований, он доказывает, что группа S_5 не содержит подгрупп индекса 3, 4 или 8. Однако, так же как и Лагранж, Руффини использует сложные громоздкие выражения.

Коши, занимаясь вопросами комбинаторного анализа, попытался обобщить результат, полученный Руффини на уравнения произвольной степени. Работая над вопросом установления пределов, которые может принимать функция n переменных, Коши, изобрёл новый инструмент исследования, ставший впоследствии самостоятельной теорией. Это теория группы подстановок.

Ключевые слова: перестановка, подстановка, типы сочетаний, частичные типы, симметрические функции, индекс функции, произведение подстановок.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. В. Ингтем. Исследование Коши по подстановкам // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 198–210.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект XX-XX-XXXXX).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(091): 51 01.5(09)(082)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-198-210

Cauchy's research on substitutions

N. V. Ingtem

Ingtem Natalia Vasilyevna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: nathalia_koulik@mail.ru***Abstract**

The article is devoted to the introduction and formation of the term and the action symbol "substitution". In mathematical research before Lagrange, it was never practiced to rearrange independent variables contained in a given function. For the first time this technique is found in Lagrange's work of 1771, devoted to the algebraic solution of equations.

Vandermonde, who had published his work in the same year 1771, has expressed the idea of the need to introduce notations that simplify calculations and the perception of operations on root functions. However, the introduced designations were not easy to understand and became more complicated with increasing the degree of the equation.

Ruffini's works, published from 1799 to 1813, aimed to prove the impossibility of solving the equation of the 5th degree and are, in fact, a study of the symmetric group represented by the values of the root function in the form of all possible permutations of these roots. During these researches, he proves that the group S_5 does not contain subgroups of the index 3, 4 or 8. However, just like Lagrange, Ruffini uses complex cumbersome expressions.

Cauchy, dealing with issues of combinatorial analysis, tried to generalize the result obtained by Ruffini to equations of arbitrary degree. Working on the determination of the limits that a function of n variables can take, Cauchy has invented a new research tool, which later became an independent theory. This was the substitution group theory.

Keywords: permutation, substitution, combination types, partial types, symmetric functions, function index, product of substitutions.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. V. Ingtem, 2022, "Cauchy's research on substitutions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 198–210.

1. Основной текст статьи

В статье представлены результаты исследования работы Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)), касающиеся подстановок, изложенные в работе «Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquiesir» [1, с., 64-90] («Мемуар о количестве значений, которые может принимать функция»). Эта работа впервые была опубликована в 1815 г., в 17 тетради, 10 т., Журнала Политехнической Школы. Её оценка дана в III части II главы «Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900». («Очерки по истории математики 1700-1900», [5, с. 75]. Эта часть называется «Решение алгебраических уравнений», хотя в работе, Коши никак не касается вопроса о решении уравнений в радикалах, однако её результаты стали неотъемлемым инструментом при их решении - к построенной им теории обращаются другие исследователи этого вопроса, например, Н.Г.Абель (Нильс Генрик Абель (1802-1829)).

Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон [5, с. 75], считают, что именно работы Руффини вдохновили Коши систематизировать такой аппарат исследования как «подстановки», которые представляют собой объекты, состоящие из конечного числа элементов (не обязательно корней уравнения), с заданным порядком следования и имеющие свойство изменять этот порядок. Они отмечают, что подстановки представляют закон, по которому происходит замена одного элемента на другой, и обозначение подстановки $(\begin{smallmatrix} abc\dots l \\ \alpha\beta\gamma\dots\lambda \end{smallmatrix})$, которое вводит Коши, отображает этот закон. Таким образом, указывается, что a меняется на α , b на β и т. д.

Необходимо заметить, что, в кратком вступлении, Коши отмечает работы Лагранжа (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)) и Вандермонда (Александр Теофил Вандермонд (1735-1796)) член Парижской академии наук, 1771г. Его математические работы посвящены исследованиям в алгебре и комбинаторном анализе). Он подчеркивает, что в своих исследованиях эти учёные впервые рассматривали функции многих переменных относительно количества значений, которое способна принимать функция от всевозможных перестановок переменных, её составляющих. Однако он не останавливается на контексте работ отмеченных математиков – на решении уравнений, в котором использовалось отмеченное свойство функции, ни на способе, который использовали эти учёные.

Необходимо отметить, что при анализе методов решения уравнений, Лагранж находит упрощающее уравнение, корнями которого являются функции корней заданного уравнения. Однако, в силу свойств, связывающих корни и коэффициенты уравнения, полученные функции изменяют значение в зависимости от положения корней в функции. Для определения количества значений функции Лагранж, приходит к идее переставлять корни, всеми возможными способами. Используя перестановку корней как действие, Лагранжу удалось в присущей ему терминологии сформулировать основные теоремы теории групп, такие как:

Порядок симметрической группы равен $n!$

Порядок конечной группы делится на порядок любой её подгруппы. Соответствующее частное равно индексу подгруппы.

В то же время известно, что для разрешимых уравнений Лагранж, по сути, построил группу Галуа поля разложения уравнения над заданным полем. Он использует терминологию, присущую своей эпохе, и его объяснения очень громоздки.

Работа Вандермонда остаётся до сих пор неизученной, хотя он первый ставит вопрос о необходимости введения обозначений для упрощения изучения функций корней.

Руффини (Паоло Руффини (1765-1822)) полностью опирается на исследования Лагранжа. Таким образом, считаем, что исследования этих учёных могли существенным образом повлиять на становление взглядов Коши, относительно созданной им теории подстановок. Представим краткую историческую справку этого вопроса.

Впервые термин «перестановка» и «подстановка» в математических исследованиях использует Лагранж в работе «Reflections sur la résolution algébrique des équations». Причины обращения к перестановке величин, составляющих функцию корня упрощающего уравнения наиболее ярко представлены в анализе решения уравнений третьей степени методом Кардано. Лагранж исходит из заданного уравнения: $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, корни которого a, b, c ; записывает для него упрощающее уравнение $y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$, и выражает корень последнего через

корни заданного: $y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$. Он замечает, что коэффициенты последнего не зависят непосредственно от корней заданного уравнения, а выражаются через m, n, p - коэффициенты заданного, где корни могут быть расположены в любом порядке, поэтому и в выражении корня упрощающего уравнения корни заданного могут находиться в произвольном порядке. Однако представление y показывает, что если нарушить порядок расположения букв a, b, c , то его значение изменится. Это открытие позволяет ему в своих исследованиях основываться на перестановке корней заданного уравнения, входящих в функцию корней, а также сделать

следующие заключения:

1. В выражении y буквы a, b, c могут иметь различное расположение. Следовательно, y будет иметь столько различных значений, сколько можно получить от всевозможных перестановок 3-х величин, т.е. как «следует из комбинаторного анализа» [6, с.216], их будет 3!.

2. Выражение y показывает, почему упрощающее уравнение решается как квадратное: т.к. это уравнение содержит только степени переменной кратные 3, т.е. если r - значение выражения y , то αr и $\alpha^2 r$, (где $\alpha^i, i = \overline{0, 2}$ - корни уравнения $x^3 - 1 = 0$) – также его значения. Применяв всевозможные перестановки корней (заметим, что циклическую перестановку Лагранж получает при помощи умножения y на α и α^2) в выражении y , он получает шесть представлений этой величины и, обозначив одну из них r , показывает, что найдутся αr и $\alpha^2 r$; остальные, если одну обозначить s , будут представлять αs и $\alpha^2 s$. Он заключает, что упрощающее уравнение 6-й степени разлагается на сомножители $y^3 - r^3$ и $y^3 - s^3$. Причём при циклической перестановке a, b, c величины r^3 и s^3 не изменяют значение, а при транспозиции корней, одна величина переходит в другую и наоборот.

Опираясь на современную теорию групп и полей, можно сказать, что 1. показывает, что каждому значению y поставлена в соответствие перестановка, или, что то же самое - подстановка, т.е. порядок симметрической группы подстановок уравнения 3-й степени равен 3!.

Из 2. следует, что циклические подстановки уравнения 3-й степени не меняют значения функций r^3 и s^3 , т.е. эти подстановки образуют подгруппу третьего порядка. Отсюда следует т.н. теорема Лагранжа: «Порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы». [8, с. 269]

Руководствуясь этими результатами, Лагранж применяет способ перестановки и подстановки корней для установления свойств функций корней заданного уравнения с произвольной степенью. В своём анализе он опирается на методы Чирнгауза, Эйлера и Безу.

В процессе исследования он устанавливает: степень упрощающего уравнения для заданного уравнения степени μ будет равна $(\mu - 1)!$. Доказательство этого утверждения основано на способе перестановок и подстановок одного или нескольких корней вместо других.

Как известно метод Чирнгауза заключается в нахождении коэффициентов уравнения подстановки:

$$x^\rho + fx^{\rho-1} + gx^{\rho-2} + \dots + l + y = 0;$$

где y определяется из уравнения $y^\mu + V = 0$, т.е. $y = \alpha^i u, i = \overline{0, \mu - 1}$. Полагая, что $\rho = \mu - 1$, а корнями заданного уравнения будут $x^I, x^{II}, x^{III}, \dots$, Лагранж записывает систему уравнений относительно коэффициентов подстановки:

$$x^{(i)\mu-1} + fx^{(i)\mu-2} + gx^{(i)\mu-3} + \dots + l + \alpha^{i-1}u = 0.$$

Он отмечает, что все коэффициенты f, g, \dots, l , а так же u входят в уравнение в 1-й степени, поэтому они будут выражаться функцией μ корней $x^I, x^{II}, x^{III}, \dots$ и корней α^i .

Лагранж подчеркивает, что между $x^{(i)}$ и $y^{(i)} = \alpha^{i-1}u$ нет соответствия, поэтому в выражении они сочетаются произвольно. Чтобы исчерпать все варианты, он переставляет корни всеми возможными способами. Мы рассмотрим тот, который сам автор отметил – он наиболее ярко демонстрирует выделение подгруппы и разложение симметрической группы подстановок по подгруппе.

Для этого он фиксирует x^I , т.е. первую строку системы, остальные переставляются всеми возможными способами. Таким образом получается $(\mu - 1)!$ вариант систем уравнений. В каждую из получившихся систем, вместо u последовательно подставляется $\alpha^i u, i = \overline{1, \mu - 1}$, что даёт μ вариантов системы уравнений. Однако, при решении системы u будет исключена, поэтому подстановка $\alpha u, \alpha^2 u, \dots$ вместо u никак не изменит значение f . Таким образом, будет только $(\mu - 1)!$ вариант систем уравнений, полученных от перестановки $\mu - 1$ корня x^{II}, x^{III}, \dots

[6, с. 313]. Из этого можно заключить, что здесь в роли подстановок у Лагранжа выступают варианты системы уравнений.

Как видим слова перестановка и подстановка Лагранж использует только в их лексическом значении, для обозначения действия перестановки (подстановки) одного или нескольких символов содержащихся в функции корней упрощающего уравнения вместо других. Он не вводит новую терминологию и полученные от перестановок и, подстановок результаты, он выражает в терминах варианты системы уравнений. Варианты системы, полученные от подстановки au, a^2u, \dots вместо u , не изменяющие значение f , так же не выделены особым термином. В современном понимании это инвариантная группа подстановок. Таким образом Лагранж построил множество (варианты системы уравнений), которому можно поставить в соответствие математическую структуру - группа подстановок по умножению и формально представил разложение симметрической группы заданного уравнения по инвариантной подгруппе.

Несколько слов необходимо сказать о работе Вандермонда.

Ссылаясь на «A comprehensive textbook of Classical mathematics», Н. Griffiths and P. Hilton, [G – H], 1970, р. 294, авторы [5, с. 73] Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон, отмечают работу Вандермонда как носителя «начала понятий, которые станут важнейшими в теории групп перестановок, таких как разложение перестановки из n букв в произведение циклических подстановок» а также «первые идеи «простой» группы перестановок» «Mémoire sur la résolution des équations».

«Мемуар о решении уравнений» Вандермонда опубликован в 1771. В сноске автор отмечает работу Лагранжа, где последний «представил особый метод, который он предлагает применить для неразрешимых уравнений высших степеней» и подчёркивает сходство в их исследованиях. [7, с. 365]. Однако, несмотря на общность, о которой заявляет Вандермонд, его подход очень отличается от предложенного Лагранжем. Как было отмечено выше, Лагранж использует сложные конструкции при описании элементов, полученных в ходе своих рассуждений, а так же многократно отмечает весьма громоздкие вычисления, сопровождающие решение уравнений в радикалах. Однако, он не высказывает идею о необходимости введения символики. Впервые о необходимости использования «обозначений», приводящих выражения к более «лаконичному виду» [7, с. 371], говорит Вандермонд. Здесь будет показано, что обозначения, введенные Вандермондом, могли послужить идеей для развития представлений Коши о виде подстановок.

В своей работе Вандермонд ставит следующие задачи.

1. Найти такую функцию корней, заданного уравнения, которая будет равна одному из этих корней, выбранному заранее;

2. Записать её в таком виде, в котором она не будет изменяться от перестановки, входящих в неё корней;

3. Выразить эту функцию через функции суммы корней, суммы их попарного произведения, и т. д. [7, с.370].

Покажем воплощение этих задач на примере уравнения 3-й степени, предложенном Вандермондом.

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc,$$

где a, b, c – корни заданного уравнения.

В качестве решения этого уравнения Вандермонд ищет функцию величин $(a + b + c)$, $(ab + ac + bc)$, abc , которая бы принимала одно из значений a, b, c . В построении такого решения, он опирается на решение уравнения 2-й степени, для которого, преследуя цель подчеркнуть корни заданного уравнения, записывает заданное уравнение, в следующем виде: $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$, a и b – корни уравнения.

Корень этого уравнения a , как известно, записывается в виде:

$$a = \frac{1}{2} \left[a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} \right],$$

где радикал представляет неоднозначность. Эту неоднозначность Вандермонд объясняет тем, что, заменяя a на b в функции корня $a: a = \text{fonct}(a+b, ab)$, получается, что $b = \text{fonct}(a+b, ab)$ [7, с.367]. Эти два условия могут существовать раздельно только в случае двузначности функции. Такой функцией Вандермонд называет функцию:

$$\frac{1}{2} \left[a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

из которой вытекают значения a и b [7, с.368].

Корень уравнения 3-й степени Вандермонд представляет в виде:

$$a = \frac{1}{3} \left[a + b + c + \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right],$$

где подкоренные выражения предполагаются возведёнными в 3-ю степень. Однако эта функция многозначна, она принимает столько же значений, как и $r^3 = 1$, корнями которого являются $1, r', r''$ и, учитывая это замечание, получается 3 корня: a и еще $b, c = \frac{1}{3} \left[a + b + c + r^{(i)} \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + r^{(j)} \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right], i, j = 1, 2; i \neq j$.

Используя, что $r' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{3}$ и $r'' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{3}$ и, подставляя эти значения в выражение корня, он получает:

$$\begin{aligned} (a+r'b+r''c)^3 = & a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - \frac{3}{2}(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + \\ & + \frac{3\sqrt{-3}}{2}(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b). \end{aligned}$$

Из этого представления Вандермонд заключает, что только в выражении $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ от замены каких либо 2-х букв меняется значение функции с плюса на минус. Полагая $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b) = u'$ и, полученное от замены b на c : $(a^2c + c^2b + b^2a - a^2b - c^2a - b^2c) = u''$, он использует двузначную функцию, полученную при решении уравнения 2-й степени: $\frac{1}{2} \left[u' + u'' + \sqrt{(u' - u'')^2} \right]$, для которой не имеет значения какую из двух величин выбрать. Таким образом, функция:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)^2}$$

будет необходимо принимать одно из двух значений независимо от замены каких-либо 2-х букв. Для подтверждения заключения автор записывает выражение $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ в виде: $(a-b)(a-c)(b-c)$ и для наглядности представляет его квадрат.

Таким образом выполнена 2-я из поставленных задач для решения уравнения 3-й степени, заданного в общем виде [7, с. 369].

Далее Вандермонд вводит следующие обозначения

$$\begin{aligned} (A) &= a + b + c + \dots & (A^2) &= a^2 + b^2 + c^2 + \dots \\ (AB) &= ab + ac + \dots + bc + \dots & (A^2B) &= a^2b + b^2a + c^2a + \dots + \\ & & & + a^2c + b^2c + c^2a + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, выражение $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$ указывает на сумму всех членов, полученных из последнего, с помощью всевозможных подстановок букв a, b, c, d, e, \dots в (A, B, C, \dots) , в произвольном порядке. Эти выражения Вандермонд называет Типы сочетаний или просто Типы. [7, с. 370]. На случай равенства показателей в выражении $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon)$ он вводит следующую запись: в показателях $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots\}$, например, $\alpha = \beta = \gamma, \delta = \epsilon$, тогда

$(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon) = \{\alpha, \alpha, \alpha, \delta, \delta\} = \{\alpha^3, \delta^2, \dots\}$. В силу этого введения, обозначения, представленные выше, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (A) &= \{1\}; & (A^2) &= \{2\}; & (A^3 B^3) &= \{3^2\} \\ (AB) &= \{1^2\}; & (A^3) &= \{3\}; & (A^2 B^2 C^2 D) &= \{2^3 1\} \\ (ABC) &= \{1^3\}, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

«Функции не изменяющие своё значение от замены одних букв другими, очевидно, будут функциями Типов» [7, с. 371].

Все эти обозначения Вандермонд использует для упрощения записи функций корней заданного уравнения через функции Типов или в современном понимании через симметрические функции и выписывает их в таблицы, представленные [7, с. 374], для $n = 2, 3, \dots, 9$.

Прежде чем перейти к исследованию решения уравнений 5-й степени, Вандермонд вводит ещё одно «новое краткое обозначение, которое сделает выражения более лаконичными и обеспечит процесс вычисления более эффективным, чем методы, имеющиеся в алгебре. Это обозначение соответствует определённым величинам одинакового вида, с помощью которых задаются функции Типов и которых достаточно, чтобы записать функцию, представляющую любой из корней» [7, с. 389].

Необходимо отметить, что Вандермонд первый, кто заявляет о необходимости введения символики, способствующей упростить вычисления и представить выражения в виде, удобном для восприятия. Для этого дополнительно вводится понятие частичных Типов. Под частичными Типами он понимает краткие выражения, состоящие из последовательностей членов, составляющих разложение одного и того же типа. Основным свойством этих последовательностей является то, что при определённом обмене между буквами из одного члена последовательности появляется другой из этой же последовательности и не появляется новый. Таким образом замена не вызывает никаких изменений. С современной точки зрения можно сказать, что это определение является макетом определения цикла.

В качестве примера частичного типа он рассматривает последовательность показателей, заключённые квадратные скобки: $[\alpha \beta \gamma] = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\gamma b^\alpha c^\beta$, т.е. $[\alpha \beta \gamma]$ представляет сумму всех членов, которые можно составить, сохраняя алфавитный порядок букв a, b, c и, присваивая им показатели следующим образом. Первый член в разложении сохраняет указанный порядок показателей в квадратных скобках; показатели второго записываются в соответствии, указанном римскими цифрами (автор называет их характеристиками), т.е. γ станет показателем a , α будет показателем b , и β - показателем c ; степени последнего члена разложения определяются из полученного, т.е.: $[\gamma \alpha, \beta]$ будут присваиваться буквам a, b, c , исходя из новой записи

[7, с. 389]. Следовательно, последний член будет иметь показатели как указано в последней формуле: β станет показателем a ; γ станет показателем b и α показателем c . Аналогично $[\alpha \gamma \beta]$. Как видим такая запись изменения порядка показателей очень близка по форме к со-

временной. Действительно, если записать это представление как подстановку, т.е. $(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ II & III & I \end{smallmatrix})$, следующая подстановка, согласно порядку, указанном 2-строкой, будет $(\begin{smallmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ II & III & I \end{smallmatrix})$, и последняя подстановка будет $(\begin{smallmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ II & III & I \end{smallmatrix})$. Можно сказать, что последняя подстановка получена от последовательного применения второй подстановки к первой, так α переходит с 1-го места на 2-е согласно первой подстановке и со 2-го на 3-е, согласно второй подстановке. Следовательно в последней подстановке α на третьем месте. Другие показатели так же удовлетворяют этому правилу. Таким образом здесь мы видим циклическую перестановку букв. Вандермонд замечает, что при дальнейшей перестановке величина вернется в исходный вид, что подчёркивает тот факт, что порядок циклической группы n -й степени равен n . Заметим также, что перестановку он применяет не ко всей функции корней заданного уравнения, а к каждому члену

по отдельности, поэтому в дальнейшем он так же приводит правило изменения показателей для слагаемых с неполным набором букв [7, с. 392]. Эти правила перестановки он применяет и для функций корней уравнения более высоких степеней. В то же время надо отметить, что привязка к функции корней уравнения более низкой степени усложняет понимание.

Например, чтобы величина $[\alpha\beta\gamma\delta]$ принадлежала функции *Тины*, нужно, построить функцию, которая будет принимать одно из 6-ти значений полученных от перестановок букв в ней [7, с. 390].

$$\begin{array}{ccc} [\alpha\beta\gamma\delta], & [\alpha\delta\beta\gamma], & [\alpha\gamma\delta\beta] \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \\ \\ [\alpha\beta\delta\gamma], & [\alpha\gamma\delta\beta], & [\alpha\delta\gamma\beta] \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \end{array}$$

где Вандермонд обращает внимание на то, что $\text{min}(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$ делится на части, элементы которых переставляются разными способами. К каждому элементу он применяет циклическую подстановку 4-й степени как указывают «характеристики». Такой способ он применяет для общности построения решения уравнения, т.е., чтобы привести подрадикальную функцию к такому виду, как было показано для уравнения 3-й степени. Однако для уравнения 5-й степени символика нарушается: используются новые обозначения, например: $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, которое не объяснено или $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, где * заменяет цифру V, а также $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, в котором записаны

2 цикла.

Таким образом, символика, введённая Вандермондом, не только не упрощает представление функции корней, но учитывая, что не все элементы представляются в символической записи одновременно, она усложняет понимание вопроса. В тоже время идея о необходимости введения записи и терминологии для представления рассуждений, касающихся решения уравнений была важным шагом для объяснения свойств, которыми обладают разрешимые уравнения.

На фоне этих подходов к решению уравнений появляются исследования Коши.

Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон [5, с. 75] отмечают, что «работа Коши замечательна открытием первых общих теорем, касающихся групп подстановок, которые были доказаны Руффини только для частного случая: подстановок симметрической группы G_5 . Коши, в своих исследованиях, установил свойство, что «цикл» (abc) порождает знакопеременную группу U_n , а также, что в группе G_n , для $n \geq 5$ не содержится никакой подгруппы, индекс которой был бы равным наибольшему простому числу $p < n$. Вместе с тем Коши не применяет эти результаты для решения уравнений в радикалах и известно, что доказательство Руффини он считал удовлетворительным. Этот факт, возможно, повлиял на решение Коши отдать предпочтение изучению других уравнений, перед «общими». В данной статье показано, что эта оценка:

- 1) не является полной;
- 2) в доказательстве теоремы, о которой идёт речь, допущены неточности, и в частности, для $n = 6$, эта теорема не проверяется, о чём сам автор отмечает в конце статьи [1, с. 89]

Говоря о вкладе своих предшественников в развитие вопроса о количестве значений, принимаемых функцией, Коши, отмечает, что наиболее важным следствием работ этих учёных является то, что не всегда можно указать функцию с заданным числом букв, которая от их перестановок будет иметь желаемое число значений. Однако, для заданного числа букв, можно указать пределы, в которых будет находиться число значений, принимаемых функцией, и определить возможные исключения. Именно решению вопроса нахождения этих пределов посвящены исследования Коши. [1, с. 64],

Теорема: Число различных значений, которые приобретает несимметрическая функция от n величин, не может быть меньше чем наибольшее простое число $p < n$ и больше 2. [1,с.78].

Для доказательства этой теоремы он вводит следующие понятия:

1. симметрическая функции – функция, не изменяющая значение от транспозиций, действующих на величины, содержащиеся в ней;

2. порядок функции - количество величин, содержащихся в функции; (это определение вводится для иллюстрации связи между числом переменных и числом принимаемых значений, откуда следует верхний предел: максимальное количество значений для функции n -го порядка равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ т.е. $n!$) [1, с. 65];

3. понятие перестановки - последовательность индексов переменных в заданной функции, записанных слева направо в порядке их нахождения и учитываемых один раз. Например, для функции $K = a_1 a_2^m \cos a_4 a_4 + \sin a_3$, 4-го порядка перестановка будет иметь вид: 1243 [1, с. 66];

4. понятие подстановки и её символическая запись - две перестановки, записанные одна под другой и указывающие на то, что для получения нового значения функции $K - K^I$, индексы в верхней перестановке должны поменяться на соответствующие индексы в нижней. Подстановка функции K обозначается $\begin{pmatrix} 1243 \\ 2431 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Таким образом, применяя данную подстановку к K , K перейдёт в K^I ; Заметим, что верхняя и нижняя строчки, представляют один и тот же цикл [1, с. 67].

5. понятие индекса функции: если $N = n!$ – число всех значений, которые принимает функция, M - число равных значений, то, $R = \frac{N}{M}$, R - индекс функции, M - указательный или индикаторный делитель [1, с. 69];

6. на множестве подстановок вводится понятие произведения: произведением двух подстановок называется подстановка, которая является результатом последовательного выполнения сомножителей. Приводится пример: последовательное применение к перестановке A_1 подстановок $\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_4 \\ A_5 \end{pmatrix}$ даёт подстановку $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_6 \end{pmatrix}$, эквивалентную перестановке A_6 , [1, с. 73];

Замечание. Необходимо подчеркнуть, что речь здесь не идёт об операции умножения подстановок, а говорится только то, что найдётся элемент (в данном случае A_6), который будет соответствовать последовательному применению соответствующих подстановок. Правило, которому нужно следовать, чтобы получить A_6 , не указано. И, поскольку пример абстрактный, нет возможности понять, как автор пришёл к указанному результату.

7. понятие идентичной подстановки - подстановка, в которой перестановки в верхней и нижней строках совпадают [1, с. 73];

8. понятие смежной подстановки - подстановки называются смежными, если нижняя перестановка первой совпадает с верхней перестановкой второй [1, с. 73]. Две смежные подстановки $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ выполненные последовательно дадут такой же результат, как и подстановка $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$;

9. понятие степени подстановки: - степень подстановки называется подстановка, которая «эквивалентна некоторой другой, выполненной последовательно определённое число раз», степень подстановки обозначается: $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r$.

10. важным моментом в работе является введение циклической подстановки "Substitution circulaire" [1, с. 80]. Она получается следующим образом: Последовательное применение подстановки $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ к перестановке A_1 приведёт к перестановкам A_1, A_2, \dots, A_m . Коши заключает, что, для конечного m , перестановка A_m , будет такова, что применение к ней данной подстановки приведёт снова к A_1 . Для иллюстрации все перестановки (в представлении A_i) располагаются на окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. Из этого представления Коши делает вывод, что подстановки, составленные из соседних перестановок, расположенных «с востока на запад» [1, с. 75] будут эквивалентны между собой, а так же устанавливает свойства для степени подстановки:

1) степень m подстановки $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ эквивалентна подстановке $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx}$ тоже будет единичной подстановкой.

3) $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx+r} = \begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^r$;

$$4) \begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix}$$

5) Только те подстановки, показатели степени которых меньше m , будут различными. Это следующие подстановки: $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$. В частности "степень циклической подстановки равна числу индексов, содержащихся в ней". [1, с. 80]

Совокупность этих подстановок Коши называет периодом. Число m , соответствующее количеству различных подстановок, называется порядком подстановки. Порядок подстановки обозначает как наименьшую из степеней, в которой подстановка равна идентичной подстановке, так и количество перестановок входящих в период, что сохранилось и в современной терминологии [8, с. 74].

Необходимо заметить, что здесь в терминологии периода формально представлена циклическая «группа подстановок» степени m (у Коши ещё не прослеживается четкое описание множественной структуры, речь идёт о конечной совокупности элементов, относительно степени одного и того же элемента) и описано понятие порядка группы (периода). Это понятие и многие свойства вошли в современную теорию [8, с. 265]

Опираясь на введённые понятия, Коши представляет доказательство сформулированной выше теоремы. Оно состоит из 3-х частей.

I. Если $R < p$, то никакое значение функции K не может измениться никакой подстановкой степени p [1, с. 72].

II. Если значение K не может быть изменено никакой подстановкой степени p , то его не может изменить и никакая подстановка третьей степени [1, с. 78].

III. Если значение функции K не изменяется циклическими подстановками третьей степени, то эта функция является либо симметрической, либо принимает только два значения [1, с. 81].

1) Рассмотрим доказательство I части [1, с. 77]. Исследуется абстрактная функция K , которая не описана. К перестановкам $A_i, i = 1, \dots, N, N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$ соответствующим различным значениям этой функции, Коши применяет подстановку $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ степени m (на основе каких свойств функции K выбрана эта подстановка не оговаривается) и таким образом получает $\frac{n!}{m}$ окружностей, каждая из которых содержит m перестановок: m - степень подстановки.

Как было отмечено выше [1, с. 75], автор размещает подстановки m цикла на окружности.

Понятно, что среди $n!$ подстановок будут и другие циклы, о правиле размещения которых, автор не указал.

Для доказательства теоремы Коши вводит понятие эквивалентных перестановок — это перестановки, соответствующие эквивалентным значениям K (в тексте «равные» [1, с. 68], и «эквивалентные» [1, с. 69], значения используются равнозначно). По предположению, перестановке A_1 эквивалентны M перестановок. «Очевидно», — говорит Коши, — если, $M > \frac{n!}{m}$, то, среди окружностей найдется, хотя бы одна, содержащая две эквивалентные перестановки: A_x и A_y — такие перестановки. Тогда подстановка $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ будет степенью $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, но $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ не изменит значения функции, следовательно, для простого m подстановка $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ так же не может изменить значение K . Полагая, p — наибольшим простым числом $< n$ и $p = m$, Коши заключает, что если индекс R функции K меньше p , то никакая подстановка степени p не изменит значение функции K .

Замечание. Известно, что количество значений принимаемых функцией равно $N = n!$, следовательно, функция зависит от n переменных; количество её равных значений — M (в каком отношении находятся M и n , не оговаривается); количество различных значений — $R = \frac{n!}{M}$. [1, с. 68]. Тогда, в соответствии с теорией групп, $n!$ перестановок составляют группу S_n . Её можно разложить по подгруппе H_M порядка M — группа перестановок, в которых функция K остаётся инвариантной; индекс H_M в S_n равен R , что подтверждается рассуждениями автора

[1, с. 72].

Далее Коши рассматривает циклическую подгруппу порядка $m < n$, по которой, как можно судить из описания, разлагает группу S_n на смежные классы. Их будет $\frac{N}{m}$, что совпадает с указанным Коши числом окружностей. Как известно, все подстановки представители смежных классов - различные, этот факт совпадает и с построением Коши [1, с. 77]. В каждой окружности подстановки так же различны [1, с. 76]. Поэтому, предположение, что перестановка A_x и A_y эквивалентны не может иметь места. С современной точки зрения подстановки $(A_1), (A_2), (A_3), \dots, (A_m)$, образуют подгруппу в группе S_n , обозначим её H_m . Все смежные классы симметрической группы по H_m , будут иметь одинаковое число элементов и все элементы будут различными. Если $(A_y)^{A_x}$ степень (A_t) , то $(A_x) \in H_m$, что не может иметь места, т. к. в противном случае смежный класс, содержащий подстановку (A_x) совпадёт с группой H_m [8, с. 267], что невозможно. В связи с этим, представленное доказательство не может считаться исчерпывающим.

В завершении анализа фрагмента этой работы необходимо отметить её важность, заключающуюся в том, что Коши пытается построить математическую структуру для абстрактных объектов. Сначала подстановки выступают как действие на перестановки, но впоследствии Коши придаёт им характер элементов. Он объединяет их во множество с единицей, на котором определяет произведение (можно считать, что косвенно введена операция умножения т.к. указано правило выполнения «умножения» смежных подстановок и правило как построить две смежные подстановки). Необходимо заметить, что через 30 лет [5, с. 115] Коши снова вернётся к этому вопросу в работе «Sur les dérivées d'une ou plusieurs substitutions, et sur les systems des substitutions conjuguées» - «О степенях одной или нескольких сопряжённых подстановок и о системах сопряжённых подстановок», [4, с. 184], где он строит коммутативную группу подстановок, называя её по содержанию в ней элементов «сопряжённые подстановки». Здесь он доказывает теорему:

ТЕОРЕМА. Для любого простого делителя p порядка конечной группы G , эта группа содержит элемент порядка p [4, с. 184].

Впоследствии (1872г.) эта теорема была обобщена Силовым (первая теорема Силова). [8, с. 289]

2. Заключение

Представленный здесь исторический обзор эволюции термина и символа подстановки показывает, что Коши удалось обобщить идеи представленных ученых и, дополнив их своими наблюдениями, а так же потребностью удобного аппарата для своих исследований привели его к изложенным результатам.

Понятно, что умножение Лагранжем функции корней уравнения на α^i , $i = \overline{1, \mu}$, μ - показатель степени заданного уравнения, для перестановки всех корней одновременно, могло породить как понятие циклической подстановки, так и понятие степени подстановки. К циклической перестановке букв в функции корней уравнения прибегали так же Вандермонд и Руффини. Интересные мысли Вандермонда о законе перехода от одной буквы к другой могли стать образом символа подстановки у Коши.

Как показывает анализ исследований Коши, теория в своем первоначальном виде не была совершенной, имела много неточностей, как например гипотеза Коши о порядке «подгруппы», по которой, он разлагает симметрическую группу, предполагая, что индекс этой «подгруппы» не меньше наибольшего простого числа, содержащегося в n , т.е. может быть меньше n , если n - составное, что, как заметил сам автор, уже не проверяется для $n = 6$. Так же, в свете представленного анализа, ясно что у Коши ещё нет понятия группы. Однако развитие этого

вопроса проявилось в более поздней статье, где можно говорить о множестве, являющемся группой, хотя термин «группа», как понятие множественной структуры появляется в работах Кронекера и Дедекинда, начиная с 1855 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cauchy A.L. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquerir. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 64-90.
2. Cauchy A.L. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les valeurs qu'elles renferment. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 91-169.
3. Cauchy A.L., Memoire sur les arrangements que on peut former avec les letters donnees. Oeuvres complètes, 2-e série, T. XIII. Paris, Gauthiers-Villars, 1844, p. 171-282.
4. Cauchy A. L. Exercices d'analyse et de physique mathématiques, v. III, 1844, p. 183-185.
5. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Sous la direction de Jean Dieudonné Herman, 1978.
6. Oeuvres de Lagrange, T.3, Serret J.A., Paris 1771.
7. Vandermonde A. T., Memoires de l'Academie Royale des Sciences, T.9, 1771, p. 365-416
8. Постников М.М. Теория Галуа. Москва, Факториал Пресс, 2003
9. Jordan C. , Triate de substitutions et des equations algebriques, Paris, 1870.
10. Valson S.A., La vie et les travaux de baron Cauchy, Paris, 1868.
11. Dahan A. Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept de groupe, Archive for Histiry of Exact Sciences, v 23,4 by Springer-Verlag,1980, p. 279-316.
12. Meo M., The mathematical life of Cauchys group-theoreme, Historia mathematica, 31(2004), Portland Or, USA, p.196-221.
13. Колмогоров А.Н., Юшкевич А.П., Математика XIX в., М., Наука, 1978.
14. Бурбаки Н., Очерки по истории математики. Москва 1963
15. Wussing H., Des genesis des abstracten gruppen begriffes, Berlin, 1969.
16. Burkhard H., die Anfange der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Abhandlugen zur Geschichte der Mahtematik, Heft V, Leipzig 1892, p.119-159.

REFERENCES

1. Cauchy A. L. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 64-90.
2. Cauchy A.L. Memoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les valeurs qu'elles renferment. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 91-169.
3. Cauchy A.L., Memoire sur les arrangements que on peut former avec les letters donnees. Oeuvres complètes, 2-e série, T. XIII. Paris, Gauthiers-Villars, 1844, p. 171-282.

4. Cauchy A. L. Exercices d'analyse et de physique mathématiques, v. III, 1844, p. 183-185.
5. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Sous la direction de Jean Dieudonné Herman, 1978.
6. Oeuvres de Lagrange, T.3, Serret J.A., Paris 1771.
7. Vandermonde A. T., Memoires de l'Academie Royale des Sciences, T.9, 1771, p. 365-416
8. Postnikov M. M. Teoriya Galua. Moskva, Faktorial Press, 2003
9. Jordan C. , Triate de substitutions et des equations algebriques, Paris, 1870.
10. Valson S.A., La vie et les travaux de baron Cauchy, Paris, 1868.
11. Dahan A. Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept de groupe, Archive for History of Exact Sciences, v 23,4 by Springer-Verlag,1980, p. 279-316.
12. Meo M., The mathematical life of Cauchys group-theoreme, Historia mathematica, 31(2004), Portland Or, USA, p.196-221.
13. Kolmogorov A.N., Yushkevich A.P., Matematika XIX v., M., Nauka, 1978.
14. Burbaki N., Ocherki po istorii matematiki. Moskva 1963
15. Wussing H., Des genesis des abstracten gruppen begriffes, Berlin, 1969.
16. Burkhard H., die Anfange der Grouppentheorie und Paolo Ruffini. Abhandlugen zur Geschichte der Mahtematik, Heft V, Leipzig 1892, p.119-159.

Получено: 30.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232

Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций¹

Л. А. Кабанова

Кабанова Любовь Александровна — младший научный сотрудник, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru

Аннотация

В работе рассматриваются четыре приближения решения трехмерной задачи теории упругости о нагружении неоднородной свободно опертой по контуру прямоугольной пластины, полученные методом структурных функций первого и второго порядка с использованием приближенных решений сопутствующей задачи. Метод структурных функций представляет собой способ приближенного вычисления решения задачи теории упругости для неоднородного тела (называемого исходным) по решению аналогичной с точки зрения нагрузок и граничных условий задачи теории упругости для однородного тела (называемого сопутствующим); это вычисление реализуется путем суммирования производных деформаций в сопутствующем теле с весовыми коэффициентами, называемыми структурными функциями; в статье приводится краткое описание и основные соотношения метода структурных функций. Решение сопутствующей задачи – о нагружении однородной пластины – строится в рамках известных приближений, основанных на использовании гипотез Кирхгофа и типа Тимошенко. Последовательно получены структурные функции первого и второго порядка для исходной пластины. Приводятся явные формулы для приближенного вычисления перемещений в исходном теле по методу структурных функций первого и второго порядка, основанные на обоих рассмотренных приближениях решения сопутствующей задачи. Для набора тестовых пластин различной конфигурации (двухслойной, трехслойной асимметричной по толщине, трехслойной симметричной по толщине) приближения, построенные по методу структурных функций, сопоставляются между собой и с известным решением задачи об изгибе многослойной пластины в трехмерной постановке; приближения, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы типа Тимошенко, в приведенных сопоставлениях демонстрируют удовлетворительное совпадение с известным решением.

Ключевые слова: механика композитов, слоистые пластины, метод структурных функций.

Библиография: 39 названий.

Для цитирования:

Л. А. Кабанова. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 211–232.

¹Исследование выполнено при поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232

**Comparison of structural functions method approximations
of the solution of a linear elastic layered plate bending problem**

L. A. Kabanova

Kabanova Lyubov Alexandrovna — junior researcher, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru

Abstract

This paper comes to compare four different approximations of the solution to a layered linear elastic plate bending problem, obtained by the structural functions method. This method is in representation of a nonhomogeneous body displacement field as a weighted sum of spatial derivatives of the so-called concomitant body displacements, the weighting coefficients are named structural functions of the nonhomogeneous body; the concomitant body is a homogeneous one, subjected to the same loadings and boundary conditions, as the nonhomogeneous body; we come through the basic steps of structural functions method in this paper. For the concomitant plate displacements, we consider two well-known approximations: the classical plate theory and the first-order shear deformation theory. We obtain the first- and the second-order structural functions of a layered plate. We derive direct formulae for the first- and second-order structural functions method approximations of the nonhomogeneous plate displacements, using both concomitant plate displacements approximations. For a set of sample plates, we compute the obtained structural functions method approximations, and compare the computation results with a known Pagano solution to the nonhomogeneous plate bending problem. The approximation, based on the first-order shear deformation theory approach to the concomitant body displacements computation, gives an acceptable result in the considered cases.

Keywords: composite mechanics, layered plates, structural functions method.

Bibliography: 39 titles.

For citation:

L. A. Kabanova, 2022, “Comparison of structural functions method approximations of the solution of a linear elastic layered plate bending problem”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 211–232.

Введение

Данная статья посвящена построению приближений решения статической задачи теории упругости о нагружении неоднородной прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру, методом структурных функций (МСФ), и численному сопоставлению построенных МСФ-приближений – как между собой, так и с известным решением той же задачи в трехмерной постановке.

МСФ был построен в работах В. И. Горбачева [1], как способ приближённого вычисления решения задачи теории упругости для неоднородного тела. В основе метода лежит интегральная формула [2], устанавливающая взаимосвязь решений задач теории упругости, поставленных для двух тел, обладающих разными упругими свойствами, но идентичной геометрией,

подвергнутых одинаковым объемным нагрузкам и граничным условиям. Интегральные формулы были построены также и для динамической задачи [3], связанной задачи термоупругости [4], электромагнитоупругости [5], и ряда классических задач уравнений математической физики [6]. Непосредственное применение интегральных формул в некоторых случаях может быть затруднительным, так как требует вычисления фундаментального решения для неоднородного тела; поэтому был разработан МСФ, основанный на соотношении, представляющем собой приближение интегральной формулы; для задачи теории упругости МСФ позволяет приближенно вычислить компоненты вектора перемещений неоднородного тела (называемого исходным) в виде частичной суммы ряда по производным компонент тензора деформаций однородного тела идентичной геометрии, подвергнутого идентичной системе нагрузок (называемого сопутствующим). Варианты МСФ были построены для одномерных и двумерных задач теории упругости ([7], [8]), для связанной задачи термоупругости [9]; МСФ был применен к анализу задачи об изгибе неоднородной плиты [10], к задачам об изгибе полосы [11]; в работе [12] МСФ был применен к задаче определения эффективных характеристик композиционного материала со сферическими включениями и численно сопоставлен с результатами применения метода Мори-Танака к этой же задаче.

В данной работе МСФ применяется для приближенного отыскания перемещений и напряжений в неоднородной слоистой пластине, свойства которой зависят от поперечной координаты, следующим образом: строятся два известных приближения решения сопутствующей задачи, определяют структурные функции (СФ) первого и второго порядка исходного тела, строятся МСФ-приближения первого и второго порядка решения исходной задачи, основанные на приближениях решения сопутствующей задачи. Таким образом, исходной в настоящей работе является задача о квазистатическом нагружении слоистой прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины, которая многократно исследовалась как численно, так и аналитически. Сопутствующую – задачу о нагружении однородной прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины – можно также назвать одной из наиболее изученных задач теории упругости, в качестве способов построения решения сопутствующей задачи выбраны известные приближения – по гипотезе Кирхгофа-Лява и по теории пластин первого порядка.

В силу широкого распространения пластин, как конструктивных элементов технических конструкций, разработано большое количество подходов к моделированию упругого и термоупругого поведения пластин, в том числе – неоднородных, изготовленных из материалов различных типов анизотропии. Одним из первых подходов к моделированию однородных изотропных пластин можно назвать теорию, основанную на кинематической гипотезе Кирхгофа [13] в некоторых источниках называемую классической [14]; она имеет ряд противоречий, первый порядок точности по поперечной координате и нулевой – по поперечной деформации [15], в связи с чем в XX веке активно разрабатывались более точные теории, особенно отметим варианты теорий первого порядка по поперечной деформации, в том числе – основанные на кинематической гипотезе типа Тимошенко [16], [17] [18]; общие подходы к построению теорий пластин [19], [20]. Упомянутые модели, а также модели более высоких порядков точности – модель третьего порядка по поперечным деформациям [14], высших порядков [21] – были также обобщены на случаи неоднородных материалов (например, [22]), функционально-градиентных ([23], [24]), линейно-вязкоупругих материалов [25]. Активное развитие получило и направление, связанное с уточнённым моделированием упругого поведения многослойных пластин [26], [27], [28], [29], [30], [31]. Необходимо также упомянуть и работы, посвященные вопросам классификации теорий пластин и качественного и количественного сравнения теорий пластин [15], [22], [32], как между собой, так и с численными или аналитическими решениями модельных задач в трехмерной постановке. В силу наличия аналитического решения в трехмерной постановке [33], а также относительной простоты построения решений приближенных в качестве модельной во многих работах (например, [22], [32]) выбрана задача о нагружении шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластины. В работах [34], [35] начала XXI века приво-

дится классификация возможных подходов к моделированию упругого поведения пластин, впоследствии [36] обобщенная и на вязкоупругий случай, а также предложены критерии качества, согласно которым можно анализировать арсенал качественных свойств, описываемых той или иной моделью. Среди представленных в работе [35] критериев качества подчеркнем способность корректно моделировать зигзагообразную зависимость перемещений от поперечной координаты, выполнять условие идеального контакта слоёв пластины, и независимость количества переменных в модели от числа слоёв.

Цель данной работы – построить МСФ-приближения решения задачи о нагружении не обязательно симметричной по толщине линейно-упругой ортотропной слоистой пластины; привести их явный вид, задействуя простейшие приближения решения сопутствующей задачи – по теории Кирхгофа и теории пластин первого порядка (основанной на гипотезе типа Тимошенко), отметить, удовлетворяют ли построенные МСФ-приближения критериям качества, приведенным выше, и сопоставить их численно с решением исходной задачи, полученным по методу Пагано [33]. При численном сопоставлении исследовать отклонения МСФ-приближений от решения по методу Пагано. Заметим, что выбранные приближения решения сопутствующей задачи имеют заведомо невысокий порядок точности – ранее, в работе [39], построено МСФ-приближение решения аналогичной задачи на базе решения сопутствующей задачи в трехмерной постановке, продемонстрировавшее хорошее совпадение с контрольным, однако интерес представляет также использование МСФ в сочетании с менее точными приближениями решения сопутствующей задачи.

В работе используется тензорная нотация, по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование (от 1 до 3 – по малым и от 1 до 2 – по большим индексам), по греческим индексам суммирование не производится; индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате, $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

1. Метод структурных функций

МСФ разработан [1] для построения приближенного решения статической задачи теории упругости в перемещениях, поставленной для твёрдого тела произвольной неоднородности, которую в общем виде можно записать [37], как

$$[C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) = 0, \quad (1)$$

$$u_i \Big|_{\Sigma_a} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0,$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, $C_{ijkl}(\vec{x})$ – компоненты тензора упругих модулей неоднородного тела, произвольные функции пространственных координат; $X_i(\vec{x})$ – объёмные силы. Компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в неоднородном теле всюду далее будем обозначать σ_{ij} и ε_{ij} соответственно, они связаны между собой определяющими соотношениями

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}(\vec{x}), \quad \varepsilon_{ij}(\vec{x}) = J_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{kl}(\vec{x}), \quad (2)$$

тензоры упругих модулей C_{ijkl} и податливостей J_{ijkl} взаимно обратны; их компоненты – вообще говоря, произвольные функции пространственных координат, удовлетворяющие минимальным термодинамическим ограничениям [37]. Неоднородное тело и задачу (1) будем далее называть исходным телом и исходной задачей (ИЗ).

При помощи МСФ решение задачи (1) вычисляется в виде суммы, полученной в работе [2]

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1\dots i_q}(\vec{x})e_{kl,i_1\dots i_q}(\vec{x}), \quad (3)$$

где v_i и e_{kl} – компоненты вектора перемещений и тензора малых деформаций в так называемом сопутствующем теле – твердом теле аналогичной ИЗ геометрии, подвергнутом воздействию той же системы объёмных и поверхностных сил, с теми же граничными условиями, что и в ИЗ. Сопутствующее тело предполагается однородным, и задача теории упругости для него (сопутствующая задача, далее СЗ) имеет вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ v_i \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad s_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl}^0 – компоненты тензора упругих модулей сопутствующего тела, они подразумеваются независимыми от координат, компоненты тензора напряжений в сопутствующем теле здесь и далее обозначаем s_{kl} . Таким образом, соотношение (3) задаёт представление решения ИЗ в виде ряда по производным решения СЗ (с учётом того, что $e_{kl,i_1 \dots i_q} = (v_{k,l i_1 \dots i_q} + v_{l, k i_1 \dots i_q})/2$). Формула (3) получена в работе [2], как следствие интегральной формулы – аналитического выражения, устанавливающего связь решений ИЗ и СЗ.

Коэффициенты представления (3) называют структурными функциями (N -функциями; далее СФ); для СФ выполнены условия симметрии по второму и третьему индексу: $N_{ikl i_1 \dots i_q} = N_{ilk i_1 \dots i_q}$, а также внутри группы индексов $i_1 \dots i_q$. В работе [2] получены выражения, связывающие СФ с компонентами тензора Грина ИЗ, однако поскольку практическое вычисление тензора Грина может быть затруднительным, позднее построена рекуррентная система уравнений в частных производных для отыскания СФ (процедура её получения приведена, например, в статье [10]) :

$$\begin{aligned} [C_{ijkl} N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} &= 0, \\ [C_{ijmn} N_{mkl i_1, n} + C_{ijm i_1} N_{mkl}]_{,j} &= C_{ii_1 kl}^0 - [C_{ii_1 mn} N_{mkl, n} + C_{ii_1 kl}], \\ [C_{ijmn} N_{mkl i_1 \dots i_q, n} + C_{ijm i_q} N_{mkl i_1 \dots i_{q-1}}]_{,j} &= -[C_{ii_q mn} N_{mkl i_1 \dots i_{q-1}, n} + C_{ii_q m i_{q-1}} N_{mkl i_1 \dots i_{q-2}}], \quad q \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта система получена из условия совпадения объёмных сил в ИЗ и СЗ: тогда из уравнений равновесия обеих задач следует, что $[C_{ijkl} u_{k,l}]_{,j} = C_{ijkl}^0 v_{k,lj}$. Подставляя в это равенство представление (3) и приравнявая слагаемые при одинаковых производных v , мы получаем систему рекуррентных уравнений (5), как достаточное условие одновременного выполнения уравнений равновесия ИЗ и СЗ. Граничные условия к системе (5) строятся аналогично, из соображений равенства соответствующих компонент перемещений и векторов напряжений на кинематической и статической границе; в частности, если вся поверхность тела Σ – кинематическая граница, то есть ИЗ и СЗ – первая краевая задача, $N_{ikl i_1 \dots i_q} \Big|_{\Sigma} = 0$.

В данной работе делается попытка применить соотношения метода структурных функций к задаче о нагружении свободно опертой по контуру пластины, предварительно построив приближение решения сопутствующей задачи при помощи известных приближенных теорий пластин.

2. Постановка исходной задачи о нагружении неоднородной пластины

Рассматривается частный случай задачи (1) – нагружение системой объёмных (X_i) и поверхностных сил слоистой прямоугольной пластины размерами $L_1 * L_2 * h$, свободно опертой на всех рёбрах ($x_1 = 0, L_1$; $x_2 = 0, L_2$). Декартовы координаты x_1, x_2, x_3 вводятся так, что x_3 совпадает с поперечным направлением пластины, а начало координат расположено в левом нижнем углу серединной плоскости Σ_0 , равноудалённой от лицевых поверхностей $\Sigma_{\pm} = \{\vec{x} : 0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2, x_3 = \pm h/2\}$. Пусть упругие свойства пластины зависят только от поперечной координаты, $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_3)$, эта зависимость может быть как

кусочно-постоянной (если пластина составлена из слоёв с постоянными модулями упругости), так и более сложной. Кроме того, материал каждого слоя пластины предполагается ортотропным, причём оси ортотропии каждого слоя совпадают с осями координат, следовательно, $C_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0$. Контакт слоёв материала предполагается идеальным. Запишем задачу (1) в рассматриваемом случае, учитывая, что на лицевых поверхностях Σ_{\pm} действуют поверхностные силы $q_i^{\pm}(x_1, x_2)$, а на ребрах $x_1 = 0$, L_1 , $x_2 = 0$, L_2 пластина свободно опирается:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ x_3 = \pm h/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, \cdot) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2, \cdot), \\ x_1 = 0, L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, u_3(\cdot, x_2, x_3) &= 0, \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0 \\ x_2 = 0, L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, u_3(x_1, \cdot, x_3) &= 0, \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и найдем МСФ-приближения решения задачи (6). Для этого поставим сопутствующую задачу, найдем приближенные решения сопутствующей задачи, и вычислим структурные функции исходной пластины.

3. Приближения решения сопутствующей задачи, рассматриваемые в статье

3.1. Постановка сопутствующей задачи

В данной работе мы предполагаем, что в качестве сопутствующего заведомо взято тело, упругие свойства которого совпадают с осредненными свойствами исходного тела, то есть $C_{ijkl}^0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} C_{ijkl}(x_3) dx_3$, и C_{ijkl}^0 наследует ортотропию C_{ijkl} : аналогично, $C_{\alpha\alpha\alpha\beta}^0 \equiv 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma}^0 \equiv 0$. С учётом изложенного в разделе 2 описания ИЗ, математическая постановка СЗ (4) принимает вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,l,j}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ x_3 = \pm h/2 : s_{i3}(x_1, x_2, \cdot) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2, \cdot), \\ x_1 = 0, L_1 : v_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, v_3(\cdot, x_2, x_3) &= 0, s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0 \\ x_2 = 0, L_2 : v_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, v_3(x_1, \cdot, x_3) &= 0, s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Постановка (7) представляет собой классическую для механики деформируемого твёрдого тела задачу о нагружении однородной пластины статическими нагрузками; разработано множество разнообразных подходов к решению (вообще говоря, приближенному) подобных задач, малая часть которых описана во Введении. Мы рассмотрим два приближения решения СЗ (7) – основанное на гипотезе Кирхгофа и основанное на теории первого порядка. Оба этих подхода предполагают сведение трехмерной задачи (7) к двумерной задаче, введение системы кинематических переменных, которые зависят только от продольных координат x_1, x_2 , и сведение внешних нагрузок к эквивалентной системе внутренних силовых факторов, распределенных в срединной плоскости пластины. Детально процедура сведения приведена, например, в работе [38] для классической теории пластин и в работе [22] для теории первого порядка; в монографии [14] и других источниках. Определим вторичные величины – приведенные нагрузки, действующие на сопутствующую пластину:

$$q_i(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} X_i(\vec{x}) dx_3 + q_i^-(x_1, x_2) + q_i^+(x_1, x_2), \quad (8)$$

$$q(x_1, x_2) = q_3(x_1, x_2) + m_{I,I}(x_1, x_2),$$

$$m_I(x_1, x_2) = h/2 \left(q_I^+(x_1, x_2) - q_I^-(x_1, x_2) \right) + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 X_I(\vec{x}) dx_3.$$

Кинематические переменные для сопутствующего тела подлежат определению из приведенных уравнений равновесия (приведены ниже), решения которых строятся при помощи метода Навье [14], использующего тригонометрическое разложение искомым кинематических переменных и приведённых нагрузок (8) по системе функций

$$\{\sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2)\}_{m,n=1}^{\infty},$$

где $\lambda_m = \pi m/L_1$, $\mu_n = \pi n/L_2$. Коэффициенты разложения приведённых нагрузок (8) по указанной системе обозначим

$$[q_1, m_1](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_1^{mn}, m_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \quad (9)$$

$$[q_2, m_2](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_2^{mn}, m_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$[q_3, q](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_3^{mn}, q^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

и построим два приближения решения СЗ (7).

3.2. Основанное на решении СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа

Теория пластин, основанная на гипотезе Кирхгофа, в ряде источников именуемая классической [14], строится в предположении о том, что волокно пластины, нормальное к срединной плоскости и прямое до деформации, остается прямым, не изменяет свою длину и остается нормальным к деформированной срединной поверхности после приложения воздействия. Данное предположение позволяет установить связь между перемещениями и деформациями во всей сопутствующей пластине $v_i(x_1, x_2, x_3)$, и кинематическими переменными теории – перемещениями в срединной плоскости $w_i(x_1, x_2)$.²

$$v_i^K(\vec{x}) = w_i(x_1, x_2) - \delta_{iK} x_3 w_{3,K}(x_1, x_2), \quad e_{i3}^K \equiv 0, \quad e_{IJ}^K = (w_{I,J} + w_{J,I})/2 - x_3 w_{3,IJ}, \quad (10)$$

решение сопутствующей задачи (7) сводится к отысканию функций $w_i(x_1, x_2)$. Разложим их по тригонометрическому базису аналогично (9):

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} W_1^{mn} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= w_1(x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} W_2^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) &= w_2(x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} W_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= w_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (11)$$

²Верхний индекс K здесь и далее подчеркивает, что величина вычислена в рамках гипотезы Кирхгофа

Заметим, что перемещения в срединной плоскости, найденные в форме (11), с учётом соотношений (10) автоматически обеспечивают выполнение граничных условий задачи (7), а набор постоянных $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^{\infty}$, $i = 1..3$ подлежит отысканию только из уравнений равновесия для пластины Кирхгофа. В общем виде они построены, например, в работе [38], а в частном случае однородной пластины принимают вид³

$$H(J^0)_{IJKL}^{-1} w_{K,LJ} + q_I = 0, \quad H^3(J^0)_{IJKL}^{-1} w_{3,IJKL}/12 = q,$$

что позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений для $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^{\infty}$, $i = 1..3$

$$\begin{aligned} [\lambda_m^2 H(J^0)_{1111}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{1212}^{-1}] W_1^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n W_2^{mn} &= q_1^{mn}, \\ [\lambda_m^2 H(J^0)_{1212}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{2222}^{-1}] W_2^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n W_1^{mn} &= q_2^{mn}, \\ H^3[(J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^4 + (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^4 + 2((J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m^2 \mu_n^2] W_3^{mn} / 12 &= q^{mn}, \end{aligned} \quad (12)$$

данная система позволяет записать явные выражения для $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^{\infty}$, $i = 1..3$, но в данной работе они опущены – ниже значения W_{mn}^i используются только при численном моделировании решения исходной задачи.

3.3. Основанные на решении СЗ в рамках теории первого порядка

При рассмотрении задачи (7) в рамках гипотезы Кирхгофа непосредственно из физических предположений $e_{33}^K \equiv 0$. Поскольку разложение (3) строится по производным компонент тензора деформаций СЗ, начиная с нулевой производной, то есть – с самих компонент тензора деформаций, рассмотрим также приближение решения СЗ первого порядка точности по поперечным деформациям (first-order shear deformation theory – [14], [16], [22] и т.д.). Кинематическое предположение, позволяющие построить модель первого порядка – гипотеза типа Тимошенко: предполагается, что прямое волокно, нормальное к срединной плоскости пластины до деформации, остается прямым и не изменяет свою длину, но может образовывать с деформированной срединной поверхностью угол, отличный от прямого на величину γ_I в плоскости Ox_1x_3 . Тогда поперечные деформации в сопутствующем теле⁴ $e_{I3}^F(\vec{x}) = \gamma_I(x_1, x_2)/2$, $e_{33}^F \equiv 0$, и можно установить связь между перемещениями в сопутствующей пластине и кинематическими переменными теории – перемещениями в срединной плоскости $y_i(x_1, x_2)$ и изменениями углов $\gamma_I(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} v_i^F(\vec{x}) &= y_i(x_1, x_2) - \delta_{iK} x_3 (y_{3,K}(x_1, x_2) - \gamma_K(x_1, x_2)), \\ e_{33}^F &\equiv 0, \quad e_{I3}^F = \gamma_I, \quad e_{IJ}^F = (y_{I,J} + y_{J,I})/2 - x_3(2y_{3,IJ} - \gamma_{I,J} - \gamma_{J,I})/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично предыдущему, введём разложение кинематических переменных теории по тригонометрическому базису:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_1^{mn}, G_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= [y_1, \gamma_1](x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_2^{mn}, G_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) &= [y_2, \gamma_2](x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= y_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (14)$$

³Как правило, при рассмотрении классической теории пластин вводятся тензоры жесткостей, и уравнения равновесия включают именно их; мы не вводим данное обозначение, подставляя прямо вычисленные значения жесткостей, так как непосредственно не анализируем классическую теорию пластин, а используем её лишь как промежуточный шаг. J_{IJKL}^0 – компоненты тензора, обратного к C_{IJKL}^0 .

⁴Верхний индекс F здесь и далее подчеркивает, что величина вычислена в рамках теории первого порядка

Вид перемещений (14) обеспечивает выполнение граничных условий постановки (7), значения констант $\{Y_{mn}^i\}_{m,n=1}^\infty$, $i = 1..3$, $\{G_{mn}^I\}_{m,n=1}^\infty$, $I = 1..2$ подлежат определению из уравнений равновесия [22]

$$\begin{aligned} H(J^0)_{IJKL}^{-1} y_{K,LJ} + q_I &= 0, & 5HC_{I3K3}^0 \gamma_{K,I}/6 + q_3 &= 0, \\ H^3(J^0)_{IJKL}^{-1} y_{3,KLJ}/12 - 5HC_{I3K3}^0 \gamma_K/6 + m_I &= 0, \end{aligned}$$

здесь использован множитель коррекции ([18], [24], [31] и др.) $5/6$, полученный для теории пластин первого порядка. Система линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов решения (14) имеет вид

$$\begin{aligned} &[\lambda_m^2 H(J^0)_{1111}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{1212}^{-1}] Y_1^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n Y_2^{mn} = q_1^{mn}, & (15) \\ &[\lambda_m^2 H(J^0)_{1212}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{2222}^{-1}] Y_2^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n Y_1^{mn} = q_2^{mn}, \\ &\lambda_m HC_{1313}^0 G_1^{mn} + \mu_n HC_{2323}^0 G_2^{mn} = 6q_3^{mn}/5, \\ H^3 &\left[(- (J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^3 - ((J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n^2) Y_3^{mn} + ((J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^2 + (J^0)_{1212}^{-1} \mu_n^2) G_1^{mn} + \right. \\ &\quad \left. ((J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n G_2^{mn} \right] /12 + 5HC_{1313}^0 G_1^{mn}/6 = m_1^{mn}, \\ H^3 &\left[(- (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^3 - (J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m^2 \mu_n Y_3^{mn} + ((J^0)_{1212}^{-1} \lambda_m^2 + (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^2) G_2^{mn} + \right. \\ &\quad \left. ((J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n G_1^{mn} \right] /12 + 5HC_{2323}^0 G_2^{mn}/6 = m_2^{mn}, \end{aligned}$$

решение этой системы используется в вычислениях в разделе 6.

4. Структурные функции исходной пластины

Найдём СФ исходной пластины. Мы построим МСФ-приближения решения ИЗ первого и второго порядка, оставляя в формуле (3) только слагаемые, содержащие нулевые и первые производные деформаций СЗ соответственно; ниже вычислены СФ первого и второго порядка. Отметим, что в силу выбора приближений решения СЗ СФ N_{i33} , N_{i33j} и N_{ij33} не фигурируют в приближениях (1): из кинематических гипотез 3.2, 3.3 и, как следствие, выражений (10) и (13) $e_{33} \equiv 0$, $e_{i3,3} \equiv 0$, поэтому указанные СФ далее вычисляться не будут.

4.1. Первого порядка

Ограничим порядок слагаемых в представлении (3) и выражениях для напряжений и деформаций в исходном теле первым –

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(x_3)v_{k,l}(\vec{x}), \quad (16)$$

запишем первое уравнение рекуррентной системы (5) для случая слоистого материала, свойства которого C_{ijkl} зависят только от поперечной координаты x_3 :

$$[C_{i3k3}N_{kmn,3} + C_{i3mn}]_{,3} = 0, \quad (17)$$

и последовательно получим граничные условия к нему, учитывая вид приближений решения сопутствующей задачи (11) и (14). На лицевых поверхностях Σ_\pm из совпадения граничных условий для исходного и сопутствующего тела следует $\sigma_{i3} \Big|_{\Sigma_\pm}(x_1, x_2, \cdot) = s_{i3} \Big|_{\Sigma_\pm}(x_1, x_2, \cdot)$, что влечёт требование

$$[C_{i3kl}(v_{k,l} + N_{kmn}v_{m,nl} + N_{kmn,l}v_{m,n})] \Big|_{\Sigma_\pm}(x_1, x_2, \cdot) = [C_{i3kl}^0 v_{k,l}] \Big|_{\Sigma_\pm}(x_1, x_2, \cdot). \quad (18)$$

Заметим, что $v_{k,l}$ в обоих рассмотренных приближениях – линейно независимые, отличные от тождественно нулевых (за исключением $v_{3,3}$) функции продольных координат (в силу вида решения (11), (12) или (14), (15)), запишем условие совпадения коэффициентов при $v_{k,l}$ в правой и левой части (18):

$$[C_{i3k3}N_{kmn,3}]_{\Sigma_{\pm}} = [C_{i3mn}^0 - C_{i3mn}]_{\Sigma_{\pm}}$$

Условия на СФ также следуют и из совпадения кинематических граничных условий на рёбрах пластины: на рёбрах $x_1 = 0$, L_1 совпадение

$$u_2(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = v_2(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1}$$

приводит к условию

$$N_{2kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0;$$

$$u_3(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = v_3(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1}$$

– к условию

$$N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0,$$

$$\sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = s_{11}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1},$$

с учётом ортотропии материала – к условию

$$C_{11kl} \left(N_{kmn,l}(x_3)v_{m,n}(\cdot, x_2, x_3) + N_{kmn}(x_3)v_{m,nl}(\cdot, x_2, x_3) \right) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0;$$

на рёбрах $x_2 = 0$, L_2 аналогично

$$N_{1kl}v_{k,l}(x_1, \cdot, x_3) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0,$$

$$N_{3kl}v_{k,l}(x_1, \cdot, x_3) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0.$$

$$C_{22kl} \left(N_{kmn,l}v_{m,n}(x_1, \cdot, x_3) + N_{kmn}v_{m,nl}(x_1, \cdot, x_3) \right) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0.$$

Запишем подробно условие

$$N_{2kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0$$

для $v_i = v_i^F$ (13):

$$\begin{aligned} N_{2kl}v_{k,l}^F = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[G_1^{mn}N_{213} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) + G_2^{mn}N_{223} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) \right] + \\ & \left(-\lambda_m[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn})]N_{211} - \mu_n[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn})]N_{222} \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) + \\ & \left(\mu_n(Y_1^{mn} + x_3 G_1^{mn}) + \lambda_m(Y_2^{mn} + x_3 G_2^{mn}) - 2x_3 \lambda_m \mu_n Y_3^{mn} \right) N_{212} \cos(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) \Big| = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Опуская заведомо нулевые в силу вида решения сопутствующей задачи слагаемые (для ребер $x_1 = 0$, L_1 это – слагаемые, содержащие множитель $\sin(\lambda_m x_1)$, для $x_2 = 0$, L_2 – $\sin(\mu_n x_2)$), получаем пару условий $N_{213}(x_3) \equiv 0$, $N_{212}(x_3) \equiv 0$. Структурные функции зависят от свойств

исходного и сопутствующего тела, но не от значений решения СЗ; при выборе в представлении (19) v_i^K получим аналогично $N_{212}(x_3) \equiv 0$, N_{213} в приближение решения ИЗ, основанное на приближении решения СЗ в рамках теории Кирхгофа, не входит в силу вида перемещений (10). Аналогично из условия $N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) = 0$ имеем $N_{312}(x_3) \equiv 0$, $N_{313}(x_3) \equiv 0$. Совпадение кинематических граничных условий на торцах $x_2 = 0$, $x_2 = L_2$ приводит к парам условий $N_{123}(x_3) \equiv 0$, $N_{112}(x_3) \equiv 0$, $N_{312}(x_3) \equiv 0$, $N_{323}(x_3) \equiv 0$. Из совпадения напряжений в случае ортотропного материала

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\Big|_{x_1=0, L_1}(\cdot, x_2, x_3) &= s_{11}\Big|_{x_1=0, L_1}(\cdot, x_2, x_3), \\ \sigma_{22}\Big|_{x_2=0, L_2}(x_1, \cdot, x_3) &= s_{22}\Big|_{x_2=0, L_2}(x_1, \cdot, x_3)\end{aligned}$$

следует, что $N_{111}(x_3) \equiv 0$, $N_{122}(x_3) \equiv 0$, $N_{211}(x_3) \equiv 0$, $N_{222}(x_3) \equiv 0$.

С учетом уравнений (17) и полученных условий запишем отличные от нуля СФ исходного тела (суммирование по греческим индексам не производится; $\alpha = 1, 2$),

$$\begin{aligned}N_{3\alpha\alpha} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha})/C_{3333} dy + c_{3\alpha\alpha}, \\ N_{\alpha\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3})/C_{\alpha 3\alpha 3} dy + c_{\alpha\alpha 3},\end{aligned}\quad (20)$$

в силу выбора сопутствующего тела (раздел 4) произвольные постоянные $c_{\alpha\alpha 3}$, $c_{3\alpha\alpha}$ выберем такими, что $\langle N_{ikl} \rangle = 0$.

4.2. Второго порядка

В случае применения МСФ второго порядка приближение перемещений (3) принимает вид

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(x_3)v_{k,l}(\vec{x}) + N_{iklm}(x_3)v_{k,lm}(\vec{x}), \quad (21)$$

причём СФ первого порядка N_{ikl} совпадают с найденными в предыдущем разделе 4.1, а СФ второго порядка N_{iklm} подлежат определению из второго уравнения рекуррентной системы (5), в случае слоистого материала последнее принимает вид

$$[C_{i3m3}N_{mkl,3} + C_{i3mi}N_{mkl}],_3 = C_{ii kl}^0 - [C_{ii m3}N_{mkl,3} + C_{ii kl}],$$

и соответствующих граничных условий, которые можно получить по схеме, аналогичной предыдущему разделу – поочередно рассматривая совпадение перемещений и напряжений на границах исходной и сопутствующей пластины. Так, из кинематических условий на рёбрах $x_1 = 0, L_1$ $N_{\alpha klm}v_{k,lm}(\cdot, x_2, x_3) = 0$, $\alpha = 2, 3$, покомпонентная запись этих сумм, аналогичная (19), приводит к выводу $N_{\alpha 111} \equiv 0$, $N_{\alpha 122} \equiv 0$, $N_{\alpha 123} \equiv 0$, $N_{\alpha 133} \equiv 0$, $N_{\alpha 221} \equiv 0$, $N_{\alpha 231} \equiv 0$, $N_{\alpha 331} \equiv 0$, $N_{\alpha 132} \equiv 0$, $\alpha = 2, 3$. На рёбрах $x_2 = 0, L_2$ $N_{\alpha klm}v_{k,lm}(\cdot, x_2, x_3) = 0$, $\alpha = 1, 3$, следовательно, $N_{\alpha 112} \equiv 0$, $N_{\alpha 121} \equiv 0$, $N_{\alpha 123} \equiv 0$, $N_{\alpha 231} \equiv 0$, $N_{\alpha 132} \equiv 0$, $N_{\alpha 222} \equiv 0$, $N_{\alpha 233} \equiv 0$, $N_{\alpha 332} \equiv 0$, $\alpha = 1, 3$.

Кроме того, условия совпадения напряжений $\sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = s_{11}(\cdot, x_2, x_3)$ и $\sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = s_{22}(x_1, \cdot, x_3)$ с учётом ортотропии материала приводят к равенствам $N_{1113} \equiv 0$, $N_{2223} \equiv 0$, $N_{1333} \equiv 0$, $N_{2333} \equiv 0$. Из соображений совпадения коэффициентов при $v_{k,lm}$ в условии совпадения напряжений $\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = s_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2)$ получаем, что

$$\begin{aligned}N_{\alpha\beta\beta\alpha,3}(\pm h/2) &= -N_{3\beta\beta}(\pm h/2), \quad N_{\gamma\gamma\beta\beta,3}(\pm h/2) = -N_{\gamma\gamma\beta}(\pm h/2), \quad \gamma = 1, 2; \\ C_{3333}(\pm h/2)N_{33\alpha\alpha,3}(\pm h/2) &= -C_{33\alpha\alpha}(\pm h/2)N_{\alpha\alpha 3}(\pm h/2).\end{aligned}\quad (22)$$

Следовательно, уравнение для СФ второго порядка можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta\beta\alpha} &= - \int_{-h/2}^{x_3} \int_{-h/2}^y (C_{33\beta\beta}^0 - C_{33\beta\beta})/C_{33\beta\beta} dz + c_{3\beta\beta} dy + c_{\alpha\beta\beta\alpha}, \\ N_{\gamma\gamma\beta\beta} &= - \int_{-h/2}^{x_3} \int_{-h/2}^y (C_{\gamma 3\gamma 3}^0 - C_{\gamma 3\gamma 3})/C_{\gamma 3\gamma 3} dz + c_{\gamma\gamma 3} dy + c_{\gamma\gamma\beta\beta}, \\ N_{33\alpha\alpha} &= - \int_{-h/2}^{x_3} C_{33\alpha\alpha}(y) C_{3333}^{-1}(y) \left[\int_{-h/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3})/C_{\alpha 3\alpha 3} dz - c_{\alpha\alpha 3} \right] dy + c_{33\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (23)$$

аддитивные постоянные аналогично случаю СФ первого порядка определяются из соотношений $\langle N_{ijkl} \rangle = 0$.

5. Явный вид приближений решения исходной задачи

Используя результаты разделов 3 и 4 – найденные приближения решения СЗ и СФ первого и второго порядка – запишем явный вид четырех МСФ-приближений решения ИЗ. Мы рассмотрим МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на приближениях решения сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа и гипотезы типа Тимошенко.

5.1. Приближение первого порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа

Непосредственной подстановкой данных об отличных от нуля структурных функциях первого порядка (20) и соотношения для перемещений сопутствующей пластины (10) в соотношение МСФ первого порядка (16) получаем вид приближения перемещений в исходном теле:

$$\begin{aligned} u_I &= v_I^K = w_I - x_3 w_{3,I}, \\ u_3 &= v_3^K + N_{311} v_{1,1}^K + N_{322} v_{2,2}^K = w_3 + N_{311}(x_3)(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322}(x_3)(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}), \end{aligned}$$

или, с учётом формы решения СЗ (11),

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)(W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. - \mu_n N_{322}(x_3)(W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \end{aligned} \quad (24)$$

отметим, что приближение решения ИЗ, построенное в этом пункте, отличается от приближенного решения СЗ по теории Кирхгофа (11) лишь незначительно: приближения продольных перемещений вовсе совпадают, а поправка, вносимая в поперечное перемещение, невелика, так как порядок поправочных слагаемых $|N_{3\alpha\alpha} w_{\alpha,\alpha}| \lesssim H * |w_\alpha|/L_\alpha$, $|N_{3\alpha\alpha} w_{3,\alpha\alpha}| \lesssim H * |w_3|/L_\alpha^2$, обе оценки сверху в силу ограничения $|H| < |L_\alpha|$ и уравнений (12) малы по сравнению с $|w_3|$.

5.2. Приближение второго порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа

Подставляя найденные СФ первого и второго порядка (20), (23) и вид перемещений (10) в форму МСФ-приближения второго порядка (21), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 - x_3 w_{3,1} + N_{1111}(x_3)(w_{1,11} - x_3 w_{3,111}) + N_{1221}(x_3)(w_{2,21} - x_3 w_{3,122}), \\ u_2 &= w_2 - x_3 w_{3,2} + N_{2222}(x_3)(w_{2,22} - x_3 w_{3,222}) + N_{2112}(x_3)(w_{1,12} - x_3 w_{3,112}), \\ u_3 &= w_3 + N_{311}(x_3)(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322}(x_3)(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}) - N_{3113}(x_3)w_{3,11} - N_{3223}(x_3)w_{3,22}, \end{aligned}$$

а также, с учётом вида решения (11), в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[W_1^{mn} \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111}(x_3) \right) - W_2^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221}(x_3) - \right. & (25) \\ & \left. x_3 W_3^{mn} \lambda_m \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111}(x_3) - \mu_n^2 N_{1221}(x_3) \right) \right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-W_1^{mn} \lambda_m \mu_n N_{2112}(x_3) + W_2^{mn} \left(1 - \mu_n^2 N_{2222}(x_3) \right) - \right. \\ & \left. x_3 W_3^{mn} \mu_n \left(1 - \mu_n^2 N_{2222}(x_3) - \lambda_m^2 N_{2112}(x_3) \right) \right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3) (W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \right. \\ & \quad \left. - \mu_n N_{322}(x_3) (W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_m^2 W_3^{mn} N_{3113}(x_3) + \mu_n^2 W_3^{mn} N_{3223}(x_3) \right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned}$$

5.3. Приближение первого порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка

Запишем последовательно МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на приближении решения СЗ по теории первого порядка (3.3). Результат подстановки СФ первого порядка (20) и перемещений (13) в выражение для МСФ-приближения перемещений (16) –

$$\begin{aligned} u_I &= v_I^F + N_{IJ3}(x_3)(v_{J,3}^F + v_{3,J}^F) = y_I - x_3(y_{3,I} - \gamma_I) + N_{IJ3}(x_3)\gamma_J, \\ u_3 &= v_3^F + N_{311}(x_3)v_{1,1}^F + N_{322}(x_3)v_{2,2}^F = \\ & y_3 + N_{311}(x_3)[y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})] + N_{322}(x_3)[y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})], \end{aligned}$$

или, в терминах тригонометрических рядов с учётом (14),

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn}) + N_{113}(x_3)G_1^{mn} \right) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), & (26) \\ u_2 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn}) + N_{223}(x_3)G_2^{mn} \right) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn})] - \right. \\ & \left. \mu_n N_{322}(x_3)[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn})] \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned}$$

Заметим, что данное приближение продольных перемещений в исходном теле, в отличие от предыдущих, содержит отличные от нуля дополнительные к решению СЗ слагаемые $N_{\alpha\alpha 3}\gamma_\alpha$, которые по порядку сопоставимы с остальными слагаемыми выражений для u_I . Эти слагаемые также важны качественно – они позволяют моделировать зигзагообразную зависимость продольных перемещений от поперечной координаты.

5.4. Приближение второго порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка

Аналогично предыдущим построениям, подставим найденные СФ (20) и (23), и соотношение для перемещений в теории первого порядка (13) в выражение для МСФ-приближения второго порядка (21):

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 - x_3(y_{3,1} - \gamma_1) + N_{113}(x_3)\gamma_1 + N_{1111}(x_3)[y_{1,11} - x_3(y_{3,111} - \gamma_{1,11})] + \\ &\quad N_{1221}(x_3)[y_{2,12} - x_3(y_{3,122} - \gamma_{2,12})], \\ u_2 &= y_2 - x_3(y_{3,2} - \gamma_2) + N_{223}(x_3)\gamma_2 + N_{2222}(x_3)[y_{2,22} - x_3(y_{3,222} - \gamma_{2,22})] + \\ &\quad N_{2112}(x_3)[y_{1,12} - x_3(y_{3,112} - \gamma_{1,12})], \\ u_3 &= y_3 + N_{311}(x_3)[y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})] + N_{322}(x_3)[y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})] + \\ &\quad [N_{3311}(x_3) + N_{3113}(x_3)]\gamma_{1,1} - N_{3113}(x_3)y_{3,11} + [N_{3322}(x_3) + N_{3223}(x_3)]\gamma_{2,2} - N_{3223}(x_3)y_{3,22}, \end{aligned}$$

приведем также результат подстановки вида решения СЗ (14) в данные равенства:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_1^{mn} \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111} \right) - Y_2^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221} - \lambda_m \mu_n G_2^{mn} N_{1221} - \right. & (27) \\ &\quad \left. x_3 Y_3^{mn} \lambda_m \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2 N_{1221} \right) + G_1^{mn} \left(x_3 + N_{113} - \lambda_m^2 x_3 N_{1111} \right) \right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-Y_1^{mn} \lambda_m \mu_n N_{2112} + Y_2^{mn} \left(1 - \mu_n^2 N_{2222} \right) - \lambda_m \mu_n G_1^{mn} N_{2112} - \right. \\ &\quad \left. x_3 Y_3^{mn} \mu_n \left(1 - \mu_n^2 N_{2222} - \lambda_m^2 N_{2112} \right) + G_2^{mn} \left(x_3 + N_{223} - \mu_n^2 x_3 N_{2222} \right) \right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311} (Y_1^{mn} - x_3 \lambda_m Y_3^{mn}) - \mu_n N_{322} (Y_2^{mn} - x_3 \mu_n Y_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_m^2 Y_3^{mn} N_{3113} + \mu_n^2 Y_3^{mn} N_{3223} - \lambda_m G_1^{mn} (x_3 N_{311} + N_{3311} + N_{3113}) - \right. \\ &\quad \left. \mu_n G_2^{mn} (x_3 N_{322} + N_{3322} + N_{3223}) \right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned}$$

Отметим, что все приближения (24)-(27) непрерывны по поперечной координате (в силу непрерывности по ней СФ), а приближения (26) и (27), основанные на решении СЗ по теории первого порядка, позволяют моделировать зигзагообразную форму зависимости перемещений от поперечной координаты.

6. Сопоставление МСФ-приближений с решением исходной задачи по методу Пагано

В этом разделе приведены результаты численного сопоставления четырех вариантов приближений решения задачи о нагружении неоднородной пластины, построенных выше ((24)-(27)), с аналитическим решением данной задачи в трехмерной постановке, полученным N.

Ж. Пагано [33]; последнее и вторичные величины, вычисленные на базе данного решения, далее обозначены верхним индексом P . В качестве модельных взяты пластины, составленные из двух или трех слоев тестового материала, упругие свойства которого задаются соотношениями $E_L = 30E_T$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$, $G_{LT} = 0.5E_T$, $G_{TT} = 0.2E_T$. Модельные пластины подвергнуты тестовой нагрузке $q_3^+ = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$, q_0 – константа, $q_1^\pm \equiv 0$, $q_3^- \equiv 0$. В скрипте на языке Python 3 реализованы четыре описанных выше варианта приближений параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) модельной пластины – первое и второе приближение на базе решений СЗ в рамках классической теории пластин и теории пластин первого порядка, а также решение по методу Пагано; параметры НДС пластины вычислены в нормализованном виде,

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3) = 100H^3 * E_T * u_i(x_1, x_2, x_3)/(L_1^4 * q_0),$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3) = H * \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)/(L_1^2 * q_0),$$

ниже без ограничения общности мы полагаем, что $L_1 \leq L_2$. Константы, входящие в приближения решения СЗ (11) и (14), определялись путём решения систем (12) и (15) соответственно. Для ряда примеров компоновки пластин построены графики, на которых изображены эпюры $\bar{u}_1(x_3)$ в точке $x_1 = 0$, $x_2 = L_2/2$, $\bar{\sigma}_{11}(x_3)$ в точке $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_2/2$, при фиксированном значении H/L_1 . На всех построенных графиках прерывистой линией обозначена граница фаз композиционного материала.

6.1. Трёхслойная сэндвич-панель композиции $[-h/2, -h/6, h/6]$, $L_1 = L_2$

Для квадратной трехслойной сэндвич-панели с соотношением размеров $H/L_1 = 1/5$ приведём (Рис. 1) эпюры перемещения \bar{u}_1 и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, вычисленные по приближенным формулам, а также по методу Пагано. Заметим, что в этом, как и в нижеследующих случаях, слагаемые, содержащие СФ второго порядка, оказывают малое влияние на вычисленные величины, поэтому МСФ-приближения первого и второго порядка визуально неотличимы.

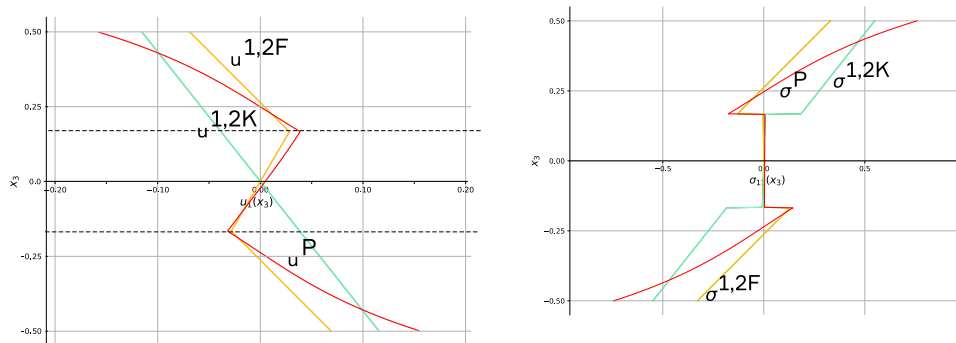


Рис. 1: Зависимость от толщины перемещения \bar{u}_1 при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной трехслойной сэндвич-пластине, составленной из слоев равной толщины, с соотношением толщины к линейному размеру 1/5; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

6.2. Трёхслойная пластина композиции $[-h/2, -h/6, 0]$, $L_1 = L_2$

Построим (Рис. 2) аналогичные предыдущему разделу эпюры для асимметричной по толщине трёхслойной пластины.

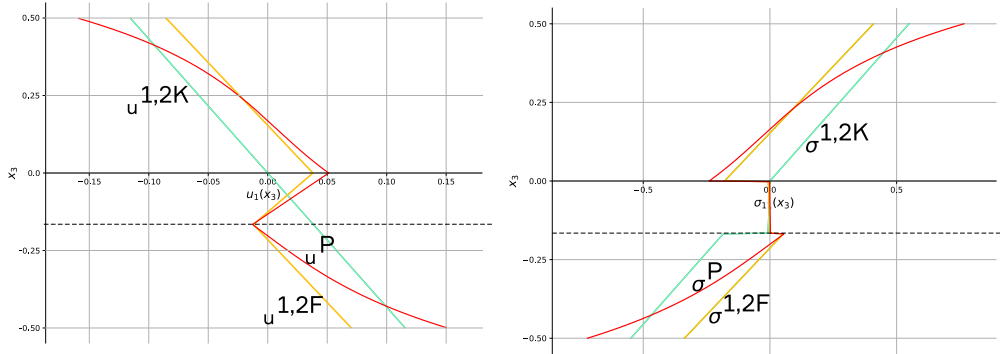


Рис. 2: Зависимость от толщины перемещения \bar{u}_1 при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной трёхслойной пластине, составленной из слоёв толщины $h/3$, $h/6$, $h/2$, с соотношением толщины к линейному размеру $1/5$; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

6.3. Двухслойная пластина композиции $[-h/2, -h/6]$, $L_1 = L_2$

Построим (Рис. 3) аналогичные предыдущему разделу эпюры для двухслойной пластины. Построенные примеры иллюстрируют общую применимость МСФ в данной задаче, однако

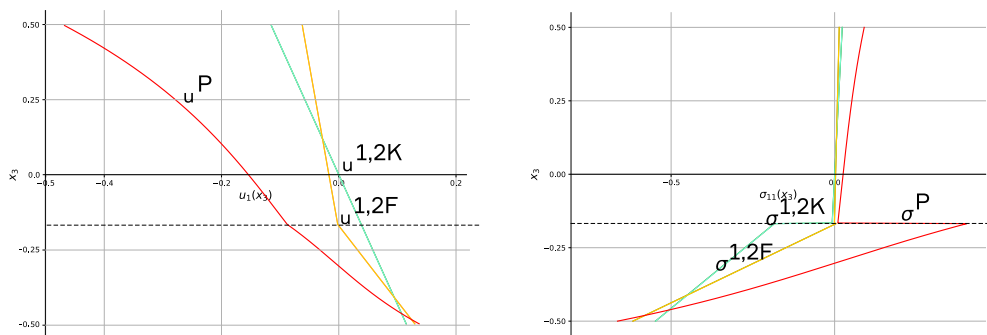


Рис. 3: Зависимость от толщины перемещения \bar{u}_1 при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной двухслойной пластине, составленной из слоёв толщины $h/3$, $2h/3$, с соотношением толщины к линейному размеру $1/5$; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

показывают, что для точного моделирования поведения сравнительно толстых пластин (с $H/L \approx 5$) требуется более точное приближение решения сопутствующей задачи.

Заключение

Данная работа посвящена применению метода структурных функций к решению квазистатической задачи теории упругости в перемещениях для неоднородного тела. Метод структурных функций основан на соотношении, представляющем перемещения в неоднородном теле в виде взвешенной суммы производных деформаций в однородном теле идентичной геометрии, подвергнутом идентичным нагрузкам, называемом сопутствующим; коэффициенты этой суммы называют структурными функциями; таким образом, помимо задачи для неоднородного тела, называемой исходной, рассматривается аналогичная задача для однородного тела, называемая сопутствующей.

В настоящей работе использовано приближение первого (включающее слагаемые, содержащие деформации сопутствующего тела) и второго порядка (включающее слагаемые, содержащие первые производные деформаций сопутствующего тела по координате). Метод структурных функций применен к задаче о квазистатическом нагружении прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины, упругие свойства которой зависят только от поперечной координаты; пластина составлена из слоёв линейно-упругих, ортотропных материалов. Использован вариант метода структурных функций, предполагающий последовательное определение решения сопутствующей задачи и структурных функций.

Рассмотрены два варианта приближенного решения сопутствующей задачи разной точности – классическое приближение по теории Кирхгофа-Лява и приближение по теории пластин первого порядка, основанной на гипотезе типа Тимошенко. Вычислены структурные функции первого и второго порядка неоднородной пластины. Получены явные формулы для всех четырех приближений перемещений в исходном теле – приближений первого и второго порядка, действующих решение сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа, и приближений первого и второго порядка, действующих решение сопутствующей задачи в рамках теории пластин первого порядка. Данные приближения численно сопоставлены с решением трехмерной задачи теории упругости, полученным известным методом Пагано. Приближения, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка, демонстрируют удовлетворительную точность, наиболее эффективно в рассмотренных примерах приближение по методу структурных функций первого порядка, действующее решение сопутствующей задачи по теории пластин первого же порядка (поправка, вносимая структурными функциями второго порядка, в этом случае оказывается невелика по сравнению с характерным масштабом величин), однако в случае сравнительно толстых пластин представляется необходимым привлечение приближения решения сопутствующей задачи, более точно описывающего поперечные деформации. Кроме количественного совпадения, приближение по методу структурных функций, действующее решение сопутствующей задачи по теории пластин первого порядка, позволяет моделировать зигзагообразную зависимость перемещений от поперечной координаты, что является важной качественной особенностью кинематики слоистой пластины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел // Вычислительная механика. — 1991. — № 2. — С. 61–76.
2. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости. Диссертация доктора физико-математических наук. МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 1991. 395 с.
3. Горбачев В.И., Кокарев А.С Интегральная формула в динамической задаче неоднородной упругости // Вестник МГУ. № 2. 2005. С. 62-66.

4. Gorbachev V. I. Integral formulae in the coupled problem of the elasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (English translation of Prikladnaya Matematika i Mekhanika). — 2014. — Vol. 78, no. 2. — P. 192–208.
5. Емельянов А. Н. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — № 1. — С. 40–45.
6. Горбачёв В. И. Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 3. — С. 209–233.
7. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of a straight bar of variable rigidity // Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, no. 4. — P. 645–655
8. Gorbachev V. I., Olekhova L. V. Effective properties of a nonuniform beam under torsion // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2007. — Vol. 62, no. 5. — P. 123–130.
9. Горбачёв В. И. О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — № 2. — С. 48–54
10. Gorbachev V. I. Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies // Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 55, no. 3. — P. 396–402
11. Горбачев В. И., Гулин В. В. Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине, анизотропной полосы // Композиты и наноструктуры. — 2021. — Т. 13, № 3-4. — С. 120–126
12. Соляев Ю. О., Горбачев В. И. Сопоставление методов Мори-Танака и Горбачева-Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 57–75.
13. Kirchoff G. Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik. — 1877.
14. Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. — CRC press, 2006.
15. Kienzler R., Shneider P. Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Structures: Theory and Applications. — 2013. — Т. 3. — С. 109–112.
16. Hencky H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten', Ing. — 1947.
17. Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates // Mechanics Research Communications. — 1980. — Т. 7. — №. 6. — С. 343–350.
18. Stephen N. G. Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity // Journal of Sound and Vibration. — 1997. — Т. 202. — №. 4. — С. 539–553.
19. Vassiliev V.V, Lurie S.A. On refined theories of beams, plates & shells // J. of Composite Materials, 1992, Vol. 26, No 4.
20. Васильев В.В, Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин // Известия АН СССР, МТТ, 1990, № 2. — С. 158–167

21. Mechab B., Mechab I., Benaissa S. Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading //Composites Part B: Engineering. – 2012. – Т. 43. – №. 3. – С. 1453-1458.
22. Tovstik P. E. Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate //Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2019. – Т. 52. – №. 1. – С. 112-121.
23. Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores //Journal of Vibroengineering. – 2014. – Т. 16. – №. 7. – С. 3260-3272.
24. Hadavinia H. et al. Deriving shear correction factor for thick laminated plates using the energy equivalence method //Structural Durability & Health Monitoring. – 2006. – Т. 2. – №. 4. – С. 197.
25. Altenbach, H., and Eremeyev, V. A., On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams // Acta Mechanica, vol. **204**, no. 3, pp. 137-154, 2010.
26. Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic plates*, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, 1968.
27. Ambartsumian S. A. Theory of anisotropic plates: strength, stability, vibration. – Technomic Publishing Company, 1970.
28. Vlasov B. F. On the equations of bending of plates (in Russian) //Doklady Akademii Nauk Azerbeijanskoi SSR. – 1957. – Т. 13. – №. 9. – С. 955-959.
29. Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. – 1986.
30. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек //Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2005. – Т. 11. – №. 2. – С. 439-448.
31. Si J., Zhang Y. An enhanced higher order zigzag theory for laminated composite plates under mechanical/thermal loading //Composite Structures. – 2022. – Т. 282. – С. 115074.
32. Lezgy-Nazargah M., Salahshuran S. A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate //Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2018. – Т. 18. – №. 3. – С. 818-832.
33. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates //Journal of composite materials. – 1970. – Т. 4. – №. 1. – С. 20-34.
34. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates //Composite structures. – 2000. – Т. 50. – №. 2. – С. 183-198.
35. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking //Archives of Computational Methods in Engineering. – 2003. – Т. 10. – №. 3. – С. 215-296.
36. Filippi M., Carrera E., Valvano S. Analysis of multilayered structures embedding viscoelastic layers by higher-order, and zig-zag plate elements //Composites Part B: Engineering. – 2018. – Т. 154. – С. 77-89.
37. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – 1984.
38. Горбачёв В. И., Кабанова Л. А. О постановке задач в общей теории пластин Кирхгофа-Лява // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 3. — С. 43-50.

39. Kabanova L. A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 7. — P. 1628–1639.

REFERENCES

1. Gorbachev V. I. 1991. “Green’s tensors method for solution of boundary value problem of nonhomogeneous elasticity“, *Vychislitel’naya mekhanika* [in Russian], vol. 2, p. 61–76.
2. Gorbachev V. I. 1991. “A variant of the averaging method for solving boundary value problems of inhomogeneous elasticity“, Doctor of Science thesis, Lomonosov MSU, 395 pp.
3. Gorbachev, V. I., Kokarev, A. S. 2005. “Integral formula in dynamical problem on inhomogeneous elasticity“, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* [in Russian], vol. 2, 62-66.
4. Gorbachev V. I. 2014. “Integral formulae in the coupled problem of the 4elasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials“, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (English translation of Prikladnaya Matematika i Mekhanika)*, vol. 78, no. 2., p. 192–208.
5. Emel’yanov, A.N. 2015. “Effective material functions of laminated composites in the linear moment theory of elasticity“, *Moscow Univ. Mech. Bull.* vol. 70, no.1, pp. 8–12
6. Gorbachev, V. I. 2017. “Integral formulas of solutions of the basic linear differential equations of mathematical physics with variable factors“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 3, 210-234.
7. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. 2011. “Stability of a straight bar of variable rigidity“, *Mechanics of Solids*, vol. 46, no. 4., pp. 645–655.
8. Gorbachev V. I., Olekhova L. V. 2007. “Effective properties of a nonuniform beam under torsion“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 62, no. 5, pp. 123–130.
9. Gorbachev V. I. 2017. “Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 72, no. 2., pp. 48–53.
10. Gorbachev V. I. 2020. “Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies“, *Mechanics of Solids*, vol. 55, no. 3, pp. 396–402.
11. Gorbachev V. I., Gulin V. V. 2021. “Exact solutions of some problems of the theory of elasticity on the equilibrium of an anisotropic inhomogeneous band“, *Kompozity i nanostruktury*, vol. 13, no. 3-4, pp. 120–126
12. Solyaev Y. O., Gorbachev V. I. 2019 “Omparison between Mori-Tanaka and Gorbachev-Pobedrya methods in the problem of determination of the effective properties of composites with piezoelectric spherical inclusions“, *Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij* [in Russian], vol. 25, no. 1, pp. 57–75.
13. Kirchoff G. 1877. “Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik“.
14. Reddy J. N. 2006. “Theory and analysis of elastic plates and shells“, *CRC press*.
15. Kienzler R., Shneider P. 2013. “Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation“, *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 3, pp. 109-112.

16. Hencky H. 1947. "Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten", Ing.
17. Levinson M. 1980. *An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates*, *Mechanics Research Communications*, vol. 7, no. 6, pp. 343-350.
18. Stephen N. G. 1997. "Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 202, no. 4, pp. 539-553.
19. Vassiliev V.V, Lurie S.A. 1992. "On refined theories of beams, plates & shells", *J. of Composite Materials*, vol. 26, No 4.
20. Vassiliev V.V, Lurie S.A. 1990. "On the problem of constructing non-classical theories of plates", *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 2., pp. 158-167
21. Mechab B., Mechab I., Benaissa S. 2012. "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading", *Composites Part B: Engineering.*, vol. 43, no. 3, pp. 1453-1458.
22. Tovstik P. E. 2019. "Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 52, no. 1, pp. 112-121.
23. Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. 2014. "Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores", *Journal of Vibroengineering*, vol. 16, no. 7, pp. 3260-3272.
24. Hadavinia H. et al. 2006. "Deriving shear correction factor for thick laminated plates using the energy equivalence method", *Structural Durability & Health Monitoring.*, vol. 2, no. 4, pp. 197.
25. Altenbach, H., and Eremeyev, V. A. 2010. "On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams", *Acta Mechanica*, vol. 204, no. 3, pp. 137-154.
26. Lekhnitskii, S. G. 1968. "Anisotropic plates", *Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh.*
27. Ambartsumian S. A. 1970. "Theory of anisotropic plates: strength, stability, vibration", *Technomic Publishing Company.*
28. Vlasov B. F. 1957. "On the equations of bending of plates" (in Russian), *Doklady Akademii Nauk Azerbejanskoi SSR*, vol. 13, no. 9, pp. 955-959.
29. Murakami H. 1986. "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses".
30. Grigolyuk E. I., Kulikov G. M. 2005. "Development of the Theory of Elastic Multilayered Plates and Shells", *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 11, no. 2, pp. 439-448.
31. Si J., Zhang Y. 2022. "An enhanced higher order zigzag theory for laminated composite plates under mechanical/thermal loading", *Composite Structures*, vol. 282, p. 115074.
32. Lezgy-Nazargah M., Salahshuran S. 2018. "A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 3, pp. 818-832.
33. Pagano N. J. 1970. "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *Journal of composite materials*, vol. 4, no. 1, pp. 20-34.
34. Carrera E. 2000. "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates", *Composite structures*, vol. 50, no. 2, pp. 183-198.

35. Carrera E. 2003. “Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking“, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 215-296.
36. Filippi M., Carrera E., Valvano S. 2018. “Analysis of multilayered structures embedding viscoelastic layers by higher-order, and zig-zag plate elements“, *Composites Part B: Engineering*, vol. 154, pp. 77-89.
37. Pobedrya B. E. 1984. “Mechanics of composite materials“, *Izd. Mosk. Univ., Moscow.*
38. Gorbachev V. I., Kabanova L. A. 2018. “Formulation of problems in the general Kirchhoff—Love theory of inhomogeneous anisotropic plates“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 73, no. 3, pp. 60–66.
39. Kabanova L. A. 2022. “The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem“, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 7, pp 1628–1639.

Получено: 18.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 903.05:669.053

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-233-250

История зарождения и развития металлургической отрасли и ее влияние на мировую промышленность

А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов

Кубанова Анастасия Николаевна — младший научный сотрудник, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kubanovaan@tspu.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Протопопов Евгений Александрович — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: pea_12@mail.ru

Аннотация

В статье раскрыты основные этапы зарождения металлургии и становления металлургической отрасли в мире. Освещены местоположения крупных металлосодержащих богатств в различные времена и их влияние на разделение народов на производителей металлов и их потребителей. Показана тесная связь развития металлургии и экономики отдельно взятых стран в целом. Объяснено развитие металлургии в зависимости от человеческой культуры и быта в отдельно взятое время и на определенном местоположении. Освещена тесная связь развития металлургической отрасли и военного дела в различных странах. Рассмотрено поэтапное развитие металлургии от частных мануфактур до крупных железорудных комбинатов среди крупных стран-производителей металлов и сплавов. Показано влияние развития и распространения металлургических процессов на модернизацию экономических аспектов промышленности. Освещены первые разработки в области легирования сплавов, термической и механической обработки готовых металлических изделий, а также переработки отходов металлургического производства. В статье приводятся основные факторы по определению оптимальности местоположения для строительства металлургического производства.

Ключевые слова: история металлургии, экономика, технологические процессы металлургии, развитие экономики, развитие металлургии.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кубанова. История зарождения и развития металлургической отрасли и ее влияние на мировую промышленность // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 233–250.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 903.05:669.053

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-233-250

The history of the conception and development of the metallurgical industry and its impact on the global industry

A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov

Kubanova Anastasia Nikolaevna — junior researcher, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kubanovaan@tspu.ru

Gvozdev Aleksander Evgenyevich — doctor of technical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Protopopov Evgeny Aleksandrovich — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: pea_12@mail.ru

Abstract

The main stages of the conception of metallurgy and the formation of the metallurgical industry in the world are disclosed in the article. The locations of large metal-containing wealth at different times and their influence on the division of peoples into metal producers and their consumers are shown. The close relationship between the development of metallurgy and the economy of individual countries as a whole is shown. The development of metallurgy depending on human culture and life at a particular time and at a particular location is explained. The close relationship between the development of the metallurgical industry and military affairs in various countries is illustrated. The stage-by-stage development of metallurgy from private manufactories to large iron ore plants among the major countries producing metals and alloys is considered. The influence of the development and spread of metallurgical processes on the modernization of the economic aspects of the industry is shown. The first developments in the field of alloying alloys, thermal and mechanical processing of finished metal products, as well as the processing of waste from metallurgical production are illustrated. The main factors for determining the optimal location for the construction of metallurgical production are given in the article.

Keywords: history of metallurgy, economics, technological processes of metallurgy, economic development, development of metallurgy.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, 2022, “The history of the conception and development of the metallurgical industry and its impact on the global industry”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 233–250.

1. Введение

Металлургия однозначно относится к одной из древнейших областей науки и техники. В свою очередь, металлургическое производство, без сомнения, является одной из составных открытий, много тысячелетий назад кардинально изменивших мир. Так, например, во времена

бронзового века и особенно после его завершения, развитие населения было напрямую связано со способностью человека находить металлосодержащие минералы, осуществлять их выплавку и с применением искусства обработки изготавливать различные металлические предметы быта. Даже в основе так называемых «постиндустриальных» цивилизаций лежат именно металлы и учения о них, поскольку ни одна отрасль и технология и по сей день не может обойтись без металлургии.

Стоит отметить, что появление и развитие тенденций и общего стремления большинства современных стран к росту производительности труда тесно связано с металлургическим производством, а именно с приобретением умения людей выплавлять металл из руды с целью изготовления орудий. Ведь, абсолютно логично и ясно, что даже мягкие металлы, например, медь и ее сплавы наиболее пригодны по сравнению с камнем или костью для изготовления целевых предметов быта.

Как правило, именно по значительному уровню развития металлургии на протяжении веков определялся общий уровень развития страны. Становление современных уровней и объемов металлургического производства происходило в течение многовекового периода, в течение которого в первую очередь разрабатывались новые технологические аспекты для получения и обработки ранее неиспользуемых металлов и сплавов.

2. Зарождение и развитие металлургической промышленности

Развитие металлургии несомненно связано с распределением и распространением металлосодержащих минеральных богатств на нашей планете, что в свою очередь обусловило международное разделение труда между целыми государствами. Так, в зависимости от наличия или отсутствия полезных металлосодержащих ископаемых, народы планеты Земля автоматически разделились на две группы, а именно на:

- производителей металлов и сплавов на их основе;
- потребителей сырьевых и готовых металлических компонентов и продуктов соответственно.

Данное глобальное разделение человеческих сообществ с древних времен сыграло колоссальную роль в восхождении целых государств к структурам и быту современного мира [1].

Впервые столкнувшись с металлами и поняв для себя потенциальные возможности их применения, древние сообщества приоткрыли завесу ранее неведомой тайны. В то время они рассуждали, что неживая окружающая человека природа способна кардинально менять свою суть и облик. Это подтверждается тем фактом, что из зеленого ничем не примечательного хрупкого камня, взятого как естественный результат деятельности окружающей природы, человек при помощи применения огня смог получить тяжелое вещество красного цвета – медь, чьи самородки и по сей день встречаются крайне редко. Все это побуждало к рассуждению и обуславливало человеческие мысли о существовании неподвластных могучих сил, которым подчинены скрытые от глаз и неисчерпаемые подземные богатства. Только избранные мастера среди человеческого сообщества обладали даром вступать в контакт с таинственными минералами, подвергая их различным видам термической и механической обработок. Секреты металлов, обнаруженные в ходе проведения обработок, строго охранялись от чужих глаз даже внутри одного сообщества. Разработанные технологии плавки и термомеханической обработки, представляющие особую ценность, тщательно скрывались мастером за «семью печатями». Стихия огня играла одну из самых важных ролей в обработке сырьевых минералов, за счет чего древними сообществами относилась к числу сверхъестественных сил. Исключительно умельцам и мастерам отводилась роль управления данной стихией, что послужило началом зарождения будущей общемировой металлургической отрасли [2].

Металлурги древности, впрочем, как и все производство металлов тех лет, столкнулись с

очень трудными технологическими задачами. Уже тогда главной целью мастеров металла была разработка технологий плавки, литья,ковки, термической обработки для получения всевозможных изделий из разнообразных металлов подходящего качества. Логично предположить, что также подтверждено ранними находками, датируемое производство которых составляет тысячелетия до н.э., что первыми металлами будущей металлургической отрасли являлись материалы, встречающиеся в природе в виде самородков, например золото, серебро, медь или метеоритное железо [2].

Для определения корректной последовательности развития металлургической промышленности чрезвычайно важно правильно сопоставить причины и следствия, для избежания ряда досадных ошибок в оценках долгой истории металлургического производства. Ярче всего и потому проще начать данное сопоставление с истории развития металлургии в Евразии и Южной Америке.

3. Зарождение металлургии в Старом Свете

Еще в X-VI тысячелетиях до н.э. человечество разработало и освоило процесс извлечения металлов из руд. Учитывая примитивный по сегодняшним меркам используемый тепловой агрегат того времени – костер, позволяющий получать температуру на уровне 600-700°C, процесс извлечения был доступен только для легкоплавких металлов [3].

Одним из первых металлов, который открыл для себя человек порядка 10 тыс. лет назад, являлась медь. Это было установлено посредством археологического открытия в Юго-Восточной Анатолии очень древнего поселения периода докерамического неолита. Данное открытие однозначно поразило археологов своей примечательно сложной каменной архитектурой, столь неожиданно обнаруженной для производства того раннего времени. Среди поразительных каменных руин археологи обнаружили неисчислимое количество мелких кусочков меди и осколков ее минерала – малахита. Некоторые из найденных осколков были обработаны в форму удивительных сферических бусин.

Подобное открытие повторилось и на юге Центральной Анатолии, где учеными было найдено множество медных украшений, датированных 8-м тысячелетием до н.э. Немного позднее такие металлы, как медь и свинец, были обнаружены и в Северной Месопотамии. Однако, стоит отметить, что металлургическое производство не получило повсеместного развития в анатолийско-переднеазиатских областях, несмотря на наличие металлосодержащих минеральных ресурсов меди и свинца. Более того, с помощью археологических раскопок выявлена стагнация местной металлодобычи и металлообработки, продолжавшаяся порядка четырех тысяч лет [4].

Вопреки всем предпосылкам и ожиданиям, настоящая эра металлов появилась в 5-ом тысячелетии до н.э. на северо-западе Евразии, а именно на Балканском п-ове и в Карпатском бассейне [5]. Возникшая Балкано-Карпатская металлургическая провинция так же основывалась на меди. В качестве подтверждения данного факта до наших времен сохранились такие удивительные архитектурные памятники, датированные 5-ым тысячелетием до н.э., как: Варненский «золотой» некрополь и громадный медный рудник Айбунар. Еще до археологического открытия Варненского некрополя, исследователи обратили внимание на поразительно разнообразное и многочисленное тяжелое медное оружие, произведенное в появившейся Балкано-Карпатской провинции. Было также найдено множество массивных орудий, включая разнообразные типы топоров. Столь колоссальное разнообразие и количество массивных изделий позволило ученым сделать вывод об едва ли не одночастном освоении жителями Балкано-Карпатской провинции технологий изготовления крупногабаритных металлических изделий сложных форм. Таким образом, можно заметить на удивление очень стремительное развитие металлургического производства на Северных Балканах и в Карпатском бассейне.

Напрашивается вывод что, в то время как металлургия Анатолии 4 тысячелетия пребывала в технологической стагнации металлургического производства, на Балканах и Карпатах данная отрасль переживала невиданный и неожиданный взлет [6]. Подобный парадокс, возможно, объясняется запретом внутренней культуры, которая могла интерпретировать появление новых технологических принципов нарушением нормативной системы предписаний Анатолии. Внутренняя культура Балкано-Карпатской провинции, наоборот, могла кардинально отличаться от принятой Анатолийской, как в общем, так и в частности применительно к целевой направленности металлургического производства. Однако, стоит отметить, что первичные навыки получения и обработки металлов могли проникнуть на Балканы именно из соседней Анатолии, породив яркую вспышку зарождения и развития металлургии в этих местах. Однако, как ни странно, даже с учетом неожиданного и невиданного до тех лет взлета развития металлургической отрасли, в культуре малоазийских нагорий и аридных северо-месопотамских степей ничего не изменилось.

4. Развитие металлургии в Новом Свете

Металлургическое производство Нового Света радикально отличалось от металлургических технологий Старого Света [5]. Это связано с тем, что в Южной Америке медь и сплавы на ее основе никогда не играли первостепенную роль. Они служили лишь дополнением к изделиям из драгоценных камней. Для данной территории основным драгоценным металлом являлось золото, появившееся на три тысячелетия позднее развития металлургии меди. Стоит отметить, что все развитие металлургической отрасли Нового Света было направлено только на создание разнообразной технологически сложной социально-религиозной символики. Творчество местных металлургов обуславливалось причудливым орнаментом и фантастическими формами изделий. Создание столь невероятных для тех времен изделий аргументировалось высокотехнологичной обработкой металлов и сплавов. Если в Евразии символом древней металлургии стал Варненский «золотой некрополь», то в Южной Америке апофеозом металлургического производства можно считать некрополь Сипан в Перу [7]. Удивительная конструкция пирамид-усыпальниц сохранила до наших времен тысячи разнообразных изделий из драгоценных металлов и сплавов, в том числе сложнхимические сплавы золото-медно-серебряной системы. Данный некрополь можно по праву считать символом металлургии Южной Америки тех лет, основанной на разработке технологий обработки драгоценных металлов и сплавов. Однако, за 3 тыс. лет развитие металлургической отрасли в области драгоценных металлов в Южной Америке не претерпело значительных изменений, так и оставаясь ценным лишь для достижения утилитарных целей.

Во времена бронзового века, включая средне-бронзовый период, металлургическая отрасль активно развивалась в сторону драгоценных и полудрагоценных металлов (золото, серебро, бронза). Это подтверждается многочисленными находками в огромном регионе площадью более 4 млн км², расположенного на современной территории от Восточной Европы до Кавказа, называемого во времена бронзового века как Циркумпонтийская провинция [8]. Данные находки свидетельствуют о применении драгоценных и полудрагоценных металлов (с преобладанием золота в общей массе изделий) в религиозной сфере (изделия для погребения, украшения некрополей царской знати) и предметах быта, например, топоры, крюки и т.д., сделанные из мышьяковых бронз.

Однако, быстрое и колоссальное по масштабам развитие металлургии драгоценных и полудрагоценных металлов бронзового века достаточно быстро пошло на спад. Стоит отметить [8], что исчезновение технологий того времени по обработке драгоценных металлов напрямую связано с географическими алгоритмами, а именно с отсутствием их распространения. Вследствие этого за распадом Циркумпонтийской провинции золото, серебро и бронза исчезают с

ее безграничных просторов, что позволяет сделать вывод о том, что не только южноамериканским культурам была присуща иррациональная доминанта в металлургии.

Крупные центры металлургической отрасли так же зарождались и на азиатских просторах Евразии. Так, например, металлургическое производство Китая, специализирующееся на изготовлении изделий из бронзы, получила широкое развитие на протяжении 7 в. до н.э. – 5 в. н.э. Изделия мастеров древнекитайской металлургии можно разделить на два абсолютно противоположных направления, отличающихся друг от друга по областям применения готовых изделий, их форме и стилю [9]. К первому типу изделий относился комплекс предметов быта и ритуально-мифологической сферы: многочисленные сосуды, котлы, шкатулки и т.п. Они были искусно украшены причудливым орнаментом, фантастическими узорами, сказочными изображениями существ древней мифологии, напоминающих образцы южноамериканских древних находок металлургического производства. Это связь найденных предметов искусства разных культур и географического происхождения в первую очередь имеет экзистенциальный подтекст, обоснованный устремлением различных обществ того времени удовлетворить свои духовные потребности в ритуальной сфере. Ко второму типу изделий древнекитайской металлургии в преобладающем большинстве относятся оружие и орудия: различные виды кинжалов, чеканы с украшенными лезвиями, сложные по форме наконечники копий, первые боевые металлические колесницы с конской упряжью.

Стоит заметить, что металлургическое искусство Древнего Китая являлось одной из причин «противостояния» и споров таких направлений древнекитайского нормативизма как конфуцианство и легисты. Первые считали кощунством заимствование идей и достижений в области разработанных технологий производства металлических изделий от чужих культур. Вторые же, напротив, рационально рассуждая и стремясь к формированию мощного защищенного государства, стали основоположниками металлургической отрасли Китая, первостепенное место в которой занимало производство оружия [5].

5. Развитие «железного века»

Основоположниками производства железа и сплавов на его основе в мире считаются древние племена кельтов, упоминания о деятельности которых датируются периодом X в. до н.э. по X в. н.э. Металлургия железа занимала одну из основных ролей в их экономической жизни наряду с земледелием и скотоводством. Именно в то время начинают проследиваться основные аспекты разделения труда, становление специализаций мастеров, появление и развитие ранее неизвестных технологий, а также первые положительные опыты в области термической обработки (науглероживание железа) и горячей деформации (ковка). Все это позволяло на постоянной основе повышать качество получаемых изделий и поднимать общую производительность труда [10].

Достаточно продолжительное время железные изделия кельтов оставались непревзойденными, что подтверждается находками на территории Швейцарии, датированными разными веками. Стоит отметить, что дальнейшее глобальное развитие металлургия железа получила уже в руках римлян и германцев, которые, будучи соседями кельтов, переняли и даже превзошли своих учителей. Проследивается становление нового веяния в металлургической отрасли, а именно, металлургия железа и его сплавов, применяемых преимущественно для получения предметов военной сферы. Именно вышеуказанные народы впервые разработали технологии литья сплавов на основе железа (чугуна) в специально сконструированные формы.

Интенсивное развитие металлургии железа позволило достичь уровня небольших частных мануфактур, производящих товары, как для собственных нужд, так и для продажи. Приобретя необходимый опыт мастера-металлурга тех времен научились получать сталь помимо ковкого железа за счет правильной корректировки технологических параметров. Наряду с

развитием технологий неуклонно развивались и подходы к конструированию основного производственного оборудования. Так, ориентировочно в XV веке сыродутный горн сменили домины, позволяющие тщательно контролировать процесс плавления и литья жидкого металла на основе железа. Это позволило перейти от одностадийного процесса руда – железо к двухстадийной цепочке производства руда – чугун – сталь, что в свою очередь позволило освоить производство листовых и сортовых изделий из сплавов на основе железа [10].

Конечно все это напрямую коррелировалось с развитием военной сферы. Активно развивается литье военных орудий (пушки, снаряды), усовершенствуется огнестрельное оружие. Данное развитие неуклонно отражалось на экономике целых государств. Так, например, Англия, благодаря широкому освоению и распространению металлургических производств полного цикла, осуществляла обширную торговую кампанию с соседствующими странами. Учитывая исчерпаемые ресурсы, необходимые для металлургического производства, зарождаются обширные межгосударственные кооперационные связи для обеспечения заготовительного производства сырьевыми материалами, рабочей силой, технологическими агрегатами. Одновременно издаются законоположения, особенно в ряде стран – поставщиков сырья, регулирующих добычу и вывоз полезных ископаемых [11].

Вплоть до начала XVIII в. металлургия железа активно развивалась в области термической обработки и нанесения различных функциональных покрытий. Издаются одни из первых печатных работ, повествующих о технологических процессах производства сплавов на основе железа, их различных технологий постобработки (графитизация чугуна, цементация стали). Так, в Дрездене и Лейпциге в 1734 г. издается первая фундаментальная учебно-справочная книга по металлургии железа – «De ferro», являющаяся первым учебником и справочником по металловедению чугуна и стали [10]. Стоит заметить, что автор данного издания – Эмануэль Сведенборг – являлся членом Петербургской Академии наук и еще при жизни Петра I занимался развитием металлургии в России.

Однако, мировые темпы развития металлургической отрасли сильно сдерживались естественным фактором - недостатком топлива, которым являлась древесина. Учитывая широкий спрос на древесину в таких областях, как кораблестроение и гражданское строительство, первоочередной задачей металлургической отрасли стала замена древесного угля каменным углем. Естественным путем это отразилось на развитии геологии, а именно поиска и освоения залежей каменноугольного сырья, из которого путем термической обработки получали новый вид топлива – кокс, применяемый и по сей день в качестве основного компонента шихты для производства чугуна. Конечно же, изменение исходного материала привело к необходимости пересмотра технологических процессов и конструированию новых производственных установок. Первые записи результатов экспериментов подбора параметров технологического процесса с каменным углем, сделанные Абрахамом Дерби в 1716–1717 гг., гласят: «На каждые 5 корзин каменноугольного кокса, 2 корзины древесного угля и 1 корзина торфа обеспечивают нормальную работу доменной печи» [10].

Неуклонное развитие модернизации технологии в сторону максимального перехода на коксовое (каменноугольное) топливо вплоть до 1763 г. отразилось на широкомасштабной прокладке дощатых мостовых, обеспечивающих транспортировку исходных компонентов к чугунолитейным заводам. Позднее, с целью улучшения качества и количества транспортировки, а также увеличения срока службы дорожного полотна, стали применяться чугунные рельсы, по которым лошади тянули вагонетки с сырьем. Стали активно развиваться проектирование и строительство железных дорог, и железнодорожного транспорта в целом, что в свою очередь напрямую отразилось на росте спроса на железные рельсы. Только в Англии в течение 1800-1860 гг. выплавка чугуна была увеличена со 100 тыс. тонн до 2 млн тонн, что являлось абсолютным мировым рекордом того времени среди остальных стран, занимающихся металлургической промышленностью.

С целью получения более пластичного материала, но с сохранением прочности, на постоян-

ной основе проводились многочисленные эксперименты по разработке технологий получения стали из чугуна. Были разработаны такие процессы, как Мартеновский (Эмиль и Пьер Мартены), Томасовский (Сидни Джилкрист Томас) и процесс Бессемеровского конвертера (Генри Бессемер), футерованный известью для снижения содержания фосфора. Стоит отметить, что всего за 5 лет с 1865 по 1870 гг. за счет масштабного ввода в металлургическую промышленность разработанных способов (в основном мартеновского и бессемеровского) мировое производство стали выросло на 70% [12].

Активно велись научно-исследовательские работы в сфере легирования, а также проведения специальных видов термических обработок (закалка, обратное науглероживание и раскисление) с целью повышения свойств и качества стали. Вторая половина XIX в. – нач. XX в. особенно богаты разработками и открытиями в области получения новых видов технологических и термических обработок и, соответственно, марок стали, значительно различающихся друг от друга свойствами и возможным применением. Так, знаменитая и широко применяемая и в наше время инструментальная сталь была разработана и повсеместно внедрена в производство Робертом Мюшетом (Шотландия) в 50-60-ых гг. XIX в. Марганцовистая сталь, которая не закаливалась и не поддавалась механической обработке, была впервые запатентована Робертом Гарфильдом в 1883 г. Особенно важным было открытие быстрорежущей стали, содержащей до 18% вольфрама и 4% хрома. Данная разработка, сделанная Фредериком Тейлором и Монселье Уайтом (США), позволила сделать серьезный скачок в области технологий металлообработки, строительства и других видах инженерных наук, за счет получения материала для производства особо стойкого режущего инструмента, скорость резания которого превосходила в 4 раза инструмент из ближайших материалов-аналогов. Стоит так же отметить разработку состава первых марок нержавеющей стали в 1912 г., сделанную Эдуардом Маурером [13].

В начале XX мировая промышленность и экономика в целом столкнулись с новой производственной задачей – переработкой отходов металлургического производства. Первым важным открытием, решившим эту задачу, а также работающим и по сей день на ряде предприятий, являлся кислородно-конверторный процесс, позволяющий осуществлять выплавку стали из чугуна с добавлением металлолома в конверторе.

Наряду с уже ставшими на тот момент классическими технологиями получения стали, а также с учетом научных достижений в электротехнике, во второй половине XIX в. было создано новое металлургическое направление – электрометаллургия, применяемая для производства высококачественных легированных сталей. Данное направление, а точнее используемые в нем электропечи, позднее стали широко внедряться и в области химической промышленности.

6. Зарождение и развитие металлургической отрасли в России

Самые ранние из свидетельств получения металла из руды на территории Северной Евразии датируются концом IV тыс. до н.э., т.е. насчитывают более пяти тысяч лет [14]. Расширение зоны металлоносных культур происходило постепенно вплоть до II тыс. до н.э. Именно в этот период в Южном Зауралье появляются первые поселения металлургов. Металлургия сформировала полную загадок синташтинскую культуру, которая оставила нам руины 23 укрепленных поселений, включая широко известный Аркаим. При раскопках помимо металлических изделий в культурном слое поселений были обнаружены остатки металлургических комплексов – плавильных печей, в которых отмечены скопления остатков продуктов плавки бронзы – руда, шлаки, слески, бронзовый лом, заготовки [15].

Первое упоминание о металлургической деятельности в Европейской части России датируется VII-IX вв. н.э. и подтверждается соответствующими находками о факте обработки железной руды, найденной в районах Смоленска и Ростова [16]. Только спустя более 9 ве-

ков в 1632 г. в России недалеко от г. Тула была построена первая доменная печь, уже тогда напоминающая современные агрегаты для производства чугуна [17].

Во времена становления российского металлургического производства прослеживалась тенденция к группировке металлообрабатывающих заводов вокруг (или поблизости) чугуноплавильного производства. Иными словами, формировалось четкое разделение как производственного процесса, так и, в частности, труда рабочих по отдельным квалификациям и специальностям. Это подтверждается фактической производственной историей таких заводов как Поротовский, Павловский, а также несколькими заводами Л.К. Нарышкина, основной технологической линией которых было производство чугуна и стали. Стоит отметить, что все металлозаготовительные заводы строились в непосредственной близости от месторождения руд, с целью снижения транспортных затрат. Технологии обработки разрабатывались и осваивались на отдельных предприятиях, таких как: Угодский завод, Ченцовский, Обушковский и Брезгинский заводы, предприятия Л.К. Нарышкина. Данные заводы имели в своем составе горны, сверлильные и молотовые мастерские, ковочные цеха, кузницы. Примечательно, что численность трудящихся на заводах с трудом насчитывала больше 100 человек для самых крупных предприятий. Как правило, к работам широко привлекались холопы и крестьяне в порядке повинности, выполняющие тяжелую ручную работу, требующую низкой квалификации (копка, ломка и перевозка руды, погрузка топлива, угля и готовых изделий, углежжение).

Стоит отметить, что при каждом мастере и высококвалифицированном работнике всегда «прикреплялись» ученики в соотношении 1:3-1:5. Статус «мастера» присваивался ученику через 10-20 лет успешной работы. Примечательным фактом также являются проведенные в Москве переписи ремесленников и кузнечных мастерских, датируемые 1638 г. и 1641 г. соответственно. Основной целью данных мероприятий было установление списочной численности рабочих определенных металлургических квалификаций и компетенций, а также количество кузниц [18].

Основоположником масштабного развития российской металлургической отрасли является Петр I [19]. Обладая прекрасным техническим и технологическим мышлением, а также имея выдающиеся организаторские способности, он обеспечил обширное переселение европейских ремесленников, предпринимателей в области металлургии и художников в Россию. Активное развитие металлургии в России началось преимущественно с производства железа и его сплавов, посредством освоения железорудных ископаемых, основные залежи которых были обнаружены на Урале в конце XVII – начале XVIII вв [20]. Именно по этой причине и по сей день данная территория является крупным металлургическим центром России. Выбор конкретного места для создания первых уральских заводов – Невьянского и Каменского – определялся многочисленными природными и экономическими факторами, среди которых:

- наличие легкодоступных месторождений богатых железной рудой;
- доступность больших объемов древесины (лесов), используемой в качестве топлива;
- близость к водоемам или рекам для осуществления транспортировки как технологического оборудования, так и для отгрузки готовой продукции;
- степень освоения земель для обеспечения продовольствия;
- наличие работоспособного населения, в частности специалистов металлургической отрасли.

Последний фактор стал большой проблемой, ввиду катастрофической нехватки специалистов на Урале. Львиная доля квалифицированных кадров металлургического производства трудилась в центральной части России, в связи с чем стал вопрос о масштабном переселении целых семей как путем весомых преференций, так и в принудительном порядке.

Стоит отметить необъятный вклад выдающегося ремесленника и предпринимателя – Никиты Демидова, который личным приказом Петра Первого был направлен на Урал с целью закончить строительство металлургических заводов и запустить их производства. Под началом Никиты Демидова уральская металлургия обогнала достижения заводов центральной

части России, выдавая в 2-3 раза больше чугуна [19]. Получаемый металл был сопоставим, а в некоторых сравнительных случаях даже превосходил по качеству импортируемое железо. Предприниматель и уже владелец того времени тульского завода, Никита Демидов за 2 года строительства Невьянского завода вложил собственную сумму денег, равнозначную казенной. Обладая огромным организаторским опытом, особенно в части металлургического и оружейного производств, Никита Демидов осуществил переселение на Урал специалистов-металлургов, распорядился о разведывательных кампаниях по поиску руд, их освоению, обеспечил мобилизацию местного населения для постоянного ведения земледельческих, строительных и производственных работ. Он и его старший сын Акинфий, получивший в наследство ведение львиной доли металлургических заводов, разработали и внедрили в производство технологические цепочки по получению такой готовой продукции, как: полосное и связанное железо, уклад, жечь, проволока, котлы, сковороды и т.д. [18]. При управлении четой Демидовых на заводах формируется, ставшая в последствии основным экономическим документом, смета затрат, включающая детальное формирование себестоимости продукции на основе ее производства, транспортных расходов и расходов на реализацию (в наше время – коммерческих затрат). Смета также включала информацию о цене реализации готовой продукции, в зависимости от местоположения заказчика, что позволяло уже тогда определить валовую прибыль. Вводится понятие «оборотные средства», и сегодня подразумевающее материальные затраты, выраженные в натуральном выражении и необходимые для обеспечения проведения производственного процесса. Дополнительно оценивалась цена самих заводов и всех построек, относящихся к ним, называемая сегодня «стоимость основных фондов». Как это происходит и сегодня, она корректировалась, исходя из проведенных работ по модернизации строений и оборудования, их дополнительному оснащению или утилизации. Стоит также отметить, что велась строгая отчетность по производству и отгрузке продукции металлургических производств, позволившая, в частности, в 1773 г. семейству Демидовых отчитаться о поставках железа в казну за период 1701-1773 гг. с преимуществом в пользу государства равным 41% по сравнению с другими частными и экспортными продажами [21].

Атмосфера внешней политики конца XVII – начала XVIII вв., включая российско-шведскую войну, сильно торопила строительство и развитие металлургического производства, в частности запусков Каменского и Невьянского заводов. Уже сформированные к тому времени металлургические производства строго регламентировались правительством в вопросах объема продукции и ее цены для сдачи в казну.

Всего к концу XVIII века в регионе действовало приблизительно 200 горных заводов. Они не только выплавляли металл высокого качества, но и изготавливали различные виды вооружения для нужд армии, а также товары народного хозяйства [22]. Бурное развитие металлургического производства позволило достичь первых экспортных поставок чугуна в Англию уже в 1716 г., а к концу XVIII века (1768–1804 гг.) Россия стала крупнейшим мировым экспортером данного материала с показателем производства 25-180 тыс. тонн в год. Знаменитыми мастерами – Демидовыми – была разработана и запущена первая в мире доменная печь, с ежесуточной производительностью 13,1–14,7 тонн чугуна. Развитие доменного производства послужило возникновению широкого мирового спроса на огнеупоры, служащие покрытием внутренней поверхности печи и отличающиеся более продолжительной стойкостью к агрессивному воздействию жидкого металла [21]. Это послужило открытию в 1856 г. в г. Боровичи первого в России завода по производству шамотных огнеупоров, представляющих собой обожженную глину специального состава. Стоит отметить, что за счет тесного взаимодействия с иностранными исследователями, например Рене Антуан Реомюром, в технологической производственной цепочке российской металлургии появились отжиговые печи для проведения постобработки, а также лаборатории, оснащенные микроскопами, для проведения оперативного анализа изломов полученного металла. Доступ к иностранным патентам также положительно отразился на развитии российской металлургии. Так, в 1829 г. на Александровском литейном

заводе был внедрен процесс дутья, изобретенный годом ранее Д. Нилсоном и позволяющий значительно снизить расход исходного топливного вещества.

К тому времени относится деятельность великого русского металлурга П.П. Аносова (1799–1851 г.г.). Аносов сделал ряд научных открытий: разработал различные способы термической обработки и закалки стали, первым в мире в 1831 году (за 32 года до англичанина Генри Сорби, которому в Европе приписывают первенство в этом деле) применил микроскоп для изучения структуры чёрных металлов и заложил основы металлографии. Аносов разработал все стадии производства высококачественной литой стали: выплавку, разливку, ковку, закалку, отпуск, механическую обработку, контроль качества металла по макроструктуре и механическим свойствам. Многие из сформулированных им положений до сего времени составляют основу теории и технологии качественной металлургии [22].

Однако, уже к середине XIX века в металлургической промышленности Урала снизились высокие темпы роста. Это объяснялось проблемами с транспортировкой топлива: лесные богатства вокруг заводов были исчерпаны, а доставка каменного угля не могла осуществляться из-за отсутствия в регионе железных дорог. К середине XIX в. явно проявился финансовый и технико-экономический кризис промышленности региона. Все более явной становилась бесперспективность использования феодально-крепостнической системы, тормозящей внедрение новейшей техники и методов производства. В это время началось создание нового металлургического района на Юге России, одним из преимуществ которого была близость залежей каменного угля Донбасса. За 20 лет (1887–1899 г.г.) там были введены в эксплуатацию 15 заводов, оснащенных передовым западноевропейским и американским оборудованием [23]. Таким образом, Урал, бывший основным металлургическим районом страны, был оттеснен на второе место.

Несмотря на все усилия властей, промышленность России значительно отставала от развитых западноевропейских стран и США. Становилась все более очевидной необходимость вовлечения богатейших природных ресурсов Сибири и Урала в технико-экономическую жизнь страны. В 1890-х гг. министр финансов С.Ю. Витте начал продвижение программы экономического развития восточных территорий России Урала и Западной Сибири. По его поручению в 1899 г. в Уральский регион была отправлена экспедиция во главе с Д.И. Менделеевым, в задачи которой входило определить причины отставания промышленности и способы ее восстановления. В ходе экспедиции ученые посетили ряд заводов в таких городах как Кизел, Кушва, Нижний Тагил, Екатеринбург, Тюмень, Тобольск и др., проводили магнитные измерения для выявления областей залежей железных руд. Члены экспедиции пришли к выводу о необходимости перехода на прогрессивный путь развития, что подразумевало не только техническое переоснащение, а также переход на минеральное топливо взамен древесного угля. Основной причиной стагнации и даже рецессии промышленности региона Менделеев считал казенное управление заводами, подразумевавшее отсутствие частной инициативы [24].

В 90-е гг. XIX века начался экономический подъем как страны в целом, так и ее восточных районов в частности: было построено 10 новых металлургических заводов, на уже функционирующие предприятия устанавливали современные машины и установки [23].

Целая эпоха в развитии металлургического производства в России и науки о металлах неразрывно связана с именем Дмитрия Константиновича Чернова. Открытия, сделанные этим выдающимся русским ученым, легли в основу совершенствования таких важнейших процессов получения и обработки металлов, как выплавка чугуна и стали, ковка и прокатка, отливка и термическая обработка стальных изделий. Он стал основоположником металловедения – учения о строении металлов и сплавов [25].

В СССР в период индустриализации конца 1920–1930-х годов была осуществлена коренная реконструкция металлургической отрасли, построены новые заводы. Среди них – промышленные гиганты Магнитогорский и Нижнетагильский комбинаты, Челябинский завод ферросплавов и др. Оснащение их главных цехов (доменных, мартеновских, прокатных), построенных

в то время, превосходило оборудование западноевропейских стран и не уступало американскому. Именно тогда всю уральскую металлургию с древесно-угольного топлива перевели на минеральное, что позволило использовать более мощные печи и агрегаты, и как следствие – резко поднять производительность. Наряду с традиционным выпуском чугуна, стали, меди, было освоено изготовление алюминия, магния, никеля, цинка. Были внедрены передовые технологии в цветной металлургии: в алюминиевой промышленности – гидрощелочной вариант получения глинозема, в производстве цинка – гидроэлектрометаллургический способ [26].

Тенденции XX века к достижению максимальной автоматизированности производственного процесса, а также к увеличению производительности, подтолкнули ряд российских заводов к установке и запуску машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Так, в 1952 г. на заводе «Красный октябрь» была введена в эксплуатацию первая российская полупромышленная МНЛЗ, позволяющая непрерывно осуществлять заливку приготовленной стали в бездонную водохлаждаемую изложницу (кристаллизатор), проходя через которую сформированный слиток металла автоматически по роликам транспортировался к прокатным станам на соответствующую горячую деформацию (прокатку) [10].

Однако, для достижения столь высокого статуса во времена становления российской металлургической отрасли необходимо было комплексно решить ряд важнейших взаимодополняющих вопросов, в числе которых:

- организация массовых строительных работ по возведению требуемых производственных площадок, дорог, сопутствующей инфраструктуры;
- поиск и освоение добычи полезных ископаемых;
- определение технологических подходов по проверке качества исходных материалов (полезных ископаемых);
- разработка аналитического оборудования и лабораторных методов для проведения анализа качества как продукции, так и исходного сырья;
- поиск, подготовка и систематическая проверка основных технологических аспектов металлургического производства;
- разработка новых видов технологического оборудования для реализации наиболее безопасного и качественного процесса производства;
- подготовка кадров согласно требуемому количеству и уровню их квалификации;
- использование уже имеющегося и постоянное развитие технического и организационного опыта, ввиду металлургической специфики;
- появление и развитие кооперационных связей, необходимых как для обмена производственным опытом, так и для создания коммерческих отношений;
- развитие дипломатии как одной из составляющих межгосударственных кооперационных связей;
- развитие энергетики как основной составляющей любого металлургического процесса.

Другими словами, масштабное развитие металлургической отрасли было бы невозможно без одновременного развития инженерных наук (мехатроники, строительного дела), химии, геологии, педагогики, энергетики, оптики, физики и др. Стоит отметить, что сегодня развитие новых металлургических технологий влечет за собой глобальное развитие экологии в связке с химией, особенно в области нейтрализации или переработки отходов.

7. Влияние металлургии на мировые отрасли промышленности

Динамичное получение знаний о металлах позволило активно разрабатывать и развивать технологии металлургического производства. Стоит отметить, что в основу разработки металлургических технологий в первую очередь легли фундаментальные естественно-научные

знания о металлах и их сплавах, познаваемые и подтверждаемые в течение многовековой истории развития металлургии.

Развитие металлургической отрасли шло бок о бок с развитием многочисленных отраслей промышленности. Эта тенденция прослеживается из глубины веков и подтверждается активной и постоянной модернизацией технологического оборудования. Так, в частности металлургические машины и механизмы, прошли модернизацию от ручного к гидравлическому и электрическому приводам, пройдя путь изменения принципа действия посредством водяного и парового двигателей. Это было бы невозможно без своевременного развития и появления соответствующих гениальных изобретений в областях механики, электричества и гидравлики [10].

Активные разработки и развитие технологий обработки металлов и сплавов, проводимые в период с середины XVIII в. по начало XX в. и включающих сортовую и листовую прокатку, волочение, штамповку, прессование, позволили обеспечить получение абсолютно новых форм готовых металлических изделий, что в свою очередь безусловно отразилось на широком развитии таких отраслей промышленности как:

- гражданская отрасль промышленности, выраженная в развитии производства посуды и предметов быта;
- пищевая, за счет применения прокатки металлов пакетом (пачкой), что позволило получать особо тонкую фольгу для упаковки шоколада, чая и других продуктов;
- электроника и электротехника, включая телеграф, телефон, трамвай, лампы накаливания и линии электропередач, за счет получения металлических проводов методами прокатки и волочения;
- энергетика, а именно прокладка инженерных коммуникаций, за счет развития технологий листовой прокатки, трубного производства;
- строительство и зодчество, выраженные в возведении железобетонных конструкций, за счет получения различных видов сортового проката и отработки технологий штамповки, а также в появлении возможности нанесения тонких покрытий листовых материалов (золочение куполов церквей), получаемых путем многостадийной технологии прокатки;
- машиностроение, ввиду получения деталей с плотностью металла близкой к теоретической за счет проведения технологий прессования;
- судостроение, а именно широкое распространение в применении изделий из меди и сплавов на ее основе для изготовления защитных покрытий от обрастания днища морскими организмами, а также теплообменников;
- авиастроение, выраженное в открытии новых видов металлов и сплавов (алюминий, титан, магний) и разработки технологий их обработки, позволившие в свою очередь получать более прочные и легкие материалы по сравнению с широко распространенными сплавами на основе железа;
- транспорт, особенно появление и широкое повсеместное внедрение железных дорог, железнодорожного транспорта (локомотивов), обеспеченное техническими предпосылками и широким производством полуфабрикатов из цветных металлов, а также массовым изготовлением готового проката рельсов;
- полиграфическая и бумажная отрасли промышленности, за счет освоения производства полированных цинковых листов для клише и медных металлических сеток соответственно;
- военная промышленность, обусловленная развитием производства патронов, капсулей, гильз, медных шин, прутков для взрывателей и т.д.

Стоит отметить, что развитие всех отраслей напрямую отражалось и на модернизации самих металлургических процессов. Так, за счет развития энергетической отрасли, запуска первых гидроэлектростанций и достижения высокого мирового уровня электрификации, была масштабна внедрена технология индукционной электроплавки, позволившая снизить стоимость передела (плавки) на 33-40%. Развитие ряда отраслей (точного машиностроения и

приборостроения, автоматики и электроники, средств связи) требовало разработки и освоения технологического производства новых сплавов, отличающихся специализированными физическими и механическими свойствами. Таким образом, были изобретены новые сплавы на основе цветных металлов (меди, никеля, алюминия и др.), а также технологические процессы производства специальных видов изделий из них. В свою очередь реализация данных разработок являлась предпосылкой к изобретению специальных видов производственного оборудования: многовалковых прокатных станов, волочильных станов и т.п.

Важно заметить, что создание и освоение новых металлических материалов и металлургических процессов, было бы невозможно без создания соответствующей системы науки и образования, позволяющей осуществлять две основные задачи: научно-исследовательскую (для разработки материалов и процессов) и педагогическую (для подготовки квалифицированных кадров).

Общая история зарождения научных школ определенных направлений не нова и на сегодняшний момент насчитывает тысячелетнюю историю. Однако, применительно к научным школам России, специализированно созданных для развития узких направлений металлургии, данная история более скромная, начало которой датируется 20-ыми гг. XX в. Основными из них являлись:

- «ЦНИИцветмет», «Гипроцветметобработка» и «Гинцветмет» - лаборатория и институты, занимающиеся разработками в области цветных сплавов и внедрением в производство технологий по их получению и обработке;

- «ВНИИМЕТМАШ», «ЦНИИТМАШ», «ЭНИКМАШ» и «ЦБКМ» - организации научного комплекса, занимающиеся проектированием и изготовлением металлургического оборудования для обработки металлов и сплавов:ковки, прокатки, штамповки, различных видов прессов и молотов и т.д.;

- «ЦНИИЧермет» - институт черной металлургии, занимающийся решением научно-исследовательских задач в области чугуна и стали;

- «ГИПРОМЕЗ» - институт проектирования металлургических заводов;

- «РОСНИТИ» - институт проектирования и разработок материалов и технологий трубного производства.

Основные идеи создания металлургических институтов и лабораторий заключались в:

- создании тесных кооперационных связей между существующими производственными и научно-исследовательскими организациями;

- быстром решении технологических задач производственных организаций, вызванных необходимостью уменьшения (исключения) брака производимой продукции;

- оперативной подготовки требуемых квалифицируемых производственных и научных кадров;

- совместной разработки и внедрении новых продуктов и технологий на существующие производственные мощности;

- повышении уровня независимости государства от зарубежных поставок металлургической продукции;

- открытии новых производственных мощностей, что в свою очередь положительно отражалось на всей экономической стабильности государства и общего уровня жизни населения.

8. Заключение

Любая культура непременно заключает в себе и рациональные, и иррациональные аспекты, что в свою очередь строит взаимоотношения человека с металлами на основе иллюзорных принципов или по пути целесообразного применения. Принцип иллюзорности, базирующейся на иррациональных аспектах, в основном характерен для группы драгоценных металлов (зо-

лота, платины, серебра, и пр.), основной целью применения которых являлось возникновение фантазии и восхищения красотой и изяществом изделий из них. Только несколько последних столетий человечество определило целесообразный аспект применения данных металлов в области электронного приборостроения. Прочие металлы, например медь и железо, напротив, с древних времен нашли свое применение в практическом производственном процессе. Впрочем, встречались и иррациональные аспекты применения данных материалов, например, в области древней ритуальной атрибутики. Соответственно, можно сделать вывод, что металлургическая культура, например, Южной Америки представляет собой более иллюзорную сферу бытия, подтвержденную добычей и обработкой драгоценных металлов для применения изделий из них в религиозной сфере. И, напротив, продукция, например, Балкано-Карпатского региона представляет собой рациональный аспект применения, обусловленный находками, занимающих более 95% от общего объема артефактов, тяжелых и крупногабаритных медных орудий труда и оружия.

Территориальные идеологические и мировоззренческие факторы общества как правило своими корнями закладывались в соответствующие нормативные аспекты, которые в свою очередь определяли целевое направление развития металлургической отрасли. Этот вывод подтверждается историей развития как древнекитайской бронзовой индустрии, так и металлургическим производством древней территории Южной Америки.

Начав свою историю развития в виде домашнего хозяйства, металлургическая отрасль приобрела поистине мировой масштаб, став (особенно в развитых странах) основным товаром на продажу и, тем самым, делая значительный вклад в развитие экономики отдельно взятой страны. Именно так, упрощенно, и выглядит основное толкование роли металла в цивилизованном мире по сравнению с другими, синтетически разработанными или природными материалами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохов И. В. Зарождение и развитие металлургии // Актуальные тенденции развития мировой экономики : материалы междунар. науч.-практ. конф., 15-16 марта 2016 г. : в 2 ч. Иркутск, 2016. Ч. 2. С. 53-59.
2. От метеорита до крицы. Железо III — первой половины I тыс. до н.э. в Восточной Европе. Том 1. Историография, База данных-1, начало новых исследований: коллективная монография / Отв. ред.: М. Т. Кашуба, М. А. Кулькова. Санкт-Петербург; Берлин: ИИМК РАН, 2021. 216 с.
3. Тулуш Д. К. Древняя металлургия Тувы: история исследования и современные перспективы // Научное обозрение Саяно-Алтая. 2017. № 1 (17). С. 48-52.
4. Авилова Л. И. Металл Ближнего Востока: модели производства в энеолите, раннем и среднем бронзовом веке. М.: Памятники исторической мысли, 2008. 227 с.
5. Черных Е. Н. Пути и модели развития археометаллургии (Старый и Новый Свет) // Российская археология. 2005. № 4. С. 49-60.
6. Авилова Л. И. Металлопроизводство древней Анатолии: специфика региона // Краткие сообщения Института археологии. 2009. № 223. С. 48-87.
7. Черных Е. Н., Венгеров А. Б. Структура нормативной системы в древних обществах (методологический аспект) // От доклассовых обществ к раннеклассовым. М., 1987. 242 с.

8. Авилова Л. И., Антонова Е. В., Тенейшвили Т. О. Металлургическое производство в южной зоне Циркумпонтийской металлургической провинции в эпоху ранней бронзы // Российская археология. 1999. № 1. С. 51-66.
9. Черных Е. Н. Древняя металлургия евразийских степей и Китая: проблема взаимодействия // Северная Евразия в антропогене: человек, палеотехнологии, геоэкология, этнология и антропология. Материалы всероссийской конференции с международным участием, посвященная 100-летию Михаила Михайловича Герасимова. 2007. С. 276-284.
10. Кондратов Л. А. Черная металлургия. Связь времен. М.: Металлургиздат, 2019. 308 с.
11. Tylecote R. F. A History of Metallurgy. Institute of Materials, 1992. 205 p.
12. Беккерт М. Железо. Факты и легенды / Перевод с немецкого Г. Г. Кефер. М.: Металлургия, 1984. 232 с.
13. Мезенин Н. А. Занимательно о железе // Издание второе, дополненное и переработанное. М.: Металлургия, 1977. 152 с.
14. Епимахов А. В. Металлургия бронзового века // Южный Урал. От Аркаима до Магнитки. Сборник статей. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. 2020. С. 5-28.
15. Григорьев С. А. Металлургическое производство на Южном Урале в эпоху средней бронзы // Древняя история Южного Зауралья. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. 2000. Т. 1. С. 444-523.
16. Голубев О. В., Кочуров С. С., Черноусов П. И. Металлургия железа и хронология цивилизации // Черные металлы. 2006. № 10. С. 90-95.
17. Вальтер А. И. Из истории оружейной столицы России и Тульского края. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 378 с.
18. Шаталов Р. Л. История и философия металлургии и обработки металлов / Учебное пособие для вузов. М.: Теплотехник, 2011. 400 с.
19. Юркин И. Н. Петр Великий и род Демидовых // Тульский краеведческий альманах. 2011. № 8. С. 108-116.
20. Алексеев В. В., Гаврилов Д. В. Металлургия Урала с древнейших времен до наших дней. М.: Наука, 2008. 886 с.
21. Юркин И. Н. Демидовы на пути к промышленной династии: стратегии обеспечения преемственности семейного дела // Уральский исторический вестник. 2021. № 3 (72). С. 81-90.
22. Панасенков В. Н. Металлург Павел Аносов. Жизнь и трагическая судьба // Национальные приоритеты России. 2021. № 1 (40). С. 34-38.
23. Васина И. И. Исторические аспекты развития тяжелой промышленности Уральского региона России в XIX - начале XX вв. // Сборник статей XX Международной научно-практической конференции. 2019. С. 105-107.
24. Менделеев Д. И. Уральская железная промышленность в 1899 году : по отчетам о поездке, совершенной С. Вуколовым, К. Егоровым, П. Земятченским и др. / Д. И. Менделеев, Екатеринбург: АКВА-ПРЕСС, 2006. 873 с.

25. Леонтьев Л. И., Цуканов В. В., Смирнова Д. Л. Роль Д. К. Чернова в создании и развитии учения о современной металлургии и металловедении. Часть 2. Научно-практическое подтверждение идей Д. К. Чернова // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2020. Т. 63. № 11-12. С. 873-877.
26. Леонтьев Л. И. История металлургии Урала // Наука в России. 2009. №4. С. 97-102.

REFERENCES

1. Anokhov I. V. "The origin and development of metallurgy", *Actual trends in the development of the world economy: materials of the international* (Scientific-practical. Conf., March 15-16, Part 2). 2016, Irkutsk, pp. 53-59.
2. Kashuba, M. T. & Kulkov, M. A. 2021, *From a meteorite to a cry. Iron III - the first half of the 1st millennium BC in Eastern Europe. Volume 1. Historiography, Database-1, the beginning of new research: a collective monograph*, St. Petersburg, Berlin.
3. Tulush, D. K. 2017, "Ancient metallurgy of Tuva: history of research and modern prospects", *Scientific Review of Sayano-Altai*, no. 1 (17), pp. 48-52.
4. Avilova, L. I. 2008, *Metal of the Middle East: Models of Production in the Eneolithic, Early and Middle Bronze Age*, Monuments of historical thought, Moscow.
5. Chernykh, E. N. 2005, "Ways and models of the development of archaeometallurgy (Old and New Worlds)", *Russian Archaeology*, no. 4, pp. 49-60.
6. Avilova, L. I. 2009, "Metal production of ancient Anatolia: the specifics of the region", *Brief reports of the Institute of Archeology*, no. 223, pp. 48-87.
7. Chernykh, E. N. & Vengerov, A. B. 1987, *The structure of the normative system in ancient societies (methodological aspect). From pre-class societies to early class ones*, Moscow.
8. Avilova, L. I., Antonova, E. V. & Teneishvili, T. O. 1999, "Metallurgical production in the southern zone of the Circumpontian metallurgical province in the Early Bronze Age", *Russian Archeology*, no. 1, pp. 51-66.
9. Chernykh, E. N. "Ancient metallurgy of the Eurasian steppes and China: the problem of interaction", *Northern Eurasia in the Anthropogene: man, paleotechnologies, geoecology, ethnology and anthropology. Materials of the All-Russian conference with international participation, dedicated to the 100th anniversary of Mikhail Mikhailovich Gerasimov*. 2007, pp. 276-284.
10. Kondratov, L. A. 2019, *Ferrous metallurgy. Connection of times*, Metallurgizdat, Moscow.
11. Tylecote, R. F. 1992, *A History of Metallurgy*, Institute of Materials.
12. Beckert, M. 1984, *Iron. Facts and legends*, Metallurgy, Moscow.
13. Mezenin, N. A. 1977, *Interestingly about iron*, Metallurgy, Moscow.
14. Epimakhov, A. V., "Metallurgy of the Bronze Age", *South Ural. From Arkaim to Magnitka* (Digest of articles), Chelyabinsk, 2020, pp. 5-28.
15. Grigoriev, S. A. 2000, "Metallurgical production in the Southern Urals in the Middle Bronze Age", *Ancient history of the Southern Trans-Urals*, vol. 1., pp. 444-523.

16. Golubev, O. V., Kochurov, S. S. & Chernousov, P. I. 2006, "Iron metallurgy and the chronology of civilization", *Ferrous metals*, no. 10, pp. 90-95.
17. Walter, A. I. 2014, *From the history of the arms capital of Russia and the Tula region*, Publishing House of TulGU, Tula.
18. Shatalov, R. L. 2011, *History and philosophy of metallurgy and metal processing*, Teploteknik, Moscow.
19. Yurkin, I. N. 2011, "Peter the Great and the Demidov family", *Tula local history almanac*, no. 8, pp. 108-116.
20. Alekseev, V. V. & Gavrilov, D. V. 2008 *Metallurgy of the Urals from ancient times to the present day*, Nauka, Moscow.
21. Yurkin, I. N. 2021, "Demidovs on the way to an industrial dynasty: strategies for ensuring the continuity of family business", *Ural Historical Bulletin*, no. 3 (72), pp. 81-90.
22. Panasenkov, V. N. 2021, "Metallurgist Pavel Anosov. Life and tragic fate", *National priorities of Russia*, no. 1 (40), pp. 34-38.
23. Vasina, I. I. "Historical aspects of the development of heavy industry in the Ural region of Russia in the XIX - early XX centuries", *XX International Scientific and Practical Conference. 2019*, pp. 105-107.
24. Mendeleev, D. I. 2006, *The Ural iron industry in 1899: according to reports on the trip*, Aqua-press, Yekaterinburg.
25. Leontiev, L. I., Tsukanov, V. V. & Smirnova, D. L. 2020, "The role of D. K. Chernov in the creation and development of the theory of modern metallurgy and metallurgy. Part 2. Scientific and practical confirmation of the ideas of D.K. Chernova", *News of higher educational institutions. Ferrous metallurgy*, vol. 63, no. 11-12, pp. 873-877.
26. Leontiev, L. I. 2009, "The history of metallurgy in the Urals", *Science in Russia*, no. 4, pp. 97-102.

Получено: 18.04.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-251-261

Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. Э. Белкин

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Белкин Антон Эдуардович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Аннотация

В статье для случая больших деформаций получено точное аналитическое решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии композитной плиты, которая построена путём соединения двух предварительно деформированных слоев. Каждый слой получается путём распрямления цилиндрической панели, первоначально имеющей форму сектора полого круглого цилиндра. Цилиндры изготовлены из несжимаемого нелинейно-упругого материала – трелоарового, или неогуковского, материала. Оси цилиндров до деформации ортогональны. После соединения плита подвергается двухосному растяжению или сжатию в своей плоскости. Задача формулируется на основе теории наложения больших деформаций. Большую роль при решении задачи играет тот факт, что материалы панелей являются несжимаемыми. При решении задачи, а также при проведении численных исследований, исследуются нелинейные эффекты. Полученное решение может быть использовано для верификации программного обеспечения, которое предназначено для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии элементов конструкций, выполненных соединением предварительно деформированных частей. Для полученного решения задачи проведены численные исследования, результаты которых – зависимости напряжения на концах плит от различных параметров деформаций – представлены в работе.

Ключевые слова: предварительно деформированные слои, материал Трелоара, большие деформации, нелинейные эффекты.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. Э. Белкин. Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 251–261.

¹Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621 в части, связанной с постановкой задачи, при поддержке РНФ (проект 22-11-00110) в части, связанной с разработкой метода и алгоритма решения задачи

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-251-261

Exact analytical solution for a problem of equilibrium of a composite plate containing prestressed parts made of incompressible elastic materials under superimposed finite strains

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. E. Belkin

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Belkin Anton Eduardovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Abstract

In the article, for the case of large deformations, an exact analytical solution of the problem of the stress-strain state of a composite slab is presented, which is built by connecting two pre-deformed layers. Each layer is obtained by straightening a cylindrical panel, initially shaped like a sector of a hollow circular cylinder. The cylinders are made of incompressible non-linear-elastic materials — Treloar's, or neo-Hookean materials. The axes of cylinders before deformation are orthogonal. After connection, the plate is subjected to biaxial tension or compression in its plane. The problem is formulated on the basis of the theory of superimposed large strains. An important role in solving the problem is played by the fact that the plate material is incompressible. When solving the problem, as well as when conducting numerical studies, nonlinear effects are investigated. The resulting solution can be used to verify software that is designed to numerically solve problems of the stress-strain state of structural elements made by connecting pre-deformed parts. For the obtained solution of the problem, numerical studies were carried out, the results of which - the dependence of the stress at the ends of the plates on various deformation parameters - are presented in the work.

Keywords: predeformed layers, Treloar material, large deformations, nonlinear effects.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. E. Belkin, 2022, "Exact analytical solution for a problem of equilibrium of a composite plate containing prestressed parts made of incompressible elastic materials under superimposed finite strains", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 251–261.

1. Введение

Работа над изготовлением конструкций из различных упругих материалов зачастую включает в себя соединение элементов, которые были предварительно деформированы. При исследовании подобных явлений используется теория наложения больших деформаций [1,2]. В различных более ранних работах рассматривались задачи о напряжённо-деформированном

состоянии тел, изготовленных с помощью соединения (склейки) предварительно деформированных деталей [3–6]. Результаты подобных исследований могут быть использованы для верификации программ, предназначенных для анализа конструкций (образованных соединением предварительно деформированных деталей) и анализа деформаций слоистых горных пород (сформированных путем последовательного соединения слоев) с помощью метода конечных элементов [7–9]; для моделирования композитных плит и оболочек [10–14].

В данной работе исследуется поэтапная деформация пары цилиндрических плит из несжимаемого неогуковского материала [15–17]. Соответствующая задача об определении напряженно-деформированного состояния единой плиты, формируемой в процессе упомянутой деформации, решается точным аналитическим методом. Процесс решения детально описан в работе. В процессе деформации рассматриваемые плиты проходят через три различных состояния, или конфигурации – естественное (начальное), промежуточное и конечное. Таким образом, деформация включает два этапа – переход от начального состояния к промежуточному и от промежуточного к конечному.

В начальном состоянии каждая плита представляет собой сектор полого кругового цилиндра из несжимаемого неогуковского материала. До деформации оси цилиндров ортогональны по отношению друг к другу. При переходе к промежуточному состоянию цилиндрические плиты выпрямляются и соединяются, образуя единую панель. При переходе к конечному состоянию соединённая панель подвергается растяжению-сжатию в двух направлениях. Более подробная информация об этапах деформации представлена ниже, при постановке задачи.

В работе исследуются нелинейные эффекты, возникающие в процессе описываемой деформации. Одна из задач, которые ставятся в работе — выявить наличие и проанализировать характер этих нелинейных эффектов.

2. Постановка задачи

Рассматривается пара цилиндрических панелей, каждая из которых является изначально ненапряжённым сектором полого кругового цилиндра. Каждая панель изготовлена из несжимаемого неогуковского материала. Материальные константы, характеризующие материал первой и второй панели, обозначим соответственно μ_1 и μ_2 . Оси цилиндров, секторами которого являются панели, ортогональны. Для каждой панели вводятся цилиндрические координаты – для верхней панели (ρ, θ, ξ) , для нижней же (r, φ, ζ) по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi, & y_1 &= r \sin \varphi, & z_1 &= \zeta, \\ x_2 &= \rho \sin \theta, & y_2 &= \xi, & z_2 &= \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

где $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — координаты частиц панелей в начальном состоянии в декартовой системе координат.

Далее выполняется выпрямление (разгибание) ранее описанных цилиндрических панелей и соединение их в плоскости x . В результате формируется составная предварительно напряжённая прямоугольная плита, которая находится в промежуточном состоянии. Плита состоит из двух слоёв. Деформация выпрямления определяется следующими формулами [3]:

$$\begin{aligned} x &= f_r(r), & y &= \tau_\varphi \varphi, & z &= \alpha_\zeta \zeta, \\ x &= f_\rho^*(\rho), & y &= \alpha_\xi \xi, & z &= \tau_\theta \theta, \end{aligned}$$

где x, y, z — декартовы координаты частиц составной плиты в промежуточном состоянии; $\tau_\varphi, \alpha_\zeta, \tau_\theta, \alpha_\xi$ — постоянные; f_r, f_ρ^* — неизвестные функции.

После перехода составной плиты в промежуточное состояние происходит второй этап деформации, в результате которого она переходит в конечное состояние. Второй этап деформации заключается в растяжении-сжатии составной плиты с помощью сил, распределённых по

граням плиты $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Силы параллельны соответственно осям y и z . Вторым этапом деформации описывается следующими формулами:

$$X = F(x), \quad Y = \beta_y y, \quad Z = \beta_z z,$$

где X, Y, Z – координаты частиц составной плиты в конечном состоянии в декартовой системе координат; β_y, β_z – заданные характеристики второго этапа деформации (постоянные); F – неизвестная функция, характеризующая деформацию в направлении, перпендикулярном к плоскости плиты.

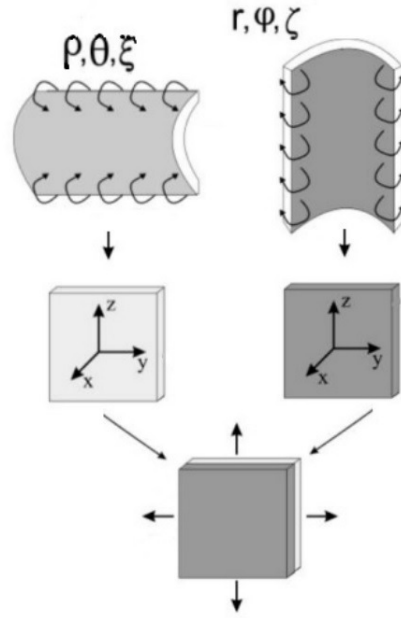


Рис. 1: Иллюстрация к геометрии задачи

Требуется определить поле напряжений после завершения как промежуточного, так и конечного этапов деформации.

3. Первый этап деформации: выпрямление цилиндрических плит

Определяющее соотношение для упругого несжимаемого неогуковского материала имеет вид [15,16]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mu_i \mathbf{F}, \quad (1)$$

где \mathbf{T} – тензор истинных напряжений; p – множитель Лагранжа (давление); \mathbf{E} – единичный тензор; μ_i – материальная постоянная i -ой плиты ($i = 1$ – верхняя, $i = 2$ – нижняя); $\mathbf{F} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$ – мера деформации Фингера; \mathbf{P} – градиент полной деформации, характеризующий деформацию при переходе из начального в конечное состояние: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{init.}} \cdot \mathbf{P}_{\text{add.}}$

Деформация выпрямления цилиндрических панелей описывается формулами

$$\begin{aligned} x &= f_r(r), & y &= \tau_\varphi \varphi, & z &= \alpha_\zeta \zeta \\ x &= f_r^*(\rho), & y &= \alpha_\xi \xi, & z &= \tau_\theta \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Каждой из панелей при переходе от естественной отсчётной конфигурации к промежуточной соответствует градиент начальной деформации. Для первой и второй панели это, соответственно, тензоры $\mathbf{P}_{\text{init.}}(r)$ и $\mathbf{P}_{\text{init.}}^*(\rho)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{init.}}(r) &= \frac{dx(r)}{dr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + \frac{\tau_\varphi}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha_\zeta \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{P}_{\text{init.}}^*(\rho) &= \frac{dx(\rho)}{d\rho} \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{i}_1 + \frac{\tau_\theta}{\rho} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{i}_3 + \alpha_\xi \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2\end{aligned}\quad (3)$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi$, $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi$, $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_3 \cos \theta + \mathbf{i}_1 \sin \theta$, $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_3 \sin \theta + \mathbf{i}_1 \cos \theta$ — единичные векторы цилиндрических систем координат, связанных с первой и второй панелями; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — единичные векторы координатных осей x, y, z соответственно.

Так как материалы, из которых состоят панели, являются несжимаемыми, то должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{P} &= 1 \\ \det \mathbf{P}^* &= 1\end{aligned}\quad (4)$$

Соотношения (4) позволяют определить функции $f_r(r)$ и $f_\rho^*(\rho)$. Формулы (4), учитывая соотношения (3), можно переписать в виде

$$\alpha_\zeta \tau_\varphi f_r'(r) = r, \quad \alpha_\xi \tau_\theta (f_\rho^*)'(\rho) = \rho. \quad (5)$$

Решения уравнений (5) должны удовлетворять условиям $f_r(\rho_1) = 0$, $f_r(r_0) = f_\rho^*(\rho_0)$. Последнее условие означает, что выпрямленные панели соединяются без зазора и образуют двухслойную плиту.

Из (2) и (5) можно определить зависимость между x и r (для нижней панели соответственно), а также x и ρ (для верхней панели соответственно):

$$f_r(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}, \quad f_\rho^*(\rho) = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}.$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобном виде:

$$x(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}, \quad x(\rho) = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}. \quad (6)$$

4. Второй этап деформации: растяжение-сжатие двухслойной плиты

Далее рассматривается второй этап деформации. Для этого решается задача о растяжении-сжатии в двух направлениях предварительно напряжённой двухслойной плиты силами, распределёнными по её кромкам $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Переход от промежуточного состояния к конечному состоянию характеризуется следующими соотношениями [3]:

$$\begin{aligned}X &= F(x), \quad Y = \beta_y y, \quad Z = \beta_z z, \\ \beta_y &= \text{const}, \quad \beta_z = \text{const}.\end{aligned}\quad (7)$$

Градиент дополнительной деформации при переходе от промежуточного к конечному состоянию для соединённой плиты имеет вид

$$\mathbf{P}_{\text{add.}} = \frac{dF(x)}{dx} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

Для того, чтобы переписать последнюю формулу в более удобном виде для дальнейших вычислений, выполним замену независимой переменной x с учетом (2). В итоге получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{add.}}(r) &= \frac{1}{x'(r)} \frac{dX(r)}{dr} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{P}_{\text{add.}}(\rho) &= \frac{1}{x'(\rho)} \frac{dX(\rho)}{d\rho} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (8)$$

Так как материалы, из которых состоят плиты, являются несжимаемыми, то должно выполняться следующее соотношение:

$$\det \mathbf{P}_{\text{add.}} = 1 \quad (9)$$

Соотношение (9) позволяют определить функции $X(r)$ и $X(\rho)$. Формулу (9), учитывая соотношения (6) и (8), можно переписать как

$$\begin{aligned} \beta_y \beta_z \frac{dX(r)}{dr} &= \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta} \\ \beta_y \beta_z \frac{dX(\rho)}{d\rho} &= \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

Решения уравнений (10) должны удовлетворять условиям $X(\rho_1) = 0$, $X(r_0) = X(\rho_0)$. Зависимость между X и r (для нижней панели соответственно), а также X и ρ (для верхней панели соответственно) получаем в виде:

$$F(r) = \frac{3\alpha_\zeta \tau_\varphi (\rho_0^2 - \rho_1^2)(r - r_0) + \alpha_\zeta \tau_\varphi (\rho_0^3 + 2\rho_1^3 - 3\rho_0 \rho_1^2) + \alpha_\xi \tau_\theta (r^3 + 2r_0^3 - 3rr_0^2)}{6\beta_y \beta_z \alpha_\zeta \alpha_\xi \tau_\varphi \tau_\theta} \quad (11)$$

$$F(\rho) = \frac{\rho^3 - 3\rho_1 \rho + 2\rho_1^3}{6\beta_2 \beta_3 \alpha_2 \tau_2}$$

Используя (1) и условие $T_{11} = 0$ в конечном состоянии [3], можно выразить давление p , подставляя вместо $X(r)$ и $X(\rho)$ полученные выражения (11):

$$\begin{aligned} p(r) &= \mu_1 \left(\frac{dX(r)}{dr} \right)^2 \\ p(\rho) &= \mu_2 \left(\frac{dX(\rho)}{d\rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (1) и (12) позволяют вычислить все компоненты тензора истинных напряжений \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0, \\ T_{22} &= -p + \mu_i \beta_y, \\ T_{33} &= -p + \mu_i \beta_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Недиагональные компоненты этого тензора равны нулю.

5. Численные исследования

Описанное выше решение задачи реализовано программно. Проведены численные исследования. Далее приводятся их входные данные.

При численных исследованиях использовались следующие соотношения между геометрическими характеристиками цилиндрических панелей в недеформированном состоянии:

$$\rho_1/r_1 = 1, 3, \rho_0/r_1 = 1, r_0/r_1 = 1, 2.$$

Считалось, что константы материала одинаковы для обоих слоёв, то есть $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

На рис. 2–5 представлены зависимости истинного напряжения T_{22} на границах первого слоя от различных характеристик деформаций при различных значениях параметра β_z . Напряжение отнесено к модулю μ . Использовались следующие значения параметров, характеризующих начальную и дополнительную деформацию:

$$\begin{aligned} \alpha_\zeta &= \alpha_\xi = 1, 1 \\ \beta_y &= 1, 2 \\ \tau_\varphi &= \tau_\theta = 0, 8r_1 \end{aligned} \quad (14)$$

На каждом из приведённых графиков (рис. 2–5) аргументом функции, изображённой на графике, является один из параметров, заданных в (14). Остальные параметры принимают значения, указанные в (14).

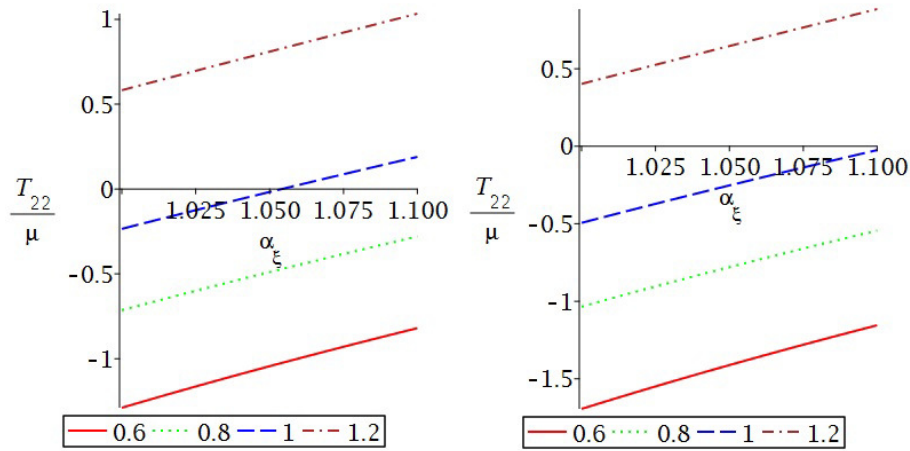


Рис. 2: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра α_ξ при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_y

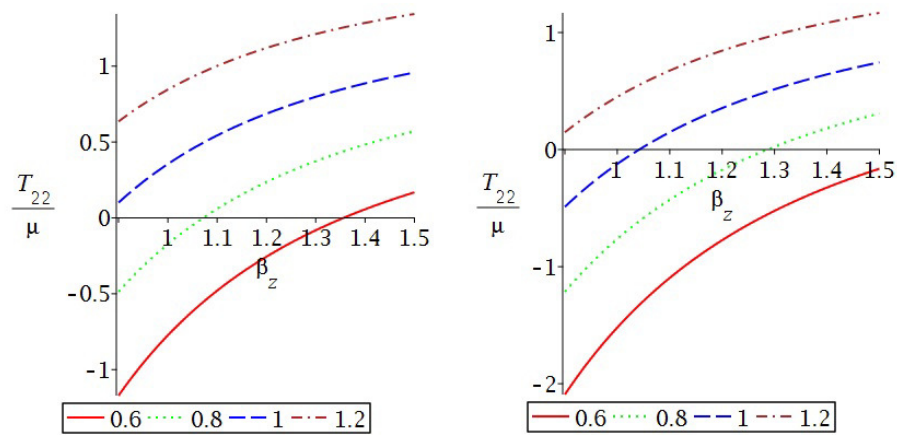


Рис. 3: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра β_z при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_y

Из рис. 3 и рис. 5 можно видеть, что зависимости напряжения T_{22} от параметров β_z и τ_θ , характеризующих деформацию, существенно нелинейны.

6. Заключение

В рамках теории наложения больших деформаций разработана математическая модель, описывающая выпрямление, соединение и совместное растяжение или сжатие двух цилиндрических панелей, оси которых взаимно ортогональны. Получено для несжимаемого нелинейно-упругого материала точное аналитическое решение задачи о равновесии составной плиты, полученной в результате соединения распрямленных панелей и подвергнутой дополнительному растяжению или сжатию. Выявлены нелинейные эффекты. Полученное решение задачи может

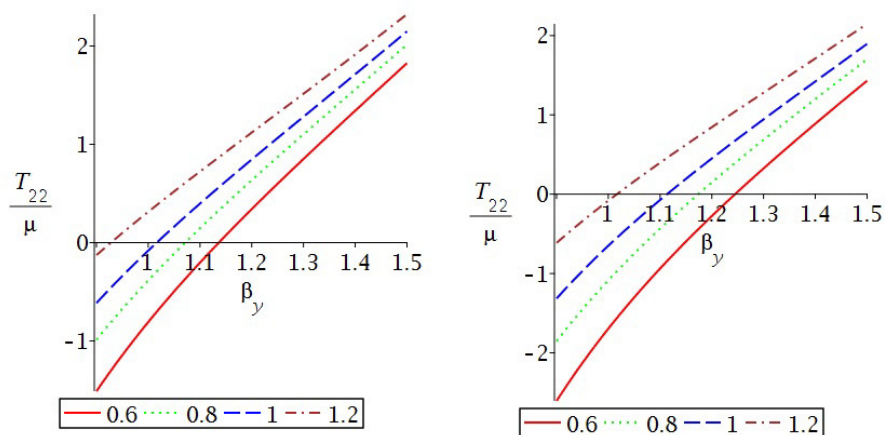


Рис. 4: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра β_y при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_z

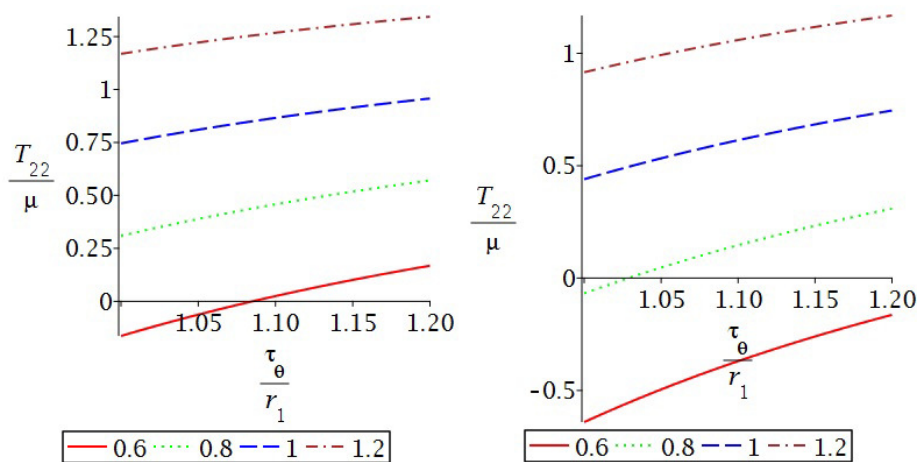


Рис. 5: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра τ_θ при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_z

быть использовано для верификации программного обеспечения, предназначенного для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии элементов конструкций, изготовленных путем соединения предварительно деформированных частей. В дальнейшем решение задачи, рассмотренной в данной работе, может быть обобщено на случай несжимаемых микрополярных материалов [18,19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A., Tarasiev G.S. Superposition of large elastic deformations in the space of final-states // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1980. V. 251, pp. 63–66.
2. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73, Issue 6, pp. 710-721.

3. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2021. V. 88, paper 104237.
4. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51, pp. 1403–1409.
5. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 133, pp. 47–59.
6. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67–68, pp. 244–249.
7. Абрамов С.М., Амелькин С.А., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 15–27.
8. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью САЕ Fidesys // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 316–329.
9. Вершинин А.В., Сабитов Д.И., Ишбулатов С.Ю., Мясников А.В. Гидрогеомеханическое моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов путем внешнего сопряжения специализированных вычислительных пакетов и универсальной САЕ Fidesys // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 154–186.
10. Noor, A.K., Burton, W.S.: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates // *Applied Mechanics Review*. 1989. V. 41, pp. 1–18.
11. Carrera, E.: "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells". ARCO 9, pp. 87–140 (2002).
12. Kulikov G.M. Computational models for multilayered composite shells with application to tires // *Tire Science and Technology*. 1996. V. 24, No. 1, pp. 11–38.
13. Badriev I. B., Makarov M. V., Paimuhin V. N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. V. 158, paper 012011.
14. Makarov M. V., Badriev I. B., Buyanov V. Yu., Smirnova E. V. On solving the geometrically nonlinear and linear problems of transverse bending of a hinged fixing sandwich plate with transversally soft core // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1158, No. 3, paper 032026.
15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
16. Treloar, L.R.G.: "The Physics of Rubber Elasticity". Oxford University Press (1975)
17. Mooney, M.: "A theory of large elastic deformation". *Journal of Applied Physics*. 11, 582 (1940) <https://doi.org/10.1063/1.1712836>

18. Zubov L.M. Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. V. 21, pp. 152–167.
19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer. Heidelberg, 2013.

REFERENCES

1. Levin, V.A., Tarasiev, G.S. “Superposition of large elastic deformations in the space of final-states”. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. **251** (1980), 63–66.
2. Zingerman, K.M., Levin, V.A. “Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution”. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **73:6** (2009), 710–721.
3. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains”. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, **88** (2021), 104237.
4. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains”. *International Journal of Solids and Structures*, **51** (2014), 1403–1409.
5. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains. *International Journal of Engineering Science*”, **133** (2018), 47–59.
6. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. “An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains”, *International Journal of Solids and Structures*. **67–68** (2015), 244–249.
7. Abramov, S.M., Amel’kin S.A., Kljuev, L.V., Krapivin, K.J., Nozhnickij, J.A., Servetnik, A.N., Chichkovskij, A.A. “Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk in the Fidesys program”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 15–27. (In Russ.)
8. Konovalov, D. A., Yakovlev, M. Ya. “Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 316–329. (In Russ.)
9. Vershinin, A. V., Sabitov, D. I., Ishbulatov, S. Y., Myasnikov, A. V. “Hydrogeomechanical modeling of reservoir by external coupling of specialized computational software and universal CAE Fidesys”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 154–186. (In Russ.)
10. Noor, A.K., Burton, W.S. “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”. *Applied Mechanics Review*. **41** (1989), 1–18.
11. Carrera, E. “Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells”. *ARCO* 9, pp. 87–140 (2002).
12. Kulikov, G.M. “Computational models for multilayered composite shells with application to tires”. *Tire Science and Technology*. **24:1** (1996), 11–38.
13. Badriev, I. B., Makarov, M. V., Paimuhin, V. N. “Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies”. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. **158** (2016), 012011.

14. Makarov, M. V., Badriev, I. B., Buyanov, V. Yu., Smirnova, E. V. "On solving the geometrically nonlinear and linear problems of transverse bending of a hinged fixing sandwich plate with transversally soft core". *Journal of Physics: Conference Series*, **1158**:3 (2019), 032026.
15. Lurie, A.I. "Non-linear theory of elasticity". Nauka, Moscow, 1980.
16. Treloar, L.R.G. "The Physics of Rubber Elasticity". Oxford University Press, 1975.
17. Mooney, M. "A theory of large elastic deformation". *Journal of Applied Physics*. **11**, (1940), 582
<https://doi.org/10.1063/1.1712836>
18. Zubov, L.M. "Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids". *Mathematics and Mechanics of Solids*. **21** (2016), 152–167.
19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer. Heidelberg. 2013.

Получено: 26.07.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51-72 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-262-271

Точное решение задачи о поэтапной деформации многослойного цилиндра из несжимаемого гипопругого материала¹

В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Д. Р. Бирюков

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: versh1984@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Бирюков Данила Русланович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Аннотация

Работа посвящена одной из задач теории наложения больших деформаций. Представлен алгоритм точного решения задачи о формировании бесконечного кругового составного цилиндра из некоторого конечного количества гипопругих слоёв. Задача решается в квазистатической постановке. Модель гипопругости, соответствующая материалу цилиндрических слоёв, описывается уравнениями состояния с участием коротационной производной Динса. При присоединении каждый очередной слой претерпевает две фазы деформации на протяжении некоторых отрезков времени. Первая фаза деформации — радиальное расширение или сжатие цилиндрического слоя. Вторая фаза деформации — кручение. Каждый очередной слой присоединяется к составному гипопругому цилиндрическому телу после окончания деформации предыдущего слоя. При этом, деформация каждого гипопругого слоя влияет на общее состояние составного цилиндра, то есть на все внутренние слои. Требуется определить поле напряжений в составном гипопругом цилиндре. В работе описаны используемые при решении задачи обозначения и системы координат. Описаны все основные шаги решения задачи, в том числе вычисление компонент тензора напряжений. Также приведены формулы осевой силы и крутящего момента составного цилиндра. Проведены численные исследования. Результаты численных исследований — графики зависимости осевой силы и крутящего момента от параметров деформаций — представлены в конце работы.

Ключевые слова: гипопругий материал, многослойный цилиндр, растяжение-сжатие, кручение, наложение больших деформаций, точное аналитическое решение.

Библиография: 17 названий.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621 в части, связанной с постановкой задачи, при поддержке РНФ (проект 22-11-00110) в части, связанной с разработкой метода и алгоритма решения задачи, и при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых — докторов наук (грант МД-208.2021.1.1) в части, связанной с численными расчетами.

Для цитирования:

В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Д. Р. Бiryukov. Точное решение задачи о поэтапной деформации многослойного цилиндра из несжимаемого гипоупругого материала // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 262–271.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51-72 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-262-271

Exact solution to the problem of stage-by-stage deformation of a multilayer cylinder made of incompressible hypoelastic material

V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, D. R. Biryukov

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Vershinin Anatoliy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Biryukov Danila Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Abstract

The work is devoted to one of the problems of the theory of superimposed large deformations. An algorithm for the exact solution of the problem of forming an infinite circular compound cylinder from a certain finite number of hypoelastic layers is presented. The problem is formulated in a quasi-static statement. The hypoelasticity model corresponding to the material of the cylindrical layers is described by the equations of state with the participation of the corotational Dienes derivative. When attached, each successive layer undergoes two phases of deformation over some time intervals. The first phase of deformation is the radial expansion or contraction of the cylindrical layer. The second phase of deformation is torsion. Each successive layer is attached to the composite hypoelastic cylindrical body after the deformation of the previous layer is completed. At the same time, the deformation of each hypoelastic layer affects the general state of the composite cylinder, that is, all internal layers. It is required to determine the stress field in a composite nonlinearly elastic cylinder. The paper describes the notation and coordinate systems used in solving the problem. All the main steps for solving the problem are described, including the calculation of the stress tensor components. The formulas for the axial force and torque of a compound cylinder are also given. Numerical studies have been carried out. The results of numerical studies - graphs of the dependence of the axial force and torque on the deformation parameters - are presented at the end of the work.

Keywords: hypoelastic material, multilayer cylinder, tension-compression, torsion, superposition of large strains, exact analytical solution.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, D. R. Biryukov, 2022, "Exact solution to the problem of stage-by-stage deformation of a multilayer cylinder made of incompressible hypoelastic material", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 262–271.

1. Введение

Важным классом задач теории больших деформаций являются задачи о деформации цилиндрических тел. Интерес к данным задачам связан с тем, что цилиндрические тела представляют собой класс тел сравнительно простых форм, и часто аппроксимация реальных тел цилиндрами при моделировании деформаций оправдана. Подобные задачи, связанные с большими деформациями цилиндрических тел, рассматривались, к примеру, в работах [1-7]. В частности, задачи о кручении цилиндров из неупругих материалов рассмотрены в [1,2]. В [3,4] решена задача о кручении составных цилиндров с предварительно напряженным нелинейно-упругим включением. Решение основано на теории наложения больших деформаций [5,6] с использованием одного из универсальных решений нелинейной теории упругости для несжимаемых материалов [7,8], обобщенного на случай гипопругих тел [2].

В данной работе получено при больших деформациях точное решение квазистатической задачи о напряженно-деформированном состоянии при формировании бесконечного кругового составного гипопругого цилиндра из некоторого конечного количества гипопругих слоёв. Это решение является обобщением решений, полученных в [3,4], на случай гипопругих материалов.

2. Постановка задачи

В начальный момент времени (а также в начальную фазу) рассматривается бесконечный круговой гипопругий [2,9,10] цилиндр, претерпевающий две фазы деформации. Первая из них – фаза радиальной деформации, происходящая на протяжении отрезка времени $0 \leq t \leq T_p^{(1)}$. Вторая фаза – фаза кручения, происходящая на протяжении отрезка времени $T_p^{(1)} \leq t \leq T_f^{(1)}$. Здесь $T_p^{(n)}$ – момент перехода между фазами деформации n -ого слоя; $T_f^{(n)}$ – момент окончания деформации n -ого слоя.

На каждом этапе, рассматриваемом в задаче – с 1 по N – к цилиндру присоединяется очередная внешняя фаза. То есть, после совершения всех деформаций рассматриваемый объект – многослойный (состоящий из N гипопругих слоёв) цилиндр.

Каждый из присоединяемых слоёв при своём присоединении к составному цилиндру проходит через 2 фазы деформации. Для каждого n -ого слоя это фаза радиальной деформации, на протяжении отрезка времени $T_f^{(n-1)} \leq t \leq T_p^{(n)}$, и фаза кручения, происходящая на протяжении отрезка времени $T_p^{(n)} \leq t \leq T_f^{(n)}$. Каждый новый слой – внешний по отношению к предыдущему – присоединяется к цилиндру после окончания деформации предыдущего слоя.

Модель гипопругости, описывающая механические свойства материалов цилиндрических слоёв, представлена уравнениями состояния с использованием производной Динса [9–12]:

$$\frac{D(\mathbf{S})}{2} = G\mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} + p\mathbf{I} = \mathbf{S}, \quad (2)$$

где $D(\mathbf{S})$ – производная Динса [13-15] $D(\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$; \mathbf{T} – тензор напряжений Коши; \mathbf{S} – девиатор тензора напряжений; p – неопределённая скалярная функция (давление), выражающая среднее по координатам напряжение; $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2}$ – тензор скоростей деформации; $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ – тензор скоростей дисторсий; \mathbf{A} – аффиноид деформации; G – модуль сдвига; \mathbf{I} – единичный тензор; $\dot{\mathbf{S}}$ – производная тензора \mathbf{S} по времени t ; $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$ – тензор скоростей вращения; \mathbf{Q} – тензор поворота из полярного разложения аффиноида \mathbf{A} .

Задача решается в квазистатической постановке. Требуется определить поле напряжений в многослойном цилиндре.

3. Описание используемых обозначений и систем координат

Обозначим (r_m, φ_m, z_m) цилиндрические координаты в m -ом состоянии (в качестве m -ого состояния далее может рассматриваться произвольное состояние с 1-ого по N -ое). Для задачи о растяжении, сжатии и кручении составного цилиндра из несжимаемого материала верно

$$\begin{cases} r_m = \lambda^{(m)} r_{m-1} \\ \varphi_m = \varphi_{m-1} + \alpha^{(m)} \\ z_m = z_{m-1} (\lambda^{(m)})^{-2} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\alpha^{(m)} = k^{(m)} z_{m-1}$; $k^{(m)}$ – относительный угол закручивания на m -ом этапе; $\lambda^{(m)}$ – кратность радиального удлинения на m -ом этапе. Заметим, что $\lambda^{(m)}$ является константой во всех временных интервалах кроме, быть может, интервала

$$T_f^{(m-1)} \leq t \leq T_p^{(m)},$$

на котором этот параметр является заданной непрерывной функцией времени.

Аналогично, k_m является константой во всех временных интервалах кроме, быть может, интервала

$$T_p^{(m)} \leq t \leq T_f^{(m)}$$

Обозначим теперь $(r_{n|m}, \varphi_{n|m}, z_{n|m})$ координаты частиц n -ого слоя в m -ом состоянии. В общем случае, как следует из (3), верно

$$\begin{cases} r_{n|m} = L^{(n|m)} r_{n|n-1} \\ \varphi_{n|m} = \varphi_{n|n-1} + \alpha^{(n|m)} \\ z_{n|m} = z_{n|n-1} (L^{(n|m)})^{-2} \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\alpha^{(n|m)} = k^{(n|m)} z_{n|n-1}, \quad (5)$$

$$L^{(n|m)} = \prod_{l=n}^m \lambda^{(l)}, \quad (6)$$

$$k^{(n|m)} = k^{(n)} + \sum_{l=n+1}^m k^{(l)} (L^{(n|l-1)})^{-2}. \quad (7)$$

4. Аффинор деформации

Из (4), (5) следует, что аффинор деформации n -ого слоя при переходе из $(n-1)$ -ого состояния в m -ое имеет вид

$$\mathbf{A}^{(n|n-1|m)} = \begin{pmatrix} L^{(n|m)} \cos \alpha^{(n|m)} & -L^{(n|m)} \sin \alpha^{(n|m)} & -kcL^{(n|m)} r_{n|n-1} \sin \alpha^{(n|m)} \\ L^{(n|m)} \sin \alpha^{(n|m)} & L^{(n|m)} \cos \alpha^{(n|m)} & k^{(n|m)} L^{(n|m)} r_{n|n-1} \cos \alpha^{(n|m)} \\ 0 & 0 & (L^{(n|m)})^{-2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В плоскости $z_{n|n-1} = 0$, учитывая (5) и, как следствие, $\alpha^{(n|m)} = 0$, можем переписать формулу (8) в виде

$$\mathbf{A}^{(n|n-1|m)} = \begin{pmatrix} L^{(n|m)} & 0 & 0 \\ 0 & L^{(n|m)} & k_m^{(n)} L_{nm} r_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & (L^{(n|m)})^{-2} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

5. Девиатор напряжений

Правая неголономная тензорная мера деформации \mathbf{E}^r , соответствующая производной Динса, имеет вид

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{E}^r|_{t=0} + \int_0^t \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} d\tau. \quad (10)$$

Тензоры \mathbf{V} , \mathbf{Q} могут быть вычислены с использованием ранее записанных формул (8), (9).

Левая неголономная тензорная мера деформации \mathbf{E}^l , по определению являющаяся решением уравнения

$$D(\mathbf{E}^l) = \mathbf{V}, \quad (11)$$

при начальном условии $\mathbf{E}^l|_{t=0} = 0$, связана с мерой \mathbf{E}^r соотношением

$$\mathbf{E}^l = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}^r \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (12)$$

Из формул (1) и (11) следует, что девиатор \mathbf{S} напряжений для гипотупругого несжимаемого материала определяется по тензору \mathbf{E}^l соотношением

$$\mathbf{S} = 2G\mathbf{E}^l. \quad (13)$$

В дальнейшем девиатор напряжений n -ого слоя в m -ом состоянии обозначим как $\mathbf{S}_m^{(n)}$. Данные обозначения опускались в формулах (10)–(13) для удобства записи. Так как формула (10) содержит интегрирование по времени, при её использовании следует учитывать смену состояний.

6. Определение напряжений в составном цилиндре

Значение скалярной функции $p^{(n|m)}$, выражающей среднее по координатам напряжение n -ого слоя в m -ом состоянии, определяется из уравнения равновесия цилиндра в проекции на радиальную ось:

$$\frac{\partial (S_{11}^{(n|m)} - p^{(n|m)})}{\partial r_{n|m}} + \frac{S_{11}^{(n|m)} - S_{22}^{(n|m)}}{r_{n|m}} = 0. \quad (14)$$

Учитывая (13), получаем:

$$p^{(n|m)} = 2G \int_{r_m}^{R_m} \frac{E_{22}^l}{\rho} d\rho, \quad (15)$$

где R_m – радиальная координата внешней границы последнего присоединённого слоя в координатах $r_m^{(m)}$.

Вычислив $p_m^{(n)}$, можно определить тензор напряжений по формуле (2), которую перепишем в виде

$$\mathbf{T}_m^{(n)} = \mathbf{S}_m^{(n)} - p_m^{(n)} \mathbf{I}. \quad (16)$$

Таким образом, полученная формула (16) позволяет вычислить поле напряжений в цилиндре.

Осевая сила в m -ом состоянии вычисляется по формуле:

$$N_m = 2\pi \int_0^{R_m} (T_m)_{33} \rho d\rho. \quad (17)$$

Крутящий момент в m -ом состоянии вычисляется по формуле:

$$M_m = 2\pi \int_0^{R_m} (T_m)_{23} \rho^2 d\rho. \quad (18)$$

7. Численные исследования

Проведены численные исследования, для чего алгоритм решения задачи был реализован в системе компьютерной алгебры Maple. В численных исследованиях число слоёв, последовательно присоединяемых к составному цилиндру, считается равным 2. Моменты времени, соответствующие моментам переходов между фазами деформации:

$$T_p^{(1)} = 1, \quad T_f^{(1)} - T_p^{(1)} = 1, \quad T_p^{(2)} - T_f^{(1)} = 1, \quad T_f^{(2)} - T_p^{(2)} = 1.$$

Радиус внешнего слоя в момент его присоединения принимается за единицу, радиус внутреннего слоя в начальный момент времени в 2 раза меньше. Параметры, характеризующие деформацию на каждом этапе, задаются на соответствующей фазе этого этапа следующим образом:

$$\lambda^{(1)} = 1 + (\lambda_1 - 1)t, \quad \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} = \frac{t - T_f^{(1)}}{10},$$

$$k^{(1)} = \frac{t - T_p^{(1)}}{10}, \quad k^{(2)} - k^{(1)} = \frac{t - T_p^{(2)}}{10}.$$

здесь λ_1 — заданный параметр, характеризующий кратность радиального удлинения внутреннего слоя в момент завершения первой фазы первого этапа деформации.

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты численных исследований — графики зависимостей осевой силы и крутящего момента от параметра деформации λ_1 . Зависимости построены для завершающего момента времени $T_f^{(2)}$. Можно видеть, что зависимости являются существенно нелинейными.

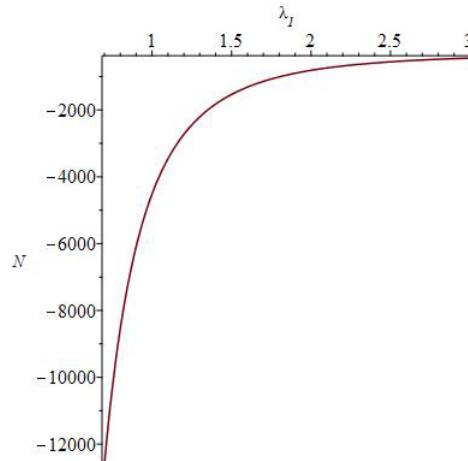
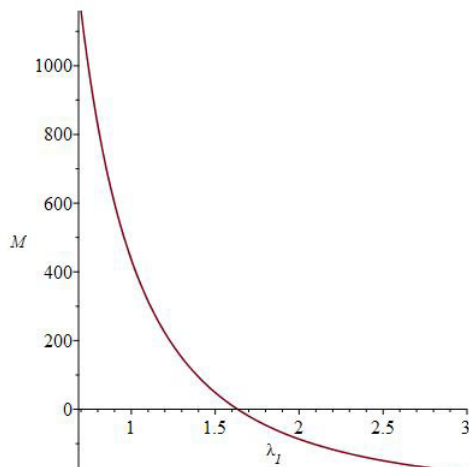


Рис. 1: Зависимость осевой силы от параметра λ_1

Рис. 2: Зависимость крутящего момента от параметра λ_1

8. Заключение

Таким образом, получено на основе теории многократного наложения больших деформаций точное аналитическое решение задачи о поэтапной деформации составного цилиндра из несжимаемого гиполупругого материала, когда на каждом этапе к цилиндру присоединяется новый слой, подвергаемый растяжению-сжатию и кручению. Подробно рассмотрены как модель гиполупругого материала, так и модель, описывающая деформацию цилиндра в данной задаче. Численные исследования демонстрируют возможность точного расчета напряжений в теле при описанных в статье деформациях. Результаты числовых расчетов показывают, что учет нелинейных эффектов в данной задаче является существенным.

Полученное решение может быть использовано при прочностном анализе элементов конструкций, изготовленных посредством последовательного присоединения слоев (например, путем намотки). Также решение может быть применено для верификации программных комплексов для расчета напряженно-деформированного состояния (систем инженерного прочностного анализа) [16,17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынова Е.Д. Процессы кручения цилиндрических образцов из несжимаемых вязкоупругих материалов Максвелловского типа // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 95–106.
2. Овчинникова Н.В. Задача о кручении гиполупругого несжимаемого цилиндра // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 3. Тверь: Тверской государственный технический университет. 2020. С. 65-72.
3. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Torsion of a Composite Nonlinear Elastic Cylinder with Inclusion at Large Initial Deformations // International Journal of Solids and Structures. 2014, V. 51, No. 6. P. 1403-1409.
4. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Torsion of a Composite Nonlinear Elastic Cylinder with a Prestressed Inclusion // Doklady Physics. 2013. V. 58, No. 12. P. 540-543.

5. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67–68. P. 244-249. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768315001973?via>
6. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008. V. 24, Issue 12. P. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>.
7. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. Truesdell K.: A first course in rational continuum mechanics. Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1972, 592 p.
9. Dienes J.K. On the analysis of rotation speed and stress in deformable bodies. *Acta Mech*. 1979. V. 32. P. 217-232.
10. Dienes J.K. A discussion of material rotation and stress rate. *Acta Mech*. 1986. V. 65. P. 1–11.
11. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука. 2017. 431 с.
12. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // *Упругость и неупругость*. М.: Московский университет. 1987. С. 68–81.
13. Бровко Г.Л. Объективные тензоры и их отображения в классической механике сплошной среды // *Известия АН. Механика твердого тела*. 2021. Т. 56. № 1. С. 65-83.
14. Финошкина А.С. Использование новых объективных производных в простейших моделях гипопругости и пластического течения с кинематическим упрочнением // *Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика, механика, информатика*. 2000. С. 160-166.
15. Финошкина А.С. К построению моделей пластичности при конечных деформациях на основе определяющих соотношений, известных при малых деформациях // *Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина*. М.: Ланд. 2006. С. 256–264.
16. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, 2017, 1797561.
17. Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, 158(1), 012049.

REFERENCES

1. Martynova, E.D. 2019, "Torsion processes of cylindrical samples from incompressible viscoelastic materials of the Maxwell type". *Prikladnaya Matematika i mekhanika (J. of Applied Mathematics and Mechanics)* vol. 83, Issue 1, pp. 95–106.

2. Ovchinnikova, N.V. 2020 "The problem of torsion of a hypoelastic incompressible cylinder". *Mathematisches modelirovanie i eksperimental'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela: Mezhy. sbornik nauch. trudov. Vypusk 3*. Tver: Tverskoy Gosudarstvenny Tekhnicheskiy Universitet. 2020, pp. 65-72.
3. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M.: "Torsion of a Composite Nonlinear Elastic Cylinder with Inclusion at Large Initial Deformations". *International Journal of Solids and Structures*, 2014, V. 51, No. 6, pp. 1403-1409.
4. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M.: "Torsion of a Composite Nonlinear Elastic Cylinder with a Prestressed Inclusion", 2013, *Doklady Physics*, V. 58, No. 12, pp. 540-543.
5. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2015. "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains", *International Journal of Solids and Structures*. vol. 67–68. pp. 244-249. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768315001973?via>
6. Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2008, "A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains", *Communications in Numerical Methods in Engineering*. vol. 24, Issue 12. pp. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>
7. Lurie, A.I. 1980, "Nonlinear theory of elasticity" Nauka, Moscow, 1980, 512 p.
8. Truesdell K. "A first course in rational continuum mechanics". Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1972, 592 p.
9. Dienes, J.K. 1979. On the analysis of rotation speed and stress in deformable bodies. *Acta Mech*. vol. 32. pp. 217-232.
10. Dienes, J.K. 1986, "A discussion of material rotation and stress rate". *Acta Mech*. vol. 65. pp. 1–11.
11. Brovko G.L.: "Constitutive relations of continuum mechanics", *Development of the mathematical apparatus and foundations of the general theory*, 2017, 431 p.
12. Brovko G.L.: "Some approaches to the construction of constitutive relations of plasticity at large deformations", *Elasticity and inelasticity*, M.: Mosk. un-t, 1987, pp. 68–81.
13. Brovko G.L.: "Objective tensors and their mappings in classical continuum mechanics", *Mechanics of Solids*, 2021, Vol. 56, no. 1., pp. 65-83.
14. Finoshkina A.S.: "Using new objective derivatives in the simplest models of hypoelasticity and plastic flow with kinematic hardening", *Tula State Univ.*, 2000, no. 6, pp. 160-166.
15. Finoshkina A.S.: "On the construction of models of plasticity at finite deformations based on constitutive relations known at small deformations", *Elasticity and Inelasticity: Proceedings of the International Scientific Symposium on the Problems of the Mechanics of Deformable Bodies Dedicated to the 95th Anniversary of A.A. Ilyushin*. M.: LENAND, 2006, pp. 256–264.
16. Konovalov, D., Verшинin, A., Zingerman, K., Levin, V. 2017. "The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes", *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 2017, paper no. 1797561.

-
17. Karpenko, V.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2016. "Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package". IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 158, no. 1, paper no. 012049.

Получено: 29.08.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-272-284

Оценка сходимости метода спектральных элементов в САЕ Fidesys на основе точного решения задачи Ламе для упругопластических материалов с помощью системы регрессионного автоматизированного тестирования¹

В. А. Левин, В. В. Козлов, Е. Д. Комолова, А. В. Филатова, М. А. Карцев

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Комолова Елена Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: komolova@cae-fidesys.com

Филатова Александра Вячеславовна — ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: filatova@cae-fidesys.com

Карцев Михаил Александрович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cartsev.mikhail@yandex.ru

Аннотация

В статье рассмотрена оценка сходимости метода спектральных элементов, реализованного в САЕ Fidesys, на основе точных аналитических решений задачи Ламе при малых деформациях в упругой постановке, а также в упругопластической постановке с использованием критерия Мизеса в рамках теории идеально пластического течения. Ввиду симметрии рассматривались четверти моделей. Численные результаты получены в пакете для прочностных расчетов САЕ Fidesys с помощью метода конечных элементов первого и второго порядка и метода спектральных элементов третьего - девятого порядка. На основании полученных результатов осуществлен анализ об определении характера уменьшения погрешностей метода спектральных элементов САЕ Fidesys при повышении порядка элементов. Исследование проводилось с помощью специализированной системы регрессионного автоматизированного тестирования. Результаты работы могут быть полезны при принятии решения об использовании метода спектральных элементов в промышленных расчетах.

Ключевые слова: автоматизированная система тестирования, автотесты, метод конечных элементов, метод спектральных элементов, экспоненциальная сходимость, САЕ Fidesys, упругопластическая модель, задача Ламе, криволинейные границы.

Библиография: 30 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов Российского научного фонда: проект №19-71-10008 (анализ изменения погрешностей численных решений при изменении порядка элементов), №22-11-00110 (получение аналитических решений задач Ламе).

Для цитирования:

В. А. Левин, В. В. Козлов, Е. Д. Комолова, А. В. Филатова, М. А. Карцев. Оценка сходимости метода спектральных элементов в CAE Fidesys на основе точного решения задачи Ламе для упругопластических материалов с помощью системы регрессионного автоматизированного тестирования // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 272–284.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-272-284

Estimation of convergence of spectral element method in CAE Fidesys based on exact solution of the Lamé problem for elastoplastic materials using an automated regression testing system

V. A. Levin, V. V. Kozlov, E. D. Komolova, A. V. Filatova, M. A. Kartsev

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Kozlov Viktor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Komolova Elena Dmitrievna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Fidesys LLC (Moscow).

e-mail: komolova@cae-fidesys.com

Filatova Alexandra Vyacheslavovna — Fidesys LLC (Moscow).

e-mail: filatova@cae-fidesys.com

Kartsev Mikhail Aleksandrovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: kartsev.mikhail@yandex.ru

Abstract

This paper considers convergence estimation of the spectral element method implemented in CAE Fidesys. It was based on exact analytical solutions of the Lamé problems in small deformations in the elastic and elastic-perfectly plastic obeying Huber-von Mises yield criterion formulations. Due to the symmetry, we consider quarters of the models. Numerical results were obtained in the CAE Fidesys strength analysis system using the finite element method for the first and second orders and the spectral element method for the third to ninth orders. Based on the results obtained, an analysis was carried out to determine the nature of the decrease in the errors of the CAE Fidesys spectral element method with an increase in the order of the elements. The study was conducted using a specialized automated testing system. The results of the work can be useful in making a decision on the use of the spectral element method in industrial calculations.

Keywords: automated testing system, autotests, finite element method, spectral element method, exponential convergence, CAE Fidesys, elastoplastic model, Lamé problem, curvilinear boundaries.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

V. A. Levin, V. V. Kozlov, E. D. Komolova, A. V. Filatova, M. A. Kartsev, 2022, "Estimation of convergence of spectral element method in CAE Fidesys based on exact solution of the Lamé problem for elastoplastic materials using an automated regression testing system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 272–284.

1. Введение

CAE Fidesys – программа прочностного анализа, которая позволяет решать широкий спектр инженерных задач [1-4]. Программа включает в себя возможность применения [5, 6]:

- несколько десятков свойств материалов,
- разные типы конечных элементов,
- 25 видов граничных условий,
- 5 видов начальных условий,
- 9 порядков элементов,
- 10 видов расчетов.

Для отслеживания производительности и корректности расчетов в САЕ программе необходимо достаточное количество функциональных тест-кейсов (далее тестов), основанных на механических постановках с апробированными результатами [7]. На данный момент число тестов превышает 1000. С обновлением функциональных возможностей программы количество тестов увеличивается. Запуск и поддержка такого количества тестов, а также анализ полученных результатов в ручном режиме – решение неоптимальное, поэтому с помощью языка программирования python версии 3.8 [8, 9] была разработана система регрессионного автоматизированного тестирования (далее система автотестов), с помощью которой в ежедневном режиме отслеживается регресс или прогресс качества сборок прочностного пакета CAE Fidesys и производится оценка набора прикладных задач по механике деформированных твёрдых тел для функционального тестирования программы.

Система автотестов включает в себя такие ключевые элементы как:

- программа распределенного тестирования,
- генераторы отчётов о состоянии сборки,
- локальный проект запуска авто-тестов,
- проект по созданию html-отчета,
- проверка цифровых подписей,
- служебные инструменты,
- анализаторы скриптов,
- программа гиперкуб,
- тег генератор.

С помощью системы автотестов пользователь может получить результаты по конкретным выборкам тестов, задав требуемые параметры на запуск системы. Все параметры системы автотестов записываются в пользовательских файлах с соответствующими комментариями и указаниями, ввиду чего для работы с системой знания и навыки программирования не требуются. Система автотестов развивается и дорабатывается с обновлением возможностей CAE Fidesys.

В CAE системах используются различные численные методы при решении задач [10, 11]. Так, помимо общеизвестного метода конечных элементов (МКЭ) [12, 13], есть ряд методов, обладающих дополнительными преимуществами, в частности метод спектральных элементов (МСЭ) [14-18]. Например, МСЭ позволяет без перестроения сетки повышать порядок элементов. Существуют исследования [19], показывающие, что в МСЭ вычислительная ошибка уменьшается экспоненциально по мере роста порядка аппроксимирующих многочленов (порядка элементов). Поскольку в CAE Fidesys наряду с МКЭ реализован МСЭ, одной из задач системы автотестов является проверка реализации МСЭ в CAE Fidesys на основе существующих тестов и оценки сходимости МСЭ CAE Fidesys к точному решению при повышении порядка элементов [20].

Упругие и упругопластические модели являются одним из центральных видов расчетов в инженерии. В статье [21] был проведен анализ возможностей МСЭ при численном решении задач пластичности с помощью пакета CAE Fidesys. В ходе данного исследования МСЭ показал свою эффективность в решении физически и геометрически нелинейных задач механики. Но в работе [21] не удалось определить характер уменьшения погрешностей при повышении порядка спектральных элементов, поскольку ввиду сложности постановок точные эталонные результаты неизвестны. Поэтому для текущего исследования были также выбраны задачи Ламе в упругой [22] и упругопластической постановках [23], имеющие точные аналитические решения. Задачи с аналитическими решениями обладают рядом преимуществ, описанных в [24-30], а также позволяют определить точность численного метода.

Для решения поставленной задачи существующая система автотестов была модифицирована таким образом, чтобы стал возможным запуск тестов на всех реализованных в CAE Fidesys порядках элементов (1-9). При этом исходная модель запускаемого теста не меняется за исключением изменения текущего порядка. Таким образом, при наличии одного функционального теста пользователь получает девять результатов расчета данного теста на каждом из возможных порядков элементов.

Результаты, описанные в текущем исследовании, могут быть полезны для развития применения численных методов в различных областях механики сплошной среды.

2. Аналитическое решение задачи о двухстороннем нагружении давлением упругой круглой цилиндрической трубы

Рассматривается задача о круглой упругой цилиндрической трубе с внутренним и внешним радиусами a , b соответственно, находящейся под воздействием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений. Концы трубы закреплены так, что перемещения вдоль её оси отсутствуют, а перемещения в поперечном направлении ничем не стеснены (рис. 1).

Таким образом, имеет место плоско-деформированное состояние среды. Материал подчиняется закону Гука [22]

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – параметры Ламе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

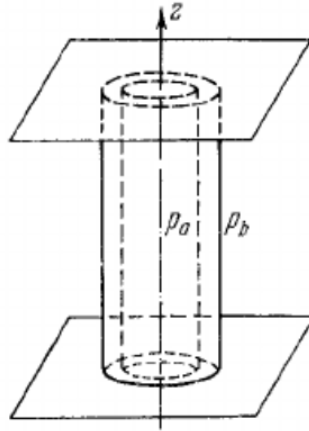


Рис. 1: Труба под действием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений

Аналитические представления компонент тензора напряжений в полярных координатах записывается следующими функциями в зависимости от полярного радиуса r [22]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Также можно получить аналитическое описание деформированного состояния, но оно не является предметом изучения в данной работе.

3. Аналитическое решение задачи о нагружении давлением упругопластической круглой цилиндрической трубы

В качестве развития работы для исследования изменения погрешностей численного решения от изменения порядка при использовании спектральных упругопластических элементов САЕ Fidesys рассмотрена задача Ламе, аналогичная представленной в п. 2, под действием давления только на внутренней поверхности. В дополнение к постановке п. 2 полагается, что пластическое течение характеризуется критерием пластичности Мизеса, упрочнение отсутствует.

Аналитическое решение получено Л.М. Качановым [23]. Граница с упругой и пластической зоны ($a \leq c \leq b$) определяется из решения уравнения

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = \frac{p_a}{2\tau_s}, \quad (3)$$

где $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$, σ_s – предел текучести при растяжении.

Тогда в пластической зоне $a \leq r \leq c$ компоненты тензора напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{rr} = -p_a + 2\tau_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2\tau_s. \quad (4)$$

В упругой зоне $c \leq r \leq b$ компоненты тензора напряжений согласно [23] равны

$$\sigma_{rr} = -\tilde{p} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \tilde{p} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right), \quad (5)$$

где $\tilde{p} = - (2\tau_s \ln \frac{c}{a} - p_a) \frac{c^2}{b^2 - c^2}$.

4. Численные решения задачи Ламе в упругой и упругопластической постановках в CAE Fidesys. Анализ результатов

С учётом представленных в п. 2, 3 постановок задач при моделировании в CAE Fidesys для минимизации числа используемых элементов и недопущению движения тела как жесткого были рассмотрены в плоско-деформированной постановке задачи теории упругости и теории упругопластичности для четверти цилиндра четверть геометрии и добавлены условия симметрии.

Для решения задачи в упругой постановке использовались следующие безразмерные характеристики модели: $E = 200 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\frac{b}{a} = 2$, $p_a = 1 \cdot 10^6$, $p_b = 0.5 \cdot 10^6$. С помощью автотестов осуществлены расчеты модели для порядков элементов 1-9. В случае упругопластической постановки использовались следующие безразмерные характеристики модели: $E = 200 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\frac{b}{a} = 2$, $p_a = 1 \cdot 10^6$, $\sigma_2 = 24 \cdot 10^6$. Для моделирования была выбрана сетка из 200 элементов для упругой постановки и 1500 элементов для упругопластической. Для ускорения расчетов в упругопластической постановке с помощью автотестов осуществлены расчеты для порядков элементов 1-6.

Проведенные расчеты позволили получить численные зависимости окружного напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ для обеих постановок. Соответствующие аналитические представления записаны по формулам (2) и (3) – (5). Выявлено, что отличия численных зависимостей $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ для порядков 4 – 9 от аналитического для любого значения полярного радиуса не превышают сотой доли процента. Поэтому на рис. 2 и 3 представлены численные зависимости окружного напряжения для порядков 1 – 4 и аналитическая зависимость

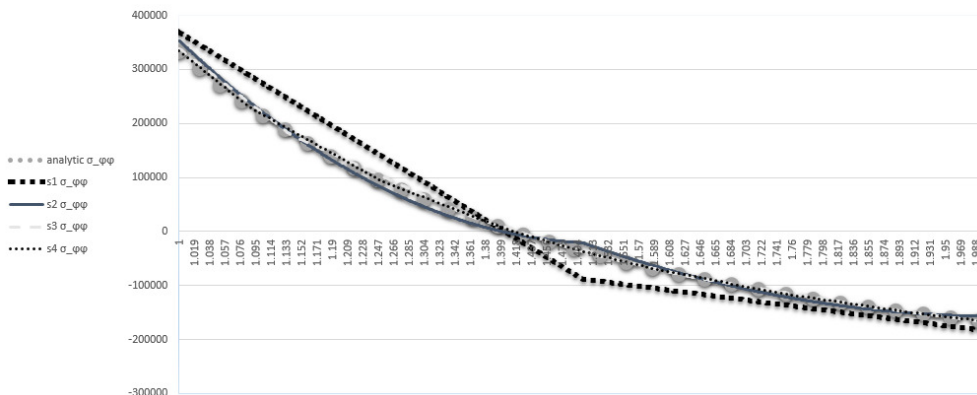


Рис. 2: Зависимости окружного напряжения от радиальной координаты $\frac{r}{a}$ при решении задачи для упругого материала: *analytic* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – аналитическое решение (крупные круги), *s1* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – численное решение: *s1* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на первом порядке (квадратный пунктир), *s2* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на втором порядке (непрерывная линия), *s3* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на третьем порядке (прерывистая линия), *s4* $\sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на четвертом порядке (мелкие круги)

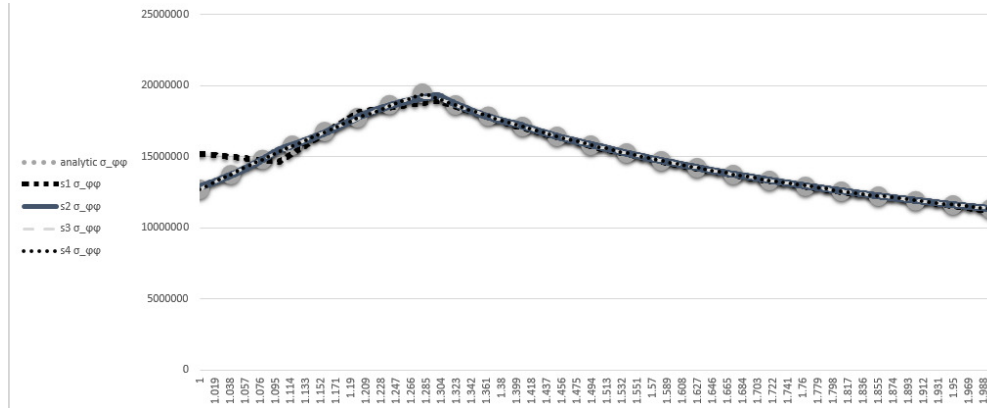


Рис. 3: Зависимости окружного напряжения от радиальной координаты $\frac{r}{a}$ при решении задачи для упругопластического материала: $analytic \sigma_{\varphi\varphi}$ – аналитическое решение (крупные круги), $s1 \sigma_{\varphi\varphi}$ – $s4 \sigma_{\varphi\varphi}$ – численное решение: $s1 \sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на первом порядке (квадратный пунктир), $s2 \sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на втором порядке (непрерывная линия), $s3 \sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на третьем порядке (прерывистая линия), $s4 \sigma_{\varphi\varphi}$ – численные значения на четвертом порядке (мелкие круги)

Из рис. 2 и 3 следует, что с повышением порядка погрешности относительно аналитического решения уменьшаются и уже для 3-го порядка в упругой постановке и для 2-го порядка в упругопластической постановке не превышают инженерной погрешности 5%.

Рассмотрим характер уменьшения погрешностей относительно эталонного результата для радиальной компоненты численного тензора напряжений $(\sigma_{numeric})_{rr} |_{r=a}$ на внутреннем радиусе в зависимости от порядка элемента, которые можно определить формулой

$$\varepsilon_{\sigma_{rr}} |_{r=a} = \left| \frac{(\sigma_{numeric})_{rr} |_{r=a} - (\sigma_{analytic})_{rr} |_{r=a}}{(\sigma_{analytic})_{rr} |_{r=a}} \right|.$$

Эталонное значение $(\sigma_{analytic})_{rr} |_{r=a} = p_a$, удовлетворяющее граничному условию, можно получить из выражения (1) для упругого и (4) для упругопластического случаев. На рис. 4 и 5 представлены соответствующие зависимости $\ln(\varepsilon_{\sigma_{rr}} |_{r=a})$

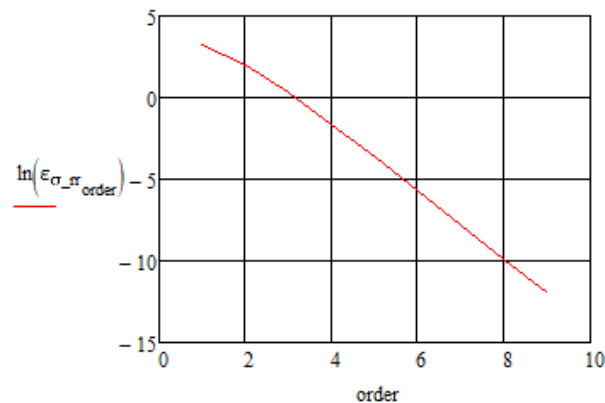


Рис. 4: Зависимость логарифма погрешности для радиального напряжения σ_{rr} на внутренней границе цилиндра от порядка элементов при решении задачи в упругой постановке

Из рис. 4 и 5 следует практически линейная зависимость уменьшения логарифма погрешностей для радиального напряжения. Таким образом, подтверждается, что в МСЭ САЕ Fidesys

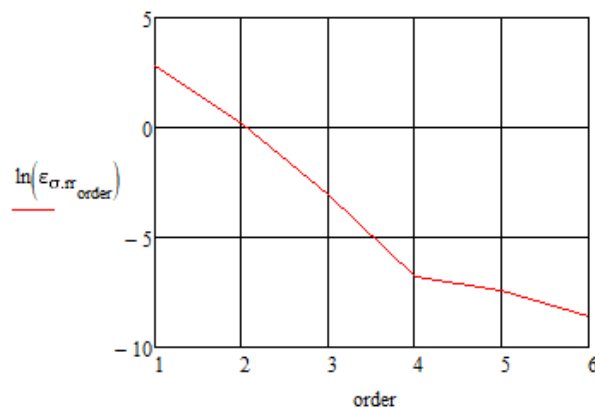


Рис. 5: Зависимость логарифма погрешности для радиального напряжения σ_{rr} на внутренней границе цилиндра от порядка элементов при решении задачи в упругопластической постановке

вычислительная ошибка уменьшается экспоненциально по мере роста порядка аппроксимирующих многочленов (порядка элементов) для рассматриваемых постановок задачи Ламе.

5. Заключение

В работе исследован характер сходимости численных решений, полученных с использованием САЕ Fidesys, к точному решению на примере задачи Ламе в упругой и упругопластической постановках. Установлено, что повышение порядка элементов, расширенное в САЕ Fidesys возможностью использования спектральных элементов, позволяет без перестроения пользователем конечно-элементной сетки получить экспоненциальное падение погрешностей. Использование спектральных элементов, начиная с третьего порядка, позволило для всей области модели получить погрешности, не превышающую инженерную точность 5%. Данный факт был подтвержден и в случае использования грубой конечно-элементной сетки при рассмотрении упругой постановки задачи Ламе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. А., Зингерман К. М., Яковлев М. Я., Курденкова Е. О., Немтинова Д. В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью САЕ Fidesys // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №2. С. 528-541. <http://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-528-541>
2. Вершинин А. В., Зингерман К. М., Коновалов Д. А., Левин В. Ан. Численное моделирование в САЕ Fidesys процесса аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко. 2019. Т. 2. С. 642-647.
3. Левин В. А. Теория многократного наложения больших деформаций, развитие для решения междисциплинарных задач. Пути ее реализации в пакете Фидесис для проведения прочностного анализа в новых отраслях промышленности // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №3. С. 518-537. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-524-542>

4. Kukushkin A. V., Konovalov D. A., Vershinin A. V., Levin V. A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1158, № 2. P. 032022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032022>
5. Официальный сайт ООО «Фидесис». URL: <https://www.cae-fidesys.com/documentation> (дата обращения 15.09.2022)
6. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015. 408 с.
7. Горбаченко И. М. Оценка качества программного обеспечения для создания систем тестирования // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 6-4. С. 823-827.
8. Прохоренок Н. А. Python 3 и PyQt. Разработка приложений. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 704 с.
9. Маккини У. Python и анализ данных / пер. с англ. А. А. Слинкина. М.: ДМК Пресс, 2020. 540 с.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Высш. Шк. 1976. 398 с.
11. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. М.: Высш. шк. 1994. 544 с.
12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* 7th edition // Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom. 2013. P. 756. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>
13. Fish J., Belutschko T. *A First Course in Finite Elements* // John Wiley & Sons Ltd, New York. 2007. P. 319. <https://doi.org/10.1002/9780470510858.index>
14. Vershinin A. V., Levin V. A., Kukushkin A. V., Konovalov D. A. Structural analysis of assemblies using non-conformal spectral element method // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 747. 2020. P. 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/747/1/012033>
15. Orel B., Perne A. Chebyshev-Fourier Spectral Methods for Nonperiodic Boundary Value Problems // *Journal of Applied Mathematics*. 2014. P. 1-10. <https://doi.org/10.1155/2014/572694>
16. Petrovskiy K. A., Vershinin A. V., Levin V. A. Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 158. 2016. P. 012077. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012077>
17. Karpenko V. S., Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 158. 2016. P. 012049. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012049>
18. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modelling and Simulation in Engineering*. 2017. P. 1797561. <https://doi.org/10.1155/2017/1797561>
19. Solin P., Segeth K., Dolezel I. *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/CRC Press. 2003. P. 408.

20. Козлов В.В, Комолова Е.Д., Филатова А.В. Использование системы автотестов CAE Fidesys для оценки сходимости метода спектральных элементов к точному решению при повышении порядка элементов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 20–26 апреля 2021 года. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ. 2021. С. 114-115.
21. Kozlov V. V., Komolova E. D., Kartsev M. A., Filatova A. V. Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package // Continuum Mech. Thermodyn. 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>
22. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука. 1970. 568 с.
23. Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. North-Holland. Amsterdam. 1971. P. 482. https://doi.org/10.1007/978-0-387-33599-5_3
24. Levin V. A., Zubov L. M., Zingerman K. M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 67-68. P. 244-249. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.024>
25. Levin V. A., Zubov L. M., Zingerman K. M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 100-101. P. 558-565. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.029>
26. Levin V. A., Zubov L. M., Zingerman K. M. Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains // Doklady Physics. 2015. Vol. 60. P. 24-27. <https://doi.org/10.1134/S102833581501005X>
27. Zingerman K. M., Levin V. A. Some qualitative effects in the exact solutions of the Lamé problem for large deformations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. P. 205-219. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.012>
28. Levin V. A., Zubov L. M., Zingerman K. M. An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2021. Vol. 88. P. 104237. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104237>
29. Levin V. A., Podladchikov Y. Y., Zingerman K. M. An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2021. Vol. 90. P. 104345. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>
30. Levin V. A., Zubov L. M., Zingerman K. M. Large bending strains in an orthotropic beam with a preliminarily stretched or compressed layer: Exact solution // Doklady Physics. 2016. Vol. 61. P. 407-411. <https://dx.doi.org/10.1134/S1028335816080127>

REFERENCES

1. Levin, V. A., Zingerman, K. M., Yakovlev, M. Ya., Kurdenkova, E. O., Nemtinova, D. V. 2019, "On the numerical estimation of the effective characteristics of periodic cellular structures using beam and shell finite elements using CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 528-541. <http://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-528-541>

2. Vershinin, A. V., Zingerman, K. M., Konovalov, D. A., Levin, V. An. 2019, "Numerical modeling in CAE Fidesys of the additive manufacturing process based on the method of spectral elements on nonconformal grids", *Modern problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the international conference dedicated to the 80th anniversary of Academician V. A. Sadovnichy*, vol. 2, pp. 642-647.
3. Levin, V. A. 2017, "The theory of multiple imposition of large deformations, development for solving interdisciplinary problems. Ways of its implementation in the Fidesys package for carrying out strength analysis in new industries", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, no. 3, pp. 518-537. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-524-542>
4. Kukushkin, A. V., Konovalov, D. A., Vershinin, A. V., Levin, V. A. 2019, "Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes", *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1158, no. 2, pp. 032022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032022>
5. Official site of Fidesys LLC. URL: <https://www.cae-fidesys.com/documentation> (accessed 09/15/2022)
6. Morozov, E. M., Levin, V. A., Vershinin, A. V. 2015, *Prochnostnoy analiz: Fidesys v rukakh inzhenera* [Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer], LENAND, Moscow, Russia.
7. Gorbachenko, I. M. 2013, "Quality assessment of software for creating testing systems", *Fundamental research*, no. 6-4, pp. 823-827.
8. Prokhorenok, N. A. 2012, *Python 3 i PyQt. Razrabotka prilozheniy* [Python 3 and PyQt. Application Development], BHV-Petersburg, St. Petersburg, Russia.
9. Mackini, W. 2020, *Python i analiz dannykh* [Python and data analysis], Translated by Slinkina, A. A., DMK Press, Moscow, Russia.
10. Kalitkin, N. N. 1976, *Chislennyye metody* [Numerical methods], Higher. school, Moscow, Russia.
11. Amosov, A. A., Dubinsky, Yu. A., Kopchenov, N. V. 1994, *Vychislitel'nyye metody dlya inzhenerov: ucheb. posobiye* [Computational methods for engineers: textbook], Higher. school, Moscow, Russia.
12. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. 2013, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals 7th edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>
13. Fish, J., Belutschko, T. 2007, *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons Ltd, New York. <https://doi.org/10.1002/9780470510858.index>
14. Vershinin, A. V., Levin, V. A., Kukushkin, A. V., Konovalov, D. A. 2020, "Structural analysis of assemblies using non-conformal spectral element method", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no. 747, pp. 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/747/1/012033>
15. Orel, B., Perne, A. 2014, "Chebyshev-Fourier Spectral Methods for Nonperiodic Boundary Value Problems", *Journal of Applied Mathematics*, pp. 1-10. <https://doi.org/10.1155/2014/572694>
16. Petrovskiy, K. A., Vershinin, A. V., Levin, V. A. 2016, "Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no. 158, pp. 012077. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012077>

17. Karpenko, V.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2016, "Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no. 158, pp. 012049. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012049>
18. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. 2017, "The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes", *Modelling and Simulation in Engineering*, pp. 1797561. <https://doi.org/10.1155/2017/1797561>
19. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. 2003, *Higher-Order Finite Element Methods*, Chapman & Hall/CRC Press, London, United Kingdom.
20. Kozlov, V.V., Komolova, E.D., Filatova, A.V. 2021, "Using the CAE Fidesys autotest system to assess the convergence of the spectral element method to the exact solution with increasing element order", *Lomonosov Readings. Scientific Conference. Section of mechanics. April 20-26, 2021. Abstracts of reports. Publishing House of Moscow State University*, pp. 114-115.
21. Kozlov, V.V., Komolova, E.D., Kartsev, M.A., Filatova, A.V. 2022, "Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package", *Continuum Mech. Thermodyn.* <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>
22. Sedov, L.I. 1970, *Mekhanika sploshnoy sredy, tom 2* [Continuum mechanics, volume 2], Nauka, Moscow, Russia.
23. Kachanov, L.M. 1971, *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland, Amsterdam. https://doi.org/10.1007/978-0-387-33599-5_3
24. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2015, "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 67-68, pp. 244-249. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.024>
25. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2016, "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 100-101, pp. 558-565. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.029>
26. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2015, "Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains", *Doklady Physics*, vol. 60, pp. 24-27. <https://doi.org/10.1134/S102833581501005X>
27. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2012, "Some qualitative effects in the exact solutions of the Lamé problem for large deformations", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 76, pp. 205-219. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.012>
28. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2021, "An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 88, pp. 104237. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104237>
29. Levin, V.A., Podladchikov, Y.Y., Zingerman, K.M. 2021, "An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large

deformations“, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 90, pp. 104345. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>

30. Levin, V. A., Zubov, L. M., Zingerman, K. M. 2016, “Large bending strains in an orthotropic beam with a preliminarily stretched or compressed layer: Exact solution“, *Doklady Physics*, vol. 61, pp. 407-411. <https://dx.doi.org/10.1134/S1028335816080127>

Получено: 29.08.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-285-307

Теоретический и численный анализ локализации пластических деформаций в изотропных дилатирующих неассоциативных средах в условиях плоской деформации¹

В. А. Левин, К. Ю. Крапивин

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Крапивин Кирилл Юрьевич — ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: k.krapiwn@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена предельному равновесию и локализации пластических деформаций вдоль сдвиговых полос в пластических дилатирующих средах. Получены уравнения характеристик систем уравнений для напряжений и скоростей в плоскодеформированном состоянии для произвольной функции поверхности текучести с зависимостью от первых двух инвариантов и неассоциативным законом течения в рамках жесткопластического подхода. Получены уравнения для напряжений вдоль характеристик в предельном состоянии и исследована область гиперболичности. Приведена численная модель решения упруго-пластической задачи галеркиновскими уравнениями на спектральных элементах высокого порядка. Проведены численные эксперименты для линейной функции поверхности текучести с целью установить границы диапазона возможных наклонов сдвиговых полос и проэкзаминировать теоретические результаты.

Ключевые слова: локализация деформаций, полосы сдвига, пластичность, конечные элементы, спектральные элементы.

Библиография: 44 названий.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. Ю. Крапивин. Теоретический и численный анализ локализации пластических деформаций в изотропных дилатирующих неассоциативных средах в условиях плоской деформации // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 285–307.

¹Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (п. 1-3 проект 22-11-00110, п. 4-6 проект № 19-71-10008).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-285-307

**Theoretical and numerical plastic strain localization analysis
at plane strain of isotropic dilating non-associated media
at plane strain conditions**

V. A. Levin, K. Yu. Krapivin

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Krapivin Kirill Yurievich — CAE Fidesys (Moscow).

e-mail: k.krapivn@gmail.com

Abstract

The article is devoted to the limit plastic state and localization of plastic deformations along shear bands in dilating media with a non-associative flow rule. The equations of the characteristics of systems of equations for stresses and velocities in a plane strain state for an arbitrary function of the yield surface depend on the first two invariants in the rigid-plastic framework are obtained. Equations for stresses along the characteristics for the limit state and the condition of their hyperbolicity are obtained. A numerical model of the solution of the elastic-plastic problem by Galerkin equations on high-order spectral elements is presented. Numerical experiments have been carried out for the linear function of the yield surface in order to establish the boundaries of the range of possible slopes of the shear bands and to test the theoretical results.

Keywords: strain localization, shear band, plasticity, finite elements, spectral elements.

Bibliography: 44 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. Yu. Krapivin, 2022, "Theoretical and numerical plastic strain localization analysis at plane strain of isotropic dilating non-associated media at plane strain conditions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 285–307.

1. Введение

Явление, часто наблюдаемое при пластическом деформировании - это образование локализованных полос сдвига (*shear bands*) При локализации большие деформации могут накапливаться в узких полосах, являясь прекурсором дальнейшего разрушения. Это явление замечали еще Кулон (1776), Треска (1864), Мор (1900) [1]. Локализация может встречаться в разнообразных твердых телах, например, полосы Людерса размером в микрон в металлах (Надаи (1950) [2]), полосы сдвига некоторой конечной ширины в глинах, грунтовых породах и горных массивах. Механизмы ответственные за образование полос сдвига сильно различаются в зависимости от материала. Однако общей чертой может являться то, что они возникают в результате неустойчивости неупругого поведения.

Первыми основополагающим работами, получившими дальнейшее развитие, являются работы Прандтля (1920) [3], предложившего концепцию жесткопластического тела, Хенки

(1923)[4], Гейрингер (1930) [5], Михлина (1934)[6], Менделя (1942) [7]. Хиллом (1950) [8], Качановым (1964) [9], Ивлевым (1966) [10], Фрейденталь (1958) [11] в рамках жесткопластического тела для материалов, поведение которых не зависит от давления построена теория линий скольжения, линии представляют собой характеристики определяющих гиперболических уравнений. Соколовским [12] уравнения расширены на среды с зависимостью от давления, сами уравнения остались гиперболическими.

Плоская задача достаточно хорошо изучена на сегодняшний день. Задача является статически определимой и сводится к геометрическому расположению характеристических линий. Полная система уравнений плоской задачи состоит из двух уравнений для скоростей и двух уравнений для напряжений. При ассоциированном с условием пластичности законом течения характеристики двух систем уравнений совпадают.

Немат-Нассер (1980) [13] указал на важность использования неассоциативных законов течения для гранулированных сред как при малых, так и при больших деформациях. Вследствие отсутствия нормальности с поверхностью текучести возникает несоосность главных направлений девиаторов напряжений и девиаторов пластических деформаций и образуются два различных направления характеристик. В геотехнике для материала Мора-Кулона эти направления носят название Роско и Кулона.

Позже условия возникновения и направления поверхностей локализации в упруго - пластических материалах были исследованы Хиллом (1958, 1962) [15, 16] Томасом (1960) [17], Менделем (1964, 1966) [18, 19], Рудницким и Райсом (1975, 1976) [20, 21] как проявление неустойчивости. Основываясь на представлениях о неустойчивости для упругих тел (Адамар (1902) [14]) условие бифуркации деформации, то есть, сингулярность упругопластического акустического тензора, выводится из комбинации кинематики Максвелла и условия непрерывности нормальных напряжений на поверхностях разрыва.

Ottosen (1991) [22] дал явное выражение наклонов линий сдвига плоской задаче и показал. Бифуркационный анализ допускает возможность целого спектра между этими направлениями

Механизм локализаций на сегодняшний день до конца не изучен. Современные исследования прибегают к численному моделированию локализационных процессов, например, [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

В связи с этим, в данной работе выписываются уравнения характеристик напряжений и скоростей и соотношения вдоль них в рамках жестко-пластического тела для материалов с зависимостью от давления для функции поверхности текучести произвольного вида. Приводятся теоретические решения для двух геометрических типов линий скольжения: логарифмические спирали в осесимметричной задаче растяжения плоскости с круговым вырезом и прямолинейные отрезки в задаче растяжения полосы с круговым вырезом. Приводится численная модель. Аналитические результаты проверяются независимым численным экспериментом в упруго-пластической постановке.

2. Определяющие уравнения

Условие текучести с зависимостью от первого и второго инвариантов напряжений в общем случае для плоской задачи записывается в виде [8, 10]:

$$F(\tau, \sigma) = 0, \quad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, $\tau = \frac{1}{2}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2)^{1/2}$.

В пространственном случае поверхность текучести зависит от всех компонент тензора напряжений и записывается в виде выпуклой и дифференцируемой функции:

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2)$$

или, эквивалентно, в терминах инвариантов напряжений:

$$f(p, q) = 0, \quad (3)$$

где $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, $q = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ji}}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij}$.

Пусть $g(p, q)$ пластический потенциал. Закон пластического течения:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}\Lambda_{ij}, \\ \Lambda_{ij} &= \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя (4) по частям устанавливается соотношение между деформациями и напряжениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\left(\frac{1}{3}g_p\delta_{ij} + \frac{3}{2}g_q\frac{s_{ij}}{q}\right), \quad (5)$$

где $g_p = \frac{\partial g(p, q)}{\partial p}$, $g_q = \frac{\partial g(p, q)}{\partial q}$, откуда следуют выражения для интенсивности необратимых деформаций и объемной части необратимых деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\lambda}f_p, \quad \dot{e}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}f_q, \quad (6)$$

и связь между ними:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{f_p}{f_q}\dot{e}_{eq}^p. \quad (7)$$

В условиях плоской деформации $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Компонета $\sigma_{33} \neq 0$ должна быть исключена из условия. Из (5) определяется напряжение σ_{33} :

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{3}\frac{g_p}{g_q}q + \sigma, \quad (8)$$

p, q выражаются через τ, σ :

$$p = -\frac{1}{9}\frac{g_p}{g_q}q + \sigma, \quad q = \left(\frac{3}{1 - (\frac{1}{3}\frac{g_p}{g_q})^2}\right)^{1/2}\tau. \quad (9)$$

Используя последние формулы (8) и (9) условие пластичности (2) приводится к виду (1). Условие (1) удовлетворяется если записать напряжения через главные напряжения используя известные формулы Леви

$$\sigma_{11} = \sigma + \Sigma(\sigma)\cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = \sigma - \Sigma(\sigma)\cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \Sigma(\sigma)\sin 2\psi, \quad (10)$$

где ψ угол, образованный осью Ox_1 и первым главным направлением тензора напряжений, функционал $\Sigma(\sigma)$ зависит от функции поверхности текучести (2). Введем переменную $\varkappa_\sigma(\sigma) = \frac{\partial \Sigma(\sigma)}{\partial \sigma}$. Уравнения (10) вместе с уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (11)$$

образуют систему двух уравнений для двух неизвестных σ и ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} &= \frac{2\Sigma(\sigma)}{1 - \varkappa_\sigma^2(\sigma)} \left(\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - (\cos 2\psi - \varkappa(\sigma)) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} &= \frac{2\Sigma(\sigma)}{1 - \varkappa_\sigma^2(\sigma)} \left(-(\cos 2\psi + \varkappa(\sigma)) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) в случае гиперболичности имеют два семейства характеристик, называемых α , $-\beta$ — характеристиками, рис. 1. Дифференциальные уравнения характеристик:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \kappa_\sigma^2(\sigma)}}{\cos 2\psi + \kappa_\sigma(\sigma)} \quad (13)$$

$|\kappa(\sigma)| < 1$ является условием гиперболичности системы (12). Угол между характеристиками ζ в общем случае зависит от среднего напряжения σ и равен:

$$\tan \frac{\zeta_\sigma(\sigma)}{2} = \sqrt{\frac{1 - \kappa_\sigma(\sigma)}{1 + \kappa_\sigma(\sigma)}} \quad (14)$$

Характеристики ортогональны только когда $\kappa(\sigma) = 0$. Обозначим через $\theta_{\alpha, \beta}$ угол наклона α —, β — характеристик к оси Ox_1 . Направления главных напряжений делят угол между характеристиками пополам:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= \psi + \zeta_\sigma(\sigma)/2 \text{ along } \alpha\text{-line} \\ \theta_\beta &= \psi - \zeta_\sigma(\sigma)/2 \text{ along } \beta\text{-line} \end{aligned} \quad (15)$$

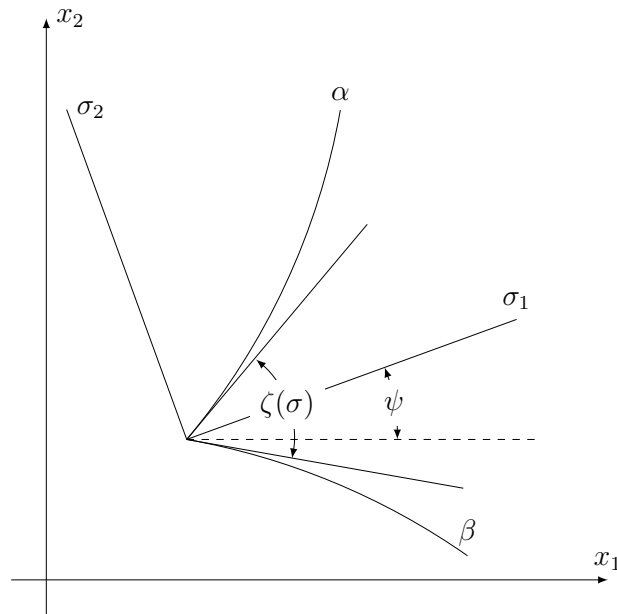


Рис. 1: α —, β — семейства характеристик и главные напряжения σ_1, σ_2 .

Введем следующий функционал:

$$\Omega(\sigma) = \int \frac{\sqrt{1 - \kappa^2(\sigma)}}{2\Sigma(\sigma)} d\sigma. \quad (16)$$

Тогда следующее уравнение будет соотношением для напряжений вдоль α —, β — характеристик :

$$\Omega(\sigma) \pm \psi = \text{const} \quad (17)$$

Используя закон пластического течения (5) и уравнения (10) выписываются уравнения для скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \cot 2\psi \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \sin 2\psi - \varkappa_v(\sigma) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения характеристик уравнений для скоростей:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \varkappa_v^2(\sigma)}}{\cos 2\psi + \varkappa_v(\sigma)} \quad (19)$$

Угол ζ_v между характеристиками уравнений скоростей:

$$\tan \frac{\zeta_v(\sigma)}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varkappa_v(\sigma)}{1 - \varkappa_v(\sigma)}} \quad (20)$$

Пусть v_α, v_β компоненты скорости вдоль $\alpha-, \beta-$ семейств характеристик. Тогда соотношения для них вдоль характеристик будут:

$$\begin{aligned} \cos \zeta dv_\alpha &= (v_\alpha \sin \zeta + v_\beta) d\theta \\ \cos \zeta dv_\beta &= -(v_\alpha + v_\beta \sin \zeta) d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

Данные уравнения впервые были получены Гейрингер [5]. Из них следует отсутствие удлинения в направлении характеристик:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} = 0. \quad (22)$$

Таким образом, характеристики уравнений для напряжений и скоростей различны и имеют различные механические свойства. Если закон течения ассоциирован с условием пластичности, то $\varkappa_v(\sigma) = \varkappa_\sigma(\sigma)$, характеристики совпадают

Рассмотрим функцию поверхности текучести с линейной зависимостью от p, q

$$f(p, q) = q + \eta p - k = 0 \quad (23)$$

и пластический потенциал

$$g(p, q) = q + \bar{\eta} p \quad (24)$$

Переходя к виду $F(\tau, \sigma) = 0$ условие текучести переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tau &= \Sigma(\sigma), \\ \Sigma &= \varkappa_\sigma(\sigma) \left(\sigma - \frac{k}{\eta} \right), \quad \varkappa_\sigma(\sigma) = -\sqrt{3}\eta \frac{\sqrt{9 - \bar{\eta}^2}}{9 - \eta\bar{\eta}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varkappa_v = -\frac{\sqrt{3}\bar{\eta}}{\sqrt{9 - \bar{\eta}^2}} \quad (26)$$

Интеграл уравнений (17) будет

$$\ln \left(\sigma - \frac{k}{\eta} \right) = \pm \frac{2\varkappa_\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa_\sigma^2}} \psi + \text{const.} \quad (27)$$

В отсутствии зависимости функции поверхности текучести от давления, $\eta = 0$, получаем условие Мизеса, при $|\eta| = 3/2$ - условие Ранкина.

При $\eta = 0$, уравнения (19), (27) называются интегралами Хенки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \tan \theta & \quad \sigma - \frac{2k}{\sqrt{3}}\theta = \text{const}_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\cot \theta & \quad \sigma + \frac{2k}{\sqrt{3}}\theta = \text{const}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Вследствие линейности функции поверхности текучести $\varkappa(\sigma)$ является константой; зависит только от параметров материала $\eta, \bar{\eta}$. Следовательно, угол между α и β характеристиками ζ постоянен на всей области. Можно заметить, направление характеристик скоростей зависит только от параметра $\bar{\eta}$, в то время как направление характеристик напряжений зависит от обоих параметров $\eta, \bar{\eta}$, входящих в условие текучести и пластический потенциал.

При параметре $\bar{\eta} = 0$ получаем условие пластической несжимаемости и условие текучести вида:

$$\tau + \eta/\sqrt{3}\sigma = k, \quad (29)$$

для которого условием гиперболичности будет $|\eta| < \sqrt{3}$. При ассоциированном законе течения, $\eta = \bar{\eta}$, условием гиперболичности становится $|\eta| < 3/2$.

Подставляя в (25), (26) $\varkappa_\sigma = \sin \varphi$, $\varkappa_v = \sin \bar{\varphi}$ получаем условие пластичности Мора-Кулона

$$\tau + \sigma \sin \varphi = k_c \cos \varphi, \quad (30)$$

где k_c - когезия (сцепление) материала, φ - угол внутреннего трения, $\bar{\varphi}$ - угол дилатансии. Уравнения напряжений и скоростей становятся всегда гиперболическими за исключением параболического случая при $\varphi = \pm 90^\circ$ (условие Ранкина). Зависимости наклона характеристик друг к другу ζ от угла внутреннего трения и угла дилатансии становятся явными:

$$\frac{\zeta_\sigma}{2} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad \frac{\zeta_v}{2} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\varphi}}{2}\right), \quad (31)$$

называемые в геомеханике углами типа Кулона и типа Роско [23].

Большинство испытаний на двухосное сжатие с плоской деформацией дают полосы сдвига, лежащие между ζ_c и ζ_r . Артур (1970) [24] экспериментальным путем над кулоновскими материалами установил наклон, равный срединному:

$$\tan \frac{\zeta_I}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(\sin \varphi + \sin \bar{\varphi})}{1 - \frac{1}{2}(\sin \varphi + \sin \bar{\varphi})}}. \quad (32)$$

На основании бифуркационного анализа Оттосен (1991) [22] установил точно такое же соответствие, также им указано, что в предельном состоянии критерию потери устойчивости удовлетворяют как угол типа Роско, так и угол типа Кулона. Проведенный Вермиром (1990) [25] анализ с учетом возможной упругой разгрузки вне ширины полосы сдвига установил возможность всего спектра наклонов полос сдвига в диапазоне Роско-Кулона, и невозможность других направлений. Аналогичные результаты получены в [26].

Для ассоциированного закона течения характеристики уравнений напряжений и скоростей совпадают. Локализация пластических деформаций формируется вдоль характеристических направлений или их огибающих.

Введем аналогично срединное значение угла между характеристиками ζ_I для произвольной функции поверхности текучести $f(p, q)$:

$$\tan \frac{\zeta_I}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(\varkappa_\sigma + \varkappa_v)}{1 - \frac{1}{2}(\varkappa_\sigma + \varkappa_v)}}. \quad (33)$$

3. Использование определяющих уравнений для решения задач

Рассмотрим пластическое тесение на двух примерах растяжения на бесконечности плоскости со свободным круговым вырезом радиуса $r = a$ и растяжения полосы шириной $2h$ со свободным круговым вырезом малого радиуса, рис. 2. В окрестности круговой границы линий скольжения могут быть образованы логарифмическими спиралями, рис. 3а, к прямолинейной границе может примыкать семейство прямолинейных отрезков, рис. 3б.

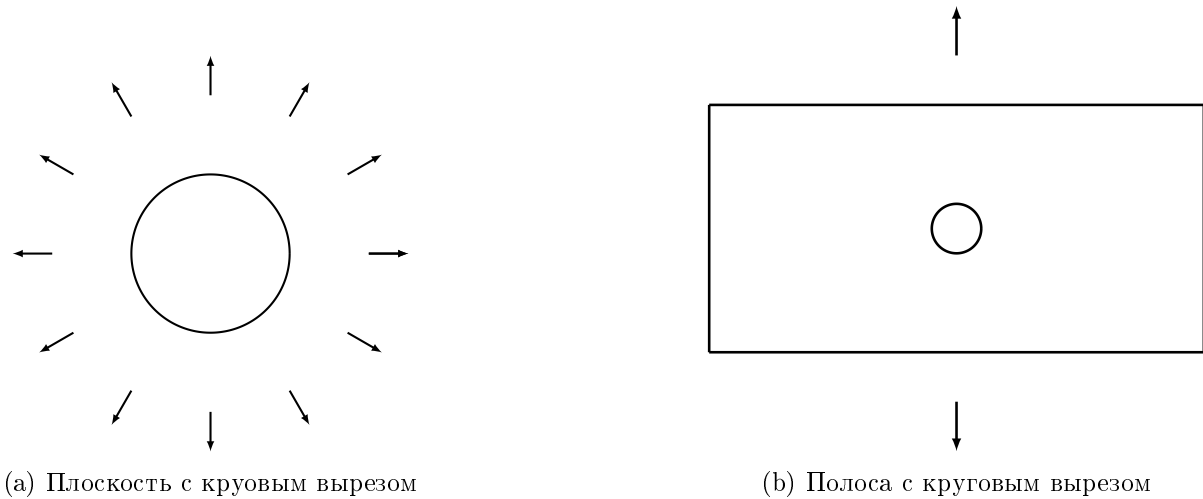


Рис. 2: Эскиз задачи

Уравнения логарифмических спиралей в полярной системе координат:

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{\ln \frac{r}{a}}{b} \quad (34)$$

Спирали пересекают радиус векторы под углом $\zeta/2$, параметр b равняется: $b = \tan \zeta/2 = \sqrt{(1 + \varkappa)/(1 - \varkappa)}$. При $\eta = -3/2$, семейство спиралей превращается в семейство окружностей, при $\eta = 3/2$ - радиальные лучи. Спирали ортогональны, если $\eta = 0$.

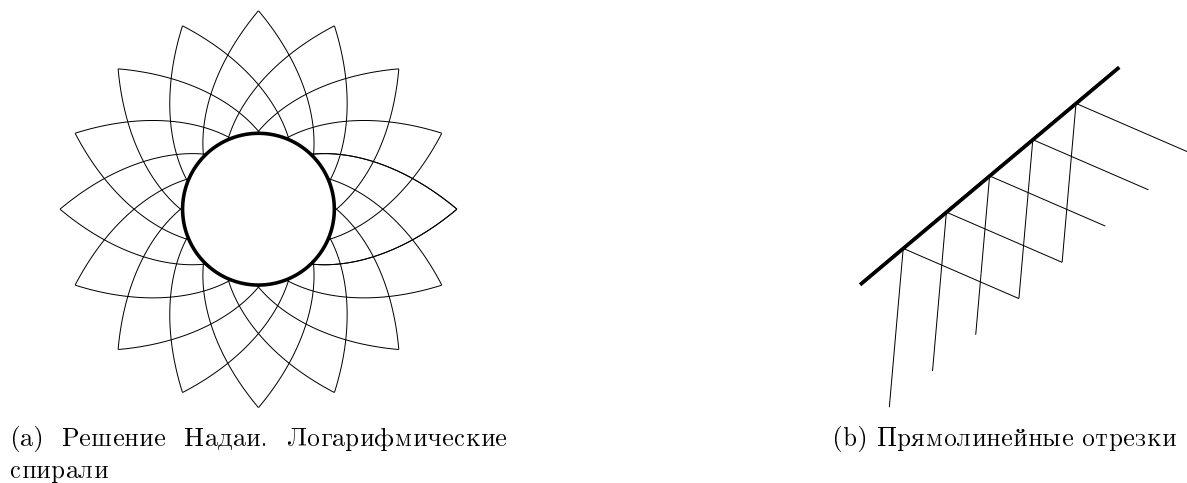


Рис. 3: Тип характеристик у круговой и прямолинейной границ

Приравнивая уравнения (27) и (34) можно найти зависимость среднего напряжения σ от радиуса

$$\sigma = \frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{1}{1 - \varkappa} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right), \quad (35)$$

откуда используя (10) находятся радиальное и кольцевое напряжения:

$$\sigma_r = \frac{k}{\eta} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right) \quad (36)$$

Эти выражения можно получить в осесимметричной постановке. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат в отсутствии касательных напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (37)$$

Напряжения σ_r и σ_θ являются главными. Заменяя $\sigma_r = \sigma - \tau$, $\tau = \Sigma(\sigma)$ и интегрируя по частям получаем:

$$\int \frac{d\sigma}{\Sigma(\sigma)} = \ln(\Sigma(\sigma)r^2) + \text{const} \quad (38)$$

Соотношения (17) и (38) определяют уравнения характеристик в параметрической форме в окрестности круговой границы для произвольной функции поверхности текучести (3). Соотношения справедливы как в плоскодеформированном, так и в плосконапряженном состояниях.

Рассмотрим геометрию характеристик при растяжении полосы с круговым отверстием. Так как к прямолинейной границе может примыкать семейство прямолинейных отрезков, то наклон характеристик постоянен, и, следовательно, напряжения также постоянны. Такое напряженное состояние называют *простым*. Предельная нагрузка для *простого* напряженного состояния будет равна:

$$P/k = -\frac{4}{\eta} \frac{\varkappa_\sigma}{1 - \varkappa_\sigma} (h - a). \quad (39)$$

4. Численная модель

Ниже приведена численная модель, рассмотренные примеры решаются численно в упруго-пластической постановке. Уравнения равновесия записываются через Галеркиновские уравнения [34] с изопараметрическими функциями форм элемента высокого порядка [35, 36, 37, 38]. Ньютоновские итерации нелинейной задачи для улучшения сходимости сопровождаются алгоритмом линейного поиска [39].

4.1. Интегрирование напряжений

Соотношения гипо-упруго-пластичности между напряжениями и деформациями в скоростях [44]:

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \mathbf{E}^0 : d_{ij}^e = \mathbf{E}^0 : (d_{ij} - d_{ij}^p) = \mathbf{E}^{ep} : d_{ij} \quad (40)$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ - обозначает объективную производную тензора напряжений Коши, d_{ij} - тензор скорости деформаций, \mathbf{E}^0 - тензор упругости 4 ранга, \mathbf{E}^{ep} - упругопластический тензор 4 ранга.

Как правило, необходимо различать три случая, когда напряжения находятся на поверхности текучести $f(\sigma_{ij}) = 0$:

$$\begin{array}{lll} \dot{f}(\sigma_{ij}) < 0 & d\lambda = 0 & \text{упругая нагрузка,} \\ \dot{f}(\sigma_{ij}) = 0 & d\lambda = 0 & \text{нейтральная нагрузка,} \\ \dot{f}(\sigma_{ij}) = 0 & d\lambda > 0 & \text{пластическое течение.} \end{array}$$

Пластический множитель λ и функция поверхности текучести $f(\sigma_{ij})$ соответствуют дополнителным, так называемым, условиям Каруша-Куна-Такера

$$\lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (41)$$

На каждом временном шаге напряжения интегрируются методом радиального возврата по неявной обратной схеме Эйлера. Инкрементальная процедура вычислений напряжений следующая:

(а) *Предиктор. Упругий шаг*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^{e*} &= \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \end{aligned} \quad (42)$$

(б) *Корректор. Алгоритм радиального возврата*

На основании предыдущих формул и закона пластического течения (4) следует система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_{n+1}^{e*} - \Delta\lambda \mathbf{\Lambda}_{n+1} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \Delta\lambda H \\ f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Шаг пластического корректора алгоритма, таким образом, состоит в отыскании решения ε_{n+1}^e , обновления внутренней переменной α_{n+1} и инкремента пластического множителя $\Delta\lambda$ (43), соответствующего условию $\Delta\lambda > 0$.

Уравнения (43) при постоянном тензоре упругости \mathbf{E}^0 могут быть переписаны эквивалентно в терминах напряжений:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \Delta\lambda \mathbf{E}^e : \mathbf{\Lambda}_{n+1} \quad (44)$$

$\Delta\lambda \mathbf{E}^e : \mathbf{\Lambda}_{n+1}$ – вектор радиального возврата, $\Lambda_{ij} = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$ – вектор течения.

Линеаризация уравнений (43) для представленной линейной модели течения дает:

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{e*} &= d\varepsilon^e + d\Delta\lambda \Lambda + \Delta\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma} d\sigma \\ \alpha &= \alpha + \Delta\lambda H \\ \Lambda d\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Непосредственно из алгоритма радиального возврата следует выражение упругопластического тензора $\mathbf{E}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}^{e*}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ep} &= \mathbf{P} - \frac{1}{\Lambda_f : \mathbf{P} : \Lambda_g + H} (\mathbf{P} : \Lambda_f) \otimes (\mathbf{P} : \Lambda_g) \\ \mathbf{P} &= \left(I_s + \Delta\lambda \mathbf{E}^0 : \frac{\partial \Lambda_f}{\partial \sigma} \right)^{-1} \mathbf{E}^0, \end{aligned} \quad (46)$$

$(I_s + \Delta\lambda \mathbf{E}^0 : \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma})$ – матрица Гессе.

4.2. Интерполяционная функция элемента высокого порядка

Известно, что увеличение степени интерполяции устраняет искусственную блокировку элемента (volumetric locking) и является более эффективным методом решения [40, 41, 42], с другой стороны, увеличение степени интерполяции приближается к аппроксимации решения, претерпевающего разрыв на линиях скольжения. В классической формулировке конечных элементов часто используются полиномы Лагранжа для интерполяции заданного порядка p [34]. На единичном интервале $\xi \in [-1; 1]$ они определяются как:

$$l_a^n(\xi) = \prod_{b=1; a \neq b}^N \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b} \quad (47)$$

С увеличением полиномиального порядка лагранжевы функции формы с одинаково разнесенными опорными точками приводят к осцилляциям, что приводит к плохой числовой обусловленности результирующей матрицы [37]. Однако в контексте *спектральных методов* в качестве корней полиномов Лежандра выбираются опорные точки и отталкиваются от правила интегрирования Гаусса-Лобатто. То есть, другими словами, точки интегрирования совпадают с точками определения полиномов Лагранжа. В [43] проведен анализ степени обусловленности результирующей матрицы для элементов с одинаково разнесенными опорными точками и *спектральных элементов*. Для более высоких пространственных измерений базисные функции komponуются из тензорного произведения одномерных функций $l_a^n(\xi)$ степени $n = N - 1$:

$$N_a = l_i^n(\xi_a) l_j^n(\eta_a), \quad (48)$$

где $i \leq N, j \leq N$ - индексы узлов, ξ, η - координаты референсного единичного квадрата. Координаты точек GLL определяются как корни уравнения:

$$(1 - \xi^2) P_n'(\xi) = 0,$$

где P_n - многочлен Лежандра степени n . Для минимальной степени, $p = 1$, получается простой результат для классического билинейного изопараметрического элемента:

$$N_a = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta).$$

5. Численный результат

Параметрами материала заданы Модуль Юнга $1.e5$ МПа, предел текучести $k = 5$ МПа. На рис. 4 показаны конечно-элементные сетки кольца с внутренним и внешним радиусами 100 мм и 500 мм, соответственно, рассчитывалась половина области с условием симметрии $u_y|_{y=0} = 0$, и полосы размерами 100x50 мм, радиус выреза равен 1 мм, рассчитывалась четверть области с условиями симметрии $u_x|_{x=0} = 0$ $u_y|_{y=0} = 0$.

Первоначально проведен анализ степени влияния порядка элемента на формирование линий скольжения, рис. 5. Вычисления показали: первый порядок не позволяет рассчитывать линии. С увеличением порядка линии становятся более локализованными и контрастными. Для полиномов выше 4 и 5 порядка нет заметного качественного изменения. Расчеты для $\eta = \bar{\eta}$ показали независимость линий пластического течения от коэффициента Пуассона, то есть пластическое течение определяется только пластическими постоянными. Далее серия вычислений для различных параметров $\eta, \bar{\eta}$ проведена с полиномом степени 4 и коэффициентом Пуассона $\nu = 0$.

Для ассоциативного материала, $\eta = \bar{\eta}$, результаты расчета растяжения полосы с параметрами η из области гиперболичности и параболичности уравнений при $|\eta| = 3/2$ (условие

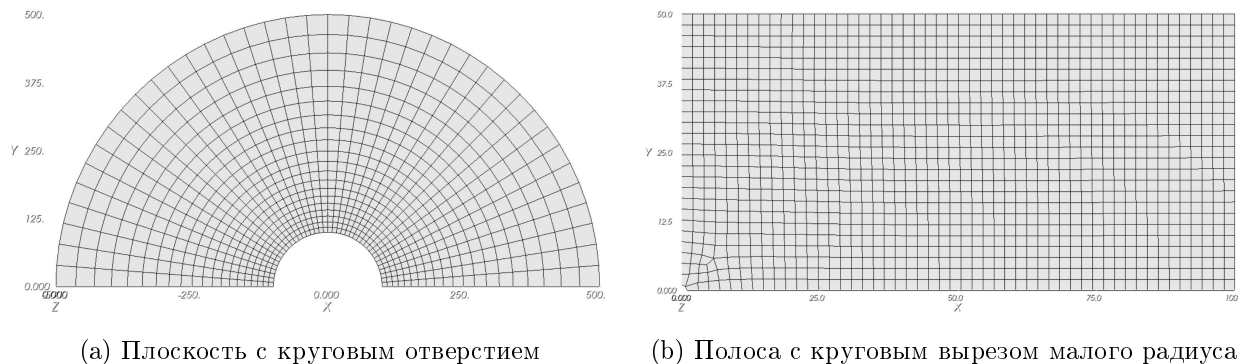


Рис. 4: Вычислительная сетка

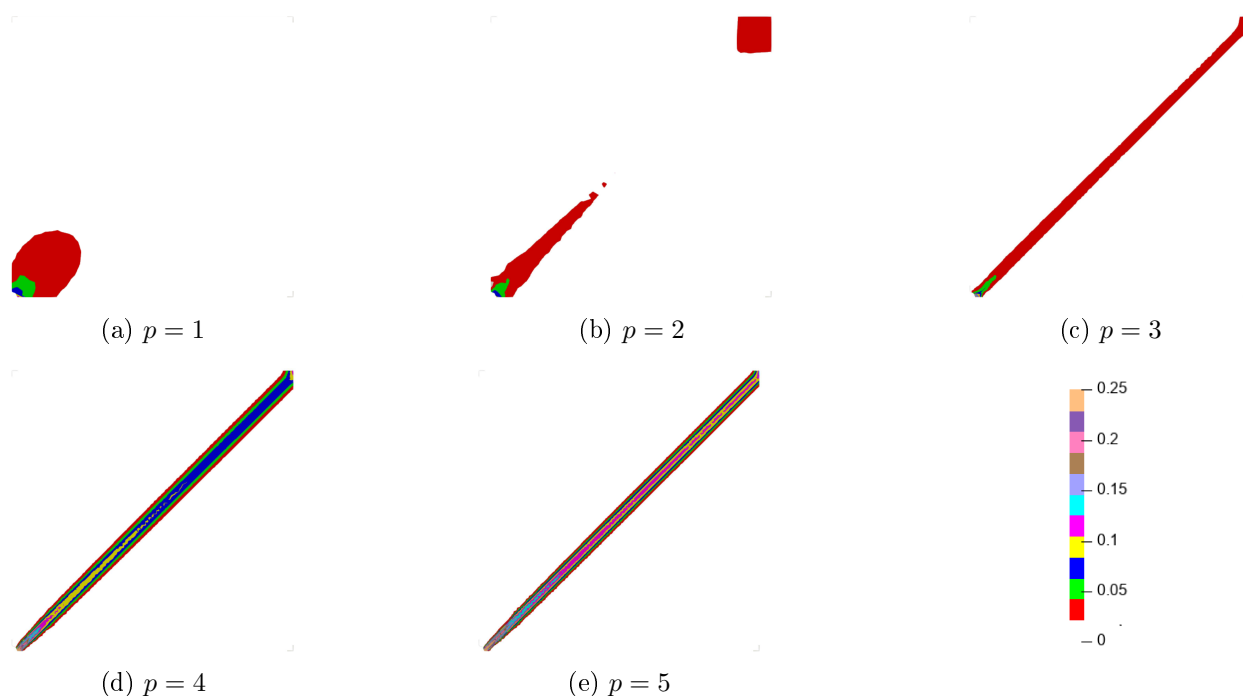


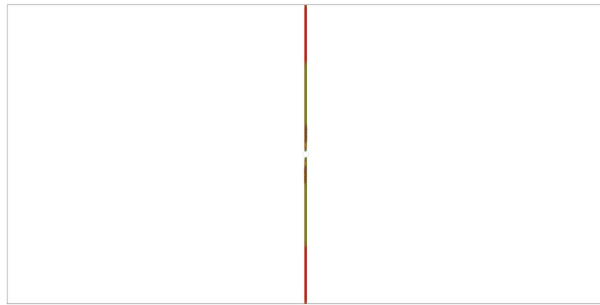
Рис. 5: Линии скольжения в зависимости степени интерполяции элемента

Ранкина) показаны на рис. 6. Численные направления полос сдвига в точности совпадают направлениями характеристик.

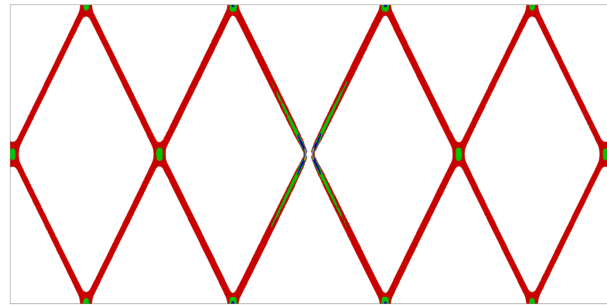
Формирование линий скольжения в окрестности отверстия приведено на рис. 7. Линии совпадают со спиралями, пересекающими радиус-вектор под срединным углом θ_I типа Артура. Так как угол определяется только по материальным параметрам, то направление линий сдвига при осевой симметрии наблюдается также единственным. Также получено численное распределение напряжений вокруг отверстия. На рис. 8 приведено сравнение численного результата с формулами (36).

Формирование линий скольжения в полосе при растяжении показаны на рисунках 9, 10 и 11. Можно заметить, линии - не строго прямые, меняют наклон при распространении и могут расщепляться на две. Формирование происходит под углом между срединным типа Артура и Кулоновским, смещаясь к срединному; отражение - под срединным, первоначальное примыкание к свободной границе - под углом типа Роско. При увеличении нагрузки в некоторой точке происходит расщепление, образуя со свободной поверхностью вторую линию с направлением близким к Кулоновскому типу. Таким образом, в общем случае можно заключить

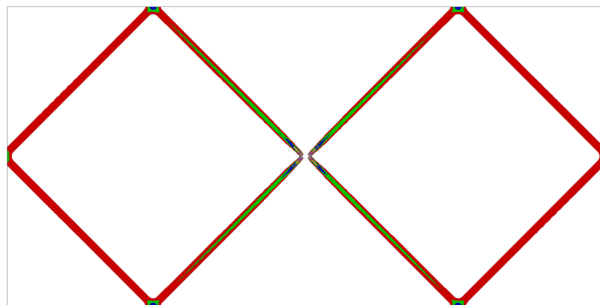
об отсутствии единственности направлений полос сдвига. Определяется допустимый спектр, ограниченный характеристическими линиями.



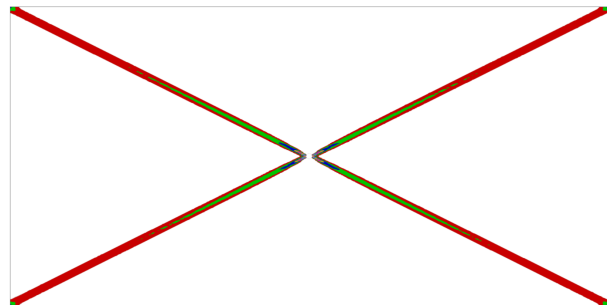
(a) $\eta = \bar{\eta} = -3/2, \theta = 90^\circ$, модель Ранкина



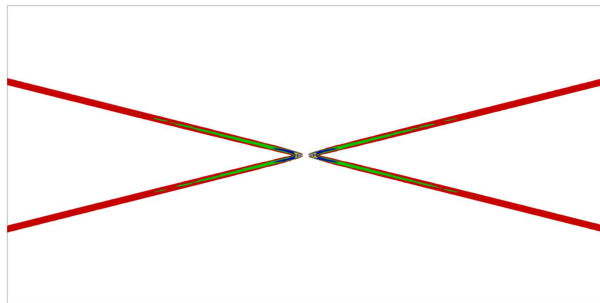
(b) $\eta = \bar{\eta} = -0.98, \theta = 63.43^\circ$



(c) $\eta = \bar{\eta} = 0, \theta = 45^\circ$, модель Мизеса



(d) $\eta = \bar{\eta} = 0.98, \theta = 26.57^\circ$



(e) $\eta = \bar{\eta} = 1.36, \theta = 14.04^\circ$



(f) $\eta = \bar{\eta} = 3/2, \theta = 0^\circ$, модель Ранкина

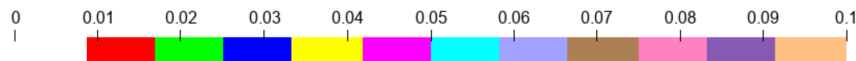
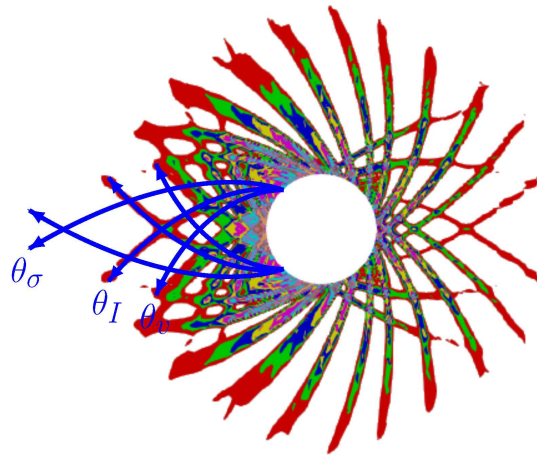
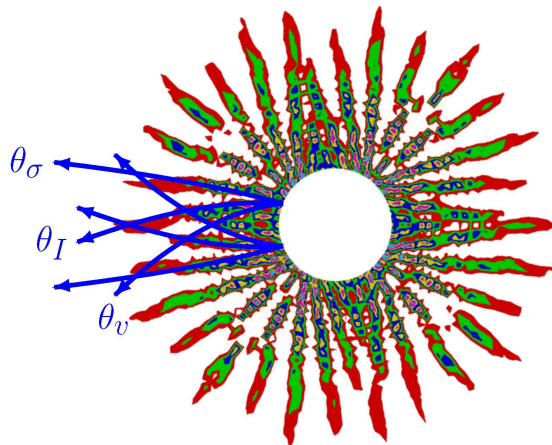


Рис. 6: Линии локализации пластических деформаций при ассоциированном законе течения для некоторых параметров $\eta = 0, \eta = \pm -0.98, \eta = \pm 3/2$.



(a) $\eta = 1, \bar{\eta} = 0, \theta_R = 45^\circ, \theta_C = 27.37^\circ, \theta_I = 36.6^\circ$



(b) $\eta = 1.5, \bar{\eta} = 1, \theta_R = 26.12^\circ, \theta_C = 5.77^\circ, \theta_I = 18.62^\circ$



Рис. 7: Локализация пластических деформаций

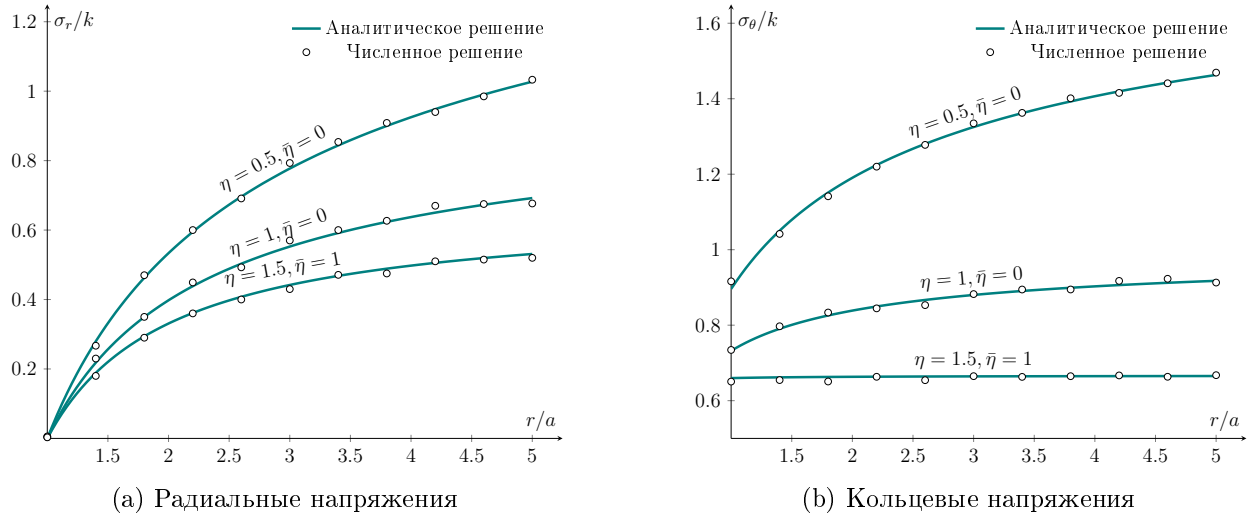


Рис. 8: Распределение напряжений по r

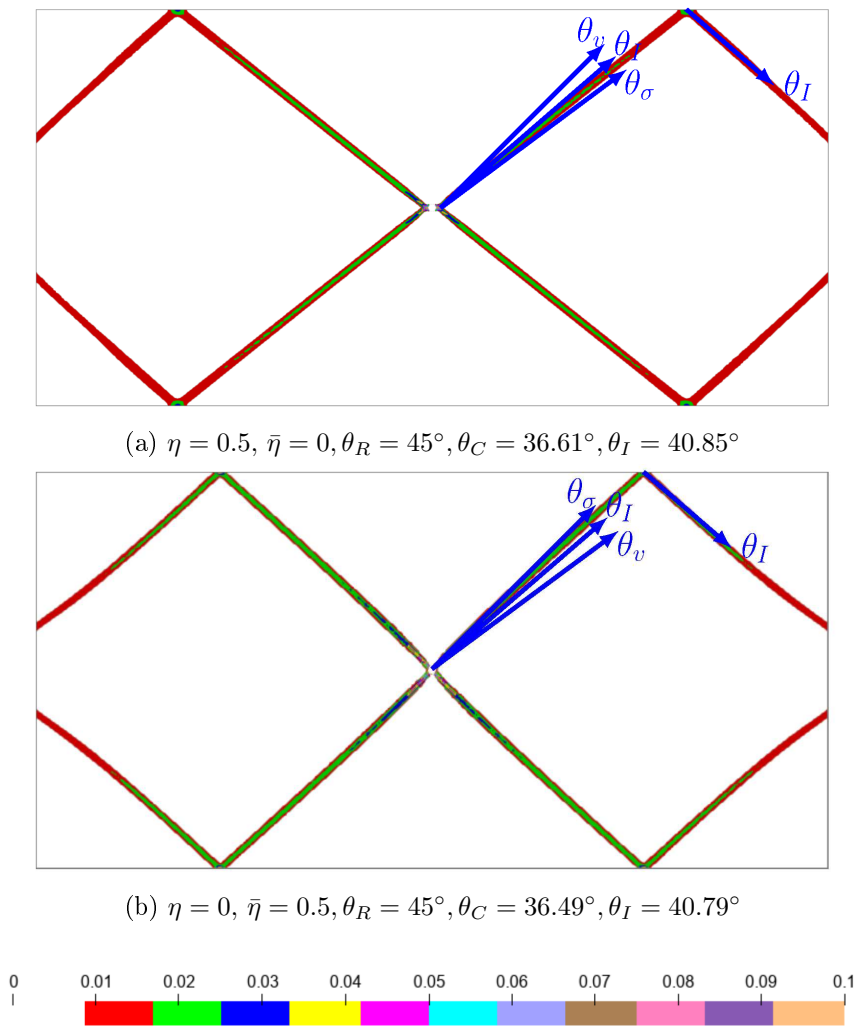
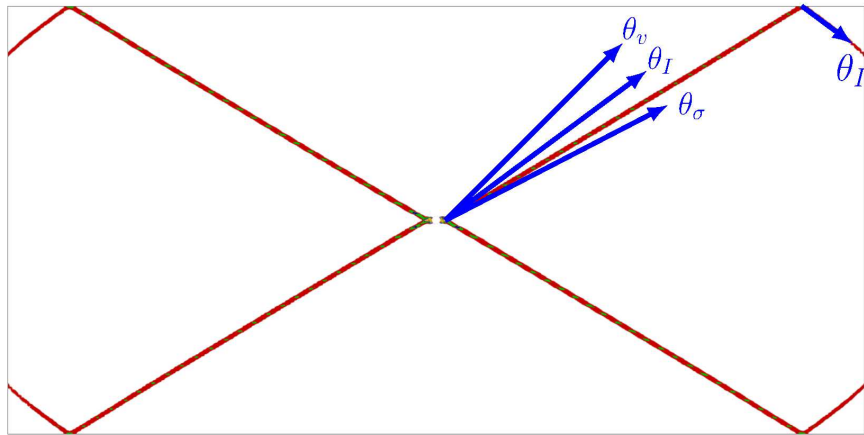
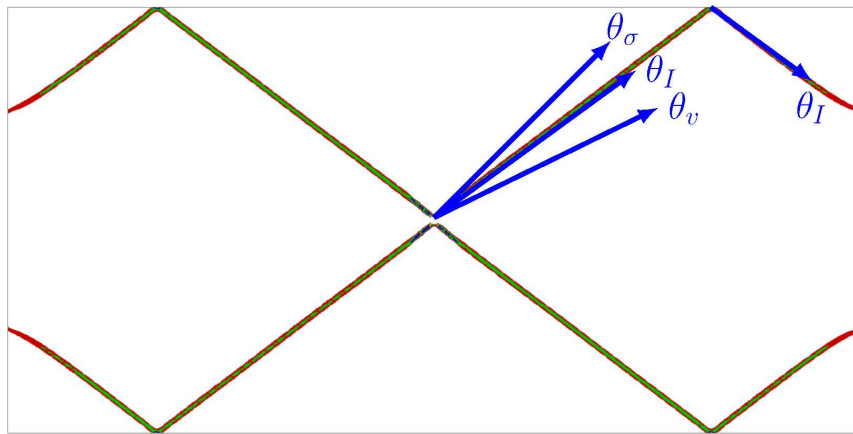


Рис. 9: Локализация пластических деформаций



(a) $\eta = 1, \bar{\eta} = 0, \theta_R = 45^\circ, \theta_C = 27.37^\circ, \theta_I = 36.6^\circ$



(b) $\eta = 0, \bar{\eta} = 1, \theta_R = 26.12^\circ, \theta_C = 45^\circ, \theta_I = 36.09^\circ$

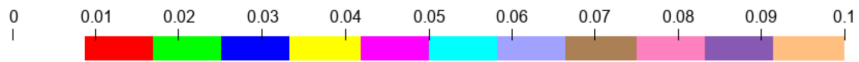


Рис. 10: Локализация пластических деформаций

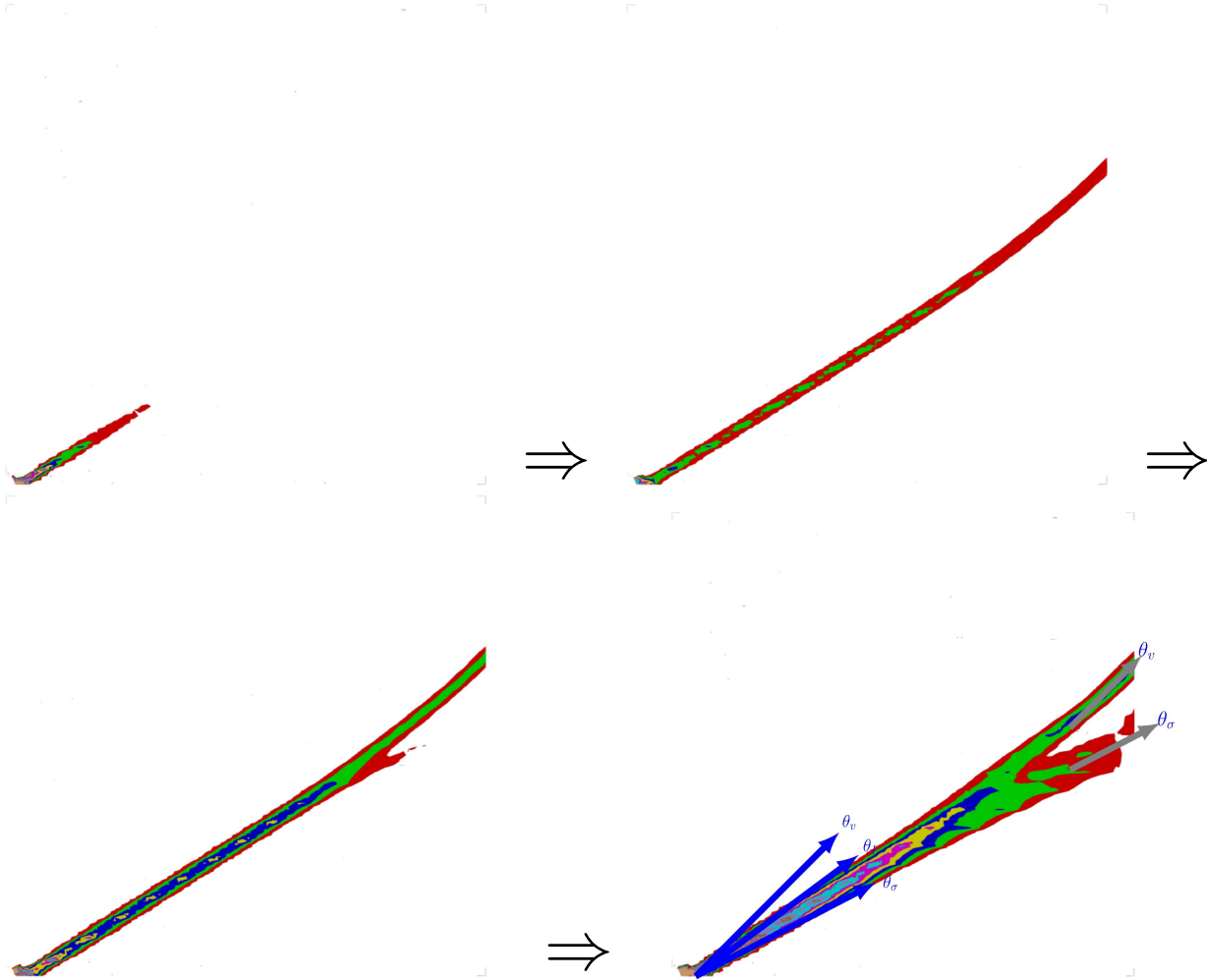


Рис. 11: Формирование линии сдвига

6. Заключение

Продемонстрирована возможность использования предложенной численной модели к расчетам формирования полос сдвига. В ассоциированном случае линии сдвига совпадают с характеристическими линиями. То есть, геометрическое расположение линий сдвига определяется единственным способом. Наклон между характеристиками для линейной функции поверхности текучести постоянен и не зависит от напряженного состояния и геометрии границ. Этого нельзя сказать для более сложных функций, например, квадратичных, при которых наклон характеристики к первому главному направлению помимо материальных параметров зависит от среднего напряжения, тем не менее, полосы сдвига совпадают с характеристиками и определяются единственным способом. В неассоциированном законе получаем возможное расположение полос сдвига в виде всего спектра, заключенного между направлением типа Роско и направлением типа Кулона. Таким образом направление линий сдвига неединственно. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего исследования геометрий линий скольжения и предельного равновесия в широком круге материалов с произвольной функцией поверхности текучести, зависимой от первого и второго инвариантов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mohr, O. (1900), Welche Umstände bedingen der Bruch und der Elastizitätsgrenze des Materials, *Z. Vereins Deutscher Ingenieure*, 1524.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел, том 1. М.: Иностранной литературы, 1954
3. Prandtl, L. "Über die Härte plastischer Körper". Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1920: 74-85.
4. Hencky, H. (1923), Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern. *Z. angew. Math. Mech.*, 3: 241-251
5. H. Polaczek-Geiringer, "Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, in Verhandlungen d. 3 Intern. Kongress f. techn. Mechank, Stockholm, 1930, pp. 185-190.
6. С. А. Христианович, С.Г.Милхин, Б.Б. Девисон *Некоторые новые вопросы механики сплошной среды*. Москва, Ленинград, 1938.
7. J. Mandel. Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. PhD thesis, Thèse, Paris, 1942.
8. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. 1956. М.: Гостехиздат. 408 стр.
9. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. Наука, Москва. 420 стр.
10. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д., *Математическая теория пластичности*. Физматлит, Москва, 2001. 704 стр.
11. Freudenthal A.M., Geiringer H. (1958) *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. In: Flügge S. (eds) *Elasticity and Plasticity / Elastizität und Plastizität*. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik. Springer, Berlin.
12. Соколовский В.В. *Статика сыпучей среды*. М.: Физматлит. 1960. 121 стр.
13. Nemat-Nasser, S. and A. Shokoh (1980), On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solid Struct.* 16, 495-514
14. J. Hadamard, L., A. Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique. *Nature* 71, 196-197 (1904). <https://doi.org/10.1038/071196a0>
15. Hill. R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. 1. *Mech. Phys. Solids* 6, pp.236-249.
16. Hill R. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1-16, 1962.
17. T. Y. Thomas *Plastic Flow and Fracture in Solids*. Academic Press, New York (1961).
18. Mandel J. (1964) Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique. In: Kolsky H., Prager W. (eds) *Stress Waves in Anelastic Solids*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, pp. 331-340.
19. J. Mandel, Conditions de stabilité et postulat de Drucker, in: J. Kravtchenko and P.M. Sirieys, eds., *Rheology and Soil Mechanics* (Springer, Berlin, 1966) pp. 58-68.

20. J. W. Rudnicki and J. R. Rice. Conditions of the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant material. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371-394, 1975.
21. Rice, J.R., The localization of plastic deformation, in: Koiter, W. T. (ed.), Proc. Hth Int. Congr. Theoret. Appl. Mech., North-Holland, pp. 207–220, 1977.
22. K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. Plast.*, 7:99-121, 1991.
23. K. H. Roscoe. The Influence of Strains in Soil Mechanics. *Géotechnique*, 1970, 20:2, 129-170
24. J. R. F. Arthur, T. Dunstan, Q. A. J. L. Al-Ani, and A. Assadi. Plastic deformation and failure in granular media. *Géotechnique*, 1977, 27:1, 53-74
25. P. A. Vermeer. The orientation of shear bands in biaxial tests. *Géotechnique*, 1990, 40:2, 223-236.
26. I. Vardoulakis, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 4 (1980) p.103
27. M. Ortiz, Y. Leroy, A. Needleman, A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 61, Issue 2, 1987, Pages 189-214.
28. Simo, J.C., Oliver, J. & Armero, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12, 277–296 (1993). <https://doi.org/10.1007/BF00372173>
29. F. Armero and K. Garikipati, ‘An analysis of strong discontinuity in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’, *Int. J. Solids Struct.*, 33(20-22), 2863-2885 (1996).
30. Jeremić, B. and Xenophontos, C. (1999), Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 15: 867-876. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199912\)15:12 < 867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199912)15:12 < 867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9)
31. Richard A. Rigueiro, Ronaldo I. Borja, ‘Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity’, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 38, Issue 21, 2001, Pages 3647-3672, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00250-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00250-X).
32. Duretz, T., Souche, A., de Borst, R., & Le Pourhiet, L. (2018). The benefits of using a consistent tangent operator for viscoelastoplastic computations in geodynamics. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 19, 4904– 4924. <https://doi.org/10.1029/2018GC007877>
33. Левин В.А., Зингерман К.М., Крапивин К.Ю., Яковлев М.Я. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций. *Чебышевский сборник*. 2020;21(3):306-316. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316>
34. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Seventh Edition. Elsevier, 2014
35. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
36. B. Szabó, I. Babuška. (2011). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Wiley.

37. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. (2003). *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780203488041>
38. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, 2017, 1797561
39. de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C. and Verhoosel, C.V. (2012). Solution Techniques in Quasi-Static Analysis. In *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (eds R. de Borst, M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers and C.V. Verhoosel). <https://doi.org/10.1002/9781118375938.ch4>
40. Babuška I., Suri M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numer. Math.* 62, 439–463 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF01396238>
41. Babuška I., Suri M. ‘On Locking and Robustness in the Finite Element Method’, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:5, 1261-1293 (1992)
42. De Borst, R. and Groen, A.E. (1995), Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2887-2906. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381704>
43. S. Eisenträger, E. Atroshchenko and R. Makvandi, On the condition number of high order finite element methods: Influence of p-refinement and mesh distortion, *Computers and Mathematics with Applications* (2020), <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.012>.
44. E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008

REFERENCES

1. Mohr, O. (1900), Welche Umstände bedingen der Bruch und der Elastizitätsgrenze des Materials, *Z. Vereins Deutscher Ingenieure*, 1524.
2. Nadai. A. *Theory of Flow and Fracture of Solids* Vol. 1. McGraw-Hill. New York. (1950)
3. Prandtl, L. "Über die Härte plastischer Körper". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1920: 74-85.
4. Hencky, H. (1923), Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern. *Z. angew. Math. Mech.*, 3: 241-251
5. H. Polaczek-Geiringer, "Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, in Verhandlungen d. 3 Intern. Kongress f. techn. Mechank, Stockholm, 1930, pp. 185–190.
6. Christianovich S., Michlin S., Davison B., *Some new issues of continuum mechanics* Moscow, Leningrad, 1938. (In Russian)
7. J. Mandel. Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. PhD thesis, Thèse, Paris, 1942.
8. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Univ. Press, London (1950).
9. Kachanov L.M. *Foundations of the theory of plasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1971. 482 p.

10. A. Yu. Ishlinskii and D. D. Ivlev, *Mathematical Theory of Plasticity* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2001).
11. Freudenthal A.M., Geiringer H. (1958) *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. In: Flügge S. (eds) *Elasticity and Plasticity / Elastizität und Plastizität*. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik. Springer, Berlin.
12. Sokolovskii V. V. *Statics of Granular Media*. Oxford: Pergamon Press, 1965
13. Nemat-Nasser, S. and A. Shokoh (1980), On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solid Struct.* 16, 495-514.
14. J. Hadamard, L., A. Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique. *Nature* 71, 196–197 (1904). <https://doi.org/10.1038/071196a0>
15. Hill. R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. 1. *Mech. Phys. Solids* 6, pp.236–249.
16. Hill R. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962.
17. T. Y. Thomas *Plastic Flow and Fracture in Solids*. Academic Press, New York (1961).
18. Mandel J. (1964) Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique. In: Kolsky H., Prager W. (eds) *Stress Waves in Anelastic Solids*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, pp. 331-340.
19. J. Mandel, Conditions de stabilité et postulat de Drucker, in: J. Kravtchenko and P.M. Sirieys, eds., *Rheology and Soil Mechanics* (Springer, Berlin, 1966) pp. 58–68.
20. J. W. Rudnicki and J. R. Rice. Conditions of the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant material. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371-394, 1975.
21. Rice, J.R., The localization of plastic deformation, in: Koiter, W. T. (ed.), *Proc. Hth Int. Congr. Theoret. Appl. Mech.*, North-Holland, pp. 207–220, 1977.
22. K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. Plast.*, 7:99-121, 1991.
23. K. H. Roscoe. The Influence of Strains in Soil Mechanics. *Géotechnique*, 1970, 20:2, 129-170
24. J. R. F. Arthur, T. Dunstan, Q. A. J. L. Al-Ani, and A. Assadi. Plastic deformation and failure in granular media. *Géotechnique*, 1977, 27:1, 53-74
25. P. A. Vermeer. The orientation of shear bands in biaxial tests. *Géotechnique*, 1990, 40:2, 223-236.
26. I. Vardoulakis, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 4 (1980) p.103
27. M. Ortiz, Y. Leroy, A. Needleman, A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 61, Issue 2, 1987, Pages 189-214.
28. Simo, J.C., Oliver, J. & Armero, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12, 277–296 (1993). <https://doi.org/10.1007/BF00372173>

29. F. Armero and K. Garikipati, ‘An analysis of strong discontinuity in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’, *Int. J. Solids Struct.*, 33(20-22), 2863-2885 (1996).
30. Jeremić, B. and Xenophontos, C. (1999), Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 15: 867-876. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199912\)15:12<867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199912)15:12<867::AID-CNM296>3.0.CO;2-9)
31. Richard A. Regueiro, Ronaldo I. Borja, ‘Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity’, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 38, Issue 21, 2001, Pages 3647-3672, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00250-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00250-X).
32. Duretz, T., Souche, A., de Borst, R., & Le Pourhiet, L. (2018). The benefits of using a consistent tangent operator for viscoelastoplastic computations in geodynamics. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 19, 4904– 4924. <https://doi.org/10.1029/2018GC007877>
33. Levin V.A., Zingerman K.M., Krapivin K.Yu., Yakovlev M.Y. Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains. *Chebyshevskii Sbornik*. 2020;21(3):306-316. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316>
34. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Seventh Edition. Elsevier, 2014
35. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
36. B. Szabó, I. Babuška. (2011). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Wiley.
37. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. (2003). *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780203488041>
38. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, 1797561
39. de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C. and Verhoosel, C.V. (2012). Solution Techniques in Quasi-Static Analysis. In *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (eds R. de Borst, M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers and C.V. Verhoosel). <https://doi.org/10.1002/9781118375938.ch4>
40. Babuška I., Suri M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numer. Math.* 62, 439–463 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF01396238>
41. Babuška I., Suri M. ‘On Locking and Robustness in the Finite Element Method’, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:5, 1261-1293 (1992)
42. De Borst, R. and Groen, A.E. (1995), Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2887-2906. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381704>
43. S. Eisenträger, E. Atroshchenko and R. Makvandi, On the condition number of high order finite element methods: Influence of p-refinement and mesh distortion, *Computers and Mathematics with Applications* (2020), <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.012>.

44. E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008

Получено: 18.08.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.853.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, П. А. Васильев

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: versh1984@mail.ru

Васильев Петр Андреевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: petr.vasilyev.1996@yandex.ru

Аннотация

В данной работе представлен и реализован алгоритм, выполняющий топологическую оптимизацию распределения массы двумерного тела под нагрузкой. Конечной целью алгоритма является минимизация веса тела при ограничении на максимальные напряжения в его точках. За основу взята идея переменной плотности, а также алгоритм BESO, добавляющий и удаляющий элементы в зависимости от узловых напряжений.

Алгоритм использует метод конечных элементов и представляет из себя итеративный процесс, на каждом шаге которого сначала происходит вычисление напряжений в теле при помощи CAE Fidesys, а затем результаты расчёта анализируются. По результатам анализа модули Юнга в узлах конечноэлементной сетки изменяются, чтобы отражать новое распределение массы, скорректированное для лучшего соответствия нагрузкам. Особенностью используемого подхода является использование целевой функции со слагаемым, которое представляет из себя сумму квадратов разностных производных плотности по четырём направлениям. Это позволяет избежать резких изменений плотности и возникновения решётчатых структур на ранних итерациях. Для определения плотностей на каждой итерации используется модификация метода градиентного спуска Adam.

Реализованный алгоритм верифицирован на ряде тестовых примеров для плоских статических задач теории упругости. Приведены результаты расчетов, выполнено сравнение с результатами, полученными другими авторами. Для одной из задач представлены результаты расчетов на разных сетках, которые позволяют сделать вывод о сеточной сходимости алгоритма.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, структурно-неоднородный материал, прочностной инженерный анализ, Fidesys, градиентный спуск.

Библиография: 42 названия.

¹Исследования были выполнены в МГУ им. М. В. Ломоносова и Институте физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН в рамках работ по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук МД-208.2021.1.1. (разделы 4–6) и грантам Российского научного фонда (проект № 22-11-00110, разделы 1, 2; проект № 19-71-10008, раздел 3; проект № 19-77-10062, разделы 7, 8).

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, П. А. Васильев. Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 308–326.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.853.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, P. A. Vasiliev

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Vershinin Anatoliy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Vasilyev Petr Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: petr.vasilyev.1996@yandex.ru

Abstract

This paper presents and implements an algorithm that performs topological optimization of the mass distribution of a two-dimensional body under load. The ultimate goal of the algorithm is to minimize body weight under stress constraints at the points of the body. The approach is based on the idea of variable density and the BESO algorithm that adds and deletes elements depending on stresses.

The algorithm uses the finite element method and is an iterative process. At each iteration the stresses in the body are calculated using CAE Fidesys, and then the calculation results are analyzed. According to the analysis, Young's moduli at the nodes of the finite element mesh are changed to reflect new mass distribution adjusted for better compliance with loads.

The specific feature of the used approach is utilization of objective function with the special term. This term is the sum of the squares of the differential derivatives of density in four directions. This feature permits one to avoid sharp changes in density and the appearance of lattice structures in the early iterations. The Adam gradient method is used to determine densities at each iteration.

The implemented algorithm is verified on a number of test cases for plane static problems of the theory of elasticity. The results of computations are presented. A comparison is made with the results obtained by other authors. For one of the problems, the results of calculations on different grids are given. These results allows one to conclude about the grid convergence of the algorithm.

Keywords: topological optimization, structurally inhomogeneous material, engineering strength analysis, Fidesys, gradient descent.

Bibliography: 42 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, P. A. Vasiliev, 2022, “Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material’s structural inhomogeneity“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 308–326.

1. Введение

Топологическая оптимизация — подход, призванный сократить массу тела и распределить её так, чтобы оно продолжало выдерживать заданные нагрузки и соответствовало другим наложенным на него требованиям [1, 2]. Топологическая оптимизация применяется в разных отраслях промышленности. С её помощью изготавливают педали, ручки, детали двигателей. Но наибольшую важность этот подход имеет в авиастроении и космической отрасли, где уменьшение веса конструкции позволяет существенно сократить расходы на топливо [3, 4]. Сейчас важность топологической оптимизации возрастает в связи с активным развитием аддитивных технологий, которые позволяют создавать конструкции практически любой формы, что уменьшает ограничения на их сложность и даёт возможность производить в промышленных масштабах детали так называемого бионического дизайна, форма которых определяется в результате оптимизации [5]. Примеры применения топологической оптимизации и обзор существующего программного обеспечения для её реализации приведены в [6].

Существуют разные подходы к топологической оптимизации [7, 8, 9]. Все они прежде всего строят в проектной области расчетную сетку. Построение различных видов сеток описано в [10, 11, 12, 13]. После построения сетки постепенно уменьшают количество материала в одних частях сетки и увеличивают в других, пока не получают итоговую конструкцию.

Одной из известных проблем, возникающих при топологической оптимизации, является проблема «шахматного поля» (рис. 1). Она возникает, когда количество материала в некоторой области конструкции является избыточным, а нагрузка распределена по ней приблизительно равномерно. Тогда алгоритмы оптимизации, использующие дискретное представление элементов, часто начинают беспорядочно удалять отдельные элементы из описанной области, приводя к «шахматной» структуре. В реальности такая «шахматная» конструкция привела бы к концентрациям напряжений и разрушению, поэтому при разработке алгоритмов топологической оптимизации следует стремиться к тому, чтобы избежать возникновения таких структур. Одним из методов, позволяющих это сделать, является введение переменной плотности конструкции [14].

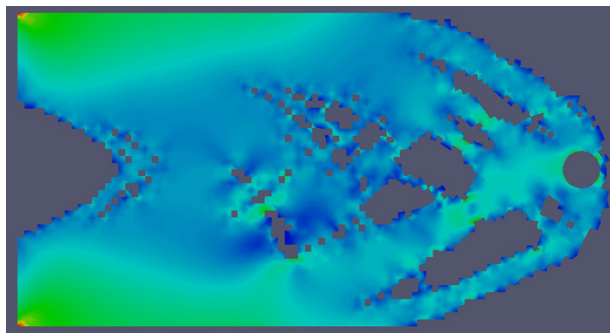


Рис. 1: Пример «шахматной» конструкции

Некоторые методы, такие как ESO и BESO, работают с элементами дискретно: каждый элемент проектной области либо входит в оптимизируемую конструкцию, либо нет (рис. 2). Другие методы, например, такие, как SIMP, вводят понятие плотности элементов, которая

задается вещественным числом на отрезке от 0 до 1 (рис. 3). Подробнее эти методы изложены в [3, 15, 7].

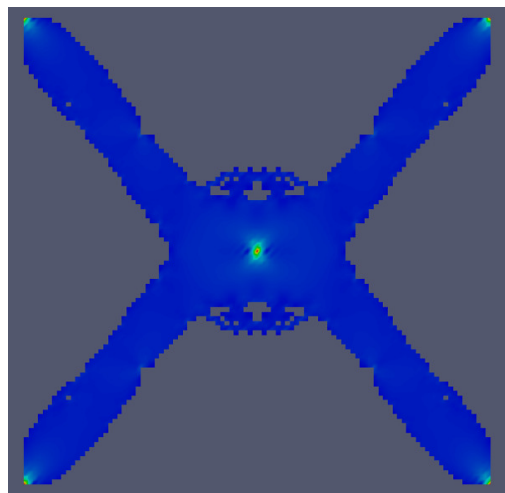


Рис. 2: Пример конструкции с дискретной плотностью: каждого элемента либо нет (серый цвет), либо он есть (другие цвета)

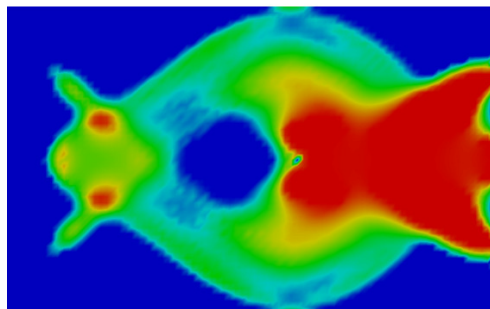


Рис. 3: Пример конструкции с непрерывной плотностью

В методах, использующих переменную плотность, существует два подхода к интерпретации результатов плотности, отличной от 0 или 1. Один из них заключается в том, чтобы на завершающем этапе работы алгоритма оптимизации избавляться от участков с такой плотностью, постепенно сводя её к 0 или 1. Другой подход [16] заключается в построении решётчатой структуры с толщиной решётки, зависящей от плотности (рис. 4). Такие решётчатые структуры могут использоваться, например, при изготовлении деталей при помощи аддитивных технологий [17].

Иногда возникает необходимость проектировать конструкцию под несколько разных нагрузок одновременно. Один из методов топологической оптимизации, позволяющих это сделать, изложен в [18].

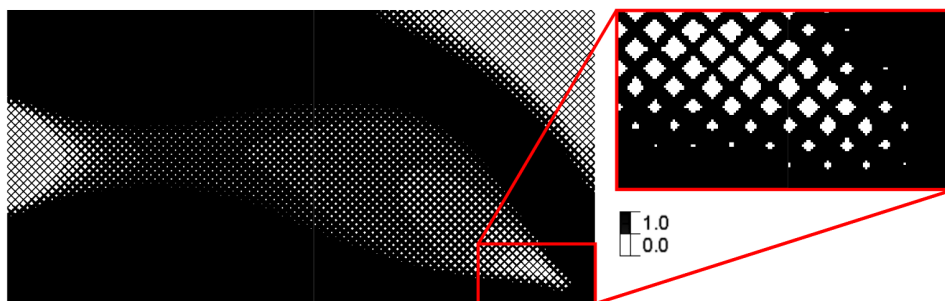


Рис. 4: Пример конструкции с решётчатой структурой, взятый из [16]

2. Механическая постановка задачи топологической оптимизации

Задаана проектная область V , в которой должен располагаться оптимизируемый элемент конструкции (рис. 5). В этой области заданы граничные условия, которые определяют закрепление элемента конструкции и нагрузки, которые он должен выдерживать. В частности, в области V могут быть заданы точечные силы. Также известны свойства материала, из которого эта конструкция состоит, в том числе максимальные напряжения, которые он может безопасно выдерживать.



Рис. 5: Пример проектной области и граничных условий

Задача — спроектировать такую конструкцию в области V , чтобы она выдерживала заданную нагрузку при выполнении ограничений на напряжения и при этом имела бы минимальную массу.

3. Понятие плотности

В данной работе используется подход, в котором плотность точек тела варьируется в пределах от нуля до единицы. Сразу оговоримся, что понятие плотности, принятое в топологической оптимизации, отличается от того, которое обычно принято в механике. Определим его строго:

$\rho(\vec{x})$ — непрерывное поле, определённое в проектной области V и связанное с модулем Юнга $E = E(\vec{x})$ соотношением

$$E = \rho E_{\max}, \quad (1)$$

где E_{\max} — заданный модуль Юнга материала.

В случае двумерных задач для пластин или оболочек [19, 20, 21, 22] плотность можно представлять себе как толщину тела по третьему измерению в этой точке, поскольку чем толще пластина или оболочка, тем более жесткой она является по отношению к прилагаемым нагрузкам. В общем случае трёхмерных тел удобной аналогии нет. Можно считать, что в точках с промежуточной плотностью материал имеет решётчатую или пористую структуру, но на деле эффективные свойства таких материалов не всегда будут такими, какими предполагаются свойства материалов с промежуточной плотностью в данной работе [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

В рамках подхода, принятого при решении задач топологической оптимизации, плотность обычно является чисто математической абстракцией, нужной для того, чтобы алгоритм оптимизации лучше сходился и получаемая в результате его работы форма границы изделия была более гладкой. Поскольку плотность в рамках такого подхода не имеет физического смысла, предполагается, что в тех частях проектной области, где плотность не равна 0 или 1, она будет заменена на 0 или 1 при интерпретации результатов работы алгоритма оптимизации.

Многие методы топологической оптимизации, включая представленный в этой работе, используют разные приёмы, чтобы такие участки промежуточной плотности занимали в итоговом результате как можно меньшую часть проектной области.

4. Математическая постановка задачи топологической оптимизации

Найти

$$\rho(\vec{x}) : \int_V \rho dV \rightarrow \min \quad (2)$$

такую, что

$$\sigma_m(\vec{x}) < \sigma_{кр}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in V \quad (3)$$

в условиях задачи линейной упругости [31] для изотропного материала

$$\begin{cases} E = \rho E_{\max} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, E) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}^0 \text{ на } D_1 \\ \vec{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \vec{P}^0 \text{ на } D_2 \\ D_1, D_2 &\subset \partial V, \end{aligned} \quad (5)$$

где V — проектная область,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций,

$\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений,

σ_m — значение напряжения по Мизесу,

$\sigma_{кр}$ — максимально допустимое значение напряжения по Мизесу,

\vec{u} — вектор перемещений,

\vec{N} — вектор единичной нормали к границе,

\vec{P}^0 — вектор граничных нагрузок,

E — модуль Юнга в точке тела,

E_{\max} — модуль Юнга заданного материала,

D_1, D_2 — границы, на которых заданы граничные условия по перемещениям и нагрузкам соответственно.

Интеграл из соотношения (2) можно заменить на $\int_V f(\rho) dV$, где f — возрастающая функция от плотности, требующая минимизации. Такая функция может использоваться например для того, чтобы ограничить использование промежуточных значений плотности.

Возможны и другие математические постановки задачи оптимизации конструкций, например, минимизация податливости конструкции при ограниченной массе [3], но в данной работе мы остановимся на постановке, приведённой выше. Задача топологической оптимизации конструкции носит прикладной характер, поэтому первичной стоит признать именно механическую постановку — создание хорошей конструкции. Тем более, что методы оптимизации в большинстве своём являются эвристическими, и точная математическая постановка играет не очень большую роль.

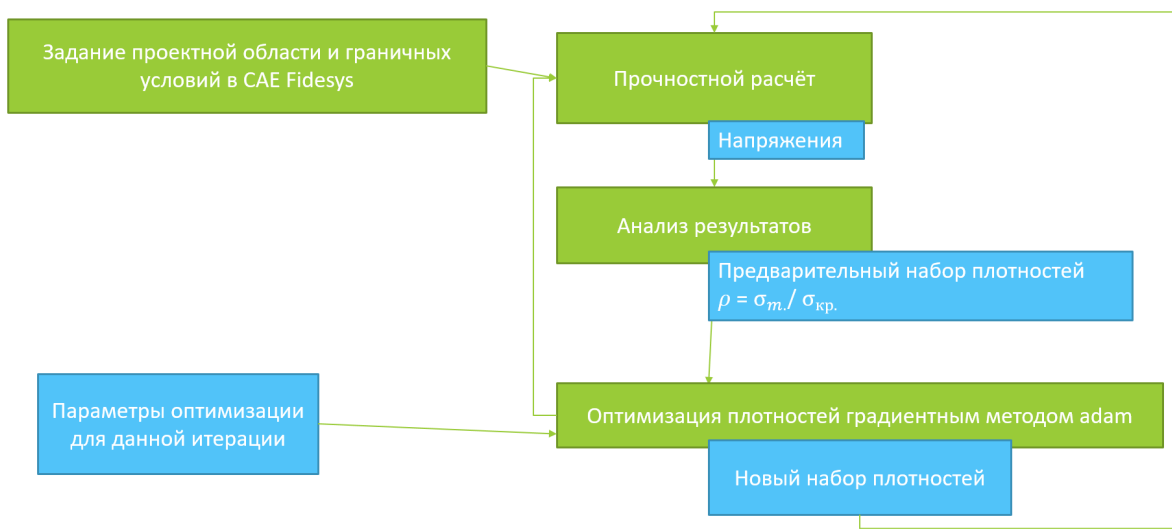


Рис. 6: Схема алгоритма топологической оптимизации, представленного в этой работе

5. Укрупненный алгоритм топологической оптимизации

Прежде всего задаётся проектная область на плоскости в форме прямоугольника. В области строится равномерная квадратная сетка. Задаются граничные условия: закрепления искомой конструкции в точках или на кривых и точечные, массовые и поверхностные силы, действующие на элемент конструкции. Далее задаются свойства материала и максимальные допустимые напряжения $\sigma_{кр}$. Начальная плотность во всех узлах проектной области инициализируется значением $\rho_{нач} = 0.5$. После этого в цикле выполняется следующая последовательность действий:

1. Выполняется конечноэлементный расчёт элемента конструкции с текущим распределением плотности, результатом которого является напряженно-деформированное состояние элемента конструкции в узлах сетки (массив напряжений).
2. Вычисляется предварительный набор плотностей в узлах сетки: $\rho_{предв.} = \sigma_m / \sigma_{кр}$. При этом минимально возможная плотность задается малым положительным числом (при расчетах это число считалось равным 10^{-6}), чтобы матрица жёсткости в методе конечных элементов не становилась сингулярной. Проблема сингулярности матриц жёсткости описывается в [10], а также затрагивается в [23]. На последних итерациях плотностям, не превысившим определённый порог, присваивается минимальное значение. Это делается для того, чтобы в итоге все плотности были близки к 0 или 1.
3. После этого на основе предварительных значений плотностей и других параметров происходит вычисление итоговых для данной итерации значений плотностей в узлах. Этот процесс описан ниже.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 6.

6. Метод определения плотностей на на каждой итерации

Изложим подробно третий шаг алгоритма, приведенного в предыдущем параграфе. Пусть имеется равномерная конечноэлементная сетка с шагом d по вертикали и горизонтали. Под $[\rho]$ будем понимать матрицу значений плотностей в узлах этой сетки, элементы этой матрицы будем обозначать через ρ_{kl} .

Вместо минимизации интеграла от плотности (2) решается задача о минимизации целевой функции более сложного вида, а именно, находится

$$\arg \min_{[\rho]} L([\rho]), \quad (6)$$

где

$$L([\rho]) = L_{\text{материал.}}([\rho]) + L_{\text{перегруз.}}([\rho]) + L_{\text{град.}}([\rho]). \quad (7)$$

Слагаемые в правой части формулы (7) вычисляются следующим образом:

$$L_{\text{материал.}}([\rho]) = b \sum_{k,l} \tanh(\pi \rho_{kl}), \quad (8)$$

$$L_{\text{перегруз.}}([\rho]) = a \sum_{k,l} (\rho_{k,l}^{\text{предв.}} - \rho_{k,l})_+, \quad (9)$$

$$L_{\text{град.}}([\rho]) = c \left[\sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l} - \rho_{kl}}{d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k,l+1} - \rho_{kl}}{d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l+1} - \rho_{kl}}{\sqrt{2}d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l} - \rho_{k,l+1}}{\sqrt{2}d} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Здесь \tanh — это гиперболический тангенс; a, b, c — коэффициенты, изменяющиеся в зависимости от итерации; операция $(x)_+$ означает $\max(x, 0)$.

Суммирование в формулах (8) и (9) выполняется по всем узлам сетки, а в формуле (10) — по тем узлам, в которых можно вычислить соответствующие разности.

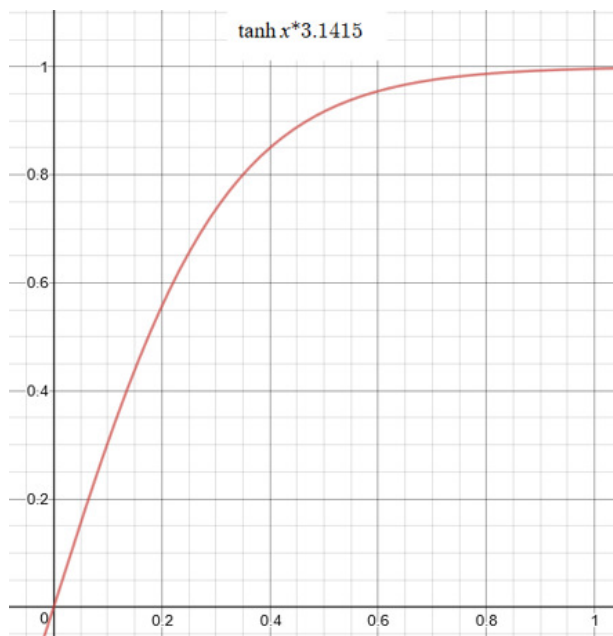
Поясним смысл слагаемых в правой части формулы (6). Они нужны для того, чтобы процедура оптимизации распределяла плотности на каждой итерации определённым образом.

$L_{\text{материал.}}$ отражает количество материала, использованного в конструкции. Гиперболический тангенс (см. график на рис. 7) применяется к плотности для того, чтобы сделать невыгодным для алгоритма использование промежуточных её значений, и стимулировать её стремиться к 0 или 1.

$L_{\text{перегруз.}}$ показывает, насколько новые значения плотности меньше предварительных значений, вычисленных на втором шаге алгоритма. Слишком сильное уменьшение плотностей на каждой итерации нежелательно, поскольку, скорее всего, это вызовет возникновение слишком больших напряжений в элементе конструкции на следующей итерации.

$L_{\text{град.}}$ представляет из себя сумму квадратов разностных производных по четырём направлениям. По сути эта величина показывает, насколько резко изменяется плотность от элемента к элементу. Как будет видно дальше на приведённом примере работы алгоритма, этот показатель очень важен, поскольку его регулирование позволяет изменять плотность плавно на ранних итерациях, чтобы избежать нежелательных вычислительных эффектов, в частности, появления решётчатых структур. На поздних же итерациях коэффициент c , отвечающий за влияние этого показателя в общей сумме, устремим к нулю, позволяя делать резкие переходы от высокой плотности к низкой.

Для решения задачи (6) используется градиентный метод Adam [36].

Рис. 7: График функции $\tanh(\pi x)$

7. Программная реализация и пример работы алгоритма

Алгоритм, который приведён выше, реализован на языке Python. Для расчета напряженно-деформированного состояния на соответствующих шагах алгоритма используется система прочностного инженерного анализа CAE Fidesys [32, 33, 34, 35].

Для численных примеров, приведенных далее, выбрано число итераций, равное 20. Такое число итераций, по нашему мнению, обеспечивает баланс между скоростью и качеством работы алгоритма для этих примеров.

Значения коэффициентов a , b и c в формулах (8)–(10) при расчетах были заданы следующим образом:

$$a = 1, \quad (11)$$

$$b = 0.075 + 0.02i, \quad (12)$$

$$c = 6 - 0.3i, \quad (13)$$

где i — номер итерации, изменяющийся от 0 до 19.

Рассмотрим, как работает алгоритм, на следующем примере. Имеется пластина, закреплённая с левого края, а к точке вблизи правого края вниз приложена сила (рис. 5). Задача решалась в рамках линейной упругости при плоском напряженном состоянии. Проследим изменения конструкции между итерациями алгоритма (рис. 8). Здесь синему цвету соответствует минимальная, почти нулевая плотность, а красному — плотность, равная единице.

На первых итерациях мы видим плавное изменение плотности — следствие высокого коэффициента штрафа c за ее резкое изменение. Далее этот коэффициент убывает, способствуя меньшему вкладу производных в функцию штрафа L , что позволяет получить более четкие границы конструкции. Параллельно растёт коэффициент штрафа за материал b , заставляя алгоритм минимизации штрафа экономить материал, а также использовать меньше промежуточных значений плотности, поскольку они становятся необоснованно «дорогими». Наконец, штраф за производные с уменьшением коэффициента c становится малым и выкристаллизуется конструкция, почти полностью состоящая из материала плотности 0 или 1.

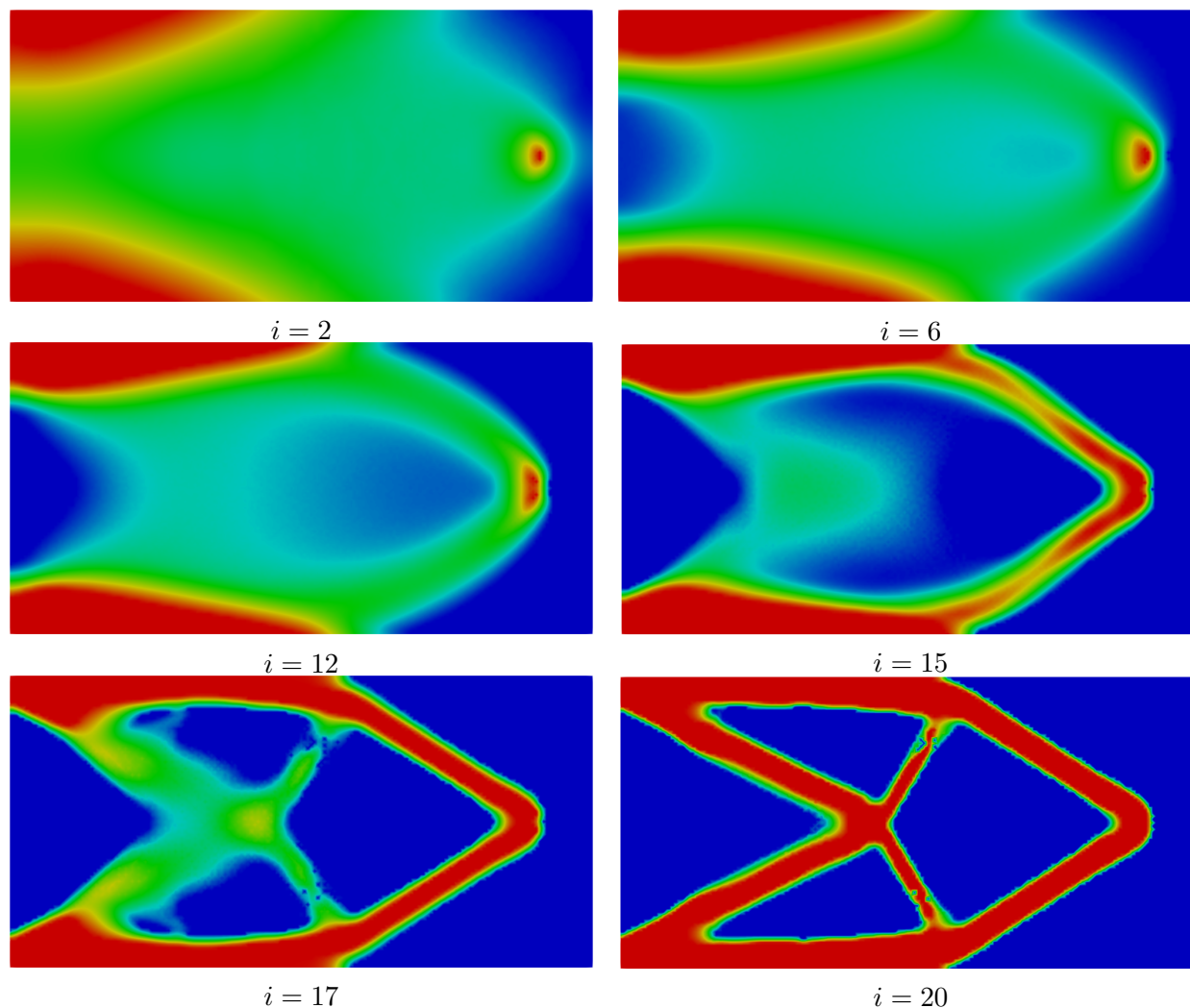


Рис. 8: Состояние оптимизируемой конструкции для некоторых итераций (i — номер итерации).

Исследуем теперь *сеточную сходимость* разработанного алгоритма. На рисунке 9 представлены результаты работы алгоритма для рассмотренной выше задачи на разных сетках. Можно заметить, что все сетки дают качественно похожую картину. Измельчение сетки уточняет конструкцию, сохраняя при этом её структуру. Таким образом, мы можем говорить о сеточной сходимости алгоритма.

8. Валидация

Приведённый в работе алгоритм был апробирован на некоторых задачах, описанных в [3].

Задача 1. В качестве проектной области рассматривается прямоугольная пластина (рис. 10). Она закреплена в трех узлах на левой границе, а к одному узлу внутри пластины приложена вертикальная сила $P = 5000$ кГс. Точка приложения силы находится на одном уровне с центральным узлом закрепления. Конструкция выполнена из алюминиевого сплава с модулем упругости $E = 7200$ кГс/мм² и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Задача решается для плоского напряжённого состояния.

Сравнение решений, описанных в [3] и решений, полученных с использованием алгоритма,

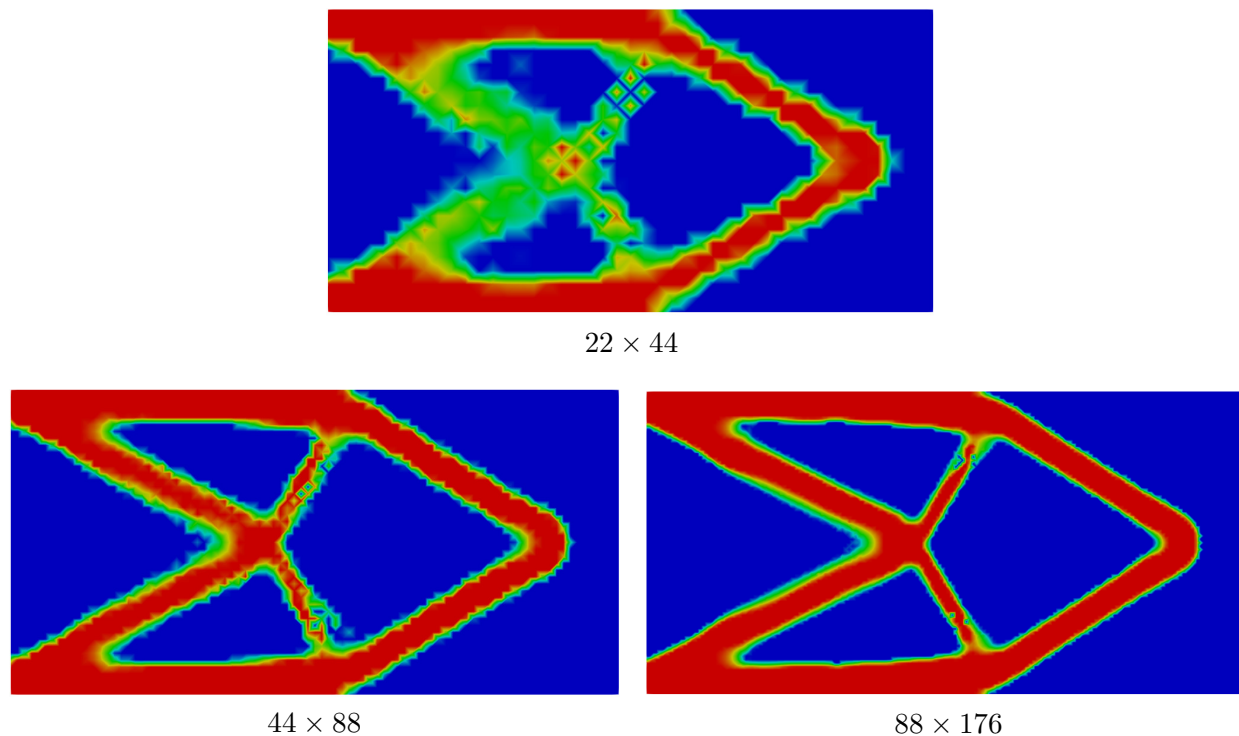


Рис. 9: Результаты работы алгоритма на разных сетках

рассмотренного выше, можно видеть на рисунке 11. Отметим, что критерии оптимизации в нашей работе и в статье [3] различны, что затрудняет сравнение. Поэтому при расчетах мы использовали разные значения параметра максимальных напряжений $\sigma_{кр.}$, и в результате расчетов были получены конструкции разной площади. Среди этих конструкций оказались такие, площадь которых примерно совпадает с площадью конструкций, полученных в [3]. Их сравнение приведено на рисунке 11. Можно видеть, что конструкции имеют похожую форму, хотя и не совпадают полностью.

Задача 2. В качестве проектной области рассматривается прямоугольная пластина (рис. 12). Закрепление производится в шести узлах. К одному узлу внутри области приложена вертикальная сила $P = 10000$ кГс. Точка приложения силы находится на одном уровне с центральными узлами закрепления, причем ближе к правой тройке закрепленных узлов. Параметры материала такие же, как и в предыдущей задаче.

Сравнение решений представлено на рисунке 13. Здесь отличий уже больше, чем в предыдущей задаче. В частности, решение, представленное в [3], обладает большим количеством зон с низкой ненулевой плотностью. Также на модели на левом верхнем рисунке присутствуют «отростки» сверху и снизу. Авторы статьи [3] указывают, что эти «отростки» являются нерациональными с точки зрения минимизации напряжений, и объясняют их наличие некоторыми особенностями своего алгоритма. Результат работы алгоритма, рассматриваемого в данной работе, таких отростков не содержит.

9. Заключение

В данной работе предложен подход к оптимизации формы элемента конструкции на основе расчета напряженно-деформированного состояния элемента конструкции методом конечных элементов. Разработан итеративный алгоритм для оптимизации топологии. Его существенной особенностью является использование целевой функции, содержащей дополнительные слагае-

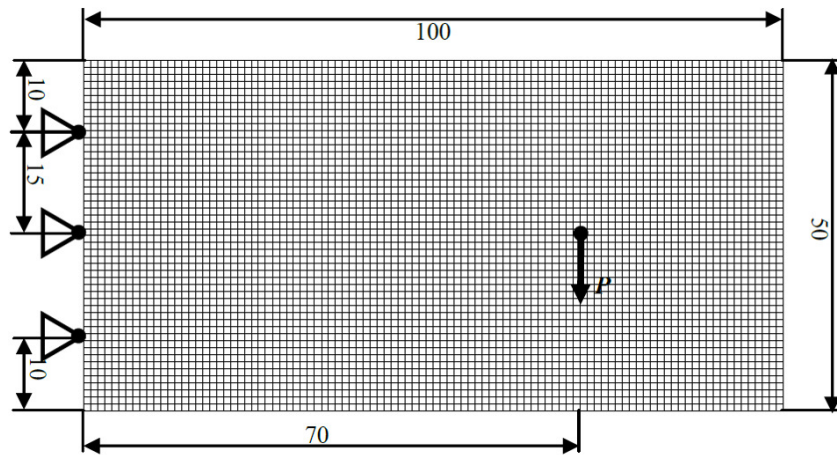


Рис. 10: Схема нагружения пластины в задаче 1

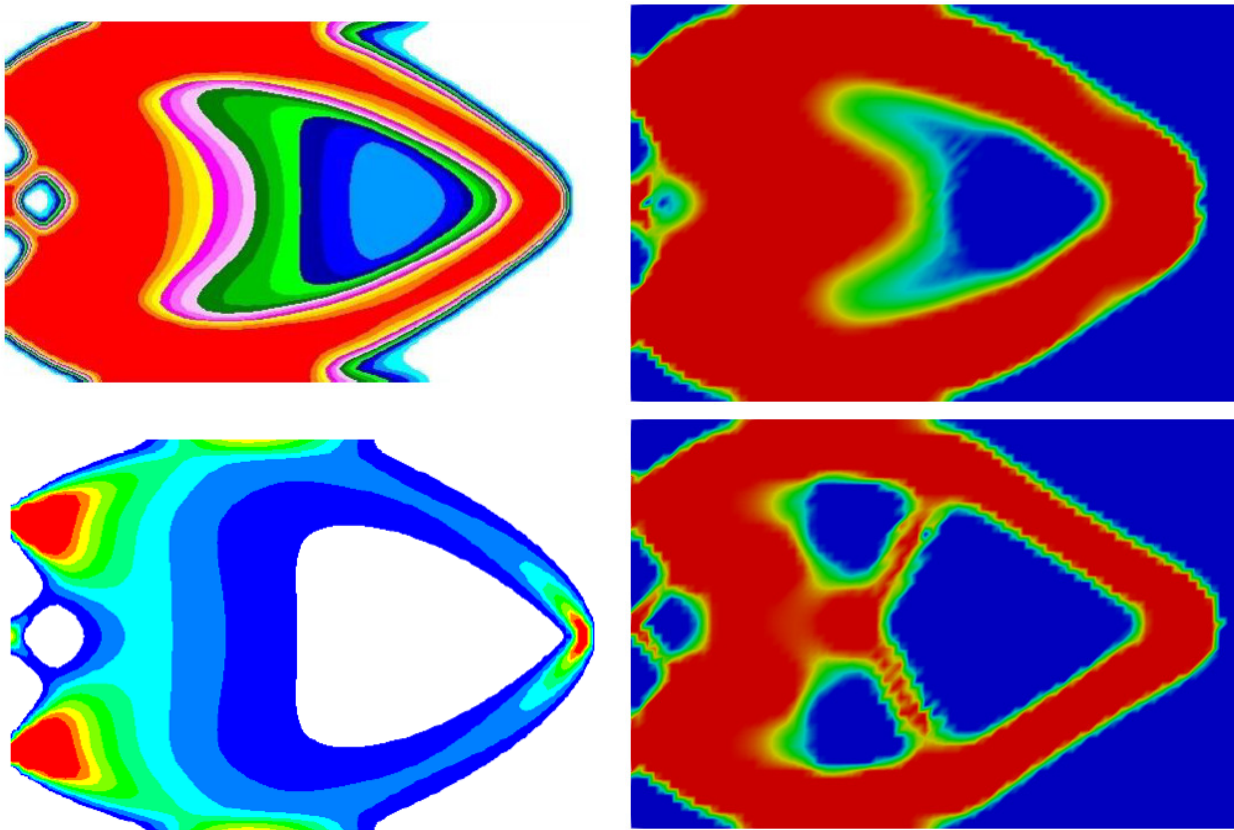


Рис. 11: Решения задачи топологической оптимизации для задачи 1, полученные в [3] (слева) и в данной работе (справа)

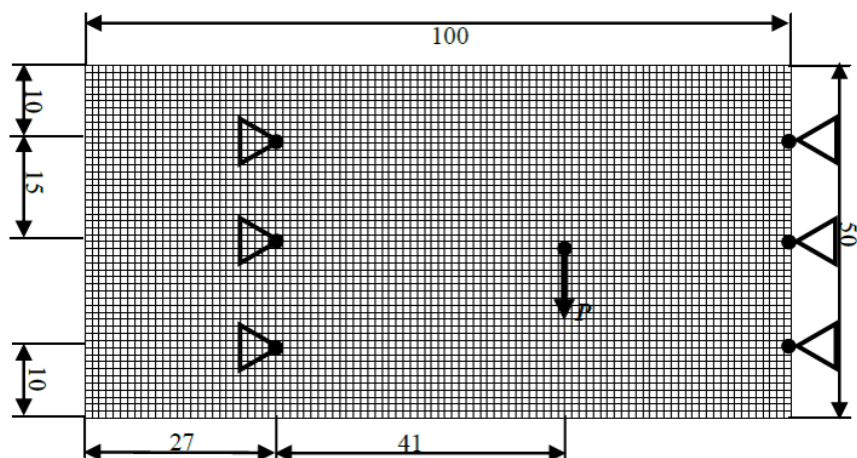


Рис. 12: Схема нагружения пластины в задаче 2

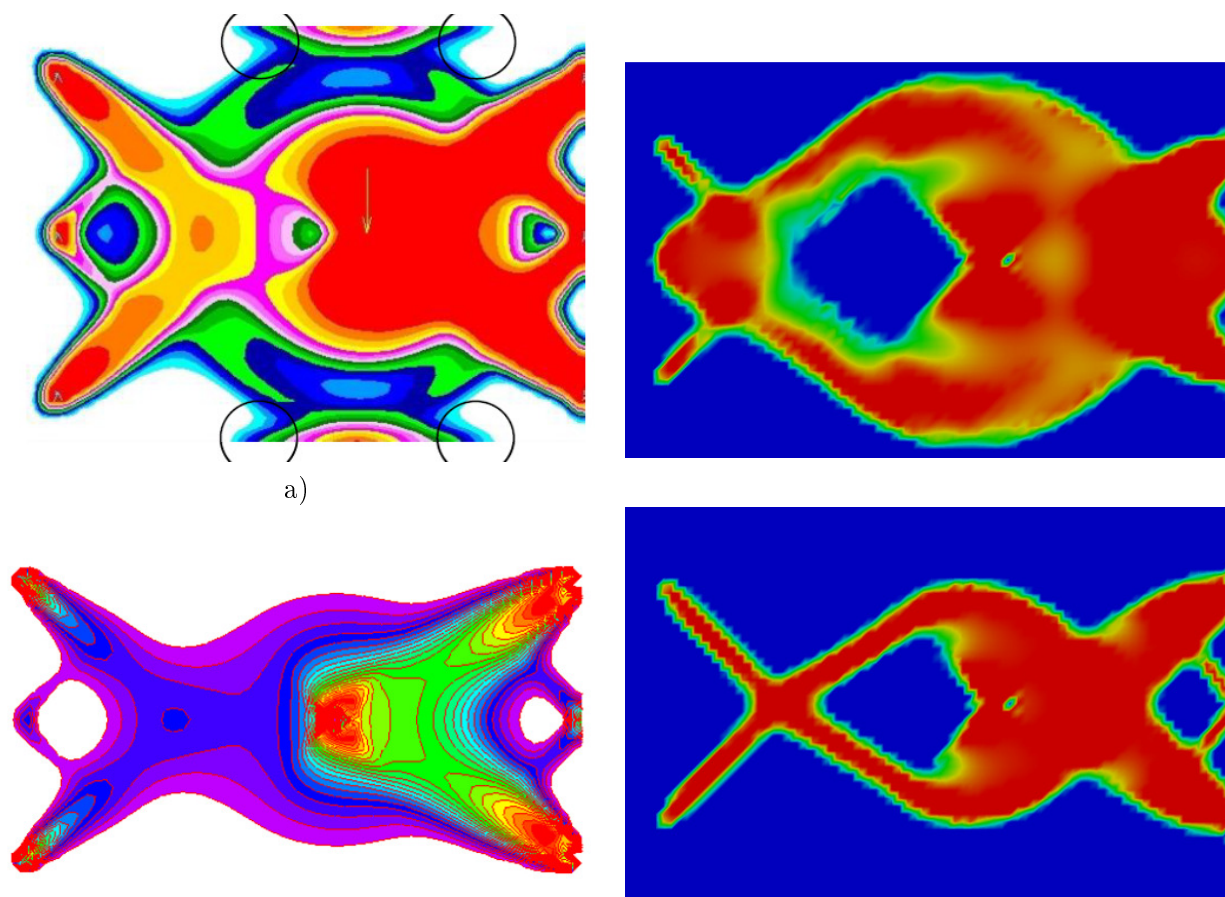


Рис. 13: Решения задачи топологической оптимизации для задачи 2, полученные в [3] (слева) и в данной работе (справа)

мые, введенные для повышения вычислительной устойчивости алгоритма оптимизации. Этот алгоритм был реализован в виде программного модуля, выполняющего топологическую оптимизацию плоской конструкции в прямоугольной проектной области.

Данный модуль был апробирован на нескольких задачах, описанных в [3], был проведен

сравнительный анализ результатов его работы и результатов, полученных в [3], который выявил у них общие черты.

Предложенный подход может быть в дальнейшем применен к оптимизации элементов конструкций, изготовленных из нелинейно-упругих и вязкоупругих материалов, испытывающих большие деформации [37, 38, 39], а также для задач теории наложения больших деформаций [40, 41, 42].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. 1989. 1 (4), pp. 193–202.
2. *Bendsøe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
3. *Сысоева В.В., Чедрик В.В.* Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций // Учёные записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII, № 2. С. 91–102.
4. *Оганесян П.А., Шевцов С.Н.* Оптимизация топологии конструкций в пакете Abaqus // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2014. Т. 16, № 6(2). С. 543–549.
5. *Боровиков А.А., Тушев О.Н.* Разработка силовой конструкции космического аппарата с использованием топологической оптимизации для двух вариантов технологии изготовления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 9. С. 1–13.
6. Research Report: Generative Design and Topology Optimization: In-Depth Look at the Two Latest Design Technologies [Электронный ресурс] URL: <https://www.engineering.com/ResourceMain.aspx?resid=826>. (дата обращения: 22.10.2019).
7. *Abbey T.* Topology Optimization // Digital Engineering. June 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization/>
8. *Abbey T.* Topology Optimization Methods. Digital Engineering. September 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-methods>
9. *Abbey T.* Topology Optimization. Part 3. Digital Engineering. October 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-2>
10. *Левин В.А., Вершинин А.В.* Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина. Т. 2). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
11. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чугунов В.Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина. Т. 4.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
12. *Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G.* SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. [73-rd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition] Vienna, Austria, 2011. P. 41–45.

13. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — V. 1158, No. 2. Art. 032022.
14. *Koga J.-I., Koga J., Homma S.* Checkerboard problem to topology optimization of continuum structures // *Computational Engineering, Finance, and Science*. 2013. arXiv:1309.5677 [cs.CE].
15. *Болдырев А.В.* Топологическая оптимизация силовых конструкций на основе модели переменной плотности // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2011. Т. 13. № 1–3. С. 670–673.
16. *Brckett D., Ashcroft I., Hague R.* Topology optimization for additive manufacturing // *Proc. SFF Symp. Austin Texas*. — 2011. — P. 348–362.
17. *Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A.* On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 27. P. 290–304. Doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
18. *Diaz A.R., Bendsøe M.P.* Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method // *Structural Optimization*. — 1992. — V. 4. — P. 17–22.
19. *Лизин В.Т., Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций. 4-е изд. М.: Машиностроение, 2003. 448 с.
20. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // *PNIPU Mechanics Bulletin*. — 2013. — No. 3. — P. 16–34.
21. *Badriev I.B., Korablev A.I., Makarov M.V., Smirnova E.V.* Mathematical simulation of the bending problem of the hinged sandwich plate in physically nonlinear statement // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022013.
22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Contact interaction of the plate with supporting deformable bases under the conditions of bending // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022014.
23. *Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G.* Mesh-independent equivalent domain integral method for j-integral evaluation // *Advances in Engineering Software*. — 2016. — V. 100. — P. 308–318.
24. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya.* Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Compos. Struct.* — 2015. — V. 131. — P. 25–36.
25. *Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya.* Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Adv. Eng. Softw.* 2015. V. 86. — P. 80–84.
26. *Levin V.A., Zingermann K.M.* Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. — 2003. — V. 70 (6). — P. 809-816.

27. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышёвский сборник. 2017. Т. 18, № 13. — С. 316–329.
28. Yakovlev M.Ya., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, No. 4. Art. 042037.
29. Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case // Modelling and Simulation in Engineering, Art. 9010576, 2016. — 10 p.
30. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // Letters on materials. 2017. V. 7, No. 4. — P. 452–454.
31. Эглит М. Э. Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. стереотип. М.: ЛЕНАНД, 2016. — 208 с.
32. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — М.: URSS, 2015. — 408 с.
33. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. — 2017. — V. 2017. Art. 1797561. DOI: 10.1155/2017/1797561.
34. Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in fidesys industrial package // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — V. 158. Art. 012049.
35. Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 032022.
36. Kingma D.P., Ba J.L. Adam: a Method for Stochastic Optimization // Proc. 3-rd International Conference on Learning Representations. 2015. arXiv:1412.6980 [cs.LG]. P. 1–13.
37. Ogden R. Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood: Chichester, 1984.
38. Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1990.
39. Kislitsyn V.D., Mokhireva K.A., Shadrin V.V., Svistkov A.L. Research and modeling of viscoelastic behavior of elastomeric nanocomposites// PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, 2021(2), p. 76–87.
40. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains// International Journal of Solids and Structures. 2015. V. 67–68. P. 244–249.
41. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73 (6). P. 710–721.

42. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24 (12). P. 2240–2251.

REFERENCES

1. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. 1989. 1 (4), pp. 193–202.
2. *Bendsøe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
3. *Sysoeva V.V., Chedrik V.V.* Algorithms for structural topology optimization // TsAGI Science Journal. 2011. V. XLII, No. 2. P. 91–102. (in Russian).
4. *Oganesyan P.A., Shevtsov S.N.* Topology designs optimization in Abaqus package // Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences 2014. V. 16, No. 6(2). P. 543–549.
5. *Borovikov A.A., Tushev O.N.* Development of a spacecraft load bearing structures using topology optimization for two versions of manufacturing technologies // Engineering Journal: Science and Innovation. 2018. No. 9. P. 1–13. (in Russian).
6. Research Report: Generative Design and Topology Optimization: In-Depth Look at the Two Latest Design Technologies [Электронный ресурс] URL: <https://www.engineering.com/ResourceMain.aspx?resid=826>. (дата обращения: 22.10.2019).
7. *Abbey T.* Topology Optimization // Digital Engineering. June 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization/>
8. *Abbey T.* Topology Optimization Methods. Digital Engineering. September 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-methods>
9. *Abbey T.* Topology Optimization. Part 3. Digital Engineering. October 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-2>
10. *Levin V.A., Vershinin A.V.* Numerical methods. Parallel computing. (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs in 5 volumes. Ed. by V.A. Levin. V. 2). — Moscow: Fizmatlit, 2015. (in Russian).
11. *Vassilevski Yu.V., Danilov A.A., Lipnikov K.N., Chugunov V.N.* Automatized technologies of generation of unstructured computational meshes . (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs in 5 volumes. Ed. by V.A. Levin. V. 4). — Moscow: Fizmatlit, 2015. (in Russian).
12. *Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G.* SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. [73-rd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition] Vienna, Austria, 2011. P. 41–45.
13. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. Art. 032022.
14. *Koga J.-I., Koga J., Homma S.* Checkerboard problem to topology optimization of continuum structures // Computational Engineering, Finance, and Science. 2013. arXiv:1309.5677 [cs.CE].

15. *Boldyrev A.V.* Topological optimization of load-bearing constructions on the basis of variable density model // *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* 2011. V. 13. No. 1–3. P. 670–673. (in Russian).
16. *Brackett D., Ashcroft I., Hague R.* Topology optimization for additive manufacturing // *Proc. SFF Symp. Austin Texas.* — 2011. — P. 348–362.
17. *Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A.* On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing.* 2019. V. 27. P. 290–304. Doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
18. *Diaz A.R., Bendsøe M.P.* Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method // *Structural Optimization.* — 1992. — V. 4. — P. 17–22.
19. *Lizin V.T., Pyatkin V.A.* Design of thin-walled structures. 4-th ed. Moscow: Mashinostroenie, 2003. 448 p. (in Russian).
20. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // *PNIPU Mechanics Bulletin.* — 2013. — No. 3. — P. 16–34.
21. *Badriev I.B., Korablev A.I., Makarov M.V., Smirnova E.V.* Mathematical simulation of the bending problem of the hinged sandwich plate in physically nonlinear statement // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022013.
22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Contact interaction of the plate with supporting deformable bases under the conditions of bending // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022014.
23. *Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G.* Mesh-independent equivalent domain integral method for j-integral evaluation // *Advances in Engineering Software.* — 2016. — V. 100. — P. 308–318.
24. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya.* Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Compos. Struct.* — 2015. — V. 131. — P. 25–36.
25. *Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya.* Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Adv. Eng. Softw.* 2015. V. 86. — P. 80–84.
26. *Levin V.A., Zingermann K.M.* Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME.* — 2003. — V. 70 (6). — P. 809-816.
27. *Konovalov D. A., Yakovlev M. Ya.* Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys // *Chebyshevskii sbornik.* 2017. V. 18, No. 3. P. 316–329. (in Russian).
28. *Yakovlev M.Ya., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M.* Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. V. 1158, No. 4. Art. 042037.

29. *Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K.* Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case // Modelling and Simulation in Engineering, Art. 9010576, 2016. – 10 p.
30. *Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M.* An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // Letters on materials. 2017. V. 7, No. 4. — P. 452–454.
31. *Eglit M.E.* Lectures on foundations of continuum mechanics. Moscow: LENAND, 2016. — 208 p. (in Russian).
32. *Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V.* Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer. Moscow: LENAND, 2015. – 408 p. (in Russian).
33. *Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V.* The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. — 2017. — V. 2017. Art. 1797561. DOI: 10.1155/2017/1797561.
34. *Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M.* Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in fidesys industrial package // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — V. 158. Art. 012049.
35. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 032022.
36. *Kingma D.P., Ba J.L.* Adam: a Method for Stochastic Optimization // Proc. 3-rd International Conference on Learning Representations. 2015. arXiv:1412.6980 [cs.LG]. P. 1–13
37. Ogden R. Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood: Chichester, 1984.
38. Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1990.
39. Kislitsyn V.D., Mokhireva K.A., Shadrin V.V., Svistkov A.L. Research and modeling of viscoelastic behavior of elastomeric nanocomposites// PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, 2021(2), p. 76–87.
40. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains// International Journal of Solids and Structures. 2015. V. 67–68. P. 244–249.
41. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73 (6). P. 710–721.
42. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24 (12). P. 2240–2251.

Получено: 11.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-327-349

Эволюция основных положений теории устойчивости¹

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhinu@mail.ru

Аннотация

Целью работы является изучение эволюции понятия устойчивости, представляющей структурообразующее понятие во всех областях науки и техники, и даже за их пределами. Этапы этой длительной эволюции соответствовали доминирующим тенденциям математики своего времени. К концу XIX в. была осознана сложность понятия устойчивости, встал вопрос о математически строгом подходе к проблеме. Была построена общая теория устойчивости движения на прочном математическом фундаменте. Это стало вехой не только в развитии самого предмета, но составило одно из оснований построения качественной теории. В дальнейшем теория устойчивости разделилась на две ветви: одна — расширение теории вширь на старой идейной базе, усиление связей с приложениями; другая — устойчивость в контексте теории динамических систем. В последнем случае устойчивые движения рассматриваются в ряду всех движений, в дихотомии устойчивость-неустойчивость оба полюса равноправны и содержательны. Неустойчивость оказывается тоже сложным понятием, с многообразием форм. Неустойчивость приобрела конструктивное значение, она обеспечивает новации, развитие. Типичным является сосуществование устойчивости и неустойчивости со сложной топологией такой структуры. Многообразные виды неустойчивости демонстрирует явление турбулентности. Изучение этого явления на современном уровне требует использование математики по канонам строгости, принятых в самой математике. Можно поставить вопрос о границах применимости возможностей самого качественного описания и понятия устойчивости. В этом отношении имеются первые результаты, требуются новые идеи.

Ключевые слова: устойчивость, возмущение, критерий устойчивости, динамическая система, неустойчивость, турбулентность.

Библиография: 81 название.

Для цитирования:

Р. Р. Мухин. Эволюция основных положений теории устойчивости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 327–349.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402 А.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-327-349

Evolution of the main provisions of the theory of stability²

R. R. Mukhin

Mukhin Raviľ Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The aim of the work is to study the evolution of the concept of stability, which is a structure-forming concept in all areas of science and technology, and even beyond them. The stages of this long evolution corresponded to the dominant trends in the mathematics of their time. By the end of the XIX century, the complexity of the concept of stability was realized, the question arose of a mathematically rigorous approach to the problem. A general theory of motion stability was built on a solid mathematical foundation. This became a milestone not only in the development of the subject itself, but was one of the foundations for constructing a qualitative theory. Subsequently, the theory of stability was divided into two branches: one - the expansion of the theory in breadth based on old ideas, strengthening the links with applications; the other is stability in the context of the theory of dynamical systems. In the latter case, stable movements are considered in the series of all movements; in the stability-instability dichotomy both poles are equal and meaningful. Instability also turns out to be a complex concept that has a variety of forms. Instability has acquired a constructive meaning; it ensures innovation and development. Typical is the coexistence of stability and instability with a complex topology of such a structure. Diverse types of instability demonstrate the phenomenon of turbulence. The study of this phenomenon at the modern level requires the use of mathematics according to the canons of rigor adopted in mathematics itself. One can raise the question of the limits of applicability of the possibilities of the most qualitative description and the concept of stability. In this regard, there are first results, new ideas are required.

Keywords: stability, perturbation, stability criterion, dynamical system, instability, turbulence.

Bibliography: 81 titles.

For citation:

R. R. Mukhin, 2022, “Evolution of the main provisions of the theory of stability”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 327–349.

1. Введение

Устойчивость представляет структурообразующую категорию не только во всех областях науки и техники, но и за их пределами, в экономической, социальной и политической жизни. Идеи об устойчивости восходят еще к античности, и в науке Нового времени постоянно находятся в поле зрения. Эти задачи были поставлены практическими потребностями, в первую

²The work was supported by the RFBR grant No. 20-011-00402 A.

очередь обеспечением устойчивостью судов (С. Стевин, Х. Гюйгенс, Д. Бернулли) [1]. Их рассмотрение носило чисто геометрический характер. Л. Эйлер, видимо, был первым, кто ввел устойчивость в обиход последовательного математического изучения на основе аналитических методов. Само понятие устойчивости, как и многое в математике того времени, казалось интуитивно ясным. Первыми были задачи об устойчивости равновесия. В сочинениях Эйлера об упругой неустойчивости стержня под воздействием продольных сжимающих сил (1744) [2] и об устойчивости плавающих тел (1749) [3] впервые строго была поставлена задача об устойчивости и отчетливо высказана идея о влиянии малых возмущений на нарушение равновесия. В случае стержня при критической нагрузке система находится в неустойчивом равновесии и бесконечно малое возмущение приводит к изгибу стержня. Эти идеи легли в основу исследований Ж. Л. Лагранжа по устойчивости положения равновесия. В небольшой заметке (1798) [4], позже включенное им во второе издание *Аналитической механики* (1811) [5, Р. 97], Лагранж рассматривал равновесие консервативной механической системы. Он не только доказал важнейшую теорему механики, но впервые дал определение устойчивости и сформулировал условие (критерий) устойчивости. В данном случае достаточное условие равновесия будет следующим:

«Когда эта функция [потенциальная энергия, Р. М.] является минимумом, то в этом случае имеет место устойчивое равновесие в том смысле, что если сначала система находилась в состоянии равновесия, а затем была немного из него выведена, то она сама собою стремится вернуться к этому состоянию» [6, С. 97].

Доказательство проведено Лагранжем с помощью разложения потенциальной энергии в ряд с точностью до второго порядка. Недостаток подхода Лагранжа очевиден и в последующем он был в значительной степени восполнен П. Г. Лежен-Дирихле (1846), который указал, что могут вносить вклад также четвертый и более высокие порядки, но значение минимума потенциальной энергии по-прежнему сохраняется [7, 8]. Выше говорилось об устойчивости равновесия. Понятие устойчивости продолжало расширяться. «Астрономический» XVIII век дал еще одно направление исследованиям проблемы устойчивости, и оно касается самих основ мироздания. Речь идет об устойчивости таких объектов, как Солнечная система (Ж. Л. Лагранж (1774, 1781-1782) [9, 10]; П. С. Лаплас (1773) [11], (1788) [12], С. Д. Пуассон [13]), этот вопрос до настоящего времени продолжает оставаться предметом дискуссий. Речь уже идет об устойчивости динамической системы как целого, здесь не только новый объект, но и новый вид устойчивости. Названные авторы сделали первые шаги для решения этой грандиозной задачи, которая, по всей вероятности, не имеет окончательного решения. Но это тот случай, когда важна сама постановка задачи. Сошлемся на слова А. Эйнштейна:

«Формулировка проблемы часто более существенна, чем ее разрешение, которое может быть делом лишь математического или экспериментального искусства. Постановка новых вопросов, развитие новых возможностей, рассмотрение старых проблем под новым углом зрения требует творческого воображения и отражает действительный успех в науке» [14, С. 78].

Вопрос об устойчивости Солнечной системы дал мощный импульс исследованиям в XX в.

До середины XIX в. в идейном отношении наблюдалось некоторое затишье, хотя исследования устойчивости проводились по целому ряду вопросов (проблема устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы, К. Г. Якоби (1834), Ж. Лиувилль (1834); устойчивость колец Сатурна, Дж. К. Максвелл (1859), С. Ковалевская (1885)). Примечательным событием явилась публикация двухтомного сочинения У. Томсона и Р. Г. Тэта *Treatise on Natural Philosophy* (1867) [15]. Новый этап развития аналитической механики в XIX в. связан с У. Гамильтоном, который 1834-1835 гг. предложил новый формализм, но в течение нескольких десятилетий он не получил большого признания [16]. У Томсона и Тэта вопросы устойчивости рассматриваются на языке гамильтонова формализма. Кроме того, Томсон и Тэт впервые обратились к общим вопросам устойчивости из еще более фундаментальных позиций, исходя из

принципа наименьшего действия. И второй момент, Томсон и Тэт впервые обратились к вопросу об устойчивости движения, в том числе движения жидкости. Однако они не дали математически строгого определения устойчивости, исходя из понимания устойчивости Лагранжа [5], и на этой основе сформулировать критерий устойчивости. Надо отметить исследования Э. Рауса, близко подошедшего к общим вопросам устойчивости, но он ограничился только первым приближением (1877) [17]. Задача общего случая досталась следующему поколению исследователей – А. Пуанкаре, Н. Е. Жуковскому, А. М. Ляпунову. Здесь надо коснуться некоторых тенденций развития математики XIX в. Утверждалась методология, направленная на выяснение условий и границ истинности каждого утверждения, новых канонов строгости и доказательности. Особое значение получили теоремы существования, в частности, существования и единственности решений дифференциальных уравнений и четко различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о разрешимости той или иной задачи. В русле обозначенных тенденций находится вопрос строго определения устойчивости и на этой основе построение теории устойчивости.

2. Создание современной теории устойчивости: А. Пуанкаре, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов

Пуанкаре, наверно, был первым, кто ясно осознал два тесно связанных между собой важнейших положения: 1) устойчивость – многообразное понятие, оно по-разному проявляется в различных ситуациях, и 2) требуется дать четкое определение устойчивости, чтобы сделать ее предметом строгого математического исследования. Вопрос об устойчивости Пуанкаре ставит в третьем мемуаре своего труда *Memoire sur les courbes définies par une équations différentielle* (1885) [18], где он заложил основы самой качественной теории (русский перевод [19]). Подробно вопрос об устойчивости изучен Пуанкаре в главе XXVI третьего тома *Новых методов небесной механики* [20]. Как уже упоминалось, фундаментальная проблема устойчивости Солнечной системы была поставлена в XVIII в. Лагранжем и Лапласом [9]-[12]. Лагранж показал, что при пренебрежении квадратичными членами большие оси орбит остаются неизменными. В рамках этого приближения большие оси можно представить рядами с членами вида

$$A \sin(\alpha t + \beta) \quad (1)$$

где A , α и β – постоянные.

Если эти ряды равномерно сходятся, то большие оси остаются заключенными в определенных пределах, и система находится в состоянии полной устойчивости. Положение меняется при учете следующего приближения теории возмущений. В своей работе 1808 г. С. Д. Пуассон установил [13], что в этом случае в рядах, помимо членов (1), появляются секулярные члены вида

$$At \sin(\alpha t + \beta)$$

Величина большой полуоси будет испытывать непрерывные колебания, система бесконечно много раз сколь угодно близко приближается к начальному положению, но нельзя сказать, что система значительно не удаляется от него, т.е. система неустойчива. Таким образом, имеются два различных по смыслу понятия устойчивости: устойчивость по Лагранжу и устойчивость по Пуассону [20, Т. 2. С. 130-131]. Устойчивость по Пуассону Пуанкаре рассматривал еще ранее [19, С. 110]. Надо отметить, что данное понятие устойчивости по Лагранжу отлично от упомянутой выше устойчивости равновесия консервативной механической системы. Таким образом, оказывается, что казавшееся интуитивно ясным понятие устойчивости имеет многообразный смысл. Сам Пуанкаре в четвертом мемуаре (1886) [19, С. 262] вводит еще один вид устойчивости – орбитальную устойчивость:

«Если движущаяся точка была очень близка к замкнутой траектории в момент $t = 0$, то она все время будет оставаться очень близкой к ней как при положительных, так и при отрицательных значениях t »

Здесь следует указать на забытую докторскую диссертацию Н. Е. Жуковского «О прочности движения» (1882) [21, 22, Р. 324-325]. Жуковский дал строгое определение орбитальной устойчивости, проведя параметризацию времени $\tau(t)$, причем $\tau(t_0) = t_0$, и сформулировал общие теоремы. Устойчивость по Жуковскому согласуется с устойчивостью по Пуанкаре в случае равновесия или периодических движений. Пуанкаре не решил задачу построения общей теории устойчивости, это заслуга А. М. Ляпунова, но идеи Пуанкаре оказали на него значительное влияние и явились источником вдохновения, что он отмечает в своем труде [23, С. 28-29].

Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

и рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$, и

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть невозмущенным, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [23, С. 28].

Подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях о всем множестве траекторий посредством привлечения возмущенного движения. На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех векторов $x(t)$ таких, что $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Кроме того, Ляпунов еще вводит важное понятие асимптотической устойчивости, если еще $|x(t) - x_0(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Труд Ляпунова [23] явился исходным пунктом всех последующих исследований, где используется понятие устойчивости, и с его работы берет свое начало современная теория устойчивости, и не только в контексте механики. Другой исходный пункт связан с именем Дж. Биркгофа, выдвинувшие новые, совершенно нетривиальные идеи.

3. Понятие устойчивости в теории динамических систем.

Дж. Биркгоф

С именем Дж. Биркгофа связан новый этап развития не просто теории устойчивости, а самой качественной теории. Биркгоф вместе с Пуанкаре является основателем теории динамических систем. Появилось новое фундаментальное понятие – динамическая система, и сама теория у Биркгофа обрела четкие контуры. Биркгоф переходит на более общие и абстрактные позиции. Это касается и вопросов устойчивости. В деятельности Биркгофа важное значение имел коллоквиум математиков в университете Чикаго (1920), где он прочел цикл лекций «Динамические системы» [24]. Материал лекций составил ядро основного труда Биркгофа *Динамические системы* (1927) [25]. Значительное место в исследованиях Биркгофа отводится вопросам устойчивости, и наиболее полно они изложены в его большой статье в *Acta Mathematica*, вышедшей в том же самом 1920 г. [26]. Перейдем к этой работе.

С самого начала Биркгоф исследует вопросы устойчивости. Заметим, что во всех исследованиях по динамическим системам у Биркгофа явно ощущается влияние Пуанкаре. Не стала исключением и данная работа. Толчком исследований Биркгофа явилось доказательство геометрической теоремы Пуанкаре (теорема Пуанкаре-Биркгофа). В это доказательства Биркгоф

внес главный вклад. В данной теореме исключительное место занимают периодические движения. Их значение определяется тем, что при условии плотности заполнения ими какой-либо области с помощью периодических движений предполагалось изучать свойства всех других решений. Теорема Пуанкаре-Биркгофа была установлена для систем с двумя степенями свободы, которым Биркгоф вообще уделял пристальное внимание. Это простейшие неинтегрируемые системы. В данной работе Биркгоф широко использует метод сечения Пуанкаре, что позволяет понизить размерность задачи. Тогда движение описывается рекуррентными соотношениями с дискретным временем. Динамическая проблема сводится к дискретному преобразованию T замкнутой $(n-1)$ -мерной поверхности в себя, свойства движения сводятся к изучению свойств этого преобразования. Периодические траектории отображаются на поверхности в неподвижные точки. Биркгоф представил координаты трансформированных точек в виде ряда

$$u_1 = au + bv + \dots, \quad v_1 = cu + dv + \dots, \quad (2)$$

где u, v координаты неподвижных точек, и поставил задачу классификации инвариантных точек. Решение основывается на анализе линейного преобразования в разложении (2) и задача сводится к исследованию корней квадратного уравнения

$$\rho^2 - (a+d)\rho + ad - dc = 0, \quad (3)$$

$ad - dc = 1$, его корни обозначим через ρ и $1/\rho$. Представляя преобразование T в виде нормальной формы, можно выделить три случая: ρ действительное число, $\rho \neq \pm 1$; ρ является комплексным числом, $\rho = e^{i\theta}$, $|\rho| = 1$. В зависимости от значения угла θ рассматриваются три варианта: $\theta/2\pi$ – иррациональное число; $\theta = 0$; $\theta/2\pi$ – рациональное число. Тогда в линейном приближении получается

- I) $u_1 = \rho u, v_1 = \frac{v}{\rho}$ ($\rho \neq \pm 1$),
- II) $u_1 = u \cos \theta - v \sin \theta, v_1 = u \sin \theta + v \cos \theta$,
- III) $u_1 = \pm u, v_1 = \pm v + du$ ($d \neq 0$).

Этим случаям отвечают инварианты функций $uv, u^2 + v^2, u^2$ соответственно. В первом случае инвариантная точка P относится к гиперболическому типу $uv = const$. В третьем случае P будет двигаться вдоль пары параллельных прямых $u^2 = const$. Второй случай относится к эллиптическому типу, когда преобразование T соответствует вращению вокруг начального положения $(0,0)$ на угол θ [26, Р. 113-115]. Далее Биркгоф, следуя Т. Леви-Чивита [27], формулирует следующее основополагающее положение:

«Если окрестность инвариантной точки может быть выбрана такой, что точки, произвольно близкие к инвариантной точке, покидают эту окрестность при преобразовании T (или T^{-1}), инвариантная точка является неустойчивой, в противном случае инвариантная точка устойчива» [26, Р. 115].

В линейном приближении типы I и III являются неустойчивыми, тип II – устойчивым. Что очень примечательно, Биркгоф рассматривает вопросы устойчивости в контексте других проблем динамики: интегрируемости, классификации движений и др. Видение Биркгофом самого понятия устойчивости согласуется с понятием устойчивости по Ляпунову, но отличается в концептуальном отношении. В главе VII *Динамических систем* [25] Биркгоф выдвинул программу, в которой в полной общности ставится задача исследования динамических систем (программа Пуанкаре-Биркгофа):

«Конечной целью теории движения динамической системы должно служить качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» [25, С. 194].

Для Биркгофа устойчивые движения находятся в ряду между всеми движениями и естественным образом связаны с классификацией движений. В отличие от всего предыдущего развития теории устойчивости, где во главу угла ставилась устойчивость, а неустойчивость уходила

далеко на задний план, у Биркгофа принципиально иное видение. Неустойчивость впервые приобретает равные права с устойчивостью. Если ранее в бинарной оппозиции устойчивость-неустойчивость центр тяготел к полюсу устойчивости, то Биркгофа он смещается к середине между ними. Произошел концептуальный сдвиг, фактически новый взгляд на мир. Эта идея Биркгофа не произвела впечатления на современников. По достоинству она была оценена лишь во второй половине прошлого века. Тогда стало возможным говорить не просто о неустойчивости, а оказалось, что неустойчивость сама имеет сложную структуру и можно ввести количественную меру степени неустойчивости. Неустойчивость и сложные движения (хаос) становятся сущностными характеристиками, они играют конструктивную роль. Хаос не просто неупорядоченность, через него формируются новации, происходит развитие.

К 1920-м годам теория устойчивости Ляпунова являлась самой разработанной частью и некоторое время она развивалась относительно самостоятельно от общей теории динамических систем. Здесь имеются важные достижения, в частности, значительный вклад отечественных математиков (Н. Г. Четаев, К. П. Персидский, И. Г. Малкин, Н. Д. Моисеев, Е. А. Барбашин и др.). Это направление довольно подробно освещено в литературе (см., например, [28]-[30]). Выделим исследования Н. Г. Четаева (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, теоремы о неустойчивости) [31, 32]. При всей важности всех этих исследований они все же лежат в стороне от принципиальных вопросов теории устойчивости. Обратимся к принципиальным моментам в дальнейшем развитии понятия устойчивости. И здесь важное значение имеет деятельность школы Андронова.

4. Структурная устойчивость. Различные виды оппозиции устойчивость – неустойчивость

Обратимся к фундаментальному понятию бифуркации, введенное Пуанкаре (1885) [33], и занявшее центральное место в исследованиях А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкой массы и Э. Шмидта по нелинейным интегральным уравнениям. В точке бифуркации происходит разделение качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. В этом контексте устойчивость предстает под новым ракурсом.

А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным было введено понятие структурной устойчивости (1937) [34], позднее оно получило развитие у М. Пейксото [35]. Структурно устойчивые системы – класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях самих дифференциальных уравнений. В понятии структурной устойчивости формализована такая сторона качественной теории, как глобальное описание. Структурная устойчивость легла в основу исследований в школе Андронова. В 1933 г. Андронов сформулировал программу исследований динамических систем [36], которая представляет частный случай программы Пуанкаре-Биркгофа. Рассматривается динамическая система, описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_i}{dt} = f_i(w_1, w_2, \dots, w_m; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

где w_1, w_2, \dots, w_m – фазовые переменные, p_1, p_2, \dots, p_n – параметры системы. Андронов поставил задачу исследования структуры разбиения фазового пространства на фазовые траектории и изучение изменения этой структуры в зависимости от значений параметров p_j . Пространство параметров разбивается на области, соответствующие различным разбиениям фазового пространства. Границы этих областей соответствуют бифуркационным значениям параметров, когда их малое изменение приводит к изменению топологической структуры разбиения фазового пространства. В школе Андронова эта программа на основе понятия структурной

устойчивости исчерпывающим образом была реализована для двумерных систем.

Структурная устойчивость оказалась очень конструктивным понятием. С 1950-х гг. происходит смещение исследований структурной устойчивости в сторону общей теории динамических систем (С. Лефшец, Г. Баггис, М. Пейксото). Исследования в этом направлении стали поворотным пунктом в развитии теории динамических систем и понятия устойчивости, и вместе с другими событиями явились началом новой эпохи в науке вообще. Одно из главных событий связано с именем С. Смейла, который поставил скромно звучащую задачу обобщения понятия структурной устойчивости на многомерные системы. Смейл выдвинул гипотезу, что представления, развитые для описания двумерных систем, остаются справедливыми и в многомерном случае, и существуют структурно устойчивые системы в пространстве многомерных динамических систем ($n \geq 3$) [37]. Фактически гипотеза Смейла была попыткой распространить программу Андронова на многомерный случай. По мысли Смейла, мир устроен просто, добавление еще одного измерения ничего принципиально не меняет. Такие динамические системы действительно существуют (системы Морса-Смейла), но как неожиданно установил сам Смейл [37], они не составляют плотного множества, не являются типичными. В многомерном случае типичны более сложно устроенные системы, для которых ключевым понятием, восходящим еще к Пуанкаре, являются гомоклинические структуры. Для многомерных систем характерна сложная динамика. В таких системах структурная устойчивость выступает в новом, совершенно неожиданном качестве. Гомоклинические структуры локально неустойчивы в каждой точке инвариантного множества. Но сама структура в целом в качественном отношении устойчива к малым внешним возмущениям. Другими словами, области неустойчивости сами являются устойчивыми. Структурная устойчивость не только продолжает играть важную роль в современной теории динамических систем. Это понятие приобрело общенаучное значение, оно вышло за рамки математики, проникает в другие области, в том числе в гуманитарную сферу.

Теория устойчивости Ляпунова дала мощный аналитический инструмент для исследования устойчивости - характеристические показатели Ляпунова [23, С. 48-49]. Это критерий наличия сложных движений в системе. На современном языке идея характеристических чисел заключается в том, что рост нормы $|x(t)|$ решения системы $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется по шкале ростов, заданной семейством функций действительного переменного (в данном случае $e^{\lambda t}$), и тем самым данному решению приписывается определенная числовая характеристика (характеристическое число λ). Таким образом, семейство решений получает упорядочение по шкале ростов [38, С. 10]. Другими словами, производится сравнение асимптотического поведения решений $x(t)$ с асимптотическим поведением некоторой монотонной функции $f(t)$.

О. Перрон дал эквивалентное определение показателей Ляпунова (1930) [39], которое в настоящее время является общепринятым [39, S. 10]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

Характеристические показатели были введены Ляпуновым для определения устойчивости одной траектории. Фундаментальное значение показателей Ляпунова заключается в том, что они характеризуют устойчивость почти всех (по мере) траекторий на аттракторе. В основе использования показателей Ляпунова лежит мультипликативная эргодическая теорема о существовании и конечности множества возможных значений показателей, которую доказали В.И. Оселедец [40] и Миллионщиков [41]. Мультипликативная эргодическая теорема позволяет обобщить показатели Ляпунова на совокупность траекторий и дает строгое обоснование для их вычисления. Показатели Ляпунова являются количественной мерой сложности движений. Для регулярных движений показатели равны нулю. Значения $\lambda_i > 0$ свидетельствуют о наличии сложных движений и показатели могут быть упорядочены по мере возрастания

сложности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$. Показатели Ляпунова сейчас являются одним из главных инструментов исследования сложных движений.

Развитие теории динамических систем привело к открытию новых форм дихотомии устойчивость-неустойчивость с существенно новым содержанием. В многомерных динамических системах ($n > 2$) становится возможным объединение стохастических слоев на поверхности постоянной энергии в связанную систему. По образовавшейся таким образом паутине становится возможным движение, т.е. появляется механизм распространения неустойчивости (диффузия Арнольда) [42]. Скорость диффузии Арнольда очень мала, но этот механизм имеет универсальный характер. В настоящее время можно утверждать, что диффузия Арнольда – это реально существующее явление в физических системах.

Изучение вырожденных динамических систем, когда якобиан частот w_i по импульсам p_j равен нулю

$$\det \left| \frac{\partial w_i}{\partial p_j} \right| = 0,$$

привело к еще одному существенно новому результату. При рациональном отношении между частотами с ростом возмущения увеличивается ширина стохастического слоя, и наступает момент, когда перекрываются щели между сепаратрисами. Тогда стохастические слои соединяются и происходит образование структуры, получившей название паутины Заславского [43]-[45]. В паутине движение неустойчиво, и по ней частицы могут блуждать сколь угодно далеко. Такой механизм диффузии также имеет универсальный характер. Но скорость диффузии по паутине Заславского значительно превышает скорость диффузии Арнольда. Особенность паутины Заславского заключается в том, что в ряде случаев покрытие фазовой плоскости имеет замечательно симметричную форму (рис. 1).

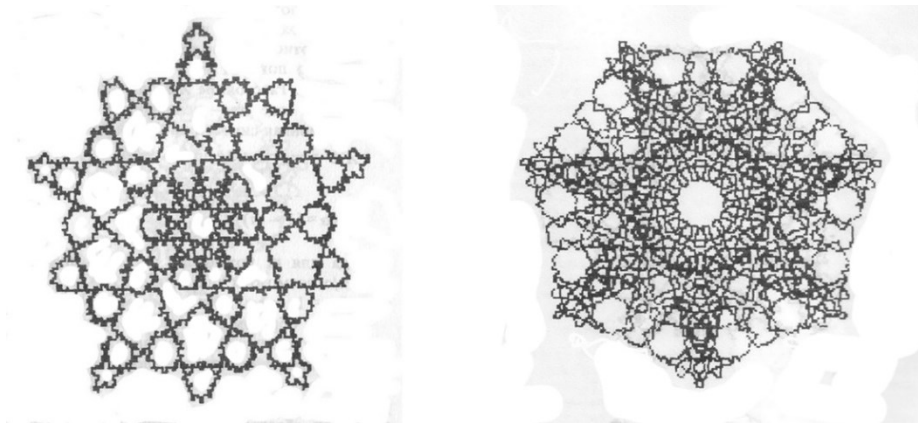


Рис. 1: Стохастическая паутина с симметрией 5-го и 7-го порядков ([45]).

Границы фигур образуют фрактальные линии. Здесь мы сталкиваемся с неожиданной связью между совершенно разнородными явлениями, когда неустойчивость формирует упорядоченность, фигуры образуются хаотическими движениями.

Другое направление в эволюции устойчивости дало нетривиальное обобщение этого понятия – динамическая устойчивость. Начало было положено исследованием простой системы – маятника с вибрирующим подвесом (А. Стефенсон [46], Н. Н. Боголюбов [47], П. Л. Капица [48] и др.) [49]. У маятника с вибрирующей точкой подвеса при достаточно большой частоте верхнее положение становится устойчивым, тогда как у обычного маятника устойчиво нижнее положение. Маятник с вибрирующим подвесом может демонстрировать сложные движения, имеются точки бифуркации. В настоящее время это одна из важнейших базовых моделей нелинейной механики. Эта модель послужила толчком для обширных исследований

В.Н. Челомея по повышению устойчивости упругих систем с помощью вибраций, возможностью управления бифуркациями с помощью внешнего воздействия и т.д. [50, 51]. Аналоги систем с вибрирующей точкой подвеса имеются и за пределами механики (физика плазмы, ускорительная техника, локализация частиц в неоднородных электромагнитных полях и др.). Поле исследований динамической устойчивости стремительно расширяется.

5. Гидродинамическая неустойчивость

Понятие устойчивости занимает центральное место в гидродинамических течениях. По словам Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица: «Не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны быть устойчивыми» [52, С. 137]. Из опыта известно, что в гидродинамических течениях ламинарное движение с ростом числа Рейнольдса сменяется турбулентным режимом. Несмотря на более чем полутора столетнюю историю изучения турбулентности, проблема далека от решения. По словам С. Голдстейна:

«Я вспоминаю, что на съезде Британской Ассоциации в Лондоне в 1932 г. Лэмб заметил: «Я уже стар, и когда умру и отправлюсь на небеса, я надеюсь пролить свет на два вопроса. Первый из них – квантовая электродинамика, а другой – турбулентное движение в жидкости. И по первому вопросу я настроен оптимистично». Он был прав будучи более оптимистичным относительно квантовой электродинамики, чем по проблеме турбулентности» [53, Р. 23].

Можно напомнить, что тогда в 1930-е гг. в физике сложилась кризисная ситуация: при вычислении физических величин по теории возмущений появлялись расходимости уже во втором порядке. В 1940-1950-е гг. этот кризис был разрешен, чего нельзя сказать о проблеме турбулентности вплоть до настоящего времени.

Проблему турбулентности можно сформулировать следующим образом: как, исходя из первых принципов (в этом качестве выступают уравнения Навье-Стокса), заданное ламинарное течение теряет устойчивость и развиваются сложные движения в широком диапазоне пространственно-временных масштабов? В таком построении, учитывая крайнюю сложность проблемы, недостаточен подход А. Пуанкаре и Ф. Клейна, который утверждает об освобождении от излишней строгости при использовании математики в естественных науках, т.е. необязательно придерживаться такой строгости, как в математике, это излишнее усложнение. Но вот что говорит Дж. Марсен:

«Для полных уравнений Навье-Стокса мы не только не знаем ни одного турбулентного решения, но даже неизвестно, существует ли такое» [54, С. 11].

Задачу гидродинамической устойчивости при заданном течении можно свести к задаче определения устойчивости относительно малых возмущений. В 1908 г. в Трудах IV Международного конгресса математиков в Риме Зоммерфельд опубликовал работу [55], где он, исходя из уравнений Навье-Стокса, получил линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое затем было использовано для изучения устойчивости течения. В этой же работе было введено понятие числа Рейнольдса. Такое же уравнение было получено ирландским математиком У. Орром [56] и в литературе оно известно как уравнение Орра-Зоммерфельда. Задачу об устойчивости плоского течения Пуазейля в линейном приближении решил В. Гейзенберг (это была его диссертация) (1924) [57]. Этот результат не разрешил проблемы турбулентности, но он ныне признан классическим.

В настоящее время теорию турбулентности не рассматривают лишь как ветвь классической гидродинамики. Она скорее представляется общей теорией, которая дает возможность установить глубокие связи между различными областями науки. Возникновение и самоподдер-

жание структур, характерных для турбулентных течений, является общенаучной проблемой для гидродинамики, физики плазмы, биохимии, экологии и т.д. Тогда в этом более широком плане теория турбулентности пытается ответить на фундаментальный вопрос: каким образом нелинейное поле становится неупорядоченным и каким способом это можно описывать?

В математическом отношении первостепенное значение приобретает установление существования решений уравнения Навье-Стокса. Ранее вопрос о существовании решений уравнений математической физики обычно решался просто нахождением этих решений. Теперь эта традиция оказалась нарушенной. Во всей общности встал вопрос исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Теперь возможен совершенно другой взгляд на место математики в приложениях. Здесь можно вспомнить слова А.М. Ляпунова:

«Я думаю, что если в некоторых случаях и допустимо пользоваться неясными рассуждениями, когда желают установить новый принцип, <...> однако же невозможно так поступать, когда надо решать определенную задачу (механики или физики), которая поставлена математически совершенно точно. Эта задача становится тогда проблемой чистого анализа и должна быть решена как таковая» [58, С. 209].

Указанная выше задача не является в этом отношении чем-то исключительным. В обиход физиков входят множества меры нуль, различие рациональных чисел от иррациональных, теоремы существования и единственности и т.д., ранее не свойственные физическому мировоззрению.

Разработка математической теории уравнений Навье-Стокса в первую очередь связано с именем Ж. Лере (1933-1934) [59]-[61]. Наибольшую известность получила его большая статья в *Acta Mathematica* [61]. Лере ставит задачу установить существование, единственность и гладкость трехмерных уравнений Навье-Стокса при заданных начальных условиях. В начале работы Лере ссылается на своего предшественника, шведского математика К. Озена, который пытался решить ту же задачу [62]. Но Озену удалось установить существование решений лишь для очень короткого интервала времени. Лере исходит из уравнения Навье-Стокса

$$\nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = u_k(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} = 0, \quad (4)$$

где постоянные ν и ρ вязкость и плотность соответственно, p – давление, u_i – компоненты скорости. Лере рассматривает регулярные решения $u_i(x, t)$ в некотором временном интервале при $\Theta \leq t < T$ и доказывает теорему единственности: два регулярных решения для $\Theta \leq t < T$ равны, если они равны при $t = \Theta$; и теорему существования: для каждого регулярного начального значения $u_i(x, 0)$ соответствует решение $u_i(x, t)$, определенное при $0 \leq t < \tau$ и которое переходит в $u_i(x, 0)$ для $t = 0$. Следующий результат работы представляется наиболее важным. Решения $u_i(x, t)$ при $t > T$ теряют регулярность и за пределами указанного интервала могут быть продолжены только как слабые (обобщенные) решения (см., например, [63]), Лере их называет турбулентными решениями. Заметим, что теория обобщенных функций тогда еще только создавалась, и относительно завершённую форму она получила уже в 1950-е гг. Как известно, условия в постановке краевых задач в контексте обобщенных решений значительно ослаблены, уже не требуется дифференцируемости решений. Лере представляет турбулентные решения в следующем виде: если краевая задача имеет ненулевое решение, из него можно сконструировать турбулентное решение

$$U_i(x, t) = [2\alpha(T - t)]^{-1/2} U_i[2\alpha(T - t)^{-1/2}, x]$$

для $t < T$ и $U_i(x, t) = 0$ для $t > T$. На временной оси при $t = T$ функция претерпевает разрыв. Таким образом, переход к турбулентному режиму отвечает разрушению решений и время существования регулярных решений оказывается конечным. Работа Лере [61] явилась основой всех последующих исследований в этом направлении (Э. Хопф (1951) [64], О. А. Ладыженская

[65], В. Шеффер [66], Л. Каффарелли, Р. Кон, Л. Ниренберг [67] и др.), но успехи не очень значительны.

Исследования Лере не смогли разрешить проблемы турбулентности. Полученные выводы не согласуются с эмпирическими данными. Во многих случаях разрушения решений с течением времени не обнаружено [54]. Если такое разрушение и имеет место, то оно не является общим свойством. Но результаты Лере весьма существенны. Они поставили ряд глубоких вопросов, которые выходят собственно за пределы проблемы развития гидродинамических неустойчивостей. Еще раз подчеркиваем, во всей общности встали вопросы существования и единственности решений нелинейных уравнений. Традиционный путь решения задач культивировавшийся в физике, здесь оказался неприменимым. Установление существования и единственности решений становится отдельной задачей. Эти вопросы остаются открытыми не только для уравнений гидродинамики, но для многих других задач физики, механики, химии, техники. К тому же ряду относится и регулярность решений. Что касается проблемы турбулентности, она отнесена к числу важнейших нерешенных задач третьего тысячелетия. Другой важный вопрос, который поставила работа Лере, касается границ применимости классической постановки задачи решения уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Можно ли считать, что поставленная таким образом задача адекватно описывает явление турбулентности? Поскольку указанные вопросы остаются пока без ответа, предметом обсуждения становится фундаментальность самих уравнений Навье-Стокса. Не требуется ли их модификация на основе новых физических идей?

Открытие явления динамического хаоса породило новые надежды в установлении природы гидродинамической неустойчивости. Еще с XIX в. переход к турбулентности рассматривался через возникновение и эволюцию неустойчивостей (см., например, [68]). Появилось понятие сценария возникновения турбулентности (Ландау-Хопфа, Рюэля-Такенса, Фейгенбаума, через перемежаемость и др.). Примечательной является работа Д. Рюэля и Ф. Такенса (1971) [69], в которой они развили общий подход, далеко выходящий за рамки первоначальной задачи. Рюэль и Такенс рассмотрели развитие неустойчивостей на бесконечномерном векторном пространстве H через эволюцию поля скоростей, задаваемой уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{dv}{dt} = X_{\mu}(v),$$

где X_{μ} – векторное поле на H , параметр μ определяется физическими характеристиками, такими как числа Рейнольдса или Рэлея. Точная форма уравнений нигде не использовалась. Ими была изучено развитие неустойчивостей и возникновение сложной динамики. Первоначальная гидродинамическая задача представляет одну из возможных реализаций.

Аппроксимация моделей развития гидродинамической неустойчивости конечномерными динамическими системами рассматривают как новый конструктивный путь, который позволяет выявить качественные особенности явления. При этом возникают сложные вопросы, такие как все еще не доказанные гипотезы Колмогорова о существовании минимального аттрактора, размерность которого неограниченно растет при исчезающей вязкости [70, 71]. Имеется целый ряд строгих результатов. Вопросы обоснования привели А. М. Обухова к формулировке общих требований, которым должны удовлетворять упрощенные модели, и введению понятия систем гидродинамического типа [72, 73]. Так называется система, у которой общие свойства уравнений с точки зрения характера нелинейности и законов сохранения такие же, как и у изучаемого гидродинамического объекта, но имеющая конечное число степеней свободы. Несмотря на некоторые успехи и не совсем угасшие надежды аппроксимации гидродинамических течений конечномерными динамическими системами, разрешить на таком пути проблему гидродинамической неустойчивости пока не удается.

Вернемся к конечномерным динамическим системам. При более детальном изучении оказалось, что реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области с

регулярными и хаотическими движениями. В случае сильной неинтегрируемости система становится локально неустойчивой почти всюду, за исключением областей малой, но конечной меры. Простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и сложный движений, является сильно идеализированным представлением. В реальных системах присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Вокруг каждого островка существует цепочка вторичных островков, которые в свою очередь окружены цепочками следующего уровня и т.д. Имеет место сложная иерархическая структура разделения фазового пространства.

Подобная же ситуация и в диссипативных системах. В сценариях перехода к турбулентному движению цепочки бифуркаций не приводят к гиперболическому аттрактору в строгом смысле этого слова. В большинстве случаев возникают объекты (квазиаттракторы), обладающие свойствами «истинного» странного аттрактора, и в то же время в них присутствуют устойчивые периодические орбиты [74]. В квазиаттракторах область неустойчивости является неоднородной, в них присутствуют регулярные движения. Таким образом, в динамических системах имеет место новый, более высокий уровень сложности. Формы сосуществования устойчивости и неустойчивости сказанным не исчерпываются и являются весьма многообразными [75]-[77]. Мы сталкиваемся с новой нетривиальной ситуацией. Не просто имеются устойчивые и неустойчивые движения, а они сосуществуют вместе, формируют единую структуру, имеющее сложное топологическое устройство.

Еще более высокий уровень сложности присущ гидродинамическим системам. Характерной чертой турбулентности является наличие многих масштабов, т.е. здесь не один какой-то вид движения, а целый класс движений. Соответственно в гидродинамических течениях присутствуют различные типы неустойчивостей (Рэлея-Тейлора, Кельвина-Гельмгольца, Рихтмайера-Мешкова и др.). Наименьшим из масштабов является масштаб Колмогорова

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4},$$

где ε – величина диссипации кинетической энергии на единицу массы, ν – вязкость. Если взять отношение характерного размера турбулентного вихря l к масштабу Колмогорова, то $l/\eta = R_l^{3/4}$, где R_l – число Рейнольдса. Масштабы турбулентности при $R_l > 10^3$ могут варьироваться на несколько порядков [78, Р. 19]. Наличие многих масштабов непосредственно связано с упорядоченностью (когерентностью) в явлении турбулентности в соответствии со шкалой изменения пространственных характеристик. Когерентные структуры являются типичным свойством турбулентности и представляют упорядоченные компоненты турбулентного потока, скоррелированные по фазе во всей области занимаемого ими пространства. Эти структуры устойчивы в течение продолжительного времени. Виды упорядоченности в гидродинамических системах весьма разнообразны [78, 79]. В гидродинамических течениях были обнаружены фигуры, подобные паутине Заславского [45]. Причем такая квазисимметричная паутина образуется не в фазовом, а в обычном пространстве. Стационарные течения, создавая упорядоченность, одновременно порождают области с неустойчивым хаотическим расположением линий тока.

6. Заключение

Что же получается в итоге? Понятие устойчивости прошло длинный путь развития в соответствии с доминирующими тенденциями математики своего времени, и при этом можно выделить несколько этапов с явно проглядываемыми чертами. После того, как устойчивость стала предметом математического изучения (середина XVIII в.), поначалу изучалась устойчивость равновесия статической системы и устойчивость динамической (т.е. находящейся в

движении) системы как целого. Лишь через столетие спустя, в середине XIX в., был поставлен вопрос об устойчивости самих движений. В конце XIX в. стала вырисовываться картина сложности понятия устойчивости, многообразие ее форм и видов. В соответствии с духом математики второй половины XIX в., с утверждением новых канонов математической строгости, первостепенное значение приобрел вопрос строгого определения устойчивости и на этой основе построение последовательной теории. Реализация этой программы привела в 1920-е гг. к выделению двух ветвей в развитии теории устойчивости. Первая ветвь – расширение теории вширь на старой идейно базе. Это касалось аппаратной части теории, разработки новых методов, значительного усиления связей с приложениями. Другая ветвь – устойчивость в контексте общей теории динамических систем, где отчетливо проявляется значение оппозиции устойчивость–неустойчивость. Сделанный шаг имел принципиальное значение. Неустойчивость обрела равные права с устойчивостью, стала предметом изучения. Не только устойчивость, но и неустойчивость оказывается сложным понятием и имеются ее различные виды, которые проявляются в различных формах. Более того, во многих системах устойчивость и неустойчивость сосуществуют, образуя сложную топологическую картину. Рассматривая устойчивые движения в ряду всех движений, можно предположить, что многообразие понятия устойчивости определяется многообразием самих динамических систем. В этой связи можно поставить вопрос о границах применимости понятия устойчивости. В этом отношении уже имеются некоторые результаты. Так, в системах с гомоклиническими касаниями оказывается невозможным *полное описание динамики* (Л. П. Шильников и др. [80, 81]). Другими словами, в таких системах невозможен полный качественный анализ – факт фундаментальной важности. Требуются новые идеи и, может быть, новая математика.

Автор выражает благодарность участникам Международной конференции Российского национального комитета по истории и философии науки и техники РАН 28 марта – 1 апреля 2022 г. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leine R.L. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson, Lyapunov stability // *Nonlinear Dyn.* 2010. Vol. 59. Pp. 173–182.
2. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 603 с.
3. Euler L. *Scintia novalis seu tractatus de consruendis ac dirigendis*. St. Petersburg, Academiae Scientiarum, 1749. 536 p.
4. Lagrange J.L. Sur le principe des vitesses virtuelles // *Oeuvres de Lagrange*. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321
5. *Mécanique analytique*, par J.L. Lagrange. T. Première. Paris, 1811. 422 p.
6. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 594 с.
7. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts // *CRELLE, J. Reine Angew. Math.* 1846. B. 32. Pp. 85–88.
8. Лежен-Дирихле П. Г. Об устойчивости равновесия // Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 537–540.

9. Lagrange J. L. Sur le mouvement des noeuds des orbits planétaires // *Mém. Acad. Sci.* 1774. Pp. 276–307.
10. Lagrange J. L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes // *Oeuvres de Lagrange*. T. V. Paris: Gautier-Villars, 1870. Pp. 127–207, 208–344.
11. Laplace P. S. Sur le principe de la gravitation universelle et sur le inégalité séculaires des planètes qui en dépendent // *Oeuvres de Laplace*. T. VIII. Paris: Gautier-Villars, 1841. Pp. 201–275.
12. Laplace P. S. Sur le équation séculaire de la lune // *Mém. Acad. Sci.* 1788. Pp. 243–271.
13. Poisson S. D. Mémoire sur les inégalité séculaires des moyens mouvements des planètes // *J. Ecole Polytech.* 1808. T. XV. Pp. 1–56.
14. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. М.: Гостехиздат, 1965. 328 с.
15. Thomson W., Tait P. G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford: Clarendon Press, 1867. XXIII, 737 p.
16. Wise N. M., William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, First edition (1867) // *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. I. Grattan-Guinness (ed.). Amsterdam: Elsevier, 2005. Pp. 521-533.
17. Routh E. G. *A treatise of stability of a given state of motion*. L.: Macmillan and Com., 1877. 129 p.
18. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations différentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3.* 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; *Sér. 4.* 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. pp. 151–217.
19. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
20. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. // *Избр. труды: В 3 т.* / М.: Наука, 1971. Т. 2. 998 с.
21. Жуковский Н. Е. О прочности движения // *Соч. Н. Е. Жуковского*. Т. 1. М.: Типография Император. Моск. Ун-та, 1912. С. 194–296.
22. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A. I. Frequently methods in oscillation theory. *Mathematics and its applications*. V. 357. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. 403 p.
23. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // *Ляпунов А. М. Избр. труды: работы по теории устойчивости*. М.: Наука, 2007. С. 27–298.
24. Hurvitz, W. A. The Chicago Colloquium // *Bull. AMS.* 1920. V. 27. Pp. 65–71.
25. Birkhoff G. D. *Dynamical Systems*. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф *Динамические системы* / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
26. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications // *George David Birkhoff. Coll. Math. Papers*. V. II. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 111–229.
27. Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilità // *Annali di Math.* 1901. Ser. III. V. 5. Pp. 221–308.
28. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 663 с.

29. Математика в СССР за сорок лет 1917-1957. Т. 1. Под ред. А. Г. Куроша. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 1000 с.
30. Григорьян А. Т., Погребысский И. Б. История механики с конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972. 417 с.
31. Четаев Н. Г. Одна теорема о неустойчивости // ДАН СССР. 1934. Т. 1. С. 529–530.
32. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
33. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta. Math. 1885. Т. 7. Рр. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. Т. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Рр. 40–140.
34. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–252.
35. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. Vol. 1. N 2. Рр. 101–120.
36. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзн. конф. по колебаниям. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1933. С. 32–71.
37. Smale S. A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points // Труды межд. симп. по нелинейным колебаниям 1961. Киев: АН УССР, 1963. С. 365–366.
38. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. Н., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
39. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathem. Zeitschr. 1930. В. 31. S. 748–766.
40. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. общества. 1968. Т. 19. С. 179–210.
41. Миллионщиков М. Д. Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 2. С. 179–202.
42. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156. № 1. С. 9–12.
43. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Генерация упорядоченных структур с осью симметрии из гамильтоновой динамики // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 144. В. 7. С. 349–353.
44. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. В. 5. С. 500–516.
45. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 236 с.

46. Stephenson A. On a class of forced oscillations // *Quart. J. Pure and Appl. Math.* 1906. V. 37. № 148. Pp. 353–360.
47. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // *Сб. трудов Ин-та строит. механики АН УССР.* 1950. Т. 14 С. 9–34.
48. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *ЖЭТФ.* 1951. Т. 21. Вып.5. С. 588–597.
49. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н. Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П. Л. Капица и другие // *Изв. вузов «ПНД».* 2017. Т. 25. № 5. С. 69–87.
50. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // *ДАН СССР.* 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.
51. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // *ДАН СССР.* 1983. Т. 270. № 1. С. 62–67.
52. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 736 с.
53. Goldstein S. Fluid mechanics in the first half of this century // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1969. V. 1. Pp. 1–29.
54. Марсден Дж. Соотношение между уравнениями Навье-Стокса и турбулентностью // *Странные аттракторы.* М.: Мир, 1981. С. 7–20.
55. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodyhamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // *Proc. 4th Int. Congr. Rome.* 1908. Pp. 116–124.
56. Orr W. The stability or instability of the steady motions of a liquid // *Proc. Roy. Irish Acad.* 1906. A 27. V. 27. Pp. 9–68, 69–138.
57. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // *Ann. der Phys.* 1924. B.74. № 15. Pp. 577–624.
58. Ляпунов А. М. Об одной задаче Чебышева // *Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд.* 1905. 8 сер. Т. 17. № 3. С. 1–32; А. М. Ляпунов. *Собр. Соч.* Т. 3. М. –Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–236.
59. Leray J. Etude de diverses équations intégrals non linéarais et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // *J. Math. Pures Appl.* 1933. V. 12. Pp. 1–82.
60. Leray J. Essai sur le mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // *J. Math. Pures Appl.* 1934. V. 13. Pp. 341–418.
61. Leray J. Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. Pp. 193–248.
62. Oseen C. W. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* Leipzig : Academie Verlag, 1927. 337 S.
63. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
64. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // *Math. Nachrich.* 1951. B. 4. S. 213–231.

65. Ladyzhenskaya O. A. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*. Lincei Lectures. Cambridge: CUP, 1991. 73 p.
66. Scheffer V. (1976), *Turbulence and Hausdorff dimension*. // *Turbulence and Navier-Stokes equations* // Proc. Conf. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1975. Berlin: Springer Verlag, 1976. Pp. 174–183.
67. Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations* // *Comm. Pure Appl. Math.* 1982. V. 35(6). Pp. 771–831.
68. Монин А. С., Яглом А. М. *Статистическая гидромеханика*. Т.1. - С.-Птб: Гидрометеиздат, 1992. 692 с.
69. Ruelle D., Takens F. *On the Nature of Turbulence* // *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. Pp. 167–192 / Рус. пер. в кн.: *Странные аттракторы*. М.: Мир, 1981. С. 117–151.
70. Arnold V. I. *Kolmogorov's hydrodynamic attractors* // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1991. V. 434. Pp. 19–22.
71. Arnold V., Khesin B. *Topological methods in hydrodynamics*. N.Y.: Springer, 1998. 374 p.
72. Обухов А. М. *Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа* // *ДАН СССР*. 1969. Т. 184. № 2. С. 309–312.
73. *Нелинейные системы гидродинамического типа*. Под ред. А. М. Обухова. М.: Наука, 1974. 160 с.
74. Afraimovich V. A., Shilnikov L. P. *On strange attractors and quasiattractors* // *Nonlinear dynamics and turbulence*. Boston-London-Melbourn: Pitman, 1983. Pp. 1–34.
75. Zaslavsky G. M. *Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws* // *Physics Today*. 1999. Vol. 52. Pp. 39–45.
76. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром* // *Труды МИАН*. 1997. Т. 216. С. 76–125.
77. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков О. А., Козлов А. Д. *Математическая теория динамического хаоса* // *Изв. вузов. Прикл. нелиней. динамика*. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
78. Holmes P., Lumley J., Berkooz G., Rowley C. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge: CUP, 2012. 386 p.
79. Фомин Н. Н., Чечеткин В. М. *Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика*. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Препринт № 1 за 2015 г.
80. Шильников Л. П. *Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней* // *Математические события XX века*. М.: Фазис, 2003. С. 465–489.
81. Гонченко С. В., Тураев Д. Б., Шильников Л. П. *Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса* // *Совр. математика и ее прилож.* 1999. Т. 67. С. 69–128.

REFERENCES

1. Leine R.L. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson, Lyapunov stability // *Nonlinear Dyn.* 2010. V. 59. Pp. 173–182.
2. The method of finding curves of lines with the properties of a maximum or a minimum, or the solution of an isoperimetric problem, taken in the broadest sense of Leonard Euler, a royal professor and a member of the Imperial Petersburg Academy of Sciences. Moscow-Leningrad: GTTI, 1934. 603 p. (in Russian).
3. Euler L. *Scintia novalis seu tractatus de consruendis ac dirigendis*. St. Petersburg, Academiae Scientiarum, 1749. 536 p.
4. Lagrange J.L. Sur le principe des vitesses virtuelles // *Oeuvres de Lagrange*. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321.
5. *Mécanique analytique*, par J.L. Lagrange. T. Première. Paris, 1811. 422 p.
6. Lagrange J.L. *Analytical mechanics*. T. 1. M.-L.: GITTL, 1950. 594 p. (in Russian).
7. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts // *CRELLE, J. Reine Angew. Math.* 1846. B. 32. Pp. 85–88.
8. Lejeune-Dirichlet P.G. On the Stability of Equilibrium // *Lagrange J. Analytical Mechanics*. T. 1. Moscow-Leningrad: GITTL, 1950. Pp. 537–540 (in Russian).
9. Lagrange J.L. Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires // *Mém. Acad. Sci.* 1774. Pp. 276–307.
10. Lagrange J.L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes // *Oeuvres de Lagrange*. T. V. Paris: Gautier-Villars, 1870. Pp. 127–207, 208–344.
11. Laplace P. S. Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent // *Oeuvres de Laplace*. T. VIII. Paris: Gautier-Villars, 1841. Pp. 201–275.
12. Laplace P. S. Sur l'équation séculaire de la lune // *Mém. Acad. Sci.* 1788. Pp. 243–271.
13. Poisson S.D. Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes // *J. Ecole Polytech.* 1808. T. XV. Pp. 1–56.
14. Einstein A., Infeld L. *The Evolution of Physics*. Simon and Schuster, 1942. 351 p.
15. Thomson W., Tait P. G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford: Clarendon Press, 1867. XXIII. 737 p.
16. Wise N.M., William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, First edition (1867) // *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*. I. Grattan-Guinness (ed.). Amsterdam: Elsevier, 2005. Pp. 521–533.
17. Routh E. G. *A treatise of stability of a given state of motion*. L.: Macmillan and Com., 1877. 129 p.
18. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3*. 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; *Sér. 4*. 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. P. 151–217.

19. Poincaré H. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Moscow: GITTL, 1947. 392 p. (in Russian).
20. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899. 410 p.
21. Zhukovsky N. E. On the Strength of Motion // Scholar notes of Moscow University. Department of Physics and Mathematics. sciences. 1882. V. 4. Pp. 10–21 (in Russian).
22. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A. I. Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications. V. 357. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. 403 p.
23. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion // Lyapunov A. M. Select. works: works on the stability of motion. Moscow Nauka, 2007. Pp. 27–298 (in Russian).
24. Hurvitz, W. A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. Pp. 65–71.
25. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p.
26. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications // George David Birkhoff. Coll. Math. Papers. V. II. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 111–229.
27. Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilità // Annali di Math. 1901. Ser. III. V. 5. Pp. 221–308.
28. Moiseyev N. D. Essais on the development of the theory of stability. Moscow-Leningrad: GITTL, 1949. 664 p. (in Russian).
29. Mathematics in the USSR for forty years 1917-1957. T. 1. Ed. A. G. Kurosh. M.: State. Publ. House of Phys.-Math. Lit., 1959. 1000 p. (in Russian).
30. Grigoryan A. T., Pogrebyssky I. B. History of mechanics from the end of the 18th century to the middle of the 20th century. M.: Nauka, 1972. 417 p. (in Russian).
31. Chetaev N. G. One theorem on instability // Rep. Acad. Sci. USSR. 1934. T. 1. Pp. 529–530 (in Russian).
32. Chetaev N. G. Movement stability. Works on analytical mechanics. M.: Publ. House Acad. Sci. USSR, 1962. 535 p. (in Russian).
33. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta. Math. 1885. T. 7. Pp. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.
34. Andronov A. A., Pontryagin L. S. Rough systems // Rep. Acad. Sci. USSR. 1937. V. 14, Pp. 247–250. (in Russian).
35. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. № 2. Pp. 101–120.
36. Andronov A. A. Mathematical problems in self-oscillation theory // A. A. Andronov. Coll. Works, M.: Acad. Sci. USSR, 1956. Pp. 32–71 (in Russian).
37. Smale S. A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points // Proc. Int. Congress on non-linear oscillations. Kiev 1961. Kiev: Ukrainian Acad. Sci., 1963. Pp. 365–366.

38. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. N., Nemytsky V. V. The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems. M.: Nauka, 1966. 576 p. (in Russian).
39. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // *Mathem. Zeitschr.* 1930. B. 31. Pp. 748–766.
40. Oseledets V.I. The multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems // *Proc. Moscow mat. soc.* T. 19. Pp. 179–210 (in Russian).
41. Millionshchikov M.D. A stability criterion for the probability spectrum of linear systems of differential equations with recurrent coefficients and a criterion for almost reducibility of systems with almost periodic coefficients // *Mat. collection* 1969. T. 78. № 2. Pp. 179-202 (in Russian).
42. Arnold V.I. On the instability of dynamical systems with many degrees of freedom // *Rep. Acad. Sci. USSR.* 1964. V. 156. № . 1. Pp. 9–12 (in Russian).
43. Zaslavsky G. M., Zakharov M. Yu., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Generation of ordered structures with an axis of symmetry from Hamiltonian dynamics // *JETP Letters.* 1986. T. 144. V. 7. Pp. 349–353 (in Russian).
44. Zaslavsky G. M., Zakharov M. Yu., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field // *JETP.* 1986. T.91. V. 5. Pp. 500–516 (in Russian).
45. Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Weak chaos and quasi-regular structures. M.: Nauka, 1991. 236 p. (in Russian).
46. Stephenson A. On a class of forced oscillations // *Quart. J. Pure and Appl. Math.* 1906. V. 37. № 148. Pp. 353–360.
47. Bogolyubov N.N. Perturbation theory in nonlinear mechanics // *Proc. Institute Struct. Mechanics Acad. Sci. Ukrainian SSR.* 1950. T. 14., Pp. 9–34 (in Russian).
48. Kapitsa P. L. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating suspension point // *JETP..* 1951. V. 21. Issue 5. Pp. 588–597 (in Russian).
49. Bogatov E. M., Mukhin R. R. Averaging method, pendulum with vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P. L. Kapitsa and others // *Proc. of universities “PND”.* 2017. V. 25. № . 5. Pp. 69–87 (in Russian).
50. Chelomey V.N. On the Possibility of Increasing the Stability of Elastic Systems Using Vibrations// *Rep. Acad. Sci. USSR.* 1956. V. 110. No. 3. Pp. 345–347 (in Russian).
51. Chelomey V. N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations // *Rep. Acad. Sci. USSR.* 1983. V. 270. No. 1. Pp. 62–67 (in Russian).
52. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Hydrodynamics.* M.: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian).
53. Goldstein S. Fluid mechanics in the first half of this century // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1969. V. 1. Pp. 1–29.
54. Marsden J. Relationship between the Navier-Stokes equations and turbulence // *Strange attractors.* M.: Mir, 1981. Pp. 7–20 (in Russian).
55. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodyhamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // *Proc. 4th Int. Congr. Rome.*1908. Pp. 116–124.

56. Orr W. The stability or instability of the steady motions of a liquid // Proc. Roy. Irish Acad. 1906. A 27. V. 27. Pp. 9–68, 69–138.
57. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. der Phys. 1924. Bd. 74. No. 15. Pp. 577–624.
58. Lyapunov A.M. On one problem of Chebyshev // Proc. Akad. Sciences in Phys.-Math. department 1905. 8 ser. T. 17. No. 3. Pp. 1–32; A.M. Lyapunov. Coll. Works. T. 3. M.-L.: Publ. House Acad. Sci. USSR, 1959. Pp. 207–236 (in Russian).
59. Leray J. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 12. Pp. 1–82.
60. Leray J. Essai sur le mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // J. Math. Pures Appl. 1934. V. 13. Pp. 341–418.
61. Leray J. Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Math. 1934. V. 63. Pp. 193–248.
62. Oseen C. W. Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig : Academie Verlag, 1927. 337 S.
63. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. M.: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian).
64. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // Math. Nachrich. 1951. B. 4. S. 213–231.
65. Ladyzhenskaya O.A. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Lincei Lectures. Cambridge: CUP, 1991. 73 p.
66. Scheffer V. (1976), Turbulence and Hausdorff dimension. // Turbulence and Navier-Stokes equations. Proc. Conf. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1975. Berlin: Springer Verlag, 1976. Pp. 174–183.
67. Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35(6). Pp. 771–831.
68. Monin A. S., Yaglom A.M. Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence. Boston: MIT Press, 1971. 782 p.
69. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. Pp. 167–192 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. Pp. 117–151.
70. Arnold V.I. Kolmogorov's hydrodynamic attractors // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1991. V. 434. Pp. 19–22.
71. Arnold V., Khesin B. Topological methods in hydrodynamics. N.Y.: Springer, 1998. 374 p.
72. Obukhov A.M. On integral invariants in systems of hydrodynamic type // Rep. Acad. Sci. USSR. 1969. V. 184. № . 2. Pp. 309–312 (in Russian).
73. Nonlinear systems of hydrodynamic type. Ed. A.M. Obukhov. M.: Nauka, 1974. 160 p. (in Russian).
74. Afraimovich V.A., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence. Boston-London-Melbourn: Pitman, 1983. Pp. 1–34.

75. Zaslavsky G. M. Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws // *Physics Today*. 1999. V. 52. Pp. 39–45.
76. Gonchenko S. V. et al. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms that are close to diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic contour // *Proc. o MIAN*. Moscow: Nauka, 1997. V. 216. Pp. 76–125 (in Russian).
77. Gonchenko S. V. et al. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: review // *Proc. Universities “PND”*. 2017. V. 25. Issue 2. Pp. 4–36 (in Russian).
78. Holmes P., Lumley J., Bercooz G., Rowley C. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge: CUP, 2012. 386 p.
79. Fomin N. N., Chechetkin V. M. Coherent hydrodynamic structures and vortex dynamics. IPM M.V. Keldysh. Preprint No. 1 for 2015. (in Russian).
80. Shilnikov L. P. *Homoclinic trajectories from Poincare to the Present* // *Mathematical events of the Twentieth Century*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. Pp. 347–370.
81. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Homoclinic Tangencies of an Arbitrary Order in Newhouse Domains // *J. Math. Sci.*, 2001. V. 105. Issue 1. Pp. 1738–1778.

Получено: 29.04.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-350-367

**Определение параметров неоднородности
анизотропного внешнего слоя упругого шара
по рассеянию плоской звуковой волны¹**

С. А. Скобельцын

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается задача определения вида неоднородности внешнего анизотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны. Предполагается, что плотность и модули упругости материала внешнего слоя являются линейными функциями расстояния от центра шара. Считается, что законы изменения всех модулей упругости идентичны. По акустическому давлению в окрестности шара требуется определить коэффициенты в зависимостях для плотности и модулей упругости. Задача дифракции звука на шаре решается численно-аналитическим методом. Рассеянное акустическое поле и поле упругих колебаний в однородной части шара представляется разложением по сферическим гармоникам. Для компонентов смещения и вектора напряжений в неоднородном слое численно решается краевая задача, построенная на основе уравнений движения и граничных условий на поверхностях слоя. Для определения искомым коэффициентов в зависимостях плотности и модулей упругости внешнего слоя выполняется сравнение наблюдаемых значений давления в некотором множестве точек на сферической поверхности с центром в центре шара и расчетных значений давления в этих точках. Предложен вариант формирования индикатора близости наблюдаемых и расчетных значений давления на основе разбиения точек наблюдения на группы. Предлагается использовать индикатор близости для идентификации коэффициентов в законах неоднородности плотности и модулей упругости в слое.

Ключевые слова: рассеяние звука, плоская звуковая волна, слоисто-неоднородный упругий шар, трансверсально-изотропный слой, численно-аналитическое решение задачи дифракции, коэффициентная обратная задача, индикатор близости.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

С. А. Скобельцын. Определение параметров неоднородности анизотропного внешнего слоя упругого шара по рассеянию плоской звуковой волны // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 350–367.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-350-367

Determination of the inhomogeneity parameters of an elastic ball anisotropic outer layer by the scattering of a plane sound wave

S. A. Skobel'tsyn

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

The problem of determining the type of inhomogeneity of the external anisotropic layer of an elastic ball from the scattered field of a plane sound wave is considered. It is assumed that the density and elastic moduli of the outer layer material are linear functions of the distance from the center of the ball. It is believed that the laws of dependency of all moduli of elasticity are identical. According to the acoustic pressure in the vicinity of the ball, it is required to determine the coefficients in the dependences for the density and elastic moduli. The problem of sound diffraction by a ball is solved by a numerical-analytical method. The scattered acoustic field and the field of elastic oscillations in the homogeneous part of the ball is represented by an expansion in terms of spherical harmonics. For the displacement and stress vector components in an inhomogeneous layer, a boundary value problem is numerically solved based on the equations of motion and boundary conditions on the layer surfaces. To determine the desired coefficients in the dependences of the density and elastic moduli of the outer layer, the observed pressure values are compared at a certain set of points on a spherical surface centered at the center of the ball and the calculated pressure values at these points. A variant of forming an indicator of the proximity of observed and calculated pressure values based on the division of observation points into groups is proposed. It is proposed to use the proximity indicator to identify the coefficients in the laws of density inhomogeneity and elastic moduli in the layer.

Keywords: sound scattering, plane sound wave, layered inhomogeneous elastic ball, transversally isotropic layer, numerical-analytical solution of the diffraction problem, coefficient inverse problem, proximity indicator.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

S. A. Skobel'tsyn, 2022, "Determination of the inhomogeneity parameters of an elastic ball anisotropic outer layer by the scattering of a plane sound wave", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 350–367.

1. Введение

Анализ акустического поля при рассеянии звуковой волны объектом позволяет судить о некоторых свойствах этого объекта. В качестве предмета для идентификации могут выступать: положение объекта (абсолютное в пространстве и относительное в ряду других объектов), размер, форма, ориентация, элементы внутренней структуры – наличие полостей, свойства материала объекта (внешних поверхностей и заполнителя). Ряд задач такого рода решается в гидроакустике, сейсмологии, ультразвуковой диагностике и дефектоскопии.

Интерпретация рассеянного акустического поля существенно усложняется, если в рассеивающем объекте возникают колебательные процессы под воздействием звуковой волны, а также, если материал препятствия является неоднородным или/и анизотропным.

Решение обратных задач рассеяния звуковых и упругих волн рассматривается в большом ряде работ. В частности в [1] предложен простой метод решения обратных задач рассеяния в области резонанса. В работе [2] рассматривается способ акустической визуализации в мелководном бассейне с тонким ледяным покрытием. Статья [3] посвящена идентификации полостей в полубесконечном твердом теле посредством упругих волн. В работе [5] предлагается решение акустической обратной задачи рассеяния для сферического тела с радиально-неоднородной сжимаемостью заполняющей жидкости. В статье [6] рассматривается задача идентификации неоднородных упругих свойств изотропного упругого цилиндра. Задача оценки законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе рассматривается в работе [7]. Коэффициентные обратные задачи и их приложения в механике и биомеханике представлены в статье [8].

В работах автора или с его участием [9-13] рассматривались геометрические и коэффициентные обратные задачи акустики по определению параметров неоднородных упругих объектов на основе известного отраженного/рассеянного акустического поля.

В данной работе рассматривается задача определения вида неоднородности внешнего анизотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны.

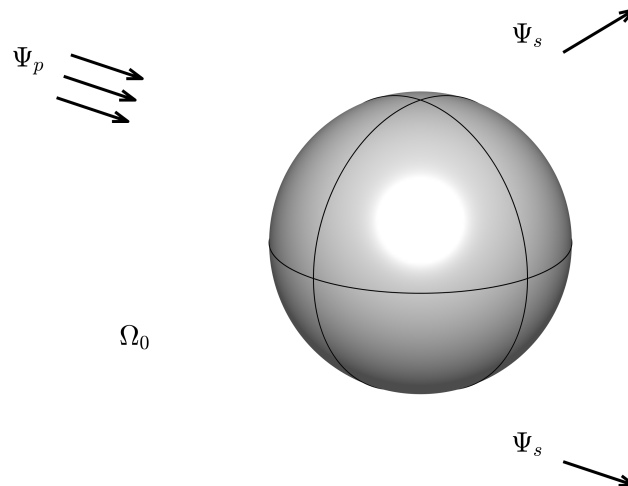


Рис. 1: Геометрия задачи

2. Постановка задачи

Пусть на упругий неоднородный шар радиуса r_1 , находящийся в неограниченном пространстве Ω_0 , заполненным идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 падает плоская звуковая волна с потенциалом смещения Ψ_p (см. рис. 1)

$$\Psi_p = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где \mathbf{k} – волновой вектор, определяющий направление распространения и частоту падающей волны; $k = |\mathbf{k}| = \omega/c_0$ – волновое число в окружающей жидкости; ω – круговая частота; \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения; t – время.

Без ограничения общности амплитуда потенциала смещения в падающей волне полагается равной единице. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ у Ψ_p и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания – установившиеся).

Рассеянное поле на рисунке 1 схематично показано символами Ψ_s . Через Ψ_s будем обозначать потенциал смещения в рассеянной волне.

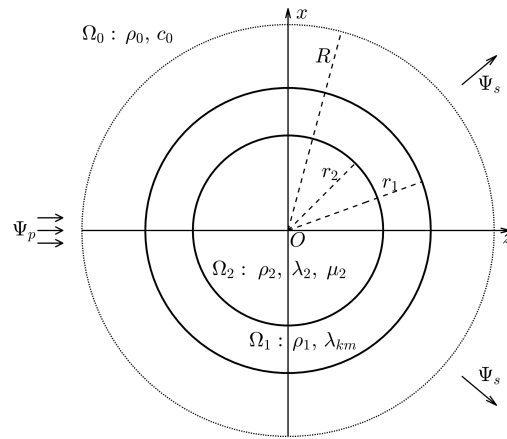


Рис. 2: Введение системы координат и обозначений

Известно, что внутренняя часть шара Ω_2 (см. рис. 2) с радиусом $r_2 < r_1$ заполнена однородным изотропным материалом, имеющим плотность ρ_2 и модули упругости Ламе λ_2, μ_2 . Внешний (сферический) слой шара Ω_1 с внутренним радиусом r_2 и внешним – r_1 (толщина $h = r_1 - r_2$) заполнен неоднородным трансверсально-изотропным материалом, имеющим плотность ρ_1 и модули упругости λ_{km} (предполагается использование двухиндексной нотации Фойгта [14] для компонентов тензора модулей упругости четвертого ранга).

На рисунке 2 представлено сечение упругого шара и прилегающей области Ω_0 плоскостью, содержащей волновой вектор \mathbf{k} и проходящей через центр шара O .

Считается, что материал слоя Ω_1 является слоисто-неоднородным так, что плотность ρ_1 и модули упругости λ_{km} являются линейными функциями расстояния r от центра шара. Для материала такого типа в литературе используют название “функционально-градиентный” [15].

Форма зависимостей $\rho_1(r), \lambda_{km}(r)$ считается известной

$$\rho_1(r) = \rho^* \left(1 + \alpha \left(\frac{r - r_2}{h} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad \lambda_{km}(r) = \lambda_{km}^* \left(1 + \beta \left(\frac{r - r_2}{h} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (2)$$

где ρ^*, λ_{km}^* – заданные средние значения $\rho_1(r), \lambda(r)$ по толщине слоя, а α, β – два неизвестных коэффициента. Заметим, что для всех λ_{km} используется один коэффициент β . Предполагается, что α и β удовлетворяют условиям

$$-1 \leq \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \beta \leq 1. \quad (3)$$

Требуется по известному рассеянному акустическое полю Ψ_s определить коэффициенты α и β . Для определенности предполагается, что рассеянное акустическое поле наблюдается на апертуре, размещенной в точках сферической поверхности $r = R$ вблизи поверхности шара (в ближней зоне). Сечение поверхности $r = R$ представлено окружностью, изображенной пунктирной линией на рис. 2.

3. Математическая постановка задачи

Задачу определения коэффициентов α и β будем решать на основе подхода, использованного в работах [11, 12]. В основе этого подхода лежит сравнение наблюдаемых значений акустического давления p^* в некотором множестве точек апертуры \mathbf{V} и расчетных значений $p(\mathbf{r} \in \mathbf{V}; \alpha, \beta)$ при некоторых значениях параметров α, β . Параметры α, β варьируются

в области допустимых значений D , например, в квадрате, определяемом условиями (3), до достижения максимального совпадения $p(\mathbf{r}; \alpha, \beta)$ с p^* во всех точках \mathbf{V} .

Найти $p(\mathbf{r}; \alpha, \beta)$ можно только решив задачу дифракции плоской звуковой волны (1) на неоднородном шаре $\Omega_1 \cup \Omega_2$ при заданных α, β .

Введем декартову систему координат x, y, z с началом O в центре шара так, чтобы ось Oz была направлена по направлению распространения падающей волны (по вектору \mathbf{k}). Схема введения декартовой системы координат показана на рис. 2. Единичные базисные векторы системы координат будем обозначать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда волновой вектор падающей волны может быть представлен в виде $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$.

Также будем использовать сферическую систему координат r, θ, φ , связанную с x, y, z соотношениями $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Тогда уравнение поверхности шара (внешней поверхности неоднородного слоя) $\Gamma_1(\Omega_1)$ может быть записано в виде $r = r_1$, а уравнение внутренней поверхности неоднородного слоя (внешней поверхности однородной части шара) – в виде $\Gamma_2(\Omega_2) : r = r_2$.

Для решения задачи дифракции надо найти решения уравнений движения жидкости в Ω_0 и упругой среды в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, удовлетворяющих граничным условиям на поверхностях Γ_1, Γ_2 и условиям излучения звука на бесконечности [16].

Решение проводится в рамках моделей движения идеальной жидкости [17] и линейной теории упругости [18].

В результате отражения падающей звуковой волны от упругого тела формируется отраженное акустическое поле, а в шаре – упругие колебания. Как показано выше, потенциал смещения в рассеянном поле обозначен Ψ_s . Обозначим вектор смещения в Ω_j – \mathbf{u}_j ($j = 1, 2$). При этом смещение частиц жидкости в Ω_0 будет выражаться соотношением $u_0 = \text{grad } \Psi_0$, а акустическое давление $p = \rho_0 \omega^2 \Psi_0$, где $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$.

Таким образом, искомыми функциями в задаче дифракции являются: потенциал смещения в рассеянном поле Ψ_s в области Ω_0 и смещения частиц упругой среды \mathbf{u}_j в Ω_j .

С учетом гармонической зависимости Ψ_s и \mathbf{u}_j от времени в отношении Ψ_s надо решать уравнение Гельмгольца [17]

$$\Omega_0 : \Delta \Psi_s + k^2 \Psi_s = 0. \quad (4)$$

Смещение \mathbf{u}_j должно удовлетворять уравнениям движения упругой среды в напряжениях [18]

$$\Omega_j : \text{Div } \sigma_j = -\rho_j \omega^2 \mathbf{u}_j \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

где $\text{Div } \sigma$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ .

Тензор напряжений σ_1 (случай анизотропной среды) выражается через \mathbf{u}_1 обобщенным законом Гука

$$\sigma_1 = \Lambda \cdot \varepsilon_1, \quad (6)$$

где Λ – тензор модулей упругости, образуемый компонентами λ_{km} ; ε_1 – тензор малых деформаций Коши, компоненты которого в общем случае являются линейными комбинациями компонентов вектора \mathbf{u}_1 и их первых производных.

Тензор напряжений σ_2 (случай изотропной среды) выражается через \mathbf{u}_2 упрощенным законом Гука

$$\sigma_2 = \lambda_2 \text{div } \mathbf{u}_2 \delta + 2\mu_2 \varepsilon_2, \quad (7)$$

где δ – тензор Кронекера; ε_2 – тензор малых деформаций, формируемый компонентами вектора \mathbf{u}_2 .

На поверхности шара Γ_1 должны выполняться условия сопряжения движений частиц жидкости и упругого материала, которые состоят в равенстве нормальных смещений и напряжений и отсутствии касательных напряжений в упругой среде [17]

$$r = r_1 : \quad u_{1r} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}; \quad \sigma_{1rr} = -\rho_0 \omega^2 \Psi_0; \quad \sigma_{1r\theta} = 0; \quad \sigma_{1r\varphi} = 0, \quad (8)$$

где u_{1r}, σ_{1rr} – проекции векторов \mathbf{u}_1 и вектора напряжений $\mathbf{p}_1 = \sigma_1 \cdot \mathbf{n}$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$ к Γ_1 в точках $r = r_1$; $\sigma_{1r\theta}, \sigma_{1r\varphi}$ – проекции \mathbf{p}_1 на векторы $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ в касательной плоскости к Γ_1 .

На поверхности однородной части шара $\Gamma_2 : r = r_2$ должны выполняться условия сопряжения движений частиц двух частей упругого тела, которые состоят в равенстве смещений и напряжений внутренней части шара и неоднородного слоя [17]

$$r = r_2 : \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1; \quad \sigma_{2rr} = \sigma_{1rr} \quad \sigma_{2r\theta} = \sigma_{1r\theta}; \quad \sigma_{2r\varphi} = \sigma_{1r\varphi}, \quad (9)$$

где компоненты с индексом 2 относятся к однородной части шара, а с индексом 1 – к неоднородному слою.

Условия излучения на бесконечности для потенциала рассеянной звуковой волны Ψ_s могут быть представлены в виде [16]

$$\text{при } r \rightarrow \infty : \quad \Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik\Psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Таким образом, математически задача дифракции состоит в необходимости найти решения уравнений (4), (5), удовлетворяющих граничным условиям (8), (9) и условиям излучения на бесконечности (10).

4. Решение задачи дифракции

Решение задачи дифракции проводится по аналогии с решением задачи о рассеянии плоской волны сферическим неоднородным трансверсально-изотропным слоем, заполненным жидкостью [19].

Полагается, что анизотропия материала является сферической и согласованной с формой поверхности Ω_1 . В этом случае матрица физических компонент тензора модулей упругости в сферической системе координат имеет вид [14]

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix} \quad (11)$$

где $\lambda_{44} = (\lambda_{22} - \lambda_{23})/2$. При этом концентрические поверхности $r = \text{const}$ в слое Ω_1 являются поверхностями изотропии, а прямая, направленная по \mathbf{e}_r в каждой точке слоя является осью симметрии бесконечного порядка.

Поскольку свойства материала шарового слоя не зависят от координаты φ , то в силу геометрической симметрии тела и принятого направления распространения падающей волны поля звуковых и упругих колебаний будут обладать осевой симметрией относительно оси Oz и не зависеть от координаты φ . Кроме того, будут тождественно равны нулю компоненты смещения $u_{j\varphi}$.

Во введенной выше сферической системе координат потенциал падающей волны представляется в виде [20]

$$\Psi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (12)$$

где $\gamma_n = (2n + 1)i^n$, $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя первого рода порядка n , $P_n(x)$ – полином Лежандра степени n [22].

Потенциал смещения Ψ_s в отраженной волне ищется в виде разложения по сферическим волновым функциям

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (13)$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n , A_n – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

В однородной среде Ω_2 упругие колебания описывается скалярным потенциалом Ψ_2 продольных волн и векторным потенциалом Φ_2 сдвиговых волн [21] такими, что вектор смещения частиц среды записывается следующим образом

$$\mathbf{u}_2 = \nabla \Psi_2 + \nabla \times \Phi_2. \quad (14)$$

Потенциалы Ψ_2 и Φ_2 должны удовлетворять волновым уравнениям [21]

$$\Delta \Psi_2 + k_2^2 \Psi_2 = 0, \quad \Delta \Phi_2 + \chi^2 \Phi_2 = 0, \quad (15)$$

где $k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}}$, $\chi = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}$ – волновые числа продольных и сдвиговых волн в материале упругой среды Ω_2 .

Векторное уравнение относительно Φ_2 может быть сведено к трем скалярным уравнениям [23] вида второго уравнения (15). Из условия симметрии задачи и независимости полей от координаты φ можно получить выражение вектора Φ_2 через одну скалярную функцию Φ_2 в виде

$$\Phi_2 = \nabla \times (r \Phi_2 \mathbf{e}_r). \quad (16)$$

где \mathbf{e}_r – единичный орт координатной оси r .

Решая уравнения (15) методом разделения переменных, с учетом симметрии компонентов вектора смещений и ограниченности поля при $r = 0$ получим ряды для функций Ψ_2 и Φ_2

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_2 r) P_n(\cos \theta), \quad \Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\chi r) P_n(\cos \theta), \quad (17)$$

где B_n, C_n – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Уравнения движения упругой среды (5) в области анизотропного неоднородного слоя Ω_1 в сферической системе координат представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{1rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{1r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{1rr} - \sigma_{1\theta\theta} - \sigma_{1\varphi\varphi} + \sigma_{1r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= -\rho_1 \omega^2 u_{1r}, \\ \frac{\partial \sigma_{1r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{1\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{1\theta\theta} - \sigma_{1\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{1r\theta}] &= -\rho_1 \omega^2 u_{1\theta}, \end{aligned} \quad (18)$$

где u_{1r} и $u_{1\theta}$ – составляющие вектора смещения по осям сферической системы координат, σ_{1rr} , $\sigma_{1\theta r}$, $\sigma_{1\theta\theta}$, $\sigma_{1\varphi\varphi}$ – физические компоненты тензора напряжений.

Для упрощения решения системы (18) вводятся новые неизвестные функции [24] u_2 и σ_2 такие, что компоненты смещения $u_{1\theta}$ и тензора напряжений $\sigma_{1r\theta}$ выражаются через них следующим образом

$$u_{1\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \quad \sigma_{1r\theta} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \theta}.$$

Неизвестные функции u_{1r} , u_2 , σ_{1rr} и σ_2 , являющиеся функциями двух координат – r и θ , можно разложить в ряды по ортогональным полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} u_{1r} &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(r) P_n(\cos \theta), & u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(r) P_n(\cos \theta), \\ \sigma_{1rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{1n}(r) P_n(\cos \theta), & \sigma_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n}(r) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим эти ряды в уравнения движения (18). Тогда с учетом того, что в соответствии с дифференциальным уравнением Лежандра [22] и ортогональности полиномов Лежандра для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов U_{1n} , U_{2n} , σ_{1n} и σ_{2n} в рядах (19)

$$\mathbf{U}'_n = A\mathbf{U}_n + B\mathbf{S}_n, \quad \mathbf{S}'_n = (C - \rho\omega^2 I)\mathbf{U}_n + D\mathbf{S}_n \quad (20)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n})^T$, $\mathbf{S}_n = (\sigma_{1n}, \sigma_{2n})^T$, $A = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -2a & n_1 a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/\lambda_{11} & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{55} \end{pmatrix}$,

$$C = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -2\lambda & n_1 \lambda \\ 2(\lambda_{44} - \zeta) & n_1 \zeta - 2\lambda_{44} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2(a-1) & n_1 \\ -a & 3 \end{pmatrix},$$

$a = \lambda_{12}/\lambda_{11}$, $n_1 = n(n+1)$, $\lambda = 2a\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23}$, $\zeta = \lambda_{22} - a\lambda_{12}$, I – единичная матрица, а штрих обозначает производную по переменной r .

Таким образом, колебания неоднородного сферического упругого слоя описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (20). Их решения должны удовлетворять граничным условиям, которые наложены на физические характеристики движения у поверхностей соприкосновения сред.

Подставив выражения (12), (13), (19) в первые уравнения систем (8), (9) и воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра [22], получим выражения для коэффициентов в рядах (13), (19) через значения функции $U_{1n}(r)$ на поверхностях слоя. В частности для коэффициентов в потенциале рассеянной волны будем иметь

$$A_n = \frac{U_{1n}(r_1) - \gamma_n k_0 j'_n(kr_1)}{k h'_n(kr_1)}. \quad (21)$$

Подставляя соотношения (21) в оставшиеся два условия системы (8), получим уравнение, связывающее компоненты векторов \mathbf{U}_n и \mathbf{S}_n на границе $r = r_1$

$$\mathbf{S}_n + E\mathbf{U}_n \Big|_{r=r_1} = \mathbf{G}, \quad (22)$$

где

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 \omega^2 h_n^{(1)}(kr_1)}{k h_n^{(1)'}(kr_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho_0 \omega^2 \gamma_n j'_n(kr_1) h_n^{(1)'(kr_1)}}{h_n^{(1)'(kr_1)}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, используя выражения для B_n и C_n в оставшихся граничных условиях (9) на внутренней поверхности неоднородного слоя, получим систему

$$\mathbf{S}_n + F\mathbf{U}_n \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (23)$$

где

$$F = -\frac{2\mu_2}{r_2} \begin{pmatrix} \left(n_1 - \frac{x_2^2}{2}\right) j_n(x_1) - 2x_1 j'_n(x_1) & n_1 [x_2 j'_n(x_2) - j_n(x_2)] \\ x_1 j'_n(x_1) - j_n(x_1) & \left(\frac{n_1-1}{r_2^2} - \frac{x_2^2}{2}\right) j_n(x_2) - x_2 j'_n(x_2) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x_1 j'_n(x_1) & n_1 j_n(x_2) \\ j_n(x_1) & x_2 j'_n(x_2) + j_n(x_2) \end{pmatrix}^{-1}, \quad x_1 = k_2 r_2, \quad x_2 = \chi r_2.$$

Таким образом, для каждого значения $n = 0, 1, 2, \dots$ задача дифракции сведена к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (20) с краевыми условиями (22) и (23).

При фиксированном n решение краевой задачи ищется путем сведения к задачам Коши [19]. После решения определяются коэффициенты A_n , B_n , C_n . Проведя такие вычисления для достаточно большого числа n , получаем возможность анализировать волновые поля рассеянных и возбужденных внутри упругого шара волн.

5. О решении обратной задачи

Простейший вариант решения обратной коэффициентной задачи в отношении величин α и β из состоит в поиске таких значений α и β , которые обеспечивают наилучшее совпадение расчетных значений давления в точках \mathbf{V} апертуры с наблюдаемыми значениями давления.

При этом характеристикой отличия множества наблюдаемых значений давления \mathbf{P}^* от множества расчетных значений давления \mathbf{P} может выступать норма разности этих векторов

$$\delta = |\mathbf{P}^* - \mathbf{P}|. \quad (24)$$

В процессе решения задачи идентификации ищется такое сочетание α и β , которое минимизирует δ . При этом неявно полагается, что вклад отдельных точек наблюдения в формирование целевой функции δ равноценен. Однако из практических наблюдений или из каких-либо рациональных соображений может потребоваться дифференцировать роль отдельных точек наблюдения. Тогда формулу (24) расчета характеристики отклонения \mathbf{P}^* от \mathbf{P} можно скорректировать, введя весовые коэффициенты.

В данной работе вместо δ (формула (24)) используется взвешенная характеристика отклонения \mathbf{P}^* от \mathbf{P} в виде

$$\varkappa = \sum_{m=1}^M \gamma_m |\mathbf{P}_m^* - \mathbf{P}_m|, \quad (25)$$

где M – число участков апертуры наблюдения/измерения давления в рассеянной объектом акустической волне; $\gamma_m \geq 0$ – “вес” участка \mathbf{V}_m .

В общем случае участки \mathbf{V}_m могут иметь пересечения, но естественно положить, чтобы $\mathbf{V} = \bigcup_m \mathbf{V}_m$. Кажется удобным потребовать, чтобы сумма весовых коэффициентов была равна единице. Это позволяет исключить возможность введения разных наборов γ_m , определяющих одинаковую относительную степень влияния на \varkappa отдельных участков \mathbf{V}_m при фиксированном M .

Будем называть величину \varkappa индикатором близости наблюдаемого \mathbf{P}^* и расчетного \mathbf{P} давлений.

Заметим, норма (24) является частным случаем индикатора близости (25). При $M = 1$ получим $\delta = \varkappa$. Кроме того, при любом M , непересекающихся \mathbf{V}_m и одинаковых весовых коэффициентах ($\gamma_m = 1/M$) индикатор близости по сути будет совпадать с δ . При этом $\varkappa = \delta/M$.

Как и при использовании δ типичный алгоритм решения задачи – алгоритм минимизации величины \varkappa путем изменения искомых параметров. Например, при двух параметрах α и β из зависимостей (2) надо решать задачу

$$\varkappa(\alpha, \beta) \xrightarrow{(\alpha, \beta) \in D} \text{MIN}. \quad (26)$$

Однако индикатор близости можно использовать и по-другому. Если наблюдается близость/совпадение $\varkappa(\alpha_2, \beta_2)$ и $\varkappa(\alpha_1, \beta_1)$ при фиксированном поле \mathbf{P}^* , то это можно считать косвенным признаком того, что наборы параметров α_2, β_2 и α_1, β_1 близки. В частном случае, когда множество D дискретное и конечное, то для фиксированного разбиения \mathbf{V} на \mathbf{V}_m можно построить такую систему весовых коэффициентов γ_m , что из $\varkappa(\alpha_2, \beta_2) = \varkappa(\alpha_1, \beta_1)$ будет следовать, что $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1)$.

6. Численные исследования

При проведении численных исследований проводились расчеты амплитуды нормированного давления $p' = |\Psi_0/\Psi_p|$ в окрестности упругого шара.

Как указано выше, использовалось множество точек \mathbf{V} на сферической поверхности $r = R$. Из-за осевой симметрии задачи множество \mathbf{V} было сокращено до множества точек при фиксированном $\varphi_0 = 0$, которые задавались значениями $\theta_j = j \cdot \Delta\theta$ ($j = 0, 1, \dots, J$). При угловом шаге размещения точек $\Delta\theta$. В частном случае было установлено $J = 12$, $\Delta\theta = \pi/12 = \pi/J$. Величина R задавалась соотношением $R = 2r_1$.

Для свойств однородных сред были выбраны значения:

$$\Omega_0 : \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1485 \text{ м/с};$$

$$\Omega_2 : \rho_2 = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda_2 = 5.3 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu_2 = 2.6 \times 10^{10} \text{ Па}.$$

Для неоднородного слоя Ω_1 рассматривались 3 типа сочетаний λ_{km}^* (3 типа анизотропии материала):

тип 0: $\lambda_{11}^* = 10.5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{12}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{22}^* = 10.5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $\lambda_{55}^* = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ (– изотропный материал);

тип 1: $\lambda_{11}^* = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{12}^* = 3.28 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{22}^* = 16.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $\lambda_{55}^* = 2.54 \cdot 10^{10} \text{ Па}$;

тип 2: $\lambda_{11}^* = 16.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{12}^* = 0.819 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{22}^* = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $\lambda_{55}^* = 2.95 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Толщина неоднородного анизотропного слоя h такова, что $r_1/h = 2$.

Для частоты падающей волны ω рассматривались два фиксированных значения при которых $kr_1 = 5$ или $kr_1 = 7$.

Рассматривалась возможность идентификации пары параметров неоднородности α и β посредством индикатора близости \varkappa при $M = 2$ когда множество \mathbf{V}_1 содержало точки с $\theta_j \leq \pi/2$ – в так называемой “теновой области” рассеянного поля, а множество \mathbf{V}_2 – точки с $\theta_j \geq \pi/2$ – в “освещенной области” рассеянного поля. При этом считалось, что каждый из параметров α и β может принимать только дискретное значение из множества $\{-1, 0, 1\}$. Так что, множество D в задаче (26) имеет вид $\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$.

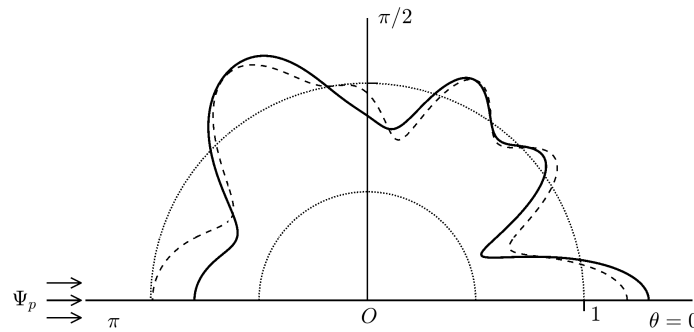


Рис. 3: Распределение давления p' , тип 1, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

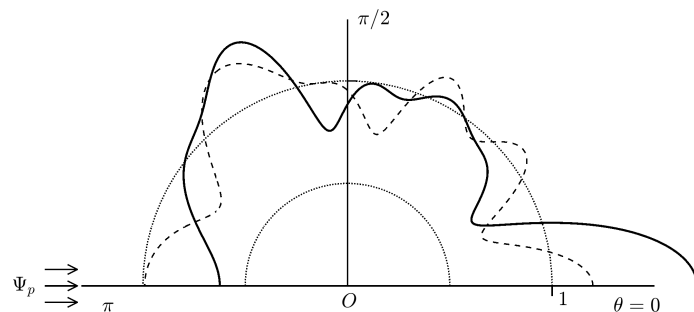


Рис. 4: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Для начала проведен анализ влияния типов анизотропии и видов неоднородности на диаграммах зависимости $p'(\theta)$.

На рис. 3 показано распределение амплитуды давления на поверхности $r = R$ для случая однородного материала слоя ($\alpha = 0, \beta = 0$) при анизотропии типа 1. Штриховая линия построена для однородного изотропного шара из материала типа 0. Внешняя пунктирная полуокружность показывает контур наблюдения $r = R$. Кроме того, уровень точек этой полуокружности соответствует абсолютному значению давления в падающей волне ($p' = 1$). Внутренняя полуокружность характеризует поверхность шара. И соотношение радиусов полуокружностей соответствует отношению r_1/R . Все представленные на рисунках результаты, кроме рис. 9 получены $kr_1 = 5$.

Рис. 4 иллюстрирует соотношение диаграмм $p'(\theta)$ для случая однородных материалов при анизотропии типа 2 и изотропном материале.

Диаграммы показывают, что распределение $p'(\theta)$ заметно зависит от типа анизотропии.

На рис. 5-9 демонстрируется влияние неоднородности материала внешнего слоя шара на распределение $p'(\theta)$. Сплошная линия на рисунке построена для случая неоднородного материала слоя, а штриховая – для однородного.

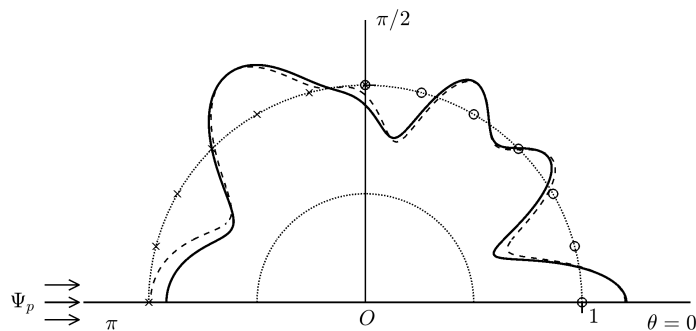


Рис. 5: Распределение давления p' , тип 0, $\alpha = -1, \beta = 0$

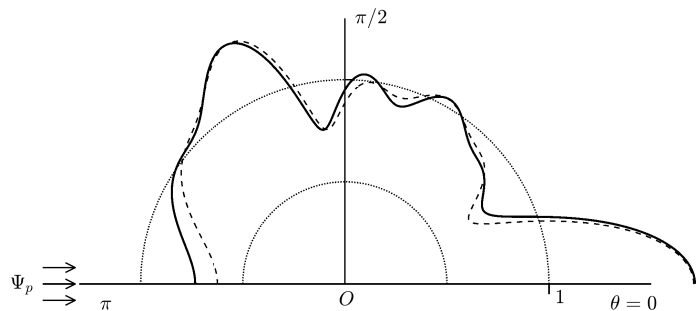


Рис. 6: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = -1, \beta = 0$

Рис. 5 построен для случая материала типа 0 (изотропного) в случае переменной плотности при $\alpha = -1$. Маркеры на контуре $p' = 1$ иллюстрируют размещение точек \mathbf{V} апертуры. Маркеры вида "o" соответствуют подмножеству \mathbf{V}_1 , а маркеры вида "x" соответствуют подмножеству \mathbf{V}_2 .

На рис. 6-9 показано влияние на распределение $p'(\theta)$ неоднородностей материала типа 2. На рис. 6 показан случай с $\alpha = -1, \beta = 0$. Рис. 7 соответствует случаю с $\alpha = 0, \beta = -1$.

Неожиданный характер влияния неоднородности и плотности, и модулей упругости показан на рис. 7. В этом случае с увеличением координаты r плотность возрастает в 3 раза, а модули упругости убывают. Это должно приводить к заметному изменению скоростей парциальных упругих волн. Однако полученная диаграмма $p'(\theta)$ отличается от соответствующей

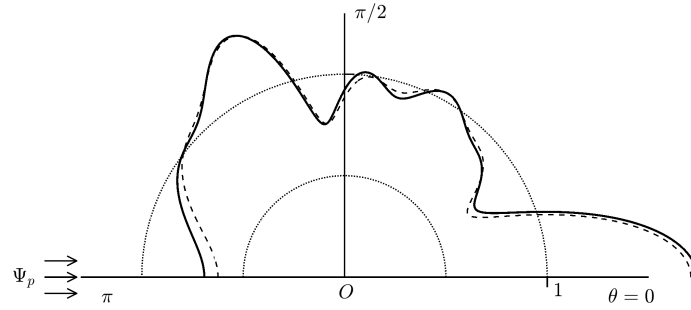


Рис. 7: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 0, \beta = -1$

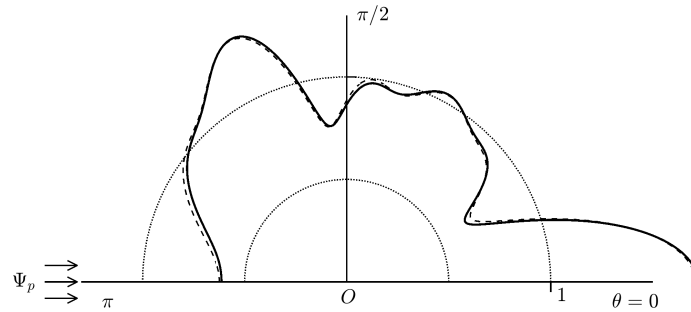


Рис. 8: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 1, \beta = -1$

диаграммы для однородного материала не более, чем на 3-5%.

Далее была проведена серия численных экспериментов по расчету индикатора близости. В качестве характеристики наблюдаемого рассеянного поля \mathbf{P}^* рассматривались значения нормированного Ψ_0 для случая однородного изотропного материала в точках \mathbf{V} .

В таблицах 1-3 представлены результаты расчета индикатора близости при расчетных значениях рассеянного поля \mathbf{P} при волновом размере шара $kr_1 = 5$. В таблице 1 показаны расчеты для шара с материалом слоя типа 0. В каждой строке таблицы представлены: порядковый номер эксперимента; значения α и β , характеризующие вид неоднородности; значения парциальных норм отклонения давления $|\mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1|$ и $|\mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2|$; значения двух индикаторов близости \varkappa_1 и \varkappa_2 . Первый из них – \varkappa_1 получен в результате выбора γ_1, γ_2 в формуле (25) такими, чтобы индикаторы \varkappa для различных видов неоднородности из рассматриваемых вариантов имели максимальное различие. Второй индикатор близости рассчитывался при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$.

При найденных при $kr_1 = 5$ для $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.8$ минимальная разность значений \varkappa_1 для всех типов анизотропии и различных видах неоднородности составляет величину 0.016 (см. $\varkappa_1 = 0.258$ при $\alpha = 0/\beta = 1$ и $\varkappa_1 = 0.274$ при $\alpha = 1/\beta = 0$ в табл. 1). Это означает, что для

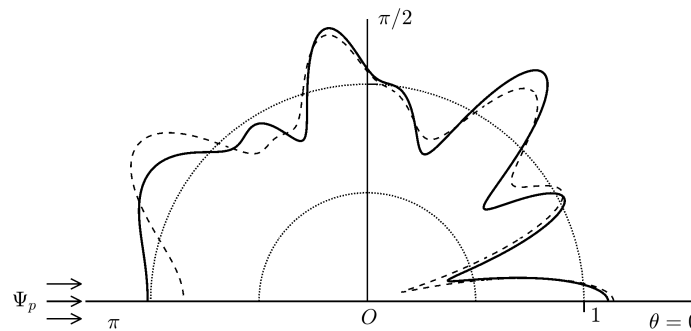


Рис. 9: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 1, \beta = -1, kr_1 = 7$

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.224103	0.201634	0.206	0.213
2	-1	0	0.145081	0.145845	0.146	0.145
3	-1	1	0.036025	0.012060	0.017	0.024
4	0	-1	0.122172	0.091616	0.098	0.107
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.285653	0.251252	0.258	0.268
7	1	-1	0.123275	0.125769	0.125	0.125
8	1	0	0.285032	0.271415	0.274	0.278
9	1	1	0.656339	0.590864	0.604	0.624

Таблица 1: Расчет индикатора близости (тип 0, $kr_1 = 5$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.086491	0.026409	0.384	0.565
2	-1	0	0.025281	0.033819	0.321	0.296
3	-1	1	0.038634	0.024468	0.273	0.316
4	0	-1	0.082571	0.029964	0.405	0.563
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.049994	0.018597	0.249	0.343
7	1	-1	0.086982	0.075885	0.781	0.814
8	1	0	0.038037	0.047960	0.460	0.430
9	1	1	0.087586	0.069409	0.730	0.785

Таблица 2: Расчет индикатора близости (тип 1, $kr_1 = 5$)

каждый вид неоднородности (сочетание α и β) может быть устойчиво идентифицирован на основе сравнения \varkappa_1 со значениями, представленными в таблице.

При этом минимальная разность значений \varkappa_1 при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ для различных видов неоднородности составляет величину 0.002 (см. $\varkappa_1 = 0.565$ при $\alpha = -1/\beta = -1$ и $\varkappa_1 = 0.5634$ при $\alpha = 0/\beta = -1$ в табл. 2), что при наличии погрешностей в измерениях и/или вычислениях не позволяет надежно идентифицировать вид неоднородности на основе сравнения с табличными значениями.

Аналогичные результаты расчетов индикатора близости уже при $kr_1 = 7$ представлены в табл. 4-5. В этом случае “наилучшая разрешающая способность” получена при $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.1$ (см. \varkappa_1). При этом минимальная разность значений \varkappa_1 для всех типов анизотропии

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.380842	0.403898	3.993	3.924
2	-1	0	0.211299	0.217499	2.163	2.144
3	-1	1	0.021767	0.028119	0.268	0.249
4	0	-1	0.111245	0.135110	1.303	1.232
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.102753	0.168157	1.551	1.355
7	1	-1	0.096052	0.079530	0.828	0.878
8	1	0	0.132839	0.154536	1.502	1.437
9	1	1	0.172524	0.276953	2.561	2.247

Таблица 3: Расчет индикатора близости (тип 2, $kr_1 = 5$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.109987	0.140539	0.113	0.125
2	-1	0	0.058847	0.103342	0.063	0.081
3	-1	1	0.048275	0.022638	0.046	0.035
4	0	-1	0.087008	0.046266	0.083	0.067
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.140593	0.144860	0.141	0.143
7	1	-1	0.172308	0.122301	0.167	0.147
8	1	0	0.206171	0.232147	0.209	0.219
9	1	1	0.415240	0.407203	0.414	0.411

Таблица 4: Расчет индикатора близости (тип 0, $kr_1 = 7$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.441707	0.376064	0.435	0.409
2	-1	0	0.216572	0.233022	0.218	0.225
3	-1	1	0.065806	0.055897	0.065	0.061
4	0	-1	0.193385	0.075565	0.182	0.134
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.132091	0.092412	0.128	0.112
7	1	-1	0.154131	0.198381	0.159	0.176
8	1	0	0.114897	0.167966	0.120	0.141
9	1	1	0.186883	0.207395	0.189	0.197

Таблица 5: Расчет индикатора близости (тип 1, $kr_1 = 7$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	\varkappa_1	\varkappa_2
1	-1	-1	0.284132	0.278425	0.284	0.281
2	-1	0	0.194470	0.203761	0.195	0.199
3	-1	1	0.209523	0.181690	0.207	0.196
4	0	-1	0.153333	0.129266	0.151	0.141
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.573292	0.509045	0.567	0.541
7	1	-1	0.417608	0.362875	0.412	0.390
8	1	0	0.397458	0.376329	0.395	0.387
9	1	1	0.782960	0.666716	0.771	0.725

Таблица 6: Расчет индикатора близости (тип 2, $kr_1 = 7$)

и различных видах неоднородности составляет величину 0.007. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ (см. \varkappa_2) минимальная разность значений \varkappa_1 для всех типов анизотропии и различных видах неоднородности составляет величину 0.003. Этот результат – невысокая "разрешающая способность" индикатора близости (0.007 против 0.016 при $kr_1 = 5$) может объясняться тем, что частота падающей волны при $kr_1 = 5$ ближе к ряду резонансных частот неоднородного цилиндра, чем при $kr_1 = 7$.

7. Заключение

Таким образом, предложено решение задачи определения вида неоднородности внешнего трансверсально-изотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны на основе использования индикатора близости, рассчитываемого по формуле (25).

Задача дифракции звука на шаре решена численно-аналитическим методом, при котором потенциал смещения в рассеянной волне и потенциалы продольных и поперечных волн в однородной части шара представлены разложениями по осесимметричным сферическим гармоникам. Решение уравнений движения в неоднородном анизотропном внешнем слое шара сведено к системе краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Для определения искоемых коэффициентов в линейных зависимостях плотности и модулей упругости внешнего слоя выполняется сравнение наблюдаемых значений давления в некотором множестве точек на сферической поверхности с центром в центре шара и расчетных значений давления в этих точках. Предложен вариант формирования индикатора близости наблюдаемых и расчетных значений давления на основе разбиения точек наблюдения на группы. Предлагается использовать индикатор близости для идентификации коэффициентов в законах неоднородности плотности и модулей упругости в слое.

Проведены численные эксперименты, которые показывают, что для рассматриваемых видов неоднородности можно подобрать частоту падающей волны, которая позволяет наблюдать заметное проявление неоднородности в ближней зоне рассеянного поля.

Подбор разбиения \mathbf{V} на \mathbf{V}_m и весовых коэффициентов в выражении (25) позволяет использовать индикатор близости для идентификации вида неоднородности внешнего трансверсально-изотропного слоя упругого шара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*. 1996. V. 12, pp. 383–393.
2. Gilbert R. P., Xu Y. Acoustic imaging in a shallow ocean with a thin ice cap // *Inverse Problems*. 2000. V. 16, pp. 1799–1811.
3. Guzina B. B., Nintcheu S. F., Bonnet M. On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40, issue 6, pp. 1505–1523.
4. Martin P. A. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles // *SIAM J. Appl. Math.* 2003. V. 64, pp. 297–308.
5. Bilgin E., Yapar A., Yelkenci T. An acoustic inverse scattering problem for spheres with radially inhomogeneous compressibility // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 133, issue 4, pp. 2097–2104.
6. Bogachev I. V., Nedin R. D., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // *ZAMM - J. Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. V. 97, issue 3, pp. 358–364.

7. Vatul'yan A.O., Yurov V.O. On Estimating the Laws of Radial Inhomogeneity in a Cylindrical Waveguide // *Acoust. Phys.* 2020. V. 66, pp. 97–104.
8. Ватульян А. О. О коэффициентных обратных задачах и их приложениях в механике и биомеханике // *Mechanics – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia.* 2022. V. 75, no. 1, pp. 36–47.
9. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A., Tolokonnikov L. A. Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties // *Acoustical Physics.* 2015. V. 61. issue 5. pp. 504–510.
10. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородного покрытия упругого цилиндра с полостью для обеспечения заданных звукоотражающих свойств // *Изв. ТулГУ. Технические науки.* 2017. Вып. 7, с. 163–175.
11. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии упругого полупространства // *Изв. ТулГУ. Технические науки,* 2018. Вып. 9, с. 290–302.
12. Skobelt'syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Physics: Conference Series,* 2019. V. 1203, 012023, pp. 1–10.
13. Скобельцын С. А., Пешков Н. Ю. Определение толщины неоднородного покрытия конечного упругого цилиндра по рассеянному звуку в полупространстве // *Известия ТулГУ. Технические науки.* 2020. Вып. 10, с. 172–183.
14. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
15. Cherradi N., Kawasaki A., Gasik M. Worldwide trends in functional gradient materials research and development // *Composites Engineering.* 1994. V. 4, issue 8, pp. 883–894.
16. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
17. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41, № 6, с. 917–923.
20. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
21. Гузь А. Н. и др. Дифракция упругих волн. Киев: Наук.думка, 1978. 307 с.
22. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
23. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т.2. М.: Изд.иностр.лит., 1960. 886 с.
24. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Свободные неосесимметричные колебания толстостенного трансверсально-изотропного полого шара // *Прикл. механика.* 1988. Т. 24, № 5, с. 12–17.

REFERENCES

1. D. Colton and A. Kirsch, 1996. "A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region" *Inverse Problems* vol. 12, pp. 383–393.
2. R. P. Gilbert and Y. Xu, 2000, "Acoustic imaging in a shallow ocean with a thin ice cap" *Inverse Problems* vol. 16, pp. 1799–1811.
3. B. B. Guzina, S. F. Nintcheu and M. Bonnet, 2003, "On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid" *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, issue 6, pp. 1505–1523.
4. P. A. Martin, 2003, "Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles" *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 64, pp. 297–308.
5. E. Bilgin, A. Yapar and T. Yelkenci, 2013, "An acoustic inverse scattering problem for spheres with radially inhomogeneous compressibility" *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 133, issue 4, pp. 2097–2104.
6. I. V. Bogachev, R. D. Nedin, A. O. Vatul'yan and O. V. Yavruyan, 2017, "Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder" *ZAMM - J. Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 97, issue 3, pp. 358–364.
7. Vatul'yan A. O. and V. O. Yurov, 2020 "On Estimating the Laws of Radial Inhomogeneity in a Cylindrical Waveguide" *Acoust. Phys.*, vol. 66, pp. 97–104.
8. A. O. Vatul'yan, 2022, "On coefficient inverse problems and their applications in mechanics and biomechanics" *Mechanics – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, vol. 75, no. 1, pp. 36–47.
9. N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn and L. A. Tolokonnikov, 2015, "Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties" *Acoust. Phys.*, vol. 61, issue 5, pp. 504–510.
10. S. A. Skobel'tsyn, 2017, "Determination of the parameters of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder with a cavity to provide specified sound-reflecting properties" *News of TulGU. Technical science*, issue 7, pp. 163–175.
11. S. A. Skobel'tsyn, 2018, "Determination of the parameters of the inhomogeneity of the coating of an elliptical cylinder by sound scattering in the presence of an elastic half-space" *News of TulGU. Technical science*, issue 9, pp. 290–302.
12. S. A. Skobel'tsyn and N. Y. Peshkov, 2019, "Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border" *J. Physics: Conference Series*, vol. 1203, 012023, pp. 1–10.
13. S. A. Skobel'tsyn and N. Y. Peshkov, 2020, "Determining the thickness of an inhomogeneous coating of a finite elastic cylinder from scattered sound in a half-space" *News of TulGU. Technical science*, issue 10, pp. 172–183.
14. F. I. Fedorov, 1965, *Theory of elastic waves in crystals [Teoriya uprugikh voln v kristallakh]*, Moscow, Nauka.
15. N. Cherradi, A. Kawasaki and M. Gasik, 1994, "Worldwide trends in functional gradient materials research and development" *Composites Engineering*, vol. 4, issue 8, pp. 883–894.

16. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
17. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics [Obshchaya akustika]*, Moscow, Nauka.
18. W. Nowacki, 1963, *Dynamics of elastic systems*, New York, Wiley.
19. S. A. Skobel'tsyn and L. A. Tolokonnikov, 1995, "Sound scattering by an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer" *Acoustical Physics*, vol. 41, no. 6, pp. 917–923.
20. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
21. A. N. Guz and etc., 1978, *Diffraction of elastic waves [Difraktsiya uprugikh voln]*, Kyiv, Nauk. dumka.
22. G. A. Corn and T. M. Corn, 2000, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York, Dover Publications.
23. P. M. Morse and H. Feshbach, 1953, *Methods of Mathematical Physics*, New York, McGraw-Hill.
24. N. A. Shulga, A. Ya. Grigorenko and T. L. Efimova, 1988, "Free non-axisymmetric vibrations of a thick-walled transversely isotropic hollow sphere", *Appl. Mechanics*, vol. 24, no. 5, pp. 12–17.

Получено: 17.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-368-381

Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием¹

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным анизотропным упругим покрытием. Полагается, что тело располагается в свободном пространстве, заполненном идеальной жидкостью. Получено аналитическое решение задачи.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается скалярным уравнением Гельмгольца. Поле излучения сферического источника записывается в виде разложения в ряд по цилиндрическим волновым функциям. Распространение упругих волн в изотропном упругом цилиндре описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Колебания неоднородного анизотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Методом перевала получена асимптотическая формула для дальней зоны поля.

Проведены численные расчеты частотных характеристик рассеянного поля для упругих цилиндров с однородными и неоднородными трансверсально-изотропными покрытиями, а также для случая однородного изотропного покрытия. Выявлено существенное влияние и взаимовлияние неоднородности и анизотропии материала покрытия на акустические свойства рассеивающего цилиндрического тела.

Ключевые слова: дифракция, сферическая звуковая волна, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 368–381.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-368-381

**Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder
with an non-uniform anisotropic coating**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In paper the problem of the diffraction of a spherical monochromatic sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially non-uniform anisotropic elastic coating. It is assumed that the body is located in a free space filled with an ideal liquid. The analytical solution of the problem is obtained.

In the case of steady-state oscillations, the propagation of small perturbations in an ideal fluid is described by the Helmholtz scalar equation. The radiation field of a spherical source is written as a series expansion in cylindrical wave functions. The propagation of elastic waves in an isotropic elastic cylinder is described by the scalar and vector Helmholtz equations. The oscillations of an non-uniform anisotropic elastic cylindrical layer are described by the general equations of motion of a continuous medium.

The asymptotic formula for the far field zone is obtained by the steepest descent method.

Numerical calculations of the frequency characteristics of the scattered field are carried out for elastic cylinders with homogeneous and inhomogeneous transversally isotropic coatings, as well as for the case of a homogeneous isotropic coating. A significant influence and mutual influence of the inhomogeneity and anisotropy of the coating material on the acoustic properties of the scattering cylindrical body is revealed.

Keywords: diffraction, spherical sound wave, uniform elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 368–381.

1. Введение

Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Обычно покрытия применяются для повышения звукопоглощения и уменьшения отражения звука в определенном направлении. Значительный интерес представляют рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, так как многие реальные объекты достаточно хорошо аппроксимируются телами цилиндрической формы. Задачи дифракции

звуковых волн на одиночных цилиндрах с покрытиями, находящихся в безграничной жидкости, рассматривались во многих работах.

Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. В [1] для обеспечения заданного уровня гашения поля дифракции на абсолютно твердом цилиндре использовалось перфорированное покрытие в виде набора резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности цилиндра. В [2] предложена общая схема формирования поглощающих и нерассеивающих покрытий нового типа с повышенной эффективностью – т.е. покрытий с протяженной реакцией. В [3] выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непрерывно-неоднородных покрытий. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Серия работ посвящена изучению влияния неоднородных изотропных покрытий твердых тел цилиндрической формы на их звукоотражающие свойства. Задача о рассеянии плоской звуковой волны жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решена в [4]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [5], а с дискретно-слоистым покрытием — в [6]. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [7].

Однако представление первичного акустического поля в виде плоской волны справедливо только тогда, когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Наибольший интерес представляет изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием изучена в [8, 9], при этом в [8] цилиндр полагался абсолютно жестким, в [9] — изотропным упругим. Решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием получено в [10].

Во всех упомянутых выше работах неоднородные покрытия цилиндрических тел рассматривались как изотропные. Анизотропия материала покрытия не учитывалась. Решения задач о рассеянии плоской и цилиндрической звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем получены в [11, 12]. В работах [13, 14] рассматривалась дифракция плоских звуковых волн для абсолютно жесткого и упругого цилиндров с трансверсально-изотропным неоднородным упругим покрытием. В [15] осуществлено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука в случае, когда источником первичного акустического возмущения является цилиндрическая звуковая волна.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородной изотропный упругий цилиндр бесконечной длины и радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр покрыт упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотропным слоем с внешним радиусом r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координаты

натная ось z совпадает с осью вращения цилиндра и является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия. Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(r)$, $\rho = \rho(r)$.

Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого (r_0, φ_0, z_0) . Потенциал скорости падающей волны

$$\Psi_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|}, \quad (2.1)$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; \mathbf{R} и \mathbf{R}_0 — радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник; ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном трансверсально-изотропном слое.

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]:

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля. При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S — потенциал скорости рассеянной волны.

Запишем сферическую звуковую волну (2.1) в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям [17]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh, \\ \tilde{\Psi}_0(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(k_h r_0) J_n(k_h r), & r < r_0; \\ J_n(k_h r_0) H_n(k_h r), & r > r_0. \end{cases} \\ k_h &= \sqrt{k^2 - h^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка n ; $H_n(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Без ограничения общности положим $z_0 = 0$.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S , являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде [17]

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh. \quad (3.2)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре. Представим вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц однородного изотропного упругого цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [16]:

$$\begin{aligned} \Delta F + k_l^2 F &= 0, \\ \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Представим вектор Φ в виде [5]

$$\Phi = \text{rot } (W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M — функции пространственных координат; \mathbf{e}_z — единичный вектор оси z .

Тогда векторное уравнение (3.3) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\begin{aligned} \Delta W + k_\tau^2 W &= 0, \\ \Delta M + k_\tau^2 M &= 0. \end{aligned}$$

С учетом условия ограниченности функции F , W и M будем искать в виде [17]

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(h) J_n(k_1 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ W &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}$.

Компоненты вектора смещения \mathbf{u}_0 в цилиндрической системе координат записываются через функции F , W , M следующим образом

$$u_{0r} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \quad u_{0z} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k_\tau^2 W.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения \mathbf{u}_0 в однородном изотропном цилиндре имеют вид [18]:

$$\begin{aligned} \sigma_{0rr} &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, & \sigma_{0\varphi\varphi} &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{0r}}{r} \right), \\ \sigma_{0zz} &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial z}, & \sigma_{0r\varphi} &= \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right), \\ \sigma_{0rz} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_{0z}}{\partial r} + \frac{\partial u_{0r}}{\partial z} \right), & \sigma_{0\varphi z} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0z}}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \frac{\partial u_{0z}}{\partial z}$.

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где u_r , u_φ , u_z — компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое; $\rho = \rho(r)$.

Для трансверсально-изотропного покрытия цилиндра осью упругой симметрии является всякая прямая, проходящая через ось анизотропии и перпендикулярная к ней. При этом поверхностями изотропии являются цилиндрические поверхности, а тензор модулей упругости Λ в соответствии с нотацией Фойгта [19] может быть записан в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix},$$

где λ_{ik} — модули упругости материала покрытия в двухиндексном обозначении, где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

В соответствии с обобщенным законом Гука компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформации ε_{ij} соотношениями [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{11} \varepsilon_{rr} + \lambda_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{12} \varepsilon_{zz}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{23} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{23} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{22} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\lambda_{55} \varepsilon_{r\varphi}, & \sigma_{rz} &= 2\lambda_{55} \varepsilon_{rz}, & \sigma_{\varphi z} &= (\lambda_{22} - \lambda_{23}) \varepsilon_{\varphi z}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что представленные выражения позволяют легко получить описание волновых полей для случая изотропного неоднородного покрытия цилиндра. Для этого достаточно положить $\lambda_{11} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{23} = \lambda$, $\lambda_{55} = \mu$, где λ и μ — модули упругости неоднородной изотропной упругой среды.

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ , u_z будем искать в виде рядов Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя разложения (3.9) в уравнения (3.6) с учетом (3.7) и (3.8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ для каждого n и h :

$$\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r, h), U_{2n}(r, h), U_{3n}(r, h))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{n11} &= \lambda_{11} r^2, \quad a_{n22} = \lambda_{55} r^2, \quad a_{n33} = \lambda_{55} r^2, \quad a_{nij} = 0, \quad i \neq j, \\ b_{n11} &= \lambda'_{11} r^2 + \lambda_{11} r, \quad b_{n12} = b_{n21} = in(\lambda_{12} + \lambda_{55})r, \quad b_{n13} = b_{n31} = ih(\lambda_{12} + \lambda_{55})r^2, \\ b_{n22} &= b_{n33} = \lambda'_{55} r^2 + \lambda_{55} r, \quad b_{n23} = b_{n32} = 0, \\ c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - \lambda_{55}(n^2 + h^2 r^2) + \lambda'_{12} r - \lambda_{22}, \quad c_{n12} = in(\lambda'_{12} r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\ c_{n13} &= ih(\lambda'_{12} r + \lambda_{12} - \lambda_{23})r, \quad c_{n21} = in(\lambda'_{55} r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), \\ c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{22} - \lambda'_{55} r - \lambda_{55} + h^2 r^2(\lambda_{23} - \lambda_{22})/2, \quad c_{n23} = c_{n32} = -hn(\lambda_{22} + \lambda_{23})r/2, \\ c_{n31} &= ih(\lambda'_{55} r + \lambda_{55} + \lambda_{23})r, \quad c_{n33} = \omega^2 r^2 \rho - h^2 \lambda_{22} r^2 + n^2(\lambda_{23} - \lambda_{22})/2. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ разложений (3.2), (3.4) и функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (3.9) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений [5]:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (3.11)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

при $r = r_2$

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}. \quad (3.12)$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1n}(r_1, h)$:

$$A_n(h) = -\frac{AiH_n(k_h r_0) k_h J'_n(k_h r_1) + 2i\omega U_{1n}(r_1, h)}{2k_h H'_n(k_h r_1)}. \quad (3.13)$$

Из оставшихся граничных условий на внешней поверхности цилиндра при $r = r_1$ находим три краевых условия, которым должна удовлетворять краевая задача (3.10)

$$\left(\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} = \mathbf{W}_n, \quad (3.14)$$

где элементы матриц $\mathbf{W}_n = (w_{n1}, 0, 0)^T$; $\mathbf{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w_{n1} &= \frac{iA\rho_1\omega H_n(k_h r_0)}{\pi k r H'_n(kr)}, & e_{n11} &= \frac{\lambda_{12}}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(k_h r)}{k H'_n(k_h r)}, \\ e_{n12} &= \frac{in\lambda_{12}}{r}, & e_{n13} &= ih\lambda_{12}, & e_{n21} &= \frac{in\lambda_{55}}{r}, & e_{n22} &= -\frac{\lambda_{55}}{r}, \\ e_{n23} &= e_{32} = e_{33} = 0, & e_{n31} &= ih\lambda_{55}. \end{aligned}$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим неизвестные коэффициенты $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ выраженные через $U_{1n}(r_2, h)$, $U_{2n}(r_2, h)$, $U_{3n}(r_2, h)$:

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{U}_n,$$

где $\mathbf{K}_n = (B_n(h), C_n(h), D_n(h))^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{nij})_{3 \times 3}$:

$$\begin{aligned} m_{n11} &= k_1 J'_n(k_1 r_2), & m_{n12} &= ihk_2 J'_n(k_2 r_2), & m_{n13} &= ink_\tau J_n(k_2 r_2)/r_2, \\ m_{n21} &= inJ_n(k_1 r_2)/r_2, & m_{n22} &= -hnJ_n(k_2 r_2)/r_2, & m_{n23} &= -k_2 k_\tau J'_n(k_2 r_2), \\ m_{n31} &= ihJ_n(k_1 r_2), & m_{n32} &= k_2^2 J_n(k_2 r_2), & m_{n33} &= 0. \end{aligned}$$

Из оставшихся трех граничных условий (3.12), состоящих в равенстве напряжений, находим

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{F}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} = \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n,$$

где $\mathbf{F}_n = (f_{npm})_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_n = (\gamma_{npm})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} f_{n11} &= \lambda_{12}(r_2)/r_2, & f_{n12} &= in\lambda_{12}(r_2)/r_2, & f_{n13} &= ih\lambda_{12}(r_2), & f_{n21} &= in\lambda_{55}(r_2)/r_2, \\ f_{n22} &= -\lambda_{55}(r_2)/r_2, & f_{n23} &= f_{n32} = f_{n33} = 0, & f_{n31} &= ih\lambda_{55}(r_2), \\ \gamma_{n11} &= 2\mu_0 k_1^2 J''_n(k_1 r_2) - \lambda_0(k_1^2 + h^2) J_n(k_1 r_2), & \gamma_{n12} &= 2ih\mu_0 k_2^2 J''_n(k_2 r_2), \\ \gamma_{n13} &= 2ink_\tau \mu_0 (k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) - J_n(k_2 r_2))/r_2^2, & \gamma_{n21} &= 2in\mu_0 (k_1 r_2 J'_n(k_1 r_2) - J_n(k_1 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n22} &= 2nh\mu_0 (k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) - J_n(k_2 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n23} &= -\mu_0 k_\tau (k_2^2 r_2^2 J''_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) + n^2 J_n(k_2 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n31} &= 2ih\mu_0 k_1 J'_n(k_1 r_2), & \gamma_{n32} &= -\mu_0 k_2 (h^2 - k_2^2) J'_n(k_2 r_2), \\ \gamma_{nq33} &= -nh\mu_0 k_\tau J_n(k_2 r_2)/r_2. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для \mathbf{K}_n , получим краевые условия для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на внутренней поверхности покрытия:

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{T}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} = 0, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{T}_n = \mathbf{F}_n - \mathbf{G}_n[\mathbf{M}_n]^{-1}$.

Решая краевую задачу (3.10), (3.14), (3.15) каким-либо методом, определяем неизвестные функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (3.9). Затем вычислим коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$. В результате получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Подробный анализ интеграла (3.2) был проведен в работе [10]. Здесь покажем способ вычисления такого интеграла в частном случае. В дальней зоне акустического поля при $kr \gg 1$ интеграл (3.2) может быть вычислен методом перевала [20]

$$\int_{\Gamma} g(\gamma) e^{Qf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Q|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Qf(\gamma_0)+i\phi}, \quad Q \gg 1, \quad (3.16)$$

где Γ — некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ϕ — угол, определяющий направление линии наискорейшего убывания функции $\operatorname{Re} f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Заменим цилиндрическую функцию Ганкеля в (3.2) ее асимптотической формулой при больших значениях аргумента [21]

$$H_n(khr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi khr}} \exp[i(khr - \pi n/2 - \pi/4)],$$

а также выполним замену $h = k \sin \gamma$. Получим:

$$\begin{aligned} \Psi_S &= e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n(k \sin \gamma) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] k \cos \gamma d\gamma, \end{aligned}$$

где Γ — контур Зоммерфельда на комплексной плоскости γ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Тогда точка перевала γ_0 определяется как

$$\gamma_0 = \arctan \left(\frac{z}{r} \right),$$

а угол наискорейшего спуска может быть найден из уравнения [22]

$$2\phi + \arg f''(\gamma_0) = \pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Для рассматриваемого случая $\phi = -\pi/4$.

В результате в соответствии с формулой (3.16) будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi_S &\approx \frac{2}{r} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] k \cos \gamma_0 \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n(k \sin \gamma_0) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned}$$

4. Численные исследования

Были проведены расчеты частотной зависимости безразмерной амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kr_1 в фиксированной точке наблюдения с цилиндрическими координатами $(r, \varphi, z) = (100, \pi, 0)$. Полагалось, что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$) радиуса $r_2 = 0,8 \text{ м}$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$). При расчетах использовались следующие характерные значения модулей упругости, приведенные в таблице.

Характерные величины модулей упругости ($\times 10^{10}$) Н/м²

Материал	λ_{11}^1	λ_{12}^1	λ_{22}^1	λ_{23}^1	λ_{55}^1
Тип 1	5,74	3,28	16,4	3,28	2,54
Тип 2	16,4	0,82	5,74	0,82	2,95
Изотропный	10,5	5,3	10,5	5,3	2,6

Изотропной базой материалов был алюминий с характерной плотностью $\rho^1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Краевая задача (3.10), (3.14), (3.15) решалась методом сплайн-коллокации [23], а в качестве порядка усечения бесконечных рядов использовалась величина $N = 2 [kr_1] + 1$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Интеграл (3.2) вычислялся с использованием квадратурной формулы Гаусса [24].

Предполагалось, что точечный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_1$ и $\varphi_0 = \pi$.

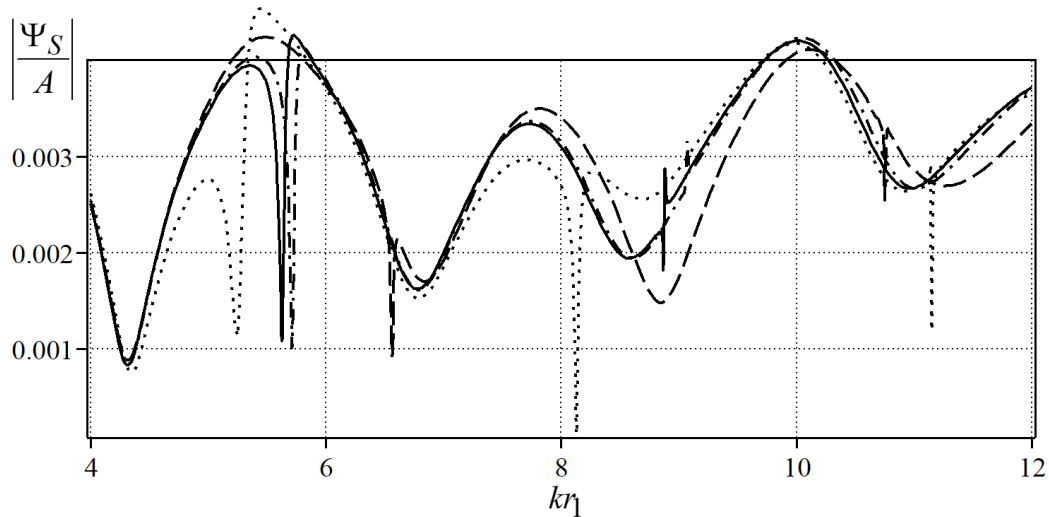


Рис. 1: Зависимость амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием

На рис. представлены частотные зависимости амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ в диапазоне частот, соответствующем изменению волнового размера в диапазоне $4 \leq kr_1 \leq 12$ для цилиндра с неоднородным покрытием, механические характеристики которого менялись по законам

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}^1, \quad \rho = \rho^1 \cdot f(r), \quad f(r) = 0.75 \left[\left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \right)^2 + 1 \right], \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

При этом штриховая и пунктирная линии соответствуют материалам с анизотропией типов 1 и 2 соответственно, сплошной линией построена кривая для изотропного случая, а штрихпунктирной для случая изотропного однородного покрытия, где полагалось $\rho = \rho^1$.

Таким образом из рис. можно видеть как значительное влияние неоднородности материала покрытия на рассеянное акустическое поле, так и существенное взаимовлияние неоднородности и анизотропии материала покрытия.

5. Заключение

На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые выявили возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью взаимовлияния неоднородности и анизотропии упругих покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
4. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
5. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
6. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
7. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.
8. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
9. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.
10. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215-226.
11. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 134-138.

12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 9-11.
13. Ларин Н. В., Белкин А. Э. Рассеяние звука на твёрдом цилиндре с упругим анизотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 11. С. 107–117.
14. Скобельцын С. А. Задача о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 11. С. 230–239.
15. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 293–311.
16. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
20. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
21. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
22. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
23. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
24. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006, "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.
2. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008, "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.
3. Kosarev, O. I. 2012, "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinost. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].
4. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
5. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

6. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
7. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733-742.
8. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
9. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, " Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
11. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.
12. Tolokonnikov L. A. 1998, "Difraktsiia teilindricheskikh voln na neodnorodnoi transversalnoizotropnoi teilindricheskoi obolochke", *Oboronnaia tekhnika*, no. 4–5. pp. 9–11, [in Russian].
13. Larin, N.V. & Belkin, A.E. 2021, "Sound scattering on a solid cylinder with an elastic anisotropic inhomogeneous coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11, pp. 107-117, [in Russian].
14. Skobel'tsyn, S. A. 2021, "Diffraction problem of plane sound wave by elastic cylinder with transversely-isotropic inhomogeneous coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11, pp. 230-239, [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022, "Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311, [in Russian].
16. Shenderov, E.L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
17. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
18. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprzystosci", PWN, Warszawa.
19. Fedorov, F. I. 1965, "Theory of elastic waves in crystals", Nauka, Moscow, 388 p., [in Russian].
20. Ilyin, A. M. & Danilin, A. R. 2009, "Asymptotic Methods in Analysis", Fizmatlit, Moscow, 248 p, [in Russian].
21. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
22. Bhatnagar, P.L. 1979, *Nonlinear Waves in One-dimensional Dispersive Systems*, Oxford University Press, 142 p.

-
23. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "*Spline function methods*", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].
 24. Samarskii, A. A. & Gulin, A. V. 1989, "*Numerical methods*", Moscow, Nauka, 432 p., [in Russian].

Получено: 21.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-382-393

Метод и некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био горных пород¹

М. Я. Яковлев, А. А. Семькин, В. А. Левин

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва)

e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru

Семькин Александр Алексеевич — ООО «Фидесис» (г. Москва)

e-mail: semykin@cae-fidesys.com

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Аннотация

В статье описывается метод и приводятся некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био пористого материала. Оценка производится путём проведения расчёта на представительном объёме материала. Внешняя граница представительного объёма жёстко фиксируется, а к поверхности пор прикладывается давление. Краевая задача теории упругости с данными граничными условиями решается численно, с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис". Поле напряжений, полученное в результате решения, осредняется по объёму. Эффективный коэффициент Био вычисляется из осреднённого тензора напряжений.

Сравнение численных результатов для эффективного коэффициента Био с аналитическим решением проведено на простейшей модели - кубе со сферической полостью. Для разных пористостей и для разных коэффициентов Пуассона материала показано, что погрешность составляет не более 5%. Также проведена оценка эффективного коэффициента Био для моделей с более сложной формой поры. Численные результаты показывают наличие существенной анизотропии в полученных коэффициентах Био.

Ключевые слова: теория упругости, пороупругость, физика Земли, гомогенизация, коэффициент Био, численное моделирование

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

М. Я. Яковлев, А. А. Семькин, В. А. Левин. Метод и некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био горных пород // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 382–393.

¹Исследования проведены в МГУ имени М.В. Ломоносова за счёт гранта РФФИ №19-71-10008 (разработка алгоритма численной оценки эффективных коэффициентов Био и исследовательской программы), гранта РФФИ №22-11-00110 (сравнение численных результатов с аналитическими) и гранта Президента РФ для молодых учёных - докторов наук №МД-208.2021.1.1 (проведение расчётов для анизотропного материала).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-382-393

Method and Some Results of Numerical Estimation of Effective Biot's Coefficient of Rocks

M. Ya. Yakovlev, A. A. Semykin, V. A. Levin

Yakovlev Maksim Yakovlevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow)

e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru

Semykin Alexander Alekseevich — Fidesys LLC (Moscow)

e-mail: semykin@cae-fidesys.com

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Abstract

In this article, a method and some results of the numerical estimation of effective Biot's coefficient of a porous material are described. The estimation is made by carrying out the calculation on a representative volume element (RVE) of the material. The outer boundary of the RVE is rigidly fixed, and pressure is applied to the surface of the pores. The elasticity boundary value problem with given boundary conditions is solved numerically, using the Russian CAE-system "Fidesys". The stress field obtained as a result of the solution is averaged over the volume. Effective Biot's coefficient is calculated from the averaged stress tensor.

Comparison of the numerical results for the effective Biot coefficient with the analytical solution is carried out on the simplest model - a cube with a spherical pore. For different porosities and for different Poisson's ratios of the material, it is shown that the error is no more than 5%. Effective Biot's coefficient is also estimated for models with a more complex pore shape. Numerical results show the presence of significant anisotropy in obtained Biot's coefficients.

Keywords: theory of elasticity, poroelasticity, rock physics, homogenization, Biot's coefficient, numerical simulation

Bibliography: 22 titles.

For citation:

M. Ya. Yakovlev, A. A. Semykin, V. A. Levin, 2022, "Method and Some Results of Numerical Estimation of Effective Biot's Coefficient of Rocks", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 382–393.

1. Введение

Численное моделирование задач геомеханики в настоящее время является всё более и более актуальным. Моделирование производится на масштабе зерна, на масштабе скважины [1] и на масштабе целого месторождения [2]. Одной из важных задач такого моделирования является вычисление напряжённо-деформированного состояния горной породы. При этом для описания поведения породы используются модели механики деформируемого твёрдого тела - в частности, теории упругости и пластичности.

Горная порода представляет собой неоднородную среду, поэтому для неё актуальна задача оценки эффективных механических характеристик - точно так же, как для композиционных [3] и пористых [4] материалов, решётчатых изделий аддитивного производства, метаматериалов [5], биологических тканей [6] и т.п. Но, в отличие от перечисленных видов материалов, порода зачастую представляет собой пороупругую среду, насыщенную жидкостью. В такой среде деформация твёрдого каркаса и движение жидкости по внутренним полостям (порам и трещинам [7]) влияют друг на друга. Одним из параметров пороупругой среды является коэффициент Био связывающий поровое давление и напряжения в материале. Масштаб поры/трещины и масштаб, на котором решаются задачи геомеханики, как правило, существенно различаются. В связи с этим, актуальной является задача численной оценки эффективных пороупругих характеристик горной породы.

В данной работе предложен метод и описаны некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био пористой среды. Оценка производится путём проведения конечноэлементных расчётов на представительном объёме среды (либо её ячейке периодически) с последующим осреднением результатов. Метод оценки аналогичен расчёту эффективных механических [8] [9] [10] [11] и теплофизических [12] характеристик гетерогенной среды. Расчёты проводятся с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис"[13] [14].

2. Алгоритм численной оценки эффективного коэффициента Био

Исследования различных эффективных свойств горных пород ведутся достаточно долгое время. Существуют методики натуральных экспериментов [15], позволяющие оценивать механические и физические свойства породы. Также существуют различные аналитические решения [16], позволяющие оценить механические свойства породы в простейших (модельных) случаях. Авторы данной статьи в прошлых работах представляли алгоритмы оценки эффективных упругих и теплофизических характеристик горных пород [17], основанные на проведении численных расчётов на представительном объёме керна. Такие алгоритмы позволяют, в частности, оценить эффективные упругие характеристики породы с учётом предварительного нагружения, к примеру, поровым давлением [18]. В данной работе исследуются именно пороупругие свойства породы - эффективные коэффициенты Био.

Основателем пороупругости заслуженно считается бельгийско-американский учёный Морис Энтони Био. В его работах [19] [20] описана формула, которая фактически является определением коэффициента Био:

$$\alpha = 1 - \frac{K_D}{K_S} \quad (1)$$

Здесь α – коэффициент Био, K_D – модуль объёмного сжатия "сухого"скелета породы, K_S – модуль объёмного сжатия минерала (сплошного материала, без пор). Таким образом, коэффициент Био горной породы может быть вычислен при известных модулях объёмного сжатия самой породы и сплошного однородного минерала, её составляющего. Модуль объёмного сжатия минерала, как правило, известен из литературы (либо может быть оценен при помощи эксперимента). Модуль объёмного сжатия скелета может быть оценен с помощью аналитических формул, а также с помощью натуральных экспериментов либо численных расчётов.

В данной работе используется другой подход к оценке коэффициента Био пористой среды, основанный на использовании метода расчёта на представительном объёме (либо ячейке периодичности) материала. Рассматривается закон Био-Терцаги для анизотропных упругих материалов [21], записанный в виде:

$$\sigma = C : \epsilon - \alpha p I \quad (2)$$

Здесь σ – тензор напряжений, ϵ – тензор деформаций, C – тензор модулей упругости (четвёртого ранга), p – поровое давление, I – единичный тензор, $:$ - знак двойной скалярной свёртки.

Формула (2) иллюстрирует, что при нулевых деформациях напряжения в среде полностью вызываются поровым давлением. Исходя из этой формулы, мы можем дать следующее определение: эффективный коэффициент Био пористой среды - это отношение эффективных напряжений, возникших в материале вследствие порового давления, к величине этого порового давления с противоположным знаком.

Пользуясь данным определением, опишем метод численной оценки эффективного коэффициента Био. Рассматривается геометрическая модель, являющаяся представительным объёмом пористой среды в форме прямоугольного параллелепипеда. (Представительным называется объём, достаточно большой для того, чтобы на нём можно было провести эксперименты либо сделать измерения, по результатам которых можно сделать обоснованный вывод о поведении материала в целом.) На представительном объёме решается статическая краевая задача теории упругости [22]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (3)$$

Граничные условия представляют собой нулевые перемещения всех точек границы Γ представительного объёма, что обеспечивает нулевые средние деформации в модели:

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

Кроме того, к поверхности внутренних пор прикладывается одинаковое фиксированное давление p_e .

Описанная краевая задача теории упругости решается численно, с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис использующей метод конечных элементов. Полученное в результате решения поле тензора напряжений осредняется по объёму:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (5)$$

Нет гарантии, что тензор напряжений σ^e , осреднённый по объёму путём численного интегрирования по всем конечным элементам, будет содержать ненулевые элементы лишь на диагонали, и эти элементы будут равны между собой. Поэтому при данном подходе (как это обычно бывает при оценке любых эффективных свойств путём расчёта на представительном объёме) предполагается наиболее общий случай анизотропной пороупругости, когда α является тензором второго ранга. Эффективные коэффициенты Био вычисляются по формуле:

$$\alpha_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}^e}{p^e} + \phi I \quad (6)$$

Здесь ϕ – пористость модели (отношение объёма пор к общему объёму). Второе слагаемое в правой части формулы (6) возникает вследствие того, что пороупругая среда содержит не только твёрдый скелет, но и собственно поры - поэтому эффективный тензор напряжений включает в себя не только суммарные напряжения в скелете, но также и суммарное поровое давление. Вклад порового давления в σ^e равен $-\phi p^e I$.

Если вычисленный тензор эффективных коэффициентов - диагональный, то полученный эффективный материал является ортотропным (с точки зрения пороупругости). В этом случае его пороупругие свойства характеризуются тремя коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Если же эти коэффициенты совпадают с достаточной точностью, то эффективный материал - изотропный, и его пороупругие свойства характеризуются единственным коэффициентом Био α .

3. Численные результаты

Описанный алгоритм был реализован численно в виде исследовательской программы с использованием CAE Fidesys. Для тестирования разработанной программы были проведены модельные расчёты на простейшей модели пористого материала - кубе со сферической полостью в центре (рис. 1). На данной модели проводились три серии расчётов эффективного коэффи-

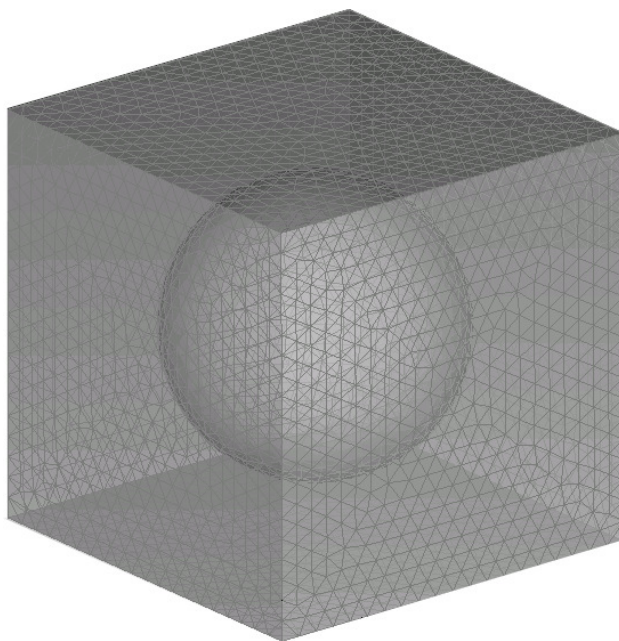


Рис. 1: Конечноэлементная сетка на модели пористой среды

циента Био: для значений коэффициента Пуассона материала в 0.2, 0.3 и 0.4. Во всех трёх сериях исследовалась зависимость эффективного коэффициента Био от пористости, которая варьировалась от 5% до 30%. Результат каждого численного расчёта сравнивался с коэффициентом Био, вычисленным по формуле 1. Модуль объёмного сжатия сплошного материала (минерала) был известен, а модуль объёмного сжатия "сухого" скелета оценивался численно, с помощью многократно оттестированного и апробированного программного модуля "Фидесис Композит" в составе САЕ "Фидесис". Результаты сравнения показаны на графиках на рис. 2. Графики зависимости коэффициента Био, полученного численно, от пористости материала изображены прерывистой чёрной линией, полученного аналитически - сплошной зелёной линией. Как видно из графиков, численные и аналитические результаты совпадают с хорошей точностью. Погрешность составляет не более 5%. Приведённые результаты позволяют утверждать о корректности разработанного алгоритма и исследовательской программы.

В отличие от аналитической оценки по формуле (1), численный расчёт с помощью вышеописанного алгоритма позволяет вычислить эффективный коэффициент Био в случаях, когда горная порода, к примеру, состоит из нескольких минералов с разным модулем объёмного сжатия - или когда пороупругие свойства среды получаются анизотропными вследствие формы пор. Было рассмотрено усложнение модели, представленной на рис. 1 - вместо сферической в центре куба располагалась пора в форме вытянутого вдоль оси X эллипсоида вращения, как показано на рис. 3. Для данной усложнённой модели проведены две серии расчётов (для пористостей 20% и 30%). Эффективный материал получился ортотропным с существенной анизотропией. Исследовалась зависимость коэффициентов Био α_y (либо α_z) и α_x от соотношения полуосей эллипсоида. Графики для материала с пористостью 20% показаны на рис. 4. График для коэффициентов α_y и α_z показан чёрной штриховой линией с коротким штри-

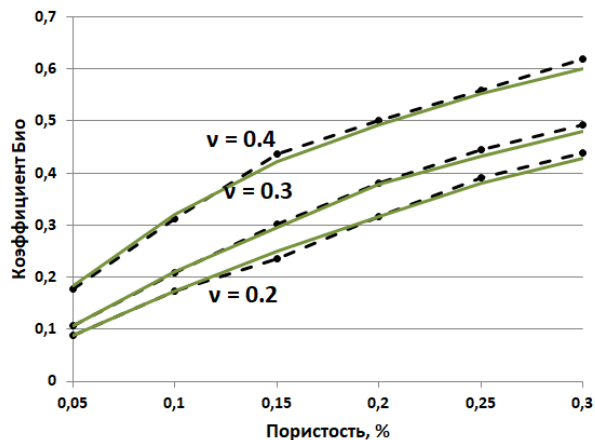


Рис. 2: Графики зависимости эффективного коэффициента Био от пористости

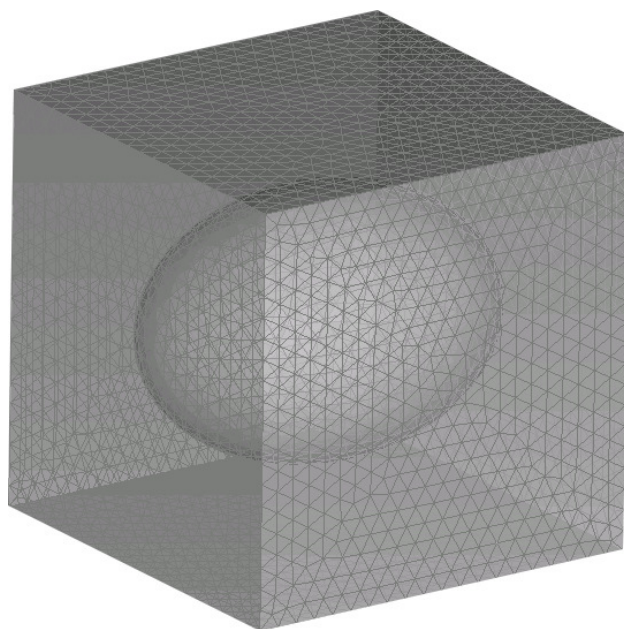


Рис. 3: Модель пористой среды с порами в форме вытянутого эллипсоида

хом, для коэффициента α_x - синей штриховой линией с длинным штрихом. Зелёной линией изображена величина коэффициента Био изотропной модели с такой же пористостью. При увеличении эллиптичности (т.е. отношения большой полуоси к малым) эллипсоида α_y и α_z монотонно и практически линейно увеличиваются, α_x - уменьшается. При максимальной эллиптичности (порядка 1,55) отношение больших коэффициентов Био к меньшему составляет около 1,17 - что является довольно существенной анизотропией.

На рис. 5 представлен аналогичный график для пористости 30%. Линии для эффективных коэффициентов Био выглядят, как и на предыдущем графике. При максимальной эллиптичности (порядка 1,3) отношение коэффициентов Био α_y и α_z к α_x составляет примерно 1,11. Можно сделать вывод, что "вытягивание" поры вдоль одной оси при сохранении пористости не оказывает существенного влияния на средний коэффициент Био: эффективный коэффициент Био в направлении "вытягивания" уменьшается, но в то же самое время увеличиваются коэффициенты в двух других направлениях.

Также был рассмотрен ещё один вариант формы поры - не вытянутый, а сплюснутый в

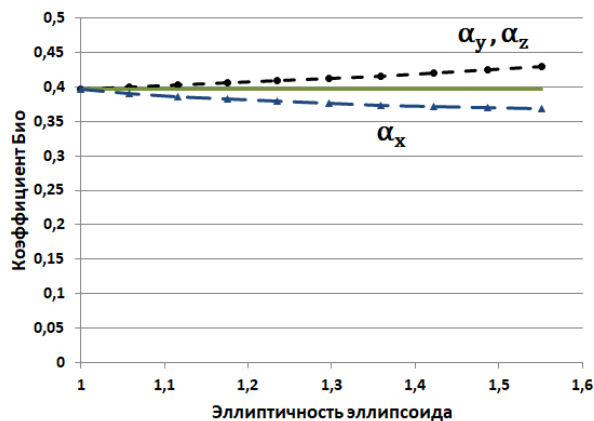


Рис. 4: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме вытянутого эллипсоида для пористости 20%

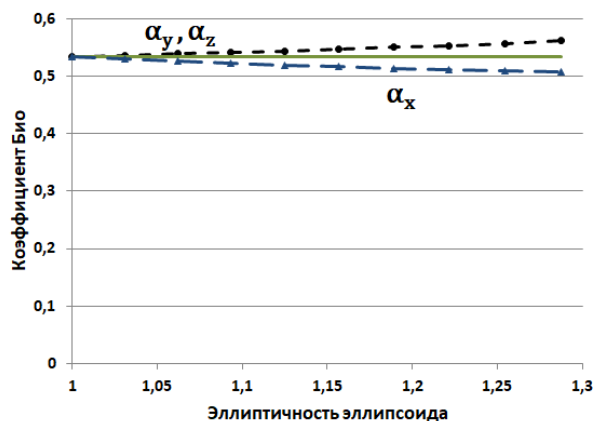


Рис. 5: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме вытянутого эллипсоида для пористости 30%

направлении оси X эллипсоид вращения. Для такой формы поры также проведены две серии расчётов (для пористостей 20% и 30%) с целью исследования зависимости эффективных коэффициентов Био от соотношения полуосей эллипсоида. Эффективный материал аналогично получился ортотропным с существенной анизотропией. Графики для пористости 20% показаны на рис. 6. Как видно из графиков, при увеличении эллиптичности поры от единицы до примерно 2,5 эффективный коэффициент Био α_x увеличивается весьма существенно, почти в полтора раза. Коэффициенты α_y и α_z при этом сначала незначительно уменьшаются (примерно на 3%), а при дальнейшем увеличении эллиптичности начинают расти и даже превышают свои значения, наблюдаемые для поры сферической формы (изотропный случай).

На рис. 7 представлен аналогичный график для пористости 30%. Линии для эффективных коэффициентов Био выглядят аналогично предыдущему графику. При увеличении эллиптичности поры от единицы до примерно 1,65 эффективный коэффициент Био α_x увеличивается примерно на четверть. Коэффициенты α_y и α_z при этом также сначала незначительно уменьшаются, а при дальнейшем увеличении эллиптичности начинают расти и почти достигают до своих значений, наблюдаемых при сферической форме поры (изотропный случай). Можно сделать вывод, что "сжатие" поры вдоль одной оси при сохранении пористости увеличивает средний коэффициент Био: эффективный коэффициент Био в направлении "сжима-

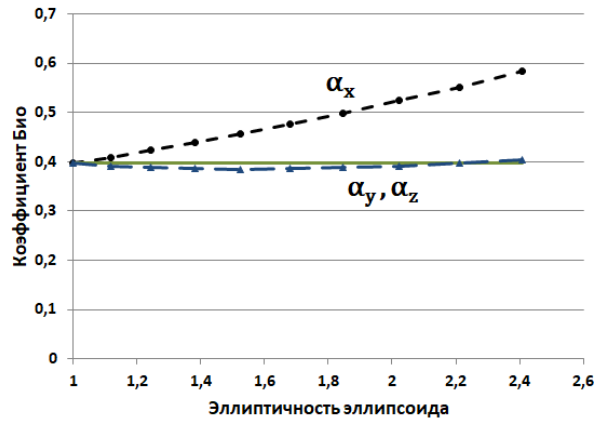


Рис. 6: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме сплюснутого эллипсоида для пористости 20%

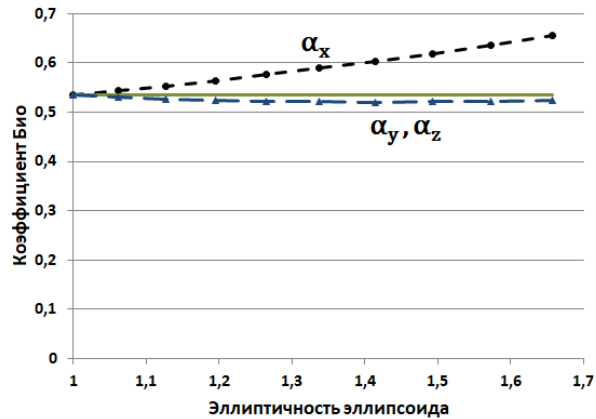


Рис. 7: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме сплюснутого эллипсоида для пористости 30%

ния" существенно увеличивается, при этом коэффициенты в двух других направлениях сначала незначительно уменьшаются, а при дальнейшем "сжатии" и вовсе начинают расти.

В целом, приведённые результаты показывают возможность возникновения существенной анизотропии в пороупругих характеристиках пористой среды при геометрической анизотропии порового пространства. Неучёт такой анизотропии при моделировании пористой среды может отрицательно сказаться на точности результатов численных расчётов.

4. Заключение

В статье представлен разработанный алгоритм численной оценки эффективного коэффициента Био пористой среды (горной породы). Алгоритм реализован с помощью метода конечных элементов в виде исследовательской программы, использующей отечественную САЕ-систему "Фидесис". Проведена верификация программы путём сравнения вычисленных эффективных коэффициентов Био с аналитической формулой на простейшей модели ячейки пористой среды в виде куба со сферической полостью в центре. Сравнение с аналитическим решением показало хорошую точность, погрешность составляет не более 5% для разных пористостей и разных коэффициентов Пуассона материала. После верификации проведено ис-

следование эффективных коэффициентов Био для усложнённой модели пористой среды, в которой пора имеет форму эллипсоида. Продемонстрирована существенная анизотропия вычисленных эффективных пороупругих свойств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vershinin A.V. Poroelastoplastic modeling of a borehole stability under small and finite strains using isoparametric spectral element method // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2022. - Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01117-4>
2. Yalaev T.R., Bayuk I.O. Reconstruction of elastic properties and thermal conductivity of solid materials from their small fragments // *International Journal of Engineering Science*, V. 144, 2019. - Article ID: 103128.
3. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Composite Structures*, V. 131, 2015. – P. 25–36.
4. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Advances in Engineering Software*, V. 86, 2015. – P. 80–84.
5. Yakovlev M.Ya., Tanasevich P.S., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys // *AIP Conference Proceedings*, V. 2509, Article ID 020210. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0084835>
6. Muraev A.A., Tatoyan A.D., Dolgalev A.A., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya, Ivanov S.Yu, Konovalov D.A., Petrovsky K.A., Levin V.A. A sensitivity study by finite element analysis for the abutment-implant-bone system // *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, V. 10, I. 1, 2022. - P. 1-20.
7. Stefanov Yu P., Bakeev R.A., Rebetsky Yu L., Kontorovich V.A. Structure and formation stages of a fault zone in a geomedium layer in strike-slip displacement of the basement // *Physical Mesomechanic*, V. 17, I. 3, 2014. - P. 204-215.
8. Vladimir Levin, Ignatiy Vdovichenko, Anatoly Vershinin, Maksim Yakovlev, Konstantin Zingerman. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case [Электронный ресурс] // *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2016, Article ID 9010576, 10 pages, 2016. – Режим доступа: <https://www.hindawi.com/journals/mse/2016/9010576/>
9. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // *Letters on Materials*, Vol. 7, Iss. 4, 2017. – P. 452–454.
10. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // *Чебышевский сборник*, том 18, №3, 2017. – С. 316–329.

11. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я., Курденкова Е.О., Немтинова Д.В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью САЕ Fidesys // Чебышёвский сборник. Т. 20, №2, 2019. – С. 528–541.
12. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158, № 1, Article ID 012094, 2016. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/meta>
13. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>
14. Kozlov V.V., Komolova E.D., Kartsev M.A., Filatova A.V. Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2022. - Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>
15. Wendt A.S., Bayuk I.O., Covey-Crump S.J., Wirth R., Lloyd G. E. An experimental and numerical study of the microstructural parameters contributing to the seismic anisotropy of rocks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth, V. 108, I. B8, 2003. - Article ID: 187823-MS.
16. Yarushina V.M., Podladchikov Y.Y., Wang L.H. Model for (De)Compaction and Porosity Waves in Porous Rocks Under Shear Stresses // Journal of Geophysical Research: Solid Earth, V. 125, I. 8, 2020. - Article ID: e2020JB019683.
17. Yakovlev M., Konovalov D. Multiscale geomechanical modeling under finite strains using finite element method // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2022. - Режим доступа: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00161-022-01107-6>
18. Yakovlev M.Ya., Bystrov I.D., Zingerman K.M., Levin V.A. Numerical Simulation of the Pore Pressure Influence on the Effective Mechanical Properties of Rocks Using CAE Fidesys // AIP Conference Proceedings, V. 2509, Article ID 020209. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0084834>
19. M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid (I. Low frequency range, II. Higher frequency range) // Journal of the Acoustical Society of America, V. 28, 1956. – P. 168-181.
20. M. Biot, D. G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation // Journal of Applied Mechanics, V. 24, 1957. – P. 594–601.
21. M. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics, V. 26, I. 2, 1955. – P. 182–185.
22. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

REFERENCES

1. Vershinin, A.V. 2022 “Poroelastoplastic modeling of a borehole stability under small and finite strains using isoparametric spectral element method” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01117-4>

2. Yalaev, T.R. Bayuk, I.O. 2019, “Reconstruction of elastic properties and thermal conductivity of solid materials from their small fragments”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 144, available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103128/>
3. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya. 2015, “Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains”, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 25–36.
4. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M., Sboychakov, A.M., Yakovlev, M.Ya. 2015, “Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 86, pp. 80–84.
5. Yakovlev, M.Ya., Tanasevich, P.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A. 2022, “Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys”, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2509, available at: <https://doi.org/10.1063/5.0084835>
6. Muraev, A.A., Tatoyan, A.D., Dolgalev, A.A., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya, Ivanov, S.Yu, Konovalov, D.A., Petrovsky, K.A., Levin, V.A. 2022, “A sensitivity study by finite element analysis for the abutment-implant-bone system”, *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, Vol. 10, no. 1, pp. 1-20.
7. Stefanov, Yu P., Bakeev, R.A., Rebetsky, Yu L., Kontorovich, V.A. 2014, “Structure and formation stages of a fault zone in a geomedium layer in strike-slip displacement of the basement”, *Physical Mesomechanic*, Vol. 17, no. 3, pp. 204-215.
8. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya., Zingerman, K.M. 2016, “Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case”, *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2016, available at: <https://doi.org/10.1155/2016/9010576>
9. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Y., Zingerman, K.M. 2017, “An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials”, *Letters on Materials*, Vol. 7, no. 4, pp. 452–454.
10. Konovalov, D.A., Yakovlev, M.Ya. 2017, “Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 18, no. 3, pp. 316–329.
11. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Yakovlev, M.Ya., Kurdenkova, E.O., Nemtinova, D.V. 2019, “Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 20, no. 2, pp. 528–541.
12. Vdovichenko, I.I., Yakovlev, M.Ya., Vershinin, A.V., Levin, V.A. 2016, “Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems”, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 158, no. 1, available at: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012094>
13. Fidesys LLC official website: <http://cae-fidesys.ru/>
14. Kozlov, V.V., Komolova E.D., Kartsev M.A., Filatova A.V. 2022 “Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>

15. Wendt A.S., Bayuk, I.O., Covey-Crump S.J., Wirth R., Lloyd G.E. 2003, “An experimental and numerical study of the microstructural parameters contributing to the seismic anisotropy of rocks”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 108, no. B8, available at: <https://doi.org/10.1029/2002JB001915>
16. Yarushina, V.M., Podladchikov, Y.Y., Wang L.H. 2020, “Model for (De)Compaction and Porosity Waves in Porous Rocks Under Shear Stresses”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 125, no. 8, available at: <https://doi.org/10.1029/2020JB019683>
17. Yakovlev, M.Ya., Konovalov, D.A. 2022, “Multiscale geomechanical modeling under finite strains using finite element method”, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01107-6>
18. Yakovlev, M.Ya., Bystrov, I.D., Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2022, “Numerical Simulation of the Pore Pressure Influence on the Effective Mechanical Properties of Rocks Using CAE Fidesys”, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2509, available at: <https://doi.org/10.1063/5.0084834>
19. Biot M.A. 1956, “Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid (I. Low frequency range, II. Higher frequency range)”, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, pp. 168-181.
20. Biot M.A., Willis D.G. 1957, “The elastic coefficients of the theory of consolidation”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 594–601.
21. Biot M.A. 1955, “Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, no. 2, pp. 182–185.
22. Lurie, A.I. 1990, *Nonlinear theory of elasticity*, Amsterdam, North-Holland

Получено: 11.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-394-404

К 85-летию Ашота Енофовича Устяна

Н. М. Добровольский, Е. В. Манохин, И. В. Добрынина, В. Н. Чубариков,
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена 85-летию профессора Ашота Енофовича Устяна.

В работе приводятся факты из биографии юбиляра. Даются сведения о научной работе А. Е. Устяна. Уделяется достаточное место организационно-педагогической деятельности профессора А. Е. Устяна. Приводятся сведения о наградах и поощрениях А. Е. Устяна за его плодотворную научную и педагогическую деятельность.

Ключевые слова: М. Д. Гриндлингер, А. Е. Устян, алгоритмические проблемы теории полугрупп, проблема равенства слов, проблема вложимости полугрупп в группы.

Библиография: 43 названия.

Для цитирования:

Н. М. Добровольский, Е. В. Манохин, И. В. Добрынина, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. К 85-летию Ашота Енофовича Устяна // Чебышевский сборник, 2021, т. 23, вып. 4, с. 394–404.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-394-404

On the 85th anniversary of Ashot Enofovich Ustyan

N. M. Dobrovolsky, E. V. Manokhin, I. V. Dobrynina, V. N. Chubarikov,
N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia (Moscow).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: chev@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

This work is dedicated to the 85th anniversary of Professor Ashot Enofovich Ustyan.

The paper presents facts from the biography of the hero of the day.

Information about the scientific work of A. E. Ustyan is given.

Sufficient space is given to the organizational and pedagogical activities of Professor A. E. Ustyan.

The information about awards and incentives of A. E. Ustyan for his fruitful scientific and pedagogical activity is given.

Keywords: M. D. Grindlinger, A. E. Ustyan, algorithmic problems of semigroup theory, the problem of word equality, the problem of embeddability of semigroups into groups.

Bibliography: 43 titles.

For citation:

N. M. Dobrovolsky, E. V. Manokhin, I. V. Dobrynina, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, 2022, "On the 85th anniversary of Ashot Enofovich Ustyan", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 394–404.



Ашот Енофович Устян родился 1 сентября 1937 года в селе Каваклук (с 1948 по 1996 годы – Агараки, с 1996 года – Амжикухуа) Гудаутского района Абхазской АССР.

С 1945 по 1956 учился в Агаракской средней школе, после окончания которой работал садоводом в Агараки. Позднее работал на Астраханском судостроительном заводе, усиленно изучал русский язык на рабфаке в Астрахани, куда переехал в 1956 году. Днем работал на судостроительном ремонтном заводе имени Карла Маркса, был учеником трубопроводчика, а вечером посещал курсы. В 1958 году А. Е. Устян поступил на физико-математический факультет Астраханского педагогического института им. С. М. Кирова, который закончил в 1963 году, квалификация – учитель математики и физики. После окончания института работал учителем математики в Криво-Бузанской средней школе, а затем в Агаракской средней школе.

В 1966 году Ашот Енофович поступил в аспирантуру кафедры высшей алгебры Ивановского государственного педагогического института им. Д. А. Фурманова. Его научным руководителем стал доцент Мартин Давидович Гриндлингер.

В 1968 году в связи с переходом научного руководителя М. Д. Гриндлингера в Тульский государственный педагогический институт (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого А. Е. Устян переведен в аспирантуру того же института, которую успешно закончил в 1970 году. Его учителями становятся не только профессор М. Д. Гриндлингер, но и декан факультета И. И. Гайдуков.

После окончания аспирантуры Ашот Енофович работает ассистентом кафедры высшей алгебры и геометрии ТГПИ им. Л. Н. Толстого, в 1973 году — заместитель декана математического факультета, в 1974 году — старший преподаватель кафедры алгебры, с 1977 года — декан математического факультета. В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые алгоритмические вопросы в полугруппах». В 1979 году присвоено ученое звание доцента, в 1993 году получил должность профессора, а в 1995 году — звание профессора.

С первых дней работы в качестве декана А. Е. Устян особое внимание уделял созданию системы подготовки кадров высшей квалификации для математического факультета. Под его руководством началось сотрудничество с выдающимися учеными Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, стали организовываться и проводиться конференции международного уровня, выпускаются математические журналы. Так, на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого проходили международные конференции по современным проблемам алгебры и теории чисел, которые неоднократно поддерживались грантами РФФИ, выпускались журналы «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп», «Чебышевский сборник», последний в настоящее время получил международное признание.

Благодаря организаторскому таланту Ашота Енофовича преподавателями факультета защищено десять докторских диссертаций: шесть — по физико-математическим наукам

(В. Н. Безверхний, Н. М. Добровольский, С. А. Пихтильков, И. В. Добрынина, И. В. Денисов, И. Н. Балаба) и четыре – по педагогических наукам (В. В. Персианов, А. Р. Есяян, А. С. Симонов и А. Я. Фридланд).

Для привлечения на факультет увлеченных математикой студентов А. Е. Устян организует юношескую математическую школу. Принимает самое активное участие в проведении областного этапа Всероссийской олимпиады по математике, которая в течение многих лет проходит на базе ТГПУ им. Л. Н. Толстого, тесно сотрудничает с органами образования.

Являясь 33 года бессменным деканом факультета, с 1977 года по 2010 год, Ашот Енофович Устян внес значительный вклад в организацию математического образования в Тульской области. Он активно вел методическую работу с учителями математики Тульской области и огромную работу по профориентации школьников, его имя известно во всех школах Тулы и области.

По признанию самого Ашота Енофовича, сложилось так, что везде, куда бы он ни приезжал, открывал школы. В Астраханской области Устян А.Е. обратил внимание, что у председателя колхоза, сельсовета и секретаря парткома не было образования, и сразу обратился с предложением организовать вечернюю школу.

В 2001 году по инициативе Ашота Енофовича Устяна в ТГПУ им. Л.Н.Толстого была создана Воскресная армянская школа. Целью создания явилось изучение истории отношений русского и армянского народов, взаимопроникновение двух культур, изучение армянского языка и литературы. "Люди должны друг друга понимать, общие интересы одинаковы: доброта, честность, порядочность. Это все должно соблюдаться, но и должно воспитываться. Мы стараемся воспитывать эти черты." — так считает Устян А. Е.

Научная деятельность А. Е. Устяна, в первую очередь, тесно связана с алгоритмическими проблемами теории полугрупп. Им проводились исследования основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных полугрупп K , где Ашот Енофович доказал разрешимость проблемы равенства слов и выяснил, когда в конечно определенных полугруппах класса K проблема равенства слов неразрешима. Решил проблему изоморфизма и исследовал разрешимость различных уравнений в конечно определенных полугруппах класса K , а также изучил свойства левой и правой делимости, которые связаны с проблемой вложимости полугрупп в группы. Исследуя связь между проблемой вхождения и проблемой равенства слов, установил, что в полугруппах из разрешимости проблемы вхождения не следует разрешимость проблемы равенства слов, что явилось научным достижением, поскольку в группах из разрешимости проблемы вхождения следует разрешимость проблемы равенства слов.

А. Е. Устяном совместно с В. Н. Безверхним получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием $C'(16)$ на группы $C(6)$, $C(4)&T(4)$ и $C(3)&T(6)$.

А. Е. Устян и В. Н. Безверхний изучали некоторые классы полугрупп Артина. Ими введены понятия полугрупп Артина большого, экстрабольшого типов, а также полугрупп Артина с древесной структурой и обобщенных древесных структур. Доказано инъективное вложение этих полугрупп в соответствующие им группы Артина и разрешимость проблемы сопряженности слов в данных классах полугрупп.

В настоящее время Ашот Енофович является исполнителем рабо по гранту РФФИ «Исследование алгоритмических проблем в группах Артина и Кокстера».

А. Е. Устян особое внимание уделял истории математического факультета ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Большое историческое исследование выполнено по анализу учебно-методической, научной и общественной деятельности кафедр факультета и каждого члена коллектива. Ряд работ посвящен научным школам факультета и их руководителям.

Стоит отметить и учебные пособия по алгебре [10]–[14], ряд которых имеет гриф УМО по классическому университетскому образованию.

Десятки математических трудов – таков вклад Ашота Енофовича в научную копилку университета. Вот лишь некоторые из них: [1]–[42].

Ашот Енофович Устьян пользуется огромным уважением и любовью, опыт талантливого организатора, ученого и педагога востребован и сегодня. Его деятельность имеет заслуженное признание.

Научные и педагогические успехи А. Е. Устьяна отмечены рядом поощрений и наград:

1. Медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени.
2. Медаль «Лучший Педагог России».
3. Медаль «Ветеран труда».
4. Значок «Почетный работник высшего профессионального образования РФ».
5. Значок «Отличник народного просвещения».
6. Значок «За отличные успехи в работе» в области высшего образования СССР.
7. Почетные грамоты различных уровней.

Свой юбилей Ашот Енофович встречает полным энтузиазма, желаем ему здоровья, счастья, благополучия и творческих успехов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устьян А. Е. Примеры полугрупп с неразрешенной проблемой тождества слов // Ученые записки математических кафедр. Тула, 1970.
2. Устьян А. Е. О проблеме изоморфизма для конечно определенных полугрупп // Ученые записки математических кафедр. Тула, 1970.
3. Устьян А. Е. О связи между проблемой вхождения и проблемой тождества в полугруппах // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, 1972.
4. Устьян А. Е. К проблеме тождества слов для некоторого класса конечно определенных полугрупп // Сибирский математический журнал. 1972. С. 141-150.
5. Устьян А. Е. О соотношениях вида $X = XZ$ // Современная алгебра. 1974. Вып. 2.
6. Устьян А. Е. О соотношениях вида $X = AXB$ в полугруппах класса K // Современная алгебра. 1977. Вып. 6.
7. Устьян А. Е. К проблеме вхождения в моногенную подполугруппу // Современная алгебра. 1981.
8. Устьян А. Е. Проблема тождества слов для фактор-полугрупп свободных произведений // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». Тула, 1990.
9. Устьян А. Е. К проблеме левой делимости для конечно определенных полугрупп класса K // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986.
10. Устьян А. Е. Алгебра и теория чисел. – Тула, 1994. Ч. 1,2.
11. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устьян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.
12. Устьян А. Е. Алгебра и теория чисел. – Тула, 2002. Ч. 1, 2 (второе издание).
13. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Линейная алгебра. – Тула, 2009.

14. Устьян А. Е., Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Безверхняя Н. Б. Алгебра. – Тула, 2016.
15. Устьян А. Е., Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Безверхняя Н. Б. Алгебра (второе издание). – Тула, 2020
16. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщение одной теоремы Магнуса // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. № 3. С. 57-62.
17. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Гриндлингер Мартин Давидович // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. № 1-1. С. 5-8.
18. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. № 3 . С. 20-33.
19. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Об обобщённой сопряжённости слов в полугруппах Артина большого типа // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Материалы XII Международной конференции, посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2014. С. 54-55.
20. Балаба И. Н., Ваньков Б. П., Ванькова В. С., Денисов И. В., Денисова Т. Ю., Добрынина И. В., Игнатов Ю. А., Мартынюк Ю. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л., Устьян А. Е., Шулюпов В. А. Специализированный учебно-научный центр – юношеская областная математическая школа. Учебно-методическое пособие. – Тула, 2015. Том. Выпуск 1.
21. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устьян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (К 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.
22. Устьян А. Е. Об алгебраической школе М. Д. Гриндлингера // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 7-13.
23. Добрынина И. В., Устьян А. Е., Трубицын Ю. Э. К 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. № 1. С. 291-300.
24. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устьян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. К 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. № 1. С. 301-316.
25. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устьян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 4. С. 23-50.
26. Алексеев А. Ю., Артамонова Ю. Н., Богатырева Ю. И., Ваньков Б. П., Ванькова В. С., Губарева Т. В., Даниленко С. В., Добровольский Н. М., Добрынина И. В., Забелина А. В., Игнатов Ю. А., Исаева Н. М., Мартынюк Ю. М., Некрицухин А. И., Рарова Е. М., Родионова О. В., Ситникова Л. Д., Титов А. В., Устьян А. Е., Хабаров Н. Н. и др. Учебные

- программы дисциплин по выбору направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (профиль «Информационные системы и базы данных»). Учебно-методическое пособие. – Тула, 2017.
27. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О вложении полугрупп Артина в группы Артина // Университет XXI века: научное измерение. материалы научной конференции научно-педагогических работников, аспирантов и магистрантов ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2017. С. 243-245.
28. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Трубицын Ю. Э., Устьян А. Е. М. Д. Гриндлингер – основатель Тульской алгебраической школы (к 85-летию профессора) // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. № 1. С. 160-166.
29. Безверхний В. Н., Устьян А. Е., Добрынина И. В. 70-летие профессора Валерия Георгиевича Дурнева // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. № 2 (62). С. 279-297.
30. Устьян А.Е. История Тульской алгебраической школы // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. 2018. С. 380-381.
31. Устьян А. Е., Иванова Н. С. Педагогические условия активизации учебно-познавательной деятельности студентов в современных условиях информатизации образования // Разработка учебно-методического обеспечения для внедрения инновационных методов обучения при реализации ФГОС ВО. Материалы XLV научно-методической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2018. С. 380-383.
32. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. К истории математического факультета (физики и математики) ТГПУ им. Л. Н. Толстого // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. 2019. С. 223-227.
33. Устьян А. Е. К истории математического факультета (методисты) ТГПУ им. Л. Н. Толстого // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. 2019. С. 272-276.
34. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О сопряжённости слов в полугруппах Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. 2019. С. 32-33.
35. Манохин Е. В., Устьян А. Е., Кузнецов Г. В. Ученый и педагог. К 80-летию юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939-27.09.2016) // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деца. 2019. С. 355-359.

36. Устьян А. Е. К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. 2019. С. 390-393.
37. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О полугруппах Артина // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22. № 4. С. 39-49.
38. Манохин Е. В., Устьян А. Е., Кузнецов Г. В. Ученый и педагог. К 80-летию юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939-27.09.2016) // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 414-421.
39. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О равенстве и сопряженности слов в полугруппах Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 16-19.
40. Устьян А. Е. К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 396-401.
41. Устьян А. Е., Угаров А. С., Добрынина И. В. Владимир Николаевич Безверхний – руководитель научной школы «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп» // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 2020. С. 401-405.
42. Устьян А. Е., Добрынина И. В., Трубицын Ю. Э., Угаров А. С., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. 80-летие профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 3. С. 317-335.
43. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Чубариков В. Н. Ашот Енофович Устьян // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. №3. С. 116-120.

REFERENCES

1. Ustyan A. E., 1970, "Examples of semigroups with an unresolved word identity problem" // Scientific notes of mathematical departments, Tula.
2. Ustyan A. E., 1970, "On the problem of isomorphism for finitely defined semigroups" // Scientific notes of mathematical departments, Tula.
3. Ustyan A. E., 1972, "On the connection between the problem of occurrence and the problem of identity in semigroups" // Questions of the theory of groups and semigroups, Tula.
4. Ustyan A. E., 1972, "On the problem of word identity for a certain class of finitely defined semigroups" // Siberian Mathematical Journal., pp. 141–150.
5. Ustyan A. E., 1974, "On relations of the form $X = XZ$ " // Modern algebra, Vol 2.

6. Ustyan A. E., 1977, "On relations of the form $X = AXB$ in semigroups of the K class" // Modern algebra, Vol. 6.
7. Ustyan A. E., 1981, "On the problem of entering into a monogenic sub-semigroup" // Modern Algebra.
8. Ustyan A. E., 1990, "The problem of word identity for quotient semigroups of free products" // Interuniversity collection "Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups", Tula.
9. Ustyan A. E., 1986, "On the problem of left divisibility for finitely defined semigroups of K class" // Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups, Tula.
10. Ustyan A. E., 1994, Algebra and number theory. – Tula, Part 1,2.
11. Dobrovolsky N. M., Yesayan A. R., Pikhtilov S. A., Rodionova O. V., Ustyan A. E., 1999, "On an algorithm for finding optimal coefficients" // Izvestiya TulSU. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Vol. 5, iss. 1. Tula, pp. 51–71.
12. Ustyan A. E., 2002, "Algebra and Number theory" // Tula, Part 1, 2 (second edition).
13. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2009, Linear Algebra. – Tula.
14. Ustyan A. E., Bezverkhny V. N., Dobrynina I. V., Bezverkhnyaya N. B., 2016, Algebra. – Tula.
15. Ustyan A. E., Bezverkhny V. N., Dobrynina I. V., Bezverkhnyaya N. B., 2020, Algebra (second edition). – Tula.
16. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2010, "Generalization of one Magnus theorem" // Chebyshevskii sbornik, Vol. 11, № 3, pp. 57–62.
17. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2012, "Grindlinger Martin Davidovich" // Chebyshevskii sbornik, Vol. 13. № 1-1. pp. 5–8.
18. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2013, "Generalizations of the theorems of V. Magnus and M. D. Grindlinger" // Chebyshevsky Collection, Vol. 14, № 3. pp. 20–33.
19. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2014, "On generalized conjugacy of words in large-type Artin semigroups" // Algebra and number theory: modern problems and applications. Materials of the XII International Conference dedicated to the eightieth anniversary of Professor Viktor Nikolaevich Latyshev, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, pp. 54–55.
20. Balaba I. N., Vankov B. P., Vankova V. S., Denisov I. V., Denisova T. Yu., Dobrynina I. V., Ignatov Yu. A., Martynyuk Yu. M., Rebrova I. Yu., Roschenya A. L., Ustyan A. E., Shulyupov V. A., 2015, "Specialized educational and Scientific Center - Youth Regional Mathematical School", Educational and methodical manual. –Vol. 1, Iss. 1, Tula.
21. Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Yu., Ustyan A. E., Podsypanin F. V., Podsypanin E. V., 2015, "Tula School of Number Theory (To the 105th anniversary of Vladimir Dmitrievich Podsypanin (16.01.1910 - 11.10.1968) and the 65th anniversary of the Tula School of Number Theory)" // Algebra, Number theory and Discrete Geometry: modern problems and applications. Materials of the XIII International Conference. Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, pp. 20–85.
22. Ustyan A. E., 2015, "About the algebraic school of M. D. Grindlinger" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications. Materials of the XIII International Conference. Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, pp. 7–13.

23. Dobrynina I. V., Ustyan A. E., Trubitsyn Yu. E., 2015, "To the 75th anniversary of the Doctor of Physical and mathematical sciences, Professor Bezverhny Vladimir Nikolaevich" // *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 16. № 1. pp. 291–300.
24. Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Yu., Ustyan A. E., Podsypanin F. V., Podsypanin E. V., 2015, "To the 105th anniversary of Vladimir Dmitrievich Podsypanin (16.01.1910 - 11.10.1968)" // *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 16, № 1, pp. 301–316.
25. Bezverkhny V. N., Bezverkhnyaya N. B., Dobrynina I. V., Zinchenko O. V., Ustyan A. E., 2016, "On algorithmic problems in Coxeter groups" // *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 17, № 4, pp. 23–50.
26. Alekseev A. Yu., Artamonova Yu. N., Bogatyreva Yu. I., Vankov B. P., Vankova V. S., Gubareva T. V., Danilenko S. V., Dobrovolsky N. M., Dobrynina I. V., Zabelina A.V., Ignatov Yu. A., Isaeva N. M., Martynyuk Yu. M., Nekritsukhin A. I., Rarova E. M., Rodionova O. V., Sitnikova L. D., Titov A.V., Ustyan A. E., Khabarov N. N., etc., 2017, *Curricula of disciplines for the choice of direction 02.03.03 Mathematical support and administration of information systems.(profile "Information systems and databases")*. Educational and methodical manual – Tula.
27. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2017, "On embedding Artin semigroups into Artin groups" // *University of the XXI century: scientific dimension. materials of the scientific conference of scientific and pedagogical workers, postgraduates and undergraduates of TSPU named after L. N. Tolstoy*, pp. 243–245.
28. Bezverkhny V. N., Dobrynina I. V., Trubitsyn Yu. E., Ustyan A. E., 2017, "M. D. Grindlinger – founder of the Tula Algebraic School (to the 85th anniversary of the professor)" // *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 18. № 1. pp. 160–166.
29. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., Dobrynina I. V., 2017, "70-th anniversary of Professor Valery Georgievich Durnev" // *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 18. № 2 (62). pp. 279–297.
30. Ustyan A. E., Ivanova N. S., 2018, "Pedagogical conditions of activation of educational and cognitive activity of students in modern conditions of informatization of education" // *Development of educational and methodological support for the introduction of innovative teaching methods in the implementation of the Federal State Educational Standard. Materials of the XLV scientific and methodological conference of the teaching staff, graduate students, undergraduates, applicants of TSPU named after L. N. Tolstoy*, pp. 380–383.
31. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2019, "On the history of the Faculty of Mathematics (Physics and Mathematics) TSPU named after L. N. Tolstoy" // *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVII International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A.V. Malyshev and B. F. Skubenko*, pp. 223–227.
32. Ustyan A. E., 2019, "On the History of the Faculty of Mathematics (Methodologists) TSPU named after L. N. Tolstoy" // *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVII International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev and B. F. Skubenko*, pp. 272–276.

33. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2019, "On conjugacy of words in Artin semigroups" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVII International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A.V. Malyshev and B. F. Skubenko, pp. 32–33.
34. Manokhin E. V., Ustyan A. E., Kuznetsov G. V., 2019, "Scientist and teacher. To the 80-th anniversary of Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939-27.09.2016)" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Proceedings of the XVI International Conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel Dez, pp. 355–359.
35. Ustyan A. E., 2019, "To the history of L. N. Tolstoy TSPU and the Faculty of Mathematics" // Algebra, number theory and discrete Geometry: modern problems, applications and problems of history. Proceedings of the XVI International Conference dedicated to the 80-th anniversary of the birth of Professor Michel Dez, pp. 390–393.
36. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2019, "On semigroups of a Picture" // Fundamental and applied Mathematics, Vol. 22., № 4., pp. 39–49.
37. Manokhin E. V., Ustyan A. E., Kuznetsov G. V., 2019, "Scientist and teacher. To the 80th anniversary of Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939-27.09.2016)" // Chebyshevskii Sbornik, Vol. 20., № 4., pp. 414–421.
38. Bezverkhny V. N., Ustyan A. E., 2020, "On equality and conjugacy of words in Artin semigroups" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVIII International Conference dedicated to the 100-th anniversary of the birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin. Tula, pp. 16–19.
39. Ustyan A. E., 2020, "To the history of L. N. Tolstoy TSPU and the Faculty of Mathematics" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVIII International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin. Tula, pp. 396–401.
40. Ustyan A. E., Ugarov A. S., Dobrynina I. V., 2020, "Vladimir Nikolaevich Bezverkhny – head of the scientific school "Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups" " // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials of the XVIII International Conference dedicated to the 100-th anniversary of the birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin, Tula, pp. 401–405.
41. Ustyan A. E., Dobrynina I. V., Trubitsyn Yu. E., Ugarov A. S., Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Y., 2020, "80-th anniversary of Professor Bezverhniy Vladimir Nikolaevich" // Chebyshevskii Sbornik, Vol. 21, № 3, pp. 317–335.
42. Bezverkhny V. N., Dobrynina I. V., Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Yu., Chubarikov V. N., 2012, "Ashot Enofovich Ustyan" // Chebyshevskii Sbornik, Vol. 13, № 3, pp. 116–120.
43. Ustyan A.E., 2018, "History of the Tula algebraic school" // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications. Materials of the XV International Conference dedicated to the centenary of the birth of Professor Nikolai Mikhailovich Korobov, pp. 380–381.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-405-420

Гвоздев Александр Евгеньевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ТГПУ им. Л. Н. Толстого — яркий представитель научной школы сверхпластичности металлических систем М. Х. Шоршорова

А. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, С. Н. Кутепов, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин,
О. В. Кузовлева, И. В. Минаев, А. Н. Чуканов, Д. В. Малий, П. Н. Медведев,
Ю. С. Дорохин, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ansergueev@gmail.com

Ушаков Михаил Витальевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tulaumv@yandex.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tulaumv@yandex.ru

Клементьев Денис Сергеевич — ассистент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Калинин Антон Алексеевич — заместитель директора по коммерческим вопросам издательства Тульского государственного университета, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: antony_ak@mail.ru

Минаев Игорь Васильевич — кандидат технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ivminaev1960@yandex.ru

Малий Дмитрий Владимирович — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Дорохин Юрий Сергеевич — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobvol@tspu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Александр Евгеньевич Гвоздев изучал фундаментальное научное направление прикладного значения, связанное с разработкой теории сверхпластичности металлических сплавов при фазовых превращениях и её применение для производства заготовок режущего инструмента из порошковой быстрорежущей стали. На основе предложенного комплексного подхода выявил природу экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах традиционного металлургического передела и порошкового способа производства с различной дисперсностью карбидных фаз, ковочных сплавов на основе алюминия, металлического сплава меди с цинком и др. при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях перед фазовыми превращениями I и II рода.

Ключевые слова: сверхпластичность, фазовые превращения, пластичность, сопротивление деформации, быстрорежущие стали, температурно-скоростные параметры, современное состояние.

Библиография: 100 названий.

Для цитирования:

А. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, С. Н. Кутепов, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин, О. В. Кузвлева, И. В. Минаев, А. Н. Чуканов, Д. В. Малий, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Гвоздев Александр Евгеньевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ТГПУ им. Л. Н. Толстого – яркий представитель научной школы сверхпластичности металлических систем М. Х. Шоршорова // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 405–420.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-405-420

**Gvozdev Alexander Evgenievich, Doctor of Technical Sciences,
Professor, Chief Researcher of the Tula State Lev Tolstoy
Pedagogical University — a bright representative of the scientific
school of superplasticity of metal systems M. H. Shorshorov**

A. N. Sergeev, M. V. Ushakov, S. N. Kutepov, D. S. Klementyev, A. A. Kalinin, O. V. Kuzovleva,
I. V. Minaev, A. N. Chukanov, D. V. Maliy, P. N. Medvedev, Y. S. Dorokhin, N. M. Dobrovolsky,
N. N. Dobrovolsky

Sergeev Aleksander Nikolaevich — doctor of pedagogical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ansergueev@gmail.com

Ushakov Mikhail Vitalievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tulaumv@yandex.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Klement'yev Denis Sergeevich — assistant, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Kalinin Anton Alekseevich — deputy director for commercial issues of the Tula State University Publishing House, Tula State University (Tula).

e-mail: antony-ak@mail.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Minaev Igor Vasilyevich — candidate of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ivminaev1960@yandex.ru

Chukanov Aleksandr Nikolaevich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Maliy Dmitry Vladimirovich — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Medvedev Pavel Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Dorokhin Yuriy Sergeevich — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: avangard-tula@yandex.ru

Dobrovolskii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Dobrovolskii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

Alexander Evgenievich Gvozdev studied a fundamental scientific direction of applied importance related to the development of the theory of superplasticity of metal alloys during phase transformations and its application for the production of cutting tool blanks from powder high-speed steel. Based on the proposed integrated approach, he revealed the nature of extreme effects and causes of changes in strength and plasticity in heterophase metal systems of traditional metallurgical processing and powder production method with different dispersion of carbide phases, forging alloys based on aluminum, copper-zinc metal alloy, etc. under thermomechanical influences and in pre-transition states before phase transformations of the I and II kind.

Keywords: superplasticity, phase transformations, plasticity, deformation resistance, high-speed steels, temperature-velocity parameters, current state.

Bibliography: 100 titles.

For citation:

A. N. Sergeev, M. V. Ushakov, S. N. Kutepov, D. S. Klementyev, A. A. Kalinin, O. V. Kuzovleva, I. V. Minaev, A. N. Chukanov, D. V. Maliy, P. N. Medvedev, Y. S. Dorokhin, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2022, “Gvozdev Alexander Evgenievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University — a bright representative of the scientific school of superplasticity of metal systems M. H. Shorshorov”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 405–420.



Гвоздев Александр Евгеньевич,
доктор технических наук, профессор
(16.12.1954 г. – 13.05.2022 г.)

1. Биографический очерк

Гвоздев Александр Евгеньевич родился 16 декабря 1954 года в г. Евпатория Крымской области.

Поступил в 1972 году в Тульский политехнический институт, который с отличием окончил в 1977 году по специальности «Материаловедение, оборудование и технология термической обработки металлов» и был распределён в лабораторию ОНИЛ-5 кафедры «Технология штамповочного производства» где работал инженером, младшим научным сотрудником, ассистентом. После окончания аспирантуры в Институте металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Сверхпластичность и структурообразование стали Р6М5 при диффузионном фазовом превращении и разработка технологии получения заготовки». С 1990 г. был ассистентом кафедры «Вычислительная математика». В 1993 году ему было присвоено звание доцента по данной кафедре. С 1993 года – заместитель декана факультета систем точного машиностроения. С 1995 по 2003 гг. работал начальником научно- исследовательской части Тульского государственного университета. В 1997 году успешно защищает докторскую диссертацию на тему «Деформирование и структурообразование быстрорежущих сталей в условиях сверхпластичности». В 2004 г. Александру Евгеньевичу было присвоено учёное звание профессора по кафедре «Физика металлов и материаловедение».

В 2000 году Александр Евгеньевич был избран по конкурсу на должность заведующего кафедрой «Физика металлов и материаловедение», которой руководил до сентября 2007 года. Кафедра за этот период установила сотрудничество с ИМЕТ им. А.А. Байкова РАН, МАТИ, МАИ, ЦНИИ Чермет им. И.П. Бардина, Объединённым институтом ядерных исследований, МИСиС и Берлинским техническим университетом.

Начиная с 2008 года работал доцентом кафедры «Производство и ремонт ракетно-артиллерийского вооружения» Тульского артиллерийского инженерного института.

В 2013 году Александр Евгеньевич был принят на работу профессором в Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого и, благодаря своему опыту, знаниям и целеустремленности в 2017 году был избран главным научным сотрудником кафедры технологии и сервиса и проработал в данной должности более 5 лет.

Александр Евгеньевич Гвоздев – дипломант всесоюзного конкурса на соискание премий им. Д.К. Чернова. Лауреат премии им. С.И. Мосина, первой премии «Наследники Демидовых» им. Н. Демидова. Награжден юбилейным знаком «За заслуги перед университетом» и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ. Много лет работал членом экспертного совета ВАК РФ по металлургии и металлостроению. Являлся членом Академии проблем качества РФ и Ассоциации металлургов России. Входил в состав двух диссертационных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций. Преподаватель высшей школы. В 2018 году был награжден национальной премией «Профессор года». Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. Ветеран труда.

За время своей работы в ТГПУ им. Л.Н. Толстого Александр Евгеньевич стал одним из самых авторитетных научных сотрудников и преподавателей, заслужив глубокое уважение коллег и студентов.

2. Результаты научной деятельности

Одним из основных направлений научной работы А. Е. Гвоздева было фундаментальное научное направление прикладного значения, связанное с разработкой теории сверхпластичности металлических сплавов при фазовых превращениях и её применение для производства заготовок режущего инструмента из порошковой быстрорежущей стали. На основе проведенных экспериментальных исследований А. Е. Гвоздевым были получены следующие научные результаты:

1. С использованием математических методов планирования активного эксперимента на основе синтезированных точных D -оптимальных многофакторных планов пятого порядка разработаны математические модели сопротивления деформации, показателей пластичности и коэффициента скоростного упрочнения для различных схем напряженного состояния, адекватно описывающие процессы неполного горячего сверхпластического деформирования быстрорежущих сталей пониженной пластичности. На основе результатов математического моделирования и экспериментальных исследований установлены основные закономерности развития сверхпластичности при различных температурно-скоростных условиях деформирования.
2. На примере литой горячекатаной быстрорежущей стали Р6М5 и порошковой быстрорежущей стали 10Р6М5-МП определены температурно-скоростные и силовые параметры сверхпластичности труднодеформируемых гетерофазных материалов. Установлено, что при растяжении, осадке и прямом выдавливании эффект сверхпластичности в быстрорежущих сталях проявляется ниже точки A_{C1} , т. е. в предпереходном состоянии. Разработана и обоснована математические модели показателей деформируемости сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП.
3. Получены систематические данные об измерении сопротивления деформированию, характеристик пластичности и коэффициента скоростного упрочнения в интервале температур фазовых переходов от 750 до 850 °С и скоростей деформации от $1 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-2} с^{-1} , позволяющие оптимизировать процессы обработки металлов давлением в условиях сверхпластичности.
4. На основании анализа экспериментальных результатов и разработанных математических моделей показателей сверхпластичности определены оптимальные температурно-скоростные режимы сверхпластического деформирования быстрорежущих сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП при растяжении, осадке и прямом выдавливании. Установлено, что оптимальная температура сверхпластичности при растяжении стали Р6М5 составляет 825...830 °С, стали 10Р6М5-МП – 805...810 °С. Скорость деформации при сверхпластичности составляет 0,00011...0,00015 с^{-1} для стали Р6М5 и 0,00020...0,00036 с^{-1} для стали 10Р6М5-МП.
5. Выявлено, что при растяжении в условиях сверхпластичности относительное удлинение и относительное сужение стали 10Р6М5-МП выше, чем у стали Р6М5 (144 % и 97 % соответственно против 100 % и 95 %); сопротивление деформации стали 10Р6М5-МП не превышает 88 МПа, стали Р6М5 – 70 МПа; коэффициент скоростного упрочнения m при растяжении стали 10Р6М5-МП почти вдвое выше, чем у стали Р6М5 (0,42 против 0,23), что свидетельствует о более высоком уровне сверхпластичности порошковой стали по сравнению с литой горячекатаной того же состава.
6. Установлено влияние схемы напряженного состояния на оптимальные температурно-скоростные параметры сверхпластического деформирования. При переходе от растяжения к осадке и прямому выдавливанию сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП в условиях сверхпластичности скорость сверхпластической деформации смещается в сторону более высоких значений на порядок и выше, а оптимальная температура сверхпластичности смещается в сторону более низких температур (на 15...20 °С).
7. Установлено влияние нагружения в условиях сверхпластичности с постоянной и переменной скоростью деформирования на силовые характеристики и напряженно-деформированное состояние цилиндрических образцов из сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП при осадке

со степенями деформации до 80 %. Показано, что качественная картина формоизменения образцов из сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП при осадке в условиях сверхпластичности не зависит от закона нагружения. Осадка образцов из стали 10Р6М5-МП протекает при повышенных на 30 % сопротивлениях деформированию и усилиях.

8. Установлено, что разрушение быстрорежущих сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП в условиях сверхпластичности происходит путем локализации деформации в участках зарождения пор на границах матрица-карбидная фаза и их дальнейшего раскрытия в результате межзеренных и межфазных сдвигов. Порошковая сталь 10Р6М5-МП вследствие высокой дисперсности структуры имеет более длительную и стабильную стадию равномерной деформации без локализации и разрушения.
9. На основе представлений термодинамики необратимых процессов разработан и предложен физический критерий сверхпластичности как стационарного состояния процесса деформации материала. Условием развития сверхпластической деформации как фазового, так и структурного типа является минимальный уровень скорости роста эффективного упрочнения. Установлена связь условий развития сверхпластичности с наличием структурных дефектов, способствующих уширению функции распределения внутренних напряжений в области близкодействующих (вакансии и дислоцированные атомы) и далекодействующих (границы раздела) напряжений. Показано, что наибольший вклад в способность материала к сверхпластической деформации вносят межфазные границы с повышенным уровнем деформационных дефектов.
10. Проведена оценка вкладов различных механизмов деформации в развитие сверхпластичности быстрорежущих сталей Р6Мп и 10Р6М5-МП (межзеренная деформация, обеспеченная приграничным потоком вакансий по механизму Кобле; ползучесть диффузионного и дислокационного типов; межфазное и межзеренное скольжение). Скорость деформации по всем механизмам (за исключением внутриверенной дислокационной ползучести) в порошковой стали выше, чем в литой. Появление в схеме напряженного состояния сжимающих напряжений уменьшает вклад в общее формоизменение материала механизма диффузионной ползучести и повышает роль межфазного и межзеренного скольжения, также дислокационной ползучести.
11. Повышенная склонность порошковой быстрорежущей стали к сверхпластичности (по сравнению с литой горячекатаной) обусловлена формированием высокой степени дефектности межфазных (межзеренных) границ и характером объемного распределения высокодисперсных частиц фаз в структуре быстрорежущей стали с размерами зерна феррита не более 3,7. . . 4,5 мкм и карбидов не выше 0,99. . . 1,21 мкм.
12. На основе методов механической спектроскопии разработан и определен количественный критерий относительной оценки степени неравновесности поверхностей раздела в гетерофазных материалах $K_{ПР}$, вычисляемый как отношение параметра зернограничной неупругой релаксации. При сравнении сталей 10Р6М5-МП и Р6М5 в исходном состоянии значение $K_{ПР}$ равно 4; упрочняющая термическая обработка (закалка и трехкратный отпуск) приводит к снижению величины $K_{ПР}$ до 2,6, что свидетельствует о наследовании в порошковой стали исходной неравновесности.
13. Сверхпластическая деформация способствует росту дисперсности структуры за счет измельчения и сфероидизации карбидной фазы и равномерности ее распределения по объему, а также повышению однородности распределения атомов легирующих элементов (W, V, Mo, Cr) в твердом растворе. Вид напряженного состояния влияет на распределение и размеры дисперсной фазы; в наибольшей степени эффект выражен при растяжении.

14. Показано влияние дисперсности карбидной фазы на температуру «прямого» фазового перехода A_{C1} . Снижение температуры A_{C1} имеет место в исследованных быстрорежущих сталях Р6М5 и 10Р6М5-МП с карбидными выделениями размером 60...70 нм. С увеличением дисперсности карбидной фазы температура A_{C1} снижается более интенсивно. Предложена гипотеза о протекании механизма фазовой изотермической сверхпластичности, основанная на обратимости фазового перехода «феррит-аустенит».

В последние годы Александр Евгеньевич занимался изучением экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях. Александр Евгеньевич разработал комплексный подход и методику планирования, исследования и анализа экстремальных эффектов изменения характеристик прочности и пластичности труднодеформированных сталей и металлических сплавов на основе полиморфных и мономорфных металлов с применением синтеза нестандартных оптимальных планов эксперимента высоких порядков и моделирования процессов и состояний. На основе предложенного комплексного подхода выявил природу экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах традиционного металлургического передела и порошкового способа производства с различной дисперсностью карбидных фаз, ковочных сплавов на основе алюминия, металлического сплава меди с цинком и др. при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях перед фазовыми превращениями I и II рода.

За время своей научно-исследовательской деятельности, Александр Евгеньевич опубликовал, в соавторстве более 850 научных работ, из них:

1. Статьи в российских журналах, включенных в текущий перечень ВАК – 337 шт.;
2. Статьи в журналах, входящих в Web of Science и Scopus – 96 шт.;
3. Патенты и свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ – 61 шт.;
4. Монографий, учебников и учебно-методических пособий – 212 шт., и др.

Александр Евгеньевич всегда был отзывчивым, чутким и равнодушным к чужим проблемам, протягивал руку помощи нуждающимся в ней, поддерживал не только словом, но и делом. Повседневное общение с Александром Евгеньевичем приносило не только позитив, радость и заряд энергии, но и помогало каждому обогатить себя ценным опытом.

Секрет успеха доктора технических наук, профессора Гвоздева Александра Евгеньевича, заключался в его человеческой, научной и педагогической уникальности: трудолюбии, целеустремленности, обязательности, уважении ко всем окружающим, никогда не останавливаться на достигнутом и желании идти только вперед.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суворова С. О., Гвоздев А. Е. О максимуме внутреннего трения в мартенсите железоникелевых сплавов // В сб. науч. трудов: Взаимодействие дефектов кристаллической решетки и свойства металлов. – Тула, 1978. – С. 38-42.
2. Влияние деформации в условиях сверхпластичности на структуру и свойства быстрорежущих сталей / А. С. Базык, А. С. Пустовгар, М. В. Казаков, А. Е. Гвоздев // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1981. – № 3. – С. 21-24.
3. Малоотходная технология получения точных заготовок из быстрорежущих сталей с использованием эффекта сверхпластичности / А. С. Базык, М. В. Казаков, А. С. Пустовгар, А. Е. Гвоздев // Кузнечно-штамповочное производство. – 1983. – № 1. – С. 12.

4. Anwendung Der Superplastizität Für Die Umformung Gegossener Undgesinterter Schnellarbeitsstähle / M. Kh. Shorshorov, T. A. Chernyshova, A. S. Bazyk, A. E. Gvozdev, A. N. Gerasin // Neue Hütte. – 1985. – № 11. – P. 422-424.
5. Применение эффекта сверхпластичности для деформирования компактных и полученных порошковой металлургией быстрорежущих сталей / М. Х. Шоршоров, Т. А. Чернышова, А. С. Базык, А. Е. Гвоздев // Порошковая металлургия. – 1985. – С. 267.
6. Chernyshova T. A., Gvozdev A. E., Bazyk A. S. Special Features Of Failure Of R6M5 and 10R6M5-MP High-Speed Tool Steels In Superplastic Deformation // Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics. 1987. – Vol. 26. – № 7. – P. 576-580.
7. Чернышева Т. А., Гвоздев А. Е. Вклад различных механизмов деформации в сверхпластичность быстрорежущих сталей // Физика и химия обработки материалов. – 1988. – № 2. – С. 118-127.
8. Влияние сверхпластической деформации на структуру быстрорежущих сталей разной металлургической природы / Т. А., Чернышова А. Е. Гвоздев, А. С. Базык, Л. К. Болотова // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1988. – № 11. – С. 53-56.
9. Chernyshova T.A., Bazyk A.S., Gvozdev A.E. Effect Of Superplastic Deformation On The Distribution Of Alloying Elements In Steels R6M5 And 10R6M5-MP // Metal Science and Heat Treatment. – 1988. – Vol. 30. – № 5-6. – P. 444-449.
10. Чернышева Т. А., Гвоздев А. Е., Базык А. С. Влияние сверхпластической деформации при различных схемах напряженного состояния на структуру быстрорежущих сталей // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1989. – № 5. – С. 30-34.
11. Influence Of Superplastic Deformation On The Structure Of High-Speed Steels Of Different Metallurgical Nature / T. A. Chernyshova, A. E. Gvozdev, A. S. Bazyk, L. K. Bolotova // Metal Science and Heat Treatment. – 1989. – Vol. 30. – № 11-12. – P. 867-872.
12. Chernyshova T.A., Gvozdev A.E., Bazyk A.S. Effect Of Superplastic Deformation Using Different Stress Modes On The Structure Of High-Speed Steels // Metal Science and Heat Treatment. – 1989. – Vol. 31. – № 5-6. – P. 352-357.
13. Гончаренко И. А., Гвоздев А. Е. Механизмы сверхпластичности и структурообразования в гетерофазных металлических материалах при фазовых переходах // Металлы. – 1992. – № 3. – С. 166-171.
14. Гвоздев А. Е. Производство заготовок быстрорежущего инструмента в условиях сверхпластичности. – М.: Машиностроение, 1992. – 176 с.
15. Гвоздев А.Е. Изменение предела текучести сплава 40Н24 при низкотемпературном деформировании // Вопросы оборонной техники. Серия 13: Комплексная автоматизация производства и роторные линии. – 1993. – № 3-4 (86-87). – С. 29-30.
16. Гвоздев А. Е. Математические модели пластичности и прочности стали 10P6M5-MП для ресурсосберегающих технологий, реализуемых на АРЛ // Вопросы оборонной техники. Серия 13: Комплексная автоматизация производства и роторные линии. – 1993. – № 3-4 (86-87). – С. 30-32.
17. Гвоздев А. Е. Металло-энергосберегающие технологии производства заготовок быстрорежущего инструмента в условиях сверхпластичности // Вопросы оборонной техники.

- Серия 13: Комплексная автоматизация производства и роторные линии. – 1994. – № 1-2 (88-89). – С. 53-55.
18. Гвоздев А. Е. Влияние напряженного состояния на сверхпластичность труднодеформируемой порошковой быстрорежущей стали // *Металлы*. – 1994. – № 4. – С. 127-131.
 19. Левин Д. М., Гвоздев А. Е. Температурные зависимости модулей нормальной упругости сложнолегированных быстрорежущих сталей разных способов производства // *Металлы*. – 1995. – № 1. – С. 91-95.
 20. Гвоздев А. Е. Получение заготовок металлорежущего инструмента из порошковой быстрорежущей стали в условиях сверхпластичности // *Кузнечно-штамповочное производство*. – 1996. – № 8. – С. 13-16.
 21. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Головин С. А. Условия проявления сверхпластичности порошковых быстрорежущих сталей // *Материаловедение*. – 1998. – № 5. – С. 42-47.
 22. Активированное состояние сверхпластичных металлических материалов / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, А. С. Пустовгар, М. В. Казаков // *Материаловедение*. – 1998. – № 11. – С. 31-33.
 23. Левин Д. М., Гвоздев А. Е., Головин С. А. Термодинамический анализ вклада структурных несовершенств и сопротивление деформации поликристаллов при сверхпластичности // *Известия Российской академии наук. Серия физическая*. – 1998. – Т. 62. – № 7. – С. 1363-1368.
 24. Тихонова И. В., Гвоздев А. Е., Головин С. А. Влияние дисперсности карбидной фазы на температуру фазового перехода A_{C1} // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Физика*. – 1999. – № 2. – С. 132-136.
 25. Гвоздев А. Е., Полтавец Ю. В., Уваров В. Е. Структура, физические и механические свойства сталей Р6М5, 10Р6М5-МП и М6Ф2-МП при изотермическом деформировании // *Техника машиностроения*. – 1999. – № 4. – С. 64-69.
 26. Комплекс для исследования процессов изотермического деформирования и сверхпластического формоизменения металлических материалов / А. В. Афанаскин, А. Е. Гвоздев, Е. А. Гвоздев, М. В. Казаков, А. Н. Ключков, А. С. Пустовгар, Е. М. Селедкин, И. М. Федосов // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Химия и электрофизикохимические воздействия на материалы*. – 2000. – № 1. – С. 184-188.
 27. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Афанаскин А. В. Сверхпластичность металлических материалов (современное состояние проблемы) // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Химия и электрофизикохимические воздействия на материалы*. – 2000. – № 1. – С. 174-184.
 28. Гвоздев А. Е. Закономерности фазовой сверхпластичности и инструментальных труднодеформируемых сложнолегированных сталей // *Известия Тульского государственного университета. Серия: материаловедение*. 2000. – № 1. – С. 84-94.
 29. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е. Кластеры в деформированных металлах и их влияние на структурообразование и сверхпластичность // *Известия Тульского государственного университета. Серия: материаловедение*. – 2000. – № 1. – С. 41-47.

30. Гвоздев А. Е., Пустовгар А. С., Селедкин Е. М. Многофакторные математические модели изотермической сверхпластичности металлических материалов // Известия Тульского государственного университета. – Серия: Материаловедение. – 2000. – № 1. – С. 145-150.
31. Гвоздев А. Е. Моделирование процессов поведения гетерофазных металлических систем в сопряженных температурных и механических полях // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2002. – № 2. – С. 10-16.
32. Изотермическая сверхпластичность инструментальной стали У8А / А. С. Пустовгар, А. Е. Гвоздев, А. В. Афанаскин, Е. А. Гвоздев, И. М. Федосов, И. А. Гончаренко, А. В. Мишкова // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2002. – № 2. – С. 112-118.
33. Тутьшкин Н. Д., Гвоздев А. Е., Ефремова Н. Е. Физико-механические аспекты проектирования процессов пластического деформирования // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2002. – № 2. – С. 135-142.
34. Оптимизация режима деформирования заготовок из инструментальных сталей на основе экспериментальных исследований и математического моделирования / Е. М. Селедкин, А. Е. Гвоздев, А. В. Афанаскин, А. В. Мишкова // Известия Тульского Государственного Университета. Серия: Материаловедение. – 2002. – № 2. – С. 142-147.
35. Сравнительный анализ регрессионных моделей изотермического деформирования и фазовой сверхпластичности быстрорежущей стали / А. Е. Гвоздев, А. С. Пустовгар, А. В. Афанаскин, С. И. Захарова, Д. П. Черных // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2002. – № 2. – С. 147-151.
36. Расчет кластерной структуры расплава, ее влияние на образование наноаморфных твердых фаз и их структурную релаксацию при последующем нагреве // М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, А. В. Афанаскин, Е. А. Гвоздев // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2002. – № 6. – С. 12-16.
37. Гвоздев А. Е., Афанаскин А. В., Гвоздев Е. А. Закономерности проявления сверхпластичности сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2002. – № 6. – С. 32-36.
38. Взаимодействие дефектов и разрушение быстрорежущих сталей типа Р6М5 в условиях экстремальной деформации / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, А. В. Афанаскин, А. С. Пустовгар, Е. А. Гвоздев // Материаловедение. – 2002. – № 9. – С. 21-26.
39. Calculation Of Cluster Structure Of Melts, Its Effect On Formation Of Nanoamorphous Solid Phases And Their Structural Relaxation In Subsequent Heating / M. Kh. Shorshorov, A. E. Gvozdev, A. V. Afanaskin, E. A. Gvozdev // Metal Science and Heat Treatment. – 2002. – Vol. 44. – № 5-6. – P. 232-236.
40. Gvozdev A. E., Afanaskin A. V., Gvozdev E. A. Regular Features Of Manifestation Of Superplasticity In Steels R6M5 And 10R6M5-MP // Metal Science and Heat Treatment. – 2002. – Vol. 44. – № 5-6. – P. 253-257.
41. Гвоздев А. Е. О сверхпластичности гетерофазных металлических систем // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2003. – № 4. – С. 107-117.

42. К определению энергии активации сверхпластической деформации при одноосном растяжении / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, И. В. Тихонова, А. В. Афанаскин // *Материаловедение*. – 2003. – № 7. – С. 8-12.
43. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е. Ультрадисперсные и аморфные материалы в технологии порошковой металлургии // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение*. – 2004. – № 5. – С. 99-108.
44. Исследование процесса сверхпластического выдавливания сплошных заготовок из сталей У8А и Р6М5 / А. Е. Гвоздев, С. С. Гончаров, В. В. Моисеев, А. Н. Новиков // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение*. – 2004. – № 5. – С. 186-193.
45. Анализ закономерностей эффекта сверхпластичности стали Р8М5 с помощью разработанного программного комплекса / Н. Е. Проскуряков, А. С. Пустовгар, А. Е. Гвоздев, В. В. Моисеев, А. В. Гусев, А. И. Телков // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение*. – 2004. – № 5. – С. 193-203.
46. Особенности порообразования и разрушения стали Р6М5 при растяжении в условиях повышенной пластичности и сверхпластичности / А. В. Афанаскин, А. Е. Гвоздев, А. В. Кондрашина, В. А. Родионов // *Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение*. – 2004. – № 5. – С. 158-165.
47. Механизмы сверхпластичности металлических сплавов / И. А. Гончаренко, А. Е. Гвоздев, А. М. Новиков, Л. В. Черникова, Д. П. Черных // *Известия Тульского Государственного Университета. Серия: Материаловедение*. – 2004. – № 5. – С. 153-158.
48. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е. О механизмах и кинетике процессов аккомодации зерен при сверхпластической деформации металлических сплавов в условиях одноосного растяжения // *Материаловедение*. – 2004. – № 7. – С. 13-17.
49. Селедкин Е. М., Гвоздев А. Е., Черных Д. П. Оптимизация режима сверхпластического деформирования заготовок из труднодеформируемых сталей // *Производство проката*. – 2005. – № 11. – С. 2-8.
50. Анализ параметров долговечности сталей для штампов горячей штамповки // В. И. Фатеев, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, И. А. Гусев, Н. Б. Фомичева, Р. В. Аверьянов. – *Производство проката*. – 2005. – № 6. – С. 23-26.
51. Гвоздев А.Е. Ресурсосберегающая технология термомеханической обработки быстрорежущей вольфрамомолибденовой стали Р6М5 // *Металловедение и термическая обработка металлов*. – 2005. – № 12. – С. 27-30.
52. Gvozdev A. E. Alternative Technology Of Thermomechanical Treatment Of High-Speed Tungsten-Molybdenum Steel R6M5 // *Metal Science and Heat Treatment*. – 2005. – Vol. 47. – № 11-12. – P. 556-559.
53. Сверхпластичность стали Р6М5: методы и результаты исследования / А. Е. Гвоздев, А. В. Кондрашина, Д. П. Черных, С. С. Гончаров, О. Ф. Кабиров, О. В. Кузовлева, А. С. Пустовгар. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. – 100 с.
54. Физико-механические основы технологии обработки высокопрочных сталей в режиме сверхпластичности / Н. Д., Тутышкин А. Е. Гвоздев, А. В. Афанаскин, Е. А. Гвоздев.; под редакцией Н. Д. Тутышкина. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. – 290 с.

55. Аномальное изменение механических свойств сталей 40Н19 и 40Н24 / В. В. Моисеев, А. В. Кондрашина, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, О. В. Кузовлева // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2006. – № 6. – С. 50-59.
56. Закономерности изменения прочности стали Р6М5 с различной дисперсностью карбидной фазы при термомеханической обработке / А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. В. Моисеев, С. С. Гончаров, О. В. Кузовлева, Р. В. Аверьянов // Известия Тульского государственного университета. Серия: Материаловедение. – 2006. – № 6. – С. 118-124.
57. Кондрашина А.В., Кузовлева О.В., Гвоздев А.Е. Деформация, структурообразование и разрушение стали Р6М5 // Деформация и разрушение материалов. 2007. – № 8. – С. 11-16.
58. Состояние механической нестабильности и сверхпластичности сталей и его использование для производства металлорежущих изделий / И. А. Гусев, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, О. В. Кузовлева // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 92-95.
59. Об эффекте сверхпластичности инструментальных сталей и алюминиевых сплавов / А. С. Пустовгар, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, А. В. Афанаскин, А. Е. Гвоздев // Деформация и разрушение материалов. – 2008. – № 7. – С. 13-20.
60. Распад цементита углеродистых сталей при термоциклировании / О. В. Кузовлева, И. В. Тихонова, Н. Е. Стариков, А. Е. Гвоздев // Производство проката. – 2008. – № 8. – С. 36-37.
61. Моделирование процесса осадки заготовок из инструментальной стали в состоянии сверхпластичности / Е. М. Селедкин, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. В. Моисеев, А. С. Пустовгар // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – № 1. – С. 28-34.
62. Влияние содержания углерода на распад цементита в углеродистых сталях при термодинамической обработке / И. В. Тихонова, А. В. Маляров, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков // Производство проката. – 2009. – № 5. – С. 29-31.
63. Кузовлева О. В., Гвоздев А. Е. О закономерностях и причинах изменения пластичности металлов и сплавов в состоянии предпревращения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 5-3. – С. 94-103.
64. Боголюбова Д. Н., Тихонова И. В., Гвоздев А. Е. Структурообразование в алюминиевых ковочных сплавах при горячей деформации // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 329-334.
65. Экстремальные эффекты при фазовых переходах в металлических сплавах / А. Е. Гвоздев, Г. В. Сержантова, А. В. Афанаскин, В. Е. Блаженец // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 318-323.
66. Боголюбова Д. Н., Гвоздев А. Е., Пантюхин О. В. Исследование закономерностей проявления эффекта динамической рекристаллизации в металлах / Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 4. – С. 276-286.
67. Влияние термоциклирования на структурные превращения в деформированном никеле / И. В. Тихонова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков // Производство проката. – 2011. – № 3. – С. 26-28.

68. Структурные и фазовые превращения при термоциклической обработке углеродистых сталей вблизи A_0 / А. В. Маляров, И. В. Тихонова, О. В. Пантюхин, С. В. Сапожников, Н. Е. Стариков, А. Е. Гвоздев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. – 146 с.
69. Механические свойства конструкционных и инструментальных сталей в состоянии предпревращения при термомеханическом воздействии / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, О. В. Кузовлева, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – № 11. – С. 39-42.
70. Гетерогенное зарождение графита в углеродистых сталях при распаде цементита в процессе ТЦО вблизи точки A_0 / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. В. Маляров, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. – 2013. – № 10. – С. 48-52.
71. Влияние элементов-графитизаторов на распад цементита при термоциклической обработке вблизи A_0 углеродистых сталей / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. В. Маляров, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. – 2013. – № 11. – С. 43-45.
72. Барчуков Д. А., Романенко Д. Н., Гвоздев А. Е. Исследование возможности упрочнения быстрорежущих сталей в результате выполнения высокотемпературного отпуска после поверхностного пластического деформирования // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – № 9. – С. 3-6.
73. Влияние разнотерности аустенита на кинетику перлитного превращения в мало- и среднеуглеродистых низколегированных сталях / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Д. А. Провоторов, И. В. Минаев, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. – 2014. – № 7. – С. 23-26.
74. Комплекс научно-технических, проектно-конструкторских и технологических разработок по созданию, изготовлению и внедрению высокоточного импортозамещающего оборудования качественной лазерной и газоплазменной обработки листового проката / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, И. Л. Грашкин, И. В. Минаев, С. И. Полосин, И. В. Тихонова, А. Е. Чеглов, Д. М. Хонелидзе. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – 188 с.
75. Grain Size Effect Of Austenite On The Kinetics Of Pearlite Transformation In Low-and Medium-Carbon Low-Alloy Steels / А. Е. Gvozdev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov, I. V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. – Vol. 6. – № 1. – P. 41-44.
76. Multiparametric Optimization Of Laser Cutting Of Steel Sheets / А. Е. Gvozdev, I. V. Golyshchev, I. V. Minayev, A. N. Sergeev, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, D. M. Khonelidze, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Vol. 6. – № 4. P. 305-310.
77. Многопараметрическая оптимизация параметров лазерной резки стальных листов / А. Е. Гвоздев, И. В. Голышев, И. В. Минаев, А. Н. Сергеев, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, Д. М. Хонелидзе, А. Г. Колмаков // Материаловедение. – 2015. – № 2. – С. 31-36.
78. Зависимость показателей сверхпластичности труднодеформируемых сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП от схемы напряженного состояния / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. Н. Боголюбова // Деформация и разрушение материалов. – 2015. – № 11. – С. 42-46.
79. Распределение температур и структура в зоне термического влияния для стальных листов после лазерной резки / А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, А. Г. Колмаков,

- И. В. Тихонова, А. Н. Сергеев, Д. А. Провоторов, Д. М. Хонелидзе, Д. В. Малий, И. В. Голышев // *Материаловедение*. – 2016. – № 9. – С. 3-7.
80. О фрикционном взаимодействии металлических материалов с учетом явления сверхпластичности / А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Е. Стариков, Д. А. Провоторов, Н. Н. Сергеев, Д. М. Хонелидзе // *Материаловедение*. – 2016. – № 8. – С. 21-25.
81. Перспективные стали для кожухов доменных агрегатов / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, Е. В. Агеев // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. – 2017. – Т. 7. – № 2. – С. 6-15.
82. Temperature Distribution And Structure In The Heat-Affected Zone For Steel Sheets After Laser Cutting / A. E. Gvozdev, N. N. Sergeev, I. V. Minayev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov // *Inorganic Materials: Applied Research*. – 2017. – Vol. 8. – № 1. – P. 148-152.
83. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / A. D. Breki, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, N. E. Starikov, D. A. Provotorov, N. N. Sergeev, D. M. Khonelidze // *Inorganic Materials: Applied Research*. – 2017. – Vol. 8. – № 1. – P. 126-129.
84. Диффузия водорода в сварных соединениях конструкционных сталей / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // *Известия Юго-Западного государственного университета*. – 2017. – № 6. – С. 85-95.
85. Анализ теоретических представлений о механизмах водородного растрескивания металлов и сплавов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // *Известия Юго-Западного государственного университета*. – 2017. – № 3. – С. 6-33.
86. Основы лазерной и газоплазменной обработки сталей: монография / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, М. Ю. Комарова, Е. С. Алявдина, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 337 с.
87. Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Калинин А. А. Состояние сверхпластичности – основа ресурсосберегающих технологий обработки высоколегированных сталей и труднодеформируемых сплавов // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2018. – № 9. – С. 446-456.
88. Влияние содержания углерода и параметров лазерной резки на строение и протяженность зоны термического влияния стальных листов / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, А. Е. Чеглов, И. В. Тихонова, О. М. Губанов, И. А. Цыганов, Е. С. Алявдина, А. Д. Бреки // *Сталь*. – 2018. – № 5. – С. 21-26.
89. Основы лазерной и газоплазменной обработки конструкционных сталей: / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, М. Ю. Комарова, А. Е. Гвоздев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 283 с.
90. Сверхпластичность сталей и сплавов и ресурсосберегающие технологии процессов обработки металлов давлением / М. Х. Шоршоров, А. С. Базык, М. В. Казаков, А. Е. Гвоздев, А. С. Пустовгар, Е. В. Егоров, А. Н. Герасин, Б. П. Сидоров. – Тула: Изд-во, 2018. – 158 с.
91. Long-Term Strength Of 22KH2G2AYU Reinforcing-Bar Steel During Corrosion Cracking Tests In A Boiling Nitrate Solution / N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev,

- A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, V. V. Izvol'skii // Russian Metallurgy (Metally). – 2020. – Vol. 2020. – № 4. – P. 434-440.
92. Temperature Field Calculation At Incomplete Hot Processing Of Metal Alloys / G. M. Zhuravlev, D. N. Romanenko, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, O. M. Gubanov // Steel in Translation. – 2019. – Vol. 49. – № 10. – P. 716-719.
93. Методология выбора режимов лазерной резки листов из конструкционных сталей для обеспечения требуемого комплекса показателей качества поверхности / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий // Материаловедение. – 2019. – № 10. – С. 25-32.
94. Особенности лазерной резки медных и алюминиевых сплавов / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Д. Гусев, Я. А. Стаханова, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. – 123 с.
95. Физико-механические и коррозионные свойства металлических материалов, эксплуатируемых в агрессивных средах / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, В. В. Извольский. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. – 553 с.
96. Особенности распада цементита заэвтектоидных углеродистых сталей в различных условиях и состояниях / А. В. Маляров, И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22. – № 5. – С. 307-314.
97. Влияние термической обработки на формирование микроструктуры износостойких биметаллических материалов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. А. Шатульский, Д. С. Клементьев // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П. А. Соловьева. – 2021. – № 2. – С. 65-73.
98. Simulation Of The Microplasticity And The Mechanical Behavior Of Porous Materials / I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, A. V. Panin // Russian Metallurgy (Metally). – 2021. – № 10. – P. 1183-1187.
99. Агеев Е. В., Гвоздев А. Е., Агеева Е. В. Порошковые инструментальные стали: деформация и рециклинг. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2022. – 406 с.
100. Прочность и пластичность быстрорежущих сталей / Е. В. Агеев, Р. А. Латыпов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2022. – 412 с.

Получено: 17.07.2022

Принято в печать: 8.12.2022

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 23 Выпуск 4

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН и НАН Украины (Украина).

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 23 Issue 4

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis», National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» of MES and NAS of Ukraine (Ukraine).

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 23 Issue 4

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov. To the anniversary of the Honored Professor of Moscow University Vladimir Anatolyevich Levin	6
N. Ph. Aleksiadis. Rational A -functions with rational coefficients	11
M. M. Gallamov. Integer approximation of a segment	20
D. V. Gorbachev. Boas conjecture on the axis for the Fourier–Dunkl transform and its generalization	39
V. A. Gorelik, T. V. Zolotova. The total method of Chebyshev interpolation in the problem of constructing a linear regression	52
N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. The inverse problem for a basic monoid of type q	64
N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva. Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities	77
V. I. Ivanov. Lebesgue boundedness of Riesz potential for $(k, 1)$ -generalized Fourier transform with radial piecewise power weights	105
V. I. Ivanov. Generalized extremal Yudin problems for polynomials	92
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii. The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems	115
U. S. Rakhmonov, Z. K. Matyakubov. Carleman's formula for the matrix domains of Siegel ...	126
O. S. Shcherbakov. Polytopes of Binary Trees, Structure of the Polytop for the «Snake-type» Tree	136
BRIEF MESSAGES	
D. V. Gorbachev. Weighted Carleman inequality for fractional gradient	152
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere	157
N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan. Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations	162
N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. N. Kormacheva, N. M. Dobrovol'skii. Deviation estimates for rational grids approximating algebraic	170
A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, T. A. Morozova. On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients	178

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

- A. V. Volkov, E. V. Berezina, A. S. Parfenov, T. V. Mikhailovskaia, I. E. Mishina, A. E. Gvozdev]. On the application of the mathematical method of dimensional analysis to the six-minute walk test 188
- N. V. Ingtem. Cauchy's research on substitutions' 198
- L. A. Kabanova. Comparison of structural functions method approximations of the solution of a linear elastic layered plate bending problem 211
- A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov. The history of the conception and development of the metallurgical industry and its impact on the global industry 233
- V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. E. Belkin. Exact analytical solution for a problem of equilibrium of a composite plate containing prestressed parts made of incompressible elastic materials under superimposed finite strains 251
- V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, D. R. Biryukov. Exact solution to the problem of stage-by-stage deformation of a multilayer cylinder made of incompressible hypoelastic material 262
- V. A. Levin, V. V. Kozlov, E. D. Komolova, A. V. Filatova, M. A. Kartsev. Estimation of convergence of spectral element method in CAE Fidesys based on exact solution of the Lamé problem for elastoplastic materials using an automated regression testing system 272
- V. A. Levin, K. Yu. Krapivin. Theoretical and numerical plastic strain localization analysis at plane strain of isotropic dilating non-associated media at plane strain conditions 285
- V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, P. A. Vasiliev. Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity 308
- R. R. Mukhin. Evolution of the main provisions of the theory of stability 327
- S. A. Skobel'tsyn. Determination of the inhomogeneity parameters of an elastic ball anisotropic outer layer by the scattering of a plane sound wave 350
- L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov. Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform anisotropic coating 368
- M. Ya. Yakovlev, A. A. Semykin, V. A. Levin. Method and Some Results of Numerical Estimation of Effective Biot's Coefficient of Rocks 382

MEMORABLE DATES

- N. M. Dobrovolsky, E. V. Manokhin, I. V. Dobrynina, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, 2022, "On the 85th anniversary of Ashot Enofovich Ustyan 394
- A. N. Sergeev, M. V. Ushakov, S. N. Kutepov, D. S. Klementyev, A. A. Kalinin, O. V. Kuzovleva, I. V. Minaev, A. N. Chukanov, D. V. Maliy, P. N. Medvedev, Y. S. Dorokhin, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky. Gvozdev Alexander Evgenievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University — a bright representative of the scientific school of superplasticity of metal systems M. H. Shorshorov 405

РЕДКОЛЛЕГИЯ	421
THE EDITORIAL BOARD	425
TABLE OF CONTENTS	429