

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXIII

Выпуск 2 (83)

Тула

2022

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 23 Выпуск 2

Ф. С. Авдеев, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами	5
И. Аллаков, А. Ш. Сафаров. Новая оценка для исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии	21
А. М. Ветошкин. Линейные многообразия проекторов	42
Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова	56
М. Ю. Житная. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов	74
А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи	88
М. Д. Ковалёв. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перзрелой математике	106
В. В. Кочергин. О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик	121
А. Г. Малашина, А. Б. Лось. Построение и анализ моделей русского языка в связи с исследованиями криптографических алгоритмов	151
А. Сенуси, М. Софрани. Обобщение некоторых интегральных неравенств для оператора Римана — Лиувилля	161
Ле Ван Хонг. Уникальная возможность отображения списка полных трехсторонних графиков	170

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Д. Бреки, С. Е. Александров, А. С. Биль, С. Г. Чулкин, В. А. Яхимович, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Протопопов. Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения	179
А. А. Стрельникова, А. Д. Бреки, М. А. Скотникова, Д. Г. Плотников, Ю. Подгурскас, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математические модели внедрения стального шарообразного индентора в титановый сплав при трении в биологических смазочных средах	191

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Х. аль-Ассад. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа 2	201
Х. М. Салиба. Одно замечание о бесконечности	209

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Б. П. Ваньков, Н. М. Добровольский. Мартин Давидович Гриндлингер — основатель алгебраической школы и его роль в возрождении теоретико-числовой школы в Туле (к 90-летию профессора)	212
Ю. С. Налбандян. Маргарита Бабкеновна Налбандян и её исследования по истории математики в России (к 90-летию со дня рождения)	219
Памяти Виктора Александровича Ведерникова	232
Памяти Бориса Михайловича Широкова	235
РЕДКОЛЛЕГИЯ	237
THE EDITORIAL BOARD	241

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-5-20

**Обобщение преобразования Лапласа для решения
дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными
коэффициентами¹**

Ф. С. Авдеев, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Авдеев Фёдор Степанович — доктор педагогических наук, профессор, Орловский государственный университет (г. Орёл).

e-mail: ivanavd@mail.ru

Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).

e-mail: yaremki8@gmail.com

Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).

e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

В статье развивается теория интегральных преобразований с целью разработки операционного исчисления для исследования переходных процессов. Введен аналог преобразования Лапласа, который может быть применен к выражениям с кусочно-постоянным множителем перед оператором дифференцирования. Определены понятия, такие как, оригинал, изображение, свертка. Доказаны теоремы о дифференцировании оригинала, о дифференцировании изображения и другие. Дано определение обобщенной свертки и доказана формула для вычисления такой свертки. На основе понятия свертки определен интеграл дробного порядка. Главным инструментом в развитии теории обобщенного операционного исчисления является метод операторов преобразования. С его помощью установлена связь обобщенных интегральных преобразований Лапласа, введенных в статье, с классическим интегральным преобразованием Лапласа. Найдено решение задачи с кусочно-постоянными коэффициентами о нагреве полубесконечного стержня.

Ключевые слова: Обобщение преобразования Лапласа, формула обращения, оператор преобразования, интеграл дробного порядка.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Ф. С. Авдеев, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 5–20.

¹Эта работа поддержана Министерством Науки и Высшего образования Российской Федерации проект 0707-2020-0034.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-5-20

Generalization of the Laplace transform for solving differential equations with piecewise constant coefficients

F. S. Avdeev, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

Avdeev Fedor Stepanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, Orel State University (Orel).

e-mail: ivanavd@mail.ru

Yaremko Oleg Emmanuilovich — Moscow State Technical University «Stankin» (Moscow).

e-mail: yaremki8@gmail.com

Yaremko Natalia Nikolaevna — National Research Technological University «MISiS» (Moscow).

e-mail: yaremki@yandex.ru

Abstract

The article develops the theory of integral transforms in order to obtain operational calculus for the study of transient events. An analogue of the Laplace transform is introduced, which can be applied to expressions with a piecewise constant factor before the differentiation operator. Concepts such as original function, the Laplace transform, convolution are defined. Theorems on differentiation of the original, on differentiation of the Laplace transform and others have been proved. A generalized convolution definition is given and a formula for calculation such convolution is proved. Based on the concept of convolution, a fractional integral is defined. The transmutation operators method is the main tool in the theory of generalized operational calculus. The generalized Laplace integral transforms introduced in the article and the classical Laplace integral transforms are connected with its help. The solution to the heat problem with piecewise constant coefficients for the semi-infinite rod is found.

Keywords: Generalization of the Laplace transform, inversion formula, transformation operator, fractional integral..

Bibliography: 20 titles.

For citation:

F. S. Avdeev, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, 2022, “Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 5–20.

1. Введение

Преобразования Лапласа получило широкое распространение в научных и инженерных расчётах. Ценность использования преобразования Лапласа заключается в том, что дифференциальным и интегральным соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые-алгебраические- соотношения над их изображениями. В частности, операции дифференцирования в пространстве оригиналов соответствует операция умножения в пространстве изображений. Многочисленные исследователи работали в направлении замены операции дифференцирования на более сложную операцию [1,2,4-17]. Так, например, Адамар $\|$ вместо оператора d/dt использовал операцию td/dt . В рассматриваемой статье оператор d/dt

заменяется оператором $x(t) d/dt$, в котором $x(t)$ — кусочно-постоянная функция. Строится соответствующее обобщенное интегральное преобразование Лапласа, доказываются его основные свойства, обосновывается аналог формулы обращения Меллина [3]. При таких построениях используется метод операторов преобразования [18,19], который устанавливает связь классического преобразования Лапласа с обобщенным преобразованием, введенным в статье. Обобщенное преобразование Лапласа реализуется на практике с помощью представленного в статье удобного алгоритма вычисления, разработанного на основе классического преобразования Лапласа. Рассматриваются приложения обобщенного преобразования Лапласа для исследования кусочно-линейных систем. В частности, получено аналитическое описание температурного поля с переменным режимом для полубесконечного стержня [20].

2. Материалы и методы

2.1. Операторы преобразования. Обобщенные оригинал и изображение

Пусть функция $x(t) : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ непрерывная кусочно- непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая на промежутке $[a, b)$ и такая что $x(a) = 0$, а функция $x^{-1}(t) : [0, \infty) \rightarrow [a, b)$ обратная к ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $f(t)$ назовем оригиналом для обобщенного преобразования Лапласа, если функция $\tilde{f}(t) = f(x^{-1}(t))$ является оригиналом для классического преобразования Лапласа, т.е.если выполняются три требования:

1. $f(t) = 0, t \notin [a, b)$.
2. На любом отрезке $[c, d] \subseteq [a, b)$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.
 - a) ограничена,
 - b) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,
 - c) имеет конечное число экстремумов.
3. $|f(t)| \leq M e^{s_0 x(t)}$, при $t \in [a, b)$, где $M > 0, s_0$ — некоторые действительные постоянные, s_0 называют показателем роста функции $f(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $J : \tilde{f}(t) \rightarrow f(t)$ назовем оператором преобразования. Таким образом,

$$f(t) = J[\tilde{f}(t)].$$

ТЕОРЕМА 1. Обратный оператор преобразования $J^{-1}: f(t) \rightarrow \tilde{f}(t)$ задается формулой

$$\tilde{f}(t) = f(x^{-1}(t)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обобщенное преобразование Лапласа — это интегральное преобразование L , которое определим соотношением

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \tilde{L}[\tilde{f}(t)],$$

где L — обобщенное преобразование Лапласа, $\tilde{L}$ — преобразование Лапласа. Обобщенное преобразование Лапласа будем обозначать символом L . Функция $F(p)$ называется обобщенным изображением функции $f(t)$.

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенное изображение $F(p)$ функции оригинала $f(t)$ вычисляется по формуле*

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \int_a^b e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 3 имеем

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{f}(t) dt.$$

Выполним замену переменной $t = x(\tau)$. В результате получим

$$L[f(t)] = \int_a^b e^{-px(\tau)} x'(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 3. *Аналог формулы обращения Меллина. Если $f(t)$ оригинал, то интеграл (1) сходится всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. При этом сходимость равномерная в любой области $\operatorname{Re} p \geq s > s_0$ и функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Имеет место формула обращения*

$$L^{-1}[F(p)] \equiv f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px(t)} F(p) dp. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула обращения Меллина имеет вид

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pz} F(p) dp.$$

Подставим $z = x(t)$. В итоге получим

$$f(t) = \tilde{f}(x(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px(t)} F(p) dp.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Оригинал $f(t)$ определяется единственным образом по своему изображению $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва.*

ТЕОРЕМА 4. *Обобщенное преобразование Лапласа L и преобразование Лапласа $\tilde{L}$ связаны соотношением*

$$L = \tilde{L} \cdot J^{-1}.$$

По определению

$$L[J[\tilde{f}]] = L[f] = \tilde{L}[\tilde{f}].$$

Таким образом, $L \cdot J = \tilde{L}$.

2.2. Основные теоремы обобщенного операционного исчисления

ТЕОРЕМА 5. *Дифференцирование оригинала. Пусть функции $f(t)$ и $\frac{f'(t)}{x'(t)}$ являются оригиналами, тогда*

$$L\left[\frac{f'(t)}{x'(t)}\right] \equiv pF(p) - f(0).$$

Доказательство. По формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} L \left[\frac{f'(t)}{x'(t)} \right] &\equiv \int_a^b e^{-px(t)} x'(t) \frac{f'(t)}{x'(t)} dt = \\ &= e^{-px(t)} f(t) \Big|_a^b + p \int_a^b e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt = \\ &= -f(a) + pF(p). \end{aligned}$$

Свертка оригиналов. Сверткой функций оригиналов $f(t), g(t)$ назовем функцию

$$f(t) * g(t) = L^{-1} [F(p) G(p)].$$

ТЕОРЕМА 6. *Свертка вычисляется по формулам*

$$f(t) * g(t) = J [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] \quad (3)$$

или в развернутом виде

$$f(t) * g(t) = \int_a^t f(x^{-1}(x(t) - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изображения правой и левой частей в формуле (3) одинаковы. По определению свертки имеем равенство

$$L[f(t) * g(t)] = F(p) G(p).$$

С другой стороны, получим

$$L \cdot J [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = \tilde{L} [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = F(p) G(p).$$

По следствию 1 оригиналы совпадают.

Для доказательства второй формулы в теореме 5 перепишем ее правую часть в виде

$$\int_a^t \tilde{f}((x(t) - x(\tau))) \tilde{g}(x(\tau)) x'(\tau) d\tau.$$

Затем выполним замену переменной $\tau = x^{-1}(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{x(t)} \tilde{f}((x(t) - z)) \tilde{g}(z) dz &= J \left[\int_0^t \tilde{f}((t - z)) \tilde{g}(z) dz \right] = \\ &= J [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = f(t) * g(t). \end{aligned}$$

Интеграл дробного порядка. По аналогии с [21] интегралом порядка α , связанным с обобщенным преобразованием Лапласа от функции $f(t)$, назовем функцию $D^{-\alpha} [f(t)]$:

$$D^{-\alpha} [f(t)] = L^{-1} \left[\frac{1}{p^\alpha} F(p) \right].$$

ТЕОРЕМА 7. *Формула для вычисления интеграла порядка α от функции $f(t)$ имеет вид*

$$D^{-\alpha} [f(t)] = \int_a^t \frac{(x(t) - x(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x'(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу свертки (3)

$$f(t) * g(t) = J \left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) \right],$$

где

$$\tilde{g}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leftarrow \frac{1}{p^\alpha}.$$

Таким образом,

$$D^{-\alpha} [f(t)] = J \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tilde{f}(\tau) d\tau \right] = \int_0^{x(t)} \frac{(x(t)-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x^{-1}(\tau)) d\tau.$$

Выполним замену переменной $\tau = x(z)$. Тогда

$$D^{-\alpha} [f(t)] = \int_a^t \frac{(x(t) - x(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x'(\tau) f(\tau) d\tau.$$

3. Обобщенные преобразования Лапласа

3.1. Операторы преобразования

Выберем функцию $x(t)$ в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & a_1 t (H(t-t_0) - H(t-t_1)) + (a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1) (H(t-t_1) - H(t-t_2)) + \\ & + (a_3(t-t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1) (H(t-t_1) - H(t-t_2)) + \dots \\ & + (a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1) H(t-t_n), \end{aligned}$$

здесь

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}, t_0 = 0.$$

График функции $x(t)$ является ломаной с вершинами в точках

$$M_0(0,0), M_1(t_1, a_1 \Delta t_1), M_2(t_2, a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1), \dots, M_n(t_n, a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1)$$

с угловыми коэффициентами звеньев ломаной $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Заметим, что в частном случае $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_{n+1} = 1$ ломаная становится прямой. Оператор преобразования в таком случае есть тождественный оператор. В общем случае оператор преобразования J принимает вид

$$\begin{cases} f_1(t) = \tilde{f}(a_1 t), t_0 \leq t \leq t_1, \\ f_2(t) = \tilde{f}(a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1), t_1 \leq t \leq t_2, \\ f_3(t) = \tilde{f}(a_3(t-t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1), t_2 \leq t \leq t_3, \\ \dots \\ f_{n+1}(t) = \tilde{f}(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1), t_n \leq t < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Для обратного оператора J^{-1} справедлива формула

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = f_1\left(\frac{t}{a_1}\right), 0 \leq t \leq a_1 \Delta t_1, \\ \tilde{f}(t) = f_2\left(\frac{t - a_1 \Delta t_1}{a_2} + t_1\right), a_1 \Delta t_1 \leq t \leq a_1 \Delta t_1 + a_2 \Delta t_2, \\ \dots \\ \tilde{f}(t) = f_{n+1}\left(\frac{t - a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2 - \dots - a_n \Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n\right), a_1 \Delta t_1 + \dots + a_n \Delta t_n \leq t. \end{cases} \quad (6)$$

Из формулы (1) получим формулу для вычисления изображения

$$\begin{aligned} F(p) = & a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p t} f_1(t) dt + a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} f_2(t) dt + \\ & + a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2\Delta t_2+a_1\Delta t_1)} f_3(t) dt + \dots + \\ & + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\dots+a_1\Delta t_1)} f_{n+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Из теоремы 2 получаем формулу обращения Меллина

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pta_1} F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1, \\ f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_1 \leq t \leq t_2, \\ &\dots \\ f_{n+1}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\dots+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_n \leq t. \end{aligned} \quad (8)$$

3.2. Основные теоремы обобщенного операционного исчисления

Обобщенный сдвиг определим по правилу

$$\begin{aligned} S_\alpha[f(t)] = & f\left(t - \frac{\alpha}{a_1}\right) \left(H\left(t - \frac{\alpha}{a_1}\right) - H\left(t - \frac{\alpha}{a_1} - t_1\right) \right) + \\ & + f\left(t - \frac{\alpha}{a_2}\right) H\left(t - \frac{\alpha}{a_2} - t_1\right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 8. *Первая теорема о сдвиге. Пусть $f(t) \leftarrow F(p)$, тогда*

$$S_\alpha[f(t)] = e^{-p\alpha} F(p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 3 следует, что

$$\tilde{f}(t-a) \leftarrow e^{-ap} F(p).$$

Следовательно, выполнено равенство $J[\tilde{f}(t-a)] \leftarrow e^{-ap} F(p)$. Преобразуем выражение $J[\tilde{f}(t-a)]$. Мы имеем

$$\begin{aligned} J[\tilde{f}(t-a)] = & J\left[f\left(\frac{t-\alpha}{a_1}\right) (H(t-\alpha) - H(t-\alpha-a_1t_1)) + \right. \\ & \left. + f\left(\frac{t-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right) (H(t-\alpha-a_1t_1) - H(t-\alpha-a_1t_1-a_2\Delta t_2))\right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J[\tilde{f}(t-a)] = & \left[f\left(\frac{a_1t-\alpha}{a_1}\right) (H(a_1t-\alpha) - H(a_1t-\alpha-a_1t_1)) + \right. \\ & + f\left(\frac{a_1t-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right) \cdot H_1 \Big] H(t_1-t) + \\ & + \left[f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1-\alpha}{a_1}\right) \cdot H_2 + \right. \\ & \left. + f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right) (H(a_2(t-t_1)-\alpha)) \right] H(t-t_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(t - \frac{\alpha}{a_1}\right) \left(H\left(t - \frac{\alpha}{a_1}\right) - H\left(t - \frac{\alpha}{a_1} - t_1\right) \right) + f\left(t - \frac{\alpha}{a_2}\right) H\left(t - \frac{\alpha}{a_2} - t_1\right) = \\
&= S_\alpha[f(t)].
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H_1 &= H(a_1 t - \alpha - a_1 t_1) - H(a_1 t - \alpha - a_1 t_1 - a_2 \Delta t_2), \\
H_2 &= H(a_2(t - t_1) + a_1 \Delta t_1 - \alpha) - H(a_2(t - t_1) + a_1 \Delta t_1 - \alpha - a_1 t_1).
\end{aligned}$$

Обобщенное преобразование подобия определим по правилу

$$G_\alpha[f(t)] = f(\alpha t) H(t_1 - t) + f\left(\alpha t + (\alpha - 1)\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)t_1\right) H(t - t_1).$$

ТЕОРЕМА 9. Теорема подобия. Если $f(t)$ функция-оригинал, $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$G_\alpha[f(t)] \leftarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема подобия для преобразования Лапласа имеет вид

$$\tilde{f}(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$J[\tilde{f}(\alpha t)] \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Найдем функцию $J[\tilde{f}(\alpha t)]$. По определению имеем

$$\begin{aligned}
J[\tilde{f}(\alpha t)] &= J\left[f\left(\frac{\alpha t}{a_1}\right) H(a_1 t_1 - \alpha t) + f\left(\frac{\alpha t - a_1 t_1}{a_2} + t_1\right) H(\alpha t - a_1 t_1)\right] = \\
&= \left(f\left(\frac{\alpha a_1 t}{a_1}\right) H(a_1 t_1 - a_1 t) + f\left(\frac{\alpha a_1 t - a_1 t_1}{a_2} + t_1\right) H(a_1 t - a_1 t_1)\right) H(t_1 - t) + \\
&\quad + \left(f\left(\frac{\alpha(a_2(t - t_1) + a_1 t_1)}{a_1}\right) H(a_1 t_1 - a_2(t - t_1) - a_1 t_1) + \right. \\
&\quad \left. + f\left(\frac{\alpha a_2(t - t_1) + a_1 t_1 - a_1 t_1}{a_2} + t_1\right) H(a_2(t - t_1) + a_1 t_1 - a_1 t_1)\right) H(t - t_1) = \\
&= f(\alpha t) H(t_1 - t) + f\left(\alpha t + (\alpha - 1)\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)t_1\right) H(t - t_1).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Для уточнения теоремы 5 выберем функцию $x(t)$ как в начале п.3.1. Тогда производная функции $x(t)$ существует всюду кроме точек $t_1, t_2, \dots, t_n$ и вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
x'(t) &= a_1(H(t - t_0) - H(t - t_1)) + a_2(H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\
&\quad + a_3(H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \dots + a_{n+1}H(t - t_n),
\end{aligned}$$

значит,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x'(t)} &= \frac{1}{a_1}(H(t - t_0) - H(t - t_1)) + \frac{1}{a_2}(H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\
&\quad + \frac{1}{a_2}(H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \dots + \frac{1}{a_{n+1}}H(t - t_n).
\end{aligned} \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 10. Дифференцирование оригинала. Пусть функции $f(t)$ и $f'(t)$ являются оригиналами, тогда

$$L \left[\frac{1}{x'(t)} f'(t) \right] \equiv pF(p) - f(0),$$

где функция $\frac{1}{x'(t)}$ определена формулой (9). В развернутом виде справедлива формула

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} e^{-a_1 p t} f'_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1 \Delta t_1)} f'_2(t) dt \\ & + \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2 \Delta t_2+a_1 \Delta t_1)} f'_3(t) dt + \dots + \\ & + \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_3(t-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} f'_{n+1}(t) dt = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 11. Интегрирование изображения. Если функция $f(t)$ — оригинал, функция $f(t)/t$ — ограничена в окрестности точки $t=0$, то функция

$$\left(\frac{1}{a_1 t} H(t_1 - t) + \frac{1}{a_2(t - t_1) + a_1 t_1} H(t - t_1) \right) f(t)$$

является оригиналом и

$$\left(\frac{1}{a_1 t} H(t_1 - t) + \frac{1}{a_2(t - t_1) + a_1 t_1} H(t - t_1) \right) f(t) \leftarrow \int_p^{\infty} F(p) dp.$$

ТЕОРЕМА 12. Вторая теорема о сдвиге. Если $f(t)$ функция-оригинал, $f(t) \leftarrow F(p)$, то для любого комплексного числа λ функция

$$\left(H(t_1 - t) + e^{a_2(t-t_1)\lambda} H(t - t_1) \right) e^{\lambda a_1 t} f(t)$$

тоже оригинал и

$$\left(H(t_1 - t) + e^{a_2(t-t_1)\lambda} H(t - t_1) \right) e^{\lambda a_1 t} f(t) \leftarrow F(p - \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $e^{\lambda t} \tilde{f}(t) \leftarrow F(p - \lambda)$. Затем преобразуем выражение $J[e^{\lambda t} \tilde{f}(t)]$. Будем иметь

$$\begin{aligned} J[e^{\lambda t} \tilde{f}(t)] &= J \left[e^{\lambda t} f \left(\frac{t}{a_1} \right) H(a_1 t_1 - t) + e^{\lambda t} f \left(\frac{t - a_1 t}{a_2} + t_1 \right) H(t - a_1 t_1) \right] = \\ &= \left(e^{\lambda a_1 t} f \left(\frac{a_1 t}{a_1} \right) H(a_1 t_1 - a_1 t) + e^{\lambda a_1 t} f \left(\frac{a_1 t - a_1 t}{a_2} + t_1 \right) H(a_1 t - a_1 t_1) \right) \cdot \\ &\cdot H(t_1 - t) + \left(e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1 t_1)} f \left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1 t_1}{a_1} \right) H(a_1 t_1 - a_2(t-t_1) - a_1 t_1) + \right. \\ &+ e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1 t)} f \left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1 t_1 - a_1 t}{a_2} + t_1 \right) H(a_2(t-t_1) + a_1 t_1 - a_1 t_1) \left. \right) \cdot \\ &\cdot H(t - t_1) = e^{\lambda a_1 t} f(t) H(t_1 - t) + e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1 t)} f(t) H(t - t_1). \end{aligned}$$

Вспоминая, что $L[f(t)] = \tilde{L}[\tilde{f}(t)]$, доказательство закончим.

ТЕОРЕМА 13. *Дифференцирование изображений. Если функция $f(t)$ — оригинал, то функция*

$$-(a_1 t H(t_1 - t) + (a_2(t - t_1) + a_1 t) H(t - t_1)) f(t) -$$

также оригинал, причем

$$-(a_1 t H(t_1 - t) + (a_2(t - t_1) + a_1 t) H(t - t_1)) f(t) \leftarrow F'(p).$$

ТЕОРЕМА 14. *Свертка функций $f(t) * g(t)$ вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) = & a_1 \int_0^t \tilde{f}(a_1(t - \tau)) g_1(\tau) d\tau H(t - t_0) + \\ & + \left(a_1 \int_0^{t_0} \tilde{f}(a_2(t - t_0) + a_1(t_0 - \tau)) g_1(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + a_2 \int_{t_0}^t \tilde{f}(a_2(t - \tau)) g_2(\tau) d\tau \right) H(t - t_0). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся случаем $n = 1$. Воспользуемся формулой (3) для свертки и определением 2 оператора преобразования. После замены переменных в интегралах получим требуемую формулу.

СЛЕДСТВИЕ 2. *При $n = 1$ интеграл дробного порядка α функции $f(t)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}[f] = & a_1^\alpha \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g_1(\tau) d\tau H(t_0 - t) + \\ & + \left(a_1 \int_0^{t_0} \frac{(a_2(t - t_0) + a_1(t_0 - \tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g_1(\tau) d\tau + a_2^\alpha \int_{t_0}^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g_2(\tau) d\tau \right) \cdot \\ & \cdot H(t - t_0). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Воспользуемся формулой (4) и определением интеграла дробного порядка α .*

Представлено обобщенное интегральное преобразование Лапласа для оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: первая и вторая теоремы о сдвиге, теорема подобия, теоремы о дифференцировании оригинала и изображения, теоремы о свертке. Установлен аналог формулы обращения Меллина. Применение метода операторов преобразования позволило связать обобщенное и классическое преобразование Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщенного преобразования Лапласа. Получены применения обобщенного преобразования Лапласа в решении начально-краевых задач математической физики.

4. Аналог задачи о нагреве полубесконечного стержня

4.1. Постановка задачи

Найти функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$u''_{xx} = B(u), t \in \bigcup_{k=0}^n (t_k, t_{k+1}), 0 < x, t_0 = 0, t_{n+1} = \infty$$

$$B(u) = \frac{1}{a_1} u'_t (H(t-t_0) - H(t-t_1)) + \frac{1}{a_2} u'_t (H(t-t_1) - H(t-t_2)) + \dots + \frac{1}{a_{n+1}} u'_t H(t-t_n) \quad (10)$$

граничным условиям

$$u|_{x=0} = f(t), u|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = 0$$

и условию непрерывности решения в момент $t = t_k, k = 1, \dots, n$

$$u(t_k - 0, x) = u(t_k + 0, x).$$

Как известно [21], решение классической задачи о нагреве полубесконечного стержня имеет вид

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t G(t-\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau,$$

где

$$G(t, x) = \frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Применим оператор преобразования J к функции $\tilde{u}(t, x)$. Тогда получим

$$u(t, x) = J \left[\int_0^t G(t-\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau \right].$$

Подставим выражение оператора преобразования (5). В результате установим формулу

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^{a_1 t} G(a_1 t - \tau) f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau H(t_0 - t) + \\ & + \int_0^{a_1 \Delta t_1} G(a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1 - \tau) f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau (H(t-t_0) - H(t-t_1)) + \\ & + \int_{a_1 \Delta t}^{a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1} G(a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1 - \tau) f\left(\frac{t - a_1 \Delta t_1}{a_2} + t_1\right) d\tau \cdot \\ & \cdot (H(t-t_0) - H(t-t_1)) + \dots + \int_0^{a_1 \Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1 - \tau) \cdot \\ & \cdot f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau H(t-t_n) + \int_{a_1 \Delta t_1}^{a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1 - \tau) \cdot \\ & \cdot f\left(\frac{\tau - a_1 \Delta t_1}{a_2} + t_1\right) d\tau H(t-t_n) + \\ & + \int_{a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1}^{a_3 \Delta t_3 + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1 - \tau) \cdot \\ & \cdot f\left(\frac{\tau - a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2}{a_3} + t_2\right) d\tau H(t-t_n) + \dots \\ & + \int_{a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1}^{a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1 - \tau) \cdot \\ & \cdot f\left(\frac{\tau - a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2 - \dots - a_n \Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n\right) d\tau H(t-t_n). \end{aligned} \quad (11)$$

4.2. Итерационный алгоритм вычисления температурного поля

Пусть известно $u_n(t, x)$ решение задачи (10) для случая n точек деления $t_1, t_2, \dots, t_n$ и коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ с краевым условием

$$u_n(t, 0) = f_n(t).$$

Обозначим оператор, определяющий решение $u_n(t, x)$ по известному краевому условию $f_n(t)$ символом A_x . Тогда $u_n(t, x) = A_x f_n(t)$. Пусть неизвестно $u_{n+1}(t, x)$ решение задачи (10) для случая точек деления $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ и набора коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ с краевым условием

$$u_{n+1}(t, 0) = f_{n+1}(t).$$

Наша цель: выразить решение $u_{n+1}(t, x)$ через модельное решение $u_n(t, x)$. Определим для этого оператор преобразования J

$$f_{n+1}(t) \equiv J[f_n(t)] = f_n(t) H(t_{n+1} - t) + f_n(a_{n+2}(t - t_{n+1}) + t_{n+1}) H(t - t_{n+1}).$$

Тогда обратный оператор преобразования имеет вид

$$f_n(t) \equiv J^{-1}[f_{n+1}(t)] = f_{n+1}(t) H(t_{n+1} - t) + f_{n+1}\left(\frac{t - t_{n+1}}{a_{n+2}} + t_{n+1}\right) H(t - t_{n+1}).$$

Таким образом,

$$u_{n+1}(t, x) = J[A_x J^{-1}[f(t)]].$$

Решение задачи (10) получается последовательным добавлением по одной новой точке сопряжения к модельной задаче. При этом классическая задача о нагреве полубесконечного стержня рассматривается в качестве модельной. Вычисления производятся по итерационному алгоритму, который экономичнее алгоритма, основанного на формуле (11).

Заметим, что задачу (10) можно решать пошаговым применением классического преобразования Лапласа. Первым шагом вычисляем решение задачи (10) на промежутке $(0, t_1)$, затем значение найденного решения в точке t_1 берется в качестве начального условия для решения на промежутке (t_1, t_2) и т.д. Процесс заканчивается вычислением решения на последнем промежутке (t_n, ∞) . Преимущество метода, разработанного в статье, состоит в том, что решение задачи получается сразу для всех значений переменной t и, как следствие, все формулы имеют явный вид, т.е. не содержат итерационных ссылок, обращение к которым существенно снижает эффективность вычислений.

5. Обобщение операторов преобразования

Пусть известно $\tilde{u}(t, x)$ — решение задачи Коши для линейного уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами при производной ∂_t , т.е. с оператором $B(u)$ из формулы (10) с точками деления $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ и набором коэффициентов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}$. Требуется найти решение $u(t, x)$ — задачи Коши для того же самого уравнения, но с другими точками деления $t_1, t_2, \dots, t_n$ и другим набором коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Оператор J , действующий по формуле

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_1}{\tilde{a}_1}t\right), t_0 \leq t \leq t_1, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_2}{\tilde{a}_2}(t - t_1) + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_1 \leq t \leq t_2, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_3}{\tilde{a}_3}(t - t_2) + \frac{a_2}{\tilde{a}_2}\Delta t_2 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_2 \leq t \leq t_3, \\ \dots \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}_{n+1}}(t - t_n) + \frac{a_n}{\tilde{a}_n}\Delta t_n + \dots + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_n \leq t < \infty, \end{array} \right. \quad (12)$$

назовем прямым оператором преобразования.

Определим набор точек деления

$$\tilde{t}_0 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = \frac{a_2}{\tilde{a}_2} \Delta t_2 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} \Delta t_1, \dots, \tilde{t}_n = \frac{a_n}{\tilde{a}_n} \Delta t_n + \dots + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} \Delta t_1.$$

Выражение обратного оператора J^{-1} получается, если модельную задачу считать основной, а основную - модельной, т.е. выполнить замену: $\tilde{f} \leftrightarrow f, \tilde{a}_k \leftrightarrow a_k, \tilde{t}_k \leftrightarrow t_k$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Решение задачи (10) имеет вид

$$u(t, x) = J[\tilde{u}(t, x)].$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \dots, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} \neq \tilde{a}_{n+1}$, то $\tilde{t}_0 = t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}, \dots, \tilde{t}_n = t_n$ и оператор преобразования имеет вид

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}(t), t_0 \leq t \leq t_n, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}_{n+1}}(t - t_n) + t_n\right), t_n \leq t \end{cases}$$

Значит, в промежутке $t_0 \leq t \leq t_n$ решение основной задачи равно решению модельной задачи: $u(t, x) = \tilde{u}(t, x)$; а в промежутке $t_n \leq t$ при $a_{n+1} > \tilde{a}_{n+1}$ решение $u(t, x)$ опережает модельное решение $\tilde{u}(t, x)$ и при $a_{n+1} < \tilde{a}_{n+1}$ решение $u(t, x)$ запаздывает относительно модельного решения $\tilde{u}(t, x)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $a_1 \neq \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \dots, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$, то

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 &= \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = t_2 - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \dots, \tilde{t}_n = t_n - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1 \\ \tilde{t}_0 &= t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}, \dots, \tilde{t}_n = t_n. \end{aligned}$$

Оператор преобразования принимает вид

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_1}{\tilde{a}_1} t\right), t_0 \leq t \leq t_1, \\ f(t) = \tilde{f}\left(t - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1\right), t_1 \leq t. \end{cases}$$

Таким образом, при $a_1 > \tilde{a}_1$ решение $u(t, x)$ опережает модельное решение $\tilde{u}(t, x)$; при $a_1 < \tilde{a}_1$ решение $u(t, x)$ запаздывает относительно модельного решения $\tilde{u}(t, x)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \dots, a_i \neq \tilde{a}_i, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$, то

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 &= \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = t_2 - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \dots, \tilde{t}_n = t_n - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1 \\ \tilde{t}_0 &= t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}, \dots, \tilde{t}_n = t_n. \end{aligned}$$

Оператор преобразования имеет вид

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}(t), t_0 \leq t \leq t_{i-1}, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_i}{\tilde{a}_i}(t - t_{i-1}) + t_{i-1}\right), t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ f(t) = \tilde{f}\left(t - t_i + \frac{a_i}{\tilde{a}_i}(t_i - t_{i-1}) + t_{i-1}\right), t_i \leq t < \infty. \end{cases}$$

Таким образом,

1. при значениях $t_0 \leq t \leq t_{i-1}$ решение основной задачи $u(t, x)$ совпадает с модельным решением $\tilde{u}(t, x)$,
2. при $t_{i-1} \leq t$ для значений $a_i < \tilde{a}_i$ решение основной задачи $u(t, x)$ запаздывает относительно модельного решения $\tilde{u}(t, x)$, а для значений $a_i > \tilde{a}_i$ решение $u(t, x)$ опережает модельное решение $\tilde{u}(t, x)$.

6. Заключение

Представлено обобщенное интегральное преобразование Лапласа для оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: первая и вторая теоремы о сдвиге, теорема подобия, теоремы о дифференцировании оригинала и изображения, теоремы о свертке. Установлен аналог формулы обращения Меллина. Применение метода операторов преобразования позволило связать обобщенное и классическое преобразование Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщенного преобразования Лапласа. Получены применения обобщенного преобразования Лапласа в решении начально-краевых задач математической физики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aghili Arman. New trends in Laplace type integral transforms with applications // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 2017. Vol. 35, № 1, pp. 173-193.
2. Baeumer Boris. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform // Transactions of the American Mathematical Society, 2003. Vol.355, №3, pp.1201-1212 .
3. Brychkov Yu. A. , Prudnikov A. P. , Shishov V. S. Operational calculus // Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., VINITI, Moscow, 1979. Vol. №16, pp. 99–148.
4. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications // IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions, 2014. pp. 2938-2944 .
5. Ganzha, E.I. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol // Programming and Computer Software, 2012. Vol. № 38, pp.150–155.
6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform// Ain Shams Engineering Journal, 2019, Vol. 10, № 4, pp. 841-845.
7. Jarad Fahd , Abdeljawad Thabet. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators // Results in Nonlinear Analysis, 2018. Vol 1, № 2, pp. 88-98.
8. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions // Axioms, 2019. Vol 8, № 3, pp. 87.
9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. Differential operators on the superline // Berezinians, and Darboux transformations. Lett.Math.Phys., 2017. Vol. 107, Vol. 9, pp. 1686–1714.
10. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons // Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions // Applicable analysis and discrete mathematics, 2018, Vol. 12, №1, pp. 257–272.
12. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U. On one class of differential operators and their application // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2015, Vol. 288, pp.142-155.

13. Pinelas Sandra, Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. Laplace - Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation // Non autonomous Dynamical Systems, 2017. Vol 4, № 1, pp. 22-30.
14. Sharma V. D., Thakare M. M. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform // International journal of engineering sciences research technology, 2016. Vol. №5 pp. 667-670.
15. Sharma, V. D., Thakare, M. M. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators // International Journal of Pure Applied Sciences Technology, 2013. Vol. 16, № 1, pp. 20-25.
16. Tsarev, S.P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations // In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC, 2005. pp. 325–331.
17. Zaikina S. M. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehniveskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2014. Vol 1, №34, pp. 19-24.
18. Jeffreys H. and Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics // 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems // Springer Nature Switzerland, 2020, pp. 447-466.
20. Yaremko O.E. Transformation operator and boundary value problems // Differential Equation, 2004, Vol. 40, № 8, pp. 1149-1160.

REFERENCES

1. Aghili Arman. New trends in Laplace type integral transforms with applications // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 2017. Vol. 35, no. 1, pp. 173-193.
2. Baeumer Boris. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform // Transactions of the American Mathematical Society, 2003. Vol. 355, no. 3, pp. 1201-1212.
3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. Operational calculus // J. Soviet Math., 1981. Vol. 15, no. 6, pp. 733–765.
4. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications // IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions, 2014. pp. 2938-2944.
5. Ganzha, E.I. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol // Programming and Computer Software, 2012. Vol. no. 38, pp. 150–155.
6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform // Ain Shams Engineering Journal, 2019, Vol. 10, no. 4, pp. 841-845.
7. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators // Results in Nonlinear Analysis, 2018. Vol 1, no. 2, pp. 88-98.
8. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions // Axioms, 2019. Vol 8, no. 3, pp. 87.

9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. Differential operators on the superline // Berezinians, and Darboux transformations. Lett.Math.Phys.,2017. Vol. 107, Vol. 9, pp. 1686–1714.
10. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons // Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions // Applicable analysis and discrete mathematics,2018, Vol. 12, no.1, pp. 257–272.
12. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U. On one class of differential operators and their application // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2015, Vol. 288, pp.142-155.
13. Pinelas Sandra, Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. Laplace - Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation // Non autonomous Dynamical Systems, 2017. Vol 4, no. 1, pp. 22-30.
14. Sharma V. D., Thakare M. M. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform // International journal of engineering sciences research technology, 2016. Vol. no. 5 pp. 667-670.
15. Sharma, V. D., Thakare, M. M. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators // International Journal of Pure Applied Sciences Technology,2013. Vol. 16, no. 1, pp.20-25.
16. Tsarev, S.P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations // In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC, 2005. pp. 325–331.
17. Zaikina S. M. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehniveskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematicheskie Nauki,2014. Vol 1, no.34, pp. 19-24.
18. Jeffreys H. and Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics // 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems // Springer Nature Switzerland, 2020, pp.447-466.
20. Yaremko O.E. Transformation operator and boundary value problems // Differential Equation, 2004, Vol.40,no.8,pp.1149-1160.

Получено 22.07.2020

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.2

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-21-41

Новая оценка для исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров

Аллаков Исмаил — профессор, доктор физико-математических наук, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).

e-mail: iallakov@mail.ru

Сафаров Абдувахид Шукурович — кандидат физико-математических наук, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).

e-mail: asafarov1977@mail.ru

Аннотация

В работе изучается вопрос о представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии, т.е. бинарная задача Гольдбаха, когда простые числа берутся из арифметической прогрессии. Доказаны новые оценки для количества четных натуральных чисел которые (возможно) не представимы в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии и для числа представления данного натурального числа, в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии.

Ключевые слова: Характер Дирихле, нули L -функции, гипотеза Римана, исключительное множество, исключительный нуль, оценка снизу, оценка сверху.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров. Новая оценка для исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 21–41.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.2

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-21-41

New estimates for the exceptional set of the sum of two primes from an arithmetic progression.

I. Allakov, A. Sh. Safarov

Allakov Ismail — professor, doctor of physical and mathematical sciences, Termez State University (Uzbekistan, Termez).

e-mail: iallakov@mail.ru

Safarov Abduvahid Shukurovich — candidate of physical and mathematical sciences, Termez State University (Uzbekistan, Termez).

e-mail: asafarov1977@mail.ru

Abstract

The paper studies the question of representing numbers as the sum of two primes from an arithmetic progression, that is, the binary Goldbach problem, when primes are taken from an arithmetic progression. New estimates are proved for the number of even natural numbers that are (possibly) not representable as a sum of two primes from an arithmetic progression and for a number representing a given natural number, as a sum of two primes from an arithmetic progression.

Keywords: The Dirichlet character, Dirichlet L -function, exceptional set, representation numbers, exceptional zero, exceptional nature, main member, remaining member.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

I. Allakov, A. Sh. Safarov, 2022, "New estimates for the exceptional set of the sum of two primes from an arithmetic progression", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 21–41.

1. Введение

Формулировка результатов

Пусть X — достаточно большое действительное число, n — натуральное, p, p_1, p_2 — простые числа, $E(X)$ — количество четных натуральных чисел которые (возможно) не представимы в виде суммы двух простых, т.е. в виде

$$n = p_1 + p_2. \quad (0.1)$$

Далее, пусть $M(D, X)$ — множество четных натуральных чисел $n \leq X$, которые (возможно) не представимы в виде

$$n = p_1 + p_2, p_i \equiv l_i \pmod{D}, (l_i, D) = 1, i = 1, 2; \quad (0.2)$$

здесь l_1 и l_2 произвольные фиксированные целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq l_1, l_2 < D, (l_1, D) = 1, (l_2, D) = 1$. Обозначим: $E(D, X) = \text{card} M(D, X)$; $R(n, D)$ — число представлений n в виде (0.2); $c_j (j = 1, 2, \dots)$ — некоторые положительные постоянные, $\varphi(a)$ — функция Эйлера. Числа, которые представимы в виде (0.1) будем называть гольдбаховыми числами [1], а числа, которые представимы в виде (0.2), будем называть гольдбаховыми числами в арифметической прогрессии. После известных работ И.М.Виноградова [2,3], и Хуа Ло Кена [4,5], Ван дер Корпут [6], А.Г.Чудаков [7] и Т.Эстерман [8] применили круговой метод Харди-Литтлвуда [9,10] к решению бинарной проблемы Гольдбаха и доказали, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел. Точнее говоря, они доказали, что если обозначить через $E(X)$ — число четных чисел $n, n \leq X$, которые возможно не представимы в виде суммы двух простых чисел, тогда $E(X) \ll \frac{X}{\ln^A X}$. А.Ф.Лаврик [11] получил асимптотическую формулу для $R(n, D)$, которые справедливы для всех $n, n \leq X$, за исключением $E(D, X) \ll \frac{X}{\ln^A X}$ значений из них (где A — некоторое число, $\ll$ — символ Виноградова, запись $f \ll g$ — означает, что $|f| \leq c_1 g$, (т.е. это символ O — большое), где c_1 — постоянное число.

Затем Р.Вон [12], Г.Монтгомери и Р.Вон [13] улучшили эту оценку показав, что $E(X) < X \exp(-c_2 \sqrt{\ln X})$ и $E(X) < X^{1-\delta}$, соответственно. Здесь X — достаточно большое, δ — малое действительные числа, c_2 — абсолютное постоянное. И.Аллаков [14], реализуя идею Б.М.Бредихина, получил оценку снизу для $R(n)$ справедливую для всех $n, n \leq X$, за исключением $E(X) < X^{1-\delta}$ значений из них. Здесь $R(n)$ — числа представления данного натурального

числа n в виде $(0,1)$. Аналогичные результаты были получены относительно задач Харди-Литтлвуда [15,16], Хуа-Ло-Кена [17,18,19] и об одновременном представлении чисел суммой простых чисел [20,21,22]. Используя схемы работы А.Ф.Лаврика [11] и Р.Вона [12], И.Аллаков [23] доказал теорему:

ТЕОРЕМА А. При $D = p^v$ и $D \ll \ln^A X$ справедливы оценки:

$$E(D, X) \leq c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-c_4 \sqrt{\ln X})$$

и для $n \notin M(D, X), n \leq X$

$$R(n, D) \geq c_5 \frac{n}{\varphi(D) \ln^2 n} \left(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(c_6 \sqrt{\ln n})} \right) \exp\left(-\frac{c_7}{4} \sqrt{\ln n}\right).$$

В настоящей работе докажем теорему:

ТЕОРЕМА 1. Если X достаточно большое и $\delta > 0$ достаточно малое действительное числа, то при $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ справедливы оценки:

$$E(D, X) \leq c_8 \frac{X^{1-\delta_1}}{\varphi(D)}$$

и для $n \notin M(D, X), n \leq X$

$$R(n, D) \geq c_9 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) \ln^2 n} \left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1 \right). \quad (0.3)$$

Теорема 1 является усилением и обобщением в арифметическую прогрессию соответствующих результатов И.Аллакова [23] и Монтгомери - Вона [13]. Отметим, что теорема 1 отличается от теоремы А в следующем: в теореме А разность арифметической прогрессии равна $D = p^v$ (т.е. равна степени простого числа) и $D \ll \ln^A X$, а исключительное множество удовлетворяет оценке $E(D, X) \leq c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-c_4 \sqrt{\ln X})$, а в теореме 1 D — произвольное и $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 достаточно малое) и исключительное множество удовлетворяет оценке $E(D, X) \leq c_8 \frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}$ (где δ достаточно малое и $(10\delta_1 < \delta)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве теоремы 1 мы исключаем из рассмотрения некоторые $n \leq X$, которые не можем получить, используя наши методы, подходящих оценок. Совокупность всех этих исключаемых n составляет так называемое исключительное множество рассматриваемой задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Словосочетание "возможно непредставимые в виде ..." здесь означает, что для таких n также могут существовать такие представления, но их количество $R(n, D)$ для данного n уже не будет, удовлетворят неравенство, указанное в теореме 1, а будет удовлетворять обратное неравенство, т.е.

$$R(n, D) < c_9 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) \ln^2 n} \left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1 \right).$$

2. Обозначение и необходимые леммы

Пусть a и q , $(a, q) = 1$ — целые положительные числа, а α , $(0 < \alpha < 1)$ произвольное действительное числа, χ_q — характер Дирихле по модулю q (см. [24]), $\bar{\chi}_q$ — характер Дирихле по модулю q сопряжены с χ_q .

Положим $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$, $d = (q, D)$, $N = \frac{qg}{d} \pmod{q}$, (т.е. через N обозначен наименьший положительный вычет числа $\frac{qg}{d}$ по модулю q), здесь g определяется из сравнения

$gqd^{-1} \equiv 1(\text{mod } d)$; $H(q) = 1$, если $(qd^{-1}; D) = 1$; противном случае $H(q) = 0$ (см. [11,23]). Для удобства записи также обозначим

$$S_i = S_i(X; \alpha) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_p(l_i) \sum_{P < p \leq X} \chi_D(p_i) (\ln p_i) e(p_i \alpha), \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$g_u^{(i)} = g_u^{(i)}(X; \alpha) = \sum_{\substack{P < n_i \leq X \\ n_i \equiv l_i(\text{mod } D)}} n_i^{u-1} e(n_i \alpha), \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

где P достаточно большое действительное число, зависящее от X . При этих обозначениях, используя свойство характеров Дирихле [24,25], имеем

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{P < p_1, p_2 \leq X} \ln p_1 \ln p_2 ((p_1 + p_2) \alpha) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_1) \chi_D(p_1) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_2) \chi_D(p_2) = \\ &= \sum_{\substack{P < p_1, p_2 \leq X \\ p_1 \equiv l_1, p_2 \equiv l_2(\text{mod } D)}} \ln p_1 \ln p_2 ((p_1 + p_2) \alpha) = \sum_{P < n \leq 2X} R(n, D) e(n \alpha), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$R(n, D) = \sum_{\substack{n=p_1+p_2 \\ P < p_1, p_2 \leq X \\ p_1 \equiv l_1, p_2 \equiv l_2(\text{mod } D)}} \ln p_1 \ln p_2. \quad (1.4)$$

Если $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$, то используя суммирование по частям (см. лемма 3.5 работы [23]), получим

$$g_u^{(i)}(X; \alpha) \ll \min \left(\alpha^{-u}, \left(\frac{X}{D} \right)^u \right), \quad (1.5)$$

где $\|\alpha\|$ — означает расстояние от α до ближайшего целого числа, т.е.

$$\|\alpha\| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \alpha, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Полагая

$$P = X^{6\delta} \text{ и } Q = XP^{-1}, \quad (1.6)$$

делим интервал $[0, 1]$ на основные и дополнительные подинтервалы. Для $1 \leq a \leq q \leq P$, $(a, q) = 1$ через $M(q, a)$ обозначим основной интервал $[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются, так как

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \geq \frac{1}{qq'} > \frac{2P}{qq'Q} \geq \frac{q+q'}{qq'Q} = \frac{1}{qQ} + \frac{1}{q'Q}.$$

Объединение основных интервалов обозначим через N . Далее, пусть T — множество тех α , для которых $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}$, $\alpha \notin N$. Таким образом, T — объединение дополнительных интервалов. Теперь $R(n, D)$ можно представить в виде

$$R(n, D) = R_1(n, D) + R_2(n, D), \quad (1.7)$$

где

$$R_1(n, D) = \int_N S(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \quad R_2(n, D) = \int_T S(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

При изучении $R(n, D)$ будем использовать следующее леммы.

ЛЕММА 1.1 Пусть χ — характер Дирихле модуля $q \leq P$ и $L(s, \chi)$ — соответствующие L — функции Дирихле, тогда:

а) функции $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$ в области:

$$1 - \frac{0,0019128}{\ln P} \leq \sigma \leq 1, \text{ и } |t| \leq P^{\frac{19}{4}}, \quad (1.8)$$

могут иметь единственный вещественный нуль $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{q} \leq P$; (если существует такой вещественный исключительный нуль, то положим $E_{\tilde{\beta}} = 1$, иначе положим $E_{\tilde{\beta}} = 0$).

б) если $L(s, \chi)$ имеет такой (исключительный) нуль, то область (1.8) можно заменить на область

$$\sigma > 1 - \frac{1}{81 \ln P} \ln \left(\frac{1}{200 \tilde{\delta} \ln P} \right), \quad |t| \leq P^\varepsilon, \quad \tilde{\delta} \ln P \leq \frac{1}{200e}; \quad (1.9)$$

в) этот исключительный нуль удовлетворяет неравенствам

$$\frac{0,4961}{\tilde{q}^{1/2} \ln^2 \tilde{q}} < 1 - \tilde{\beta} < \frac{0,3}{\ln \tilde{q}}.$$

Доказательство леммы 1.1 имеется в работах [14,25,26,27].

ЛЕММА 1.2 Пусть

$$\aleph = \frac{(1 + 16\delta)}{115}, \quad 0 < \delta < 0,01 \quad \text{и} \quad \exp(\ln^{1/2} X) \leq P \leq X^\aleph, \quad X P^{-1} \leq h \leq \frac{1}{2} X,$$

тогда

$$\sum_{q \leq P} \sum_{\chi}^* \max_{x \leq \frac{3}{2} X} \max_{h \leq \frac{1}{2} X} \left(h + \frac{X}{P} \right)^{-1} \left| \sum_{x-h}^x \# \chi(p) \ln p \right| < \begin{cases} c_2 \exp \left(-c_3 \frac{\ln X}{\ln P} \right), & E_{\tilde{\beta}} = 0; \\ c_4 \exp \left(-c_5 \frac{\ln X}{\ln P} \right) (1 - \tilde{\beta}) \ln P, & E_{\tilde{\beta}} = 1, \end{cases}$$

где

$$\sum \# \chi(p) \ln p = \begin{cases} \sum_{x-h}^x \ln p - \sum_{x-h < n \leq x} 1, & \text{при } q = 1, \\ \sum_{x-h}^x \tilde{\chi}(p) \ln p + \sum_{\substack{x-h < n \leq x \\ n > 0}} n^{\tilde{\beta}-1}, & \text{при } E_{\tilde{\beta}} = 1, \\ \sum_{x-h}^x \chi(p) \ln p, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 1.2 имеется в работах [13,14,28].

ЛЕММА 1.3 [13]. Пусть χ_0 — главный характер по модулю q , χ_i — примитивные характеры по модулю r_i , $i = 1, 2$; $r_3 = [r_1, r_2]$ — наименьший общий кратный r_1 и r_2 . Тогда для $m \neq 0$

$$\sum_q \frac{1}{\varphi^2(q)} |c_{\chi_1 \chi_2 \chi_0}(m) \tau(\tilde{\chi}_1 \chi_0) \tau(\tilde{\chi}_2 \chi_0)| \ll \frac{|m|}{\varphi(|m|)},$$

где суммирование ведется по всем q кратным r_1 и r_2 .

§2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Рассмотрим $R_2(n, D)$. В силу равенству (1.7) и тождества Парсеваля [29], имеем

$$\sum_n R_2^2(n, D) = \int_T |S(\alpha)|^2 d\alpha \leq (\max_T |S_1(\alpha)|)^2 \int_T |S_2(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (2.1)$$

здесь

$$\int_T |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \leq \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \leq \sum_{P < p_1 p_2 \leq X} \ln p_1 \ln p_2 \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} e((p_1 - p_2)\alpha) d\alpha \leq \sum_{P < p \leq X} \ln^2 p.$$

Согласно, теореме 5.2.1 К.Праха [27] при $X \geq 2$ и $D \leq X^{1/2}$, имеем

$$\sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv l \pmod{D}}} \ln p \ll \frac{X}{\varphi(D)}.$$

Поэтому

$$\int_T |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll (\ln X) \sum_{\substack{P < p \leq X \\ p \equiv l \pmod{D}}} \ln p \ll \frac{X}{\varphi(D)} \ln X. \quad (2.2)$$

Для того, чтобы оценить $\max_{\alpha \in T} |S_1(\alpha)|^2$ будем использовать оценки, полученные в работе [16], согласно которым: если $R \leq q \leq \frac{X}{R}$ и $1 \leq R \leq X^{\frac{1}{3}}$, $(a, q) = 1$, $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{2R}{qN}$, тогда

$$S(\alpha) \ll XDR^{-\frac{1}{2}} (\ln X)^{\frac{11}{2}}. \quad (2.3)$$

Согласно теореме Дирихле об аппроксимации существуют такие $q \leq Q$ и a с условием $1 \leq a \leq q$, $(a, q) = 1$, для которых $\left| \alpha - aq^{-1} \right| \leq (qQ)^{-1}$. Это означает, что $\alpha \in M(q, a)$, если $q \leq P$. Значит для $\alpha \in T$ имеем $q > P$ и, следовательно, в (2.3) можем полагать $R = P$. Теперь из (2.1), (2.2), (2.3) следует

$$\sum_{n \leq X} R_2^2(n, D) \ll \frac{X^3 D^2}{P \varphi(D)} \ln^{12} X. \quad (2.4)$$

3. Упрощение интеграла по основным интервалам.

Согласно обозначению (1.1) имеем

$$S_i = S_i(X; \alpha) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{P < p \leq X} \chi_D(p_i) (\ln p_i) e(p_i \alpha), \quad i = 1, 2.$$

Так как $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$ и если $p > P$ и $q \leq P$, то $(p, q) = 1$. Отсюда следует, что

$$e(p\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \chi_q(pa) \tau(\bar{\chi}_q) e(p\eta) \quad (3.1)$$

Используя (3.1) в (1.1), S_i можем написать в виде:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{P < p_i \leq X} \chi_D(p_i) (\ln p_i) \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \chi_q(p_i a) \tau(\bar{\chi}_q) e(p\eta) \right) = \\ &= \frac{1}{\varphi(D) \varphi(q)} \sum_{\chi_D, \chi_q} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{h=1}^q \bar{\chi}_q(h) e\left(\frac{ah}{q}\right) \sum_{P < p_i \leq X} (\ln p_i) \chi_D(p_i) \chi_q(p_i) e(p_i \eta). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для удобства обозначим:

$$A_i = \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)} \sum_{\chi_D, \chi_q} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{h=1}^q \bar{\chi}_q(h) e\left(\frac{ah}{q}\right),$$

$$G_i = \sum_{P < p_i \leq X} (\ln p_i) \chi_D(p_i) \chi_q(p_i) e(p_i \eta) \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим G_i . Так как произведение характеров есть характер, ведущий модуль которого равняется наибольшему общему кратному модулей [10,26], то можем полагать

$$\chi_D(p_i) \chi_q(p_i) = \chi_m(p_i), \quad m = \frac{qD}{(q, D)} = \frac{qD}{d}.$$

Следовательно, $G_i = \sum_{P \leq p_i \leq X} \ln p_i \chi_m(p_i) e(p_i \eta) = G_i(\chi_m, \eta)$. Из (2.2) получим

$$S_i = A_i G_i(\chi_m, \eta). \quad (3.3)$$

Применяя леммы 2.4 и 2.5 работы [11], при $Q' = D$, $Q'' = q$, $Q = m$ находим $\chi_m = \chi_m^0$, тогда и только, когда

$$A_i = \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)} \sum_{\chi_d} \sum_{h=1}^{q'} \bar{\chi}_d(l_i) \chi_d(h) e\left(\frac{ha}{q}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(d)}{\varphi(D)\varphi(q)} \sum_{h=1}^{q'} e\left(\frac{ha}{q}\right) = H(q) \frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi(D)\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} e\left(\frac{a}{q} N_1 l_i\right) = L_i \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$h \equiv l_i \pmod{d}$$

где $H(q)$ равен 1, если $\left(\frac{q}{d}, D\right) = 1$, иначе $H(q)$ равен 0. У нас $p > P$ обеспечивает, что $G_i(\chi_m, \eta) = G_i(\chi_m^*, \eta)$, где χ_m^* — примитивный характер по модулю m . Далее, положим,

$$G_i(\chi_m^o, \eta) = g_1^{(i)}(X, \eta) + W_i(\chi_m^0, \eta), \quad G_i(\tilde{\chi}_m \chi_m^o, \eta) = g_{\tilde{\beta}}^{(i)}(X, \eta) + W_i(\tilde{\chi}_m \chi_m^o, \eta) \quad (3.5)$$

и $G_i(\chi_m, \eta) = W_i(\chi_m, \eta)$, если $\chi_m \neq \chi_m^0$, $\chi_m \neq \tilde{\chi}_m \chi_m^0$, где χ_m^0 — главный характер по модулю m , а $\tilde{\chi}_m$ — исключительный характер по модулю m . Сначала пусть не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда, используя (3.3) и (3.5) из (3.2), находим

$$S_i = H(q) \frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi(D)\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} e\left(\frac{a}{q} N l_i\right) \left(g_1^{(i)}(X, \eta) + W_i(\chi_m, \eta) \right).$$

Отсюда

$$S_1 \cdot S_2 = A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) g_1^{(2)}(X, \eta) + A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) +$$

$$+ A_1 A_2 g_1^{(2)}(X, \eta) W_1(\chi_m, \eta) + A_1 A_2 W_1(\chi_m, \eta) W_2(\chi_m, \eta).$$

Следовательно,

$$\sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^{q'} \int_{M(q,a)} S_1 S_2 e(-n\alpha) d\alpha = \sum_{q \leq P} H(q) \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} \sum_{a=1}^{q'} e\left(\frac{a}{q} N_1 (l_1 + l_2)\right) \times$$

$$\times \int_{M(q,a)} g_1^{(1)}(X, \eta) g_1^{(2)}(X, \eta) e(-n\alpha) d\alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\alpha) d\alpha + \\
& + \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_1^{(2)}(X, \eta) W_1(\chi_m, \eta) e(-n\alpha) d\alpha + \\
& + \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 W_1(\chi_m, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\alpha) d\alpha = \\
& = M_1 + M_2 + M_3 + M_4.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

На правой части (3.6) второе и третье (M_2 и M_3) слагаемые оцениваются одинаково. Рассмотрим M_2 . Имеем $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$ и

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\alpha) d\alpha = \\
&= \sum_{q \leq P} \frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D) \varphi\left(\frac{q}{d}\right) \varphi(q)} \sum_{a=1}^q \sum_{\chi_m} \chi_m(l_2) e\left(\frac{a}{q} N l_1 - n\right) \tau(\bar{\chi}_m) \times \\
&\times \int_{M(q,a)} g_1^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(n\eta) d\eta \ll \sum_{m \leq PD} \frac{1}{\varphi^2(m)} C_\chi(Nl_1 - n) \tau(\bar{\chi}_m) \times \\
&\times \left(\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |g_1^{(1)}(X, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |W_2(\chi_m, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Используя оценку (см. лемма 3.5, [23])

$$g_u^{(i)}(X, \alpha) \leq \min\left(\alpha^{-u}, \left(\frac{X}{D}\right)^u\right) \tag{3.7}$$

и лемму 1.3, получим

$$M_2 \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|Nl_1 - n|}{\varphi(|Nl_1 - n|)} W_2. \tag{3.8}$$

Аналогично для M_3 , имеем

$$M_3 \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|Nl_2 - n|}{\varphi(|Nl_2 - n|)} W_1. \tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим M_4 . В силу (3.6) имеем

$$M_4 = \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} \frac{1}{\varphi^2(D) \varphi^2(q)} \left(\sum_{X_D, X_q} \bar{\chi}_D(l_1) \sum_{h_1=1}^q \bar{\chi}_q(h_1) e\left(\frac{ah_1}{q}\right) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\chi_D, \chi_q} \bar{\chi}_D(l_2) \sum_{h_2=1}^q \bar{\chi}_q(h_2) e\left(\frac{ah_2}{q}\right) W_1(\chi_m, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\eta) d\eta \ll \\
& \ll \sum_{m \leq PD} \frac{1}{\varphi^2(m)} |C_{\chi_m \chi'_m}(|-n + l_1 + l_2|) \tau(\bar{\chi}_m) \tau(\bar{\chi}'_m)| \cdot \\
& \cdot \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} W_1(\chi_m, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\eta) d\eta \ll \frac{|-n + l_1 + l_2|}{\varphi(|-n + l_1 + l_2|)} W_1 W_2,
\end{aligned}$$

где

$$W_i = \sum_{m \leq PD} \sum_{\chi_m} W_i(\chi_m), \quad W_i(\chi_m) = \left(\int_{-1/qQ}^{1/qQ} |W_i(\chi_m, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, из (3.6), получим

$$\begin{aligned}
R_1(n, D) = M_1 + O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n - Nl_2|}{\varphi(|n - Nl_2|)} W_1\right) + O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n - Nl_1|}{\varphi(|n - Nl_1|)} W_2\right) + \\
+ O\left(\frac{|n - l_1 - l_2|}{\varphi(|n - l_1 - l_2|)} W_1 W_2\right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим M_1 . Согласно (3.6), имеем

$$M_1 = \sum_{q \leq P} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} \sum_{a=1}^q e\left(\frac{a}{q} N(l_1 + l_2) - n\right) \int_{-1/qQ}^{1/qQ} g_1^{(1)}(X, \eta) g_1^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta.$$

В силу (2.7)

$$\int_{1/qQ}^{1/2} \left| g_i^{(i)}(X, \eta) \right|^2 d\eta \ll \int_{\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{2}} \eta^{-2} d\eta \ll qQ.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 g_1^{(1)}(X, \eta) g_1^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta = n + O(qQ).$$

Поэтому

$$M_1 = \sum_{q \leq P} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} C_q(|N(l_1 + l_2) - n|) (n + O(qQ)). \quad (3.11)$$

Оценим остаточный член в (3.11), используя равенство

$$C_q(n) = \mu(q_1) \frac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)},$$

где $q_1 = \frac{q}{(q, |n - N(l_1 + l_2)|)}$, находим

$$\ll Q \sum_{q \leq P} q \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} C_q(|N(l_1 + l_2) - n|) \ll Q \sum_{q \leq P} q \frac{\varphi(q)}{\varphi^2\left(\frac{Dq}{d}\right) \varphi(q_1)} \ll X^{1+\delta} P^{-1}.$$

Главный член в (3.11) можно написать как сумму по всем $q \geq 1$ в виде (см. [13, 14])

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} C_q(|N(l_1 + l_2) - n|) - \sum_{q>P}^{\infty} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} C_q(|N(l_1 + l_2) - n|) \right) \\ (n + O(qQ)) &= n \frac{D}{\varphi(D)} \sum_{\substack{s=1 \\ (s, Dn)=1}}^{\infty} \frac{\mu(s)}{\varphi^2(s)} \sum_{\substack{t \setminus n \\ (t, D)=1}} \frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)} + O\left(X^{1+\delta} P^{-1} (\ln \ln P)^2 \ln X\right) = \\ &= n \sigma(n) + O\left(\frac{X^{1+\delta}}{P \varphi(D)}\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\sigma(n) = \frac{D}{\varphi(D)} \sum_{\substack{s=1 \\ (s, Dn)=1}}^{\infty} \frac{\mu(s)}{\varphi^2(s)} \sum_{\substack{t \setminus n \\ (t, D)=1}} \frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)}. \quad (3.13)$$

Для четного n согласно (7.2) работы [11] имеем

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{D}{\varphi(D)} \prod_{\substack{p \nmid Dn \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \setminus n \\ p \nmid D}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \\ &= \lambda \frac{D}{\varphi(D)} \prod_{p>2} \frac{p(p-1)}{(p-1)^2} \prod_{\substack{p \setminus D \\ p > 2}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{\substack{p \setminus n \\ p \nmid D}} \frac{p-1}{p-2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\lambda = 1$, если D четное; при D нечетном $\lambda = 2$. Отсюда (см. [11])

$$\sigma(n) \gg \frac{D}{\varphi(D)} \cdot \frac{n}{\varphi(n)}. \quad (3.15)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, учитывая (3.12) из (3.10), находим

$$\begin{aligned} R_1(n, D) &= n \sigma(n) + O\left(\frac{X^{1+\delta}}{P \varphi(D)}\right) + O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n - Nl_2|}{\varphi(|n - Nl_2|)} W_1\right) + \\ &+ O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n - Nl_1|}{\varphi(|n - Nl_1|)} W_2\right) + O\left(\frac{|n - l_1 - l_2|}{\varphi(|n - l_1 - l_2|)} W_1 W_2\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Теперь предположим, что пусть существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда в правой части (3.6) дополнительно появляется ещё пять членов, т.е. в месте (3.6) получим

$$\sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^{q'} \int_{M(q,a)} S_1 S_2 e(-n\alpha) d\alpha = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5,$$

где

$$E_1 = \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^{q'} \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta,$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) g_1^{(2)}(X, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta, \\
E_3 &= \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta, \\
E_4 &= \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta, \\
E_5 &= \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) W_1(\chi_m, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta.
\end{aligned}$$

Ясно, что E_1, E_2 и E_4, E_5 оцениваются одинаково. Согласно лемме 5.4 работы [11] имеем, если существует исключительный характер по модулю $m = qDd^{-1}$, то $A_i(\chi_D, \chi_q, q, a) = \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)} \tilde{\chi}_m(al_i) \tau(\tilde{\chi}_m)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
E_4 &= \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(|n - (l_1 + l_2)|) \tau(\tilde{\chi}_m) \tau(\tilde{\chi}_m \chi_0) \times \\
&\quad \times \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) W_2(\chi_m, \eta) e(-n\eta) d\eta \ll \\
&\ll \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^2(q)} \mu(q) \tau(\tilde{\chi}_m \chi_0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_0}(|(l_1 + l_2) - n|) \left(\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} \left| g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) \right|^2 d\eta \right)^{1/2} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} |W_2(\chi_m, \eta)|^2 d\eta^{1/2} \ll \\
&\ll \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^2(q)} \mu(q) \tau(\tilde{\chi}_m \chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_m^0}(|-n + (l_1 + l_2)|) X^{1/2} W_2(\chi_m) \ll \\
&\ll \frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \sum_{q \leq P} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m \chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_m^0}(|-n + l_1 + l_2|) W_2(\chi_m) \ll \\
&\ll \frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \frac{|l_1 + l_2 - n|}{\varphi(|l_1 + l_2 - n|)} W_2(\chi_m).
\end{aligned}$$

Так как,

$$\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} \left| g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) \right|^2 d\eta \ll \int_0^1 \sum_{P < n_1 \leq X} n_1^{\tilde{\beta}-1} e(n_1 \eta) \sum_{P < n_2 \leq X} n_2^{\tilde{\beta}-1} e(-n_2 \eta) d\eta =$$

$$= \sum_{P < n_1, n_2 \leq X} n_1^{\tilde{\beta}-1} n_2^{\tilde{\beta}-1} \int_0^1 e(n_1 - n_2) \eta d\eta = \sum_{P < n \leq X} n^{2(\tilde{\beta}-1)} \leq X. \quad (3.17)$$

Так, что, согласно лемме 1.3, будем иметь

$$E_4 + E_5 \ll \frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \frac{|l_1 + l_2 - n|}{\varphi(|l_1 + l_2 - n|)} W_2(\chi_m).$$

Теперь будем исследовать E_1 и E_2 . Имеем

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= 2 \left| \sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \int_{M(q,a)} A_1 A_2 g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(\chi_m, \eta) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta \right| \ll \\ &\ll \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m \chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_m^0}(|-n + l_1 + l_2|) \times \\ &\times \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу (3.7) $g_1^{(1)}(X, \eta) \ll \|\eta\|^{-1}$ и $g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) \ll \|\eta\|^{-\tilde{\beta}}$. Следовательно,

$$\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta \ll \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{2}} \eta^{-1-\tilde{\beta}} d\eta \ll qQ$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta &\ll \int_0^1 g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta + O(qQ) = \\ &= \tilde{J}(n) + O(qQ), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{J}(n) &= \int_0^1 g_1^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta = \int_0^1 \sum_{P < n_1 \leq X} e(n_1 \eta) \sum_{P < n_2 \leq X} n_2^{\tilde{\beta}-1} e(n_2 \eta) e(-n\eta) d\eta = \\ &= \sum_{P < n_1, n_2 \leq X} n_2^{\tilde{\beta}-1} \int_0^1 e((n_1 + n_2 - n)\eta) d\eta = \sum_{n = n_1 + n_2, P < n_1 + n_2 \leq X} n_2^{\tilde{\beta}-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Теперь из (3.18) получим

$$E_1 + E_2 = \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m \chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_m^0}(|-n + l_1 + l_2|) (\tilde{J}(n) + O(qQ)). \quad (3.20)$$

Аналогично для E_3 находим

$$E_3 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{\tau^2(\tilde{\chi}_m \chi_0)}{\varphi^2(q)} C_q(-n) (\tilde{I}(n) + O(qQ)),$$

где

$$\tilde{I}(n) = \int_0^1 g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X, \eta) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X, \eta) e(-n\eta) d\eta + O(qQ). \quad (3.21)$$

Очевидно, что

$$|\tilde{J}(n)| \leq X \quad \text{и} \quad |\tilde{I}(n)| \leq X. \quad (3.22)$$

Обозначая через R_4 остаток в (3.20) оценим его. Согласно лемме 2.4 [13]

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{Q}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{q\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi} \chi_0) C_{\tilde{\chi} \chi_0}(|l_1 + l_2 - n|) \ll \\ &\ll \frac{Q\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \leq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{q\mu(q)}{\varphi(q)} \mu\left(\frac{q}{(\tilde{r}, |n-l_1-l_2|)}\right) \varphi^{-1}\left(\frac{q}{(q, n)}\right). \end{aligned}$$

Для оценки суммы стоящей на правой части последнего соотношения будем использовать оценку приведенную в работе [14] (см. (2.21)), тогда получим:

$$\begin{aligned} R_4 &\ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)} P^{-1}(|n - l_1 - l_2|, r) (\ln \ln X) (\ln \ln P)^4 \ln P \leq \\ &\ll \frac{1}{\varphi^2(D)} X^{1+\delta} P^{-1}(|n - l_1 - l_2|, \tilde{r}), \end{aligned}$$

где $(|n - l_1 - l_2|, \tilde{r})$ НОД чисел $n - l_1 - l_2$ и $\tilde{r}$. Аналогичная оценка справедлива и для остатка в (3.20), которое обозначим через R_5 , т.е.

$$R_5 \ll \frac{1}{\varphi^2(D)} X^{1+\delta} P^{-1}(|n - l_1 - l_2|, \tilde{r}).$$

Теперь распространим суммирование в оставшихся членах в равенствах (3.20) и (3.21) на все $q \geq 1$, это внесет дополнительные погрешности R_6 и R_7 , где

$$\begin{aligned} R_6 &= \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \geq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{\tau^2(\tilde{\chi}_m \chi_0)}{\varphi^2(q)} C_q(|-n + l_1 + l_2|) \tilde{I}(n), \\ R_7 &= \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \geq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m \chi_0) C_{\tilde{\chi}_m \chi_0}(|n - l_1 - l_2|) \tilde{J}(n). \end{aligned}$$

Для R_6 имеем:

$$R_6 \leq \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q \geq P \\ \tilde{r} \nmid q}} \mu\left(\frac{q}{(\tilde{r}, |n-l_1-l_2|)}\right) \varphi^{-1}(q) \varphi\left(\frac{q}{(q, |n-l_1-l_2|)}\right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})} \varphi^{-1} \left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|, \tilde{r})} \right) \sum_{\substack{l > P \tilde{r}^{-1} \\ \tilde{r} \setminus q}} \varphi^{-1}(l) \varphi^{-1} \left(\frac{l}{(|n-l_1-l_2|, l)} \right) \leq \\
&\leq \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})} \varphi^{-1} \left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|, \tilde{r})} \right) \sum_{d \setminus n} \varphi^{-1}(d) \sum_k > P / \tilde{r} d \frac{1}{\varphi^2(k)} \ll \\
&\ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)} P^{-1} (|n-l_1-l_2|, r) (\ln \ln X) (\ln \ln P)^4 \ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)} P^{-1} (|n-l_1-l_2|, \tilde{r}).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
R_7 &\leq \frac{2X\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q > P \\ \tilde{r} \setminus q}} \left| \mu(q) \mu \left(\frac{q}{(\tilde{r}, |n-l_1-l_2|)} \right) \varphi^{-1}(q) \varphi^{-1} \left(\frac{q}{(q, |n-l_1-l_2|)} \right) \right| \ll \\
&\ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)} P^{-1} (|n-l_1-l_2|, \tilde{r}).
\end{aligned}$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 [11], первая бесконечная сумма в (3.19) есть

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(n) &= \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q=1 \\ \tilde{r} \setminus q}}^{\infty} \tau^2(\tilde{\chi}_m \chi_0) C_q (|-n+l_1+l_2|) \varphi^{-2}(q) = \\
&= \frac{D}{\varphi^2(D)} \tilde{\chi}(-1) \mu \left(\frac{\tilde{r}}{(\tilde{r}, n)} \right) \frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})} \frac{1}{\varphi \left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|, \tilde{r})} \right)} \times \\
&\times \prod_{\substack{p \setminus \tilde{r} \\ p \setminus nD}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p \setminus \tilde{r} \\ p \setminus D, p > 2}} \left(1 + \frac{1}{(p-1)} \right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

А для второй суммы справедлива оценка

$$\frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q=1 \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m \chi_0) C_{\tilde{\chi} \chi_0} (|-n+l_1+l_2|) \leq \frac{3}{2} \tilde{\chi}^2(n) \tilde{r} \varphi^{-2}(\tilde{r}) \frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)}.$$

Таким образом, собирая все оценки, в случае $E_{\tilde{\beta}} = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
R_1(n, D) &= \sigma(n)n + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) + \frac{3}{2} \tilde{\chi}^2(n) \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)} \frac{X}{D} + \\
&O \left(X^{1+\delta} P^{-1} \frac{1}{\varphi^2(D)} \right) + O \left(X^{1+\delta} P^{-1} \frac{1}{\varphi^2(D)} (|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) \right) + O \left(\left(\frac{X}{D} \right)^{1/2} \frac{|n-Nl_2|}{\varphi(|n-Nl_2|)} W_1 \right) + \\
&+ O \left(\left(\frac{X}{D} \right)^{1/2} \frac{|n-Nl_1|}{\varphi(|n-Nl_1|)} W_2 \right) + O \left(\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)} W_1 W_2 \right) + \\
&+ O \left(\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi(|l_1+l_2-n|)} W_2 \right) + O \left(\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi(|l_1+l_2-n|)} W_1 \right). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

4. Оценка исключительного множества

Данной параграф посвящен доказательству теоремы 1. Понятно, что, если докажем $R(n, D) > 0$, то это означает, что для данного n существует представление в виде (0.2). В силу (1.7)

$$R(n, D) = R_1(n, D) + R_2(n, D) \quad (4.1)$$

и

$$R(n, D) > R_1(n, D) - R_2(n, D).$$

Покажем, что

$$R_1(n, D) > |R_2(n, D)|$$

для всех четных n из интервала $\frac{X}{2} < n \leq X$, за исключением самого большого $\frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}$ значения n из них. В силу (2.4) имеем $\sum_{n \leq X, n \equiv l \pmod{D}} R_2^2(n, D) \ll \frac{X^3 D^2}{\varphi(D)^P} \ln^{12} N$. Отсюда следует, что количество, $n \leq X, n \equiv l \pmod{D}$, для которого

$$R_2(n, D) > DX/P^{1/3}; \quad (4.2)$$

не превосходит

$$\ll \frac{X}{\varphi(D)} \frac{1}{P^{1/3}} \ln^{12} X < \frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}. \quad (4.3)$$

Исключаем такие n , для которых выполняется неравенство (4.2). Тогда для остальных $n \leq X, n \equiv l \pmod{D}$ выполняется неравенство

$$R_2(n, D) \leq DX/P^{1/3}. \quad (4.4)$$

Количество исключаемых $n, n \leq X, n \equiv l \pmod{D}$ не более чем $X^{1-\delta}/\varphi(D)$. Сначала предположим, что $E_{\tilde{\beta}} = 0$. Тогда из (3.10) и леммы 1.2 (см. также [23]) получим

$$R_1(n, D) > n\sigma(n) - c_1 \frac{X^{1+\delta}}{\varphi(D)P} - c_2 \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - c_4 \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right).$$

Так как согласно (3.14),

$$\sigma(n) \gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)}, \quad (4.5)$$

то, отсюда следует

$$\begin{aligned} R_1(n, D) &> c_5 \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} \cdot \frac{X}{2} - c_1 \frac{X^{1+\delta}}{\varphi(D)P} - c_2 \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - \\ &- c_4 \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right) > \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} X \left(c_6 - c_1 \frac{X^\delta}{\varphi(D)P} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} \cdot \frac{\varphi(D)}{D} - \right. \\ &\left. - 2 \frac{1}{D} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} \exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - c_4 \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right) \frac{D}{\varphi(D)} \right) \geq \frac{nD}{\varphi(n)\varphi(D)} X \gg X, \end{aligned} \quad (4.6)$$

для любого $\frac{X}{2} < n \leq X, n \equiv l \pmod{D}$, при достаточно малом $\delta > 0$. В случае $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r} \nmid m$, оценка (4.6) остается в силе. Пусть $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r} \nmid m$. Тогда из (3.24) и леммы 1.2 получим

$$R_1(n, D) > n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) + \frac{3}{2}\tilde{\chi}_{\tilde{r}}^2(n)\frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \cdot \frac{|n - l_1 - l_2|}{\varphi(|n - l_1 - l_2|)} -$$

$$\begin{aligned}
& -c_7 \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)} - c_8 \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)} (|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) - c_9 \frac{X}{D} \frac{|n-Nl_2|}{\varphi(|n-Nl_2|)} (1-\tilde{\beta}) \ln P \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) - \\
& -c_{11} \frac{X}{D} (1-\tilde{\beta}) \ln P \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) \frac{|n-Nl_1|}{\varphi(|n-Nl_1|)} - c_{12} \frac{X}{D} \frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi(|l_1+l_2-n|)} \times \\
& \times \exp\left(-\frac{c_{10}}{3\delta}\right) (1-\tilde{\beta})^2 \ln^2 P - c_{13} \frac{X}{D^{1/2}\varphi^2(D)} \cdot \frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)} \exp\left(-\frac{c_{14}}{6\delta}\right) (1-\tilde{\beta}) \ln P - \\
& -c_{15} \frac{X}{D^{1/2}\varphi^2(D)} \cdot \frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)} \exp\left(-\frac{c_{16}}{6\delta}\right) \geq \\
& \geq n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) + \frac{3}{2}\tilde{\chi}_{\tilde{r}}^2(n-l_1-l_2) \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \cdot \frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)} \frac{X}{D} - \\
& -c_7 \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)} - c_8 \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)} (|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) - \left(c_{17} \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} + c_{18} \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \right. \\
& \cdot \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) (1-\tilde{\beta}) \ln P \left. \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) (1-\tilde{\beta}) \ln P \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) \right). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Если $(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) = 1$, из (3.23) следует, что

$$\tilde{\sigma}(n) \leq \frac{D}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{n}{\varphi(n)} \prod_{\substack{p \nmid \tilde{r} \\ p \nmid nD}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \ll \frac{D}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{n}{\varphi(n)}. \tag{4.8}$$

Поэтому, учитывая (4.5) и (4.8), из (4.7) находим

$$\begin{aligned}
R_1(n, D) & > c_{19} n \cdot \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} - c_{20} \frac{D}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{n}{\varphi(n)} \tilde{I}(n) - c_{21} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{n}{\varphi(n)} \frac{X}{D} - \\
& - c_{22} \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)} - \left(c_{17} \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} + c_{18} \frac{X}{D} \frac{n}{\varphi(n)} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\right) c_{22} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Отсюда при $\frac{X}{2} < n \leq X$, $n \equiv l \pmod{D}$, имеем

$$\begin{aligned}
R_1(n, D) & > \frac{D}{\varphi(D)} \frac{n}{\varphi(n)} \cdot X \left(c_{23} - c_{24} \frac{1}{\varphi^2(D)} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} - c_{21} \frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})} \frac{1}{D} \frac{\varphi(D)}{D} - c_{22} \frac{X^\delta \varphi(n)}{D n P} - \right. \\
& - \left. \left(c_{17} \frac{\varphi(D)}{D} + c_{18} \frac{\varphi(D)}{D} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) c_{22} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) \right) \gg \right. \\
& \gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} X \gg X, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

так как в силу леммы 1.1с, имеем $\tilde{r} \gg \ln P$. Если $(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) > 1$, то третий член в (4.7) обращается нуль, однако пятый член (за счёт множителя $(|n-l_1-l_2|, \tilde{r})$) может быть большим. В связи с этим отбросим те четные n , $n \leq X$, $n \equiv l \pmod{D}$, для которых $(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}) > P^{1/2}$. Тогда для оставшихся n этот остаточный член не больше чем

$$\ll \frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)} \cdot P^{1/2} \ll \frac{X^{1+\delta}}{P^{1/2}\varphi^2(D)}. \tag{4.11}$$

Кроме того число отброшенных n есть

$$\sum_{\substack{d \nmid \tilde{r} \\ d > P^{1/2}}} \sum_{\substack{d \nmid |n-l_1-l_2| \\ n \leq X, n \equiv l \pmod{D}}} 1 \leq \sum_{\substack{d \nmid \tilde{r} \\ d > P^{1/2}}} \frac{X}{DP^{1/2}} \leq \frac{X}{DP^{1/2}} d(\tilde{r}) \ll \frac{X}{DP^{1/2-\delta}}, \tag{4.12}$$

так как $d(\tilde{r}) \ll \tilde{r}^\delta$, при любом $\delta > 0$. Остаётся рассмотреть такие n , $\frac{X}{2} < n \leq X$, $n \equiv l \pmod{D}$, $1 < (|n - l_1 - l_2|, \tilde{r}) \leq P^{1/2}$.

Так как

$$|\tilde{\sigma}(n)| \leq \sigma(n) \prod_{\substack{p \nmid \tilde{r} \\ p \nmid nD \\ p > 3}} (p-2)^{-1} \quad (4.13)$$

то, при условии, что произведение в (4.13) не пустое, то из (4.10) имеем

$$\begin{aligned} R_1(n, D) &> X \cdot \frac{n}{\varphi(n)} \frac{D}{\varphi(D)} \left(c_{19} - \frac{1}{3} c_{19} - 7 \frac{X^\delta}{P \varphi(D)} \cdot \frac{\varphi(D)}{D} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 8 \frac{X^\delta}{P^{1/2} \varphi(D)} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} \right) - \left(c_{17} + c_{18} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) \right) c_{22} \exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right) \gg \\ &\gg X \cdot \frac{nD}{\varphi(n)\varphi(D)} \gg X. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если произведение пустое, то согласно лемме 2.1 работы [13] $(|n - l_1 - l_2|, \tilde{r}) > \frac{\tilde{r}}{24}$ и так как рассматриваемые n удовлетворяют условию $(n, \tilde{r}) \leq P^{1/2}$, то

$$\tilde{r} \leq 24P^{1/2}. \quad (4.15)$$

Имеем

$$n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) \geq n\sigma(n) - \tilde{\sigma}(n) \left| \tilde{I}(n) \right|. \quad (4.16)$$

Здесь

$$\tilde{I}(n) = \sum_{P < k < n-P} (k(n-k))^{\tilde{\beta}-1} \leq n \cdot n^{\tilde{\beta}-1} = n^{\tilde{\beta}}.$$

Применяя формулу Лагранжа о конечном приращении, находим

$$n - n^{\tilde{\beta}} = (1 - \tilde{\beta}) n^\theta \log n \geq (1 - \tilde{\beta}) n^{\tilde{\beta}} \log n = (1 - \tilde{\beta}) n (\log n) n^{\tilde{\beta}-1}.$$

Из леммы 1.1с и (4.15) следует, что

$$1 - \tilde{\beta} \gg \tilde{r}^{-1/2} \log^{-2} \tilde{r} \geq P^{-1/4} \log^{-2} P. \quad (4.17)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} n - n^{\tilde{\beta}} &= (1 - \tilde{\beta}) n (\log n) \exp\left((\tilde{\beta} - 1) \log n\right) \geq (1 - \tilde{\beta}) n (\log n) \exp\left(-\frac{23}{3\delta}\right) \geq \\ &\geq (1 - \tilde{\beta}) n \left(\log \frac{X}{2}\right) \exp\left(-\frac{23}{3\delta}\right) > c_{24} (1 - \tilde{\beta}) n \log P. \end{aligned}$$

Используя это неравенство в (4.16), получим

$$\begin{aligned} n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) &\geq \sigma(n) \left(n - n^{\tilde{\beta}} \right) \gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} (1 - \tilde{\beta}) n \log P \gg \\ &\gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{DX}{\varphi(D)} (1 - \tilde{\beta}) \ln P. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Последний остаточный член в (4.7) при достаточно X и достаточно малом $\delta > 0$ будет меньше чем половина правой части (4.18). Поэтому

$$R_1(n, D) \geq c_{26} (1 - \tilde{\beta}) \frac{X}{D} n \varphi^{-1}(n) \ln P - c_{27} \frac{X^{1+\delta}}{P^{1/2} \varphi^2(D)} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{X}{DP^{1/4} \ln P} \left(c_{28} - c_{29} \frac{X^\delta \ln P}{P^{1/4} \varphi^2(D)} \right) \gg \frac{X}{DP^{1/4} \ln P} \left(c_{28} - c_{29} \frac{X^\delta (6\delta) \ln P}{X^{3\delta/2} \varphi^2(D)} \right) \gg \\
&\gg \frac{X}{DP^{1/4} \ln P} > \frac{DX}{P^{1/3}}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Далее, пусть $E^*(D, X)$ — количество четных чисел $X/2 < n \leq X$, непредставимых суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии. Тогда из (4.1), (4.3), (4.4), (4.6), (4.10), (4.14) и (4.19) следует утверждение

$$E^*(D, X) \leq c_8^{(1)} X^{1-\delta} \varphi^{-1}(D). \tag{4.20}$$

Оценка (0.3) следует из (4.4), (4.6), (4.10), (4.14) и (4.19), если учесть, что $X/2 < n \leq X$, $n \equiv l \pmod{D}$ и

$$R(n, D) > R_1(n, D) - |R_2(n, D)|.$$

Мы доказали теоремы для четных чисел n из интервала $X/2 < n \leq X$. Это доказательство можно распространять для всех четных чисел n из интервала $1 < n \leq X$ следующим образом. Имеем

$$E(D, X) \leq \sum_{\substack{n \leq X \\ R(n, D) = 0}} 1 \leq 2Y + \sum_{Y < 2^h \leq X} \sum_{\substack{2^h < n \leq 2^{h+1} \\ R(n, D) < A(n, \delta)}} 1 \leq 2Y + \sum_{h \leq 2 \ln X} E^*(D, X), \quad (Y \geq c_8^{(2)}). \tag{4.21}$$

Здесь через $A(n, \delta)$ обозначена правая часть неравенства (0.3). Из (4.20) и (4.21) находим

$$E(D, X) << 1 + \sum_{h \leq 2 \ln X} c_8^{(1)} < c_8 X^{1-\delta} \varphi^{-1}(D).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О гольдбаховых числах. // Чебышевский сборник, 2008. № 9(1), С.13–17.
2. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Наука, М., 1980. С.200.
3. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. // Наука, М., 1976. С.95
4. Хуа-Ло-Ген. Аддитивная теория простых чисел. // Тр. Матем. инс. им. В.А.Стеклова., 1947. С.3–179.
5. Хуа-Ло-Ген. Метод тригонометрических сумм и её приложения в теории чисел. // Мир, М., 1964. С.18–19.
6. Corput, J.G. van der. Sur l'hypothese de Goldbach pour Presque tous les nombres pairs. // Acta arithm. Варшава, 1937. V.2. pp. 266–290.
7. Чудаков Н.Г. О проблеме Гольдбаха. // Докл. АН СССР, 1937. 17, С.331–334.
8. Estermann T. On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes. // Proc. Lond. Math. Soc. № 2(44), 1938, С.307–314.
9. Hardy G.H. and Littlewood J.E. Some problems of partitio numerorum; III: On the expression of a number as sum of primes. // Acta Math., 1923. № 44. С. 1–70.

10. Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. //Cambridge University Press. 1997. 2, С. 176–256.
11. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова. //Вестник ЛГУ. 1961. № 13. С.11–27.
12. Vaughan R.C. On Goldbach's problem. // Acta arithm. 1972 v.22. p. 21–48.
13. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem. // Acta arithm. 1975., № 27. p. 353–370.
14. Аллаков И. Исключительное множество суммы двух простых. Диссертация на соисканию ученой степени кандидата физ.-мат.наук. Ленинград. ЛГУ, С. 148, 1983.
15. Виноградов А.И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда. Acta arithm. № 46, 33–56 (1985).
16. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа. Докл.РАН, 387, 3, С. 295–296 (2002).
17. Плаксин В.А. Об одном вопросе Хуа- Ло –Кена. Мат. Заметки. № 3(47). С. 78–90 (1990).
18. Аллаков И. Решение некоторых аддитивных задач теории чисел аналитическими методами. (Таълим, Ташкент, 2012).
19. Allakov I., Safarov A.Sh. Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number. Russian Mathematics. 64, С. 8–21 (2020).
20. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math. Sinica. 7. 102-121 (1957).
21. Liu M.C. , Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. pp. 595–624 (Berlin- New York .1989).
22. Чубариков В.Н. Многомерные проблемы теории простых чисел. Чебышевский сборник, Вып. 12, т. 4, С. 176-256 (2011).
23. Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии. Известия ВУЗов. “Математика”. 8(459). С. 3–15 (2000).
24. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. (Наука, М., 1983).
25. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory. (Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi., 1997).
26. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. (Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006).
27. Прахар К. Распределение простых чисел. (Мир, М., 1967).
28. Gallagher P.X. A large sieve density estimate near . Inv.Math. 11, pp. 329–339 (1970).
29. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа (Наука, М., 1976).
30. Аллаков И., Исраилов М. Оценка тригонометрических сумм по простым числам в арифметической прогрессии. Доклады АН РУз., 4, С. 5–6 (1982).

REFERENCES

1. Allakov I., 2008, "About Goldbach numbers" // Chebyshevsky collection, № 9, Vol. 1, pp.13–17.
2. Vinogradov I. M., 1980, "Method of trigonometric sums in number theory" // Nauka, M., pp. 200.
3. Vinogradov I. M., 1976, "Special variants of the method of trigonometric sums" // Nauka, M., pp. 95.
4. Hua-Lo-Gen, 1947, "Additive theory of prime numbers" // Tr. Matem. ins. im. V.A.Steklov., pp.3–179.
5. Hua-Lo-Gen., 1964, "The method of trigonometric sums and its applications in number theory" // Mir, M., pp.18–19.
6. Output, J. G. van. der.. 1937, "Sur l'hypothese de Goldbach pour Presque tous les nombres pairs" // Acta arithm. - Warsaw, Vol. 2. pp. 266–290.
7. Chudakov N. G., 1937, "On the Goldbach's problem. // Docl.USSR Academy of Sciences", № 17, pp.331–334.
8. Estermann T., 1938, "On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes" // Proc.Lond. Math. Soc. № 2(44), pp. 307–314.
9. Hardy G. H. and Littlewood J.E., 1923, "Some problems of partitio numerorum; III: On the expression of a number as sum of primes" // Acta Math., № 44., pp. 1–70.
10. Vaughan R. C., 1997, The Hardi-Littlewood method. Second edition. //Cambridge University Press, № 2, pp.176–256.
11. Lavrik A. F., 1961, "On binary problems of additive theory of prime numbers in connection with the method of trigonometric sums by I.M. Vinogradov" //Bulletin of LSU., № 13., pp.11–27.
12. Vaughan R. C., 1972, "On Goldbach' s problem" // Acta arithm. - 1972 v.22. pp. 21-48.
13. Montgomery H. L., 1975, "Vaughan R. C., The exceptional set in Goldbach's problem" // Acta algorithm. № 27, pp.353–370.
14. Allakov I., 1983, "An exceptional set of the sum of two primes". Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Leningrad. LSU,148(1983).
15. Vinogradov A. I., 1985, "On the binary Hardy-Littlewood problem", Acta arithm. 46, 33-56 (1985).
16. Arkhipov G. I., Chubarikov V.N., 2002, "On an exceptional set in a binary Goldbach type problem". Dokl.RAN, 387, 3, pp. 295–296 (2002).
17. Plaksin V. A., 1990, "About one question of Hua-Lo-Ken", Math. Notes, № 3, Vol. 47, pp. 78–90.
18. Allakov I., 2012, "Solving some additive problems of number theory by analytical methods", (Talim, Tashkent).
19. Allakov I., Safarov A. Sh., 2020, "Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number". Russian Mathematics. № 64, pp. 8–21.

20. Wu Fang., 1957, “On the solutions of the systems of linear equations with prime variables”. *Acta Math. Sinica*, № 7, pp. 102–121.
21. Liu M. C., 1987(1989), “Tsang K. M. Small prime solutions of linear equation”s. *Proc. Intern. Number. Th. Conf. Laval University. Cand. Math. Soc.* pp. 595–624 (Berlin–New-York).
22. Chubarikov V. N., 2011, “Multidimensional problems of prime number theory”. *Chebyshev collection*, № 12, Vol. 4, pp. 176–256.
23. Allakov I., 2000, “About the representation of numbers by the sum of two primes from an arithmetic progression”. *News of universities. Mathematics*, № 8(459). pp. 3–15.
24. Karatsuba A. A., 1983, “Fundamentals of analytical number theory”, Nauka, M.
25. Davenport Harold, 1997, “Multiplicative Number Theory”, (Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi..
26. Montgomery H. L. and Vaughan R. C., 2006, “Multiplicative number theory. I. Classical theory”. (Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York).
27. Prahar K., 1967, “Distribution of prime numbers”, Mir, M.
28. Gallagher P. X., 1970, “A large sieve density estimate near”, *Inv.Math.* № 11, pp. 329–339.
29. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., 1976, “Elements of the theory of function and functional analysis”, Nauka, M.
30. Allakov I., Israilov M., 1982, “Estimation of trigonometric sums by prime numbers in arithmetic progression”, *Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan*, № 4, pp. 5–6.

Получено 17.09.21

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 512.643.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-42-55

Линейные многообразия проекторов

А. М. Ветошкин

Ветошкин Александр Михайлович — кандидат технических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Мытищинский филиал) (г. Королёв).

e-mail: alexander.vetkin@gmail.ru

Аннотация

В работе показано, что линейное многообразие матриц вида: $Q = Q_0 + \sum a_i P_i$, может состоять из одних проекторов. Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы $P_i = Q_i - Q_0$ и все матрицы Q_i были проекторами, причем: $(Q_i - Q_j)^2 = 0$ для любой пары i и j . Установлено, что все проекторы, составляющие это линейное многообразие, имеют один ранг и любая пара A, B этих проекторов удовлетворяет $(A - B)^2 = 0$.

Найдены несколько условий, эквивалентных тому, что два проектора A, B удовлетворяют $(A - B)^2 = 0$, одно из них в терминах подпространств, определяющих эти проекторы.

Пусть n порядок проекторов Q_i , r — их ранг, тогда показано, что максимальное число линейно независимых матриц $P_i = Q_i - Q_0$ таких, что выполняются условия $(Q_i - Q_j)^2 = 0$, равно $r(n - r)$. Поэтому, любой проектор ранга r можно представить в виде суммы ортопроектора Q_0 и линейной комбинации не более, чем $r(n - r)$ проекторов Q_i , так, что выполняется $(Q_i - Q_j)^2 = 0$, $i, j = 0, 1, \dots, r(n - r)$.

В работе вычислено минимальное расстояние между двумя проекторами рангов k и l — $|k - l|^{1/2}$. Максимальное расстояние между двумя ортопроекторами одного ранга k — $(2k)^{1/2}$.

Установлено, что многочлен $h(p, q) = (p - q)^2$ играет особую роль для алгебры $\mathcal{A}(p, q)$, порождаемой проекторами p, q, I . Многочлен h порождает центр этой алгебры — множество элементов коммутирующих со всеми элементами $\mathcal{A}(p, q)$.

Ключевые слова: проектор; линейное многообразие; линейное подпространство матриц ограниченного ранга; блочно-треугольная форма пары проекторов; центр алгебры, порожденной двумя проекторами.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. М. Ветошкин. Линейные многообразия проекторов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 42–55.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 512.643.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-42-55

Linear manifolds of projectors

A. M. Vetoshkin

Vetoshkin Alexander Mikhailovich — candidate of technical sciences, associate professor, Moscow State Technical University N. E. Bauman (Mytishchi branch) (Korolev).

e-mail: alexander.vetkin@gmail.ru

Abstract

The paper shows that a linear manifold of matrices of the form: $Q = Q_0 + \sum a_i P_i$, can consist of projectors only. It turns out that for this it is necessary and sufficient that $P_i = Q_i - Q_0$ and all the matrices Q_i be projectors, moreover: $(Q_i - Q_j)^2 = 0$ for any pair i and j . It is established that all projectors that make up this linear manifold have one rank and any pair A, B of these projectors satisfies $(A - B)^2 = 0$.

Several conditions were found equivalent to the fact that two projectors A, B satisfy $(A - B)^2 = 0$, one of them in terms of the subspaces defining these projectors.

Let n be the order of the projectors Q_i , r be their rank, then it is shown that the maximum number of linearly independent matrices $P_i = Q_i - Q_0$ such that the conditions $(Q_i - Q_j)^2 = 0$ are satisfied is $r(n - r)$. Therefore, any projector of rank r can be represented as the sum of an orthoprojector Q_0 and a linear combination of at most $r(n - r)$ projectors Q_i so that $(Q_i - Q_j)^2 = 0$, $i, j = 0, 1, \dots, r(n - r)$.

The paper calculates the minimum distance between two projectors of ranks k and l — $|k - l|^{1/2}$. The maximum distance between two orthoprojectors of the same rank k is $(2k)^{1/2}$.

It is established that the polynomial $h(p, q) = (p - q)^2$ plays a special role for the algebra $\mathcal{A}(p, q)$ generated by the projectors p, q, I . The polynomial h generates the center of this algebra — the set of elements commuting with all elements of $\mathcal{A}(p, q)$.

Keywords: projector, linear manifold, linear subspace of matrices of bounded rank, block-triangular form pair of projectors, center of an algebra generated by two projectors.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. M. Vetoshkin, 2022, "Linear manifolds of projectors", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 42–55.

1. Введение

Обозначим $M_{m,n}(\mathbb{F})$ — множество прямоугольных матриц размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Множество квадратных матриц порядка n — $M_n(\mathbb{F})$.

Пусть P — квадратная матрица с комплексными элементами. Она называется проектором, если $P = P^2$. Если P — эрмитова матрица, то P называют ортопроектором [1].

Если подпространства L и M пересекаются только по нулевому вектору, и $L + M = \mathbb{F}^n$, то говорят, что L и M дополнительные подпространства. В случае таких подпространств обозначим матрицу, проектирующую на подпространство L вдоль подпространства M , как $P(L, M)$. Ортопроектор на подпространство L будем обозначать: $P(L)$. Ранг матрицы A

обозначим $\text{rk}(A)$; $\text{diag}(A, B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица; I_n — единичная матрица порядка n . Если A прямоугольная матрица, то A^+ — псевдообратная матрица [1].

В работе [2] показано, что если для двух проекторов Q_1 и Q_2 выполняется равенство $(Q_1 - Q_2)^2 = 0$, то выражение $\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$ для любого α является проектором. Во втором разделе работы дано обобщение этого факта на случай большего числа проекторов: линейное многообразие $Q = \sum_i \alpha_i Q_i$, $\sum_i \alpha_i = 1$ состоит только из проекторов тогда и только тогда, когда $(Q_i - Q_j)^2 = 0$.

В третьем разделе даются необходимые и достаточные условия для выполнения для проекторов равенства: $(Q_i - Q_j)^2 = 0$. В четвертом разделе определяется максимальное число линейно независимых проекторов, удовлетворяющих этим условиям, — $r(n - r) + 1$, где n — порядок матриц Q_i , r — их ранг. Таким образом, показано, что любой проектор ранга r можно представить в виде суммы ортопроектора Q_0 и линейной комбинации не более, чем $r(n - r)$ проекторов Q_i , так, что выполняется $(Q_i - Q_j)^2 = 0$, $i, j = 0, 1, \dots, r(n - r)$.

В пятом разделе вычисляются расстояния между множествами проекторов разных рангов; определяется диаметр множества ортопроекторов одного ранга.

В последнем разделе работы, показано, что центр алгебры, порождаемой проекторами p, q, I , порождается выражением $(p - q)^2$.

2. Линейное многообразие, состоящее из одних проекторов

В пространстве квадратных матриц $M_n(F)$ рассмотрим линейное многообразие, задаваемое выражениями вида

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i, \quad (1)$$

где Q_0 — проектор, P_i — некоторые квадратные матрицы, α_i — произвольные числа.

Потребуем, чтобы матрица Q для любых α_i была проектором. Условие $Q^2 = Q$ даёт:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_0 P_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i Q_0 + \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j P_i P_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i. \quad (2)$$

Пусть все коэффициенты α кроме одного с номером i равны нулю, тогда $\alpha_i Q_0 P_i + \alpha_i P_i Q_0 + \alpha_i^2 P_i^2 = \alpha_i P_i$. Сокращая на α_i получим:

$$Q_0 P_i + P_i Q_0 - P_i = -\alpha_i P_i^2.$$

Последнее равенство будет выполняться при любом α_i только при

$$P_i^2 = 0. \quad (3)$$

Поэтому

$$Q_0 P_i + P_i Q_0 = P_i. \quad (4)$$

Представим матрицу P_i в виде

$$P_i = Q_i - Q_0. \quad (5)$$

для некоторой матрицы Q_i . Тогда (3) - (5) дают:

$$P_i^2 = (Q_i - Q_0)^2 = Q_i^2 - Q_i Q_0 - Q_0 Q_i + Q_0 = 0,$$

$$Q_0 P_i + P_i Q_0 = Q_0(Q_i - Q_0) + (Q_i - Q_0)Q_0 = Q_i - Q_0.$$

Из двух последних равенств следует, что все матрицы Q_i являются проекторами. Кроме того, выполняется:

$$Q_0 + Q_i = Q_i Q_0 + Q_0 Q_i. \quad (6)$$

Определим многочлен от некоммутирующих переменных x, y :

$$h(x, y) = x + y - xy - yx. \quad (7)$$

Равенства (6), таким образом, запишем в виде

$$h(Q_0, Q_i) = 0; \quad i = 1, \dots, k. \quad (8)$$

Если в равенстве (2) взять не нулевыми только два коэффициента α с произвольными индексами i и j , то учитывая (4) получим

$$P_i P_j + P_j P_i = 0, \quad (9)$$

Подставив (5) в (9), получим:

$$P_i P_j + P_j P_i = h(Q_0, Q_i) + h(Q_0, Q_j) - h(Q_i, Q_j) = 0.$$

Поэтому (8) выполняется для всех номеров i и j :

$$h(Q_i, Q_j) = 0; \quad i, j = 0, 1, \dots, k. \quad (10)$$

С помощью матриц Q_i , удовлетворяющих соотношениям (10), линейное многообразие (1) задаётся таким образом:

$$Q = \sum_i \alpha_i Q_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1. \quad (11)$$

Сформулируем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ проекторы. Для того, чтобы каждый элемент Q линейного многообразия, задаваемого выражением

$$Q = \sum_i \alpha_i Q_i; \quad \sum_i \alpha_i = 1,$$

был проектором, необходимо и достаточно, чтобы для проекторов Q_i выполнялись равенства:

$$h(Q_i, Q_j) = Q_i + Q_j - Q_i Q_j - Q_j Q_i = 0; \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (12)$$

Необходимость обоснована выше. Достаточность проверяется непосредственно.

Оказывается, для любых двух элементов многообразия (11) выполняется соотношение (12):

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ проекторы, удовлетворяющие равенствам (12); два набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ такие, что

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = 1.$$

Тогда выполняется:

$$h\left(\sum_i \alpha_i Q_i, \sum_i \beta_i Q_i\right) = 0. \quad (13)$$

Для того, чтобы доказать (13), достаточно воспользоваться следующим несложно доказываемым тождеством для функции $h(x, y)$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$; $b_1, b_2, \dots, b_k$ - произвольные квадратные матрицы, тогда выполняется тождество:

$$h\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^k \beta_i b_i\right) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \beta_j h(a_i, b_j) + (1 - \bar{\beta}) \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + (1 - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^k \beta_i b_i,$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad \bar{\beta} = \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Для произведения проекторов на одно подпространство и для произведения проекторов вдоль одного подпространства верно:

$$P(A, B)P(A, C) = P(A, C), \quad P(A, B)P(C, B) = P(A, B). \quad (14)$$

Поэтому для таких проекторов выполняется $h(p, q) = 0$.

Пусть A и B — дополнительные подпространства. Рассмотрим проекторы:

$$\begin{aligned} p &= P(A, B); & pp^+ &= P(A) = P(A, A^\perp); \\ p^* &= P(B^\perp, A^\perp); & p^+p &= P(B^\perp) = P(B^\perp, B). \end{aligned} \quad (15)$$

Для следующих пар этих проекторов в силу (14) выполняется:

$$\begin{aligned} h(p, pp^+) &= 0; & h(p^*, pp^+) &= 0; \\ h(p, p^+p) &= 0; & h(p^*, p^+p) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому каждая пара аргументов функции h в (16) определяет по теореме 1 линейное многообразие — прямую, состоящую из одних проекторов.

Эти прямые можно увидеть наглядно, для случая действительных проекторов порядка 2. Если мы зададим проектор порядка 2 следующим образом:

$$p = \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix}, \quad (17)$$

тогда множество проекторов ранга 1, описывается такой системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - x + uv = 0; \\ x + y = 1. \end{cases}$$

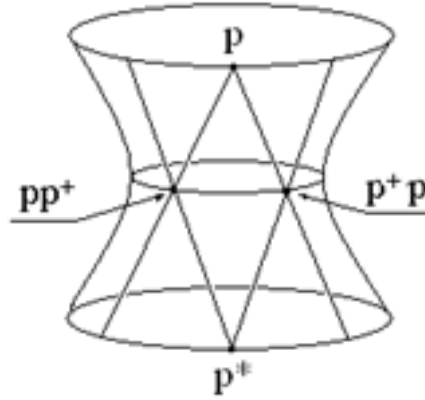
Первое уравнение этой системы задаёт однополостный гиперболоид.

На следующем рисунке изображен однополостный гиперболоид — множество проекторов (17) ранга 1; отмеченные точки на нём — проекторы (15); прямые — одномерные линейные многообразия проекторов, определяемые парами проекторов из (16). Горловая окружность этого гиперболоида состоит из ортопроекторов.

Пример 1:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad pp^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p^+p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Первые две пары проекторов в (16) задают прямые (образующие этого гиперболоида), проходящие через ортопроектор pp^+ .



3. Проекторы, удовлетворяющие равенству $p + q = pq + qp$

В предыдущем разделе упоминалось, что равенство $p + q = pq + qp$ выполняется, если оба проектора p и q на одно подпространство или оба вдоль одного подпространства. Теоремы 3 и 4 дают ответ на вопрос, какими должны быть подпространства, определяющие проекторы, для того, чтобы выполнялось это равенство.

ТЕОРЕМА 3. Если $p = P(A, B)$ и $q = P(C, D)$ проекторы и выполняется равенство

$$h(p, q) = p + q - pq - qp = 0, \quad (18)$$

то pq и qp также являются проекторами и ранги p, q, pq, qp одинаковы. Кроме того

$$A \cap D = 0, \quad C \cap B = 0. \quad (19)$$

Умножим (18) слева на p , получим $p = pqr$. Откуда следует, что выражение pq проектор. Как и qp , по аналогичным соображениям. У проекторов ранг совпадает со следом, поэтому из (18) получаем: $\text{rk}(p) + \text{rk}(q) = \text{rk}(pq) + \text{rk}(qp)$. Последнее равенство невозможно, если ранги матриц p, q, pq, qp не совпадают.

Возьмем произвольный вектор $a \in A \cap D$. Тогда $h(p, q)(a) = a = 0$. Таким образом, в пересечении подпространств A и D только нулевой вектор. Аналогично получим: $C \cap B = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Все матрицы линейного многообразия (11) имеют один ранг.

Для доказательства применим теорему 3 к проекторам Q_i , задающим линейное многообразие (11), получим, что все они имеют один ранг. Так как по теореме 2 выполняется равенство $h(Q_i, \sum \beta_j Q_j) = 0$, то все элементы этого линейного многообразия имеют по теореме 3 один ранг.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p = P(A, B)$ и $q = P(C, D)$ проекторы, тогда следующие условия эквивалентны:

$$h(p, q) = p + q - pq - qp = 0,$$

$$\begin{cases} A + (B \cap D) = C + (B \cap D) \\ B + (A \cap C) = D + (A \cap C) \end{cases}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} P(A, B)P(C, D) = P(A, D) \\ P(B, A)P(D, C) = P(B, C) \end{cases}, \quad (21)$$

$$P(A, B) + P(C, D) = P(A, D) + P(C, B). \quad (22)$$

(18) $\Rightarrow$ (20). Докажем, что $A + (B \cap D) \subset C + (B \cap D)$. Для произвольного $x \in A + (B \cap D)$ имеем $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B \cap D$. Кроме того, вектор a можно представить так: $a = c + d$, $c \in C$, $d \in D$. Для слагаемых из (18) получим: $p(x) = a$, $q(x) = q(a) = q(c + d) = c$, $qp(x) = q(a) = c$, $pq(x) = p(c) = p(a - d) = a - p(d)$. Получаем, что $h(p, q)(x) = p(d) = 0$. Поэтому $d \in B \cap D$. Таким образом: $x = a + b = c + d + b$, $x \in C + (B \cap D)$, $A + (B \cap D) \subset C + (B \cap D)$. Совершенно аналогично доказывается, что $C + (B \cap D) \subset A + (B \cap D)$. Первое равенство из (20) доказано.

При выполнении (18) для p и q , равенство (18) выполняется и для дополнительных проекторов:

$$h(I - p, I - q) = 0, \quad I - p = P(B, A), \quad I - q = P(D, C).$$

Первое равенство из (20) для дополнительных проекторов есть в точности второе равенство из (20). Таким образом, из (18) следует (20).

(20) $\Rightarrow$ (21). Пусть выполняется первое равенство из (20), докажем, что $pq = P(A, D)$. Для произвольного x имеем $x = c + d$, $c \in C$, $d \in D$. Из первого равенства (20) следует, что вектор c можно представить так: $c = a + b$, $a \in A$, $b \in B \cap D$. Вычислим последовательно:

$$pq(x) = pq(c + d) = p(c) = p(a + b) = a,$$

$$qpq(x) = q(a) = q(c - b) = c,$$

$$pqpq(x) = p(c) = p(a + b) = a.$$

Для произвольного x получили $pq(x) = (pq)^2(x)$. Поэтому pq -проектор: $pq = P(X, Y)$, для некоторых дополнительных подпространств X и Y . Так как суммы подпространств в первом равенстве (20) прямые, то $\dim A = \dim C$. Откуда $\text{rk}(p) = \text{rk}(q)$ и $\text{rk}(pq) \leq \text{rk}(p)$.

Для произвольного $a \in A$ имеем $a = c_1 + b_1$, $c_1 \in C$, $b_1 \in B \cap D$. Следовательно: $pq(a) = pq(c_1 + b_1) = p(c_1) = p(a - b_1) = a$. Таким образом, $A \subseteq X$. А так как $\dim X \leq \dim A$, получаем, что $A = X$. Очевидно имеем: $D \subseteq Y$. Затем, так как $\dim X = \dim A$, то $\dim Y = \dim D$. Таким образом, $pq = P(A, D)$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично из второго равенства (20) следует второе равенство (21).

(21) $\Rightarrow$ (22). Второе равенство в (21) запишем так:

$$P(B, C) = (I - p)(I - q) = I - p - q + pq. \text{ Или:}$$

$$p + q = I - P(B, C) + pq = P(C, B) + P(A, D).$$

(22) $\Rightarrow$ (18). Умножим (22) на q слева, учитывая (14) получим $pq = P(A, D)q = P(A, D)$. Аналогично: $qp = P(C, B)$. Из двух последних равенств и (22) следует (18).

4. Наибольшая размерность линейного многообразия

Рассмотрим линейное многообразие, определяемое проекторами Q_i :

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i, \quad P_i = Q_i - Q_0, \quad h(Q_i, Q_j) = 0 \quad \forall i, j. \quad (23)$$

Найдется подобие такое, что $RQ_0R^{-1} = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$, где $r = \text{rk}(Q_0)$. Применим это подобие и к остальным матрицам Q_i . Будем использовать для проекторов RQ_iR^{-1} те же обозначения — Q_i . Отметим, что матрица $Q_0 = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$ теперь является ортопроектором.

Из того что $h(Q_0, Q_i) = 0$ следует, что проектор Q_i имеет вид:

$$Q_i = \begin{bmatrix} I_r & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}, \quad a_i b_i = 0, \quad b_i a_i = 0. \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Из того, что $a_i b_i = 0$ следует, что $\text{rk}(P_i) \leq r$.

Аналогично, любой элемент многообразия (23) $Q = Q_0 + \sum \alpha_i P_i$ по теореме 2 удовлетворяет $h(Q_0, Q) = 0$, поэтому $Q - Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix}$, $q_1 q_2 = 0$ и $\text{rk}(\sum \alpha_i P_i) \leq r$.

Для матриц P_i должны выполняться условия (9), это приводит к таким условиям на матрицы a_i , b_i :

$$a_i b_j + a_j b_i = 0, \quad b_i a_j + b_j a_i = 0, \quad \forall i, j. \quad (24)$$

Все условия (24) будут удовлетворены если, выбрать, например, все $b_i = 0$. А у матриц $a_i \in M_{r, n-r}$ все элементы будут нулевыми, кроме одного единичного. Таких различных матриц a_i будет $(n-r)r$ штук. При таком выборе a_i , b_i матрицы P_i будут линейно независимы. Обозначим этот набор матриц так: $P_{\max} = \{P_1, P_2, \dots, P_{(n-r)r}\}$. (Отметим, что если взять наоборот: $a_i = 0$, а b_i имеют среди ненулевых элементов одну единицу, то (24) также выполнены. Это набор $P'_{\max}$).

Таким образом, линейная комбинация $\sum \alpha_i P_i$ определяет линейное подпространство матриц, ранг которых ограничен r . Причем, мы можем выбрать P_i так, что размерность этого подпространства будет равна $(n-r)r$. (Наборы $P_{\max}, P'_{\max}$). Возникает вопрос, можно ли выбрать большее число линейно независимых матриц P_i так, что выполняются условия (24). Ниже обосновывается, что нельзя.

В работе [3] исследуются линейные подпространства матриц, ранг которых не превосходит некоторого числа r . (Изложение результатов [3] имеется в книге [4], раздел 8.3). В теореме 1 работы [3] приведено доказательство того, что подпространство $U \subset M_n$ матриц такого вида:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rk}(A) \leq r, \quad A_{11} \in M_r$$

имеет размерность не больше nr .

Это доказательство легко модифицировать для обоснования того, что подпространство $V \subset M_n$ матриц вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rk}(A) \leq r, \quad A_{12} \in M_{r, n-r}$$

имеет размерность не больше $(n-r)r$.

В изложении доказательства этой теоремы из [4, теорема 8.3.1] рассматриваются отображения: $f : U \rightarrow M_{r,n}$, задаваемое формулой $f(A) \rightarrow [A_{11}, A_{12}]$, и $g : \ker f \rightarrow M_{r,n}^*$, $g(B) : [X_{11} X_{12}] \rightarrow \text{tr}(B_{21} X_{12})$.

Достаточно заменить эти отображения на такие:

$$f' : V \rightarrow M_{r, n-r}, \quad f'(A) \rightarrow [A_{12}], \\ g' : \ker f \rightarrow M_{r, n-r}^*, \quad g'(B) : [X_{12}] \rightarrow \text{tr}(B_{21} X_{12}),$$

кроме того, в нужных местах n заменить на $n-r$. Полученный текст будет обоснованием того, что подпространство V имеет размерность не более, чем $(n-r)r$.

Для примера 1 из раздела 2 $n = 2$, $r = 1$, $(n-r)r = 1$. Наборы $P_{\max}$ и $P'_{\max}$ содержат по одной матрице: $P_{\max} = \{p - pp^+\}$, $P'_{\max} = \{p^* - pp^+\}$. Это две образующие гиперболоида из этого примера. Множество ортопроекторов единичного ранга — горловая окружность гиперболоида. Сам гиперболоид получается как вращение образующей вокруг этой окружности.

Аналогичная картина наблюдается в общем случае. Рассмотрим множество ортопроекторов ранга r . Это некоторое многообразие. Ортопроектор $Q_0 = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$ точка этого многообразия. (Отметим, что для любого ортопроектора ранга r можно найти унитарное подобие трансформирующее этот ортопроектор в Q_0). Линейное многообразие задаваемое $Q = Q_0 + \sum \alpha_i P_i$, $P_i \in P_{\max}$, это «образующая» множества проекторов ранга r . Это многообразие «касается» многообразия ортопроекторов ранга r в точке Q_0 . Выполнив унитарное подобие («вращение» образующей) для каждой матрицы Q получим, разумеется, проекторы ранга r .

Покажем, что так мы получим **все** проекторы ранга r . Возьмем произвольный такой проектор P . С помощью унитарного подобия его можно представить в виде (см. [5], формула (8.1.4)):

$$P = U \begin{bmatrix} I_r & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad P, U \in M_n, \quad U^*U = I_n. \quad (25)$$

Вычислим матрицу P^+ : $P^+ = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ G^*K & 0 \end{bmatrix} U^*$, $K = [I_r + GG^*]^{-1}$. Поэтому соответствующий ортопроектор $PP^+ = UQ_0U^*$. Кроме того $P = UQ_0U^* + U \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$ и $\begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum \alpha_i P_i$, $P_i \in P_{\max}$. Где α_i берем равным соответствующему элементу матрицы G . Таким образом, при «вращении» «образующей» получаем все проекторы ранга r .

Отметим, что у всех проекторов набора $P_{\max}$ совпадают образы, а у всех проекторов набора $P'_{\max}$ одно и то же ядро. Следующий пример демонстрирует случай, когда у проекторов, образующих линейное многообразие (23), ни образ, ни ядро не совпадают.

Пример 2:

Возьмем $n = 4$, $r = 2$, $(n - r)r = 4$. Набор $P_{\max}$ содержит 4 матрицы. Покажем на примере, что выбор матриц $P_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}$ когда, как среди a_i , так и среди b_i будут ненулевые матрицы, приводит к меньшей размерности подпространства, натянутого на матрицы P_i .

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такой выбор матриц a_i , b_i обеспечивает выполнение равенств (24). В данном случае несложно показать, что попытка добавить матрицу $P_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$ так, чтобы выполнялись условия (24), не дает новую линейно независимую от P_1 , P_2 матрицу.

5. Множества проекторов одного ранга

Будем рассматривать здесь проекторы одного порядка — n . Введем обозначения: X_k - множество ортопроекторов ранга k , Z_k - множество проекторов ранга k . Так как для различных k и j множества X_k и X_j не пересекаются, то имеет смысл определить расстояние между ними. Аналогично, можно определить расстояние между множествами проекторов разных рангов. Для множества X_k представляет интерес его диаметр. Поэтому определим величины:

$$\begin{aligned} \omega_{k,l} &= \inf_{x \in X_k, w \in X_l} \|x - w\|_E, \quad \lambda_{k,l} = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a - b\|_E, \\ \Omega_k &= \sup_{x, w \in X_k} \|x - w\|_E, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\|a\|_E = \sqrt{\text{tr} a^* a}$ - евклидова матричная норма. (Отметим, что квадрат евклидовой нормы блочной матрицы равен сумме квадратов евклидовых норм блоков). Из представления проектора (25), учитывая унитарную инвариантность евклидовой нормы, получаем, что для проектора p выполняется: $\|p\|_E \geq \sqrt{\text{rk } p}$, для ортопроектора w : $\|w\|_E = \sqrt{\text{rk } w}$.

Для вычисления величин (26) используем максимально простой вид, к которому может быть приведена пара произвольных комплексных проекторов — блочно-треугольный вид каждого проектора. Эта форма пары проекторов получена в работе [6], с уточнениями в [7]. (Эта и другие близкие к ней формы проекторов и применение этих форм рассматриваются в работах [8]-[15]). Оказывается, для двух произвольных проекторов a, b существует унитарное подобие, приводящее обе матрицы к верхней блочно-треугольной форме $a' = u^* a u$, $b' = u^* b u$ с диагональными блоками порядков 1 и 2. Причем, порядки соответствующих диагональных блоков в a' и b' совпадают. Очевидно, что диагональными блоками матриц a' , b' будут проекторы порядков 1 и 2. Можно считать, что ранг каждого такого диагонального проектора меньше 2.

Евклидова норма унитарно инвариантна, поэтому:

$$\lambda_{k,l} = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a - b\|_E = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a' - b'\|_E.$$

Так как ранги матриц a' , b' равны k и l , то на блочной диагонали матрицы $a' - b'$ будет минимум $|k - l|$ ненулевых блоков. Причем, каждый такой блок, с точностью до знака, это проектор ранга 1 порядков 1 или 2. Учитывая, что для проекторов p ранга 1 выполняется $\|p\|_E \geq 1$, получаем оценку: $\lambda_{k,l} \geq \sqrt{|k - l|}$. Эта же оценка верна для $\omega_{k,l}$: $\omega_{k,l} \geq \sqrt{|k - l|}$.

Эти неравенства превращаются в равенства для некоторых пар проекторов: пусть $Q_k = \text{diag}(I_k, 0_{n-k})$ ортопроектор порядка n , тогда $\|Q_k - Q_l\|_E = \sqrt{|k - l|}$. Определим T_{ij} как матрицу порядка n единственный ненулевой элемент которой единица в j -й позиции i -й строки. Тогда при $0 < k < l < n$, и при $i \leq k$, $j > l$, матрицы $S_k = Q_k + T_{ij}$ и $S_l = Q_l + T_{ij}$ являются проекторами и $\|S_k - S_l\|_E = \sqrt{|k - l|}$.

(Множеству Z_k принадлежит линейное многообразие $Q_k + \sum_{i \leq k, j > l} \alpha_{ij} T_{ij}$. Множеству Z_l принадлежит линейное многообразие $Q_l + \sum_{i \leq k, j > l} \alpha_{ij} T_{ij}$. Эти линейные многообразия параллельны друг другу и расстояние между ними — минимальное расстояние между множествами Z_k и Z_l : $\sqrt{|k - l|}$).

Перейдем к величине Ω_k . Можно считать, что $k \leq n/2$. Так как матрицы x, w эрмитовы, то после унитарного подобия, приводящего к верхней блочно-треугольной форме, они останутся эрмитовыми. Значит матрица $x' - w'$ будет диагональной, каждый диагональный блок — это плюс-минус ортопроектор ранга 1 порядков 1 или 2, или — это разность таких проекторов. На блочной диагонали матрицы $x' - w'$ будет максимум $2k$ ненулевых блоков. Получаем оценку $\Omega_k \leq \sqrt{2k}$. Равенство достигается для двух ортопроекторов: $\|Q_k - (I_n - Q_{n-k})\|_E = \sqrt{2k}$.

Остается рассмотреть, что происходит, когда два ненулевых блока занимают одну позицию на диагонали. Могут ли они дать вклад в норму матрицы $x' - w'$ больше чем 2? Для блоков порядка 1 получаем норму их разности 0, вместо 2 при разнесении этих блоков. Остается рассмотреть случай, когда встречаются два ненулевых блока-ортопроектора порядка два: v, u . Выполним унитарное подобие, затрагивающее только две соответствующие координаты, такое, что ортопроектор u примет вид: $u' = \text{diag}(1, 0)$. Тогда, так как

$$\|v'\|_E = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \right\|_E = a^2 + 2b\bar{b} + c^2 = 1,$$

то $\|v' - u'\|_E = (a - 1)^2 + 2b\bar{b} + c^2 = 2 - 2a \leq 2$. Последнее неравенство следует из того, что величина a действительная; и из определения проектора следует, что $a^2 + b\bar{b} = a$, поэтому $0 \leq a \leq 1$.

Таким образом, доказана:

ТЕОРЕМА 5.

$$\begin{aligned}\omega_{k,l} &= \min_{x \in X_k, w \in X_l} \|x - w\|_E = \sqrt{|k - l|}, \\ \lambda_{k,l} &= \min_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a - b\|_E = \sqrt{|k - l|}, \\ \Omega_k &= \max_{x, w \in X_k} \|x - w\|_E = \sqrt{2k}, \quad k \leq n/2.\end{aligned}$$

6. Центр алгебры порождаемой проекторами p и q

Многочлен $h = h(p, q) = p + q - pq - qp$ играет особую роль для алгебры $\mathcal{A}(p, q)$ порождаемой проекторами p, q, I . Многочлен h порождает центр этой алгебры $\mathcal{C}(p, q) = \{c \mid fc = cf, \forall f \in \mathcal{A}(p, q)\}$ — множество элементов перестановочных со всеми элементами $\mathcal{A}(p, q)$.

Для пары проекторов p и q одного порядка введем обозначения:

$$p_j = \underbrace{pqpq \dots}_j \quad q_j = \underbrace{qpqp \dots}_j.$$

— здесь матричные сомножители p и q чередуются; количество сомножителей — j . Например: $p_1 = p$, $p_2 = pq$, $q_3 = qpq$ и так далее..

Многочлен $f(p, q)$ степени k запишем так:

$$f(p, q) = a_0 I_n + \sum_{j=1}^k (a_j p_j + b_j q_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{F}. \quad (27)$$

Элементы алгебры $\mathcal{A}(p, q)$ задаются выражениями вида (27).

Для того, чтобы элемент $f = f(p, q)$ вида (27) был перестановочен со всеми элементами $\mathcal{A}(p, q)$, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен с p и q :

$$pf = fp, \quad qf = fq. \quad (28)$$

Запишем f из (27) для подстановки в (28) таким образом:

$$f(p, q) = a_0 I_n + \sum_j (a_{2j-1} p_{2j-1} + b_{2j-1} q_{2j-1} + a_{2j} p_{2j} + b_{2j} q_{2j}).$$

Первое равенство из (28) после указанной подстановки и сокращения равных слагаемых будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}\sum_j (b_{2j-1} p_{2j} + a_{2j} p_{2j} + b_{2j} p_{2j+1}) &= \\ = \sum_j (b_{2j-1} q_{2j} + a_{2j} p_{2j+1} + b_{2j} q_{2j}).\end{aligned} \quad (29)$$

Используем следующий факт, полученный в работе [14]: если многочлен от двух проекторов вида (27) для любой пары проекторов равен нулю, то все коэффициенты этого многочлена нулевые. (К сожалению, в работе [14] не оговаривается, что это утверждение верно для порядка проекторов n больше одного).

Применение этого факта к (29) дает:

$$a_{2j} + b_{2j-1} = 0, \quad b_{2j-1} + b_{2j} = 0.$$

Из второго равенства (28) аналогично получаем:

$$a_{2j-1} + b_{2j} = 0, \quad a_{2j-1} + a_{2j} = 0.$$

Таким образом для коэффициентов многочлена из центра нашей алгебры $\mathcal{A}(p, q)$ выполняется:

$$a_{2j-1} = b_{2j-1} = -a_{2j} = -b_{2j}.$$

Определим многочлены:

$$h_k = h_k(p, q) = p_{2k-1} + q_{2k-1} - p_{2k} - q_{2k}, \quad h_1 = h, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (30)$$

Искомый центр состоит из многочленов вида:

$$f(p, q) = \sum_{k=0}^m c_k h_k, \quad h_0 = I. \quad (31)$$

Учитывая (30), получим, что $h_k h = h_k - h_{k+1}$, затем $h_{k+1} = h_k(I - h)$, и $h_k = h(I - h)^{k-1}$. Подставив последнее выражение в (31) получим, что любой элемент центра представляется в виде:

$$f(p, q) = \sum_{k=0}^m d_k h^k, \quad h^0 = I. \quad (32)$$

(Очевидно и обратное: любой элемент вида (32) принадлежит центру, так как h принадлежит центру). Таким образом доказана:

ТЕОРЕМА 6. *Любой элемент центра $\mathcal{C}(p, q)$ алгебры $\mathcal{A}(p, q)$ порождаемой проекторами p, q, I имеет вид:*

$$f(p, q) = d_0 I + \sum_{k=1}^m d_k (p - q)^{2k}.$$

7. Заключение

Показано, что множество проекторов порядка n , ранга r представляет собой «центральное ядро» — множество ортопроекторов ранга r , которого в каждой точке «касается» линейное многообразие из косых проекторов ранга r . Это линейное многообразие описывается так:

$$Q = \sum_{i=0}^{r(n-r)} \alpha_i Q_i, \quad \sum_{i=0}^{r(n-r)} \alpha_i = 1, \quad (Q_i - Q_j)^2 = 0, \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, r(n-r),$$

где Q_0 — ортопроектор, точка «касания»; система матриц $\{Q_i - Q_0\}$ линейно независима.

Два различных таких множества — множество проекторов ранга k и множество проекторов ранга l находятся друг от друга на расстоянии $\sqrt{|k - l|}$. Множество ортопроекторов одного ранга k имеет диаметр $\sqrt{2 \min(k, n - k)}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 544 с.
2. Baksalary J.K., Baksalary O.M. Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices // Linear Algebra Appl. 321 (2000) 3-7.

3. Flanders H. On spaces of linear transformations with bounded rank // J. London Math. Soc. 1962. V. 37. P. 10-16.
4. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: МЦПМО, 2015. – 576 с.
5. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997. — 390с.
6. Икрамов Х.Д. Об одновременной приводимости к блочно-треугольному виду пар косых проекторов //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 2. С.181-182.
7. Икрамов Х.Д. Одновременное приведение к блочно-треугольному виду и теоремы о парах комплексных идемпотент //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С.979-982.
8. Джордж Ф., Икрамов Х.Д. Замечание о канонической форме пары ортопроекторов // Зап. науч. Семинаров ПОМИ, 2004.
9. Икрамов Х.Д. О канонической форме проекторов относительно унитарного подобия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. №3. С. 3-5.
10. Икрамов Х.Д. Каноническая форма как средство доказательства свойств проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №9. С. 1285-1290.
11. Икрамов Х.Д. Квазидиагонализуемость косых проекторов как частный случай некоммутативной спектральной теоремы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №8. С. 1123-1130.
12. Икрамов Х.Д. Канонические формы проекторов относительно унитарного подобия и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. с. 1534-1539.
13. Djokovic D. Z. 1991, "Unitary similarity of projectors", Aequationes Mathematicae, 42, pp. 220-224.
14. Ветошкин А.М. Свойства многочленов от двух проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. с. 189-192.
15. Ветошкин А.М., Всегда невырожденные многочлены от двух проекторов, Чебышевский сб.,18:1 (2017), 44–64.

REFERENCES

1. Voevodin V. V. 2006, *Enciklopediya linejnoj algebrы. Elektronnaya sistema LINEAL*, [Encyclopedia of linear algebra. Electronic system LINEAL] — SPb.: BHV-Peterburg, — 544 p.
2. Baksalary J. K., Baksalary O. M. 2000, "Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices", *Linear Algebra Appl.*, 321, pp.3-7.
3. Flanders H. 1962, "On spaces of linear transformations with bounded rank", *J. London Math. Soc.*, vol. 37, pp. 10-16.
4. Prasolov V. V. 1994, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, AMS.
5. Godunov S. K. 1997, *Sovremennyye aspekty linejnoj algebrы*, [Modern Aspects of Linear Algebra], — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, — 390p.

6. Ikramov Kh.D. 1998, "On simultaneous reduction of a pair of oblique projectors to block triangular form *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 38, pp. 173-174.
7. Ikramov Kh.D. 2011, "Simultaneous reduction to block triangular form and theorems on pairs of complex idempotents *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 51, pp. 915-918.
8. George A. & Ikramov Kh. D. 2006, "A note on the canonical form for a pair of orthoprojectors *J. Math. Sci.*, vol. 132, pp. 153-155.
9. Ikramov Kh. D. 1996, "A canonical form for projectors under unitary similarity", *Comput. Math. Math. Phys.* vol. 36, pp. 279–281.
10. Ikramov Kh. D. 2000, "The canonical form as a tool for proving the properties of projectors", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 40, pp. 1233–1238.
11. Ikramov Kh. D. 2000, "The quasidiagonalizability of oblique projectors as a particular case of the noncommutative spectral theorem", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 40, pp. 1077–1084.
12. Ikramov Kh. D. 2004, "Canonical forms of projectors with respect to unitary similarity and their applications", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 44, pp. 1456–1461.
13. Djokovic D. Z. 1991, "Unitary similarity of projectors", *Aequationes Mathematicae*, vol. 42, pp. 220-224.
14. Vetoshkin A. M., 2015, "Property of polynomials in two projectors *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 55, pp. 179-182.
15. Vetoshkin A. M., 2017, "Always nonsingular polynomials of two projectors", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 1, pp. 44-64.

Получено 20.10.19

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.3+511.43

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-56-73

**Конечное отклонение и основная мера качества для сеток
Коробова¹**

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе рассматриваются четыре новых понятия: модифицированная основная мера качества набора коэффициентов, абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s , математическое ожидание локального отклонения параллелепипедальной сетки и дисперсия локального отклонения параллелепипедальной сетки.

Показано, что не менее чем $\frac{(p-1)^s}{2}$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ целых чисел, взаимно простых с модулем p , будут абсолютно оптимальными наборами индекса s с константой $B = 2s$.

Установлено, что любой абсолютно оптимальный набор оптимальных коэффициентов индекса s является оптимальным набором оптимальных коэффициентов индекса s , при этом любой его поднабор из s_1 коэффициентов является оптимальным набором оптимальных коэффициентов индекса s_1 .

Для конечного отклонения, введенного Н. М. Коробовым в 1967 году, для параллелепипедальных сеток получены новые формулы и оценки.

В работе впервые рассмотрено понятие математического ожидания локального отклонения и найдена удобная формула для его вычисления.

Также впервые рассмотрено понятие дисперсии локального отклонения.

В работе намечены направления дальнейших исследований по данной тематике.

Ключевые слова: конечное отклонение, основная мера качества, сетки Коробова, конечные ряды Фурье.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.3+511.43

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-56-73

The final deviation and the main quality measure for Korobov grids²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper considers four new concepts: a modified basic measure of the quality of a set of coefficients, absolutely optimal coefficients of the index s , the mathematical expectation of the local deviation of the parallelepipedal grid and the variance of the local deviation of the parallelepipedal grid.

It is shown that at least $\frac{(p-1)^s}{2}$ of different sets $(a_1, \dots, a_s)$ integers mutually prime with the module p will be absolutely optimal sets of the index s with the constant $B = 2s$.

It is established that any absolutely optimal set of optimal coefficients of the s index is an optimal set of optimal coefficients of the s index, while any subset of its s_1 coefficients is an optimal set of optimal coefficients of the s_1 index.

For the finite deviation introduced by N. M. Korobov in 1967, new formulas and estimates are obtained for parallelepipedal grids.

In this paper, for the first time, the concept of the mathematical expectation of a local deviation is considered and a convenient formula for its calculation is found.

The concept of local deviation variance is also considered for the first time.

The paper outlines the directions of further research on this topic.

Keywords: finite deviation, the main measure of quality, Korobov grids, finite Fourier series.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korobov grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.

²This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

1. Введение

Как указывалось в работе [7]: "Метод оптимальных коэффициентов построения для многомерного куба многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками фактически основан на самых простых фактах теории сравнений. Этот метод был заложен Н. М. Коробовым в работах [10], [11], [12], и его развитие продолжается и по настоящее время.

Важной особенностью метода оптимальных коэффициентов является тот факт, что алгоритм численного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками является ненасыщаемым. Свойство алгоритма быть ненасыщаемым относится к числу его важных качеств (более подробно см. [2] и [16]) и заключается в том, что точность алгоритма связана с гладкостью функции и не имеет ограничений на параметр гладкости.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки, но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \dots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \dots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$. $S_p(z_1, \dots, z_s)$ выражается через сумму³

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \dots + z_s m_s)}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s}, \quad (2)$$

где $z_1, \dots, z_s$ – произвольные целые, $\bar{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m , $p_1 = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \dots, a_s) \leq B \frac{\ln^\beta p}{p}, \quad (4)$$

то целые $a_1, \dots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю p .

Известно (см. [15] стр. 81), что для любых целых $a_1, \dots, a_s$ выполняется оценка

$$S_p(a_1, \dots, a_s) \geq B_0 \frac{\ln^s p}{p}, \quad (5)$$

с некоторой константой B_0 .

Важную роль в современной теории метода оптимальных коэффициентов играют работы [3]–[6], [9].

Цель данной работы — рассмотреть четыре новых понятия: модифицированная основная мера качества набора коэффициентов, абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s , математическое ожидание локального отклонения параллелепипедальной сетки и дисперсия локального отклонения параллелепипедальной сетки. Изучить их свойства и взаимосвязь.

³Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

2. Абсолютно оптимальные коэффициенты

Мы дадим определение нового понятия — *абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s* следующим образом. Через $S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s)$ обозначим ν -ую компоненту основной меры качества

$$S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1} = -p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu} = -p_1}^{p_2'} \frac{\delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu})}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s} \quad (2 \leq \nu \leq s).$$

Ясно, что

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Модифицированной основной мерой качества назовём величину $S_p^*(z_1, \dots, z_s)$, заданную равенством

$$S_p^*(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s)}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu},$$

где γ — константа Эйлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$ будем называть абсолютно оптимальным индекса s с константой B по модулю p , если выполняется оценка для модифицированной меры качества вида

$$S_p^*(a_1, \dots, a_s) \leq \frac{B}{p}.$$

Нетрудно видеть, что каждый абсолютно оптимальным набор коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$ индекса s с константой B по модулю p будет оптимальным набором коэффициентов индекса s с константой $2^s B$.

Действительно, если $(a_1, \dots, a_s)$ — абсолютно оптимальный набор коэффициентов индекса s с константой B по модулю p , то из определения следует, что

$$S_p^{(\nu)}(a_1, \dots, a_s) \leq C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} \quad (2 \leq \nu \leq s).$$

Отсюда вытекает, что

$$S_p(a_1, \dots, a_s) = \sum_{\nu=2}^s S_p^{(\nu)}(a_1, \dots, a_s) \leq \sum_{\nu=2}^s C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^s}{p},$$

и утверждение доказано.

Более того, легко показать, что каждый поднабор $(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu})$ с $1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s$ также будет оптимальным набором коэффициентов индекса ν с константой $C_s^\nu 2^\nu B$.

Действительно,

$$\begin{aligned} S_p(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu}) &\leq \sum_{\mu=2}^{\nu} S_p^{(\mu)}(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu}) \leq \sum_{\mu=2}^{\nu} S_p^{(\mu)}(a_1, \dots, a_s) \leq \\ &\leq \sum_{\mu=2}^{\nu} C_s^\mu C_\nu^\mu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\mu \cdot \frac{B}{p} < C_s^\nu \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^\nu}{p}. \end{aligned}$$

Следующая лемма, доказательство которой фактически повторяет доказательство известной леммы Коровова (см. [13], лемма 20), доказывает существование абсолютно оптимального набора коэффициентов индекса s с константой $B = s$ по простому модулю p .

ЛЕММА 1. Пусть p — произвольное нечетное простое число, $p \geq s$, тогда существуют взаимно простые с p целые числа $a_\nu = a_\nu(p)$ ($\nu = 1, \dots, s$) такие, что

$$S_p^*(a_1, \dots, a_s) \leq \frac{s}{p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть при $z_1 = a_1, \dots, z_s = a_s$ достигается минимум модифицированной меры качества $S_p^*(z_1, \dots, z_s)$ по всем наборам $z_1, \dots, z_s$ взаимно простых с p , тогда

$$\begin{aligned} S_p^*(a_1, \dots, a_s) &\leq \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} S_p^*(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \times \\ &\times \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \times \\ &\times \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1}=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu}=-p_1}^{p_2'} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} \delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu}) \leq \\ &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1}=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu}=-p_1}^{p_2'} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} \leq \\ &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu = \frac{s-1}{p-1} \leq \frac{s}{p}. \end{aligned}$$

□

Из доказательства видно, что не менее чем $\frac{(p-1)^s}{2}$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ целых чисел, взаимно простых с модулем p , будут абсолютно оптимальными наборами индекса s с константой $B = 2s$.

Отметим, что доказательство аналогичного утверждения для произвольного составного модуля требует преодоления значительных технических трудностей, как и в случае леммы Коробова.

3. Конечное отклонение

В работе [14] Н. М. Коробов следующим образом определил конечное отклонение или меру равномерности распределения сетки. Мы приведём это определение для параллелепипедальной сетки

$$M_k = \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{p} \right\} \right) \quad (k = 0, \dots, p-1),$$

где $(a_\nu, p) = 1$ ($1 \leq \nu \leq s-1$). Для удобства далее везде полагаем $a_0 = 1$.

Пусть $N_p \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right)$ — число точек сетки, лежащих в области

$$\Omega_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) = \left\{ (x_1, \dots, x_s) \mid 0 \leq x_\nu < \frac{n_\nu}{p} \ (0 \leq \nu \leq s) \right\}.$$

Локальное отклонение задается равенством

$$D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) = \frac{N_p \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right)}{p} - \frac{n_1}{p} \cdot \dots \cdot \frac{n_s}{p}.$$

Очевидно, что при $s = 1$ локальное отклонение тождественно равно 0.

По определению конечное отклонение определяется равенством

$$D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right|.$$

Для локального отклонения в [14] доказано, что⁴

$$\begin{aligned} D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{p} \sum_{k_\nu=0}^{n_\nu-1} e^{-2\pi i \frac{k_\nu m_\nu}{p}} \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) = \\ &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}), \end{aligned}$$

где $p_1 = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$,

$$c_n(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i \frac{km}{p}} = \begin{cases} \frac{n}{p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{e^{-\pi i \frac{(n-1)m}{p}} \sin\left(\pi \frac{nm}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right)} & \text{при } 1 \leq |m| \leq p_2. \end{cases}$$

Так как для коэффициентов $c_n(m)$ справедлива оценка $|c_n(m)| \leq \frac{1}{m}$, то справедлива оценка

$$\left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}).$$

Отсюда следует, что для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка для конечного отклонения

$$D_p \leq \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^s}{p}.$$

Выражение для локального отклонения представим в виде двух сумм

$$\begin{aligned} D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) + D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \\ D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1 = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_s = -p_1}^{p_2} e^{-\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \\ &\quad \times \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}), \\ D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1, m_1 \dots m_s = 0}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём k -ой компонентой локального отклонения величину

$$\begin{aligned} D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum'_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_{\nu_k} = -p_1}^{p_2} e^{-\pi i \frac{(n_{\nu_1}-1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k}-1)m_{\nu_k}}{p}} \times \\ &\quad \times \left(\prod_{\nu \neq \nu_1, \dots, \nu_k} \frac{n_\nu}{p} \right) \left(\prod_{j=1}^k \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p}\right)} \right) \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}). \end{aligned}$$

⁴ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключён набор $(m_1, \dots, m_s) = (0, \dots, 0)$.

Нетрудно видеть, что модуль k -ой компоненты локального отклонения оценивается через k -ую компоненту основной меры качества

$$\left| D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p^{(\nu)}(1, a_2, \dots, a_{s-1}).$$

Кроме этого, справедливы следующие два очевидных равенства

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= D_s^{(s)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \\ D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{k=2}^{s-1} D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка

$$\begin{aligned} D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| &< \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| + \\ &+ \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из оценки для коэффициентов $c_n(m)$ следует, что

$$\begin{aligned} \left| D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| &\leq \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1, m_1 \dots m_s = 0}^{p_2} \frac{\delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} = \\ &= \sum_{\nu=2}^{s-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum'_{m_{j_1} = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_{j_\nu} = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu})}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} = \\ &= \sum_{\nu=2}^{s-1} S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) \leq \sum_{\nu=2}^{s-1} C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \\ &< \sum_{\nu=2}^{s-1} s C_{s-1}^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}. \end{aligned}$$

□

Для простоты изложения далее будем считать, что p — простое, нечетное число. Следовательно, $p_1 = p_2 = \frac{p-1}{2}$. Заметим, что если $\delta_p(m+a) = 1$ и $|m| \leq \frac{p-1}{2}$, то

$$m = \begin{cases} p \left\{ -\frac{a}{p} \right\} & \text{при } \left\{ -\frac{a}{p} \right\} < \frac{1}{2}, \\ p \left\{ -\frac{a}{p} \right\} - p & \text{при } \left\{ -\frac{a}{p} \right\} > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} p - p \left\{ \frac{a}{p} \right\} & \text{при } \frac{1}{2} < \left\{ \frac{a}{p} \right\}, \\ -p \left\{ \frac{a}{p} \right\} & \text{при } \left\{ \frac{a}{p} \right\} < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Это можно записать одной формулой

$$m = p \left[\frac{1}{2} + \left\{ \frac{a}{p} \right\} \right] - p \left\{ \frac{a}{p} \right\} = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a}{p} \right\} \right\} = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \frac{a}{p} \right\}.$$

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1 = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_s = -p_1}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \cdot \\ &\cdot \cos \pi \frac{(n_1 - 1)m_1 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при отображении

$$(m_1, \dots, m_s) \rightarrow (-m_1, \dots, -m_s)$$

область суммирования переходит в себя, то

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} e^{-\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \right. \\ &\quad \times \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} e^{\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \times \\ &\quad \times \left. \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) \right) = \\ &= \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \\ &\quad \times \cos \pi \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{\substack{m_2, \dots, m_s = -p_1, \\ m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right)} \times \\ &\quad \times \cos \left(\pi \frac{-(n_1-1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2-1)m_2 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m_1}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_1}{p} \right)} \cos \pi \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}).$$

Ясно, что она равна 0 при $\delta_p(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) = 1$.

Если $m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$, то в этой сумме только одно слагаемое отлично от нуля. А именно, при $m_1 = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right\}$. Если положить $k = \left[\frac{1}{2} + \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right]$, то $m_1 = -(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk$. Таким образом, для S справедливо равенство

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk)}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1)(-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) = \\
&= (-1)^{(n_1 - 1)k} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times (-1)^{(n_1 - 1)k} \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
D_s^*\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) &= \sum_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \\
&\times \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right).
\end{aligned}$$

□

Доказанные леммы нетрудно перенести на случай k -ой компоненты локального отклонения.

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
D_s^{(k)}\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) &= \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{\nu_k} = -p_1}^{p_2'} \left(\prod_{\nu \neq \nu_1, \dots, \nu_k} \frac{n_\nu}{p} \right) \left(\prod_{j=1}^k \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p}\right)} \right) \times \\
&\times \cos \pi \frac{(n_{\nu_1} - 1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p} \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1 - 1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k - 1}).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя дословно доказательство леммы 3, получим доказываемое утверждение. □

Прежде чем формулировать аналог леммы 4, введём новые обозначения. Пусть $a_{\nu, j} = a_\nu \cdot a_j^{-1}$ ($\nu, j = 0, \dots, s - 1$). Ясно, что $a_{\nu, \nu} = 1$ ($\nu = 0, \dots, s - 1$).

ЛЕММА 6. *Справедливо равенство*

$$D_s^{(k)}\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) = \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum_{\substack{m_{\nu_2}, \dots, m_{\nu_k} = -p_1, \\ m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{p_2'} \left(\prod_{j=2}^k \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p}\right)} \right) \times \\ \times \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_1} (m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}}{p}\right)} \times \\ \times \cos\left(\pi \frac{-(n_{\nu_1} - 1)(m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}) + (n_{\nu_2} - 1)m_{\nu_2} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2'} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_1} m_{\nu_1}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_1}}{p}\right)} \cos \pi \frac{(n_{\nu_1} - 1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p} \times \\ \times \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}).$$

Ясно, что она равна 0 при $\delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = 1$.

В новых обозначениях имеем:

$$\delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = \delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}), \\ \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = \delta_p(m_{\nu_1} + m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}).$$

Далее, продолжая дословно доказательство леммы 4 с очевидными изменениями, получим требуемое утверждение. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка*

$$D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| \sum_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \right. \\ \times \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1 (m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\ \left. \times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) \right| + \\ + \theta \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p},$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2 и 4 следует утверждение теоремы. $\square$

4. Математическое ожидание локального отклонения

Естественно рассмотреть математическое ожидание локального отклонения, заданное равенством

$$MD_s = \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p D_s\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$MD_s = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как показано в работе [14], для локального отклонения имеем равенство

$$D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} MD_s &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^{p-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \sum_{n_1=k_1+1}^p \dots \sum_{n_s=k_s+1}^p \frac{1}{p^s} - \frac{(p-k_1) \dots (p-k_s)}{p^{2s}} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p+1}{2p}\right)^s. \end{aligned}$$

□

Для оценки математического ожидания локального отклонения параллелепипедальной сетки применим конечные ряды Фурье.

ЛЕММА 7. *Для функции $f\left(\frac{k}{p}\right) = 1 - \frac{k}{p}$ справедливо разложение в конечный ряд Фурье*

$$f\left(\frac{k}{p}\right) = \sum_{m=-p_1}^{p_2} c(m) e^{2\pi i \frac{km}{p}}, \quad c(m) = \begin{cases} \frac{p+1}{2p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{1}{p(1-e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (k = 0, \dots, p-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$c(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{p}} = \begin{cases} \frac{p+1}{2p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{1}{p(1-e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} & \text{при } m \neq 0, \end{cases}$$

так как при $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{p}} &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^k e^{-2\pi i \frac{nm}{p}} = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{(k+1)m}{p}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}}} = \\ &= \frac{1 - \delta_p(m)}{p(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} = \frac{1}{p(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})}. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 8. *Для математического ожидания локального отклонения параллелепипедальной сетки справедливы равенство и оценка:*

$$\begin{aligned} MD_s &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s), \\ |MD_s| &< S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя конечный ряд Фурье для функции $f\left(\frac{k}{p}\right) = 1 - \frac{k}{p}$ получим:

$$\begin{aligned} MD_s &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) e^{2\pi i \frac{km_1 + ka_1 m_2 + \dots + ka_{s-1} m_s}{p}} - \left(\frac{p+1}{2p}\right)^s = \\ &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s). \end{aligned}$$

Для коэффициента Фурье $c(m)$ имеем оценки:

при $m = 0$ $c(0) = \frac{p+1}{2p} < 1 = \frac{1}{m}$;

при $1 \leq |m| \leq \frac{p-1}{2}$

$$|c(m)| = \frac{1}{\left| p \left(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}} \right) \right|} = \frac{2}{\left| p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right) \right|} \leq \frac{1}{p \left\| \frac{m}{p} \right\|} = \frac{1}{m},$$

поэтому

$$|MD_s| \leq \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s \frac{1}{m_\nu} \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s) = S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}).$$

□

5. Дисперсия локального отклонения

Дисперсия локального отклонения задаётся формулой

$$\begin{aligned} DD_s &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) - MD_s \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 - (MD_s)^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для математического ожидания квадрата локального отклонения справедливо равенство

$$\begin{aligned} &M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ &- \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 = \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p 1 \times \\ &\times \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=1}^p \sum_{k_1, k'_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s, k'_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(k' - k'_1) \prod_{\nu=2}^s \delta_p(a_{\nu-1} k - k_\nu) \delta_p(a_{\nu-1} k' - k'_\nu) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \prod_{\nu=1}^s \frac{n_\nu}{p} + \prod_{\nu=1}^s \frac{n_\nu^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Суммируя по $n_1, \dots, n_s$, получим:

$$\begin{aligned} M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \sum_{k_1, k'_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s, k'_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(k' - k'_1) \times \\ & \times \prod_{\nu=2}^s \delta_p(a_{\nu-1} k - k_\nu) \delta_p(a_{\nu-1} k' - k'_\nu) \prod_{\nu=1}^s \left(1 - \max \left(\frac{k_\nu}{p}, \frac{k'_\nu}{p} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \prod_{\nu=1}^s \frac{(p - k_\nu)(p + 1 + k_\nu)}{2p^2} + \\ & + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s = \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p - k)(p + 1 + k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s. \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} DD_s &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(\left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{k}{p} \right) \left(1 - \frac{k'}{p} \right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{ \frac{a_j k}{p} \right\} \right) \left(1 - \left\{ \frac{a_j k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(p - k)(p + 1 + k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{k}{p} \right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{ \frac{a_j k}{p} \right\} \right) \left(\frac{p-1}{2p} \right)^s \right) + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s - \left(\frac{p-1}{2p} \right)^{2s}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$DD_s = \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2}\right)^s - \\
 & \quad - \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s\right)^2 = \\
 & = \frac{1}{p^2} \sum_{k,k'=0}^{p-1} \left(\left(1 - \max\left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p}\right)\right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max\left(\left\{\frac{a_\nu k}{p}\right\}, \left\{\frac{a_\nu k'}{p}\right\}\right)\right) - \right. \\
 & \quad \left. - \left(1 - \frac{k}{p}\right) \left(1 - \frac{k'}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) \left(1 - \left\{\frac{a_j k'}{p}\right\}\right) \right) - \\
 & \quad - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right)}{2} - \right. \\
 & \quad \left. - \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s \right) + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2}\right)^s - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^{2s}.
 \end{aligned}$$

□

6. Двумерный случай

При $s = 2$ теорема 1 существенно уточняется

ЛЕММА 10. Для любого набора $(1, a)$ справедливо равенство

$$D_p = 2 \max_{1 \leq n_1, n_2 \leq p} \left| \sum_{m=1}^{p_2} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right) \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$D_2^{(0)}\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = \sum_{m_1, m_2 = -p_1, m_1 m_2 = 0}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=1}^2 c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1) = 0,$$

то

$$D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = D_2^*\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)$$

и

$$D_p = \max_{1 \leq n_1, n_2 \leq p} \left| D_2^*\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) \right|.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4 и равенства

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right) = \\
 & = \frac{\sin\left(\pi \frac{-n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{-n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{-m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{-m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{-(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right).
 \end{aligned}$$

□

Из доказательства леммы 10 следует, что для локального отклонения $D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)$ справедливо равенство

$$D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = 2 \sum_{m=1}^{p_2} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)a + n_2 - 1}{p} m\right).$$

Естественно рассмотреть математическое ожидание локального отклонения, заданное равенством

$$MD_2 = \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right),$$

и дисперсию локального отклонения:

$$DD_2 = \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p \left(D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)\right)^2 - (MD_2)^2.$$

ЛЕММА 11. Для любого набора $(1, a)$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1) a m}{p}\right) &= \frac{p}{4} \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right), \\ \sum_{n_2=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \sin\left(\pi \frac{(n_1 - 1) a m}{p}\right) &= \frac{p}{4} \cos\left(\pi \frac{m a}{p}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из известного равенства для символа Коробова

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 1 & \text{при } b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{при } b \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p e^{2\pi i \frac{bk}{p}}$$

сразу следует, что

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \cos 2\pi \frac{bk}{p} = \begin{cases} 1 & \text{при } b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{при } b \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}, \quad \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sin 2\pi \frac{bk}{p} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1) a m}{p}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \left(\cos\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right)\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \sum_{n_1=1}^p \sin\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \times \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^p \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)\right) = \frac{p}{4} \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right); \\ \sum_{n_2=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \times \sin\left(\pi \frac{(n_1 - 1) a m}{p}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \left(\sin\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right)\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \sum_{n_1=1}^p \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \times \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^p \sin\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) = \frac{p}{4} \cos\left(\pi \frac{m a}{p}\right). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 4. Для математического ожидания локального отклонения справедливо равенство

$$MD_2 = \frac{p-1}{16p^2} + \frac{1}{16p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{m}{p} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения математического ожидания локального отклонения имеем:

$$\begin{aligned} MD_2 &= \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p D_2 \left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p} \right) = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p 2 \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right) \sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right) p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \cdot \cos \left(\pi \frac{-(n_1-1)a + n_2-1}{p} m \right) = \\ &= \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \left(\sum_{n_1=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \cos \left(\pi \frac{(n_1-1)a m}{p} \right) \right) \left(\sum_{n_2=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} \cos \left(\pi \frac{(n_2-1)m}{p} \right) \right) + \\ &+ \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \left(\sum_{n_1=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \sin \left(\pi \frac{(n_1-1)a m}{p} \right) \right) \left(\sum_{n_2=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} \sin \left(\pi \frac{(n_2-1)m}{p} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 6, получим:

$$\begin{aligned} MD_2 &= \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\frac{p}{4} \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \frac{\frac{p}{4} \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} + \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\frac{p}{4} \cos \left(\pi \frac{ma}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \frac{\frac{p}{4} \cos \left(\pi \frac{m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} = \\ &= \frac{p-1}{16p^2} + \frac{1}{16p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{m}{p} \right). \end{aligned}$$

□

7. Заключение

Заметим, что математическое ожидание квадрата локального отклонения имеет много общего с хорошо известным квадратичным отклонением, которое ввёл К. Рот в работе [17] в 1954 году. Естественно, что возникает вопрос о получении нижней оценки для математического ожидания квадрата локального отклонения параллелепипедальных сеток. В последующих работах мы планируем получить такие оценки.

В заключении выражаем свою благодарность В. Н. Чубарикову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеева М. О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 4(12). С. 35 — 38.
2. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
3. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3 вып. 2(4). С. 27 — 33.

4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. 2003. Т. 389. N.2. С. 154 — 155.
5. Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. VI Междунар. конф., посвященной 100-летию Н. Г. Чудакова (Саратов, 13 — 17 сентября 2004 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 47.
6. Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 5 вып. 3(11). С. 15 — 17.
7. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.
8. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090 — 84.
9. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
10. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.
11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
12. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
13. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
14. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С.83–118.
15. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.(второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
16. О. В. Локуцкий, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995
17. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

REFERENCES

1. Авдеева М. О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 4(12). С. 35 — 38.
2. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennoy analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.
3. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

4. V. A. Bykovskii, 2003, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Dokl. Math.*, 67:2, 175–176.
5. Gorkusha O. A. 2004, "Criterion of finiteness of the set of local lattice minima", *Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications: Thesis of the sixth International Conference dedicated to the 100th anniversary of N. G. Chudakov (Saratov, 13 – 17 September 2004)*. — Saratov: Sarat Publishing House. un-ta, p. 47.
6. Gorkusha O. A. 2002, "Criterion of finiteness of the set of local lattice minima", *Chebyshevskij sbornik*, Vol. 5, issue 3(11). p. 15–17.
7. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
8. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.
9. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
10. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
11. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
12. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
13. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
14. Korobov, N.M. 1967, "About some questions of the theory of Diophantine approximations", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 22, no. 3(135), pp. 83–118.
15. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
16. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, *Nachala chislennogo analiza* [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.
17. Roth, K.F. 1954, "On irregularities of distribution", *Mathematika*, 1, pp. 73–79.

Получено 12.03.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 514.8+514.1

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-74-87

**Моделирование минимальных параметрических сетей
в евклидовых пространствах с помощью
шарнирных механизмов**

М. Ю. Житная

Житная Марина Юрьевна — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: g-ferra@mail.ru

Аннотация

Шарнирные механизмы можно представить как конструкции, состоящие из твёрдых тел, например, стержней, некоторые пары из которых шарнирно скреплены друг с другом, то есть имеют общую точку, вокруг которой могут свободно вращаться. Широкое распространение шарнирные механизмы получили вместе с развитием приборостроения. Одной из важных первых задач было конструирование механизма, в котором один из шарниров двигался бы по отрезку прямой. Эта задача получила несколько решений, некоторые из которых были предложены Поселье, Липкиным, Уаттом, Гартом. После того, как стало понятно, как с помощью шарнирных механизмов нарисовать отрезок, следующим большим вопросом стало описание всех возможных кривых, которые могут быть траекториями одного из шарниров механизма. Решением этой задачи стала теорема Кинга, которая говорит, что множество рисуемо тогда и только тогда, когда оно либо всё объемлющее пространство, либо полуалгебраический компакт [16], [17].

Вопросы, которые рассматриваются автором данной статьи, продолжают изучение работы шарнирных механизмов и исследуют возможности их применения для решения задач оптимизации, например, поиска кратчайшей сети, соединяющей набор точек в евклидовом пространстве. Основным результатом данной работы описывает построение механизма, который строит минимальную параметрическую сеть в евклидовом пространстве размерности $d \geq 2$. В предыдущей работе автора [7] приведено доказательство существования шарнирного механизма, который строит минимальную сеть Штейнера, а также предложен вариант сборки такого механизма. Так как основной задачей было доказательство существования такого механизма, без его минимизации, описанный способ сборки заведомо можно оптимизировать, что позволяют сделать результаты, полученные в данной работе.

Ключевые слова: Проблема Штейнера, минимальные параметрические сети, шарнирный механизм, локально минимальное дерево.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

М. Ю. Житная. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 74–87.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 514.8+514.1

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-74-87

Modeling of minimal parametrical networks in euclidean spaces by means of linkages

M. Y. Zhitnaya

Zhitnaya Marina Yur'evna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: g-ferra@mail.ru

Abstract

Linkages can be represented as devices consisting of solid bodies, for example, rods, some pairs of which are connected to each other by hinges, in other words they have a common point around which they can freely rotate. Linkages became widespread along with the development of instrumentation. One of the important first problems was to design a mechanism in which one of the hinges would move along a straight line segment. This issue has received several solutions, some of which were proposed by Peaucellier, Lipkin, Watt, Garth. After it became clear how to draw a segment, the next big problem was to describe all possible curves that could be the trajectories of one of the hinges of a linkage. The solution to this problem was King's theorem, which says that a set can be drawn if and only if it is either an ambient space or a semi-algebraic compact [16], [17].

The issues investigated by the author of this paper continue the exploration of previous tasks related to linkages, since they consider the possibilities of solving optimization problems using linkages, for example, finding the shortest network connecting a set of points in Euclidean space. The main result of this work describes the construction of a mechanism that builds a minimal parametric network in a Euclidean space of dimension $d \geq 2$. In the author's previous work, a proof of the existence of a linkages that builds a minimal Steiner network is given, and a variant of constructing such a mechanism is also proposed. Since the main task was to prove the existence of such a mechanism, without minimizing it. The described assembly method can obviously be optimized and the results obtained in this work allows us to do that.

Keywords: Steiner problem, minimal parametrical network, linkage, locally minimal network.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

M. Y. Zhitnaya, 2022, "Modeling of minimal parametrical networks in euclidean spaces by means of linkages", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 74–87.

1. Введение

Шарнирные механизмы — конструкции, которые в жизни встречаются очень часто: дверные петли, настольные лампы, детали автомобилей, например, дворники. Шарнирный механизм можно представить себе как набор твёрдых тел (чаще всего это стержни), некоторые пары которых соединены между собой с помощью шарнирных креплений, то есть имеют общую точку, вокруг которой могут вращаться с разной степенью свободы [1], [2]. Во времена активного развития промышленности, когда распространение механизмов набирало обороты, перед инженерами возникла одна из первых серьёзных задач: как перевести круговое движение, которое очень легко реализуется, если закрепить один из шарниров стержня, в прямолинейное

движение. Можно было бы использовать движение втулки, скользящей вдоль стержня, но такая конструкция не является шарнирным механизмом. Одним из первых механизмов, который почти решал эту задачу, был механизм Уатта, который моделировал движение приближенное к прямолинейному и был использован для создания паровой машины. Также механизм, реализующий движение почти по прямой был построен русским математиком и механиком Чебышёвым, который изобрёл стопоходящую машину [3]. Точным решением этой задачи стал инверсор Поселье–Липкина [6], затем появились инверсоры Гарта, Кемпе–Сильвестра. Трёхмерным решением этой задачи стал механизм Саррюса.

На практике имеется большое количество терминологии и способов определения шарнирных механизмов [4], [5]. В этой статье шарнирные механизмы будут рассмотрены больше с теоретико-графовой точки зрения.

После того, как научились рисовать прямую с помощью шарнирных механизмов, следующим важным результатом стала теорема Кемпе, которая показывает, что с помощью шарнирных механизмов можно построить любую алгебраическую кривую, лежащую в круге [11], [12], [15].

Один из естественных вопросов, который здесь возникает: какие траектории могут быть у шарниров, то есть что можно нарисовать с помощью шарнирных механизмов. Ответ даёт теорема Кинга, которая говорит, что множество рисуемо тогда и только тогда, когда оно или является всем объемлющим пространством или полуалгебраическим компактом [16], [17].

Другой вопрос, который возник недавно: можно ли с помощью шарнирных механизмов реализовывать оптимальные геометрические конфигурации, то есть решать оптимизационные задачи. Одной из классических таких задач является проблема Штейнера. Она состоит в поиске кратчайшей сети (минимального дерева Штейнера [14]), соединяющей множество точек N в метрическом пространстве. Хорошо известно, что кратчайшая сеть с невырожденными рёбрами является деревом, все вершины степени один граничные, а в случае, когда объемлющее пространство — евклидово, рёбра представляют собой отрезки, стыкующиеся в вершинах под углами не меньше 120° , в частности, степени вершин не превосходят трёх, углы между смежными рёбрами не меньше 120° , а также все вершины степени два — граничные, так как, если есть внутренняя вершина степени два, то её можно выкинуть, соединив смежные ей вершины отрезком, длина которого по неравенству треугольника будет не больше суммы длин рёбер, которые выходили из вершины, которую убрали.

Основной результат, полученный в этой статье, говорит о том, что для произвольного бинарного дерева G с границей ∂G существует d -мерный шарнирный механизм L , $d \geq 2$ который для произвольного граничного отображения $\varphi: \partial G \mapsto \mathbb{R}^d$, при котором максимальное расстояние между образами ограничено некоторым числом (в силу конечности стержней шарнирного механизма), строит минимальную параметрическую сеть. Интересным фактом является то, что полученный результат позволяет одним механизмом моделировать семейство оптимальных сетей разной топологической структуры (за счет возможности вырождения ребер), и реализует переход от “жёстких” углов в 120° к “не жёстким” углам величины не меньше 120° .

Основной результат предыдущей работы автора [7] описывает, как построить механизм, который находит минимальное дерево Штейнера на плоскости. Построенный в результате механизм содержит очень большое количество стержней, но в момент создания работы прежде всего было интересно найти принципиальное описание самого механизма, не было задачи о его оптимизации, хотя заведомо это возможно сделать. Например, в своей конструкции механизм содержит шарнирную реализацию алгоритма Мелзака [10], не оптимизированную с помощью работы Хванга [9]. Также механизм осуществлял большой перебор топологий Штейнера, в том числе и тех, которые получаются друг из друга вырождениями некоторых рёбер. Оптимизировать эту и описанную выше проблему можно за счёт результатов, которые будут приведены в этой статье, а именно, можно будет перебирать только полные топологии Штейнера, и для

каждой из них строить единственную сеть, которая будет минимальной параметрической.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Алексею Августиновичу Тужилину за чуткое неустанное сопровождение в работе, помощь в преодолении трудностей и постановку нестандартных, увлекательных и вдохновляющих задач, а также профессору Александру Олеговичу Иванову за наставническую заботу, поддержку и помощь.

2. Основной текст статьи

2.1. Формализация сетей

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, в котором выделено некоторое подмножество вершин $\partial G \subset V$, называемых *граничными*. Остальные вершины будем называть *внутренними*. Пусть также задано отображение $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^d$, которое будем называть *граничным отображением*. Отображение $\Gamma: V \rightarrow \mathbb{R}^d$, такое, что $\Gamma|_{\partial G} = \varphi$ будем называть *сетью типа (G, φ) в $\mathbb{R}^d$* . Будем говорить, что $uv \in E$ — *вырожденное ребро сети Γ* , если $|\Gamma(u)\Gamma(v)| = 0$, иначе uv — *невыврожденное ребро сети*.

2.2. Формализация шарнирных механизмов

Рассмотрим простой конечный граф $G = (V, E)$, положительную функцию $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$ и некоторое отображение $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^d$, где W — некоторое подмножество множества вершин V . Тройку $L = (G, \ell, \psi) = ((V, E), \ell, \psi)$ будем называть *шарнирным механизмом в пространстве $\mathbb{R}^d$* . Вершины графа G будем называть *шарнирами*, элементы множества W — *граничными* или *неподвижными шарнирами*, а элементы $V \setminus W$ — *внутренними* или *подвижными шарнирами*. Также множество W неподвижных шарниров будем обозначать через ∂G и называть *границей шарнирного механизма L* , а отображение ψ — *граничным отображением*. Будем говорить, что *граничный шарнир w закреплён в точке $\psi(w)$* . Рёбра графа G будем называть *стержнями*, а значение $\ell(e)$, $e \in E$ — *длиной стержня e* .

Рассмотрим шарнирный механизм $L = ((V, E), \ell, \psi)$ и отображение $C: V \rightarrow \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что C *согласовано с ψ* , если $C|_W = \psi$; отображение C *согласовано с ℓ* , если для любого ребра $uv \in E$ верно, что $|C(u)C(v)| = \ell(uv)$. Отображение C , согласованное с ℓ и ψ , будем называть *конфигурацией*, или *реализацией*, или *положением шарнирного механизма L в пространстве $\mathbb{R}^d$* , при этом, будем говорить, что $C(v)$ — *положение шарнира v* . Множество всех положений C шарнирного механизма L образует *конфигурационное пространство $\mathcal{C}_L$ механизма L* . Ограничение $\mathcal{C}_L|_v$, где $v \in V$ — шарнир механизма L , назовём *конфигурационным пространством шарнира v* .

Важное замечание: чтобы задать шарнирный механизм с непустым конфигурационным пространством достаточно указать какую-либо его конфигурацию или описать алгоритм построения (сборки) этого механизма.

Будем говорить, что шарнир s механизма L_1 *рисует множество M* , если его конфигурационное пространство совпадает с M . Множество M может зависеть от положений других шарниров (например, “ M = окружность с центром в O , радиуса AB где O, A, B — подвижные шарниры”).

Будем говорить, что механизм $L = ((V, E), \ell, \psi)$ *рисует множество сетей $[G]$* , для которых выполнено свойство S , где $G = (V_G, E_G)$, если во множестве шарниров V существует подмножество $U \subset V$, для которого существует биекция $\beta: U \rightarrow V_G$ такая, что для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ существует сеть $\Gamma \in [G]$, для которой выполнено свойство S , а также для любой сети $\Gamma \in [G]$, удовлетворяющей свойству S , существует конфигурация $C \in \mathcal{C}_L$ такая, что выполнено $\Gamma \circ \beta = C|_U$.

Чтобы не утяжелять описание в некоторых местах вместо “положения шарнира” будем просто говорить “шарнир” или “точка”. На рисунках шарниры будем изображать точками, а стержни — отрезками. Точки, соответствующие положениям шарниров, будем подписывать названиями самих шарниров, то есть, например, вместо $C(U)$ будем писать просто U .

Опишем операцию скрепления шарнирных механизмов. Пусть есть два механизма L_1 и L_2 , и в их множествах шарниров выделены подмножества A_1 и A_2 соответственно. Эти подмножества могут содержать как закреплённые, так и не закреплённые шарниры. Пусть задана биекция $\nu: A_1 \rightarrow A_2$ такая, что существуют конфигурации $C_1 \in \mathcal{C}_{L_1}$ и $C_2 \in \mathcal{C}_{L_2}$, для которых $C_2 \circ \nu = C_1|_{A_1}$ (это нужно для того, чтобы конфигурационное пространство полученного механизма L было не пустым). Биекция ν позволяет отождествить множества A_1 и A_2 и обозначить полученное множество через A , а значит, можно считать, что вместо A_1 и A_2 множества вершин механизмов L_1 и L_2 содержат множество A . Множество закреплённых шарниров нового механизма обозначим W . Оно будет содержать все шарниры множеств $W_1 \setminus A_1$ и $W_2 \setminus A_2$, а также, если для некоторого i шарнир $a_j^i \in A_j \cap W_j$, то новый шарнир $a^i \in A$ тоже будет закреплённым в новом механизме, то есть принадлежать W , причём, если φ — это граничное отображение скрепления, то $\varphi(a^i) := \varphi_j(a_j^i)$. Скреплением механизмов L_1 и L_2 по биекции ν будем называть шарнирный механизм L , граф которого является объединением графов механизмов L_1 и L_2 , длины рёбер нового механизма соответствуют длинам рёбер скрепляемых механизмов, а неподвижные шарниры остаются закреплёнными в тех же точках. Далее для описания биекции ν будем просто говорить, какие вершины с какими будут соединены.

Аналогично можно описать операцию закреплёния шарнира C на стержне AB . Для этого прикрепим к C два стержня CA' и CB' , таких, что $|CA'| + |CB'| = |AB|$. А затем попарно скрепим A с A' и B с B' . Получим, что шарниры A, B, C попарно соединены стержнями так, что образуют вырожденный треугольник.

2.3. Предварительные результаты

Пользуясь теоремой о строгой минимальности [13], можно сформулировать критерий того, что сеть с вырожденными рёбрами является минимальной параметрической. Рассмотрим сеть Γ типа (G, φ) . Каждой паре v, e , где e — ребро, смежное внутренней вершине v , поставим в соответствие вектор $\nu_{v,e}$, зависящий от Γ , удовлетворяющий следующим условиям.

1. Выполнено неравенство $|\nu_{v,e}| \leq 1$.
2. Если $e = vv'$ и v' — внутренняя вершина, то выполняется равенство $\nu_{v,e} + \nu_{v',e} = 0$.
3. Если e — не вырожденное ребро сети гамма, то $\nu_{v,e}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{\Gamma(v')\Gamma(v)}$ и $|\nu_{v,e}| = 1$;
4. Для каждой внутренней вершины выполняется равенство $\sum_{v': vv' \in E} \nu_{v,vv'} = 0$.

Необходимое и достаточное условие того, что сеть Γ является минимальной — это существование такой расстановки векторов ν . Обозначим через $a_{vv'}$ единственную точку пространства $\mathbb{R}^n$ такую, что $\nu_{v,vv'} = \overrightarrow{\Gamma(v)a_{vv'}}$.

Построим механизм, реализующий минимальную параметрическую сеть, используя необходимое и достаточное условие, описанное выше.

2.4. Вспомогательные механизмы

Жёсткий прямоугольник. Рассмотрим механизм, состоящий из четырёх незакреплённых шарниров, попарно соединённых стержнями. На рис. 1 изображена конфигурация такого

механизма на плоскости. Все шарниры лежат в вершинах четырёхугольника, а стержни образуют его стороны и диагонали. Представленный механизм является жёсткой конструкцией в том смысле, что если рассмотреть любую его реализацию в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, то шарниры тоже будут лежать в одной плоскости в вершинах прямоугольника с теми же длинами сторон. Будем называть описанный механизм *жёстким прямоугольником*.

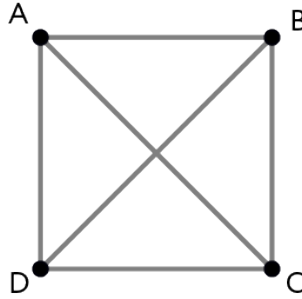


Рис. 1: Жёсткий прямоугольник (квадрат)

Шарнирная страница. Рассмотрим механизм, состоящий из двух одинаковых жёстких квадратов $ODCN$ и $DCBA$, имеющих общую сторону CD длины a (см. рис. 2). Назовём этот механизм *шарнирной страницей*.

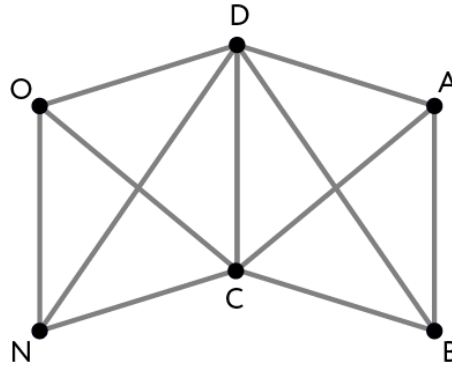


Рис. 2: Шарнирная страница

Для любой реализации этого механизма в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, справедливо, что точка A является образом при параллельном переносе точки O на вектор $\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DA}$, где $\vec{OD} \perp \vec{ON}$ и $\vec{DA} \perp \vec{ON}$, значит, для любой реализации рассматриваемого механизма, если $A \neq O$, то $\vec{AO} \perp \vec{ON}$. Так как угол $\angle ODA$ может принимать любые значения, то расстояние OA может принимать любое значение между 0 и $2a$. Таким образом, верно, что в этом механизме шарнир A рисует шар с центром в O радиуса $2a$ размерности $d - 1$, перпендикулярный ON . Если $d = 3$, то этот шар будет плоским диском перпендикулярным ON .

Шарнирная книга. Теперь соберём новый механизм, состоящий из n страниц L_i , с множествами шарниров $V_i = \{OD_iC_iND_iC_iB_iA_i\}$, причём все страницы L_i имеют общий стержень ON . Назовём такой механизм *книгой с n страницами и переплётом ON* . На рис. 3 пример реализации книги с 4 страницами в $\mathbb{R}^3$. Множество шарниров A_i обозначим через $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. В этом механизме шарниры множества A рисуют шар $S(L)$ с центром в O радиуса $2a$, перпендикулярный ON , и размерность которого равна $d - 1$.

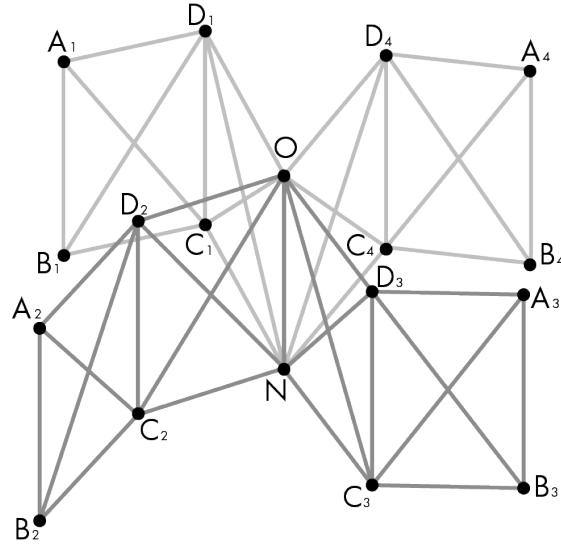
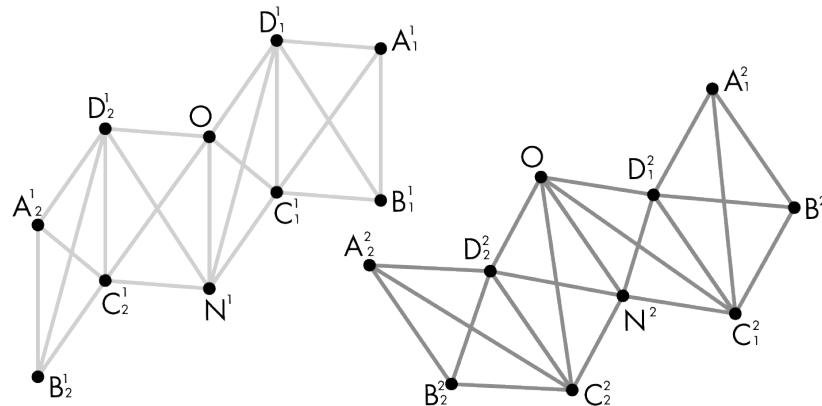


Рис. 3: Шарнирная книга

Скрепление двух книг. Описание следующего механизма начнем с примера. Рассмотрим две книги L^1 и L^2 с двумя страницами, одинаковыми длинами соответственных стержней, переплётами ON^1 и ON^2 , и множествами шарниров V^1 и V^2 , где $V^j = \{OD_i^j C_i^j N^j D_i^j C_i^j B_i^j A_i^j\}$, $1 \leq j \leq 2, 1 \leq i \leq 2$. Они имеют разные переплёты, но общую точку O . На рис. 4 изображены книги L_1 и L_2 по отдельности. Соединим шарниры N^1 и N^2 стержнем равным по длине ON^1 , а также попарно скрепим шарниры A_i^1 с соответственными шарнирами A_i^2 . В общем случае в книгах L^1 и L^2 может быть любое количество страниц. Если их больше двух, то будем попарно скреплять все шарниры множеств A_i^j с одинаковыми индексами i и разными j . Полученные в результате такого скрепления шарниры обозначим A_i , $A = \cup A_i$, а получившийся механизм обозначим L . На рис. 5 показано скрепление L механизмов L^1 и L^2 . Посмотрим, каким будет конфигурационное пространство шарниров A_i .

После скрепления книг L^1 и L^2 шарниры множества A будут рисовать пересечение шаров $S(L^1)$ и $S(L^2)$, рисуемых шарнирами A_i^j до скрепления. Так как $S(L^1)$ и $S(L^2)$ имеют общий центр O и их нормали ON^1 и ON^2 не совпадают, то это пересечение будет шаром $S(L)$ с центром в O размерности $d-2$, перпендикулярным ON^1 и ON^2 . Будем говорить, что приведённое построение описывает операцию *скрепления двух книг с одинаковым количеством страниц*.

Рис. 4: Шарнирные книги L^1 и L^2 в пространстве $\mathbb{R}^3$

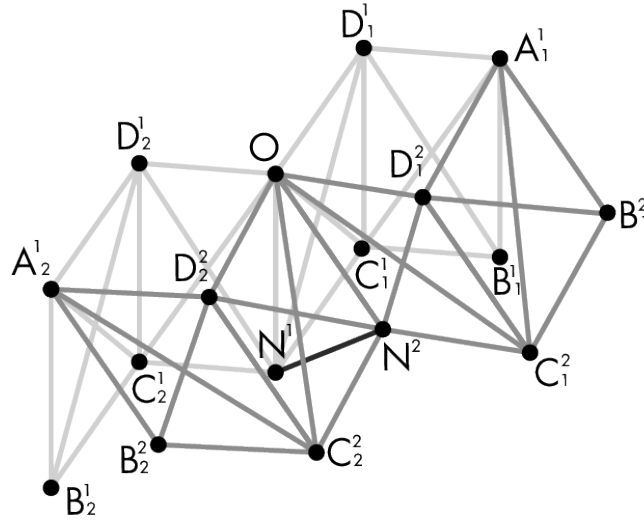


Рис. 5: Скрепили шарниры A_1^1 и A_2^1 , A_1^2 и A_2^2 , O и O , а также добавили стержень, соединяющий N^1 и N^2

Скрепление k книг. Аналогично опишем операцию скрепления k книг, $2 \leq k \leq d$, с одинаковым количеством страниц в пространстве $\mathbb{R}^d$. Такое скрепление позволит рисовать шар размерности на $d - k$. Рассмотрим набор k шарнирных книг L^j , $1 \leq j \leq k$, с n страницами, имеющих одинаковые длины соответственных стержней и общий шарнир O . Множества вершин каждой из книг $V^j = \{OD_i^j C_i^j N^j D_i^j C_i^j B_i^j A_i^j\}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq n$. Скрепим между собой шарниры A_i^j с одинаковыми индексами i и разными j . Новые шарниры обозначим A_i . Далее попарно соединим шарниры множества $N = \{N^1, \dots, N^k\}$ с помощью стержней равных по длине ON^1 , прикрепляя каждую пару шарниров к разным концам стержня. В получившемся механизме шарниры множества A будут рисовать пересечение шаров $S(L^j)$, размерность каждого из которых при реализации в $\mathbb{R}^d$ равна $d - 1$, все они имеют общий центр O и никакие два шара не равны, так как их нормали ON^j не совпадают. Это пересечение будет шаром $S(L)$, размерность которого равна $d - k$, он перпендикулярен всем стержням ON^j , и его центр находится в точке O . Описанный механизм назовём *скреплением k книг с n страницами*.

Для некоторых шарнирных механизмов свойство, которое нам необходимо выполняется при условии того, что объемлющее пространство, в котором рассматривается механизм имеет определённую размерность, и если рассмотреть тот же механизм в пространстве большей размерности, то его работа уже не будет соответствовать желаемым условиям. Например, если рассмотреть классический инверсор Поселье в трёхмерном пространстве, то у шарниров появятся дополнительные степени свободы и уже нельзя будет говорить, что этот механизм осуществляет только инверсию.

Чтобы плоский механизм L оставался плоским при рассмотрении его в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d > 2$, поможет его укрепление с помощью описанных выше скреплений книг. Для этого ко всем шарнирам механизма L прикрепим вершины страниц скрепления $d - 2$ книг. Так как все вершины страниц при любом положении механизма находятся в одной плоскости, то и весь механизм L будет оставаться плоским.

Все плоские механизмы описанные далее при использовании их в пространстве, размерность которого больше двух, по умолчанию будут укреплены скреплением шарнирных книг, количество которых на два меньше размерности пространства.

Движение точек по прямой с сохранением порядка. Построим механизм, который содержит шарниры x, y, z , в котором шарниры x и y могут свободно двигаться так, что рас-

стояние между ними не превосходит l и для любого их положения шарнир z рисует отрезок $[x, y]$.

Рассмотрим механизм на рис. 6: $ouvx'$ — инверсор Поселье с длинами стержней a и b ; $\triangle ofz$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой $a + b$, шарнир t закреплён на стержне oz так, чтобы он совпадал с центром окружности, которая является образом прямой fz в результате отражения с помощью имеющегося инверсора; длина стержня tx' равна расстоянию ot ; величины pq, qx' равны $\frac{\sqrt{2}}{2}tx'$. Возьмём два экземпляра такого механизма и скрепим между собой одноимённые шарниры o и z , а к паре шарниров f прикрепим концы дополнительного стержня длины $2fz$. Один из шарниров x переобозначим как y и получим, что в таком механизме шарниры x и y смогут свободно двигаться по плоскости, находясь друг от друга на расстоянии не больше $2fz$, а z рисует отрезок $[x, y]$. Длины стержней механизма можно подобрать так, чтобы $2fz$ равнялось l .

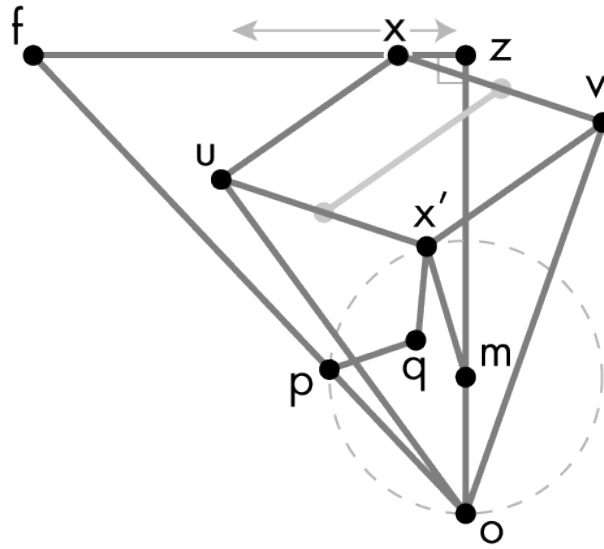


Рис. 6: Половина механизма,двигающего точки по прямой с сохранением порядка. Шарнир x рисует $[f, z]$.

Вспомогательный механизм 1.

Построим механизм, который содержит шарниры $a_{vv'}$, $vv', a_{v'v}$ (рис. 7), для которых верно следующее.

Пусть $v \neq v'$, тогда имеют место следующие свойства.

1. Выполнено равенство $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.
2. Вектор $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ сонаправлен $\overrightarrow{vv'}$.
3. Длины $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}|$ и $|\overrightarrow{va_{vv'}}|$ равны 1.

Если $v = v'$, то выполняется следующее.

1. Верно равенство $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.
2. Длины векторов таковы, что $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}| = |\overrightarrow{va_{vv'}}| \leq 1$.

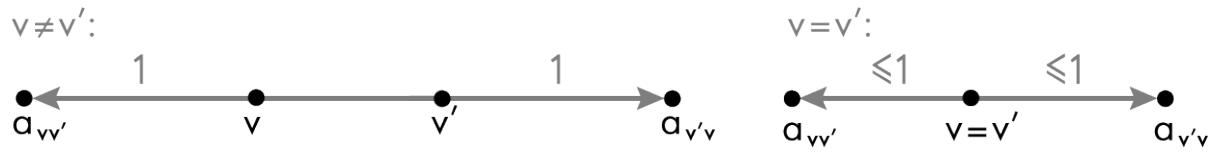


Рис. 7: Суть вспомогательного механизма 1

Шаг 1.

Для начала возьмём два шарнира v и v' и соединим их двузвенной ломаной с равными звеньями, а также прикрепим к v и v' укрепленные шарнирные ромбы $p v q a_{vv'}$ и $s v' r a_{v'v}$ с длиной стороны $\frac{1}{2}$ (укрепленные означает, что к серединам двух противоположных сторон шарнирно прикреплены концы ещё одного стержня, длина которого равна длине стороны ромба [6]) (рис. 8).

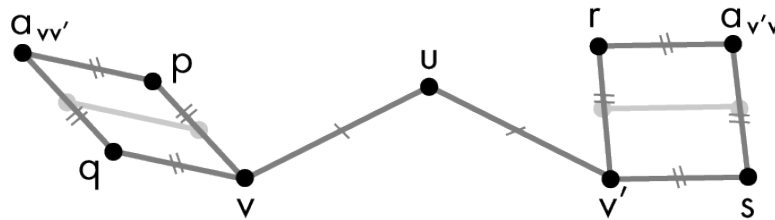


Рис. 8: Шаг 1.

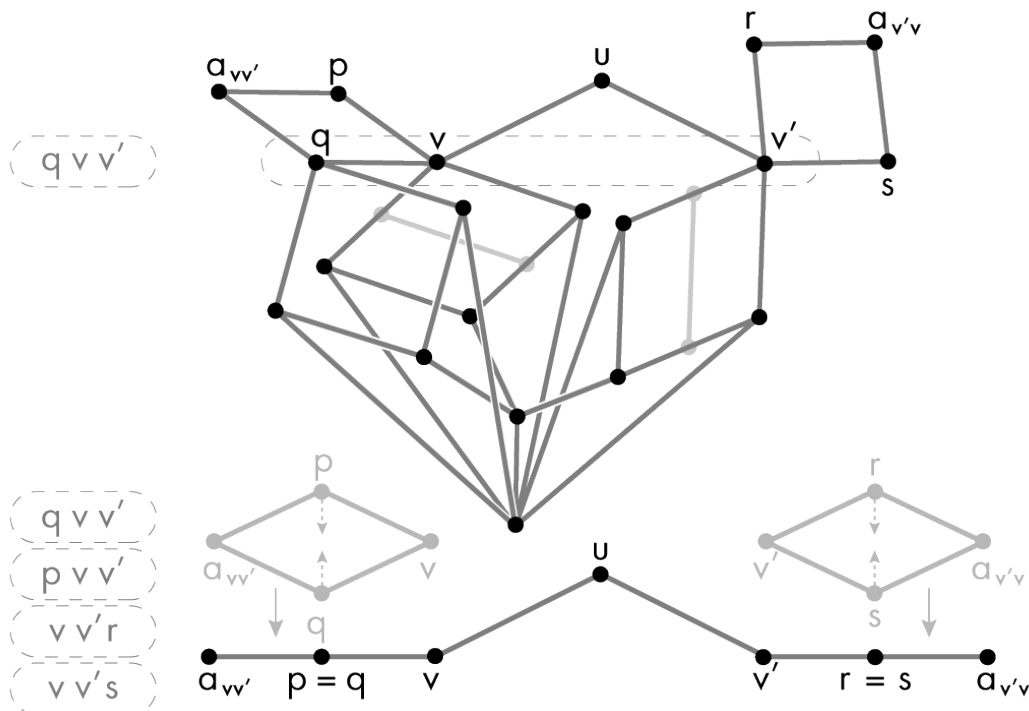


Рис. 9: Шаг 2.

Шаг 2.

Далее, с помощью механизма, описанного выше, который позволяет двигать точки по прямой с сохранением порядка, можно сделать так, чтобы вектор $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ был сонаправлен $\overrightarrow{vv'}$ (рис. 9 сверху), соединим шарниры q, v, v' , чтобы они лежали на одной прямой. Аналогичным образом скрепим тройки точек $\{p, v, v'\}$, $\{vv'r\}$ и $\{vv's\}$ (рис. 9 снизу). При таком скреплении пока $v \neq v'$ ромбы $pvqa_{v,v'}$ и $sv'ra_{v,v'}$ будут вырожденными, лежащими на одной прямой, то есть будет выполнено условие, что $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}| = |\overrightarrow{va_{v,v'}}| = 1$, пока $v \neq v'$.

Когда v совпадёт с v' , ромбы смогут перестать быть вырожденными, а также смогут вращаться вокруг $v = v'$, но в конечном результате нужно, чтобы, ромбы вращались так, что $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.

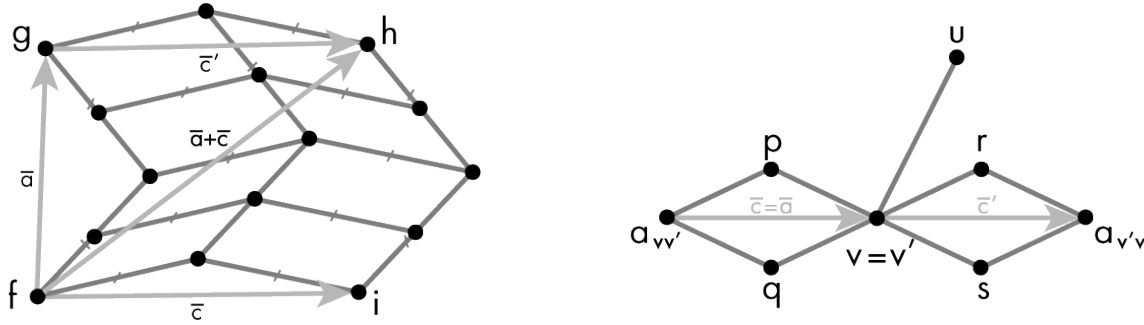


Рис. 10: Шаг 3

Шаг 3.

Рассмотрим механизм, изображённый слева на рис. 10. Он состоит из четырёх укреплённых ромбов, скреплённых между собой, как показано, и позволяет параллельно перенести переменный вектор $\vec{c}$ на переменный вектор $\vec{a}$. Полученный вектор обозначим $\vec{c}'$. Прикрепим этот механизм так, чтобы $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ был результатом параллельного переноса $\overrightarrow{a_{vv'}v}$ на $\overrightarrow{a_{vv'}v}$. На этом завершается построение вспомогательного механизма 1.

Этот механизм шарнирами v и v' будем прикреплять в концах рёбер, которые смежны только с внутренними вершинами.

Для рёбер смежных с внутренней и граничной вершиной соберём похожий механизм. Опишем его ниже.

Вспомогательный механизм 2.

Повторим построение шага 1 предыдущего механизма, но без ромба с вершиной v' (рис. 11).

Далее действуем, как на шаге 2, заставляя двигаться по одной прямой тройки $\{p, v, v'\}$ и $\{q, v, v'\}$.

На этом построение заканчивается. В полученном механизме будет верно, что точки $a_{vv'}, v, v'$ лежат на одной прямой и, если $v \neq v'$, то $|\overrightarrow{a_{vv'}v}| = 1$, иначе $|\overrightarrow{a_{vv'}v}| \leq 1$.

Сумматор векторов. Механизм на рис. 10 слева можно также рассматривать как сумматор двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ с общим началом. Если нужно сложить больше двух векторов $a_1, \dots, a_n$, то сначала прикрепим сумматор к любым двум векторам, затем к результату и ещё одному вектору снова прикрепим сумматор и так будем продолжать, пока не сложим все векторы. Обозначим через $\vec{su}$ вектор, который получается в результате суммирования. Если скрепить шарниры s и u , то получим что сумма векторов будет равна нулю, то есть складываемые векторы могут быть любыми с условием, что их сумма равна нулю.

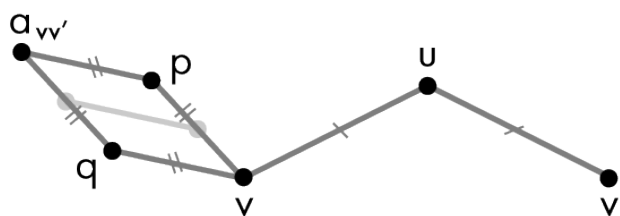


Рис. 11: Начало построения вспомогательного механизма 2

2.5. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Для любого бинарного дерева G с границей ∂G существует шарнирный механизм, который для любого граничного отображения φ , для которого образ граничных вершин содержится в некотором шаре заданного диаметра, рисует минимальную параметрическую сеть типа (G, φ) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор шарниров, количество которых равно количеству вершин сети. Такой механизм рисует все сети типа G . Ко всем парам (v, vv') , $v \notin \partial G, vv' \in E$, прикрепим вспомогательный механизм 1, ко всем парам (v, vv') , $v \in \partial G, vv' \in E$ прикрепим вспомогательный механизм 2. Затем прикрепим сумматоры так, чтобы для каждой внутренней вершины v равнялись нулю суммы $\sum_{v': vv' \in E} \overrightarrow{va_{vv'}}$. Получим, что, каким бы ни было граничное отображение φ , в построенном механизме будет выполняться необходимое и достаточное условие для того, чтобы рисуемая им сеть была минимальной параметрической. $\square$

3. Заключение

Текущая работа стала продолжением исследований в области поиска оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов. Основной результат данной статьи показывает существование и предлагает способ сборки механизма, который для заданного бинарного дерева G с границей строит минимальную параметрическую сеть для любого граничного отображения, при котором диаметр образа ограничен некоторым числом.

Использование результатов, полученных в данной статье, может существенно упростить механизм, который строит кратчайшее дерево Штейнера, описанный в предыдущей работе автора [16], можно уйти от использования шарнирной реализации алгоритма Мелзака, а также не рассматривать топологии, которые эквивалентны с точностью до вырождения рёбер. Это существенно уменьшит общее количество стержней в механизме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сосинский А.Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая [Электронный ресурс] / Сосинский А.Б. – Дубна: Летняя школа «Современная математика», 2007. – Режим доступа: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130
2. Сосинский А.Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая [Электронный ресурс] / Сосинский А.Б. – Дубна: Летняя школа «Современная математика», 2007. – Режим доступа: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus

3. Механизмы П.Л. Чебышева [Электронный ресурс] / Российский институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук 2009-2021. – Режим доступа: URL: <https://tcheb.ru/>
4. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики / Ковалёв М.Д. — Москва: URSS Ленанд, 2019
5. Ковалёв М.Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? / Ковалёв М. Д. // Итоги науки и техники, серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры — 2020. — том 179. — с. 16-28.
6. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. — Москва: УРСС, 2014. — 360 с.
7. Житная М.Ю. Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов / Житная М.Ю. // Фундамент. и прикл. матем., 2019, том 22, выпуск 6, с. 95-122.
8. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки / Тужилин А.А., Фоменко А.Т. // Вестн. Моск. ун-та. — 1986, номер 3, с. 3-12
9. Hwang F.K. Linear time algorithm for full steiner trees / Hwang F.K. // Operations Research Letters. — 1986. — Volume 4, Issue 5. — P. 235-237.
10. Melzak Z.A. On the problem of Steiner / Melzak Z.A. // Canadian Mathematical Bulletin. — 1961. — 4(2). — P. 143-148.
11. Kempe A.B. How to draw a straight line: a lecture on linkages. / Kempe A.B. — Macmillan & Co. — 1871. — 51 P.
12. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages. / Kapovich M., Millson J.J. // Topology. — 2002, v. 41(2002), №6, P. 1051-1107.
13. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. — USA: CRC Press, 1994, — 432 P.
14. Gilbert E.N., Pollak H.O. / Steiner Minimal Trees. // Gilbert E.N., Pollak H.O. // SIAM J. Appl. Math. — 1968, v.16, №1, P. 1-29.
15. Abbott T.G. Generalizations of Kempe’s Universality Theorem / Abbott T.G. — Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2008, 86 P.
16. King H. Semiconfiguration spaces of planar linkages / King H. // URL:<https://arxiv.org/abs/math/9810130>
17. H. King. Configuration spaces of linkages in $\mathbb{R}^n$ / H. King // [arXiv.org:math/9811138](https://arxiv.org/abs/math/9811138).

REFERENCES

1. Sosinsky A.B., 2007, “Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one”, *Summer school “Modern mathematics”*, Dubna, Russia, Available at: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130.
2. Sosinsky A.B., 2007, “Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two”, *Summer school “Modern mathematics”*, Dubna, Russia, Available at: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus.

3. *Chebyshev linkages*, 2009-2021, Available at: URL: <https://tcheb.ru/>.
4. Kovalev M.D., 2019, *Geometricheskie voprosi kinematiki i statiki* [*Geometrical issues of kinematics and statics*], URSS Leland, Russia.
5. Kovalev M.D., 2020, *Chto takoe sharnirniy mehanizm? I chto zhe dokazal Kempe?* [*What is a hinge mechanism? And what did Kempe prove?*], URSS Leland, Russia.
6. Oshemkov A.A., Popelenskiy F.Y., Tuzhilin A.A., Fomenko A.T., Shafarevich A.I. 2014 *Kurs naglyadnoy geometrii i tipologii* [*The course of visual geometry and topology*], URSS, Russia.
7. Zhitnaya M.Y. 2019, "Modeling of optimal networks by means of linkages" *Fundam. Prikl. Mat.*, Vol. 22, Issue 6, 95–122.
8. Tuzhilin A.A., Fomenko A.T. 1986, *Mnogoznachnie otobrazheniya, minimal'nie poverhnosti i milnie plenki* [*Multivalued mappings, minimal surfaces, and soap films*], *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, №3, 3–12.
9. Hwang F.K. 1986, "Linear time algorithm for full steiner trees", *Operations Research Letters*, Vol. 4, Issue 5, 235-237.
10. Melzak Z.A., 1961, "On the problem of Steiner", *Canadian Mathematical Bulletin*, Vol 4(2), 143-148.
11. Kempe A.B., 1871, *How to draw a straight line: a lecture on linkages*, Macmillan & Co.
12. Kapovich M., Millson J.J. "Universality theorems for configurations of planar linkages", *Topology*, Vol. 41(2002), №6, 1051-1107.
13. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., 1994, *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations*, USA: CRC Press.
14. Gilbert E.N., Pollak H.O., 1968, "Steiner Minimal Trees", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.16, №1, 1-29.
15. Abbott T.G., 2008, *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
16. King H. *Semiconfiguration spaces of planar linkages*, Available at: URL: <https://arxiv.org/abs/math/9810130>.
17. H. King., *Configuration spaces of linkages in $\mathbb{R}^n$* , Available at: URL: [arXiv.org:math/9811138](https://arxiv.org/abs/math/9811138).

Получено 14.11.21

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105

Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Владимирский филиал) (г. Владимир).

e-mail: georg967@mail.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд доказал равномерность распределения сумм цифр двоичных разложений натуральных чисел по арифметическим прогрессиям. В дальнейшем этот результат был обобщен на многие другие системы счисления, в том числе, на систему счисления Фибоначчи.

Эминян нашел асимптотическую формулу для количества натуральных чисел n , не превосходящих заданного, у которых n и $n + 1$ имеют заданную четность суммы цифр двоичного разложения. Недавно данный результат был обобщен Шутовым на случай разложений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи.

В настоящей работе мы рассматриваем более общую задачу о количестве натуральных чисел n , не превосходящих заданного X , у которых n и $n + l$ имеют заданную четность суммы цифр разложения в систему счисления Фибоначчи. Приведен метод, позволяющий получить асимптотическую формулу для данного количества при всех l . В основе метода — изучение некоторых специальных сумм, связанных с задачей и рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют эти суммы. Показано, что при всех l и при всех вариантах четности главный член асимптотики отличен от ожидаемого значения $\frac{X}{4}$. Также доказано, что остаточный член имеет порядок $O(\log X)$. В случае $l \leq 10$ константы в главном члене асимптотической формулы найдены в явном виде.

В заключении работы сформулирован ряд открытых проблем для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, задача Эминяна, суммы цифр.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 88–105.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105

An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Presidential Russian Academy of National Economy and Public Administration (Vladimir branch) (Vladimir).

e-mail: georg967@mail.ru

Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond proved the uniformity of distribution of the sums of binary digits expansions of natural numbers in arithmetic progressions. Later, this result was generalized to many other numeration systems, including Fibonacci numeration system.

Eminyan find an asymptotic formula for the number of natural n , not exceeding a given one, such that n and $n + 1$ have a given parity of the sum of digits of their binary expansions. Recently, this result was generalized by Shutov to the case of Fibonacci numeration system.

In the paper we consider quite more general problem about the number of natural n , not exceeding X , such that n and $n + l$ have a given parity of the sum of digits of their representations in Fibonacci numeration system. A method is presented that allows to obtain asymptotic formula for a given quantity for all l . It is based on the study of some special sums associated with the problems and recurrence relations for these sums. It is shown that for any l and all variants of parity the leading term of the asymptotic is different from the expected value $\frac{X}{4}$. Als it is proved that the remainder has the order $O(\log X)$. For $l \leq 10$ constants in the leading term of asymptotic formulas are found explicitly.

In the conclusion of the work, some open problems for further research are formulated.

Keywords: Fibonacci numers, Eminyan's problem, sums of digits.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2022, "An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 88–105.

1. Введение

Представим натуральное число n в двоичной системе счисления:

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i 2^i,$$

где $n_i \in \{0, 1\}$ и определим множества

$$\mathbb{N}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} n_i \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0.$$

Изучение множеств $\mathbb{N}_i$ было начато А.О. Гельфондом в статье [2], в которой была показана равномерность распределения чисел из данных множеств по арифметическим прогрессиям. Дальнейшие многочисленные теоретико-числовые результаты о множествах $\mathbb{N}_i$ были получены К.М. Эминяном [13], [14], [15], А.А. Карацуба [8], [9], А.П. Науменко [10], [11] и рядом других авторов.

Теперь рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи $\{F_i\}: F_0 = F_1 = 1, F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и напомним, что любое натуральное число n имеет представление Цеккендорфа [6]

$$n = \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i F_i,$$

где $f_i \in \{0, 1\}$, $f_i f_{i+1} = 0$, $lf(n) = \min\{k : F_{k+1} > n\}$. Очевидно, что $lf(n) = O(\log n)$. Будем кратко записывать разложение n в систему счисления Фибоначчи как $n = (f_{lf(n)} f_{lf(n)-1} \dots f_1)_F$.

Определим множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}_0,$$

то есть множества натуральных чисел с четной и нечетной суммой цифр представления в системе счисления Фибоначчи. Результаты, аналогичные результатам Гельфонда для системы счисления Фибоначчи, были получены в работе [3].

Положим

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{F}_0, \\ -1, & n \in \mathbb{F}_1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon(n) = (-1)^{\sum_{i=1}^{lf(n)} f_i}.$$

Рассмотрим множество

$$N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \#\{n < X : \varepsilon(n) = \varepsilon_1, \varepsilon(n+1) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1 .

В работе [5] найдена следующая асимптотическая формула для $N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(X)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то

$$N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \frac{\sqrt{5}}{10} X + O(\log X).$$

Если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то

$$N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} X + O(\log X).$$

Доказательство данной теоремы основывалось на представлении $N_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(X)$ в виде двух сумм $\sum_{n < X} \varepsilon(n)$ и $S_1(X) = \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+1)$. В свою очередь асимптотическая формула для $S_1(X)$ получена с помощью сведения ее к сумме $S_1^*(k) = S_1(F_k)$ и нахождению явного рекуррентного соотношения для сумм $S_1^*(k)$.

Еще одно доказательство этой теоремы было получено в [12]. Это доказательство основывается на доказанной в [7] теореме о геометризации системы счисления Фибоначчи.

В случае двоичной системы счисления асимптотика аналогичной суммы была найдена в [4] и, независимо, в [15].

Положим

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \#\{n < X : \varepsilon(n) = \varepsilon_1, \varepsilon(n+l) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1 , l – фиксированное натуральное число. $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ можно также проинтерпретировать как число решений уравнения

$$n - m = l$$

в натуральных числах с условиями

$$n \leq X, \varepsilon(n) = \varepsilon_2, \varepsilon(m) = \varepsilon_1.$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Существует постоянная $C_l \neq 0$ такая, что справедлива асимптотическая формула*

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_l}{4} X + O(\log X).$$

Получение данной асимптотической формулы состоит из следующих шагов:

1. Сведение $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ к суммам вида $\sum_{n < X} \varepsilon(n)$ и $S(X) = \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l)$.
2. Использование оценки для $\sum_{n < X} \varepsilon(n)$, полученной ранее в работах [1] и [5].
3. Нахождение оценки $S(X)$ начнем с получения рекуррентного соотношения для $S^*(k) = S(F_k)$, которое имеет вид $S^*(k+1) = S^*(k) + S^*(k-1) + \chi_{4,l}(k)$, где $\chi_{4,l}(k)$ – периодическая функция с периодом, равным 4.
4. Последнее уравнение является неоднородным, поэтому его общее решение находим как сумму общего решения однородного $\bar{S}^*(k)$ и частного решения неоднородного $\widetilde{S}^*(k)$, причем $\widetilde{S}^*(k)$ – это периодическая функция с периодом 4.
5. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{S}^*(k) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$.
6. Затем доказываем, что $C_1 \neq 0$ и записываем оценку для $S^*(k)$ как $C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + O(1)$.
7. Представляя $X = \sum_{j=1}^t F_{k_j}$, где $k_i \geq k_{i+1} + 2$, а $S(X)$ как сумму значений $S^*(k_j) + O(t)$, находим асимптотическую формулу для $S(X) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} C_1 X + O(\log X)$, и получаем утверждение теоремы.

При $l \leq 10$ значения C_l вычислены нами в явном виде.

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{n < X} \varepsilon(n) = O(\log X).$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [1], [5].

ЛЕММА 2. *Пусть натуральное m таково, что $m < F_i$, тогда справедливо соотношение*

$$\varepsilon(F_i + m) = \begin{cases} -\varepsilon(m) & \text{при } m < F_{i-1}, \\ \varepsilon(m) & \text{при } F_{i-1} \leq m < F_i. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m < F_{i-1}$, то $F_i + m < F_{i+1}$ и разложение числа $F_i + m$ в систему счисления Фибоначчи имеет вид $(10f_{i-2}f_{i-3}\dots f_1)_F$, а числа $F_i = (1\underbrace{00\dots 0}_{i-1})_F$. Представим m как

$(F_i + m) - F_i$ и получим, что $\varepsilon(F_i + m) = -\varepsilon(m)$.

Если $F_{i-1} \leq m < F_i$, то $m = (10f_{i-3}f_{i-4}\dots f_1)_F$, $F_i = (1\underbrace{00\dots 0}_{i-1})_F$. В таком случае разложение в систему счисления Фибоначчи числа $F_i + m$ имеет вид $(100f_{i-3}f_{i-4}\dots f_1)_F$, а значит $\varepsilon(F_i + m) = \varepsilon(m)$.

Таким образом, утверждение леммы 2 полностью доказано.

ЛЕММА 3. При любом натуральном $i \geq 1$ справедливо равенство

$$F_i + F_{i-2} + F_{i-4} + \dots = F_{i+1} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость утверждения при $i = 1$ и $i = 2$.

При $i = 1$ получаем верное равенство $F_1 = F_2 - 1$, т.е. $1 = 2 - 1$.

При $i = 2$ имеем $F_2 = F_3 - 1$, т.е. $2 = 3 - 1$, что также верно.

В предположении, что равенство справедливо при $i = j$, т.е. $F_j + F_{j-2} + F_{j-4} + \dots = F_{j+1} - 1$, убедимся в его справедливости при $i = j + 2$:

$$F_{j+2} + F_j + F_{j-2} + F_{j-4} + \dots = F_{j+2} + F_{j+1} - 1 = F_{j+3} - 1,$$

так как $F_{j+3} = F_{j+2} + F_{j+1}$.

Следовательно, равенство справедливо при всех $i \geq 1$.

ЛЕММА 4. Предположим, что $k_{i-1} - 2 \geq k_i$, где $i = 2, 3, \dots, j$ и $m < F_{k_j-1}$, тогда справедливо равенство

$$\varepsilon \left(m + \sum_{i=1}^j F_{k_i} \right) = (-1)^j \varepsilon(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По условию $k_{i-1} - 2 \geq k_i$, где $i = 2, 3, \dots, j$, значит

$$\varepsilon \left(\sum_{i=1}^j F_{k_i} \right) = (-1)^j.$$

Представим $\sum_{i=1}^j F_{k_i}$ в системе счисления Фибоначчи как $(f_r f_{r-1} \dots f_1 \underbrace{00\dots 0}_{k_j-1})_F$, где $f_1 = 1$.

В свою очередь известно, что $m < F_{k_j-1}$, поэтому разложение m в систему счисления Фибоначчи имеет вид $(m_s m_{s-1} \dots m_1)_F$, где $s \leq k_j - 2$, и, соответственно,

$$m + \sum_{i=1}^j F_{k_i} = (f_r f_{r-1} \dots f_1 \underbrace{00\dots 0}_{k_j-s-1} m_s m_{s-1} \dots m_1)_F,$$

где $k_j - s - 1 \geq 1$, а среди чисел $f_1, f_2, \dots, f_r$ имеется ровно j единиц и $r - j$ нулей.

Из последнего представления следует утверждение леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда если $n \geq lf(l) + 1$ и l фиксированное, то функция $\varepsilon(F_n - l)$ является периодической по n с периодом 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сумму четырех последовательных значений $\varepsilon(F_n - l)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{n+3} \varepsilon(F_i - l) &= \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) + \varepsilon(F_{n+2} - l) + \varepsilon(F_{n+3} - l) = \\ &= \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) + \varepsilon(F_{n+1} + (F_n - l)) + \varepsilon(F_{n+2} + (F_{n+1} - l)). \end{aligned}$$

Если $n \geq lf(l) + 1$, то очевидно, что $F_n - l < F_{n+1}$, $F_{n+1} - l < F_{n+2}$, следовательно, можно воспользоваться леммой 2. Получаем

$$\sum_{i=n}^{n+3} \varepsilon(F_i - l) = \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) - \varepsilon(F_n - l) - \varepsilon(F_{n+1} - l) = 0.$$

Заменяя в полученном равенстве n на $n + 1$, получаем $\sum_{i=n+1}^{n+4} \varepsilon(F_i - l) = 0$. Вычитая данное равенство из предыдущего, получаем, что

$$\varepsilon(F_{n+4} - l) = \varepsilon(F_n - l).$$

Это означает, что функция $\varepsilon(F_n - l)$ является периодической по n с периодом 4. Таким образом утверждение леммы 5 доказано.

3. Доказательство основной теоремы

Обозначим

$$S(X) = \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l), \quad S^*(k) = S(F_k).$$

ЛЕММА 6. Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда для любого $k \geq lf(l) + 4$ справедливо рекуррентное соотношение

$$S^*(k + 1) = S^*(k) + S^*(k - 1) + \chi_{4,l}(k), \quad (1)$$

где $\chi_{4,l}(k)$ периодическая функция с периодом 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $S^*(k + 1)$ в виде суммы нескольких слагаемых:

$$\begin{aligned} S^*(k + 1) &= S(F_{k+1}) = \sum_{n < F_{k+1}} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l) = \sum_{n < F_k} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l) + \sum_{n=F_k}^{F_{k+1}-1} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l) = \\ &= S(F_k) + \sum_{n=F_k}^{F_k+F_{k-1}-1} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l) = S(F_k) + \sum_{n'=0}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n' + F_k) \varepsilon(n' + F_k + l). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно сомножители, входящие в последнюю сумму. В силу леммы 2 при всех $0 \leq n' < F_{k-1}$ получаем, что $\varepsilon(n' + F_k) = -\varepsilon(n')$.

Если $0 \leq n' < F_{k-1} - l$, то $l \leq n' + l < F_{k-1}$, и в соответствии с леммой 2 можно утверждать, что $\varepsilon(n' + F_k + l) = -\varepsilon(n' + l)$. Если же $F_{k-1} - l \leq n' < F_{k-1}$, то $F_{k-1} \leq n' + l < F_{k-1} + l < F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$, то согласно лемме 2 $\varepsilon(n' + F_k + l) = \varepsilon(n' + l)$. Значит

$$\varepsilon(n' + F_k) \varepsilon(n' + F_k + l) = \begin{cases} \varepsilon(n') \varepsilon(n' + l) & \text{при } 0 \leq n' < F_{k-1} - l, \\ -\varepsilon(n') \varepsilon(n' + l), & \text{при } F_{k-1} - l \leq n' < F_{k-1}. \end{cases}$$

В таком случае

$$\begin{aligned}
S^*(k+1) &= S^*(k) + \sum_{n' < F_{k-1}-l} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) - \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) = \\
&= S^*(k) + \sum_{n' < F_{k-1}} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) - 2 \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) = \\
&= S^*(k) + S^*(k-1) - 2 \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l).
\end{aligned}$$

Последнюю сумму, содержащую l слагаемых, обозначим $\chi'_{4,l}(k)$ и распишем как

$$\begin{aligned}
\chi'_{4,l}(k) &= \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) = \varepsilon(F_{k-1}-l)\varepsilon(F_{k-1}) + \varepsilon(F_{k-1}-l+1)\varepsilon(F_{k-1}+1) + \\
&+ \varepsilon(F_{k-1}-l+2)\varepsilon(F_{k-1}+2) + \dots + \varepsilon(F_{k-1}-1)\varepsilon(F_{k-1}-1+l).
\end{aligned}$$

Согласно определению $\varepsilon(F_{k-1}) = -1$, а из условия $k \geq lf(l) + 4$ можно заключить, что $k-1 \geq lf(l) + 3$ и $F_{k-1} > l-m$, где $1 \leq m \leq l-1$. Таким образом условия леммы 2 выполнены и

$$\chi'_{4,l}(k) = -\varepsilon(F_{k-1}-l) - \varepsilon(F_{k-1}-l+1)\varepsilon(1) - \varepsilon(F_{k-1}-l+2)\varepsilon(2) - \dots - \varepsilon(F_{k-1}-1)\varepsilon(l-1).$$

Ранее было доказано (лемма 5), что при фиксированном l функция $\varepsilon(F_k-l)$ является периодической с периодом 4, следовательно, функция $\chi'_{4,l}(k)$ также будет периодической с периодом 4.

При $k \geq lf(l) + 4$ положим $\chi_{4,l}(k) = -2\chi'_{4,l}(k)$, т.е.

$$\chi_{4,l}(k) = 2 \sum_{m=0}^{l-1} \varepsilon(F_{k-1}-l+m)\varepsilon(m), \quad (2)$$

получаем утверждение леммы 6. Продолжим определение функции $\chi_{4,l}(k)$ на все k по периодичности.

ЛЕММА 7. Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда для любого $k \geq lf(l) + 4$ значение функции $S^*(k)$ находится по формуле:

$$S^*(k) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k + \hat{\chi}_{4,l}(k),$$

где $\hat{\chi}_{4,l}(k)$ – периодическая функция с периодом 4, такая что

$$\hat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}(-3\chi_{4,l}(0) - \chi_{4,l}(1) - 2\chi_{4,l}(2) + \chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(\chi_{4,l}(0) - 3\chi_{4,l}(1) - \chi_{4,l}(2) - 2\chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(-2\chi_{4,l}(0) + \chi_{4,l}(1) - 3\chi_{4,l}(2) - \chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(-\chi_{4,l}(0) - 2\chi_{4,l}(1) + \chi_{4,l}(2) - 3\chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (1) является линейным неоднородным, поэтому его решение – это сумма общего решения линейного однородного уравнения

$$S^*(k+1) = S^*(k) + S^*(k-1) \quad (4)$$

и частного решения неоднородного уравнения (1).

Составим характеристическое уравнение для (4) и решим его:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4) будет иметь вид:

$$\overline{S^*}(k) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Частное решение неоднородного уравнения (1) будем искать в виде:

$$\widehat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} k_0 & \text{при } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ k_1 & \text{при } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ k_2 & \text{при } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ k_3 & \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

При $k \equiv 0 \pmod{4}$ уравнение (1) принимает вид $k_1 = k_0 + k_3 + \chi_{4,l}(0)$. Если $k \equiv 1 \pmod{4}$, то получим уравнение $k_2 = k_1 + k_0 + \chi_{4,l}(1)$. В случае $k \equiv 2 \pmod{4}$ приходим к уравнению $k_3 = k_2 + k_1 + \chi_{4,l}(2)$. Если же $k \equiv 3 \pmod{4}$, то получаем уравнение $k_0 = k_3 + k_2 + \chi_{4,l}(3)$.

Составим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + k_3 + \chi_{4,l}(0), \\ k_2 = k_1 + k_0 + \chi_{4,l}(1), \\ k_3 = k_2 + k_1 + \chi_{4,l}(2), \\ k_0 = k_3 + k_2 + \chi_{4,l}(3). \end{cases}$$

Последняя система имеет ненулевое решение, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Находим это решение и получаем, что частное решение уравнения (1) будет следующим:

$$\widehat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}(-3\chi_{4,l}(0) - \chi_{4,l}(1) - 2\chi_{4,l}(2) + \chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(\chi_{4,l}(0) - 3\chi_{4,l}(1) - \chi_{4,l}(2) - 2\chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(-2\chi_{4,l}(0) + \chi_{4,l}(1) - 3\chi_{4,l}(2) - \chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{5}(-\chi_{4,l}(0) - 2\chi_{4,l}(1) + \chi_{4,l}(2) - 3\chi_{4,l}(3)) & \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Таким образом, нами действительно найдено частное решение неоднородного уравнения. Складывая общее решение однородного и частное решение неоднородного, получаем утверждение леммы 7.

ЛЕММА 8. Для любого натурального l справедлива асимптотическая формула:

$$S^*(k) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + O(1),$$

где C_1 – отличная от нуля постоянная, зависящая от l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале убедимся, что $C_1 \neq 0$. Предположим противное: $C_1 = 0$, тогда в силу утверждения леммы 7 $S^*(k) = C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k + \hat{\chi}_{4,l}(k)$. Согласно определению $S^*(k)$ является целым, а $\hat{\chi}_{4,l}(k)$ рациональным числом, значит $C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k$ также должно быть рациональным числом при любом k .

Пусть при $k = 1$ выражение $C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k$ будет равно a_1 , а при $k = 2$ – a_2 , где a_1 и a_2 – целые числа. Отношение a_2 к a_1 при $a_1 \neq 0$ равно $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, которое не является рациональным числом, значит не существует $C_2 \neq 0$, такое что $C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \in \mathbb{Q}$ при любом k . Если же предположить, что $a_1 = 0$, то в силу иррациональности $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ получаем, что $C_2 = 0$ и $S^*(k)$ – периодическая функция с периодом 4.

Убедимся, что $S^*(k)$ не является периодической функцией с периодом 4. Согласно определению $S^*(k) = S(F_k)$. С другой стороны

$$S(m) = \sum_{n < m} \varepsilon(n) \varepsilon(n + l),$$

следовательно, если $m \in \mathbb{N}$, то $S(m)$ – это сумма m слагаемых, каждое из которых равно либо -1 , либо 1 (нечетное число). Очевидно, если сложить m нечетных чисел, то получится нечетное число при m нечетном, и четное число при m четном.

Значит, $S(m) \equiv m \pmod{2}$, если $m \in \mathbb{N}$. В таком случае $S^*(k) \equiv F_k \pmod{2}$.

Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \dots$$

Заметим, что

$$F_k \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & \text{если } k = 3m + 2, \\ 1 \pmod{2}, & \text{если } k \neq 3m + 2, \end{cases}$$

поэтому

$$S^*(k) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & \text{если } k = 3m + 2, \\ 1 \pmod{2}, & \text{если } k \neq 3m + 2, \end{cases}$$

т.е. $S^*(k)$ будет четным числом при $k = 3m + 2$, и нечетным при $k \neq 3m + 2$.

В таком случае получаем, что $S^*(3m + 1)$ – нечетное число, а $S^*(3m + 5) = S^*(3(m + 1) + 2)$ – четное число, т.е. существуют такие k , что $S^*(k) \neq S^*(k + 4)$. Значит $S^*(k)$ не является периодической функцией с периодом 4, а, следовательно, постоянная C_1 отлична от нуля.

Очевидно, что при всех натуральных k $\hat{\chi}_{4,l}(k) = O(1)$ и справедливо неравенство $\left| \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right| < 1$, поэтому $C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k = O(1)$.

Таким образом, лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $X = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_t}$, где $k_i \geq k_{i+1} + 2$, $X > 2l$, $l \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, тогда справедливо неравенство:

$$\left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| \leq 2(t + 1)l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем множества A_j , определив их следующим образом:

$$A_1 = \{n : 0 \leq n < F_{k_1}\},$$

$$A_j = \left\{ n : \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} \leq n < \sum_{i=1}^j F_{k_i} \right\}, \quad \text{где} \quad 2 \leq j \leq t.$$

В таком случае

$$S(X) = \sum_{j=1}^t \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l).$$

Возможны два случая: 1) $l < F_{k_t}$; 2) $F_{k_t} \leq l < F_{k_1}$. Случай $l \geq F_{k_1}$ невозможен. Действительно, из условий $X = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_t}$ и $X > 2l$ при $l \geq F_{k_1}$ следует, что $F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_t} \geq 2F_{k_1}$ или $F_{k_2} + \dots + F_{k_t} \geq F_{k_1}$, что противоречит тому, что F_{k_i} — числа Фибоначчи, удовлетворяющие условию $k_i \geq k_{i+1} + 2$.

В случае, когда $l < F_{k_t}$, каждую из сумм $\sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l)$ представим как

$$\sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) = \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l).$$

В первой из записанных сумм представим n как $n' + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i}$, тогда условие $n \in A_j$ можно записать в виде двойного неравенства:

$$\sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} \leq n' + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} < \sum_{i=1}^j F_{k_i}$$

или $0 \leq n' < F_{k_j}$, а условие $n+l \in A_j$, соответственно, $0 \leq n'+l < F_{k_j}$, а значит $0 \leq n' < F_{k_j} - l$.

В данном случае

$$\sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) = \sum_{n'=0}^{F_{k_j}-l-1} \varepsilon\left(n' + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i}\right) \varepsilon\left(n' + l + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i}\right).$$

Каждый из сомножителей слагаемых последней суммы удовлетворяет условиям леммы 4, поэтому

$$\sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) = \sum_{n'=0}^{F_{k_j}-l-1} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l).$$

Значит можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) &= \sum_{n' < F_{k_j}-l} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) = \\ &= \sum_{n' < F_{k_j}} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) - \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) \end{aligned}$$

$$= S^*(k_j) - \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l).$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^t S^*(k_j) - \sum_{j=1}^t \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) + \sum_{j=1}^t \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^t \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} |\varepsilon(n') \varepsilon(n'+l)| + \sum_{j=1}^t \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| = \sum_{j=1}^t S_1(j) + \sum_{j=1}^t S_2(j). \end{aligned}$$

Проведем оценку $S_1(j)$ и $S_2(j)$:

$$\begin{aligned} S_1(j) &= \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} |\varepsilon(n') \varepsilon(n'+l)| \leq \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} 1 = l, \\ S_2(j) &\leq \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| \leq \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} 1 = l. \end{aligned}$$

Таким образом, при $l < F_{k_t}$

$$\left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| \leq 2 \sum_{j=1}^t l = 2lt.$$

Во втором случае, при $F_{k_j} \leq l < F_{k_1}$ справедливо неравенство

$$F_{k_t} < F_{k_{t-1}} < \dots < F_{k_r+1} \leq l < F_{k_r} < \dots < F_{k_1}.$$

Представим $S(X)$ следующим образом:

$$S(X) = \sum_{j=1}^r \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) + \sum_{j=r+1}^t \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l).$$

Для первой из записанных сумм справедливы все рассуждения, приведенные для первого случая, поэтому

$$\begin{aligned} & \left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^r S^*(k_j) - \sum_{j=1}^r \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon(n') \varepsilon(n'+l) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) + \sum_{j=r+1}^t \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^r \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} |\varepsilon(n') \varepsilon(n'+l)| + \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| + \sum_{j=r+1}^t \sum_{n \in A_j} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| + \\ &\quad + \left| \sum_{j=r+1}^t S^*(k_j) \right| = \sum_{j=1}^r S_1(j) + \sum_{j=1}^r S_2(j) + S_3 + S_4. \end{aligned}$$

Найдем оценку сверху для S_3 и S_4 , учитывая утверждение леммы 3:

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=r+1}^t \sum_{n \in A_j} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| \leq \sum_{j=r+1}^t \sum_{n \in A_j} 1 = \sum_{j=r+1}^t F_{k_j} \leq \\ &\leq F_{k_{r+1}} + F_{k_{r+1}-2} + F_{k_{r+1}-4} + \dots = F_{k_{r+1}} + F_{k_{r+1}-1} < 2F_{k_{r+1}} < 2l, \\ S_4 &= \left| \sum_{j=r+1}^t S^*(k_j) \right| \leq \sum_{j=r+1}^t |S(F_{k_j})| = \sum_{j=r+1}^t \sum_{n < F_{k_j}} |\varepsilon(n) \varepsilon(n+l)| \leq \\ &\leq \sum_{j=r+1}^t \sum_{n < F_{k_j}} 1 = \sum_{j=r+1}^t F_{k_j} < 2l. \end{aligned}$$

Итак, во втором случае, когда $F_{k_t} \leq l < F_{k_1}$, получаем, что

$$\left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| < 2 \sum_{j=1}^r l + 4l = 2(r+2)l \leq 2(t+1)l,$$

так как $r < t$.

Утверждение леммы 9 полностью доказано.

ЛЕММА 10. Для любого натурального l справедлива асимптотическая формула

$$S(X) = C_l X + O(\log X),$$

где C_l – отличная от нуля константа, вычисляемая по формуле

$$C_l = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} C_1$$

и C_1 – постоянная из леммы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Методом математической индукции можно убедиться в том, что при условии, что $F_0 = F_1 = 1$ для чисел Фибоначчи справедлива явная формула

$$F_i = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i.$$

Отметим, что данная формула отличается от классической формулы Бине, в которой предполагается нумерация $F_1 = F_2 = 1$.

Учитывая, что $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \leq 1$ можем записать, что

$$F_{k_j} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_j} + O(1).$$

Воспользуемся утверждением леммы 8 и получим, что

$$S^*(k_j) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} C_1 F_{k_j} + O(1),$$

а

$$\begin{aligned} S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) &= S(X) - \sum_{j=1}^t \left(\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}{2} C_1 F_{k_j} + O(1) \right) = \\ &= S(X) - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}{2} C_1 \sum_{j=1}^t F_{k_j} + O(t) = S(X) - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}{2} C_1 X + O(\log X), \end{aligned}$$

т.к. $\sum_{j=1}^t F_{k_j} = X$, следовательно, $F_{k_t} < X$ и $t = O(\log X)$.

В таком случае, из леммы 9 при фиксированном l получаем

$$\left| S(X) - \sum_{j=1}^t S^*(k_j) \right| \leq C_3 \log X,$$

где C_3 — постоянная, зависящая от l .

Из последнего неравенства следует утверждение леммы 10. Кроме того, из леммы 8 вытекает, что $C_l \neq 0$.

Доказательство теоремы 2.

Согласно определению

$$N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \#\{n < X : \varepsilon(n) = \varepsilon_1, \varepsilon(n+l) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1 , l — фиксированное натуральное число.

Поэтому для $N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X)$ справедлива явная формула

$$N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \sum_{n < X} \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon(n) + 1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon(n+l) + 1}{2}.$$

Преобразуем данную формулу, используя утверждение леммы 1, к виду

$$\begin{aligned} N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) + \frac{\varepsilon_1}{4} \sum_{n < X} \varepsilon(n) + \frac{\varepsilon_2}{4} \sum_{n < X} \varepsilon(n+l) + \frac{1}{4} \sum_{n < X} 1 = \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l) + \frac{X}{4} + O(\log X). \end{aligned}$$

Пусть

$$S(X) = \sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+l),$$

тогда воспользуемся утверждением леммы 10 и получим, что

$$N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} C_l X + \frac{X}{4} + O(\log X),$$

где

$$C_l = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} C_1. \quad (5)$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Найдем асимптотическую формулу в явном виде для $N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X)$ при $l \leq 10$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы равенства*

$$C_l = \frac{-5 + 2\sqrt{5}}{5} \quad \text{при} \quad l = 1, 2, 3, 5, 6, 8;$$

$$C_l = 9 - 4\sqrt{5} \quad \text{при} \quad l = 4;$$

$$C_l = \frac{-35 + 16\sqrt{5}}{5} \quad \text{при} \quad l = 7;$$

$$C_l = \frac{-85 + 38\sqrt{5}}{5} \quad \text{при} \quad l = 9;$$

$$C_l = \frac{125 - 56\sqrt{5}}{5} \quad \text{при} \quad l = 10.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения постоянной C_l необходимо вначале найти C_1 . Заметим, что из леммы 7 следует, что

$$S^*(k) - \hat{\chi}_{4,l}(k) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k,$$

где $k \geq lf(l) + 4$.

Обозначим $S^*(k) - \hat{\chi}_{4,l}(k)$ через $T(k)$, тогда при всех $k \geq lf(l) + 4$ согласно предыдущему равенству

$$T(k) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Следовательно, для того, чтобы найти C_1 надо знать два значения $T(k)$ для конкретного l .

Для заданного l вычисляем по определению $S^*(k) = \sum_{n < F_k} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$, $\chi_{4,l}(k)$ по формуле (2) и $\hat{\chi}_{4,l}(k)$ по формуле (3), а затем $T(k) = S^*(k) - \hat{\chi}_{4,l}(k)$.

Значения $S^*(k)$, $\chi_{4,l}(k)$, $\hat{\chi}_{4,l}(k)$ и $T(k)$ для трех $k \geq lf(l) + 4$ при $l = 1, 2, \dots, 10$ приведем в таблице

Теперь рассмотрим различные случаи значений l .

В случае $l = 1$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^5 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^5 = -0,8, \\ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^6 = -1,4. \end{cases}$$

Решением этой системы являются

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{10}, \\ C_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{10}. \end{cases}$$

Таким образом формула для нахождения $T(k)$ при $l = 1$ имеет вид:

$$T(k) = \frac{-3 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-3 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k, \quad \text{где} \quad k \geq 5.$$

Продельвая эти же шаги при $l = 2, 3, \dots, 10$, получаем следующие формулы для нахождения $T(k)$:

k	$S^*(k)$	$\chi_{4,l}(k)$	$\hat{\chi}_{4,l}(k)$	$T(k)$
$l = 1$				
5	-2	2	-1,2	-0,8
6	-1	2	0,4	-1,4
7	-1	-2	1,2	-2,2
$l = 2$				
6	-3	0	-1,6	-1,4
7	-3	4	-0,8	-2,2
8	-2	0	1,6	-3,6
$l = 3$				
7	-5	2	-2,8	-2,2
8	-4	6	-0,4	-3,6
9	-3	-2	2,8	-5,8
$l = 4$				
7	1	0	0	1
8	2	0	0	2
9	3	0	0	3
$l = 5$				
8	-8	2	-4,4	-3,6
9	-7	10	-1,2	-5,8
10	-5	-2	4,4	-9,4
$l = 6$				
8	-2	0	-0,8	-3,6
9	-5	-4	1,6	-5,8
10	-11	0	0,8	-9,4
$l = 7$				
8	4	2	-1,2	5,2
9	9	2	0,4	8,6
10	15	-2	1,2	13,8
$l = 8$				
9	-13	4	-7,2	-5,8
10	-11	16	-1,6	-9,4
11	-8	-4	7,2	-15,2
$l = 9$				
9	1	-2	1,2	-0,2
10	-1	-2	-0,4	-0,6
11	-2	2	-1,2	-0,8
$l = 10$				
9	-1	0	1,6	-2,6
10	-3	-4	0,8	-3,8
11	-8	0	-1,6	-6,4

1) при $l = 1, 2, 3, 5, 6, 8$

$$T(k) = \frac{-3 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-3 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k;$$

2) при $l = 4$

$$T(k) = \frac{25 - 11\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k;$$

3) при $l = 7$

$$T(k) = \frac{-19 + 9\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-19 - 9\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k;$$

4) при $l = 9$

$$T(k) = \frac{-47 + 21\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-47 - 21\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k;$$

5) при $l = 10$

$$T(k) = \frac{69 - 31\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{69 + 31\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Теперь воспользуемся формулой (5), утверждением теоремы 2 и получим явные асимптотические формулы для $N_{l, \varepsilon_1, \varepsilon_2}(X)$ при конкретных значениях l , равных $1, 2, \dots, 10$.

4. Заключение

В работе продолжено исследование совместного распределения сумм цифр представлений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи. Предложен метод получения асимптотических формул, для количества натуральных чисел $n \leq X$ таких, что n и $n+l$ имеют заданную четность суммы цифр разложения. При $l \leq 10$ соответствующие асимптотики найдены в явном виде.

В заключение приведем несколько открытых проблем.

1) Как ведет себя постоянная C_l ? Можно ли получить оценки для C_l или ее среднего значения? Есть ли значения, встречающиеся среди C_l бесконечно много раз?

Отметим, что в случае двоичной системы счисления некоторые результаты в данном направлении можно найти в [4] и [10]. При этом в отличие от двоичной системы счисления, в случае системы счисления Фибоначчи имеет смысл рассматривать не только нечетные, но и четные k .

2) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр для n и $kn + l$ при $k > 1$? В частности, что можно сказать о сумме $\sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(kn + l)$?

Отметим, что оценки суммы $\sum_{n < X} \varepsilon(kn + l)$ во многих случаях могут быть получены на основе работы [3].

3) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр для наборов натуральных чисел, включающих более, чем два числа? В простейшем случае, что можно сказать о сумме $\sum_{n < X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+1) \varepsilon(n+2)$?

4) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр разложений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи по модулям, отличным от двойки?

5) Можно ли получить аналоги рассматриваемых результатов для других систем счисления, в частности для разложений по линейным рекуррентным последовательностям?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // *Fibonacci Quarterly*. 1998. Vol. 36, №1. P. 3-19.
2. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // *Acta Arithmetica*. 1968. Vol. 13. P. 259-265.
3. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // *Mathematica Slovaca*. 2003. Vol. 53, №1. P. 1-20.
4. Mahler K. The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions // *J. Math. and Physics*. 1927. Vol. 6. P. 158-163.
5. Shutov A. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // *Fibonacci Quarterly*. 2020. Vol. 58, №3. P. 203-207.
6. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*. 1972. Vol. 41. P. 179-182.
7. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // *Алгебра и анализ*. 2013. Т. 25, Вып. 6. С. 1-23.
8. Карацуба А. А., Новак Б. Арифметические задачи с числами специального вида // *Математические заметки*. 1999. Т. 66, Вып. 2. С. 314-317.
9. Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // *УМН*. 2008. Т. 63, Вып. 4. С. 43-92.
10. Науменко А. П. О распределении чисел с двоичным разложением специального вида в арифметических прогрессиях // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2008. Т. 8, Вып. 4. С. 34-37.
11. Науменко А. П. О числе решений некоторых диофантовых уравнений в натуральных числах с заданными свойствами двоичных разложений // *Чебышевский сборник*. 2011. Т. 12, Вып. 1. С. 140-157.
12. Шутов А. В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // *Дальневосточный математический журнал*. 2020. Т. 20, №2. С. 271-275.
13. Эминян К. М. Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида // *Чебышевский сборник*. 2011. Т. 12, Вып. 1. С. 178-185.
14. Эминян К. М. Асимптотический закон распределения простых чисел специального вида // *Математические заметки*. 2016. Т. 100, Вып. 4. С. 619-622.
15. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // *Математические заметки*. 1996. Т. 60, Вып. 4. С. 478-481.

REFERENCES

1. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations", *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3-19. doi: 10.1007/s002290050221.
2. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données", *Acta Arithmetica*, vol. 13, pp. 259-265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.
3. Lamberger, M., Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.
4. Mahler, K. 1927, "The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions", *J. Math. and Physics*, vol. 6, pp. 158-163. doi: 10.1002/sapm192761158.
5. Shutov, A. 2020, "On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers", *Fibonacci Quarterly*, vol. 58, no. 3, pp. 203-207.
6. Zeckendorf, E. 1972, "Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas", *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179-182.
7. Davletyarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2013, "Geometrization of the Fibonacci number system and its applications to number theory", *Algebra and Analysis*, vol. 25, no. 6, pp. 1-23. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.
8. Karatsuba, A. A., Novak, B. 1999, "Arithmetical problems with numbers of special type", *Mathematical Notes*, vol. 66, no. 2, pp. 251-253. doi:10.1007/BF02674886
9. Karatsuba, A. A. 2008, "Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters", *Russian Math. Surveys*, vol. 63, no. 4, pp. 641-690. doi:10.1070/RM2008v063n04ABEH004548
10. Naumenko, A. P. 2008, "On the distribution of numbers with binary decomposition of a special form in arithmetic progressions", *Izv. Sarat. un-tat. New ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, vol. 8, no. 4, pp. 34-37.
11. Naumenko, A. P. 2011, "On the number of solutions of some Diophantine equations in natural numbers with given properties of binary expansions", *Chebyshskii sbornik*, vol. 12, no. 1, pp. 140-157.
12. Shutov, A. V. 2020, "On one sum associated with Fibonacci numeration system", *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 20, no. 2, pp. 271-275. doi: 10.47910/FEMJ202028
13. Eminyan, K. M. 2011, "Additive problems in natural numbers with binary expansions of a special form", *Chebyshskii sbornik*, vol. 12, no. 1, pp. 178-185.
14. Eminyan, K. M. 2016, "Asymptotic distribution law of primes of a special form", *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 4, pp. 619-622. doi:10.1134/S0001434616090339
15. Eminyan, K. M. 1996, "On a Binary Problem", *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478-481. doi:10.1007/FBF02305438

Получено 1.02.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 514.8;531.1;531.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-106-120

О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике

М. Д. Ковалёв

Ковалёв Михаил Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Аннотация

В статье приводится определение шарнирного механизма, учитывающее его кинематическую природу. Это определение существенно отличается от принятого рядом математиков в недавних работах. Если использовать не учитывающее кинематической подоплёки принятое ныне определение, то классический результат А.Б.Кемпе [1] о возможности черчения по частям произвольной плоской алгебраической кривой шарнирами подходящим образом выбранных плоских шарнирных механизмов нельзя считать достаточно обоснованным самим Кемпе. Что и было отмечено в современной литературе [6], и даже привело к обвинениям Кемпе в ошибке. Предложенное в работах [6, 7] развитие и современное обоснование результата Кемпе, по существу, представляет собой модификацию метода Кемпе построения нужного механизма из механизмов-кирпичиков, выполняющих алгебраические действия. Однако, оно основано на использовании сложного языка алгебраической геометрии, что приводит к замене коротких и прозрачных рассуждений Кемпе на порядок более длинными и трудновоспринимаемыми текстами. При нашем определении шарнирного механизма можно дать строгую формулировку теоремы Кемпе, для доказательства которой достаточно аргументов Кемпе с минимальными уточнениями. Это уточнённое доказательство приведено в статье. В статье обсуждается современное развитие результата Кемпе, и претензии к рассуждениям Кемпе. А также приведены общие мысли о математике, возникшие у автора в связи с теоремой Кемпе и её современным развитием.

Ключевые слова: шарнирные механизмы, черчение алгебраических кривых, теорема Кемпе, конфигурационное пространство, перезрелая математика.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

М. Д. Ковалёв. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 106–120.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 514.8,531.1,531.8

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-106-120

On the squares and cubes in the set of finite fields

M. D. Kovalev

Kovalev Mikhail Dmitrievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Abstract

The paper provides a definition of the hinge mechanism, taking into account its kinematic nature. This definition differs significantly from that adopted by a number of mathematicians in recent works. If we use the definition accepted today, which does not take into account the kinematic background, then the classical result of A. B. Kempe [1] about the possibility of drawing by parts of an arbitrary plane algebraic curve with hinges of suitably chosen plane hinge mechanisms cannot be considered sufficiently substantiated by Kempe himself. This has been noted in the modern literature [6], and even led to accusations of Kempe in error. The development and modern substantiation of Kempe's result proposed in the works [6, 7] is, in essence, a modification of Kempe's method for constructing the required mechanism from brick mechanisms performing algebraic actions. However, it is based on the use of a complex language of modern algebraic geometry, which leads to the replacement of Kemp's short and transparent reasoning by an order of magnitude longer and difficult to understand texts. In our definition of the hinge mechanism, we can give a rigorous formulation of Kempe's theorem, for the proof of which Kempe's arguments with minimal refinements are sufficient. This updated proof is provided in the paper. The paper discusses the modern development of Kempé's result, and the claims against Kempé's reasoning. It also gives general ideas about mathematics that the author has in connection with the Kempé theorem and its modern development.

Keywords: hinge mechanisms, drawing algebraic curves, Kempe's theorem, configuration space, overripe mathematics.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

M. D. Kovalev, 2022, "On the geometric definition of the hinge mechanism, Kempe's theorem and overripe mathematics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 106–120.

1. Введение

Здесь рассматриваются классические идеальные плоские шарнирные механизмы. Занимаясь ими П.Л. Чебышев не ощущал потребности в формализации самого понятия шарнирного механизма. Не ощущал её и А.Кемпе, описавший (1876) построение шарнирного механизма для черчения произвольной плоской алгебраической кривой [1]. Давид Гильберт в лекциях по наглядной геометрии [2] так определял шарнирный механизм: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости". Но является ли это математическим определением? Пользуясь этим определением, конечно, можно сказать

является ли данная конструкция механизмом. Но можно ли на его основе отличить один механизм от другого? Например, на рисунке 1 изображён один механизм или два? Его нельзя назвать математическим определением в современном смысле. Математические определения шарнирного механизма появились лишь в конце прошлого века. Одно из них принадлежит автору (1994) [3, 4, 5], другое было выдвинуто в работах [6, 7, 8] (1998), посвящённых осмыслению результата Кемпе на современном языке. Это привело к принятию в работах [6, 7, 8], а вслед за ними и другими математиками [9, 10] настолько общего математического определения шарнирного механизма, что оно даже не различает допускающих непрерывное движение конструкций от неизгибаемых (механизмов от ферм в инженерной терминологии). Такое игнорирование кинематической природы механизмов стало главной причиной недоразумений с результатом Кемпе.

В следующем разделе я привожу своё определение шарнирного механизма. В его духе можно дать строгую формулировку теоремы Кемпе, для доказательства которой достаточно аргументов Кемпе с минимальными уточнениями, что и сделано в пятом разделе. В третьем разделе воспроизведены оригинальные рассуждения Кемпе. В четвертом разделе обсуждаются современные продвижения в направлении теоремы Кемпе и претензии к рассуждениям Кемпе. В заключении сделаны выводы и приведены мысли о математике, порождённые историей с результатом Кемпе.

2. Формализация

Здесь даны математические определения основных понятий теории плоских шарнирно рычажных конструкций, в частности, шарнирного механизма и фермы. В основу положены геометрические и кинематические свойства. Исходным пунктом является то, что в механике чётко разделяются понятия идеальных механизма и фермы. Ферма это конструкция которую нельзя деформировать. Механизм же можно непрерывно переводить из одного его положения в любое другое. На языке геометрии это звучит так: ферма неизгибаема, а конфигурационное пространство механизма связно. Считаем рассматриваемые плоские шарнирно-рычажные конструкции составленными из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры (вращательные пары). Шарниры могут быть двух видов: свободные и закреплённые в плоскости (стойке). Первые мы обозначаем на рисунках кружочками, вторые — крестиками. Структуру конструкции задаём *шарнирной структурной схемой (ШСС)* — абстрактным¹ связным² графом $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам³. Множество V вершин графа распадается на два подмножества: $V = V_1 \sqcup V_2$, где V_1 — отвечает свободным шарнирам, и V_2 — отвечает закреплённым шарнирам. Граф $G(V, E)$ удовлетворяет условиям:

1. его подграф на множестве V_1 свободных вершин связан,
2. в $G(V, E)$ нет рёбер, соединяющих вершины из V_2 между собой.

Последнее условие означает, что излишне связывать рычагами закреплённые в стойке шарниры. Условие же 1. накладываем для того, чтобы сосредоточиться на изучении одной индивидуальной конструкции. Если оно не выполнено, то конструкция распадается на несколько кинематически не связанных одна с другой частей, которые можно изучать по отдельности.

Отметим, что в своих определениях [6, 7] отвлечённые математики не накладывают на

¹Напомним, что абстрактный граф представляет собой множество V вершин и совокупность E их неупорядоченных пар, называемых рёбрами.

²Связность графа, означает существование для любых двух вершин цепи из его ребер, соединяющей эти вершины.

³В нашей модели это удобнее чем чаще принятое в теории механизмов сопоставление звеньям-рычагам вершин, а кинематическим парам — рёбер структурной схемы.

граф $G(V, E)$ каких-либо ограничений, за исключением разве лишь отсутствия петель и конечности, что молчаливо предполагаем и мы. В частности, они не требуют связности $G(V, E)$.

Чтобы формализовать принятое в теории механизмов понятие кинематической схемы нам придётся ввести несколько новых дополнительных понятий. Выберем в плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy . *Закрепленной шарнирной схемой (ЗШС)* назовем ШСС, каждой закрепленной вершине $v_i \in V_2$ которой сопоставлена точка $p_i = (x_i, y_i) \in R^2$, — положение закреплённого шарнира в плоскости. Пусть m — число свободных шарниров, r — число всех рычагов. Бросим свободные шарниры в плоскость, это определит отображение: $F : R^{2m} \rightarrow \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным*. Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки $\{d_{ij}\} = \mathbf{d} \in \mathcal{R}^r$ назовём *кинематическими шарнирными схемами (КШС)*. Это математический аналог понятия кинематической схемы⁴. Для задания КШС необходимо кроме структуры конструкции задать положения закреплённых шарниров, а также длины всех рычагов. *Шарнирником* мы называем точку $\mathbf{p} \in R^{2m}$. Ей отвечает либо шарнирная ферма, либо положение шарнирного механизма. В русской литературе, по-видимому, нет соответствующего термина, но в английской имеется термин "framework". Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки-КШС называем *конфигурационным пространством КШС $\mathbf{d}$* . При таком подходе каждой компоненте связности множества $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое *шарнирное устройство*. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму*. В противном случае компонента связности есть множество положительной размерности — *конфигурационное пространство K шарнирного механизма*.

Одной КШС могут отвечать несколько шарнирных устройств как механизмов так и ферм. Но каждое из устройств непрерывно не переводится в другое. Чтобы это сделать необходимо разобрать устройство и пересобрать его по другому. В теории механизмов это явление называют различными сборками шарнирного механизма. На мой взгляд этот термин неудачен, поскольку после пересобирания может получиться и ферма. Приведём соответствующий пример.

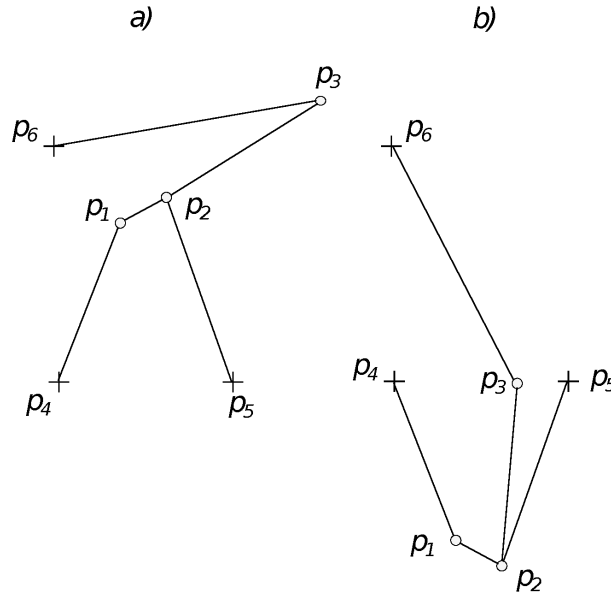


Рис. 1: Два шарнирных механизма

⁴В теории механизмов кинематической схемой механизма называют его структурную схему с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма [11].

На рисунке 1 изображены два шарнирных механизма а) и б) с одной и той же кинематической схемой. Механизмы состоят из четырёхзвенника $p_4p_1p_2p_5$, к которому присоединена так называемая двуповодковая группа $p_6p_3p_2$. Если рычаг p_1p_2 достаточно короток, то четырёхзвенники, отличающиеся отражением относительно прямой p_4p_5 , нельзя непрерывно перевести один в другой. В терминологии машиноведов речь идёт о двух сборках шарнирного механизма. Однако, уменьшая длины рычагов p_2p_3 и p_3p_6 можно добиться, чтобы сборка б) стала фермой. Это наступит, когда рычаги p_2p_3 и p_3p_6 окажутся на одной прямой, и круг с центром p_6 радиуса равного сумме длин этих рычагов будет иметь лишь одну общую точку с траекторией шарнира p_2 четырёхзвенника⁵. Сборка же а) при этом останется механизмом. Разумно ли механизм и ферму называть разными сборками одного шарнирного механизма?

Наше геометрическое определение шарнирного механизма, отождествляющее его с его связным конфигурационным пространством, носит существенные черты идеализации. Скажем, при движении нашего геометрического механизма могут пересекаться его рычаги и совмещаться различные шарниры, что невозможно для реальных механизмов. Этого не всегда можно избежать даже разнося рычаги реальной конструкции по различным параллельным плоскостям. Отметим также, что наша модель допускает так называемые совмещённые шарниры.

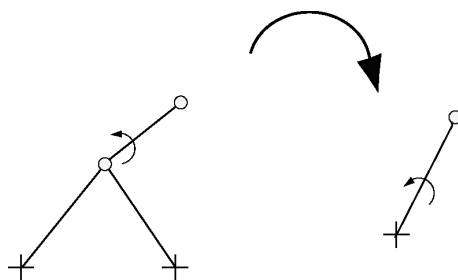


Рис. 2: Приведение структурной схемы простейшего шарнирного механизма — циркуля.

Заметим, что мы как правило пользуемся приведёнными ЗШС, то есть такими, у которых различные закреплённые шарниры не совпадают как точки плоскости. Изучая движения шарнирного механизма необходимо следить лишь за свободными шарнирами, подвижными в этом механизме. Если положение какого-либо свободного шарнира неизменно при всех движениях механизма, то этот свободный шарнир естественно причислить к закреплённым. Таким образом, изучая определённый механизм, также целесообразно перейти к его приведённым схемам. *Приведённой для механизма K ШСС (ЗШС)* назовём такую его ШСС (и ЗШС), для которой все свободные шарниры подвижны в механизме K . Приведённость накладывает определённые условия на ШСС. Например, поскольку в приведённой ЗШС плоского механизма закреплённые шарниры попарно не совпадают, то не может быть свободных шарниров, смежных более чем одному закреплённому. Именно приведёнными ЗШС и пользуются, анализируя шарнирные механизмы.

3. Теорема Кемпе

После исследований Чебышева по приближённым прямым, положившим начало изучению приближений функций на множествах, и открытия инверсора Поселье, являющегося точным прямым, наиболее ярким достижением в теории шарнирных механизмов явилась работа 1876 года А.Кемпе [1]. Поскольку в ней не было сформулировано никакой теоремы, то обычно её результат формулируют так.

⁵Эта траектория представляет собой дугу окружности радиуса $|p_2p_5|$ с центром в точке p_5 .

Мы также можем прибавить постоянный угол $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ (как показано на рисунке 4) при соединяя к конечному рычагу OE двумя рычагами шарнир G . Если нужно, повторяя это построение можем добавить угол произвольной величины.

Последний наш механизм — переносчик, состоящий из двух параллелограммов с боковыми сторонами длины ρ , как показано на Рис.5 а). Он позволяет параллельно переносить рычаг AB в рычаг $A''B''$, причём точка A'' может быть помещена в любую точку плоскости, отстоящую от A не более чем на 2ρ .

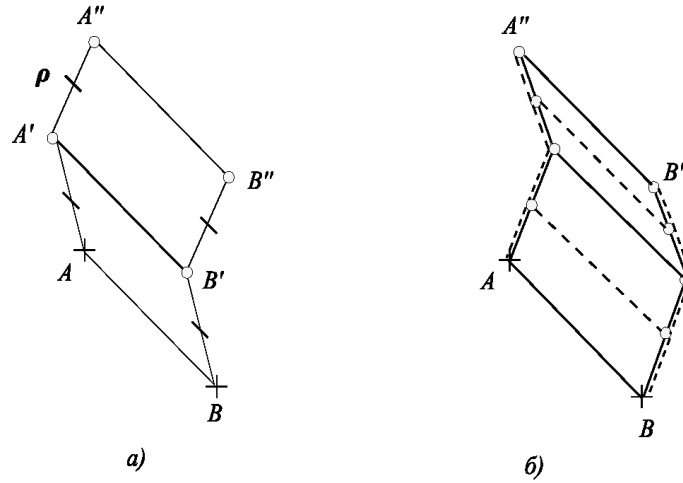


Рис. 5: На рисунке б) изображён переносчик с укреплёнными добавлением штрихованных рычагов параллелограммами. Он выполняет тот же перенос, что и переносчик а).

Опишем теперь построение механизма Кемпе. Пусть p — точка на алгебраической кривой. Сдвинув, если нужно, декартову прямоугольную систему координат OXY можно считать, что точка p не совпадает с её началом, и можно построить шарнирный параллелограмм (Рис. 6) с рычагами $|OA| = a$, $|OB| = b$ постоянной длины. Опираясь на его рычаги OA и OB мы построим наш шарнирный механизм. Пусть $\angle XOA = \theta$, $\angle XOB = \varphi$, и эти углы меняются при движении точки p по алгебраической кривой, заданной в нашей системе координат уравнением $f(x, y) = \sum_{kl} A_{kl} x^k y^l = 0$, где k, l — неотрицательные целые.

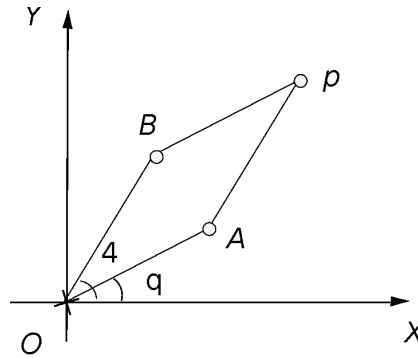


Рис. 6

Выпишем координаты точки p :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + b \cos \varphi \\ y &= a \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + b \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение кривой, и применяя формулу

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

, придём к уравнению вида

$$f(x, y) = \sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) + C = 0, \quad (1)$$

где r, s — целые не равные нулю одновременно, C — постоянная, зависящая от A_{kl} , a и b , а χ_{rs} — постоянный угол. За счёт выбора этого угла можно считать коэффициенты B_{rs} , выражающиеся через A_{kl} , a, b , положительными.

С помощью механизмов накопителя и умножителя для каждого члена последней суммы можно построить такой рычаг OD_{rs} , $|OD_{rs}| = B_{rs}$, что $\angle XOD_{rs} = r\varphi + s\theta + \chi_{rs}$. Составим теперь с помощью переносчика из рычагов $O'D'_{rs}$ (представляющих собой параллельно перенесённые рычаги OD_{rs}) цепь с конечным шарниром D_K , как показано на рисунке 7. Абсцисса шарнира D_K равна

$$\sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) = f(x, y) - C.$$

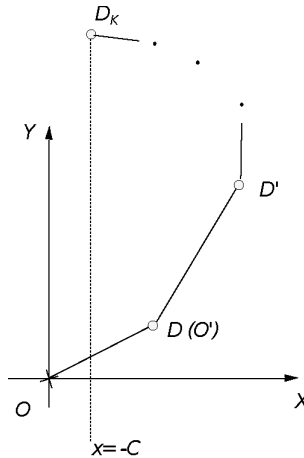


Рис. 7

Точка p лежит на нашей кривой тогда и только тогда, когда $f(x, y) = 0$, а следовательно тогда и только тогда, когда конечный шарнир D_K цепи лежит на вертикальной прямой $x = -C$. Остаётся посадить шарнир D_K на шарнир инверсора Поселье⁶, совершающий прямолинейное движение по этой прямой, и мы получим механизм, шарнир которого, совпадающий с вершиной p ромба, движется по нашей алгебраической кривой.

4. Развитие и критика Кемпе

Целый век считалось, что теорема 1 была доказана Альфредом Кемпе. Однако, в конце 1970-х крупный американский математик У.Тёрстон обратил внимание на проблематику теоремы Кемпе. Он сформулировал запоминающееся утверждение — существует шарнирный механизм, подделывающий вашу подпись. Это подвигло других передоказать и развить работу Кемпе с использованием современного аппарата. Первой появилась работа начинающих

⁶О прямолинейно направляющем механизме — инверсоре Поселье можно прочесть в книгах [2, 5, 10].

математиков Джордана и Стейнера [8] с доказательством, как они пишут, средствами лишь базовой математики⁷ следующей теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Для любого компактного алгебраического множества $X \subset R^k$ найдётся КШС, некоторая компонента конфигурационного пространства которой гомеоморфна X .*

Вслед за ней вышла⁸ заформализованная в гротендиковском духе статья [6] читавших препринт работы [8] многоопытного Милсона и Каповича⁹, содержащая сходный результат. *Алгебраическим множеством* называют множество общих нулей совокупности многочленов. *Аналитический изоморфизм* подмножеств евклидовых пространств есть гомеоморфизм, осуществляемый сужениями аналитических (т.е. представимых по координатам локально сходящимися степенными рядами) отображений.

ТЕОРЕМА В. *Для любого компактного алгебраического множества $X \subset R^k$ найдётся КШС, конфигурационное пространство которой аналитически изоморфно набору непересекающихся копий X .*

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого связного гладкого компактного многообразия X найдётся шарнирный механизм, конфигурационное пространство которого гладко гомеоморфно многообразию X .*

Капович и Милсон утверждали в [6], что по их мнению в предыдущих работах (в частности в [8]) затруднения в "теореме Кемпе" были проигнорированы или неверно разрешены. Причём, к этим затруднениям кроме возможности ветвления конфигурационного пространства они причислили и наличие симметрии конфигурационного пространства КШС ($F^{-1}(\mathbf{d})$) в случае закрепления конструкции всего в двух точках a и b . Эта симметрия порождена возможностью отражения конструкции относительно прямой ab . О ней не приходится говорить, если мы называем конфигурационным пространством механизма не всё $F^{-1}(\mathbf{d})$ а лишь его часть. Также в [6] получена теорема, обосновывающая утверждение Тёрстона.

ТЕОРЕМА С. *Полиномиально параметризованная кривая $f : [a, b] \rightarrow R^2$ может быть прочерчена шарниром подходящим образом выбранного плоского шарнирного механизма.*

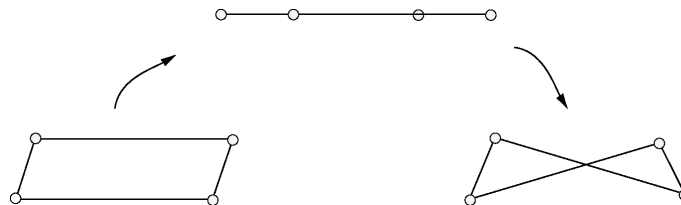


Рис. 8

Поскольку любую непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию можно сколь угодно точно приблизить многочленом, то утверждение Тёрстона о подписи сводится к этой теореме. Почти одновременно с препринтом Каповича и Милсона интенсивно консультировавший их в это время по вещественной алгебраической геометрии Г. Кинг выкладывает в архив три написанных без излишнего формализма статьи [7, 12, 13], передоказывающие, развивающие и распространяющие эти результаты на случай механизмов в R^d при $d > 2$. Доказательства всех этих результатов используют идею Кемпе о построении "функционального" механизма из простейших, но применяется укрепление простейших механизмов и используется намного более громоздкая современная техника. Претензии к Кемпе разберём по обстоятельной с историческим экскурсом, часто цитируемой статье [6], в которой было заявлено о неустраани-

⁷То есть, без гротендиковского формализма алгебраической геометрии малопонятного большинству математиков. Джордан и Стейнер, кстати, считали граф $G(V, E)$ механизма связным.

⁸Её препринт в архиве появился 23 марта 1998.

⁹Авторы работы [8] благодарят Каповича и Милсона за двукратное чтение препринта их статьи, первый раз — весной 1997.

мых простыми средствами пробелах в рассуждениях Кемпе. Её авторы утверждают, что "основное затруднение с доказательством Кемпе состоит в том, что оно хорошо работает лишь в определённых частях конфигурационного пространства, но вблизи определённых "вырожденных" положений конфигурационное пространство распадается на несколько компонент, и механизм перестаёт описывать нужную полиномиальную функцию." Это может произойти, если используемый в рассуждениях Кемпе антипараллелограмм в ходе движения распрямится и далее будет двигаться как параллелограмм¹⁰. Или, наоборот, параллелограмм перейдёт в антипараллелограмм (Рис. 8).

Обычно приписывают Кемпе следующее кажущееся наиболее естественным утверждение. Пусть π — проекция пространства R^{2m} на плоскость положений шарнира p_j .

ТЕОРЕМА 2. Для плоской алгебраической кривой A , и точки $p \in A$ найдутся круговая окрестность U точки p и КШС с конфигурационным пространством $K \subset R^{2m}$, для замыкания которой $\pi K \cap \bar{U} = A \cap \bar{U}$.

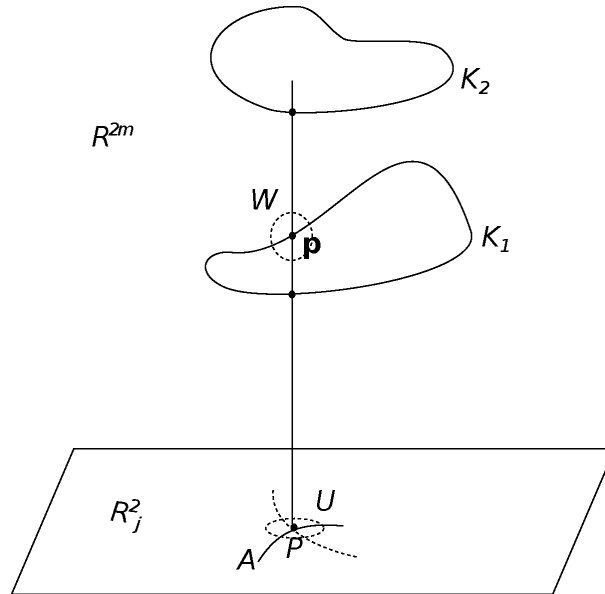


Рис. 9: На рисунке положению P шарнира p_j отвечают два положения шарнирного механизма K_1 и одно положение механизма K_2 .

И указывают на недостаточность аргументов Кемпе для его доказательства. Причина в том, что в точку p могут проектироваться и далёкие от начального положения $\mathbf{p}$ точки конфигурационного пространства K шарнирного механизма (Рис. 9). То есть, при большом движении механизм попадает в новое положение, в котором шарнир p_j опять оказывается в точке p . Усовершенствуя метод Кемпе исключают такие возможности, получая доказательство этой теоремы. Авторы позднейших работ [15, 16] делают это без утомительной современной техники, лишь подправляя рассуждения Кемпе. Исправления заключаются в укреплении параллелограммов и антипараллелограммов добавлением дополнительных рычагов, препятствующих переходам параллелограмма в антипараллелограмм и наоборот. Для укрепления параллелограмма достаточно (Рис. 5 б)) соединить рычагом шарниры, помещённые в середины его противоположных сторон. В результате получается КШС, конфигурационное пространство которой, возможно, состоит из нескольких компонент связности, но каждая компонента связности имеет нужную проекцию $A \cap \bar{U}$. Несколько компонент связности конфигурационного пространства появляется по следующей причине. Хотя, скажем, параллелограммы укреплённого переносчика (Рис. 5 а) б)) не могут перейти в антипараллелограммы, и он всегда

¹⁰По-видимому, первыми заметили это авторы работы [14].

правильно выполняет перенос вектора, как правило имеется два его положения, отвечающих одному положению перенесённого вектора.

После работы Каповича и Милсона стало общим местом указывать на некорректность (flawed) рассуждений Кемпе. Популяризаторы начали обвинять Кемпе в грубой ошибке. Мол, он не заметил, что параллелограмм распрямившись может перейти в антипараллелограмм. Я считаю эти утверждения¹¹ слишком сильными и несправедливыми.

5. Грубая ошибка — или недочёт?

Отталкиваясь от кинематического смысла и используя нашу формализацию можно дать [5, 17] следующую точную формулировку сделанного Кемпе, как теоремы "в малом".

ТЕОРЕМА 1' КЕМПЕ. *Для плоской алгебраической кривой A , и точки $p \in A$ найдётся механизм с конфигурационным пространством $K \subset R^{2m}$, и такая круговая окрестность $U \subset R^2$ точки p , а также шаровая окрестность $W \subset R^{2m}$ точки $\mathbf{p} \in K$, ($\pi \mathbf{p} = p$), что для их замыканий $\pi(K \cap \bar{W}) = A \cap \bar{U}$.*

Мы опираемся на следующее свойство алгебраической кривой $A \subset R^2$: для любой точки $p \in A$ найдётся такая её круговая окрестность U , что $\bar{U} \cap A$ связно. Именно такую окрестность U мы и рассматриваем. Для доказательства теоремы достаточно удостовериться, что при достаточно малых движениях механизма Кемпе, ни один из входящих в него параллелограммов или антипараллелограммов не распрямится. Назовём это свойством Н. Механизмы опрокидывателя и умножителя, очевидно, обладают свойством Н для угла $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ (Рис. 3). Числа r и s в уравнении (1) по абсолютной величине не превосходят порядка N рисуемой кривой A . Выбрав начало координат O достаточно далеко от окрестности U , можно добиться для любой точки $p \in \bar{U}$ выполнения неравенств $0 < N\theta < \frac{\pi}{4}$ и $0 < N\varphi < \frac{\pi}{4}$. Это позволит нам построить с помощью двух умножителей и опрокидывателей все углы $r\varphi$ и $s\theta$, входящие в аргументы косинусов уравнения (1), без каких-либо ветвлений и неоднозначности.

Недосмотр у Кемпе, действительно, есть! Затруднение может возникнуть при применении накопителя для построения суммы $r\varphi + s\theta$. Если случайно совпадут углы $r\varphi$ и $s\theta$, то антипараллелограммы накопителя распрямятся и возникнет ветвление. Однако, этой возможности легко избежать. Надо лишь так выбрать начало O , чтобы для любой точки $p \in \bar{U}$ угол θ был много меньше угла φ , например $\varphi > N\theta$. Несложно уяснить, что это возможно. Действительно, можно так нарисовать параллелограмм, чтобы для него выписанные неравенства выполнялись с запасом, скажем, в два раза. Тогда вследствие непрерывной зависимости углов от положения его вершины p (Рис. 6) найдётся её окрестность, в замыкании $\bar{U}$ которой неравенства выполняются. Подобно увеличивая параллелограмм можно сделать окрестность сколь угодно большой. Боковые стороны длины ρ параллелограммов механизма переносчика всегда можно взять достаточно длинными, чтобы для любой точки $p \in \bar{U}$ переносчик обладал свойством Н. И наконец, инверсор Поселье также можно взять столь большим, чтобы он удовлетворял свойству Н¹².

Эти уточнения не изменяют рассуждений теоремы 1 и строения получающегося в их результате механизма, а касаются лишь размеров его звеньев и расположения закреплённых шарниров. С ними первоначальные рассуждения Кемпе представляют собой полное доказательство теоремы 1'. Или простыми словами того, что произвольную ограниченную и связную

¹¹Чего только не услышишь от некоторых популяризаторов. Один заявлял, что Кемпе дал ошибочное доказательство теоремы Тёрстона о подписи.

¹²В работе Пауэра [16] содержатся эти рассуждения, и замечание, что Кемпе был ближе к доказательству "теоремы", чем ранее думали. Однако, Пауэр почему-то настаивает на применении укрепленных параллелограммов в переносчиках. Не потому ли, что он принимает определение конфигурационного пространства шарнирного механизма как $F^{-1}(\mathbf{d})$, и опасается противостоять общему мнению?

часть алгебраической кривой можно без лишних точек вычертить шарниром шарнирного механизма при непрерывном движении механизма¹³.

Схожий случай произошёл со знаменитой теоремой Коши¹⁴ об определённости выпуклого многогранника его гранями. В доказательстве Коши более чем через сто лет после опубликования обнаружили недочёт. Хотя его исправление оказалось более трудным чем в нашем случае, но, насколько я знаю, никто не обвинял Коши в грубой ошибке или некорректном доказательстве! Наверное потому, что содержащиеся в работе Коши прозрения перевешивают не так уж сложно исправимый недосмотр. То же можно сказать и о работе Кемпе.

6. Заключение. О перзрелой математике.

Напрашивается несколько критических замечаний относительно подхода отвлечённых математиков к исследованию геометрии шарнирных механизмов.

Неоправданное стремление к общности при введении структурного графа $G(V, E)$ приводит к тому, что на него не накладывается естественных условий, например, связности. Это приводит к теоремам такого содержания: если граф $G(V, E)$ состоит из k компонент связности, то конфигурационное пространство соответствующей КШС есть прямое произведение конфигурационных пространств k штук кинематических схем, отвечающих этим компонентам. Я считаю теоремы такого сорта ничего кроме наукообразия в исследование шарнирных механизмов не добавляющими.

Принятие определения конфигурационного пространства шарнирного механизма как полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ при рычажном отображении противоречит кинематической природе механизмов¹⁵. При таком определении шарнирный механизм оказывается содержащим все устройства, отвечающие КШС $\mathbf{d}$. Среди них могут оказаться механизмы непрерывно не переводимые друг в друга, а также фермы. Эти непрерывно непереводимые один в другой механизмы я считаю разными механизмами, хотя и с одной и той же кинематической схемой $\mathbf{d}$. В задаче рисования кривой шарниром механизма рассматривать эти разные механизмы как один бессмысленно. Ибо мы не можем получить положений рисующего шарнира из другого механизма не разобрав и пересобрав исходный механизм.

В работе [6] содержится ещё ряд претензий к рассуждениям Кемпе. А именно, в начале приведено целых три обстоятельства, по которым "методами Кемпе" нельзя получить доказательство теорем типа теоремы В. В конце работы [6] приведена предполагаемая формулировка "теоремы Кемпе", по-видимому, подобная теореме 2 но формулируемая более сложно и с включением технических моментов применяемого авторами аппарата. Она предполагает рассмотрение в качестве конфигурационного пространства механизма алгебраического подмножества $C \subset F^{-1}(\mathbf{d})$, и требование к проекции C быть тривиальным накрытием. Авторы указывают на недостаточность аргументов Кемпе для её доказательства. Они молчаливо предполагают, что Кемпе допускал несвязность конфигурационного пространства механизма, как это делают они. Таким образом, эти претензии не имеют прямого отношения к теореме 1' Кемпе, и обусловлены забвением кинематического смысла задачи. Их источником являются попытки истолковать сделанное Кемпе исходя из собственного нетрадиционного понимания шарнирных механизмов и применяемого аппарата, а не из существа задачи, решавшейся Кемпе.

Если позволить себе сравнение с растительной природой, то работы Кемпе, Коши, Чебышева подобны созревающему плоду, таящему в себе энергию роста и развития. А некоторые современные пухлые, перегруженные техническими деталями, со спрятанными пружинами

¹³Если эта часть кривой имеет точку ветвления, то чертящему шарниру придётся возвращаться в неё.

¹⁴Справедливее называть её теоремой Лежандра-Коши, о чём в книге [5].

¹⁵Хотя это и удобно с точки зрения математики, поскольку $F^{-1}(\mathbf{d})$ — алгебраическое множество, тогда как его компонента связности — не всегда.

доказательств работы напоминают перезрелый плод на пороге распада.

Черты перезрелой математики:

1. Источник задач и вдохновения находится исключительно внутри математики.
2. Стремление к общности, воспринимаемое как самоцель.
3. Математика начинает выступать не как орудие исследования природы, а как некий божок, призванный предписывать ей законы.
4. Написание текста без учёта законов его восприятия. Единственный ориентир — скрупулёзность, определённости понятий. Иной раз мнимая. Бросается в глаза неудобоваримость и заформализованность текста. Дж. Литлвуд [18] называл такой стиль вдохновлённым дьяволом.
5. Отсутствие стремления донести результаты своей деятельности до непосвящённых в секреты своей математической кухни. Некоторые пишут намеренно непонятно для посторонних. Даже если результаты могут иметь прикладной смысл, они изложены так, что необходим их перевод на более простой язык.
6. Снобизм. Желание считать незрелую математику недоматематикой или даже нематематикой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kempe A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by Linkwork // Proc. of the London Math. Soc. 1876. V. 7, № 102. p. 213-216.
2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— М.: Наука, 1981.
3. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, т.58, №1, с.45–70.
4. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем, Вестник МГТУ, Серия Машиностроение 2001, №4, С. 33–51.
5. Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 с.
6. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology, v.41 (2002), №6, p. 1051 – 1107.
7. King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets // arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 p.
8. Jordan D. and Steiner M. Configuration Spaces of Mechanical Linkages, // Discrete Comput. Geom. 22 (1999) p. 297–315.
9. Demain E., O'Rourke J. Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra. // Cambridge university press, New York, 2007.
10. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии, М.: ЛЕНАНД, 2015, 360 С.
11. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин. Терминология. Под редакцией Н.И. Левитского, М., Наука. 1984.
12. King Henry C. Semiconfiguration spaces of planar linkages, arXiv.org:math/9810130.

13. King Henry C. Configuration Spaces of Linkages in R^n . arXiv.org:math/9811138 Preprint November 23, 1998, 34 P.
14. Hopcroft J., Joseph D., Whitesides S. Movement problems for 2-dimensional linkages, // SIAM J. Computing, vol. 13 (1984), pp. 610-629.
15. Abbott T. Generalizations of Kempe's Universality Theorem // MS Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2008 URL: <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
16. Power S. Elementary proofs of Kempe universality // arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 Apr 2017
17. Ковалёв М. Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Итоги науки и техники, серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, ВИНТИ РАН Москва, том 179, с. 16-28
18. Литлвуд Дж. Е. Математическая смесь. — М.: Наука, 1990.

REFERENCES

1. Kempe A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by Linkwork // Proc. of the London Math. Soc. 1876. V. 7, № 102. p. 213-216.
2. Gilbert D., Cohn-Fossen S. *Visual Geometry*— М.: Nauka, 1981.
3. Kovalev M. D. *Geometric theory of hinged devices* // Izv. RAN. Ser.Math. 1994, v.58, №1, p.45–70.
Kovalev M. D. “Geometric theory of hinged devices”, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 44:1 (1995), 43–68
4. Kovalev M. D. *Questions of geometry of hinge devices and schemes*, Vestnik MGTUy, Ser. Masinostroenie 2001, №4, p. 33–51.
5. Kovalev M. D. *Geometric questions of kinematics and statics* М.: Lenand, URSS, 2019. 256 P.
6. Kapovich M., Millson J. J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology, v.41 (2002), №6, p. 1051 – 1107.
7. King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets // arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 p.
8. Jordan D. and Steiner M. Configuration Spaces of Mechanical Linkages, // Discrete Comput. Geom. 22 (1999) p. 297–315.
9. Demain E., O'Rourke J. Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra. // Cambridge university press, New York, 2007.
10. Oshemkov A. A., Popelenskiy F. Yu., Tuzhilin A. A., Fomenko A. T., Shafarevich A. 65 I. *Course of visual geometry and topology* М.: Lenand, 2015, 360 С.
11. Levitskiy N. I. *Theory of mechanisms and machines. Terminology*. Edited by Levitskiy N. I., М., Nauka. 1984.
12. King Henry C. Semiconfiguration spaces of planar linkages, arXiv.org:math/9810130.

13. King Henry C. Configuration Spaces of Linkages in R^n . arXiv.org:math/9811138 Preprint November 23, 1998, 34 P.
14. Hopcroft J., Joseph D., Whitesides S. Movement problems for 2-dimensional linkages, // SIAM J. Computing, vol. 13 (1984), pp. 610-629.
15. Abbott T. Generalizations of Kempe's Universality Theorem // MS Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2008 URL: <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
16. Power S. Elementary proofs of Kempe universality // arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 Apr 2017
17. Kovalev M.D. *What is a hinge mechanism? And what did Kempe prove?* // Itogi nauki i tehniki, ser. Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya. Tematicheskie obzori, VINITI RAN Moscow, v. 179, P. 16-28
18. Littlewood, J. E. (1986), Bollobás, Béla (ed.), Littlewood's miscellany, Cambridge: Cambridge University Press

Получено 18.03.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 519.71

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-121-150

О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик

В. В. Кочергин

Кочергин Вадим Васильевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vvkoch@yandex.ru

Аннотация

В работе предпринята попытка не только дать обзор результатов, полученных О. М. Касим-Заде, крупнейшим специалистом по дискретной математике и математической кибернетике, но и осознать его научное наследие в таких направлениях как исследование мер схемной сложности булевых функций, связанных с функционированием схем, проблематика неявной и параметрической выразимости в конечнозначных логиках, вопросы глубины и сложности булевых функций и функций многозначной логики в бесконечных базисах.

Ключевые слова: схемная сложность, активность, мощность, глубина, бесконечный базис, неявная выразимость, параметрическая выразимость.

Библиография: 91 названий.

Для цитирования:

В. В. Кочергин. О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 121–150.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 519.71

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-121-150

On the papers of O. M. Kasim-Zade in field of complexity theory and theory of multivalued logics

V. V. Kochergin

Kochergin Vadim Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vvkoch@yandex.ru

Abstract

The paper is an attempt both to give an overview of the results of O M Kasim-Zade, the largest specialist in discrete mathematics and mathematical cybernetics, and to understand his scientific legacy in fields such as research measures the circuit complexity of Boolean functions related to the operation of the circuits, the problems of implicit and parametric expressibility in finite-valued logics, the questions of the depth and the complexity of Boolean functions and functions of multivalued logics in infinite bases.

Keywords: circuits complexity, activity, power, depth, infinite basis, implicit expressibility parametric expressibility.

Bibliography: 91 titles.

For citation:

V. V. Kochergin, 2022, “On the papers of O. M. Kasim-Zade in field of complexity theory and theory of multivalued logics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 121–150.

Октай Мурадович Касим-Заде (29.04.1953 – 22.12.2020), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, запомнится нам не только как крупнейший организатор в области дискретной математики и математической кибернетики, но и, прежде всего, как автор ярких научных результатов. Публикаций по современным меркам у Октая Мурадовича не так много, но практически каждая печатная работа является крупным научным достижением. Многие статьи О. М. Касим-Заде задали векторы развития целым разделам теории синтеза и сложности управляющих систем, некоторые работы открыли новые важнейшие направления исследований. Научное наследие О. М. Касим-Заде велико и еще ждет своего осмысления. В данной работе автор попытался сделать первый шаг в этом направлении.

Октай Мурадович родился 29 апреля 1953 года в г. Баку в семье известного азербайджанского учёного, профессора, инженер-полковника Военно-морского флота.

Окончив с отличием школу в Баку, в 1970 году Октай Мурадович поступил на только что открывшийся факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Там судьба свела его с академиком Олегом Борисовичем Лупановым, который стал для Октая Мурадовича не только научным руководителем, но и образцом математика, педагога и руководителя.

Практически вся профессиональная трудовая деятельность О. М. Касим-Заде была тесно связана с Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша и механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова.

В ИПМ О. М. Касим-Заде работал в отделе теоретической кибернетики, который возглавлял чл.-корр. АН СССР С. В. Яблонский и в котором работал О. Б. Лупанов, с 1976 года по 2006 год (с 1992 г. — по совместительству). В 1986 году по предложению О. Б. Лупанова Октай Мурадович начинает вести научно-педагогическую работу на кафедре дискретной математики механико-математического факультета МГУ. С 1992 года механико-математический факультет становится основным местом работы Октая Мурадовича.

О. М. Касим-Заде защитил кандидатскую диссертацию на тему «Об одной мере сложности схем из функциональных элементов» в 1980 году и докторскую диссертацию на тему «О синтезе некоторых классов управляющих систем, связанных с неявными и параметрическими представлениями булевых функций» в 1996 году.

В том же 1996 году Октай Мурадович стал заместителем заведующего кафедрой дискретной математики, а в 2006 году после смерти О. Б. Лупанова Октай Мурадович Касим-Заде возглавил кафедру дискретной математики и в должности заведующего кафедрой работал до последних дней. Надо сказать, что при этом Октай Мурадович всегда оставался доброжелательным, предельно отзывчивым, чутким и приятным в общении человеком, который тем не

менее становился принципиальным и твёрдым, когда что-либо касалось общего дела, интересы которого он всегда ставил выше личных интересов.

Октай Мурадович был замечательным преподавателем, обладал великолепными ораторскими способностями, легко и непринужденно приковывал к себе внимание аудитории. Он мог на простых и понятных примерах объяснять сложные вопросы.

Круг научных интересов О. М. Касим-Заде сформировался под сильным влиянием академика О. Б. Лупанова и был необычайно широк. Следующий небольшой штрих ярко подчеркивает последний факт — когда Октаю Мурадовичу было тридцать с небольшим, О. Б. Лупанов привлек его в качестве соредактора-составителя к издательству знаменитого «Кибернетического сборника» — серии сборников переводов лучших работ зарубежных авторов по теоретической кибернетике.

В вопросах публикации собственных научных результатов Октай Мурадович был крайне щепетилен. Он отдавал в печать только те результаты, которые считал действительно принципиальными продвижениями в исследуемых задачах, при этом к своим результатам предъявлял очень серьезные требования. К сожалению, значительное число интересных результатов осталось неопубликованными. С другой стороны, практически каждая работа Октая Мурадовича представляет собой яркий научный результат. Многие работы определили дальнейшие направления исследований в соответствующих областях. Все его работы имеют законченный вид, тщательно выверены, имеют безупречную внутреннюю структуру, написаны безукоризненно как с математической стороны, так и со стороны умения преподнести материал. Стоит отметить, что Октай Мурадович неоднократно отмечал, что есть, так сказать, три «математических языка»: первый — язык, на котором автор придумывает результаты, второй — язык, на котором следует рассказывать, а третий — язык, предназначенный для изложения результатов в виде научных статей; при этом, вообще говоря, эти три языка очень сильно отличаются друг от друга. Сам Октай Мурадович был непревзойденным мастером не только устного слова, но и письменного.

Среди всех научных трудов О. М. Касим-Заде можно выделить несколько больших циклов работ — исследования мер сложности, связанных с функционированием схем, результаты по проблематике неявной и параметрической выразимости, а также работы, связанные с изучением вопросов глубины и сложности в бесконечных базисах.

Основные результаты этих циклов, а также многих других работ, относятся к одному из важнейших разделов дискретной математики и математической кибернетики — теории управляющих систем (в первую очередь к теории сложности и теории многозначных логик), однако, возникающие при исследовании поставленных задач вопросы затрагивают большой спектр проблем из других разделов дискретной математики и математической кибернетики, а зачастую и выходят за рамки дискретной математики и математической кибернетики.

1. Исследование мер сложности, связанных с функционированием схем

Хронологически первый большой цикл работ О. М. Касим-Заде (см., в частности, [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 21]) составляют исследования, посвященные изучению двух мер сложности, называемых, соответственно, мощностью и активностью, логических схем или схем из функциональных элементов (определение схем из функциональных элементов см., например, в [26]), которые в отличие от классических мер — таких, как собственно сложность и глубина, — характеризуют схемы не с точки зрения внешних параметров — размера, веса, стоимости, времени срабатывания, — а тесно связаны с функционированием самой схемы.

Мощностью схемы S на входном наборе α называется величина $E(S, \alpha)$, равная числу элементов схемы S , выходы которых принимают значение 1, а активностью схемы S на входном

наборе α называется величина $W(S, \alpha)$, равная числу элементов схемы S , хотя бы на один вход которых подается значение 1. Мощность (активность) схемы — это максимально возможное значение мощности (активности) на наборе, мощность (активность) булевой функции в базисе B — минимально возможное значение мощности (активности) схемы, реализующей эту функцию в базисе B . Стандартным образом вводятся функции Шеннона мощности и активности в базисе B , обозначаемые соответственно $E_B(n)$ и $W_B(n)$, как максимум значений мощности (активности) булевых функций от n переменных. Начало исследованиям этих энергетических мер сложности положили работы [2, 4, 5], в которых, в частности, было доказано, что для любого конечного базиса B выполняются соотношения

$$n \preceq E_B(n) \preceq \frac{2^n}{n}, \quad n \preceq W_B(n) \preceq \frac{2^n}{n}$$

(здесь и далее запись $f(n) \preceq g(n)$ означает, что $f(n) = O(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$).

О. М. Касим-Заде установил [2, 3] общую картину расположения порядков роста функций Шеннона мощности $E_B(n)$, отвечающих конечным базисам B , на условной «шкале» порядков роста от n до $2^n/n$: для любого конечного базиса B выполнено либо соотношение

$$n \preceq E_B(n) \preceq n^2,$$

либо соотношение

$$2^\gamma \preceq E_B(n) \preceq \frac{2^n}{n},$$

где γ — положительная константа, зависящая только от базиса. При этом приведен пример бесконечного семейства конечных базисов B_m , $m = 1, 2, \dots$, имеющих попарно различные экспоненциальные порядки роста функций Шеннона мощности:

$$E_{B_m}(n) = \Theta\left(\left(\frac{2^n}{n}\right)^{1/m}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Этот пример также показывает, что совокупность всех функций Шеннона экспоненциального типа нельзя равномерно ограничить снизу экспонентой от n .

О. М. Касим-Заде исследована [3] зависимость поведения функции Шеннона мощности $E_B(n)$ от базиса B , выявлены некоторые параметры базиса, влияющие на поведение функции Шеннона мощности, установлено, что для почти всех конечных базисов рост функции Шеннона мощности линеен.

О. М. Касим-Заде также установил, что задача о возможностях построения схем, асимптотически наилучших по сложности и оптимальных по порядку роста по мощности, может иметь в зависимости от базиса как положительный, так и отрицательный ответ. Так, в случае базиса $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ для произвольной булевой функции от n переменных предложен [1] метод построения схемы сложности $(1 + o(1))2^n/n$ и мощности $O(n)$, в то время как для случая базиса $B = \{(x \vee \bar{y})\bar{z}\}$, в котором

$$L_B(n) \sim \frac{2^n}{2n}, \quad E_B(n) = \Theta(n),$$

установлено [2, 3], что доля функций f_n от n переменных, для которых найдется схема S_{f_n} , удовлетворяющая условиям

$$L_B(S_{f_n}) \leq (1 + o(1))\frac{2^n}{2n}, \quad E_B(S_{f_n}) = O(n),$$

стремится к нулю с ростом n .

В работах [6, 8] О. М. Касим-Заде рассматривал аналогичные задачи для случая, когда в качестве меры сложности схем выступает активность. Им установлено, что для любого конечного базиса B выполнено либо соотношение

$$n \preceq W_B(n) \preceq n^2,$$

либо соотношение

$$2^{n/2} \preceq W_B(n) \preceq \sqrt{n}2^{n/2},$$

либо соотношение

$$W_B(n) = \Theta\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

причем доказано, что для каждого из этих трех типов роста есть соответствующие базисы, а также среди функций Шеннона активности $W_B(n)$ существует не более трех различных порядков роста, удовлетворяющих условиям $2^{n/2} \preceq W_B(n) \preceq \sqrt{n}2^{n/2}$.

Последний факт показывает принципиальное различие между двумя близкими мерами сложности — мощностью и активностью: существует бесконечное число различных порядков роста экспоненциального типа для функций Шеннона мощности, а для функций Шеннона активности есть не более четырех (и не менее двух) различных порядков роста экспоненциального типа.

Стоит отметить, что все описанные результаты, касающиеся активности схем, переносятся [8] без принципиальных изменений на меру сложности, называемую P -активностью, отличающуюся от активности тем, что активными элементами схемы дополнительно считаются и элементы, выходы которых принимают значение 1.

В [6] также установлено, что в случае базиса $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ для произвольной булевой функции от n переменных можно построить схему сложности $(1 + o(1))2^n/n$ и активности $O(n^2)$.

В работах [9, 21] О. М. Касим-Заде исследовал мощность, в том числе и среднюю мощность (усреднение берется по всем входным наборам), простейших функций — конъюнкции n переменных K_n и дизъюнкции n переменных D_n . Для реализации этих функций в базисах $\{\&, -\}$, $\{\vee, -\}$, $\{\&, \vee, -\}$ и базисе, состоящем из всех антимонотонных двуместных функций, установлены порядки роста (в отдельных случаях — асимптотики роста или даже точные значения) мощности и средней мощности. В большинстве случаев он оказался линейным. К исключениям относятся следующие случаи: в базисе $\{\&, \vee, -\}$ мощность и средняя мощность реализации функции D_n растут как $\Theta(\sqrt{n})$ и $O(\log_2^* n)$ (здесь запись $\log_2^* n$ обозначает двоичный «сверхлогарифм» числа n , т. е. количество последовательных логарифмирований по основанию 2, необходимое для получения из числа n числа, не превосходящего 1) соответственно; в базисах, включающих конъюнкцию, средняя мощность функции K_n равна $1/2 - 2^{-n}$.

2. Неявная и параметрическая выразимость

Чтобы сформулировать основные результаты О. М. Касим-Заде, так или иначе относящиеся к тематике неявной и параметрической выразимости булевых функций и функций многозначной логики, стоит напомнить ряд определений.

Пусть A — произвольная система булевых функций. Будем рассматривать системы уравнений вида

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) = \Psi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) \\ \dots \\ \Phi_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) = \Psi_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) \end{cases},$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Psi_1, \dots, \Psi_p$ — некоторые формулы, составленные из символов функций, входящих в систему A , символов основных переменных $x_1, \dots, x_n$, внутренних переменных (параметров) $y_1, \dots, y_q$ и выделенной переменной z (эти формулы могут не содержать функциональных символов, т. е. являться символами переменных). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция от основных переменных. Система уравнений описанного вида называется параметрическим представлением функции f над системой функций A , если указанная система уравнений имеет по меньшей мере одно решение $y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_q = g_q(x_1, \dots, x_n), z = g_0(x_1, \dots, x_n)$ в функциях от основных переменных, причем во всяком таком решении значение выделенной переменной z определено однозначно и равно $f(x_1, \dots, x_n)$, т. е. $f(x_1, \dots, x_n) = g_0(x_1, \dots, x_n)$.

Функция f называется параметрически выразимой над системой функций A , если для f существует параметрическое представление над A .

Функция f называется неявно выразимой над системой функций A , если для f существует параметрическое представление над системой A без внутренних переменных.

Множество всех булевых функций, параметрически (неявно) выразимых над системой функций A , называется параметрическим замыканием (неявным расширением) этой системы и обозначается через $P(A)$ ($I(A)$). Операция параметрического замыкания, сопоставляющая всякой системе булевых функций A ее параметрическое замыкание $P(A)$, является операцией замыкания в обычном смысле, т. е. удовлетворяет условиям монотонности, экстенсивности и идемпотентности.

Система всех параметрически замкнутых классов булевых функций была найдена А. В. Кузнецовым [21]. Эта система конечна и состоит из следующих 25 замкнутых относительно суперпозиции классов булевых функций: $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3, P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9$ (обозначения классов даны по [45]). Так как всякий параметрически замкнутый класс замкнут относительно суперпозиции, эта система является подсистемой системы всех замкнутых относительно суперпозиции классов булевых функций.

Теорема Кузнецова показывает, насколько в случае булевых функций операция параметрического замыкания превосходит по выразительной силе операцию замыкания по суперпозиции: под действием этой операции счетная структура классов Поста «сжимается» в конечную структуру из 25 классов.

В работе [21] была высказана гипотеза о конечности числа параметрически замкнутых классов в любой конечнозначной логике P_k , $k \geq 2$, (проблема 15 из [21]). В случае $k = 3$ справедливость этой гипотезы установлена А. Ф. Данильченко [6]. Окончательно проблему решили С. Баррис и Р. Уиллард [52], доказав справедливость гипотезы А. В. Кузнецова для всех конечных значений k .

В работе [21] был также поставлен вопрос (в другой, но эквивалентной формулировке) о соотношении неявной и параметрической выразимости в двузначной логике P_2 (проблема 12). Решение этой проблемы было получено О. М. Касим-Заде в работе [12], в которой было доказано, что неявное расширение любой системы булевых функций совпадает с ее параметрическим замыканием, и тем самым установлено, что в двузначной логике P_2 неявная выразимость эквивалентна параметрической выразимости.

Отметим, что в многозначной логике дело обстоит совершенно по-иному: при $k \geq 3$ неявная выразимость в P_k не эквивалентна параметрической выразимости; более того, если $k \geq 3$, то число систем функций из P_k , имеющих различные неявные расширения, равно континууму, в то время как число параметрически замкнутых классов конечно.

Октай Мурадович проявлял повышенное внимание к еще одной важной задаче — проблеме неявной полноты в k -значной логике, $k \geq 2$. Эта задача получила решение в несколько этапов. Сначала для случая булевых функций О. М. Касим-Заде решил [12, 15] проблему неявной полноты в терминах неявно предполных классов, т. е. максимальных по включению не полных неявно систем функций: система A функций алгебры логики неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда A не содержится целиком ни в одном из шести явно замкнутых классов функций

T_1, T_0, S, L, K, D (в обозначениях из [45] это классы $C_2, C_3, D_3, L_1, P_6, S_6$). Затем он же нашел (см., например, [35]) критерий неявной полноты в терминах минимальных по включению неявно полных замкнутых по суперпозиции классов: система A неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда замыкание по суперпозиции этой системы содержит класс M всех монотонных функций алгебры логики. Класс M является единственным минимальным по включению замкнутым по суперпозиции неявно полным классом в P_2 . В P_3 аналогичный критерий неявной полноты получила [35] Е. А. Орехова, ученица О. М. Касим-Заде. Она описала все минимальные неявно полные замкнутые по суперпозиции классы в P_3 , которых оказалось 27. Ей же был доказан [36] критерий неявной шепферовости в P_3 . Позднее О. М. Касим-Заде доказал [30] критерий неявной полноты в P_k при произвольном $k \geq 2$, позволяющий устанавливать неявную полноту системы функций по множеству функций от трех переменных, лежащих в замыкании этой системы по суперпозиции. Одним из следствий этого критерия является тот факт, что любая неполная система функций в P_k расширяется до некоторого неявно предполного класса и число таких классов в P_k конечно при любом $k, k \geq 2$. В связи с проблематикой неявной полноты в k -значной логике стоит упомянуть также недавние результаты еще одного ученика О. М. Касим-Заде — М. В. Старостина. Им установлен [42, 43] критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов: система функций трехзначной логики неявно полна в P_3 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 54 явно предъявленных неявно предполных классов.

Изложенные выше результаты о неявной и параметрической выразимости в двузначной логике касались исключительно вопросов выразимости, т. е. чисто качественной стороны проблемы синтеза неявных и параметрических представлений булевых функций. Завершение исследований по качественным вопросам синтеза неявных и параметрических представлений в двузначной логике естественным образом выдвинуло на первый план задачу изучения метрических аспектов этой проблемы, связанных с построением неявных и параметрических представлений, наилучших с точки зрения той или иной меры сложности, и с оценкой их сложности.

Существуют различные меры сложности неявных и параметрических представлений. Одна из таких мер обобщает известную меру сложности формул (суперпозиций): предполагается, что каждой функции, входящей в заданную систему A , приписано некоторое число — вес этой функции, и под сложностью всякого неявного (параметрического) представления над системой A понимается сумма весов всех вхождений функций из A в уравнения, составляющие рассматриваемое представление. Эта мера сложности рассматривалась О. М. Касим-Заде в работах [20, 23].

Другая естественная мера сложности неявных и параметрических представлений, когда под сложностью неявного (параметрического) представления понимается число входящих в него уравнений — ранг представления — исследовалась О. М. Касим-Заде в работах [15, 16]. В этих работах, как обычно, для рассматриваемой меры сложности вводятся соответствующие функции Шеннона, называемые ранговыми функциями. Основные результаты этих работ касаются поведения ранговых функций неявных и параметрических представлений над произвольными системами булевых функций. В этих работах установлены порядки роста ранговых функций неявных и параметрических представлений для всех систем булевых функций.

Пусть A — некоторая система булевых функций, f — булева функция, неявно (параметрически) выражимая через функции системы A . Наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного (параметрического) представления функции f над системой A , называется рангом (соответственно, параметрическим рангом или, короче, P -рангом) функции f над системой A и обозначается $m_A(f)$ (соответственно $M_A(f)$).

Ранговой функцией, отвечающей системе A , называется функция $m_A(n)$ натурального ар-

гумента n , определяемая соотношением

$$m_A(n) = \max m_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f от n переменных, неявно выразимым через функции системы A , $f \in I(A)$.

Аналогично, P -ранговой функцией, отвечающей системе A , называется функция $M_A(n)$ натурального аргумента n , определяемая соотношением

$$M_A(n) = \max M_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f от n переменных, параметрически через функции системы A , $f \in P(A)$.

Нетрудно понять, что для всякой системы функций A при всех натуральных n имеют место равенства $m_A(n) = m_{[A]}(n)$ и $M_A(n) = M_{[A]}(n)$, где $[A]$ обозначает замыкание системы A по суперпозиции. Поэтому задача нахождения ранговых функций $m_A(n)$ и $M_A(n)$ для всех систем булевых функций A сводится к нахождению ранговых функций лишь для систем, замкнутых относительно суперпозиции.

Основной результат работы [16] заключается в следующем. В зависимости от того, каким классом Поста является замыкание по суперпозиции множества A , множество всех систем A разбивается на шесть типов, при этом ранговые функции имеют следующий вид:

1) если замыкание системы A совпадает с одним из замкнутых классов $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3, P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9$, то

$$m_A(n) = 1, \quad M_A(n) = 1;$$

2) если замыкание системы A совпадает с классом A_1 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1, \quad M_A(n) = 2;$$

3) если замыкание системы A совпадает с одним из классов A_2 или A_3 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad M_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ 2, & \text{при } n \geq 2; \end{cases}$$

4) если замыкание системы A совпадает с классом A_4 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad M_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, 2, \\ 2, & \text{при } n \geq 3; \end{cases}$$

5) если замыкание системы A совпадает с одним из классов F_i^μ , где $i = 1, 4, 5, 8$, $\mu = 2, 3, \dots, \infty$, то

$$m_A(n) = M_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor;$$

6) если замыкание системы A совпадает с одним из классов D_2 или F_i^μ , где $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 2, 3, \dots, \infty$, то

$$m_A(n) = \Theta(n \log n), \quad M_A(n) = \Theta(n).$$

Тем самым, в работе [16] установлены порядки роста ранговых и P -ранговых функций для всех систем булевых функций, при этом для большинства замкнутых классов эти функции найдены в точном виде. Полученные результаты показывают, что поведение функций $m_A(n)$

и $M_A(n)$ над одной и той же системой булевых функций A может как совпадать, так и различаться довольно существенно. Это факт интересен в свете того, что в случае двузначной логики с точки зрения выразимости, параметрические представления не имеют каких-либо преимуществ перед неявными [12]. Различие в поведении функций $m_A(n)$ и $M_A(n)$ наблюдается лишь в тех случаях, когда система A состоит целиком из монотонных функций. Стоит также отметить своеобразие поведения ранговых функций $m_A(n)$, отвечающих классу D_2 самодвойственных монотонных функций и классам F_i^μ монотонных функций, удовлетворяющих условиям $\langle A_\mu \rangle$ или $\langle a_\mu \rangle$. В этом случае рост ранговых функций оказывается нелинейным.

Вопросы о поведении ранговых функций в случае многозначных логик, безусловно, также не могли не интересовать Октая Мурадовича. Конечно, в этом случае задачи становятся существенно труднее. В этом направлении стоит отметить следующие результаты Е. В. Михайлец, ученицы О. М. Касим-Заде. В работе [32] она установила, что для достаточно широкого семейства неявно полных систем функций k -значной логики ранговые функции имеют линейный порядок роста $\Theta(n)$. В частности, для классов A функций, монотонных относительно произвольного частичного порядка, заданного на множестве $\{0, 1, \dots, k-1\}$, и содержащего хотя бы одну пару сравнимых элементов, выражение для ранговой функции $m_A^k(n)$ определяется равенством

$$m_A^k(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

Но, наверное, еще более интересным результатом работы [32] является доказательство экспоненциального порядка роста ранговой функции, соответствующей одному из неявно полных в P_3 классов, рассматривавшихся в работе [35]. Наличие такого факта в очередной раз показывает принципиальное отличие функций многозначной логики от двузначной.

Возвращаясь к булевым функциям и классической мере сложности, напомним, что под сложностью параметрического представления описанного в начале раздела вида в простейшем случае понимается число вхождений функциональных символов из системы A в уравнение этого представления. В общем случае каждой функции, входящей в систему A , приписывается некоторое положительное действительное число, называемое весом этой функции. Систему функций A с приписанными этим функциям весами называют базисом. Под сложностью параметрического представления над базисом A понимается сумма весов всех вхождений символов базисных функций в формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Psi_1, \dots, \Psi_p$.

Обычным образом вводится функция Шеннона $L_A(n)$, отвечающая базису A : для всякого натурального n значение $L_A(n)$ равно наименьшей величине сложности, достаточной для построения параметрического представления над базисом A для всякой булевой функции от n переменных, параметрически выразимой над этим базисом.

В асимптотической постановке проблема сложности параметрических представлений сводится к изучению асимптотического поведения функций Шеннона $L_A(n)$ при $n \rightarrow \infty$. В [20] получено асимптотически точное выражение функций Шеннона, отвечающих произвольным конечным параметрически полным базисам с положительными весами (базис A называется параметрически полным, если $P(A) = P_2$).

Пусть A — произвольный конечный базис булевых функций с положительными весами. Для всякой функции φ из базиса A обозначим через $\lambda(\varphi)$ вес этой функции, а через $m(\varphi)$ — число ее существенных переменных. Приведенным весом базиса A называется [25, 28] величина ρ_A , определяемая соотношением

$$\rho_A = \min_{\varphi} \frac{\lambda(\varphi)}{m(\varphi) - 1},$$

где минимум берется по всем функциям φ из базиса A , удовлетворяющим условию $m(\varphi) \geq 2$.

Назовем редуцированным весом базиса A величину γ_A , определяемую соотношением

$$\gamma_A = \min_{\varphi} \gamma(\varphi),$$

где минимум берется по всем функциям φ из базиса A , удовлетворяющим условию $m(\varphi) \geq 2$, и

$$\gamma(\varphi) = \begin{cases} \lambda(\varphi)/m(\varphi), & \text{если функция } \varphi \text{ является нелинейной;} \\ \lambda(\varphi)/(m(\varphi) - 1), & \text{если функция } \varphi \text{ является линейной.} \end{cases}$$

В работе [20] для произвольного параметрически полного конечного базиса A , состоящего из булевых функций с произвольными положительными весами, О. М. Касим-Заде установил при $n \rightarrow \infty$ асимптотику роста функции Шеннона:

$$L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^n}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right).$$

В работе [23] О. М. Касим-Заде установлено, что в случае произвольного конечного (не обязательно параметрически полного) базиса A для поведения соответствующей функции Шеннона при $n \rightarrow \infty$ имеется четыре возможности:

- 1) $L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^n}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right)$;
- 2) $L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^{n-1}}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right)$;
- 3) $L_A(n) = \rho_A n + O(1)$;
- 4) $L_A(n) = L_A(1)$

в зависимости от того, каким из вышеописанных 25 замкнутых классов является параметрическое замыкание $P(A)$ базиса A . Выбор реализуемой возможности определяется мощностью класса $P(A)$: для самых больших классов C_1, C_2, C_3 и C_4 выполняется первое асимптотическое равенство, для тоже достаточно мощных классов D_1 и D_3 справедливо второе соотношение, для классов одноместных функций O_1, O_4, O_5, O_6, O_8 и O_9 функция Шеннона постоянна, а для остальных классов растет линейно.

Стоит отметить, что результат из [20] об асимптотике роста функции Шеннона для произвольного параметрически полного конечного базиса A , состоящего из булевых функций с произвольными положительными весами, нашел несколько приложений.

Во-первых, вопросы синтеза и сложности введенного А. Бёрксом и Дж. Райтом [51] класса сетей из функциональных элементов оказались тесно связанными с соответствующими задачами класса параметрических представлений. О. М. Касим-Заде удалось (см. Добавление 2 к работе [20]) основные результаты о сложности параметрических представлений в параметрически полных базисах перенести на задачи о сложности сетей из функциональных элементов.

Во-вторых, сравнивая сложность реализации булевых функций параметрическими представлениями и схемами из функциональных элементов, которые также можно рассматривать как специальный вид параметрических представлений, удалось посмотреть под новым углом на некоторые задачи о сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов (см., например, Добавление 1 к работе [20]).

Кроме того, применение основных идей асимптотически оптимального метода синтеза параметрических представлений позволило понизить верхнюю оценку и получить [7] асимптотику сложности для описанной А. А. Сапоженко и С. А. Ложкиным [41] математической модели электронных схем на дополняющих МОП-транзисторах (КМОП-схем).

3. Сложность и глубина в бесконечных базисах

Большой цикл работ О. М. Касим-Заде посвящен исследованию схемной сложности и глубины булевых функций над бесконечными базисами. Определение схемы из функциональных элементов и других связанных с ним понятий можно найти, например, в [25]. Под сложностью схемы в этом цикле как правило понимается число входящих в нее функциональных

элементов. Глубиной схемы называется наибольшее число функциональных элементов, составляющих ориентированную цепь, ведущую от входов схемы к её выходу. Глубина схемы тесно связана с временем срабатывания схемы.

Наименьшее число элементов, достаточное для реализации схемой над базисом B функции f , называется сложностью функции f и обозначается через $L_B(f)$. Соответствующая базису B функция Шеннона $L_B(n)$ определяется для всех натуральных n соотношением $L_B(n) = \max_f L_B(f)$, где максимум берется по всевозможным функциям f от n переменных, реализуемых над базисом B .

Наименьшая глубина схем над базисом B , реализующих функцию f , называется глубиной функции f над базисом B и обозначается через $D_B(f)$. Каждому базису B соответствует функция Шеннона глубины $D_B(n)$, определяемая при всех n соотношением $D_B(n) = \max_f D_B(f)$, где максимум берется по всевозможным функциям f от n переменных, реализуемых над базисом B .

Базис называется бесконечным, если содержит функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных (т. е. для всякого m в базисе имеется по крайней мере одна функция, существенно зависящая не менее чем от m переменных). В противном случае базис называется конечным.

Стоит отметить, что при всей общности постановок задач о сложности и глубине булевых функций (а также функций многозначной логики) над бесконечными базисами, постепенное продвижение в исследовании этих задач проходило, в общем, независимо.

3.1. Сложность в бесконечных базисах

Известно [54], что для всякого конечного (полного) базиса B булевых порядок роста функции Шеннона $L_B(n)$ при $n \rightarrow \infty$ равен $2^n/n$. Исчерпывающее описание асимптотического поведения функций Шеннона для всех конечных булевых базисов с положительными весами элементов дано О. Б. Лупановым [25]. Поведение функций Шеннона для бесконечных базисов гораздо разнообразнее. В частности, известны [3, 27, 30, 31, 33, 34] примеры базисов, для которых порядки роста функций Шеннона равны: 1 , $\log_2 n$, $(2n/n)^{1/2}$, $2n/2$.

В работе [14] Н. А. Карповой рассматривались бесконечные базисы, в которых каждому базисному элементу приписан произвольный неотрицательный вес, а сложность схемы определяется как сумма весов входящих в нее элементов, и исследовался следующий вопрос: какие числовые функции могут быть функциями Шеннона в таких базисах? Нахождение точного и полного ответа на этот вопрос представляется практически невозможным, поэтому задача рассматривалась с точки зрения асимптотической характеристики функций Шеннона. Н. А. Карпова установила необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять числовая функция, асимптотически равная функциям Шеннона в некотором бесконечном базисе из элементов с произвольными неотрицательными весами. Таким образом, была дана полная характеристика функций, асимптотически равных функциям Шеннона в таких бесконечных базисах [14]. Отметим, что задача нахождения по заданному бесконечному базису функции Шеннона сложности в этом базисе Н. А. Карповой в указанной работе не рассматривалась.

О. М. Касим-Заде [25] предложил новый метод получения двусторонних оценок функций Шеннона в произвольных бесконечных базисах, который позволил при достаточно слабых ограничениях оценить рост функций Шеннона с точностью до полиномиальной эквивалентности. Метод получения нижних оценок в [25] основан на «мощностных» соображениях и восходит к [27, 34]. Что касается верхних оценок, то предложенный в [25] метод позволил получить верхние оценки функции Шеннона, сопоставимые с ее мощностной нижней оценкой. Эти результаты получили развитие в [27], где были получены более точные оценки.

В общих чертах качественная картина поведения порядков роста функций Шеннона в бесконечных базисах была описана О. М. Касим-Заде в [33].

Для изложения этих результатов введем еще два определения.

Если выполнено соотношение $a(n) = O(b(n))$, то, следуя [33], интервалом между функциями $a(n)$ и $b(n)$ будем называть множество всех действительнозначных функций $c(n)$ натурального аргумента, принимающих положительные значения при всех достаточно больших n и удовлетворяющих условиям $c(n) = \Omega(a(n))$ и $c(n) = O(b(n))$. Если функция $c(n)$ лежит в интервале между функциями $a(n)$ и $b(n)$ и по порядку роста не совпадает ни с одной из них, то будем говорить, что функция $c(n)$ лежит строго в интервале между функциями $a(n)$ и $b(n)$.

Далее, классом L содержательно (подробнее см. [33]) назовем множество функций от одной действительной переменной, состоящее из тождественной функции x , всех действительных констант, и такое, которое вместе с любыми двумя функциями $f(x), g(x)$ содержит все функции, финально эквивалентные функциям $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, $e^{f(x)}$, $\log_2 |f(x)|$ (финальная эквивалентность означает равенство функций для всех значений аргумента, начиная с некоторого числа).

В [18] О. М. Касим-Заде доказал, что для всякого бесконечного базиса B выполняется соотношение $L_B(n) = O(2^{n/2})$. С точностью до константы эта оценка является, вообще говоря, не улучшаемой: из работы Э. И. Нечипорука [33], в частности, известен пример бесконечного базиса, в котором порядок роста функции Шеннона равен $2^{n/2}$. Результаты работ Э. Н. Гилберта [3] и А. А. Маркова [30, 31] дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\log_2 n$. Результаты Э. И. Нечипорука [34] и О. Б. Лупанова [27] о схемах в базисе пороговых функций дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\sqrt{\frac{2^n}{n}}$. Отметим еще базис B , состоящий из всех булевых функций, для которого $L_B(n) = 1$ при всех натуральных n .

Согласно классификации, описанной в [33], для любого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо лежит в одном из двух интервалов: или между функциями $\log_2 n$ и n , или между функциями n и $2^{n/2}$.

Таким образом, для всякого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо не меньше $\log_2 n$. Иначе говоря, не существует базиса, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями 1 и $\log_2 n$ [33].

В [33] установлено, что существуют базисы с порядком роста функции Шеннона, равным n . Из этого факта и приведенных выше результатов следует, что границы 1, $\log_2 n$, n и $2^{n/2}$ каждого из интервалов, указанных в классификации порядков роста функций Шеннона [33], достижимы.

Отметим, что порядок роста функции Шеннона $\sqrt{\frac{2^n}{n}}$, относящийся к базису пороговых функций, лежит строго в интервале между функциями n и $2^{n/2}$. Можно показать, что число базисов с различными порядками роста функций Шеннона в этом интервале бесконечно; обширное семейство таких базисов построено в работе [33].

В [33] показано, что для любой функции λ , принадлежащей классу L и удовлетворяющей условиям: $\lambda(n) = \Omega(n)$, $\log_2 \lambda(n) = O(n^{1/2})$, существует бесконечный базис, в котором функция Шеннона по порядку роста равна функции $\lambda(n)$. В частности, из этого результата вытекает, что порядками роста функции Шеннона являются, например, функции $n \log_2 n$, $n \log_2 \log_2 n$, n^2 , $n^{3/2}$, $n^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt[5]{n}}$ и другие (подробнее см. [33]).

Что касается интервала между функциями $\log_2 n$ и n , то ответ на вопрос «существуют ли базисы, в которых порядки роста функций Шеннона лежат строго в этом интервале?» оставался неизвестным и очень интересовал О. М. Касим-Заде.

Упомянутый выше метод получения оценок, предложенный в [25], дает, в частности, следующий результат: если полученная посредством него мощностная нижняя оценка функции Шеннона в данном бесконечном базисе по порядку не ниже линейной (и тем самым функ-

ция Шеннона попадает в интервал от n до $2^{n/2}$, то функция Шеннона по порядку заключена между этой нижней оценкой и ее квадратом. В интервале от $\log_2 n$ до n это свойство, вообще говоря, не выполняется. Для таких бесконечных базисов получение достаточно точных нижних оценок их функций Шеннона, по-видимому, требует привлечения иных соображений. Такие новые методы получения нижних оценок удалось разработать при исследовании базиса антицепных функций, на необходимость изучения теоретико-сложностных свойств которого обращал внимание О. Б. Лупанов и на котором стоит остановиться подробнее.

Рассмотрим булев куб $\{0, 1\}^n$ как частично упорядоченное множество наборов с естественным порядком декартова произведения. Антицепью булева куба будем называть всякое подмножество булева куба, состоящее из попарно несравнимых наборов. Булева функция, принимающая значение 1 лишь на некоторой антицепи, называется антицепной.

Множество всех антицепных функций образует бесконечный базис, который обозначается через AC (см., например, [10]). В базис AC также включаются константы 0 и 1, по соглашению не имеющие переменных. С содержательной точки зрения им соответствуют функциональные элементы без входов, реализующие на выходе константы 0 и 1 соответственно. Множество AC замкнуто относительно операций подстановки констант и отождествления переменных, и всякая булева функция выражается через функции из множества AC с помощью операции суперпозиции (система AC полна, поскольку, например, функции $\bar{x}$ и $x \& y$ являются антицепными, а их совокупность образует базис).

Изучение базиса антицепных функций началось с работ О. М. Касим-Заде [10, 11]. В [10] была доказана нижняя оценка $\Omega(n^{1/3})$ сложности линейной функции от n переменных, а следовательно и такая же нижняя оценка функции Шеннона в этом базисе. Также в [10] была установлена простейшая верхняя оценка $n + 1$ для сложности произвольной булевой функции от n переменных (эта оценка позже была улучшена на 1 ученицей О. М. Касим-Заде О. В. Подольской [37]). В [11] О. М. Касим-Заде доказал нижнюю оценку $\Omega(\sqrt{n}/\ln n)$ сложности линейной функции от n переменных, тем самым улучшив предыдущую нижнюю оценку функции Шеннона. В работе [38] О. В. Подольской доказано, что порядок роста функции Шеннона в базисе антицепных функций равен n .

О. В. Подольской также установлено [39], что в базисе, состоящем из всех антицепных функций и линейных функций от любого числа переменных, порядок роста функции Шеннона равен $\sqrt{n \log n}$. Тем самым, по-видимому, впервые показано, что существует базис, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями $\log_2 n$ и n .

Стоит отметить, что для функций многозначной логики систематических исследований задачи о схемной сложности над бесконечными базисами не проводилось. В этом направлении можно указать только отдельные результаты, в частности, работы [18, 19], в которых для базисов B_P и B_L , состоящих из всех функций, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \dots < k - 1$, а также из отрицания Поста, т. е. функции $x + 1 \pmod{k}$, в случае базиса B_P , и отрицания Лукасевича, т. е. функции $N_L(x) = k - 1 - x$, в случае базиса B_L , установлены точные значения функций Шеннона, имеющих, соответственно, вид $3 \log_3 n + \alpha_n$ и $2 \log_2 n + \beta_n$, где α_n и β_n — ограниченные последовательности.

3.2. Глубина в бесконечных базисах

Известно [24], что для любого конечного (полного) булева базиса B асимптотика роста функции Шеннона глубины при $n \rightarrow \infty$ имеет вид $D_B(n) = \alpha n + o(n)$, где $\alpha = (\log_2 m)^{-1}$ и m — наибольшее число существенных переменных у функций базиса B .

В первых работах, посвященных изучению глубины в случае бесконечных булевых базисов, были установлены асимптотики и порядки роста функции Шеннона глубины, в основном, для конкретных базисов, причем во всех примерах эти порядки роста оказывались равными либо

1 (например, для базиса всех булевых функций или для базиса пороговых функций [27]), либо $\log_2 n$ (см., например, [24]).

О. М. Касим-Заде [29, 31] установил, что функция Шеннона глубины для любого бесконечного базиса булевых функций по порядку роста равна либо 1, либо $\log_2 n$; эти результаты были усилены затем в [32].

В работе [31] установлено, что для каждого бесконечного базиса B булевых функций либо существует единственное простое p , для которого степени полиномов с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p для функций из B имеют максимальное значение, называемое характеристикой базиса и обозначаемое $\deg_p B$, либо такого простого p не существует — в этом случае базису приписывается бесконечная характеристика. В первом случае функция Шеннона глубины растет по порядку как $\log_2 n$, а во втором — ограничена сверху константой.

Также в работе [31] проводится сравнение бесконечных базисов по глубине. Базисы B_1 и B_2 называются эквивалентными по глубине, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что для всех булевых функций f выполняются неравенства $c_1 D_{B_1}(f) \leq D_{B_2}(f) \leq c_2 D_{B_1}(f)$. Базис B_1 считается слабее по глубине базиса B_2 , если существует такая константа c_3 , что для любой булевой функции f выполняется неравенство $D_{B_2}(f) \leq c_3 D_{B_1}(f)$ и базисы B_1 и B_2 не эквивалентны по глубине. Отношение эквивалентности базисов по глубине определяет разбиение всей совокупности базисов на следующие классы эквивалентности: класс E_0 всех конечных базисов, класс E^∞ всех бесконечных базисов бесконечной характеристики, и для каждого простого числа p , $p \geq 2$, класс E_p всех бесконечных базисов характеристики p . Число этих классов счётно. Множество всех классов эквивалентности базисов частично упорядочено по отношению «слабее по глубине»; более того, это множество является полной решёткой (структурой) с наименьшим элементом E_0 , наибольшим элементом E^∞ и счётным множеством заключённых строго между ними попарно не сравнимых элементов E_p при всевозможных простых $p \geq 2$.

Кроме того, О. М. Касим-Заде установил [32], что для произвольной отличной от констант и переменных булевой функции f ее глубина $D_B(f)$ над базисом B в случае бесконечного базиса бесконечной характеристики ограничена числами 1 и 6, а в случае бесконечного базиса конечной характеристики $\deg_p B$ удовлетворяет неравенствам $\lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil \leq D_B(f) \leq \lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil + 5$, где $\gamma = \deg_p B$, а $\deg_p f$ — степень полинома с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p , представляющего функцию f . Как следствие, для функции Шеннона глубины $D_B(n)$ в первом случае найдется константа β , $1 \leq \beta \leq 6$, такая, что при всех достаточно больших n выполняется равенство $D_B(n) = \beta$, а во втором случае при всех n справедливы неравенства $\lceil \log_\gamma n \rceil \leq D_B(n) \leq \lceil \log_\gamma n \rceil + 5$.

В 2007 г. О. М. Касим-Заде поставил задачу об исследовании глубины функций многозначной логики в конечных и бесконечных базисах своему ученику А. В. Кочергину, которому в конце концов удалось полностью описать качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины для случая конечных и бесконечных базисов, состоящих из функций k -значной логики, где $k \geq 3$ [15, 16, 17]. А. В. Кочергиным в [16] было установлено, что для произвольного конечного базиса B функций k -значной логики справедливо асимптотическое равенство $D_B(n) \sim cn$, где константа c выражается через логарифм некоторого алгебраического числа и зависит только от базиса, а также предложен алгоритм нахождения по базису указанной константы. Что касается бесконечных базисов, то в [15] было доказано, что порядок роста функции Шеннона глубины либо равен 1, либо равен $\log_2 n$. Тем самым было показано что эффекты, описанные для случая булевых функций, распространяются и на случай функций k -значной логики, где $k \geq 3$.

4. Работы, не относящиеся к выделенным циклам

Круг научных интересов О. М. Касим-Заде был необычайно широк и, конечно, не ограничивался рамками указанных выше направлений исследований. Несомненно, Октая Мурадovichа, как ученика О. Б. Лупанова, интересовали, в первую очередь, задачи теории сложности во многих ее проявлениях, но эти задачи зачастую приводили его к задачам из совершенно других областей дискретной математики и математической кибернетики, а иногда и выводили за ее пределы. И многие из таких задач О. М. Касим-Заде решил.

4.1. Прочие работы по теории сложности

В работе [5] О. М. Касим-Заде для известной задачи о монотонной сложности многочленов (минимальном числе операций умножения на положительные числа, сложения и умножения, достаточном для вычисления заданного многочлена от этих переменных с неотрицательными коэффициентами) в случае реализации многочленов с коэффициентами из множества $\{0, 1\}$, имеющими по каждой переменной степень 1, установлен следующий результат. Сложность многочлена от n переменных, содержащего $2^{n/2} - 1$ слагаемое и задаваемого проверочной матрицей исправляющего две ошибки двоичного кода Боуза—Чоудхури—Хоквингема, имеющей размер $n \times (2^{n/2} - 1)$, имеет порядок роста $2^{n/2}$, при этом минимально возможное число операций сложения, достаточное для его вычисления, в точности равно $2^{n/2} - 2$.

Основываясь на идеях получения уже упоминавшейся асимптотически точной верхней оценки сложности КМОП-схем [7], О. М. Касим-Заде установил [22] асимптотику функции Шеннона сложности реализации функций k -значной логики в классе алгоритмов, которые можно рассматривать как обобщение на k -значный случай модели бинарных программ, изучавшейся В. А. Кузьминым [20] и являющейся, в свою очередь, близкой к бинарным программам К. Ли [53], машинам Шепердсона—Стерджиса [56] и схемам программ А. А. Ляпунова [29].

Ряд интересных результатов О. М. Касим-Заде получил (см., например, [17, 34]) также в известной по крайней мере с середины 1930-х годов [13, задача 60] задаче о построении идеализированных электрических схем из единичных сопротивлений наименьшей сложности, которая ставится следующим образом. Имеется неограниченный запас электрических сопротивлений одинаковой величины, скажем, 1 Ом (единица измерения сопротивления не важна); строятся двухполюсные схемы: выводы сопротивлений произвольным образом присоединяются друг к другу и к двум внешними зажимами — полюсам схемы; требуется создать между полюсами заданное сопротивление R . Сопротивление схемы отыскивают по известным формальным правилам электротехнических расчетов (законы Кирхгофа и Ома). Под *сложностью схемы* понимается число содержащихся в ней единичных сопротивлений. Задача состоит в том, чтобы для всякого рационального числа $R > 0$ найти величину $L(R)$ — минимальное число сопротивлений в схемах с сопротивлением R . Эта задача при всей простоте и естественности формулировки весьма трудна. До работ О. М. Касим-Заде точные значения сложности были известны для небольшого количества конкретных рациональных чисел (найжены перебором), и лишь для двух тривиальных бесконечных последовательностей: всех натуральных чисел и всех чисел, обратных к натуральным.

В работе [34] предложен метод, позволяющий при некоторых условиях получать точные значения сложности для различных бесконечных последовательностей чисел. В частности, с его помощью в работе найдены точные значения сложности всех рациональных чисел, выражающихся дробями с числителями или знаменателями, не превосходящими 6. Предлагаемый в [34] метод получения нижних оценок основан на некоторых соображениях, представляющих и самостоятельный интерес.

О. М. Касим-Заде также предъявил (см., например, [17]) несколько бесконечных серий ра-

циональных чисел с одновременно растущими числителями и знаменателями, для которых в классе параллельно-последовательных схем (π -схем) установил точные значения сложности. В частности, им доказаны равенства

$$L_{\pi}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = n, \quad L_{\pi}\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n-1}}\right) = n, \quad L_{\pi}\left(1 + \frac{1}{s_n}\right) = n,$$

где f_n — число Фибоначчи с номером n , $s_n = f_m f_{m+1}$ при $n = 2m - 1$ и $s_n = f_m f_{m+2}$ при $n = 2m$.

Стоит дополнительно отметить, что методы, разработанные О. М. Касим-Заде при решении задач о построении минимальных по числу единичных сопротивлений электрических схем, позволили также существенно продвинуться [24] в занятой задаче о минимальных разбиениях прямоугольников с соизмеримыми сторонами на квадраты (про эту задачу см., например, [46]).

4.2. Исследования обобщенных инвариантных классов

Понятие инвариантного (относительно подстановки констант) класса было введено С. В. Яблонским, детально исследовавшим свойства таких классов с дескриптивной и метрической точек зрения [44]. Эти исследования были продолжены Ю. В. Кузнецовым, рассматривавшим классы функций, инвариантные относительно отождествления переменных, а также другие, более общие виды инвариантных классов [22, 23].

Класс Q булевых функций называется *F -инвариантным классом*, если вместе с каждой принадлежащей ему функцией g содержит все функции, получающиеся из этой функции с помощью следующих операций:

- 1) подстановка одноместных функций типа F ;
- 2) переименование переменных без отождествления;
- 3) добавление или изъятие несущественных переменных.

Пусть H — класс всех одноместных булевых функций: $H = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, G — класс всех монотонных одноместных булевых функций: $G = \{0, 1, x\}$, C — класс констант: $C = \{0, 1\}$. В этих обозначениях C -инвариантные классы — это в точности инвариантные классы С. В. Яблонского. Исследованию H -инвариантных и G -инвариантных классов, т. е. классов, инвариантных относительно подстановок произвольных одноместных функций, и классов, инвариантных относительно подстановок монотонных одноместных функций, посвящены работы [13, 28].

С дескриптивной точки зрения имеется полная аналогия между F -инвариантными классами и инвариантными классами Яблонского: для F -инвариантных классов аналогичным образом вводятся понятия порождающего элемента, пучка, и дается описание класса как дополнения к объединению пучков неприводимой системы порождающих элементов. Поэтому О. М. Касим-Заде основное внимание уделил изучению метрических свойств F -инвариантных классов и прежде всего выяснению возможных значений параметра σ_Q , определяемого для F -инвариантного класса Q так же как и параметр инвариантного класса Яблонского:

$$\sigma_Q = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Q_n|},$$

где Q_n — множество всех функций из класса Q от n фиксированных переменных.

С. В. Яблонским было показано [44], что равенство $\sigma_Q = 1$ имеет место в том и только том случае, когда C -инвариантный класс Q совпадает с классом P_2 всех булевых функций, и что для всякого действительного числа σ , $0 \leq \sigma < 1$, существует континуальное по мощности семейство попарно различных C -инвариантных классов Q , удовлетворяющих соотношению $\sigma_Q = \sigma$.

Наверное, наиболее важными результатами работ [13, 28] являются следующие два утверждения, устанавливающие верхние границы для числа функций в F -инвариантных классах в случае, когда эти классы не совпадают с P_2 :

1. Если H -инвариантный класс Q булевых функций не совпадает с P_2 , то существует действительное число δ , $\delta > 0$, такое, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n| < 2^{2^{(1-\delta)n}}.$$

2. Если G -инвариантный класс Q булевых функций не совпадает с P_2 , то существует действительное число δ , $\delta > 0$, такое, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n| < 2^{2^n/n^\delta}.$$

Из последнего утверждения непосредственно вытекает следствие: всякий G -инвариантный класс (а, следовательно, и всякий H -инвариантный класс) либо совпадает с P_2 , либо является нулевым (т. е. имеющим параметр 0).

Это следствие имеет прямое отношение к одной давней проблеме, касающейся инвариантных классов. В первой половине 1960-х годов О. Б. Лупановым была высказана гипотеза, в соответствии с которой всякий класс булевых функций, инвариантный относительно подстановки констант и отождествления переменных, либо совпадает с классом P_2 всех булевых функций, либо является нулевым. Следствие доказывает эту гипотезу. Этот результат был опубликован в [13]. Независимо от О. М. Касим-Заде справедливость этой гипотезы была установлена Г. Г. Аманжаевым [1].

5. Работы комбинаторно-графовой направленности

На самом деле многие уже упоминавшиеся работы О. М. Касим-Заде в той или иной степени используют комбинаторные рассуждения и/или графовый аппарат и с достаточными основаниями могли быть включены в этот раздел. В частности, доказательства всех мощностных оценок, коих в работах О. М. Касим-Заде немало, конструкции из верхних оценок сложности в бесконечных базисах, большинство результатов из последних двух разделов носят комбинаторный характер. И все-таки несколько результатов просто нельзя было не включить в данный раздел. Но даже для этих результатов исходные постановки возникли при решении различных задач синтеза и сложности управляющих систем.

Так, например, рассматриваемая в [19] комбинаторная задача покрытия n -мерного булева куба центрированными антицепями, т. е. такими антицепями, что в наборах каждой антицепи (кроме состоящей только из нулевого набора) есть общая единичная компонента, возникла при изучении ранга неявных представлений булевых функций над замкнутыми классами монотонных функций, не меньших какой-либо своей переменной. Однако, эта задача имеет и самостоятельное значение. О. М. Касим-Заде установил [19], что для всякого n , $n \geq 1$, наименьшее число центрированных антицепей, объединение которых покрывает n -мерный булев куб, равно $n \lfloor \log_2 n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 2$, а также для каждого n в явном виде построил минимальное покрытие. Стоит отметить, что полученное выражение для мощности минимального покрытия возникает и в других разделах дискретной математики и математической кибернетики, в частности, при подсчете минимального числа замыкающих контактов для некоторых симметрических булевых функций или при нахождении средней длины оптимального двоичного кода в случае, когда вероятности кодируемых символов близки друг к другу.

Отдельно стоит сказать про написанное О. М. Касим-Заде учебное пособие «Одна экстремальная задача комбинаторного анализа» [26], в котором рассматривается ряд вопросов, начиная с простейших фактов и заканчивая нерешенными проблемами, касающихся одной из важнейших экстремальных задач комбинаторного анализа и теории графов, известной как проблема Заранкевича. В общем случае проблема Заранкевича заключается в нахождении наибольшего натурального числа $N = N_{a,b}(m, n)$, такого, что существует булева матрица размера $m \times n$ с N единицами, не содержащая единичных подматриц размера $a \times b$, а также

в построении таких булевых матриц. В случае квадратных симметрических матриц с нулями на главной диагонали общая задача Заранкевича превращается в проблему Заранкевича для графов, заключающуюся в нахождении наибольшего возможного числа ребер в графах на n вершинах, не содержащих подграфов, изоморфных полному двудольному графу $K_{a,b}$, и в построении таких графов. Проблема Заранкевича сыграла немалую роль при возникновении и развитии одного из важнейших разделов дискретной математики — теории дискретных экстремальных задач, особенно, экстремальной теории графов.

Изложенный в пособии материал, в основном, соответствует содержанию специальных курсов лекций, читавшихся О.М. Касим-Заде по этой теме на протяжении нескольких лет на механико-математическом факультете МГУ. В этом пособии ярко проявилось умение Октая Мурадовича постепенно, начиная с простых и понятных примеров, подводить читателя к все более и более серьезным утверждениям, выделять узловые моменты и подробно их объяснять, устанавливать общую сущность казалось бы совсем разных объектов, да и просто доступно, красиво и при этом предельно точно изъясняться.

6. Научные достижения учеников

Октай Мурадович получил целый ряд фундаментальных и ярких результатов. При этом, к сожалению, многие результаты своих исследований не успел опубликовать, многое не успел завершить или сделать... Но остались его принципиальные продвижения в важнейших направлениях, разработанные им методы, интересные перспективные идеи и, конечно, ученики.

О работах некоторых учеников О.М. Касим-Заде уже говорилось — упоминавшиеся результаты Е.А. Ореховой и М.В. Старостина в области исследования неявной полноты систем и построения различных критериальных семейств функций многозначной логики, работы Е.В. Михайлец по изучению роста ранговых функций для различных систем функций многозначной логики, достижения О.В. Подольской в изучении возможных порядков роста функции Шеннона схемной сложности булевых функций над бесконечными базисами, исследования А.В. Кочергина по глубине функций многозначной логики над конечными и бесконечными базисами являются продолжением и развитием результатов научного руководителя.

Направления научных исследований других учеников О.М. Касим-Заде не имеют такой явной видимой связи с областями, к которым относятся основные результаты научного руководителя, но, безусловно, отражают его научные интересы. Вне всякого сомнения, и в этих областях О.М. Касим-Заде был высококлассным специалистом. И результаты учеников, о которых речь пойдет ниже, еще раз подтверждают как широту научного кругозора О.М. Касим-Заде, так и глубину его познаний в различных разделах дискретной математики и математической кибернетики и близких областях математики. Даже по опубликованным работам (а доведено до диссертационных работ или опубликовано так же как и у самого научного руководителя, к сожалению, не все) видно, что результаты учеников относятся к самым разным разделам дискретной математики, начиная с вероятностного направления в дискретной математике (А.Д. Яшунский) и применения теории формальных языков и грамматик в различных задачах дискретной математики (А.Д. Яшунский и А.В. Кочергин) и заканчивая изучением свойств ветвящихся цепных дробей (Н.Р. Закиров), тестовыми задачами на графах (Е.В. Дебрев) и и вопросами сложности как для классической задачи вычисления систем функций k -значной логики (Д.И. Ермакова), так и для оригинальной задачи реализации функций действительного переменного сетями из интеграторов и сумматоров (А.И. Проскураков).

Е.В. Дебревым в работах [7, 8, 9] исследована задача о построении минимальных безусловных реберных тестов, которая заключается в следующем. Пусть $\mathcal{G}(n)$ — произвольное семейство простых графов на n вершинах, а G — заранее неизвестный фиксированный граф

из $\mathcal{G}(n)$. Требуется распознать этот граф с помощью ответов на вопросы: смежны или не смежны в графе G две предъявленные вершины. После получения ответа на все заданные вопросы остальные ребра в графе G должны распознаваться однозначно.

Д. И. Ермакова изучала сложность реализации системы всех констант схемами из функциональных элементов в произвольном полном базисе функций k -значной логики. В ее работе [10] установлено, что в случае, когда значность логики равна 3, а в базис могут входить только функции не более чем от двух переменных, максимально возможная сложность равна 9.

В [7] установлено, что для семейства всех гамильтоновых циклов объем минимального безусловного теста равен $n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$, и дана явная характеристика минимальных тестов. В [8] найдено точное значение величины объема минимального безусловного теста для всех семейств графов, являющихся объединением клик порядков p и $n-p$, а также охарактеризованы все минимальные тесты. В [9] для задачи об объеме минимальных безусловных реберных тестов для регулярных, т. е. замкнутых относительно изоморфизма, семейств графов предложена классификация регулярных семейств графов по порядку роста величины объема минимального безусловного реберного теста.

В работе [40] А. И. Проскуряков исследовал вопрос о сложности реализации функций действительного переменного посредством сетей из интеграторов и сумматоров, рассмотренных в работе К. Шеннона [55]. Ему удалось получить точные нижние оценки сложности реализации индивидуальных функций и указать функции, имеющие сколь угодно высокую заданную сложность реализации.

Н. Р. Закиров изучал вопросы представления чисел ветвящимися цепными дробями. В [11, 12] он установил, что всякое положительное алгебраическое число можно представить ветвящейся цепной дробью с целыми положительными элементами. Им предложен алгоритм построения такой ветвящейся цепной дроби, позволяющий выписывать ее в явном виде по многочлену с целыми коэффициентами, корнем которого является заданное алгебраическое число. Полученный результат естественным образом распространяется на все действительные алгебраические числа, так как любое из них можно получить прибавлением некоторого целого к подходящему положительному алгебраическому числу.

Работа [47] — одна из первых работ А. Д. Яшунского — достаточно точно характеризует сферу его научных интересов. В этой работе исследовались случайные булевы выражения, получаемые случайной независимой подстановкой констант 1 и 0 с вероятностями соответственно p и $1-p$ в случайные неповторные формулы над заданным базисом. Показано, что для любого конечного базиса при любом p , $0 < p < 1$, вероятность, с которой построенные выражения принимают значение 1, стремится с ростом длины выражений к некоторому конечному пределу $P_1(p)$. Получено явное представление функции вероятности $P_1(p)$ для всех конечных базисов, изучены аналитические свойства этой функции, исследовано её поведение в зависимости от свойств базиса. В дальнейшем фокус исследований сместился на вероятностные свойства неповторных формул в различных системах функций k -значной логики, для которых упомянутая выше функция вероятности $P_1(p)$ по сути является некоторой осредненной характеристикой. В этой области А. Д. Яшунским получен ряд интересных и важных результатов о приближении по распределению случайных величин в системах, получаемых путем применения операций из заданного множества к начальному набору независимых случайных величин. В частности, задача описания аппроксимируемых случайных величин полностью решена для систем операций, представляющих собой замкнутый класс булевых функций [57]. В случае произвольного k подробно исследованы аппроксимирующие возможности операций сложения и умножения по модулю k при преобразованиях k -значных случайных величин, и, в частности, установлено, что совокупность полиномиальных преобразований невырожденных случайных величин по модулю k содержит аппроксимации произвольных k -значных случайных величин тогда и только тогда, когда k — степень простого числа [48]. Наконец, выделены

классы систем операций, в которых множество аппроксимируемых распределений имеет единственную предельную точку, т. е. в которых в определенном смысле выполняется предельный вероятностный закон [49].

Перечисление всех результатов А. Д. Яшунского заняло бы очень много места. Поэтому, наверное, уместно просто дать ссылку на докторскую диссертацию [50], которая совсем недавно была защищена в МГУ и в которой содержатся постановки основных решаемых им задач, а также обзор полученных результатов.

Отрадно, что многие идеи Октая Мурадовича Касим-Заде и разработанные им методы продолжают работать в исследованиях других авторов, в том числе его учеников.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ О. М. КАСИМ-ЗАДЕ

1. Об одновременной минимизации сложности и мощности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978. С. 215–220.
2. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 4. С. 797–800.
3. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 117–179.
4. О мощности схем в базисах некоторых типов // Дискретная математика и математическая кибернетика. Серия «Вопросы кибернетики». Т. 86. М.: ВЦ АН СССР, 1982. С. 77–93..
5. О сложности монотонных многочленов // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 136–138.
6. О влиянии базиса на активность схем из функциональных элементов // Труды Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 143–145.
7. О сложности реализации булевых функций в одной модели электронных схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 145–160.
8. Об одной мере активности схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 218–228.
9. Kassim-Zade O. M. On some complexity measures for Boolean functions // Complexity and Realization of Boolean Functions. Dagstuhl-Seminar-Report № 45, 24.8–28.8.92. 1992.
10. О сложности схем в одном бесконечном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1994. № 6. С. 40–44.
11. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 7–20.
12. О неявной выразимости булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.
13. О классах булевых функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 79–82.
14. О синтезе сетей из функциональных элементов // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 2. С. 159–161.

15. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.
16. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 133–188.
17. О сложности схем из единичных сопротивлений и о некоторых свойствах чисел Фибоначчи // Аналитическая теория чисел и приложения. Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 218. С. 233–247.
18. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1997. № 4. С. 59–61.
19. О минимальных покрытиях булева куба центрированными антицепями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 1997. Т. 4, № 3. С. 9–17.
20. О сложности параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. М.: Наука, 1998. С. 85–160.
21. О мощности индивидуальных функций // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1998. С. 63–65.
22. О сложности реализации функций в одном классе алгоритмов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1999. С. 25–30.
23. О поведении функций Шеннона сложности параметрических представлений булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 3. С. 66–68.
24. О минимальных разбиениях плоских прямоугольников на квадраты // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 263–265.
25. Об одном методе получения оценок сложности схем над бесконечными базисами // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 247–254.
26. Одна экстремальная задача комбинаторного анализа. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004. ISBN 978-5-458-26668-0. 88 с.
27. Об одном методе получения оценок сложности схем над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2004. Т. 11, № 2. С. 41–65.
28. О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 2006. С. 9–34.
29. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 1. С. 18–21.
30. О неявной полноте в k -значной логике // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 10–14.
31. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2007. Т. 14, № 1. С. 45–69.

32. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 6. С. 55–57.
33. О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 3. С. 55–57.
34. О точных значениях сложности чисел при реализации схемами из единичных сопротивлений // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова. М., 2016. С. 134–137.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аманжаев Г. Г. О замыкании ненулевого инвариантного класса Яблонского по операции отождествления переменных // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1995. №3. С. 76–79.
2. Вайнцивайг М. Н. О мощности схем из функциональных элементов // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 2. С. 320–323.
3. Гилберт Э. Н. Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций // Кибернетический сборник. Вып. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. С. 175–188.
4. Горяшко А. П. Энергетические оценки сложности функционирования логических сетей // Известия АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1969. № 2. С. 86–95.
5. Горяшко А. П. Логические схемы и реальные ограничения. М.: Энергоиздат, 1982.
6. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
7. Дебрев Е. В. Об одной задаче комбинаторного поиска // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 8–17.
8. Дебрев Е. В. О различении графов из некоторых множеств посредством безусловных реберных тестов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 177–192.
9. Дебрев Е. В. О безусловных реберных тестах для некоторых семейств графов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 8–17.
10. Ермакова Д. И. О сложности реализации системы констант P_3 в некоторых базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. С. 137–158.
11. Закиров Н. Р. О представлении произвольного алгебраического числа периодической ветвящейся цепной дробью // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 65–78.
12. Закиров Н. Р. О представлении алгебраических чисел периодическими ветвящимися цепными дробями // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 4. С. 24–29.
13. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly». М.: Мир, 1977.

14. Карпова Н. А. О некоторых свойствах функций Шеннона // Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 663–674.
15. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики в бесконечных базисах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 1. С. 22–26.
16. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики в конечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 1. С. 56–59.
17. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики над произвольными базисами // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, № 6. С. 155–158.
18. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, № 1. С. 42–74.
19. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О схемной сложности функций k -значной логики в одном бесконечном базисе // Прикладная математика и информатика. 2018. № 58. С. 21–34.
20. Кузьмин В. А. Оценка сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Вып. 29. Новосибирск, 1976. С. 11–39.
21. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
22. Кузнецов Ю. В. О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 780–785.
23. Кузнецов Ю. В. Исследование инвариантных классов, связанных с функциональными системами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ, 1987.
24. Ложкин С. А. Асимптотическое поведение функций Шеннона для задержек схем из функциональных элементов // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 6. С. 939–951.
25. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Сер. радиофизика. 1958. № 1. 120–140.
26. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики, вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.
27. Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики, вып. 26. М.: Наука, 1973. С. 109–140.
28. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
29. Ляпунов А. А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики, вып. 1. М.: Физматгиз, 1958. С. 46–74.
30. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 6. С. 917–919.

31. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем булевых функций // Докл. АН СССР. 1963. Т 150. № 3. С. 477–479.
32. Михайлец Е. В. О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 65–67.
33. Нечипорук Э. И. О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Проблемы кибернетики, вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 123–160.
34. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики, вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 49–62.
35. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 27–74.
36. Орехова Е. А. О критерии неявной шэфферовости в трёхзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2003. Т. 10, № 3. С. 82–105.
37. Подольская О. В. О нижних оценках сложности схем в базисе антицепных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 2. С. 17–23.
38. Подольская О. В. Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискретная математика. 2015. Т. 27, № 3. С. 95–107.
39. Подольская О. В. Об оценках функций Шеннона сложности схем в некоторых бесконечных базисах // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова. М., 2016. С. 150–152.
40. Проскуряков А. И. О сложности реализации некоторых функций сетями из элементов, осуществляющих аналитические операции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. С. 262–269.
41. Сапоженко А. А., Ложкин С. А. Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12, вып. 1. С. 42–47.
42. Старостин М. В. Неявно предполные классы и критерий неявной полноты в трехзначной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 2. С. 56–59.
43. Старостин М. В. Критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах предполных классов [Электронный ресурс] // arXiv.org. URL: <https://arxiv.org/abs/2103.16631> (дата обращения: 30.03.2021)
44. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1959. С. 75–121.
45. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
46. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? М.: Наука, 1968.
47. Яшунский А. Д. Об асимптотике вероятности значений случайных булевых выражений // Дискретный анализ и исследование операций. 2006, Т. 13, № 2. 59–99.

48. Яшунский А. Д. Полиномиальные преобразования случайных величин на конечных множествах // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 6. С. 951–954.
49. Яшунский А. Д. О необходимых условиях предельных вероятностных теорем в конечных алгебрах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493, № 1. С. 47–50.
50. Яшунский А. Д. Исследования по теории итеративных систем, порождаемых конечными случайными величинами. Арифметический и комбинаторно-логический подход. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М., 2021. (URL: <https://istina.msu.ru/dissertations/364891994/>)
51. Burks A. W., Wright J. B. Theory of logical nets // Proc. IRE. 1953. V. 41, № 10. P. 1357–1365.
52. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. V. 101, № 3. P. 427–430.
53. Lee C. Y. Representation of switching circuits by binary-decision programs // Bell System Technical Journal. 1959. V. 38, № 4. P. 985–1000.
54. Muller D. E. Complexity in electronic switching circuits // IRE Trans. on Electronic Computers. 1958. V. EC-5, N 1. P. 15–19.
55. Shannon C. E. Mathematical theory of the differential analyzer // J. Math, and Phys. 1941. V. 20, № 4. P. 337–354.
56. Shepherdson J., Sturgis H. Computability of recursive functions // Journal of the Association for Computer Machinery. 1963. V. 10, № 2. P. 217–255.
57. Yashunsky A. D. Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions. Algebra Univers. 2019. V. 80, № 5.

LIST OF THE MAIN WORKS OF O. M. KASIM-ZADEH

1. Kasim-Zade, O. M. 1978, “Simltaneous minimization of the complexity and power of circuits of functional elements”, *Probl. Kibern.*, vol. 33, pp. 215–220.
2. Kasim-Zade, O. M. 1980, “On a measure of the complexity of schemes of functional elements”, *Sov. Math. Dokl.*, vol. 20, pp. 203–206.
3. Kasim-Zade, O. M. 1981, “On a measure of complexity of circuits of functional elements”, *Probl. Kibern.*, vol. 38, pp. 117–179.
4. Kasim-Zade, O. M. 1982, “On the power of circuits in bases of certain types”, *Vopr. Kibern.*, vol. 86, pp. 77–93.
5. Kasim-Zade, O. M. 1986, “On the complexity of monotone polynomials”, *Proc. of All-Union Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 136–138.
6. Kasim-Zade, O. M. 1989, “Effect of a basis on the activity of circuits consisting of functional elements”, *Proc. of All-Union Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 143–145.
7. Kasim-Zade, O. M. 1989, “On complexity of realization of Boolean functions in a model of electronic circuits”, *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 2, pp. 145–160.

8. Kasim-Zade, O.M. 1992, "On a measure of activity of schemes of functional elements", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 4, pp. 218–228.
9. Kassim-Zade, O.M. 1992, "On some complexity measures for Boolean functions", *Complexity and realization of Boolean functions*, Dagstuhl-Seminar-Repot № 45, 24.8–28.8.92.
10. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On the complexity of circuits in an infinite basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 49, no. 6, pp. 37–40.
11. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On the complexity of the realization of Boolean functions by circuits in an infinite basis", *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, vol. 2, no. 1, pp. 7–20.
12. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On implicit expressibility of Boolean functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 2, pp. 42–45.
13. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On classes of Boolean functions that are invariant with respect to the substitution of functions of one variable", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 3, pp. 46–48.
14. Kasim-Zade, O.M. 1996, "On the synthesis of networks of functional elements", *Dokl. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 352–354.
15. Kasim-Zade, O.M. 1996, "Implicit expressibility in two-valued logic and cryptoisomorphisms of two-element algebras", *Dokl. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 366–368.
16. Kasim-Zade, O.M. 1996, "On a metric characteristic of implicit and parametric representations of Boolean functions", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 6, pp. 133–188.
17. Kasim-Zade, O.M. 1997, "On the complexity of schemes of unit resistances, and some properties of Fibonacci numbers", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 228–242.
18. Kasim-Zade, O.M. 1997, "A general upper bound for the complexity of schemes in an arbitrary infinite complete basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 52, no. 4, pp. 47–49.
19. Kasim-Zade, O.M. 1997, "On minimal covering of the Boolean cube by centered antichains", *Diskret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, vol. 4, no. 3, pp. 9–17.
20. Kasim-Zade, O.M. 1998, "On complexity of parametric representations of Boolean functions", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 7, pp. 85–160.
21. Kasim-Zade, O.M. 1998, "On the power of individual functions", *Proc. of Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 63–65.
22. Kasim-Zade, O.M. 1999, "On complexity of functions realization in one class of algorithms", *Proc. Interstate School-seminar "Synthesis and complexity of control systems"*, pp. 25–30.
23. Kasim-Zade, O.M. 2001, "On the behavior of Shannon functions for the complexity of parametric representations of Boolean functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 56, no. 3, pp. 43–45.
24. Kasim-Zade, O.M. 2001, "On minimal partitions of flat rectangles into squares", *Proc. VII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 263–265.
25. Kasim-Zade, O.M. 2002, "On a method for obtaining bounds for the complexity of schemes over infinite-dimensional bases", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 11, pp. 247–254.
26. Kasim-Zade, O.M. 2004, *Odna ekstremal'naya zadacha kombinatornogo analiza* [One extreme combinatorial analysis problem], Mech-mat MGU, Moscow.

27. Kasim-Zade, O.M. 2004, "On a method for obtaining bounds on the circuit complexity in an arbitrary infinite basis", *Diskret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, vol. 11, no. 2, pp. 41–65.
28. Kasim-Zade, O.M. 2006, "On metric properties of generalized invariant classes", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 15, pp. 9–34.
29. Kasim-Zade, O.M. 2007, "On the depth of Boolean functions realized by circuits over an arbitrary basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 1, pp. 18–21.
30. Kasim-Zade, O.M. 2007, "Implicit completeness in k -valued logic", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 3, pp. 90–94.
31. Kasim-Zade, O.M. 2008, "On the depth of Boolean functions over an arbitrary infinite basis", *J. Appl. Industr. Math.*, vol. 2, no. 2, pp. 196–210.
32. Kasim-Zade, O.M. 2012, "Depth of Boolean functions realized by circuits over an arbitrary infinite basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 1, pp. 69–70.
33. Kasim-Zade, O.M. 2013, "Orders of growth of Shannon functions for circuit complexity over infinite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 3, pp. 170–172.
34. Kasim-Zade, O.M. 2016, "On the exact values of complexity of numbers when implemented by circuits of unit resistances", *Proc. Academician O. B. Lupanov XII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 134–137.

REFERENCES

1. Amanzhaev, G. G. 1995, "On the closure of the nonzero invariant Yablonskiĭ class by the variable identification operation", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 3, pp. 43–45.
2. Vaĭncvaĭg, M. N. 1961, "On the power of networks of functional elements", *Soviet Physics Dokl.*, vol. 6, pp. 545–547.
3. Gilbert, E. N. 1954, "Lattice Theoretic Properties of Frontal Switching Functions", *J. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 57–67.
4. Goryashko, A. P. 1969, "Energy bounds of complexity of functioning of logical networks", *Izvestiya AN SSSR. Ser. Tekhn. Kibernetika*, no. 2, pp. 86–95.
5. Goryashko, A. P. 1982, *Logicheskie skhemy i real'nye ogranicheniya* [Logic Circuits and Real Restrictions], Moscow, Energoizdat.
6. Danil'chenko, A. F. 1977, "On parametric expressibility of functions of three-valued logic", *Algebra i logika*, vol. 16, no. 4, pp. 397–416.
7. Debrev, E. B. 2002, "On a combinatorial search problem", *Discrete Math. Appl.*, vol. 12, no. 4, pp. 325–335.
8. Debrev, E. B. 2002, "On distinguishing graphs from certain families by unconditional edge tests", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 11, pp. 177–192.
9. Debrev, E. B. 2003, "On unconditional edge tests for some families of graphs", *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, vol. 10, no. 4, pp. 8–30.
10. Ermakova, D. I. 2008, "On the complexity of realization a system of constants of P_3 in some bases", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 17, pp. 137–158.

11. Zakirov, N. R. 2006, "On representing an arbitrary algebraic number as a periodic branching continuous fraction", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 15, pp. 65–78.
12. Zakirov, N. R. 2007, "On the representation of algebraic numbers by periodic branching continued fractions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 4, pp. 148–152.
13. Alekseyev, V. M. (ed.) 1977, *Izbrannye zadachi iz zhurnala «American Mathematical Monthly»* [Favorites problems from the journal «American Mathematical Monthly»], Mir, Moscow.
14. Karpova, N. A. 1970, "Some properties of Shannon functions", *Math. Notes*, vol. 8, no. 5, pp. 843–849.
15. Kochergin, A. V. 2011, "On the depth of functions of k -valued logic in infinite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 66, no. 1, pp. 20–24.
16. Kochergin, A. V. 2013, "Depth of functions of k -valued logic in finite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 1, pp. 77–79.
17. Kochergin, A. V. 2018, "On the depth of k -valued logic functions over arbitrary bases", *J. Math. Sci.*, vol. 233, no. 1, pp. 100–102.
18. Kochergin, V. V. & Mikhailovich, A. V. 2018, "On the complexity of multivalued logic functions over some infinite basis", *J. Appl. Ind. Math.*, vol. 12, pp. 40–58.
19. Kochergin, V. V. & Mikhailovich, A. V. 2019, "Circuit complexity of k -valued logic functions in one infinite basis", *Comput. Math. and Mod.*, vol. 30, no. 1, pp. 13–25.
20. Kuz'min, V. A. 1976, "Bound of realization complexity of logic algebra functions by the simplest types of binary programs", *Metody diskretnogo analiza v teorii kodov i skhem*, vol. 29, pp. 11–39.
21. Kuznetsov, A. V. 1979, "On the means for detecting non-derivability or inexpressibility", *Logicheskij Vывod*, Nauka, Moscow, pp. 5–33.
22. Kuznetsov, Yu. V. 1986, "On classes of Boolean functions which are invariant with respect to identification of variables", *Sov. Math., Dokl.*, vol. 34, pp. 339–344.
23. Kuznetsov, Yu. V. 1987, *Issledovanie invariantnykh klassov, svyazannykh s funkcional'nymi sistemami* [Study of invariant classes related to functional systems], Dissertation for the Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, MGU, Moscow.
24. Lozhkin, S. A. 1976, "Asymptotic behavior of Shannon functions for the delays of schemes of functional elements", *Math. Notes*, vol. 19, no. 6, pp. 548–555.
25. Lupanov, O. B. 1958, "A method of circuit synthesis", *Izvestiya VUZ, Radiofiz.*, vol. 1, pp. 120–140.
26. Lupanov, O. B. 1963, "On the synthesis of some classes of control systems", *Probl. Kibern.*, vol. 10, pp. 63–97.
27. Lupanov, O. B. 1973, "The synthesis of circuits from threshold elements", *Probl. Kibern.*, vol. 26, pp. 109–140.
28. Lupanov, O. B. 1984, *Asimptoticheskie Ocenki Slozhnosti Upravlyayushchih Sistem* [Asymptotic Estimates of Complexity of Control Systems], MSU, Moscow.
29. Lyapunov, A. A. 1958, "On logic circuits of programs", *Probl. Kibern.*, vol. 1, pp. 46–74.

30. Markov, A. A. 1958, "On the inversion complexity of a system of functions", *J. ACM*, vol. 5, no. 4, pp. 331–334.
31. Markov, A. A. 1963, "On the inversion complexity of systems of Boolean functions", *Sov. Math. Dokl.*, vol. 4, pp. 694–696.
32. Mikhailets, E. V. 2008, "A rank of implicit representations over a class of three-valued logic functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 63, no. 5, pp. 221–223.
33. Nechiporuk, E. I. 1962, "On the complexity of circuits in some bases containing nontrivial elements with zero weights", *Probl. Kibern.*, vol. 8, pp. 123–160.
34. Nechiporuk, E. I. 1964, "On a synthesis of schemes of threshold elements", *Probl. Kibern.*, vol. 11, pp. 49–62.
35. Orekhova, E. A. 2003, "On a criterion for implicit completeness in three-valued logic", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 12, pp. 27–74.
36. Orekhova, E. A. 2003, "A criterion for the implicit Sheffer property in three-valued logic", *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, vol. 10, no. 3, pp. 82–105.
37. Podolskaya, O. V. 2013, "Lower estimates of circuit complexity in the basis of antichain functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 2, pp. 98–103.
38. Podolskaya, O. V. 2016, "Circuit complexity of symmetric Boolean functions in antichain basis", *Discrete Math. Appl.*, vol. 26, no. 1, pp. 31–39.
39. Podolskaya, O. V. 2016, "On bounds of Shannon functions of circuit complexity in some infinite bases", *Proc. Academician O. B. Lupanov XII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 150–152.
40. Proskuryakov, A. I. 2002, "On the complexity of the realization of some functions by networks of elements that perform analytic operations", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 11, pp. 262–269.
41. Sapozhenko, A. A. & Lozhkin, S. A. 1983, "Methods of logical design and evaluation of the complexity of circuits on complementary MOSFETs", *Mikroelektronika*, vol. 12, no. 1, pp. 42–47.
42. Starostin, M. V., 2018, "Implicit precomplete classes and a criterion of implicit completeness in the three-valued logic", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 73, no. 2, pp. 82–84.
43. Starostin, M. V. 2021, "Implicit completeness criterion in three-valued logic in terms of maximal classes". Available at: <https://arxiv.org/abs/2103.16631>
44. Yablonskiy, S. V. 1959, "On algorithmic difficulties in the synthesis of minimal contact circuits", *Probl. Kibern.*, vol. 2, pp. 75–121.
45. Yablonskiy, S. V., Gavrillov G. P. & Kudryavcev V. B. 1966, *Funkcii Algebry Logiki i Klassy Posta* [Logic Algebra Functions and Post Classes], Nauka, Moscow.
46. Yaglom, I. M. 1968, *Kak razrezat' kvadrat?* [How to cut a square?], Nauka, Moscow.
47. Yashunsky, A. D. 2007, "Asymptotics of the probability of values of random Boolean expressions", *J. Appl. Industr. Math.*, vol. 1, no. 4, pp. 509–531.
48. Yashunsky, A. D. 2019, "Polynomial transformations of random variables on finite sets", *Math. Notes*, vol. 106, no. 6, pp. 1025–1027.

49. Yashunsky, A. D. 2020, “On necessary conditions of probability limit theorems in finite algebras”, *Doklady Mathematics*, vol. 102, no. 1, pp. 301–303.
50. Yashunsky, A. D. 2021, *Issledovaniya po teorii iterativnyh sistem, porozhdaemyh konechnymi sluchajnymi velichinami. Arifmeticheskij i kombinatorno-logicheskij podhod* [Research on the theory of iterative systems generated by finite random variables. Arithmetic and combinatorial-logical approach], Dissertation for the degree of doctor of physical and mathematical sciences. Available at: <https://istina.msu.ru/dissertations/364891994/>
51. Burks, A. W. & Wright, J. B. 1953, “Theory of logical nets”, *Proc. IRE.*, vol. 41, no. 10, pp. 1357–1365.
52. Burris, S. & Willard, R. 1987, “Finitely many primitive positive clones”, *Proc. of the American Mathematical Society*, vol. 101, no. 3, pp. 427–430.
53. Lee, C. Y. 1959, “Representation of switching circuits by binary-decision programs”, *Bell System Technical Journal*, vol. 38, no. 4, pp. 985–1000.
54. Muller, D. E. 1958, “Complexity in electronic switching circuits”, *RE Trans. on Electronic Computers*, vol. EC-5, no. 1, pp. 15–19.
55. Shannon, C. E. 1941, “Mathematical theory of the differential analyzer”, *J. Math, and Phys.*, vol. 20, no. 4, pp. 337–354.
56. Shepherdson, J. & Sturgis, H. 1963, “Computability of recursive functions”, *Journal of the Association for Computer Machinery*, vol. 10, no. 2, pp. 217–255.
57. Yashunskiy, A. D. 2019, “Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions”, *Algebra Univers.*, vol. 80, no. 5.

Получено 08.12.21

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 519.722

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-151-160

Построение и анализ моделей русского языка в связи с исследованиями криптографических алгоритмов

А. Г. Малашина, А. Б. Лось

Малашина Анастасия Геннадьевна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).

e-mail: amalashina@hse.ru

Лось Алексей Борисович — кандидат технических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).

e-mail: alos@hse.ru

Аннотация

При исследовании криптографических качеств алгоритмов защиты информации важным моментом является построение теоретических и экспериментальных моделей источников сообщений. В данной статье проводится статистический анализ свойств лексических и n -граммных моделей русского языка на основе новостного текстового корпуса. Создан специализированный корпус из новостных статей последних лет политической направленности, отражающий узкую область употребления языка. Составлены словари токенов и n -грамм, найдены величины покрытия этих словарей, а также значения энтропии. Проведена лемматизация исходного текстового корпуса и экстраполяция роста объёма словарей в зависимости от увеличения размера корпуса.

Ключевые слова: словари n -грамм, энтропия n -грамм, осмысленные тексты.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Г. Малашина, А. Б. Лось. Построение и анализ моделей русского языка в связи с исследованиями криптографических алгоритмов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 151–160.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 519.722

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-151-160

The construction and analysis of the Russian language models for a cryptographic algorithm research

A. G. Malashina, A. B. Los

Malashina Anastasia Gennad'evna — National Research University «Higher School of Economics» (Moscow).

e-mail: amalashina@hse.ru

Los Alexey Borisovich — candidate of technical sciences, associate professor, National Research University «Higher School of Economics» (Moscow).

e-mail: alos@hse.ru

Abstract

The article provides a statistical analysis of the properties of lexical and n-gram models of the Russian language based on the news text corpus. A specialized corpus of political news articles of recent years has been created, reflecting a narrow area of language use. The token and n-gram dictionaries are compiled, the coverage values are found, as well as the values of entropy. Lemmatization of the original text corpus and extrapolation of the dictionary volumes are performed.

Keywords: n-gram dictionaries, n-gram entropy, meaningful texts.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. G. Malashina, A. B. Los, 2022, "The construction and analysis of the Russian language models for acryptographic algorithm research", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 151–160.

1. Введение

Исследование вероятностного и статистического распределения слов и n-грамм естественного языка является предметом анализа во многих областях: лингвистике, теории игр, молекулярной биологии. Важную роль корпусный анализ языка играет в вопросах криптографической защиты информации, в том числе в вопросах эффективности ряда криптографических алгоритмов. При исследовании процедур восстановления отдельных участков сообщения по имеющейся информации о вариантах его знаков, основу анализа составляют создаваемые словари различных длин. В связи с этим, особое значение имеет изучение их статистических свойств, проверка полноты и адекватности используемого корпуса [6].

При исследовании языкового корпуса и составлении словарей, одним из основных вопросов является вопрос покрытия словарем всех возможных отрезков текста [15]. При этом проблема покрытия существенно усложняется для флективных языков, таких как французский и немецкий, и в особенности русский, по сравнению с аналитическими языками, такими как английский. Такие языки требуют большего объёма словаря для достижения необходимого покрытия [9].

В работе исследуются две языковые модели: лексическая и n-граммная. В лексической модели языка единицей анализа являются токены, то есть единицы текста, элементы раздельного написания. В n-граммной модели, являющейся частным случаем лексической, рассматриваются последовательности из n символов или слов.

2. Основной текст статьи

2.1. Языковой корпус

Корпус - собрание текстов в текстовой форме, используемое для исследования языка с использованием компьютерных технологий [4]. В данной работе был создан специализированный корпус русского языка, который отражает узкую область его употребления.

В качестве исходного материала для составления корпуса были использованы новостные статьи последних лет политической тематики. Эти тексты отражают срез состояния современного русского языка, включая разговорный, то есть составляемый корпус является синхроническим [4, 5].

После создания текстового корпуса осуществляется его нормализация, состоящая из следующих этапов: 1) удаление html-тегов и переформатирование в *.txt; 2) перекодировка; 3) удаление всех сокращений, кроме аббревиатур; 4) удаление имён нарицательных; 5) фильтрация текста (удаление всех символов, кроме «а-я», «.», «,», « », приведение к нижнему

регистру); 6) удаление двойных пробелов, повторяющихся точек и запятых, пробелов перед точками и запятыми.

Метаданные в корпусе отсутствуют, так как их наличие не принципиально для дальнейших целей использования данного корпуса.

Созданный корпус должен удовлетворять двум основным критериям: полноте и репрезентативности. Полнота корпуса обуславливается покрытием этого корпуса. Оптимизация покрытия зависит от задач, для которых создаётся этот корпус и словари. Во-первых, покрытие зависит от объёма текстового корпуса, который используется для построения словарей, но с определенного момента эта зависимость становится гораздо менее выраженной, поэтому возможна экстраполяция логарифмическими функциями. Например, для английского языка рост объёма словаря существенно замедляется при размере корпуса от 30 до 50 млн. слов. Во-вторых, оптимальный размер корпуса зависит от источников и новизны данных [9]. В целом, корпус считают насыщенным, когда с увеличением объёма корпуса прекращается резкий рост новых слов [3].

Репрезентативность — это способность корпуса адекватно отражать специфику выбранной предметной области [4].

На основе собранного новостного текстового корпуса в соответствии с рассматриваемой языковой моделью создаются словари, которые впоследствии подвергаются статистическому исследованию.

2.2. Лексическая модель

Лексические модели языка представляют особый интерес для систем распознавания речи. Актуальность вопроса максимизации покрытия связана с тем, что каждое неизвестное слово (называемое также *out-of-vocabulary* или OOV) создаёт очередную ошибку в распознавании текущего слова. Более того, каждая такая ошибка способна породить ошибку распознавания следующего слова, создавая «волновой эффект» OOV-слов.

В рамках лексической модели языка генерируются словари, единицами которых являются токены, то есть единицы текста как элементы раздельного написания. В таблице ниже представлены значения размеров словарей, создаваемых на основе корпусов различного объёма.

Корпус, симв.	Объем словаря	Эмпирическое покрытие	Теоретическое покрытие
10^4	836	0.45	20.1
10^5	5449	2.74	28.34
10^6	31895	13.78	39.68
10^7 с нарицат.	163091	70.63	48.29
10^7 без нарицат.	125162	64.45	44.98
10^8	<i>180000</i>	-	<i>59.28</i>
10^9	<i>230000</i>	-	<i>68.84</i>

Поскольку скорость роста объёма словарей в зависимости от размера корпуса близка к скорости роста логарифмической функции, проводится следующая экстраполяция:

$$21910.5 \cdot \ln(3.434 \cdot 10^{-6} \cdot x). \quad (1)$$

Прогнозируемые значения объёма словарей обозначены в таблице курсивом. Графически данная зависимость отражена на рисунке 1.

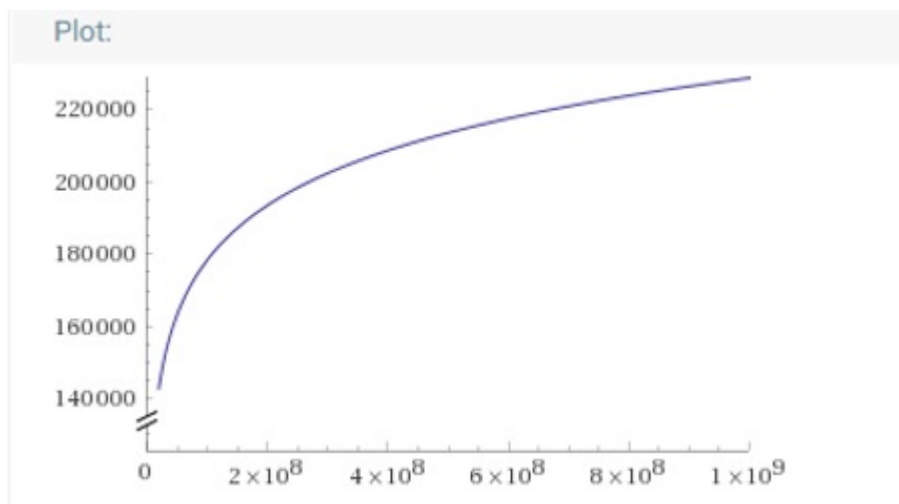


Рис. 1: Размер словаря в зависимости от объема корпуса.

2.3. Закон Ципфа

Для проверки качества и естественности созданного русскоязычного корпуса (объемом 10^7 символов) проводится проверка соответствия закону Ципфа. В соответствии с данным законом если все слова в корпусе упорядочить по убыванию частоты их встречаемости, то частота использования слов окажется обратно пропорциональной их порядковому рангу [12, 13]. Результаты представлены на рисунке 2.

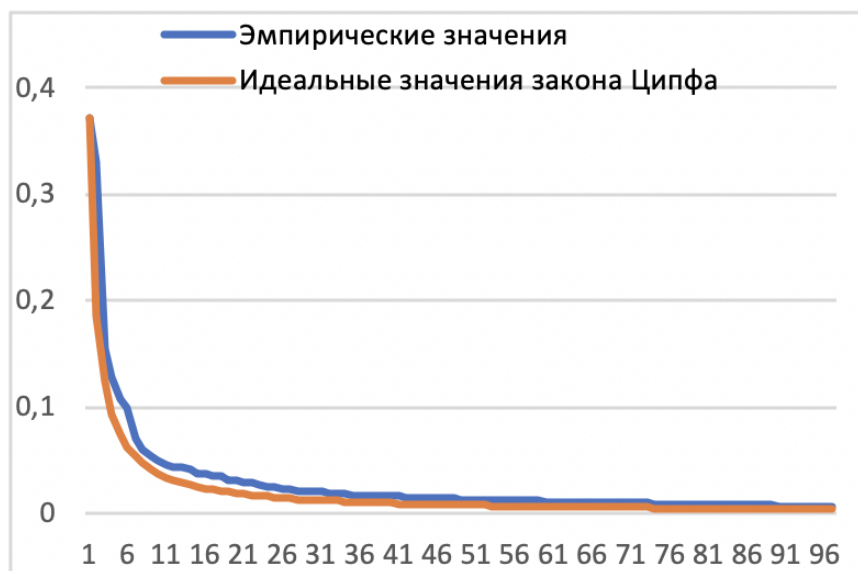


Рис. 2: Закон Ципфа.

Как наглядно демонстрирует график, эмпирически полученные значения лишь незначительно отклоняются от идеальных значений закона Ципфа. Поэтому можно заключить, что собранный корпус, в целом удовлетворяет данному закону и является достаточно естественным и полным в рамках лексической модели.

2.4. Покрытие

Для оценки полноты рассматриваемого корпуса требуется оценить величину покрытия его словаря. Существуют различные подходы к оценке покрытия. В данном исследовании были рассмотрены эмпирическая и теоретическая оценки.

Эмпирическая оценка проводится с помощью тестового корпуса, не являющегося частью проверяемого. Величина покрытия — это доля токенов тестового корпуса, покрытая словарём исходного корпуса.

Теоретическая оценка основывается на количестве уникальных токенов словаря, то есть единиц словаря, встречающихся только один раз:

$$\tilde{N} = \frac{N}{1 - \frac{n}{N}}, \quad (2)$$

где N — исходный объём словаря, n — число токенов, встречающихся один раз.

Предполагается, что полученная таким образом величина — это приблизительный размер полного словаря. На основании теоретически найденного объёма словаря оценивается величина покрытия как отношение практической величины объема к его теоретической величине. При этом величина покрытия выражается в процентах.

Значения эмпирического и теоретического покрытия указаны в таблице 1. С увеличением объёма корпуса величина покрытия возрастает. Для небольших корпусов теоретически найденное покрытие значительно превышает экспериментальное. Такое различие вскрывает недостатки подхода, основанного на количестве однократно встречаемых единиц словаря, особенно для корпусов небольшого объёма. Для больших корпусов эмпирическое покрытие выше теоретического. Данное обстоятельство может быть объяснено тем, что среди однократно встречающихся токенов в словаре могут присутствовать слова, написанные с опечатками, редкие имена и фамилии, специфические названия, узкоспециализированная лексика и редко употребляемые слова. В качестве примера, демонстрирующего подобный недостаток теоретической оценки покрытия, можно привести Брауновский корпус английского языка. Более половины слов в данном корпусе встречаются лишь однажды. Следовательно, относительно теоретической оценке его покрытие составляет менее 50% несмотря на то, что объём корпуса около 1 млн. слов [4].

2.5. Лемматизация

Лемматизация - процесс обработки языкового корпуса, в результате которого все входящие в него слова приводятся к словарной форме [4].

Для исследуемых корпусов проводится лемматизация, после чего оценивается величина покрытия. Сравнительные результаты приведены в таблице.

Корпус	Покрытие (оригинал)	Покрытие (лемматизация)
10^6	13.78	16.16
10^7 с нарицат.	70.63	76.45
10^7 без нарицат.	64.45	66.77

Результаты наглядно демонстрируют, что величины покрытия лемматизированных корпусов выше покрытия оригиналов. Это связано с тем, что лемматизация значительно снижает флективность языка, приближая его к аналитическому [9]. Например, в исследуемом корпусе присутствует слово «репрезентативные», а в тестовом корпусе только слово «репрезентативный». То есть одно и то же слово присутствует в корпусах в разной форме. Но с точки зрения автоматической обработки, точно сопоставляющей токены, это разные слова. Это снижает величину покрытия. Лемматизация устраняет данный недостаток и снижает объём словаря.

Процесс лемматизации может оказаться крайне полезен, например, для генерации словарей на основе корпусов. Но для некоторых других задач, таких как распознавание речи или восстановление открытого текста без определения ключа шифрования, словаря (в более общем смысле), содержащего только словарные формы, может оказаться недостаточно. В таком случае расширение словаря может производиться в два этапа: с помощью лемматизации, а затем процесса, обратного ей. Например, в корпусе встречается только слово «языковые». Леммой данного слова является слово «языковой». В словарь могут добавляться все орфографические формы данного слова: «языковая», «языковое», «языковых», «языковым» и т.д. Более того, словарь может быть расширен ещё больше, если добавлять в него также однокоренные токены других частей речи, например, «язык». Но такой подход требует наличия промежуточного автоматизированного блока, умеющего производить орфографические изменения слов.

2.6. Ключевые слова

На основе корпуса объёмом 1 млн. символов определяются ключевые слова, то есть слова, встречающиеся чаще всего. Результаты представлены в двух вариантах: для исходного и лемматизированного корпуса. Топ-10 слов приведен в таблице ниже:

№	Лемматизированный корпус	Количество	Оригинальный корпус	Количество
1	Россия	663	России	420
2	страна	76.45	Сирии	290
3	политический	66.77	США	270
4	Сирия	16.16	время	228
5	год	76.45	страны	208
6	человек	66.77	Россия	173
7	российский	16.16	политической	160
8	один	76.45	власти	146
9	много	66.77	против	142
10	время	66.77	РФ	133

Ключевые слова подчеркивают специфичность и специализированность корпуса, собранного на основе современных новостных статей на тему политики.

2.7. N -граммная модель

В n -граммной модели единицами корпуса (словаря) считаются последовательности из n символов. Лексические модели являются подмножеством n -граммных моделей языка.

Вопросы n -граммного покрытия представляют интерес в системах распознавания речи для максимизации производительности системы. Но, особое значение, n -граммные модели имеют для вопросов криптографии, так как в зашифрованном тексте границы между словами неизвестны, и подбор в этом случае по лексическому словарю невозможен или крайне затруднителен [11]. Если какая-либо n -грамма отсутствует в словаре, то языковая модель может опираться на n -граммы более низкого порядка, но они могут оказаться неуместны для текущей задачи. Именно поэтому ошибки распознавания гораздо чаще происходят в рамках n -граммной модели языка [10].

Анализ покрытия словаря n -грамм усложняется из-за значительно меньшей частоты n -грамм по сравнению с наименее частыми словами в словаре. По оценкам сборника североамериканских новостных деловых статей (НАВ), который на данный момент является самым тщательно исследованным языковым корпусом, чтобы оптимизировать охват биграмм (два слова), требуется корпус объёмом от 100 до 200 млн. слов. Собрать текстовый корпус такого

объема представляется довольно трудной задачей. А с увеличением n проблема оптимизации покрытия только ухудшается.

Ещё больше осложняет ситуацию существующее потенциальное взаимодействие между покрытием n -грамм и эволюцией языка. Накопление слов из соответствующего источника, очевидно, занимает время, в течение которого языковые шаблоны могут меняться, ухудшая адекватность более старых данных. Рассматривая язык как нестационарный стохастический источник, Розенфельд постулировал следующий принцип: никогда нельзя определить одновременно и степень, и временные рамки языкового явления. Как следствие, он пришел к выводу, что невозможно обнаруживать преходящие и редкие лингвистические события [15].

На основе собранных корпусов проводится оценка покрытия и подсчитывается энтропия n -грамм длиной i символов [1, 2, 7, 14]:

$$H_i = \frac{\log_2 N_i}{i}. \quad (3)$$

где i - длина n -граммы, а N_i - количество n -грамм в слове длиной i символов. Рассматриваются n -граммы длиной 10, 15, 20 и 25 символов. Результаты исследования приведены в таблице и на рисунке 3.

Длина n -граммы	Объем словаря		Энтропия	
	10^6	10^7	10^6	10^7
10	795840	6217191	1.96	2.26
15	955193	9482897	1.32	1.55
20	983828	10372296	0.99	1.17
25	990430	10629589	0.80	0.93

Значения энтропии n -грамм близки к реальным значениям для русского языка [8].

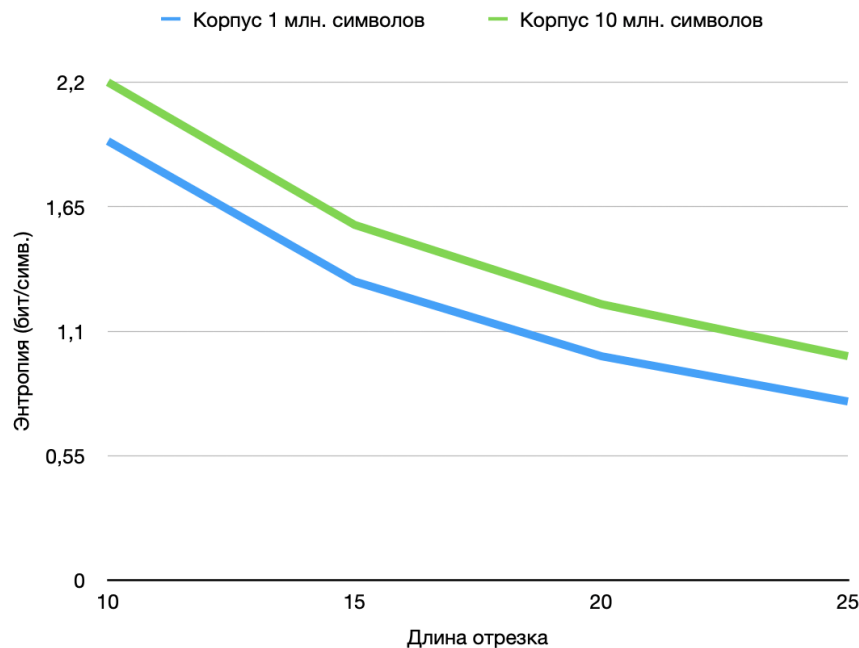


Рис. 3: Энтропия n -грамм.

Величины покрытия представлены в таблице ниже.

Длина n -граммы	Эмпирическое покрытие		Теоретическое покрытие	
	10^6	10^7	10^6	10^7
10	4.32	39.71	11.27	19.95
15	1.10	12.03	3.15	7.21
20	0.28	3.12	1.30	3.27
25	0.07	0.84	0.79	2.07

Как видно, покрытие словаря n -грамм значительно ниже лексического покрытия. Это подтверждает тот факт, что исследование n -граммной модели гораздо более сложное, а оптимизация покрытия словаря требует сверхбольшого языкового корпуса.

3. Заключение

В данной статье рассмотрены две основные модели естественного языка, которые были исследованы с помощью созданного текстового корпуса, основанного на новостных статьях последних лет. Рассмотрены различные подходы к определению величины покрытия текстов. Для лексической модели языка был проверен закон Ципфа, оценивающий естественность языкового корпуса, а также проведена лемматизация корпуса, подчеркивающая высокую флективность русского языка. Найдены значения информационной энтропии n -грамм ограниченной длины. Построена экстраполяционная модель дальнейшего изменения объема словарей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В., Основы криптографии: учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. // М.: Гелиос АРВ, 2005. – 408 с.
2. Бабаш А. В., Шанкин Г. П., Криптография, Москва: СОЛОН-ПРЕСС, 2007.
3. Викторов А. Б., Грамницкий С. Г., Гордеев С. С., Ескевич М. В. и Климина Е. М. Универсальная методика подготовки компонентов обучения систем распознавания речи // Речевые технологии, pp. 39-56, Февраль 2009.
4. Волосатова Т. М., Информатика и лингвистика: учеб. пособие, Волосатова Т. М. и Чичварин Н. В. // ИНФРА-М, 2018, 196 с.
5. Кипяткова И. С. Исследование статистических n -граммных моделей языка для распознавания слитной русской речи со сверхбольшим словарем // Анализ разговорной русской речи, Санкт-Петербург, 2010.
6. Малашина А. Г. Алгоритм восстановления отдельных частей сообщения по информации о возможных значениях его знаков, Материалы конференции // Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е. В. Арменского. – Москва, 2019. С. 215-217.
7. Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике // М: Издательство иностранной литературы, 1963.
8. Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация: 3-е изд., испр. и доп. // М: издательство «Наука», 1973, 236-290 с.
9. Bellegarda J. R. Robustness in Statistical Language Modeling // Robustness in Language and Speech Technology, Springer Science+Business Media Dordrecht, 2001, pp. 104-106.

10. Chase L., Rosenfeld R., Ward W. Error-responsive modifications to speech recognizers: negative n-grams // Third International Conference on Spoken Language Processing, Yokohama, 1994.
11. Florencio D., Herley C. A Large-Scale Study of Web Password Habits // Proceeds of the International World Wide Web Conference Committee, 2015.
12. Gelbukh A., Sidorov G. Zipf and Heaps Laws' Coefficients Depend on Language // Conference on Intelligent Text Processing and Computational Linguistics, Mexico City, 2001.
13. Kechedzhy K.E. Rank distributions of words in additive many-step Markov chaons and the Zipf law // Phys. Rev. E. – 2005 – Vol. 72.
14. Massey J. Guessing and entropy // Proceedings of 1994 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE. p. 204.
15. Rosenfeld R. Optimizing lexical and n-gram coverage via judicious use of linguistic data // Proceedings of the Fourth European Conference on Speech Communication and Technology – Madrid, 1995.

REFERENCES

1. Alferov A.P., Zubov A.Ju., Kuz'min A.S. & Cheremushkin A.V. 2005, "Fundamentals of cryptography: textbook: 3rd ed., ISPR. and add." ["Osnovy kriptografii: uchebnoe posobie: 3-e izd., ispr. i dop."], *Gelios ARV*, p. 408.
2. Babash A.V. & Shankin G.P. 2007, "Cryptography" ["Kriptografija"], *SOLOON-PRESS*.
3. Viktorov A.B., Gramnickij S.G., Gordeev S.S., Eskevich M.V. & Klimina E.M. 2009, "The universal method for preparing speech recognition system training components" ["Universal'naja metodika podgotovki komponentov obuchenija sistem raspoznavanija rechi"], *Rechevyje tehnologii*, pp. 39-56.
4. Volosatova T.M. & Chichvarin N.V. 2018, "Computer science and linguistics: textbook" ["Informatika i lingvistika: ucheb. posobie"], *INFRA-M*, p.196.
5. Kipjatkova I.S. 2010, "Research of statistical N-gram language models for recognition of merged Russian speech with a super-large dictionary" ["Issledovanie statisticheskikh n-grammyh modelej jazyka dlja raspoznavanija slitnoj russkoj rechi so sverhbol'shim slovarom"], *Analiz razgovornoj russkoj rechi*, Sankt-Peterburg.
6. Malashina A.G. 2019, "The algorithm for recovering discrete message parts based on information about possible values of its characters. Proc." ["Algoritm vosstanovlenija otdel'nyh chastej soobshhenija po informacii o vozmozhnyh znachenijah ego znakov. Materialy konferencii"], *Mezhvuzovskaja nauchno-tehnicheskaja konferencija studentov, aspirantov i molodyh specialistov imeni E.V. Armenskogo*, Moscow, pp. 215-217.
7. Shannon C.E. 1963, "Works on information theory and Cybernetics" ["Raboty po teorii informacii i kibernetike"], *Izdatel'stvo inostrannoju literatury*.
8. Jaglom A.M. & Jaglom I.M. 1973, "Probability and information: 3rd ed., cor. and exp." ["Verojatnost' i informacija: 3-e izd., ispr. i dop."], **Nauka**, pp. 236-290.
9. Bellegarda J.R. 2001, "Robustness in Statistical Language Modeling", *Robustness in Language and Speech Technology*, Springer Science+Business Media Dordrecht, pp. 104-106.

10. Chase L., Rosenfeld R. & Ward W. 1994, "Error-responsive modifications to speech recognizers: negative n-grams", *Third International Conference on Spoken Language Processing*.
11. Florencio, D. & Herley, C. 2007, "A Large-Scale Study of Web Password Habits", *Proceeds of the International World Wide Web Conference Committee*.
12. Gelbukh A. & Sidorov G. 2001, "Zipf and Heaps Laws' Coefficients Depend on Language", *Conference on Intelligent Text Processing and Computational Linguistics*.
13. Kechedzhy K. E., Usatenko K. E. & V. A. Yampol'skii 2005, "Rank distributions of words in additive many-step Markov chaons and the Zipf law", *Phys. Rev. E*, vol. 72.
14. Massey J. 1994, "Guessing and entropy", *Proceedings of 1994 IEEE International Symposium on Information Theory*, p. 204.
15. Rosenfeld R. 1995, "Optimizing lexical and n-gram coverage via judicious use of linguistic data", *Proceedings of the Fourth European Conference on Speech Communication and Technology*.

Получено 30.09.2020

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-161-169

Обобщение некоторых интегральных неравенств для оператора Римана — Лиувилля

М. Софрани, А. Сенуси

Софрани Мохаммед — лаборатория информатики и математики, Университет Тиарет (г. Тиарет, Алжир).

e-mail: aissamalik@yahoo.fr

Сенуси Абделькадер — профессор, лаборатория информатики и математики, Университет Тиарет (г. Тиарет, Алжир).

e-mail: kater295@yahoo.fr

Аннотация

Неравенство Чебышева является одним из самых важных неравенств в математике. Оно играет важную роль в теории вероятности, а также тесно связано с неравенством Маркова в анализе.

В [6, 7], используя интегральный оператор Римана — Лиувилля I^α , авторы установили и доказали некоторые новые интегральные неравенства для чебышевского функционала

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx.$$

В данной работе рассматриваются некоторые обобщения интегральных неравенств чебышевского типа, где используются дробные интегралы Римана — Лиувилля в соответствии с другой функцией.

Ключевые слова: Дробные интегралы, неравенства Чебышева, дробный оператор Римана — Лиувилля, обобщения.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

М. Софрани, А. Сенуси. Обобщение некоторых интегральных неравенств для оператора Римана — Лиувилля // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 161–169.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-161-169

Generalizations of some integral inequalities for Riemann–Liouville operator

M. Sofrani, A. Senouci

Sofrani Mohammed — laboratory of informatics and mathematics, university of Tiaret (Tiaret, Algeria).

e-mail: aissamalik@yahoo.fr

Senouci Abdelkader — professor, laboratory of informatics and mathematics, University of Tiaret (Tiaret, Algeria).

e-mail: kamer295@yahoo.fr

Abstract

The Chebyshev inequality is one of important inequalities in mathematics. It's a necessary tool in probability theory. The item of Chebyshev's inequality may also refer to Markov's inequality in the context of analysis.

In[6, 7], using the usual Riemann–Liouville fractional integral operator I^α , were established and proved some new integral inequalities for the Chebyshev functional

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx.$$

In this work, we give some generalizations of Chebyshev-type integral inequalities by using Riemann–Liouville fractional integrals of function with respect to another function.

Keywords: Fractional integral, Chebyshev's inequality, Riemann–Liouville Fractional operator, generalizations.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

A. Senouci, M. Sofrani, 2022, “Generalizations of some integral inequalities for Riemann–Liouville operator”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 161–169.

1. Introduction

Many Integral inequalities of various types have been presented in the literature.

See [4,5], among them, we choose to recall the following Chebyshev Inequality

$$T(f, g) \geq 0, \tag{1}$$

where

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

f, g are two integrable functions, synchronous on $[a, b]$ (i.e. $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$), for $x, y \in [a, b]$.

In this section, we give some definitions and theorems.

In [8] the following definition was given.

DEFINITION 1. Let $f \in L_1([0, \infty))$. The Riemann–Liouville fractional integral operator of order $\alpha > 0$ is defined as

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

$$I^0 f(x) = f(x),$$

where $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

DEFINITION 2. For $(a, b) \subset \mathbb{R}$ we shall denote by $L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) the set of functions f real-value Lebesgue measurable on (a, b) , such that

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (4)$$

and for the case $p = \infty$

$$\|f\|_{L_p} = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq t \leq b} |f(t)| < \infty.$$

DEFINITION 3. Let $f \in L_1([0, \infty[)$ and $h(x)$ be an increasing and positive function on $[0, \infty[$ having a continuous derivative $h'(x)$ on $[0, \infty[$, $h(0) = 0$. The space $X_h^p(0, \infty)$ ($1 \leq p < \infty$) of those real-valued Lebesgue measurable functions f on $[0, \infty[$ for which

$$\|f\|_{\mathbf{X}_h^p} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p h'(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (5)$$

and for $p = \infty$

$$\|f\|_{\mathbf{X}_h^p} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t < \infty} |f(t) h'(t)|.$$

In particular, when $h(x) = x$ ($1 \leq p < \infty$) the space $\mathbf{X}_h^p(0, \infty)$ coincides with the $L_p([0, \infty))$

DEFINITION 4. Let $f \in \mathbf{X}_h^p(0, \infty)$ and $h(x)$ be an increasing and positive function on $[0, \infty)$ and also derivative $h'(x)$ is continuous on $[0, \infty)$ and $h(0) = 0$. The Riemann–Liouville fractional integral of a function $f(x)$ with respect to another function $h(x)$ is defined by

$$I_h^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} f(t) h'(t) dt. \quad (6)$$

For the convenience of establishing the results, we give the semi-group property:

$$I_h^\alpha I_h^\beta f(x) = I_h^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad (7)$$

which implies the commutative property

$$I_h^\alpha I_h^\beta f(x) = I_h^\beta I_h^\alpha f(x). \quad (8)$$

For details, one can consult [3].

REMARK 1. If $f(x) = 1$, by (6), we get

$$I_h^\alpha f(x) = \frac{h^\alpha(x)}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \alpha \geq 0. \quad (9)$$

REMARK 2. If $f(x) = h^\gamma(x)$, then we have

$$I_h^\alpha[h^\gamma(x)] = \frac{h^{\gamma+\alpha}(x)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}, \quad \alpha \geq 0, \gamma \geq 0. \quad (10)$$

For details to see ([3]).

REMARK 3. Note that for $h(x) = x$, $I_h^\alpha f(x)$ is the usual Riemann–Liouville fractional operator I^α .

In [6, 7], the following definition was introduced.

DEFINITION 5. A real valued function $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be in the space $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$ if there exists a real number $p > \mu$ such $f(x) = x^p f_1$, where $f_1 \in C([0, \infty))$.

DEFINITION 6. The Riemann–Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ for a function $f \in C_\mu, (\mu \geq -1)$ is defined as

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt; \quad \alpha > 0, \\ I^0 f(x) = f(x),$$

where $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

In [6, 7], the following theorems and corollary were proved.

THEOREM 1. Let f and g be two synchronous functions on $[0, \infty[$. Then for all $x > 0, \alpha > 0$,

$$I^\alpha(fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha} I^\alpha f(x) I^\alpha g(x). \quad (11)$$

THEOREM 2. Let f and g be two synchronous functions on $[0, \infty[$. Then for all $x > 0, \alpha > 0$ and $\beta > 0$,

$$\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} I^\beta(fg)(x) + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} I^\alpha(fg)(x) \geq I^\alpha f(x) I^\beta g(x) + I^\beta f(x) I^\alpha g(x). \quad (12)$$

THEOREM 3. Let $(f_i)_{i=1,2,\dots,n}$ be n positive increasing functions on $[0, \infty[$. Then for any $x > 0, \alpha > 0$,

$$I^\alpha \left(\prod_{i=1}^n f_i \right)(x) \geq (I^\alpha(1))^{1-n} \prod_{i=1}^n I^\alpha f_i(x). \quad (13)$$

THEOREM 4. Let $p \geq 1$, such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, if $|f|^p(x)$ and $|g|^{p'}(x)$ are two functions in $C_\lambda, (\lambda \geq 1)$, then for $\alpha > 0$, the fractional integral inequality

$$I^\alpha |fg|(x) \leq (I^\alpha |f|^p(x))^{\frac{1}{p}} (I^\alpha |g|^{p'}(x))^{\frac{1}{p'}}, \quad (14)$$

holds.

THEOREM 5. Let f and g be two functions defined on $[0, \infty)$, such that f is increasing and g is differentiable and there exists a real number $m := \inf_{x \geq 0} g'(x)$. Then the inequality

$$I^\alpha(fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha} I^\alpha f(x) I^\alpha g(x) - \frac{mx}{\alpha+1} I^\alpha f(x) + m I^\alpha(xf(x)) \quad (15)$$

is valid for all $x > 0, \alpha > 0$.

COROLLARY 1. Let f and g be two functions defined on $[0, \infty)$. Suppose that f is decreasing and g is differentiable and there exists a real number $M := \sup_{x \geq 0} g'(x)$, then for all $x > 0, \alpha > 0$, we have

$$I^\alpha(fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha} I^\alpha f(x) I^\alpha g(x) - \frac{Mx}{\alpha+1} I^\alpha f(x) + M I^\alpha(xf(x)). \quad (16)$$

2. Main Results

The aim of this work is to generalize the Theorems 1, 2, 3, 4, 5 and Corollary 1 (the results of [6, 7]) for the operator I_h^α .

THEOREM 6. Let f and g be two synchronous functions on $[0, \infty[$ and $h(x)$ be an increasing and positive function on $[0, \infty[$, having a continuous derivative $h'(x)$ on $[0, \infty[$ and also $h(0) = 0$, $x > 0, \alpha > 0$, then

$$I_h^\alpha(fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} I_h^\alpha f(x) I_h^\alpha g(x). \quad (17)$$

The inequality (17) is reversed if the functions are asynchronous on $[0, \infty)$ (i.e. $((f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0)$ for $x, y \in [0, \infty)$).

PROOF. Since f and g are synchronous on $[0, \infty[$, then for $\mu \geq 0, \nu \geq 0$, we have

$$(f(\mu) - f(\nu))(g(\mu) - g(\nu)) \geq 0, \quad (18)$$

equivalently

$$f(\mu)g(\mu) + f(\nu)g(\nu) \geq f(\mu)g(\nu) + f(\nu)g(\mu). \quad (19)$$

Multiplying both sides of (19) by $\frac{(h(x)-h(\mu))^{\alpha-1}h'(\mu)}{\Gamma(\alpha)}$, $\mu \in (0, x), x > 0$ and integrating the resulting inequality with respect to μ from 0 to x , we have

$$I_h^\alpha(fg)(x) + f(\nu)g(\nu) \frac{h^\alpha(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \geq g(\nu) I_h^\alpha(f)(x) + f(\nu) I_h^\alpha(g)(x). \quad (20)$$

Now, multiplying (20) by $\frac{(h(x)-h(\nu))^{\alpha-1}h'(\nu)}{\Gamma(\alpha)}$, $\nu \in (0, x)$ and integrating the resulting inequality with respect to ν from 0 to x , we get

$$I_h^\alpha(fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} I_h^\alpha f(x) I_h^\alpha g(x). \quad (21)$$

This proves the theorem.

REMARK 4. If $h(x) = x$ in Theorem 6, we obtain the inequality (11) (Theorem 1).

COROLLARY 2. Let $f \in X_h^\alpha(0, \infty)$, then we have

$$I_h^\alpha(f^n)(x) \geq (I_h^\alpha(1))^{1-n} (I_h^\alpha f(x))^n; \quad n \geq 2. \quad (22)$$

PROOF. We prove (22) by induction. For $n = 2$ inequality (22) is proved in Theorem 6. Assume that the inequality is true for some $n \geq 2$ such that $g = f^n$, $g \in X_h^\alpha(0, \infty)$. Then by applying the inequality (17) to the functions f and g , we have

$$\begin{aligned} I_h^\alpha(fg)(x) &\geq (I_h^\alpha(1))^{-1} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha g)(x) \\ &= (I_h^\alpha(1))^{-1} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha f^n)(x) \\ &\geq (I_h^\alpha(1))^{-n} (I_h^\alpha f(x))^{n+1}, \end{aligned}$$

where the induction hypothesis for $n \geq 2$ is used for the second inequality.

THEOREM 7. Let f and g be two synchronous functions on $[0, \infty[$ and $h(x)$ be an increasing and positive function on $[0, \infty[$, derivative $h'(x)$ is continuous on $[0, \infty[$ and also $h(0) = 0, x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$, then

$$\frac{h^\beta(x)}{\Gamma(\beta+1)} I_h^\alpha(fg)(x) + \frac{h^\alpha(x)}{\Gamma(\alpha+1)} I_h^\beta(fg)(x) \geq I_h^\alpha f(x) I_h^\beta g(x) + I_h^\beta f(x) I_h^\alpha g(x). \quad (23)$$

PROOF. Multiplying both sides of (20) by $\frac{(h(x)-h(\nu))^{\beta-1}h'(\nu)}{\Gamma(\beta)}$, $\nu \in (0, x), x > 0$ and integrating the resulting inequality with respect to ν from 0 to x , we have

$$\frac{h^\beta(x)}{\Gamma(\beta+1)}I_h^\alpha(fg)(x) + \frac{h^\alpha(x)}{\Gamma(\alpha+1)}I_h^\beta(fg)(x) \geq I_h^\alpha f(x)I_h^\beta g(x) + I_h^\beta f(x)I_h^\alpha g(x).$$

This completes the proof of Theorem.

REMARK 5. If $h(x) = x$ in Theorem 7, we get the inequality (12) (Theorem 2).

THEOREM 8. Let $(f_i)_{i=1,2,\dots,n}$ be n positive increasing functions on $[0, \infty[$. Then for any $x > 0, \alpha > 0$, we get

$$I_h^\alpha \left\{ \prod_{i=1}^n f_i(x) \right\} \geq (I_h^\alpha(1))^{1-n} \prod_{i=1}^n I_h^\alpha \{f_i(x)\}. \quad (24)$$

PROOF. We prove this theorem by induction. If $n = 2$, in (24), we get

$$I_h^\alpha \{f_1(x)f_2(x)\} \geq (I_h^\alpha(1))^{-1} I_h^\alpha f_1(x) I_h^\alpha f_2(x).$$

Which holds in view of Theorem 6. We suppose that the inequality

$$I_h^\alpha \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) \right\} \geq (I_h^\alpha(1))^{2-n} \prod_{i=1}^{n-1} I_h^\alpha \{f_i(x)\}, \quad (25)$$

holds for some positive integer $n \geq 2$. Now $(f_i)_{i=1,2,3,\dots,n}$ are increasing functions implies that the function $\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x)$, is also an increasing function. Therefore, we can apply inequality (25) by putting $\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) = g(x)$ and $f_n(x) = f(x)$. Then

$$\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_n(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x) \geq (I_h^\alpha(1))^{-1} I_h^\alpha \prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) I_h^\alpha f_n(x) \geq (I_h^\alpha(1))^{1-n} I_h^\alpha \prod_{i=1}^n f_i(x).$$

Where the induction hypothesis for n is used in the second inequality. The proof of Theorem 8, is complete.

REMARK 6. If we put $h(x) = x$ in (24), we obtain inequality (13) (Theorem 3).

To prove the next Theorem we shall use the following Lemma (for details see [2]).

LEMMA 1. Let $0 < p < \infty$ and p, p' are conjugate, $f \in L_p([a, b]), g \in L_{p'}([a, b])$ and ω be a weight function (non negative measurable function). 1) $1 \geq p$, then

$$\int_a^b fg\omega dx \leq \left(\int_a^b f^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^{p'} \omega dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (26)$$

2) $0 < p < 1$, then

$$\int_a^b fg\omega dx \geq \left(\int_a^b f^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^{p'} \omega dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (27)$$

THEOREM 9. Let $p \geq 1$, be such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, if $f \in \mathbf{X}_h^p(0, \infty), g \in \mathbf{X}_h^{p'}(0, \infty)$. Then for $\alpha > 0$

$$I_h^\alpha |fg|(x) \leq \{I_h^\alpha |f|^p(x)\}^{\frac{1}{p}} \{I_h^\alpha |g|^{p'}(x)\}^{\frac{1}{p'}}. \quad (28)$$

PROOF. Let $h(x) - h(t) \leq M, 0 < M < \infty$. If $f \in \mathbf{X}_h^p(0, \infty)$, we have

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x ((h(x) - h(t))^{\alpha-1} f(t)^p h'(t) dt \right| &\leq \int_0^x ((h(x) - h(t))^{\alpha-1} |f(t)|^p h'(t) dt \\ &\leq M^{\alpha-1} \int_0^x |f(t)|^p h'(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

therefore

$$\left| \int_0^x ((h(x) - h(t))^{\alpha-1} f(t)^p h'(t) dt \right| < \infty \quad (29)$$

and

$$\left| \int_0^x ((h(x) - h(t))^{\alpha-1} g(t)^{p'} h'(t) dt \right| < \infty. \quad (30)$$

The proof of (30) is similar to that of (29). Since $f \in \mathbf{X}_h^p(0, \infty)$, $g \in \mathbf{X}_h^{p'}(0, \infty)$, then $f(t) \cdot h'(t)^{\frac{1}{p}} \in L_p(0, \infty)$ and $g(t) \cdot h'(t)^{\frac{1}{p'}} \in L_{p'}(0, \infty)$. Applying the inequality (26), it yields that,

$$\begin{aligned} &\int_0^x |(h(x) - h(t))^{\alpha-1} f(t) g(t) h'(t)| dt \\ &\leq \left\{ \int_0^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} f(t)^p h'(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} g(t)^{p'} h'(t) dt \right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty. \end{aligned}$$

Now multiplying the last inequality by $(\Gamma(\alpha))^{-1} = (\Gamma(\alpha))^{\frac{-1}{p} + \frac{-1}{p'}}$, which gives (28). This proves the Theorem.

REMARK 7. If we put $h(x) = x$ in inequality (28), we get inequality (14) (Theorem 4).

THEOREM 10. Let f and g be two functions defined on $X_h^p(0, \infty)$, such that f is increasing and g is differentiable and there exists a real number $m_\alpha := \inf_{x \geq 0} g'(x)$. Then the inequality

$$\begin{aligned} (I_h^\alpha f g)(x) &\geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha g)(x) \\ &- m_\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha x)(x) + m_\alpha (I_h^\alpha x f)(x) \end{aligned} \quad (31)$$

holds.

PROOF. Let $k(x) = g(x) - mx$, $k(x)$ is differentiable and increasing on $X_h^p(0, \infty)$. Then using the Theorem 6, we obtain

$$\begin{aligned} (I_h^\alpha f(g - m))(x) &\geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha (g - m))(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha g)(x) m \\ &- \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha x)(x). \end{aligned} \quad (32)$$

We have

$$I_h^\alpha f(g - m)(x) = (I_h^\alpha f g)(x) - m(I_h^\alpha x f)(x), \quad (33)$$

hence

$$\begin{aligned}(I_h^\alpha f g)(x) &\geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha g)(x) \\ &- m_\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(x)} (I_h^\alpha f)(x) (I_h^\alpha x)(x) + m_\alpha (I_h^\alpha x f)(x).\end{aligned}$$

Then the proof is complete.

REMARK 8. If we put $h(x) = x$ in (31), we get the inequality (15) (Theorem 5).

THEOREM 11. Let f and g be two functions defined on $X_h^p(0, \infty)$, such that f is decreasing and g is differentiable and there exists a real number $M := \sup_{x \geq 0} g'(x)$. Then the inequality

$$\begin{aligned}(I_h^\alpha f g)(i) &\geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(i)} (I_h^\alpha f)(i) (I_h^\alpha g)(i) \\ &- M \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^\alpha(i)} (I_h^\alpha f)(i) (I_h^\alpha x)(i) + M (I_h^\alpha i f)(i).\end{aligned}\tag{31}$$

holds.

PROOF. We apply the Theorem 6 to the decreasing functions f and G such that:

$$G(x) := g(x) - M_\alpha x.$$

The rest is similar to the proof of Theorem 10.

REMARK 9. If we put in Theorem 11, $h(x) = x$, we have the inequality (16) (Corollary 1).

3. Acknowledgements

This paper is supported by university of Tiaret, PRFU project, code: COOL03UN140120180002.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kacar E., Kacar Z., Yildirim H. Inequalities for Riemann–Liouville Fractional Integrals of a Function with respect to Another Function, IJMSI. 2018. Vol. 13, no. 1. P. 1-13. www.ijmsi.ir/article-1-696-en.pdf.
2. Halim B., Senouci A., E. Some generalizations involving open problems of F.Qi // Int. J. Open Problems Compt. Math. 2019. Vol. 12, no. 1. www.ijopcm.org/Vol/2019/1.2.pdf.
3. Killbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Elsevier. Amsterdam. 2006. <https://books.google.com/>; <https://www.elsevier.com/books/theory-and-applications-of-fractional-differential-equations/kilbas/978-0-444-51832-3>.
4. Chebyshev P.L. Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les memes limites. Proc. Math. Soc. Charkov. 1882. P. 93-98.
5. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus integral and differential equations of fractional order. Springer Verlag, Wien. 1997. P. 223-276. www.fracalmo.org.
6. Dahmani Z. 2012 About some integral inequalities using Riemann–Liouville integrals.// General Mathematics. 2012. Vol. 20, no. 4. P. 63-69. <http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/index.html>.
7. Dahmani Z., Belarbi S. On some new fractional integral inequalities. J.I.P.A.M. 2009. Vol. 10, no. 3, article 86. <https://www.emis.de/journals/JIPAM/article1142.html?sid=1142>

8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev, O.I, Integrals and derivatives: theory and applications. 1993. Gorbon and Breach Science publishers, Switzerland. <https://www.twirpx.com/file/824445/>

REFERENCES

1. Kacar E., Kacar Z., Yildirim H. Inequalities for Riemann–Liouville Fractional Integrals of a Function with respect to Another Function, IJMSI. 2018. Vol. 13, no. 1. P. 1-13. www.ijmsi.ir/article-1-696-en.pdf.
2. Halim B., Senouci A., E. Some generalizations involving open problems of F.Qi // Int. J. Open Problems Compt. Math. 2019. Vol. 12, no. 1. www.ijopcm.org/Vol/2019/1.2.pdf.
3. Killbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Elsevier. Amsterdam. 2006. <https://books.google.com/>; <https://www.elsevier.com/books/theory-and-applications-of-fractional-differential-equations/kilbas/978-0-444-51832-3>.
4. Chebyshev P.L. Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les memes limites. Proc. Math. Soc. Charkov. 1882. P. 93-98.
5. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus integral and differential equations of fractional order. Springer Verlag, Wien. 1997. P. 223-276. www.fracalmo.org.
6. Dahmani Z. 2012 About some integral inequalities using Riemann–Liouville integrals.// General Mathematics. 2012. Vol. 20, no. 4. P. 63-69. <http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/index.html>.
7. Dahmani Z., Belarbi S. On some new fractional integral inequalities. J.I.P.A.M. 2009. Vol. 10, no. 3, article 86. <https://www.emis.de/journals/JIPAM/article1142.html?sid=1142>.
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev, O.I, Integrals and derivatives: theory and applications. 1993. Gorbon and Breach Science publishers, Switzerland. <https://www.twirpx.com/file/824445/>.

Получено 19.12.19

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-170-178

**Уникальная возможность отображения списка полных
трехсторонних графов**

Ле Ван Хонг

Хонг Ван Ле — Ханойский университет природных ресурсов и окружающей среды (г. Ханой, Вьетнам).

e-mail: lxhung@hunre.edu.vn

Аннотация

Учитывая список $L(v)$ для каждой вершины v , мы говорим, что граф G является L -раскрашиваемым, если существует правильная раскраска вершины G , где каждая вершина v берет свой цвет из $L(v)$. Граф является однозначно раскрашиваемым списком k , если существует присвоение списка L такое, что $|L(v)| = k$ для каждой вершины v , и граф имеет ровно одну раскраску L с этими списками. Если граф G не является однозначно раскрашиваемым списком k , мы также говорим, что G обладает свойством $M(k)$. Наименьшее целое число k , такое, что G обладает свойством $M(k)$, называется m -числом G , обозначаемым $m(G)$. В этой статье сначала мы охарактеризуем свойство полных трехсторонних графов, когда это однозначно k -список раскрашиваемых графов, наконец, мы докажем, что $m(K_{2,2,m}) = m(K_{2,3,n}) = m(K_{2,4,p}) = m(K_{3,3,3}) = 4$ за каждые $m \geq 9, n \geq 5, p \geq 4$.

Ключевые слова: Раскраска вершин (раскраска), раскраска списка, однозначно раскрашиваемый список графов, полный g -частичный граф.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Ле Ван Хонг. Уникальная возможность отображения списка полных трехсторонних графов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 170–178.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-170-178

Uniquely list colorability of complete tripartite graphs

Le Xuan Hung

Hung Xuan Le — Hanoi University for Natural Resources and Environment (Hanoi, Vietnam).

e-mail: lxhung@hunre.edu.vn

Abstract

Given a list $L(v)$ for each vertex v , we say that the graph G is L -colorable if there is a proper vertex coloring of G where each vertex v takes its color from $L(v)$. The graph is uniquely k -list colorable if there is a list assignment L such that $|L(v)| = k$ for every vertex v and the graph has exactly one L -coloring with these lists. If a graph G is not uniquely k -list colorable, we also say that G has property $M(k)$. The least integer k such that G has the property $M(k)$ is called the m -number of G , denoted by $m(G)$. In this paper, first we characterize about the property of the complete tripartite graphs when it is uniquely k -list colorable graphs, finally we shall prove that $m(K_{2,2,m}) = m(K_{2,3,n}) = m(K_{2,4,p}) = m(K_{3,3,3}) = 4$ for every $m \geq 9, n \geq 5, p \geq 4$.

Keywords: Vertex coloring (coloring), list coloring, uniquely list colorable graph, complete r -partite graph.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

Le Xuan Hung, 2022, "Uniquely list colorability of complete tripartite graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 170–178.

1. Introduction

All graphs considered in this paper are finite undirected graphs without loops or multiple edges. If G is a graph, then $V(G)$ and $E(G)$ (or V and E in short) will denote its vertex-set and its edge-set, respectively. The set of all neighbours of a subset $S \subseteq V(G)$ is denoted by $N_G(S)$ (or $N(S)$ in short). Further, for $W \subseteq V(G)$ the set $W \cap N_G(S)$ is denoted by $N_W(S)$. The subgraph of G induced by $W \subseteq V(G)$ is denoted by $G[W]$. The empty and complete graphs of order n are denoted by O_n and K_n , respectively. Unless otherwise indicated, our graph-theoretic terminology will follow [2].

A graph $G = (V, E)$ is called r -partite graph if V admits a partition into r classes $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ such that the subgraphs of G induced by V_i , $i = 1, \dots, r$, is empty, if $r = 2$ then G is called *bipartite graph*, if $r = 3$ then G is called *tripartite graph*. An r -partite graph in which every two vertices from different partition classes are adjacent is called complete r -partite graph and is denoted by $K_{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_r|}$. The complete r -partite graph $K_{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_r|}$ with $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_r| = s$ is denoted by K_s^r .

Let $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ be two graphs such that $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Their *union* $G = G_1 \cup G_2$ has, as expected, $V(G) = V_1 \cup V_2$ and $E(G) = E_1 \cup E_2$. Their *join* defined is denoted $G_1 + G_2$ and consists of $G_1 \cup G_2$ and all edges joining V_1 with V_2 .

Let $G = (V, E)$ be a graph and λ is a positive integer.

A λ -coloring of G is a mapping $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ such that $f(u) \neq f(v)$ for any adjacent vertices $u, v \in V(G)$. The smallest positive integer λ such that G has a λ -coloring is called the *chromatic number* of G and is denoted by $\chi(G)$. We say that a graph G is n -chromatic if $n = \chi(G)$.

Let $(L(v))_{v \in V}$ be a family of sets. We call a coloring f of G with $f(v) \in L(v)$ for all $v \in V$ is a *list coloring from the lists* $L(v)$. We will refer to such a coloring as an L -coloring. The graph G is called λ -list-colorable, or λ -choosable, if for every family $(L(v))_{v \in V}$ with $|L(v)| = \lambda$ for all v , there is a coloring of G from the lists $L(v)$. The smallest positive integer λ such that G has a λ -choosable is called the *list-chromatic number*, or *choice number* of G and is denoted by $ch(G)$. The idea of list colorings of graphs is due independently to V. G. Vizing [14] and to P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor [7].

Let G be a graph with n vertices and suppose that for each vertex v in G , there exists a list of k colors $L(v)$, such that there exists a unique L -coloring for G , then G is called a *uniquely k -list colorable graph* or a $UkLC$ graph for short. If a graph G is not uniquely k -list colorable, we also say that G has property $M(k)$. So G has the property $M(k)$ if and only if for any collection of lists

assigned to its vertices, each of size k , either there is no list coloring for G or there exist at least two list colorings. The least integer k such that G has the property $M(k)$ is called the m -number of G , denoted by $m(G)$. The idea of uniquely colorable graph was introduced independently by Dinitz and Martin [6] and by Mahmoodian and Mahdian [10].

For example, one can easily see that the graph $K_{1,1,2}$ has the property $M(3)$ and it is U2LC, so $m(K_{1,1,2}) = 3$.

The list coloring model can be used in the channel assignment. The fixed channel allocation scheme leads to low channel utilization across the whole channel. It requires a more effective channel assignment and management policy, which allows unused parts of channel to become available temporarily for other usages so that the scarcity of the channel can be largely mitigated [15]. It is a discrete optimization problem. A model for channel availability observed by the secondary users is introduced in [15]. The research of list coloring consists of two parts: the choosability and the unique list colorability. In [9], we characterized uniquely list colorability of the graph $G = K_2^m + K_n$.

In this paper, first we characterize about the property of the complete tripartite graphs when it is uniquely k -list colorable graphs (Section 2), finally we shall prove that $m(K_{2,2,m}) = m(K_{2,3,n}) = m(K_{2,4,p}) = m(K_{3,3,3}) = 4$ for every $m \geq 9, n \geq 5, p \geq 4$ (Section 3).

2. Property of the complete tripartite graphs when it is k -list colorable

We need the following Lemmas 1–6 to prove our results.

LEMMA 1 ([10]). *Each $UkLC$ graph is also a $U(k-1)LC$ graph.*

LEMMA 2 ([10]). *The graph G is $UkLC$ if and only if $k < m(G)$.*

LEMMA 3 ([10]). *A connected graph G has the property $M(2)$ if and only if every block of G is either a cycle, a complete graph, or a complete bipartite graph.*

LEMMA 4 ([10]). *For every graph G we have $m(G) \leq E(\overline{G}) + 2$.*

LEMMA 5 ([10]). *Every $UkLC$ graph has at least $3k - 2$ vertices.*

LEMMA 6 ([10]). *A connected graph G has the property $M(2)$ if and only if every block of G is either a cycle, a complete graph, or a complete bipartite graph.*

THEOREM 1. *Let $G = K_{m,n,p}$ be a $UkLC$ graph with $k \geq 2$. Then*

- (i) $\max\{m, n, p\} \geq 2$;
- (ii) If $k \geq 3$ then $\min\{m, n, p\} \geq 2$;
- (iii) $k < \frac{m^2+n^2+p^2-(m+n+p)+4}{2}$;
- (iv) $k \leq \left\lfloor \frac{m+n+p+2}{3} \right\rfloor$.

PROOF. (i) For suppose on the contrary that $\max\{m, n, p\} = 1$. Then $m = n = p = 1$, so G is a complete graph K_3 . By Lemma 3, G has the property $M(2)$, a contradiction.

(ii) For suppose on the contrary that $\min\{m, n, p\} = 1$. Without loss of generality, we may assume that $\min\{m, n, p\} = m = 1$. Let $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ is a partition of $V(G)$ such that $|V_1| = m, |V_2| = n, |V_3| = p, V_1 = \{a\}$ and for every $i = 1, 2, 3$ the subgraphs of G induced by V_i , is empty graph.

Since G is a $UkLC$ graph, there exists a list of k colors $L(v)$ for each vertex v , such that there exists a unique L -coloring f for G . Set graph $H = G - V_1$, it is not difficult to see that H is complete bipartite graph $K_{n,p}$. We assign the following lists $L'(v)$ for the vertices v of H :

If $f(a) \in L(v)$ then $L'(v) = L(v) \setminus \{f(a)\}$.

If $f(a) \notin L(v)$ then $L'(v) = L(v) \setminus \{b\}$, where $b \in L(v)$ and $b \neq f(v)$.

It is clear that $|L'(v)| = k - 1 \geq 2$ for every $v \in V(H)$. By Lemma 3, H has the property $M(2)$. So by Lemma 1, H has the property $M(k - 1)$. It follows that with lists $L'(v)$, there exists at least two list colorings for the vertices v of H . So it is not difficult to see that with lists $L(v)$, there exists at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction.

(iii) It is not difficult to see that $|E(\overline{G})| = \frac{m^2+n^2+p^2-(m+n+p)}{2}$. By Lemma 4, we have

$$m(G) \leq |E(\overline{G})| + 2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2 - (m + n + p) + 4}{2}.$$

By Lemma 2, we have $k < \frac{m^2+n^2+p^2-(m+n+p)+4}{2}$.

(iv) Assertion (iii) follows immediately from Lemma 5.

Let $G = K_{m,n,p}$ be a UkLC graph with $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, $G[V_1] = O_m$, $G[V_2] = O_n$, $G[V_3] = O_p$, $2 \leq m \leq n \leq p$, $k \geq 3$. Set

$$V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_3 = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}.$$

Suppose that, for the given k -list assignment L :

$L_{u_i} = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k}\}$ for every $i = 1, \dots, m$,

$L_{v_i} = \{b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,k}\}$ for every $i = 1, \dots, n$,

$L_{w_i} = \{c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,k}\}$ for every $i = 1, \dots, p$,

there is a unique k -list color f :

$f(u_i) = a_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, m$,

$f(v_i) = b_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, n$,

$f(w_i) = c_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, p$.

THEOREM 2. (i) $a_{i,1} \neq b_{j,1}$ for every $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$;

(ii) $a_{i,1} \neq c_{j,1}$ for every $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$;

(iii) $b_{i,1} \neq c_{j,1}$ for every $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$;

(iv) $a_{i,1} \notin \{a_{j,2}, a_{j,3}, \dots, a_{j,k}\}$ for every $i, j = 1, 2, \dots, m$;

(v) $b_{i,1} \notin \{b_{j,2}, b_{j,3}, \dots, b_{j,k}\}$ for every $i, j = 1, 2, \dots, n$;

(vi) $c_{i,1} \notin \{c_{j,2}, c_{j,3}, \dots, c_{j,k}\}$ for every $i, j = 1, 2, \dots, p$.

PROOF. (i) Since $G = K_{m,n,p}$ is a complete tripartite graph, u_i is adjacent to v_j for every $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. So it is not difficult to see that $a_{i,1} = f(u_i) \neq f(v_j) = b_{j,1}$ for every $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

(ii) Similar proofs (i).

(iii) Similar proofs (i).

(iv) If $i = j$, then it is obvious that the conclusion is true. If $i \neq j$, then we suppose that there exists i_0, j_0 such that $i_0, j_0 = 1, \dots, m; i_0 \neq j_0$ and $a_{i_0,1} \in \{a_{j_0,2}, a_{j_0,3}, \dots, a_{j_0,k}\}$. It is clear that $a_{i_0,1} \neq a_{j_0,1}$. Let f' be the coloring of G such that

(a) $f'(u_{j_0}) = a_{i_0,1}$;

(b) $f'(u_i) = a_{i,1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq j_0$;

(c) $f'(v_i) = b_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, n$;

(d) $f'(w_i) = c_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, p$.

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction.

(v) Similar proofs (iii).

(vi) Similar proofs (iii).

Set $\overline{f(v)} = L(v) \setminus \{f(v)\}$ for every $v \in V(G)$.

THEOREM 3. (i) $|f(V_i)| > k - 2$ for every $i = 1, 2, 3$;

(ii) $\cup_{v \in V_i} \overline{f(v)} \subseteq f(V_j \cup V_t)$ for every $i, j, t \in \{1, 2, 3\}$ and i, j, t are doubles a distinction;

(iii) $\cup_{v \in V(G)} \overline{f(v)} \subseteq f(V(G))$;

(iv) There exists $v \in V_i \cup V_j$ such that $\overline{f(v)} \subseteq f(V_t)$ for every $i, j, t \in \{1, 2, 3\}$ and i, j, t are doubles a distinction.

PROOF. (i) For suppose on the contrary that $|f(V_1)| = t \leq k - 2$. Set $H = G - V_1$, it is not difficult to see that H is complete bipartite graph $K_{n,p}$. We assign the following lists $L'(v)$ for the vertices v of H :

If $f(V_1) \subseteq L(v)$ then $L'(v) = L(v) \setminus f(V_1)$.

If there exists $A \subseteq f(V_1)$ such that $A \cap L(v) = \emptyset$, then

$$L'(v) = L(v) \setminus \{d_1, d_2, \dots, d_{t-|A|}, e_1, e_2, \dots, e_{|A|}\},$$

where

$$d_1, d_2, \dots, d_{t-|A|} \in L(v) \setminus A, e_1, e_2, \dots, e_{|A|} \in L(v)$$

and $f(v) \notin \{e_1, e_2, \dots, e_{|A|}\}$.

It is clear that $|L'(v)| = k - t \geq 2$ for every $v \in V(H)$. By Lemma 3, H has the property $M(2)$. So by Lemma 1, H has the property $M(k - t)$. It follows that with lists $L'(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v of H . So it is not difficult to see that with lists $L(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction. Thus, $|f(V_1)| > k - 2$.

By the same method of proof as above, we can also prove that $|f(V_2)| > k - 2$ and $|f(V_3)| > k - 2$.

(ii) For suppose on the contrary that $\cup_{v \in V_1} \overline{f(v)} \not\subseteq f(V_2 \cup V_3)$. Then there exists i_0, j_0 such that $a_{i_0, j_0} \notin f(V_2 \cup V_3)$ with $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$. Let f' be the coloring of G such that

(a) $f'(u_{i_0}) = a_{i_0, j_0}$;

(b) $f'(u_i) = a_{i, 1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq i_0$;

(c) $f'(v_i) = b_{i, 1}$ for every $i = 1, \dots, n$;

(d) $f'(w_i) = c_{i, 1}$ for every $i = 1, \dots, p$.

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction. Thus,

$$\cup_{v \in V_1} \overline{f(v)} \subseteq f(V_2 \cup V_3).$$

By the same method of proof as above, we can also prove that $\cup_{v \in V_2} \overline{f(v)} \subseteq f(V_1 \cup V_3)$ and $\cup_{v \in V_3} \overline{f(v)} \subseteq f(V_1 \cup V_2)$.

(iii) For suppose on the contrary that $\cup_{v \in V(G)} \overline{f(v)} \not\subseteq f(V(G))$. Without loss of generality, we may assume that there exists i_0, j_0 such that $a_{i_0, j_0} \notin f(V(G))$ with $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$.

Let f' be the coloring of G such that

(a) $f'(u_{i_0}) = a_{i_0, j_0}$;

(b) $f'(u_i) = a_{i, 1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq i_0$;

(c) $f'(v_i) = b_{i, 1}$ for every $i = 1, \dots, n$;

(d) $f'(w_i) = c_{i, 1}$ for every $i = 1, \dots, p$.

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction.

(iv) For suppose on the contrary that $\overline{f(v)} \not\subseteq f(V_1)$ for every $v \in V_2 \cup V_3$, then $|\overline{f(v)} \setminus f(V_1)| \geq 1$ for every $v \in V_2 \cup V_3$. So $|L(v) \setminus f(V_1)| \geq 2$ for every $v \in V_2 \cup V_3$. Set graph

$$H = G - V_1 = G[V_2 \cup V_3] = K_{n,p}.$$

Let $L'(v) \subseteq L(v) \setminus f(V_1)$ such that $|L'(v)| = 2$ for every $v \in V_2 \cup V_3$. By Lemma 3, H has the property $M(2)$, it follows that with lists $L'(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v for every $v \in V_2 \cup V_3$. So it is not difficult to see that with lists $L(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction. Thus, there exists $v \in V_2 \cup V_3$ such that $\overline{f(v)} \subseteq f(V_1)$.

By the same method of proof as above, we can also prove that there exists $v \in V_1 \cup V_3$ such that $\overline{f(v)} \subseteq f(V_2)$ and there exists $v \in V_1 \cup V_2$ such that $\overline{f(v)} \subseteq f(V_3)$.

3. On property $M(4)$ of some complete tripartite graphs

Set the complete tripartite graph $G = K_{m,n,p}$. Let $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ is a partition of $V(G)$ such that $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_3 = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ and for every $i = 1, 2, 3$ the subgraphs of G induced by V_i , is empty graph.

LEMMA 7. $m(K_{2,2,p}) = 3$ if $1 \leq p \leq 2$.

PROOF. By Lemma 3, G is U2LC. Suppose that G is U3LC. By Lemma 5, $|V(G)| \geq 7$, a contradiction. So $m(G) = 3$.

LEMMA 8 ([10]). $m(K_{2,2,3}) = m(K_{2,3,3}) = 3$.

LEMMA 9 ([17]). $m(K_{2,2,p}) = 3$ if $4 \leq p \leq 8$.

LEMMA 10. $m(K_{2,2,p}) = 3$ if $1 \leq p \leq 8$.

PROOF. It follows from Lemma 7, Lemma 8 and Lemma 9.

LEMMA 11 ([18]). *The graph $K_{2,3,4}$ has the property $M(3)$.*

LEMMA 12. $m(K_{2,3,4}) = 3$.

PROOF. It follows from Lemma 3 and Lemma 11.

THEOREM 4. $G = K_{m,n,p}$ is U3LC if one of the following conditions occurs.

- (i) $m \geq 2, n \geq 2$ and $p \geq 9$;
- (ii) $m \geq 2, n \geq 3$ and $p \geq 5$;
- (iii) $m \geq 2, n \geq 4$ and $p \geq 4$;
- (iv) $m, n, p \geq 3$.

PROOF. (i) We assign the following lists for the vertices of G : $L(u_1) = \{1, 2, 6\}$, $L(u_2) = L(u_3) = \dots = L(u_m) = \{3, 4, 5\}$;

$L(v_1) = \{1, 3, 6\}$, $L(v_2) = L(v_3) = \dots = L(v_n) = \{2, 4, 6\}$;

$L(w_1) = \{1, 4, 5\}$, $L(w_2) = \{1, 3, 6\}$, $L(w_3) = \{1, 4, 6\}$, $L(w_4) = \{1, 5, 6\}$, $L(w_5) = \{2, 3, 4\}$, $L(w_6) = \{2, 3, 5\}$, $L(w_7) = \{2, 3, 6\}$, $L(w_8) = \{2, 4, 6\}$, $L(w_9) = L(w_{10}) = \dots = L(w_p) = \{2, 5, 6\}$.

A unique coloring f of G exists from the assigned lists: $f(u_1) = 6, f(u_2) = f(u_3) = \dots = f(u_m) = 5$;

$f(v_1) = 3, f(v_2) = f(v_3) = \dots = f(v_n) = 4$;

$f(w_1) = f(w_2) = f(w_3) = f(w_4) = 1, f(w_5) = f(w_6) = \dots = f(w_p) = 2$.

(ii) We assign the following lists for the vertices of G : $L(u_1) = \{1, 3, 6\}$, $L(u_2) = L(u_3) = \dots = L(u_m) = \{2, 4, 5\}$;

$L(v_1) = \{1, 2, 3\}$, $L(v_2) = L(v_3) = \dots = L(v_n) = \{2, 4, 5\}$;

$L(w_1) = \{1, 3, 5\}$, $L(w_2) = \{1, 4, 5\}$, $L(w_3) = \{1, 4, 6\}$, $L(w_4) = \{2, 3, 4\}$, $L(w_5) = L(w_6) = \dots = L(w_p) = \{2, 5, 6\}$.

A unique coloring f of G exists from the assigned lists: $f(u_1) = 6, f(u_2) = f(u_3) = \dots = f(u_m) = 5$;

$f(v_1) = 3, f(v_2) = f(v_3) = \dots = f(v_n) = 4$;

$f(w_1) = f(w_2) = f(w_3) = 1, f(w_4) = f(w_5) = \dots = f(w_p) = 2$.

(iii) We assign the following lists for the vertices of G : $L(u_1) = \{1, 3, 5\}$, $L(u_2) = L(u_3) = \dots = L(u_m) = \{2, 4, 6\}$;

$L(v_1) = \{1, 2, 3\}$, $L(v_2) = \{1, 3, 5\}$, $L(v_3) = \{1, 2, 4\}$, $L(v_4) = L(v_5) = \dots = L(v_n) = \{2, 4, 6\}$;

$L(w_1) = \{1, 4, 5\}$, $L(w_2) = \{1, 3, 6\}$, $L(w_3) = \{2, 3, 4\}$, $L(w_4) = L(w_5) = \dots = L(w_p) = \{2, 5, 6\}$.

A unique coloring f of G exists from the assigned lists: $f(u_1) = 5, f(u_2) = f(u_3) = \dots = f(u_m) = 6$;

$f(v_1) = f(v_2) = 3, f(v_3) = f(v_4) = \dots = f(v_n) = 4$;

$f(w_1) = f(w_2) = 1, f(w_3) = f(w_4) = \dots = f(w_p) = 2.$

(iv) We assign the following lists for the vertices of G : $L(u_1) = \{1, 4, 6\}, L(u_2) = \{2, 3, 6\}, L(u_3) = L(u_4) = \dots = L(u_m) = \{2, 4, 5\};$

$L(v_1) = \{2, 3, 6\}, L(v_2) = \{1, 2, 4\}, L(v_3) = L(v_4) = \dots = L(v_n) = \{4, 5, 6\};$

$L(w_1) = \{2, 3, 5\}, L(w_2) = \{2, 4, 6\}, L(w_3) = L(w_4) = \dots = L(w_p) = \{3, 4, 6\}.$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists: $f(u_1) = 1, f(u_2) = f(u_3) = \dots = f(u_m) = 2;$

$f(v_1) = 3, f(v_2) = f(v_3) = \dots = f(v_n) = 4;$

$f(w_1) = 5, f(w_2) = f(w_3) = \dots = f(w_p) = 6.$

COROLLARY. (i) $G = K_{2,2,p}$ is U3LC if and only if $p \geq 9$;

(ii) $G = K_{2,3,p}$ is U3LC if and only if $p \geq 5$;

(iii) $G = K_{2,4,p}$ is U3LC if and only if $p \geq 4$;

(iv) $G = K_{3,3,p}$ is U3LC if and only if $p \geq 3$.

PROOF. (i) It follows from Lemma 10 and (i) of Theorem 3.

(ii) It follows from (ii) of Theorem 1, Lemma 8 and Lemma 12.

(iii) It follows from (ii) of Theorem 1, Lemma 10 and Lemma 12.

(iv) It follows from (ii) of Theorem 1 and Lemma 8.

LEMMA 13. *The graph $G = K_{2,n,p}$ has the property $M(4)$.*

PROOF. For suppose on the contrary that G is U4LC. Then for each vertex v in G , there exists a list of 4 colors $L(v)$, such that there exists a unique L -coloring for G . By (i) of Theorem 3 we have $2 = |V_1| \geq |f(V_1)| > 4 - 2 = 2$, contradiction. Thus, $G = K_{2,n,p}$ has the property $M(4)$.

The join of O_m and K_n , $O_m + K_n = S(m, n)$, is called a complete split graph.

LEMMA 14 ([10]). *For every $n \geq 2$, we have $m(S(3, n)) = 3$.*

THEOREM 5. (i) $m(K_{2,2,p}) = 4$ if and only if $p \geq 9$;

(ii) $m(K_{2,3,p}) = 4$ if and only if $p \geq 5$;

(iii) $m(K_{2,4,p}) = 4$ if and only if $p \geq 4$;

(iv) $m(K_{3,3,3}) = 4$.

PROOF. (i) It follows from (i) of Theorem 4 and Lemma 13.

(ii) It follows from (ii) of Theorem 4 and Lemma 13.

(iii) It follows from (iii) of Theorem 4 and Lemma 13.

(iv) For suppose on the contrary that $G = K_{3,3,3}$ is U4LC. Then for each vertex v in G , there exists a list of 4 colors $L(v)$, such that there exists a unique L -coloring for G . By (i) of Theorem 3, $|f(V_1)|, |f(V_2)| > 4 - 2 = 2$, it follows that $|f(V_1)| = |f(V_2)| = 3$. So $f(u_i) \neq f(u_j)$ and $f(v_i) \neq f(v_j)$ for every $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Set graph $G' = (V', E')$ with $V' = V(G)$,

$$E' = E(G) \cup \{u_i u_j | i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j\} \cup \{v_i v_j | i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j\}.$$

It is clear that G' is complete split graph $S(3, 6)$. By Lemma 14, G' has the property $M(3)$. By Lemma 1, G' has the property $M(4)$, so with lists $L(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v of G' . Since $V(G) = V(G')$, it is not difficult to see that with lists $L(v)$, there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction. Thus, G has the property $M(4)$. By (iv) of Theorem 4, we have $m(K_{3,3,3}) = 4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Behzad, *Graphs and their chromatic number*, Doctoral Thesis (Michigan State University), 1965.

2. M. Behzad and G. Chartrand, *Introduction to the theory of graphs*, Allyn and Bacon, Boston, 1971.
3. M. Behzad, G. Chartrand and J. Cooper, *The coloring numbers of complete graphs*, J. London Math. Soc. № 42 (1967), 226 – 228.
4. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, MacMillan, 1976.
5. R. Diestel, *Graph Theory*, Springer – Verlag New York, 2000.
6. J.H. Dinitz and W.J. Martin, The stipulation polynomial of a uniquely list colorable graph, *Austran. J. Combin.* № 11 (1995) 105–115.
7. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of west coast conference on combinatorics, graph theory, and computing*, number 26 in Congr. Numer., pages 125–157, Arcata, CA, September 1979.
8. M. Ghebleh and E.S. Mahmoodian, On uniquely list colorable graphs, *Ars Combin.* № 59 (2001) 307–318.
9. Le Xuan Hung, Colorings of the graph $K_2^m + K_n$, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, to appear.
10. M. Mahdian and E.S. Mahmoodian, A characterization of uniquely 2-list colorable graphs, *Ars Combin.* № 51 (1999) 295–305.
11. R.C. Read, An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory* № 4 (1968) 52–71.
12. Ngo Dac Tan and Le Xuan Hung, On colorings of split graphs, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 31, № 3, 2006, pp. 195 – 204.
13. V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p -graph, *Discret. Analiz.* № 3 (1964), pp. 23–30. (In Russian)
14. V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. In *Diskret. Analiz*, № 29 in Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem, pp. 3–10, 1976.
15. W. Wang and X. Liu, List-coloring based channel allocation for open-spectrum wireless networks, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Vehicular Technology (VTC '05)*, 2005, pp. 690 – 694.
16. R.J. Wilson, *Introduction to graph theory*, Longman group ltd, London, (1975).
17. Yancai Zhao and Erfang Shan, On characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, № 30, 2010, pp. 105–114.
18. Y.Q. Zhao, W.J. He, Y.F. Shen and Y.N. Wang, Note on characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs, in: *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory*, LNCS 4381 (Springer, Berlin, 2007, pp. 278–287.

REFERENCES

1. M. Behzad, 1965, “Graphs and thei chromatic number”, Doctoral Thesis (Michigan State University).

2. M. Behzad and G. Chartrand, 1971, "Introduction to the theory of graphs", Allyn and Bacon, Boston.
3. M. Behzad, G. Chartrand and J. Cooper, 1967, "The coloring numbers of complete graphs", J. London Math. Soc. № 42, pp. 226 – 228.
4. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, 1976, "Graph theory with applications", MacMillan.
5. R. Diestel, 2000, "Graph Theory", Springer – Verlag New York.
6. J.H. Dinitz and W.J. Martin, 1995, "The stipulation polynomial of a uniquely list colorable graph", *Austran. J. Combin.* № 11, pp. 105–115.
7. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, 1979, "Choosability in graphs". In *Proceedings of west coast conference on combinatorics, graph theory, and computing*, number 26 in Congr. Numer., pp. 125–157, Arcata, CA.
8. M. Ghebleh and E.S. Mahmoodian, 2001, "On uniquely list colorable graphs", *Ars Combin.* № 59, pp. 307–318.
9. Le Xuan Hung, "Colorings of the graph $K_2^m + K_n$ ", *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, to appear.
10. M. Mahdian and E.S. Mahmoodian, 1999, "A characterization of uniquely 2-list colorable graphs", *Ars Combin.* № 51, pp. 295–305.
11. R.C. Read, 1968, "An introduction to chromatic polynomials", *J. Combin. Theory*, № 4, pp. 52–71.
12. Ngo Dac Tan and Le Xuan Hung, 2006, "On colorings of split graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, Volume 31, № 3, pp. 195 – 204.
13. V.G. Vizing, 1964, "On an estimate of the chromatic class of a p -graph", *Discret. Analiz.* № 3, pp. 23–30. (In Russian).
14. V. G. Vizing ,1976, "Coloring the vertices of a graph in prescribed colors". In *Diskret. Analiz*, number 29 in Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem, pp. 3–10.
15. W. Wang and X. Liu, 2005, "List-coloring based channel allocation for open-spectrum wireless networks", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Vehicular Technology (VTC '05)*, pp. 690 – 694.
16. R.J. Wilson, 1975, *Introduction to graph theory*, Longman group ltd, London.
17. Yancai Zhao and Erfang Shan, 2010, "On characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, № 30, pp. 105–114.
18. Y.Q. Zhao, W.J. He, Y.F. Shen and Y.N. Wang, 2007, "Note on characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs", in: *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory*, LNCS 4381 (Springer, Berlin, pp. 278–287.

Получено 12.11.21

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-179-190

Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения¹

А. Д. Бреки, С. Е. Александров, А. С. Биль, С. Г. Чулкин, В. А. Яхимович,
А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Протопопов

Бреки Александр Джалюльевич — доктор технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Александров Сергей Евгеньевич — доктор химических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Биль Анастасия Сергеевна — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Чулкин Сергей Георгиевич — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Яхимович Валерий Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Колмаков Алексей Георгиевич — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН (г. Москва).

e-mail: imetranlab10@mail.ru

Протопопов Евгений Александрович — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: pea_12@mail.ru

Аннотация

В статье представлена обобщённая эмпирическая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения. На примере трения шара из стали ШХ15 по покрытиям из SiO_2 , нанесённым на плоские поверхности из поликарбоната и полиэтилентерефталата, показано, что существуют отклонения от стационарного значения силы трения при скольжении на небольшие расстояния. Разработанная математическая модель описывает фрикционное взаимодействие как при стационарном значении силы трения, так и при отклонениях от него.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: "Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии № 22-19-00178.

Ключевые слова: математическая модель трения, покрытие из диоксида кремния, поликарбонат, полиэтилентерефталат, градиент механических свойств, трение покоя, трение скольжения.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. Д. Бреки, С. Е. Александров, А. С. Биль, С. Г. Чулкин, В. А. Яхимович, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Протопопов. Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 179–190.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-179-190

Generalized mathematical model of the dynamics of the change in the friction force at rest and the beginning of sliding²

A. D. Breki, S. E. Alexandrov, A. S. Biel, S. G. Chulkin, V. A. Yakhimovich,
A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Protopopov

Breki Alexander Dzhalyulyevich — doctor of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Aleksandrov Sergey Evgenievich — doctor of chemical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Biel Anastasia Sergeevna — graduate student, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Chulkin Sergey Georgievich — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru

Yakhimovich Valery Alexandrovich — graduate student, Peter the Great St Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Gvozdev Aleksander Evgenyevich — doctor of technical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Kolmakov Alexey Georgievich — doctor of technical science, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science (Moscow).

²The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation for the priority area of activity of the Russian Science Foundation "Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by individual scientific groups" to the scientific project: "Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium steam turbine blades and their operation under conditions of drop impact erosion № 22-19-00178.

e-mail: imetranlab10@mail.ru

Protopopov Evgeny Aleksandrovich — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: pea_12@mail.ru

Abstract

In the article a generalized empirical mathematical model of the dynamics of changes in the friction force at rest and the beginning of sliding is presented. Using the example of the friction of a ball made of ShKh15 steel over SiO_2 coatings deposited on flat surfaces made of polycarbonate and polyethylene terephthalate, it is shown that there are deviations from the stationary value of the friction force when sliding over short distances. The developed mathematical model describes the frictional interaction both at a stationary value of the friction force and at deviations from it.

Keywords: friction mathematical model, silicon dioxide coating, polycarbonate, polyethylene terephthalate, gradient of mechanical properties, static friction, sliding friction.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. D. Breki, S. E. Alexandrov, A. S. Biel, S. G. Chulkin, V. A. Yakhimovich, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Protopopov, 2022, "Generalized mathematical model of the dynamics of the change in the friction force at rest and the beginning of sliding", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 179–190.

1. Введение

Трение принято разделять на статическое и динамическое. Переход от статического трения к динамическому трению реализуется после некоторого критического перемещения двух твёрдых тел относительно друг друга. Это критическое перемещение получило название «предельное предварительное смещение». Перемещение, величина которого меньше предельного, называется просто «предварительным смещением». При предварительном смещении реализуется движение на микроуровне, а после преодоления предельного предварительного смещения начинается движение на макроуровне [1].

Явление предварительного смещения было выявлено и исследовано А.В. Верховским [2, 3] и Дж. С. Ренкиным [4]. Вопросы тангенциальной жесткости и предварительного смещения [5] рассматривались в работах Г.А. Томлинсона [6], С.Э. Хайкина, А.Е. Саломоновича и А.П. Лисовского [7], В.С. Щедрова [8], И.В. Крагельского и Н.М. Михина [9], И.Р. Коняхина [10], Б.П. Митрофанова [11], Шилько С.В. [12–14].

Схема типичной зависимости средней силы трения от предварительного смещения и после него показана на рисунке 1а.

Согласно представленному на рисунке 1а закону максимальная сила статического трения всегда больше силы трения движения:

$$F_{fS} > F_{fst}, \quad (0)$$

а работа силы трения при предварительном смещении, в случае больших путей трения, много меньше общей работы силы трения:

$$W_{f\delta} \ll W_f. \quad (0)$$

Неравенство (1) впервые установил Леонард Эйлер [15–17], а также указал на скачкообразный переход от покоя к скольжению.

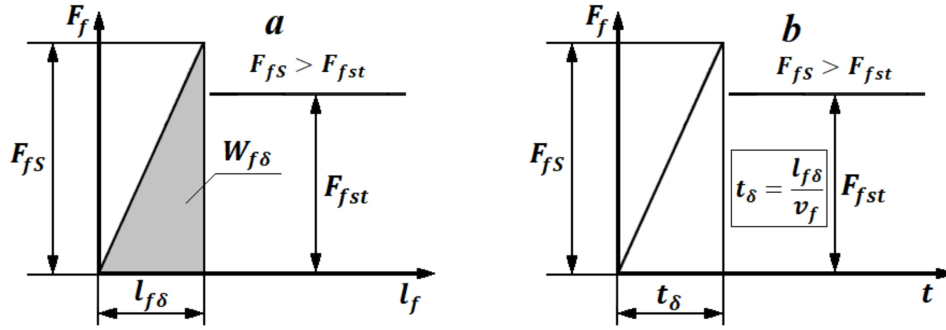


Рис. 1: Схема зависимости средней силы трения от пути трения [1]: F_{fs} - максимальная сила статического трения; $l_{f\delta}$ - предварительное смещение; F_{fst} - стационарная сила трения движения; l_f - путь трения

Схема зависимости средней силы трения от времени при постоянной скорости скольжения имеет вид, аналогичный схеме зависимости средней силы трения от предварительного смещения (рисунок 1b).

Соответственно, в линейном приближении, основной закон изменения средней силы трения от пути трения при мгновенном переходе от покоя к скольжению имеет следующий вид:

$$F_f(l_f) = \begin{cases} k_{l\delta} \cdot l_f, & 0 < l_f < l_{f\delta}, \\ F_{fst}, & l_f > l_{f\delta}, \end{cases} \quad (0)$$

где $k_{l\delta}$ - эмпирический коэффициент; $F_{fst} = \text{const}$ - установившееся (стационарное) значение средней силы трения движения.

Соотношение (3) выполняется в условиях опытов, которые были поставлены от Леонардо да Винчи до Шарля Кулона, то есть на скользящих контактах, где изнашивание и изменение физических, химических и механических свойств поверхностных слоёв незначительны, а также не происходит изменения внешних условий, влияющих на процесс трения. В реальных условиях фрикционного взаимодействия твёрдых тел, периодически меняются как внешние условия, так и процессы, происходящие на скользящих контактах. Изменение состояний области контакта в процессе трения приводит в итоге к более сложным зависимостям силы трения от пути. С одной стороны, более сложные зависимости связаны с изменениями фактической площади контакта, а с другой стороны они связаны с переходами трибологической системы из одного состояния в другое при изменении процессов, происходящих в зоне трения [1]. В связи с этим, можно составить дополненную схему динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения (рисунок 2).

Следует отметить, что зависимости, представленные на рисунке 2, относятся к малым путям трения и малым скоростям скольжения без существенных преобразований физико-химического состояния поверхностных слоёв. Зависимость $OAXS$ отражает классическое изменение силы трения при переходе от покоя к скольжению, которое описывал Леонард Эйлер (точка A соответствует началу скольжения). Изменение фактической площади контакта (ФПК) для графика $OAXS$ проиллюстрировано на рисунке 3а.

Для случаев, показанных на рисунке 3b,c,d после «срыва» и начала скольжения сила трения продолжает расти до точки B , в которой происходит новый «срыв» уже в процессе скольжения и, в зависимости от материала поверхностных слоёв, их состояния, анизотропии физико-механических свойств и т.п. сила трения падает, а затем растёт, устанавливается либо уменьшается (возможны и комбинации). Рисунок 3 иллюстрирует эти изменения за счёт смены величины ФПК, однако важную роль играет также и удельная сила межмолекулярного притяжения.

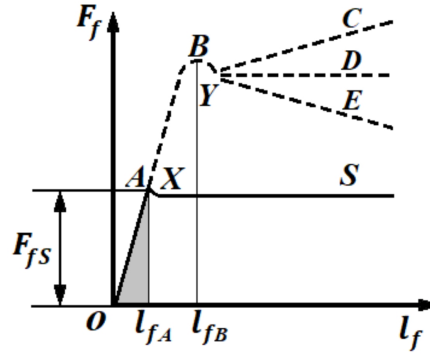


Рис. 2: Дополненная схема зависимости средней силы трения от пути трения (A – точка начала скольжения)

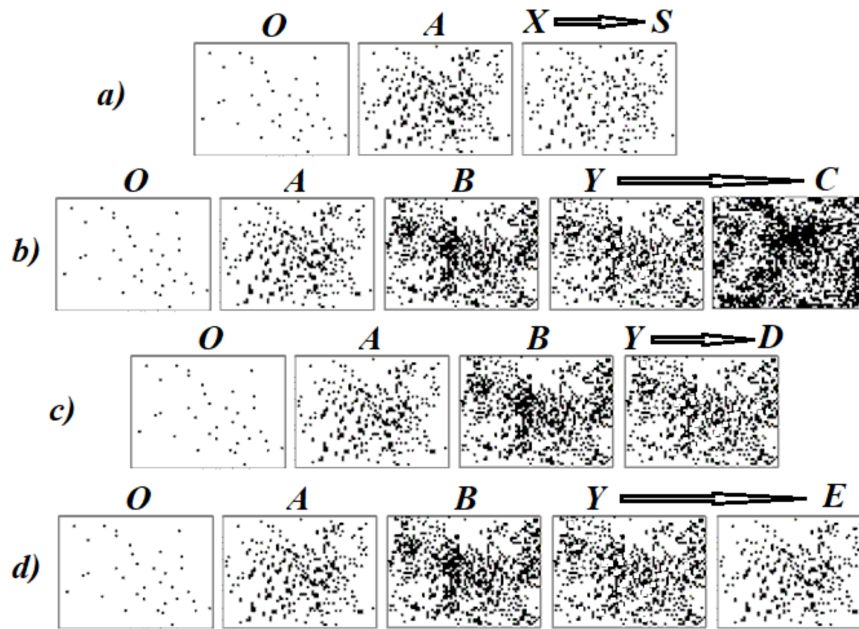


Рис. 3: Изменение фактической площади контакта при фиксированной нагрузке, малых перемещениях и небольших скоростях скольжения (аналогия с 2D перколяцией [18])

На рисунке 2 приведено графическое представление зависимостей силы трения от пути, однако нет их аналитического представления.

В работе [1] предложена следующая математическая модель, которая была использована для описания динамики изменения силы трения (во времени):

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{C_{i,1}x + C_{i,2}}{1 + \exp(-\psi_i \cdot (x - x_i))}. \quad (0)$$

Анализ графиков на рисунке 2 (с учётом комбинаций) позволил предположить, что зависимость силы трения от пути может быть представлена в виде (4) при $n = 3$, причём при $i = 1$, параметры $x_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ и $C_{1,2} = 0$ (образовавшийся множитель 0,5 опускаем):

$$F_f(l_f) = C_{1,1}l_f + \frac{C_{2,1}l_f + C_{2,2}}{1 + \exp(-\psi_2 \cdot (l_f - l_{f2}))} + \frac{C_{3,1}l_f + C_{3,2}}{1 + \exp(-\psi_3 \cdot (l_f - l_{f3}))}, \quad (0)$$

где ψ_i – резкость изменения силы трения при i -м качественном изменении состояния фрик-

ционного контакта ($\psi_1 = 0$), $C_{i,1}$ – эмпирические коэффициенты, характеризующие интенсивность изменения силы трения, $C_{i,2}$ – эмпирические коэффициенты, характеризующие уровень повышения или снижения силы трения ($C_{1,2} = 0$), l_f – путь трения, l_{fi} – значения пути, соответствующие максимальной (минимальной) интенсивности изменения силы трения ($l_{f1} = 0$).

В границах данной работы реализована проверка математической модели (5) посредством экспериментального определения зависимостей силы трения от пути при скольжении стального шара по полимерным материалам как в чистом виде, так и с нанесённым на них покрытием.

2. Материалы и методика исследования

Для экспериментальной верификации математической модели (5) использовали следующие материалы пар трения:

1. Полиэтилентерефталат (ПЭТ) в виде прямоугольной пластины;
2. Поликарбонат в виде прямоугольной пластины;
3. Полиэтилентерефталат с покрытием из SiO_2 ;
4. Поликарбонат с покрытием из SiO_2 ;
5. Шар из стали марки ШХ15, диаметром 12,7 мм (0,5 дюйма).

Осаждение покрытий на ПЭТ и поликарбонат проводилось в плазме диэлектрического барьерного разряда при атмосферном давлении. Высота разрядного промежутка составляла 7 мм, подводимая мощность – 6 Вт. Рабочая атмосфера состояла из гелия и паров реагента, в качестве которого выступал тетраэтоксисилан (ТЭОС). Парциальное давление ТЭОС в реакторе составляло 115 Па. В течение всего процесса полимерные подложки находились при температуре 50°C.

С точки зрения химии полученные покрытия представляют собой оксид кремния с внедренными в структуру фрагментами CH_x групп, что было установлено при помощи ИК Фурье спектроскопии. Толщина полученных покрытий составляет приблизительно 440 нм.

Для оценки трения между поверхностью шара из стали ШХ15 и полимерными пластинами с покрытиями и без них была использована машина трения модели МТВМ (рисунок 4), позволяющая оценивать трение при малых скоростях скольжения и сверхмедленном скольжении.

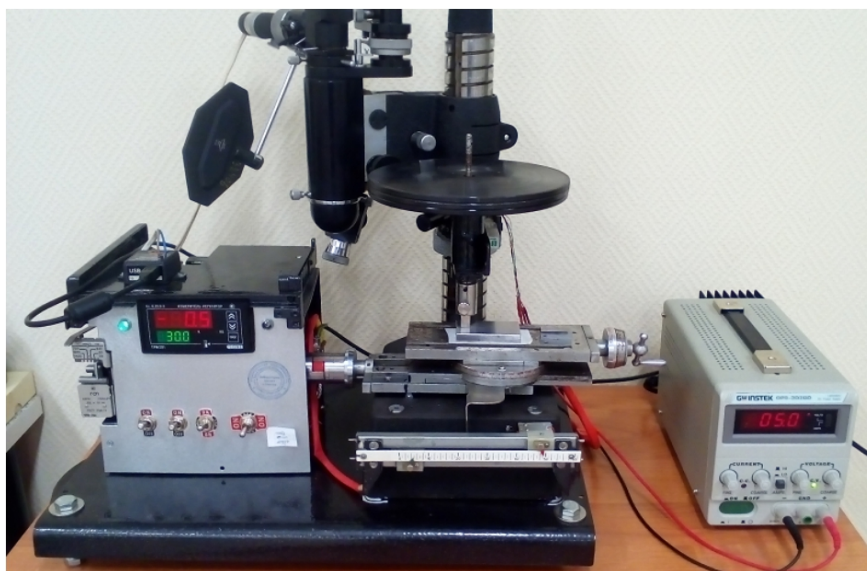


Рис. 4: Внешний вид машины трения МТВМ

Данная установка позволяет проводить испытания со скоростями скольжения от 37 нм/с

до 0,125 мм/с при контактном давлении до 100 МПа.

Для реализации данного исследования в условиях скольжения поверхностей использовалась схема испытаний «шар – плоскость» в режиме поступательного движения.

Неподвижным, жестко зафиксированным телом был стальной шар. Подвижными телами были пластины из полиэтилентерефталата и поликарбоната.

Контактное взаимодействие подвижного и неподвижного тела реализовывалось с нормальной силой $F_N = 13$ Н. Скорость скольжения составляла 0,125 мм/с. Путь трения в одном опыте составлял 10 мм. Для испытания каждого образца производилось по 5 опытов при указанном комплексе условий.

3. Результаты и их обсуждение

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по поликарбонату приведены на рисунке 5.

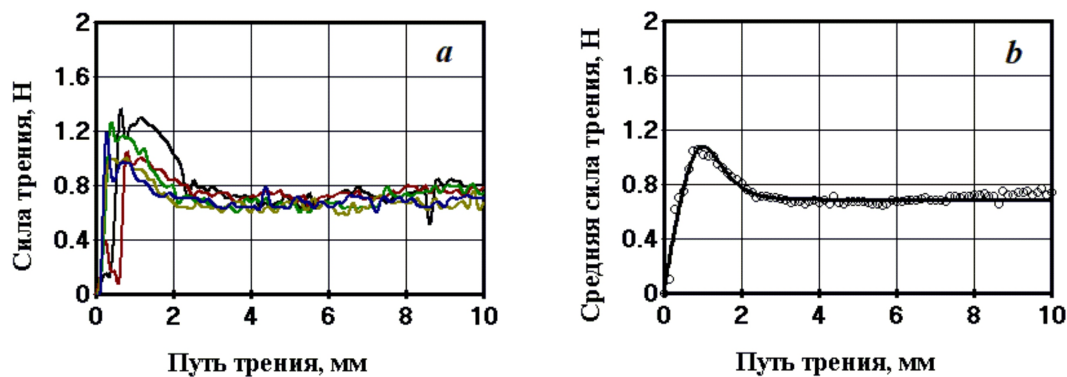


Рис. 5: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по поликарбонату: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

На рисунке 5а показана совокупность из 5 реализаций случайной функции (изменений силы трения в зависимости от пути в i -м опыте). Для анализа взяли 80 сечений совокупности реализаций, начиная с точки $l_f = 0,125$ мм, с шагом (периодом дискретизации) $l_{fd} = 0,125$ мм. Для каждого фиксированного сечения определили среднее значение силы трения, в результате получили соответствующую диаграмму рассеяния (точки на рисунке 5б), точки которой аппроксимировали функцией:

$$\bar{F}_f(l_f) = 1,6l_f + \frac{0,69 - 1,6l_f}{1 + \exp(-3(l_f - 0,9))}, \quad (0)$$

где $\bar{F}_f(l_f)$ - средняя арифметическая сила трения по 5 реализациям случайной функции.

Интегрируя (6) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по поликарбонату:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[1,6l_f + \frac{0,69 - 1,6l_f}{1 + \exp(-3(l_f - 0,9))} \right] dl_f \cong 7,2 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по покрытию из SiO_2 на поверхности поликарбоната приведены на рисунке 6.

На рисунке 6а показана совокупность из 5 реализаций случайной функции. Усреднение в этом и последующих экспериментах осуществляли так, как и в предыдущем случае. Зависимость средней силы трения шара по покрытию из SiO_2 на поверхности поликарбоната (рисунок 6б) выражается следующей формулой:

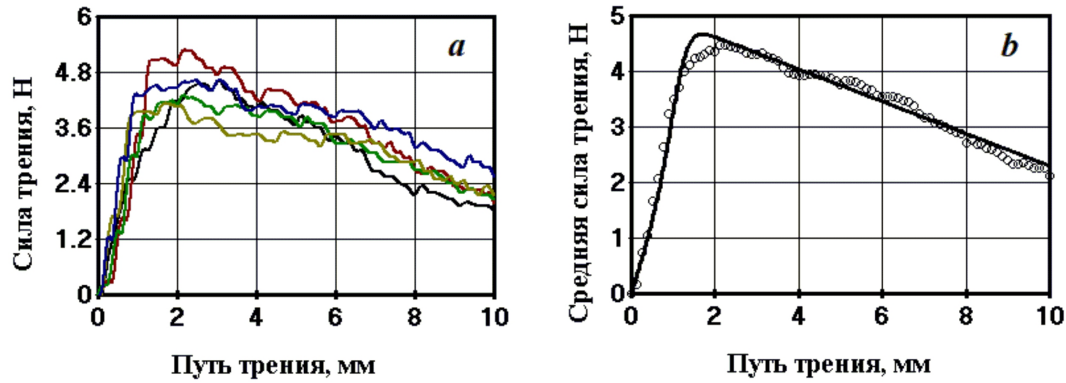


Рис. 6: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по SiO_2 на поликарбонате: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

$$\bar{F}_f(l_f) = 2,3l_f + \frac{5,2 - 2,59l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))}. \quad (0)$$

Интегрируя (8) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по покрытию из SiO_2 на поверхности поликарбоната:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[2,3l_f + \frac{5,2 - 2,59l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} \right] dl_f \cong 33,5 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по ПЭТ приведены на рисунке 7.

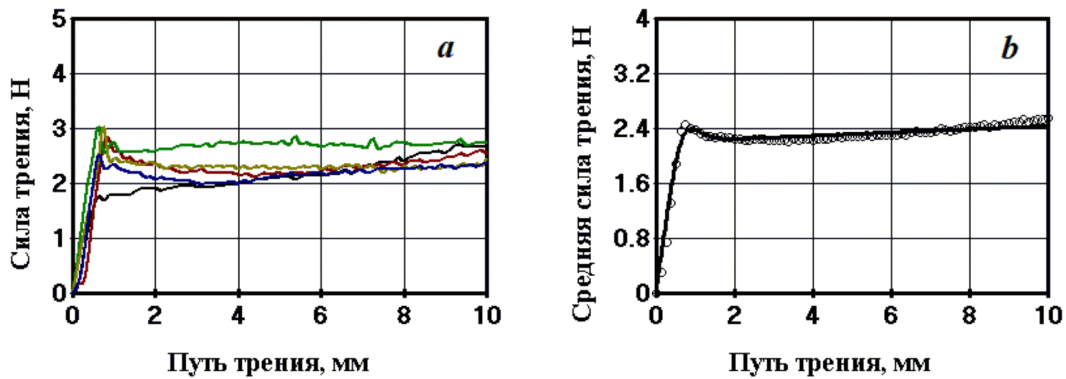


Рис. 7: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по ПЭТ: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

Зависимость средней силы трения шара по поверхности ПЭТ (рисунок 7б) выражается следующей формулой:

$$\bar{F}_f(l_f) = 3,5l_f + \frac{2,2 - 3,476l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 0,6))}. \quad (0)$$

Интегрируя (10) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по ПЭТ:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[3,5l_f + \frac{2,2 - 3,476l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 0,6))} \right] dl_f \cong 22,7 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Наконец, результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по покрытию из SiO_2 на поверхности ПЭТ приведены на рисунке 8.

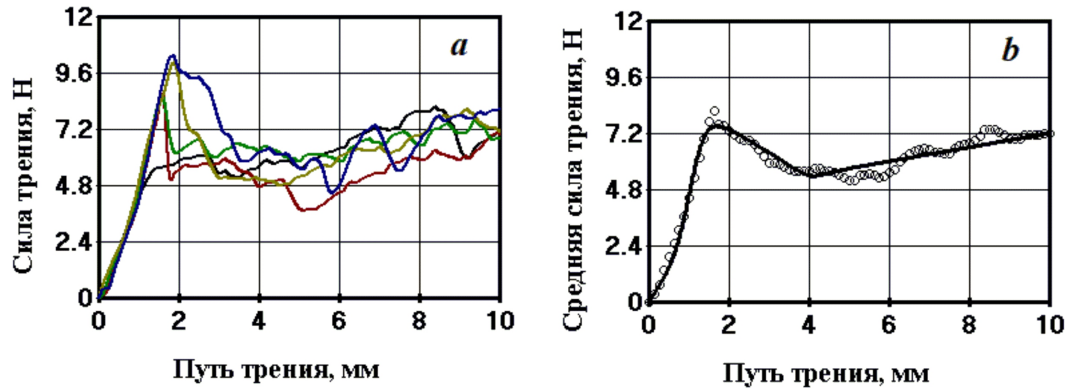


Рис. 8: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по SiO_2 на ПЭТ: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

Зависимость средней силы трения шара по покрытию из SiO_2 на поверхности ПЭТ (рисунок 8б) выражается следующей формулой:

$$\bar{F}_f(l_f) = 2,3l_f + \frac{9,4 - 3,3l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} + \frac{1,3l_f - 5,18}{1 + \exp(-5(l_f - 4,0))}. \quad (0)$$

Интегрируя (12) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по покрытию из SiO_2 на поверхности ПЭТ:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[2,3l_f + \frac{9,4 - 3,3l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} + \frac{1,3l_f - 5,18}{1 + \exp(-5(l_f - 4,0))} \right] dl_f \cong 59,3 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Значение среднего коэффициента трения определяется по следующей формуле:

$$\bar{f} = \frac{\int_0^{l_{fmax}} \bar{F}_f(l_f) dl_f}{F_{\dot{N}} \cdot l_{fmax}} = \frac{\bar{A}_f}{F_{\dot{N}} \cdot l_{fmax}}, \quad (0)$$

где $\bar{f}$ - средний коэффициент трения для всего пути скольжения, l_{fmax} - максимальное значение перемещения (пути трения), $F_{\dot{N}}$ - фиксированное значение нормальной силы, $\bar{A}_f$ - средняя работа силы трения (работа трения является характеристикой энергетических потерь в процессе фрикционного взаимодействия и интегрально характеризует антифрикционные свойства материала).

В результате расчётов по формуле (14) получены следующие значения средних коэффициентов трения:

- 1) для поликарбоната – 0,055;
- 2) для поликарбоната с покрытием из SiO_2 – 0,26;
- 3) для полиэтилентерефталата – 0,175;
- 4) для полиэтилентерефталата с покрытием из SiO_2 – 0,46.

Увеличение коэффициента трения может быть обусловлено возникновением отрицательного градиента механических свойств (по И.В. Крагельскому) в результате реализации технологического процесса нанесения покрытий. Также это явление может быть обусловлено избыточным давлением на покрытия, вследствие которого происходило разрушение, вносящее вклад в увеличение коэффициента трения.

4. Выводы

На основе полученных в экспериментальном исследовании результатов можно сделать следующие основные выводы:

1. Разработана дополненная схема зависимости средней силы трения от пути трения, учитывающая вариант роста силы трения после срыва и начала движения твёрдого тела. При этом показан вариант «срыва второго рода», который возникает в процессе движения, после которого может быть стационарное значение силы трения, её рост либо снижение.

2. Предложена новая математическая модель для описания динамики изменения силы трения при покое и начале движения твёрдого тела, описывающая все характерные участки разработанной схемы.

3. Реализована экспериментальная проверка новой математической модели при трении шара из стали ШХ15 по пластинам из поликарбоната, полиэтилентерефталата без покрытий и с покрытиями из SiO_2 , в результате которой установлена её справедливость для данных пар трения.

4. Для исследуемых пар трения при выбранном комплексе условий характерен рост силы трения после начала движения, и известная схема *OAXS* не соблюдается. При этом для поликарбоната характерна зависимость типа *OABYD*, для поликарбоната с покрытием из SiO_2 характерна зависимость типа *OABYE*, а для ПЭТ и ПЭТ с покрытием из SiO_2 характерна зависимость типа *OABYC*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреки А. Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.
2. Верховский А. В., Авраамов В. М. Явление предварительных смещений при трогании с места катка // Известия Томского политехнического института. 1947. Т. 61. Вып. 1. С. 53-54.
3. Верховский А. В. Явление предварительного смещения при трогании несмазанных поверхностей с места // Журнал прикладной физики. 1926. Т.3. Вып. 3-4. С. 72-74.
4. Rankin J. S. The elastic range of friction // Philosophical Magazine. 1926. Vol. (8) 2. P. 806.
5. Максак В. И., Доцинский Г. А. Исследование явлений упругого предварительного смещения в связи с проблемой точности в машино- и приборостроении // Известия Томского политехнического института. 1972. Т. 225. С. 208-211.
6. Tomlinson G. A. A molecular theory of friction // Philosophical Magazine Series. 1929. Vol. 7. P. 935-939.
7. Хайкин С. Э., Саломонович А. Е., Лисовский Л. П. О силах сухого трения // Трение и износ в машинах. Сб. науч. тр. М.: АН СССР, 1939. Т. 1. С. 468-479.
8. Щедров В. С. Предварительное смещение на упруго-вязком контакте // Трение и износ в машинах. Сб. науч. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1950. № 5. С. 101-110.
9. Крагельский И. В., Михин Н. М. О природе контактного предварительного смещения твердых тел // Доклады АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 78-81.

10. Коняхин И. Р. Теория предварительных смещений применительно к вопросам контактирования деталей. Томск: Издательство Томского ун-та, 1965. 115 с.
11. Митрофанов Б. П. О деформации дискретного контакта: Автореферат дис. на соискание ученой степени кандидата технических наук / Томский политехн. ин-т им. С. М. Кирова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. 14 с.
12. Шилько С. В. Вариационный анализ предварительного смещения при упругом контактировании. Ч.1: Расчет параметров НДС // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 5. С. 795-800.
13. Шилько С. В. Вариационный анализ предварительного смещения при упругом контактировании. Ч.2: Определение характеристик трения и износа // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 973-978.
14. Шилько С. В., Кухорев Л. П. Методика и результаты исследования металлополимерного контактного сопряжения в условиях предварительного смещения // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 1. С. 101-109.
15. Журавлев В. Ф. К истории закона сухого трения // Доклады Академии наук. 2010. Т. 433. № 1. С. 46-47.
16. Журавлёв В. Ф. К истории закона сухого трения // Известия Российской академии наук. Механика тв-го тела. 2013. № 4. С. 13-19.
17. Журавлев В. Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2014. № 2 (53). С. 21-31.
18. Breki A., Nosonovsky M. Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition // Applied Physics Letters. 2018. Vol. 113. No 24. P. 241602.

REFERENCES

1. Breki, A. D. 2021, *Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricants in conditions of spontaneous changes in the states of friction contact: dissertation... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulevich Breki*, Saint Petersburg.
2. Verkhovsky, A. V. & Avraamov, V. M. 1947, "The phenomenon of preliminary displacements when starting from the rink", *Proceedings of the Tomsk Polytechnic Institute*, vol. 61, no. 1, pp. 53-54.
3. Verkhovsky, A. V. 1926, "The phenomenon of preliminary displacement when moving non-lubricated surfaces from a place", *Journal of Applied Physics*, vol. 3, no. 3-4, pp. 72-74.
4. Rankin, J. S. 1926, "The elastic range of friction", *Philosophical Magazine*, vol. (8) 2, p. 806.
5. Maksak, V. I. & Doschinsky, G. A. 1972, "Investigation of elastic pre-displacement phenomena in connection with the problem of accuracy in machine and instrument engineering", *Izvestiya Tomsk Polytechnic Institute*, vol. 225, pp. 208-211.
6. Tomlinson, G. A. 1929, "A molecular theory of friction", *Philosophical Magazine Series*, vol. 7, pp. 935-939.
7. Khaykin, S. E., Salomonovich, A. E. & Lisovsky, L. P. 1939, "On dry friction forces", *Friction and wear in machines. Collection of scientific tr.*, vol. 1, pp. 468-479.

8. Shchedrov, B. C. 1950, "Preliminary displacement on elastic-viscous contact", *Friction and wear in machines. Collection of scientific tr.*, no. 5, pp. 101-110.
9. Kragelsky, I. V. & Mikhin, N. M. 1963, "On the nature of contact preliminary displacement of solids", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 153, no. 1, pp. 78-81.
10. Konyakhin, I. R. 1965, *Theory of preliminary displacements in relation to the issues of contacting parts*, Publishing House of Tomsk University, Tomsk.
11. Mitrofanov, B. P. 1964, *On the deformation of discrete contact: Abstract of dis. for the degree of Candidate of Technical Sciences*, Tomsk Polytechnic University, Tomsk.
12. Shilko, C. B. 1992, "Variational analysis of preliminary displacement during elastic contact. Part 1: Calculation of VAT parameters", *Friction and wear*, vol. 13, no. 5, pp. 795-800.
13. Shilko, C. B. 1992, "Variational analysis of preliminary displacement during elastic contact. Part 2: Determination of friction and wear characteristics", *Friction and wear*, vol. 13, no. 6, pp. 973-978.
14. Shilko, S. V. & Kukhorev, L. P. 2007, "Methodology and results of the study of metal-polymer contact coupling under conditions of preliminary displacement", *Friction and wear*, vol. 28, no. 1, pp. 101-109.
15. Zhuravlev, V. F. 2010, "On the history of the law of dry friction", *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 433, no. 1, pp. 46-47.
16. Zhuravlev, V. F. 2013, "On the history of the law of dry friction", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The mechanics of the TV body*, no. 4, pp. 13-19.
17. Zhuravlev, V. F. 2014, "500 years of the history of the law of dry friction", *Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences series*, no. 2 (53), pp. 21-31.
18. Breki, A. & Nosonovsky, M, 2018. "Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition", *Applied Physics Letters*, vol. 113, no. 24, p. 241602.

Получено 6.03.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 51-76

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-191-200

Математические модели внедрения стального шарообразного индентора в титановый сплав при трении в биологических смазочных средах¹

А. А. Стрельникова, А. Д. Бреки, М. А. Скотникова, Д. Г. Плотников, Ю. Подгурскас,
А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

Стрельникова Ангелина Анатольевна — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: strelnikova.angelina@bk.ru

Бреки Александр Джалюльевич — доктор технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Скотникова Маргарита Александровна — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Плотников Дмитрий Георгиевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

e-mail: albreki@yandex.ru

Подгурскас Юозас — доктор технических наук, профессор, Университет Александра Стулгинскиса (г. Каунас, Литва).

e-mail: juozas.padgurskas@asu.lt

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В работе приведены результаты исследования влияния биологических смазочных сред на трибологические свойства пары трения «сталь – титановый сплав». Трибологические испытания проводились при вдавливании (царапании) на пути трения 2 мм с увеличением нагрузки от 0,030 до 10 Н на приборе MicroIndentation Tester CSM. Исследования проводили при различных условиях: сухое трение, с гиалуроновой кислотой и с биологическим маслом. Установлено, что смазочные среды биологического происхождения создают граничные смазочные слои на поверхностях трения и способны уменьшать изнашивание вследствие микрорезания. Реализована разработка и экспериментальная проверка математической модели, выражающей зависимость глубины внедрения от пути трения и других параметров.

Ключевые слова: биологические смазочные среды, высокотемпературная деформация, титановый сплав, трибологические свойства.

Библиография: 23 названий.

¹Исследование проведено в рамках гранта по программе Erasmus на обучение в весеннем семестре 2020 года. Авторы выражают благодарность сотрудникам Университета Витаутаса Великого за помощь в проведении эксперимента.

Для цитирования:

А. А. Стрельникова, А. Д. Бреки, М. А. Скотникова, Д. Г. Плотников, Ю. Подгурскас, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математические модели внедрения стального шарообразного индентора в титановый сплав при трении в биологических смазочных средах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 191–200.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 51-76

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-191-200

Research of the influence of biological lubricants on the tribological properties of the steel - titanium alloy friction pair²

A. A. Strelnikova, A. D. Breki, M. A. Skotnikova, D.G. Plotnikov, J. Padgurskas, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

Strelnikova Angelina Anatolyevna — postgraduate student, Russia, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: strelnikova.angelina@bk.ru

Breki Alexander Dzhalyulevich — doctor of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Skotnikova Margarita Aleksandrovna — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great, Russia (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Plotnikov Dmitry Georgievich — candidate of technical sciences, associate professor, St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great (St. Petersburg).

e-mail: albreki@yandex.ru

Padgurskas Juozas — doctor of technical sciences, professor, Alesandras Stulginskis University (Kaunas, Lithuania).

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The paper presents the results of a study of the influence of biological lubricants on the tribological properties of the friction pair "steel - titanium alloy". Tribological tests were carried out with indentation (scratching) on a friction path of 2 mm with an increase in load from 0.030 to 10 N on a Micro Indentation Tester CSM. The studies were carried out under various conditions: dry rubbing, with hyaluronic acid and with biological oil. It was found that lubricating media of biological origin create boundary lubricating layers on friction surfaces and are able to reduce wear due to microcutting. The development and experimental verification of

²The research was carried out within the framework of a grant under the Erasmus program for training in the spring semester of 2020. The authors are grateful to the staff of Vytautas Magnus University for their help in carrying out the experiment.

a mathematical model expressing the dependence of the penetration depth on the friction path and other parameters has been implemented.

Keywords: biological lubricating media, titanium alloy, high-temperature deformation, tribological properties.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. A. Strelnikova, A. D. Breki, M. A. Skotnikova, D.G. Plotnikov, J. Padgurskas, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2022, "Research of the influence of biological lubricants on the tribological properties of the steel-titanium alloy friction pair", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 191–200.

1. Введение

Последние десятилетия титановые сплавы являются объектом пристального внимания материаловедов, конструкторов, архитекторов с точки зрения возможностей использования в различных видах строительных конструкций и монументальных сооружений [1, 2, 3, 4]. Также множество работ посвящено изучению влияния различных видов обработок на механические свойства и структуру титановых сплавов [5, 6, 7, 8, 9].

Использование титановых сплавов при изготовлении деталей машин и оборудования, является общемировой тенденцией. Одно из наиболее важных применений титановые сплавы находят в сфере атомной энергетики. Из них изготавливаются полуфабрикаты теплообменного оборудования, корпусное оборудование атомных энергетических установок и турбинные лопатки [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Необходимо отметить, что для изготовления указанных деталей важно знать не только механические свойства применяемых материалов, но и их трибологические свойства. Это связано с необходимостью принятия решений на этапе опытно-конструкторской разработки деталей и узлов машин, работающих в условиях трения. Проблема изучения трибологических свойств титановых сплавов посвящен ряд исследований, например, [17, 18, 19], но результаты данных исследований не являются всеобъемлющими и требуют дополнительных уточнений, в том числе с помощью проведения экспериментальных исследований. В частности, целесообразным является проведение исследований глубины внедрения индентора в зависимости от пути трения. В данной работе приведены результаты экспериментального исследования трибологических характеристик пары трения «титановый сплав 3М – сталь». В качестве основной трибологической характеристики использована величина внедрения стального индентора в контртело из титанового сплава (испытания на внедрение).

2. Методы и материалы исследования

Исследования влияния биологических смазочных сред на трибологические свойства пары трения «сталь – титановый сплав» осуществляли на приборе MicroIndentation Tester CSM. Схема испытаний приведена на рисунке 1.

В работе исследовались образцы титанового сплава 3М со степенью деформации 80%, полученные в результате высокотемпературной обработки давлением – ковкой. Образцы находятся в отожженном состоянии. Процесс трения происходил между образцами титанового сплава и стальным шариком (использовался шарик диаметром 6,35 мм из стали ШХ15). Исследования проводили при трёх условиях трения (сухом трении, с биологическим маслом (рапсовое масло с присадками) и с гиалуроновой кислотой) при вдавливании (царапании) на пути трения 2 мм с увеличением нагрузки от 0,030 до 10 Н.

Аппроксимацию и анализ экспериментальных данных осуществляли в соответствии с методиками, описанными в работах [20, 21, 22, 23]. Зависимость глубины внедрения от пути трения может быть представлена в виде следующей формулы [20]:

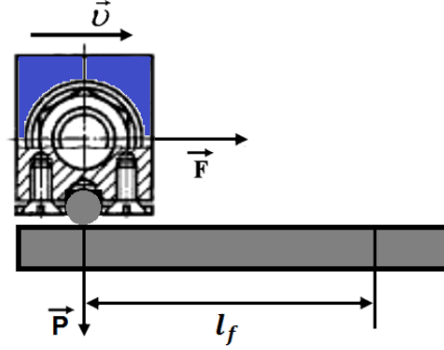


Рис. 1: Схема испытаний: F — сила тяги, v — скорость скольжения, P — нагрузка

$$h(l_f) = I \cdot l_f - \frac{\Delta I}{r} \cdot \ln(1 + \exp(r(l_f - l_{cr}))), \quad (0)$$

где h — глубина внедрения, I — интенсивность внедрения, l_f — путь трения, ΔI — приращение интенсивности внедрения при переходе к установившемуся режиму, r — резкость изменения интенсивности внедрения, l_{cr} — величина пути трения, соответствующая максимальной интенсивности внедрения.

3. Результаты и обсуждения

На рисунке 2 приведены графики результатов проведения трибологических испытаний (Scratch) образцов титанового сплава 3М со степенью деформации 80% при трении с биологическим маслом, с гиалуроновой кислотой и при сухом трении.

В результате аппроксимации экспериментальных точек, полученных при степени деформации 80% в условиях сухого трения, с использованием (2) установлена следующая зависимость:

$$h(l_f) = 10700 \cdot l_f - \left(\frac{8720}{25} \right) \cdot \ln(1 + \exp(25(l_f - 0,15))). \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что в условиях сухого трения приращение (убыль) интенсивности внедрения при переходе к установившемуся режиму составило $\frac{8720}{25} \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, резкость изменения интенсивности внедрения составила 25 мм^{-1} , а величина пути трения, соответствующая максимальной интенсивности внедрения составила 0,15 мм.

Дифференцируя (3) получим зависимость интенсивности внедрения индентора от пути трения при режиме сухого трения:

$$I(l_f) = \frac{dh}{dl_f} = 10700 - \frac{8720}{1 + \exp(-25(l_f - 0,15))}. \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что исходная интенсивность внедрения ($l_f = 0$) составила $1050 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, а установившаяся интенсивность внедрения в условиях сухого трения составила $1980 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$.

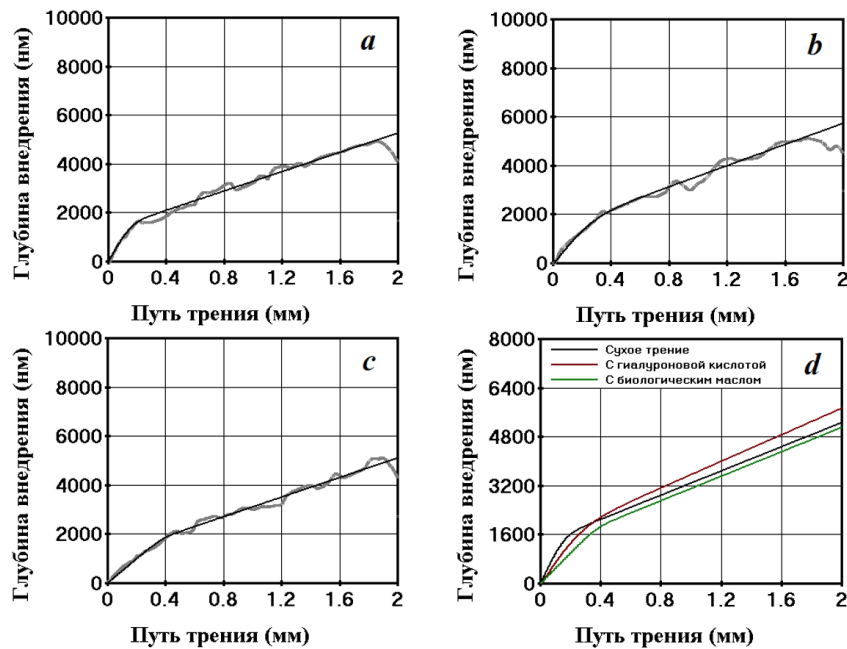


Рис. 2: Графики результатов проведения трибологических испытаний образцов со степенью деформации 80%: *a* — сухое трение; *b* — трение с гиалуроновой кислотой; *c* — трение с биологическим маслом; *d* — общий график зависимости

В условиях трения с гиалуроновой кислотой, с использованием (2) установлена следующая зависимость:

$$h(l_f) = 8400 \cdot l_f - \left(\frac{6230}{10} \right) \cdot \ln(1 + \exp(10(l_f - 0,224))). \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что в условиях трения с гиалуроновой кислотой приращение (убыль) интенсивности внедрения при переходе к установившемуся режиму составило $6230 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, резкость изменения интенсивности внедрения составила 10 мм^{-1} , а величина пути трения, соответствующая максимальной интенсивности внедрения составила 0,224 мм.

Дифференцируя (3) получим зависимость интенсивности внедрения индентора от пути трения при режиме трения с гиалуроновой кислотой:

$$I(l_f) = \frac{dh}{dl_f} = 8400 - \frac{6230}{1 + \exp(-10(l_f - 0,224))}. \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что исходная интенсивность внедрения составила $7800 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, а установившаяся интенсивность внедрения в условиях трения с гиалуроновой кислотой составила $2170 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$.

В условиях трения с биологическим маслом, с использованием (2) установлена следующая зависимость:

$$h(l_f) = 5000 \cdot l_f - \left(\frac{3000}{25} \right) \cdot \ln(1 + \exp(25(l_f - 0,37))). \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что в условиях трения с биологическим маслом приращение (убыль) интенсивности внедрения при переходе к установившемуся режиму составило $3000 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, резкость изменения интенсивности внедрения составила 25 мм^{-1} , а величина пути трения, соответствующая максимальной интенсивности внедрения составила 0,37 мм.

Дифференцируя (3) получим зависимость интенсивности внедрения индентора от пути трения при режиме трения с биологическим маслом:

$$I(l_f) = \frac{dh}{dl_f} = 5000 - \frac{3000}{1 + \exp(-25(l_f - 0,37))}. \quad (0)$$

Из уравнения (3) следует, что исходная интенсивность внедрения составила $5000 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$, а установившаяся интенсивность внедрения в условиях трения с биологическим маслом составила $2000 \frac{\text{нм}}{\text{мм}}$.

Графики функций (3), (3) и (3) приведены на рисунке 3.

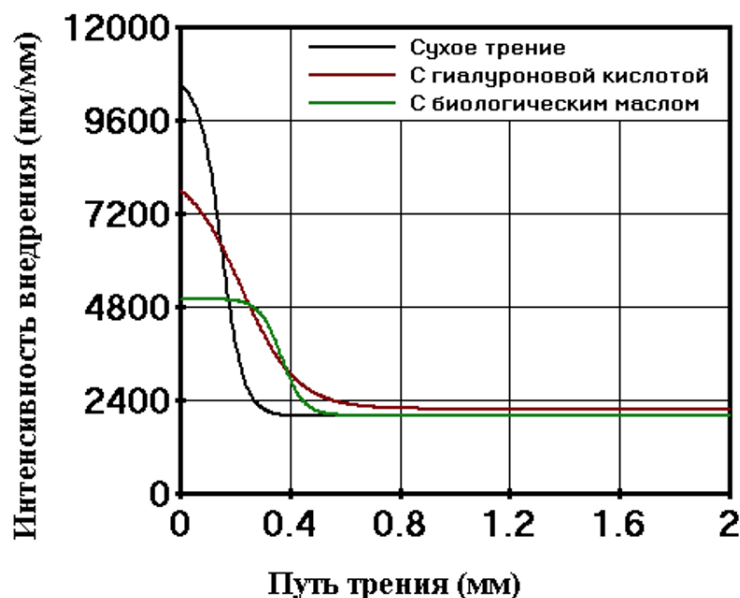


Рис. 3: Зависимости интенсивности внедрения от пути трения

Экспериментальные точки на графиках глубины внедрения (рис. 2) располагаются «ступенчатым образом», это обусловлено несколькими обстоятельствами:

1. образованием частиц фрикционного переноса при увеличении нагрузки во время проведения испытания;
2. шероховатостью поверхностей трения;
3. анизотропией поверхностных слоёв трущихся тел.

Из полученных данных следует, что при трении в среде гиалуроновой кислоты исходная интенсивность внедрения снижается на 25,7% относительно режима сухого трения, что связано с действием граничного слоя. При трении в среде биологического масла исходная интенсивность внедрения снижается на 52,4% (в 2 раза), что связано с образованием прочного граничного слоя.

При разделении тел слоем гиалуроновой кислоты величина пути трения, соответствующая максимальной интенсивности внедрения увеличилась на 47% относительно сухого трения, а в случае биологического масла в 2,5 раза, что также говорит о наличии несущей способности граничного слоя.

Установившиеся значения интенсивности внедрения для всех условий близки по величине (отличаются в пределах экспериментальной погрешности), что связано с разрывом граничных смазочных слоёв после прохождения индентором определённого пути трения.

4. Заключение

В результате проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

1. Разработанная математическая модель зависимости глубины внедрения стального шарообразного индентора в плоский образец из титанового сплава от пути трения описывает как нелинейное, так и линейное изменение данной трибологической характеристики.
2. Биологические смазочные среды способствуют образованию граничных слоёв на поверхностях трения, что создаёт объективные предпосылки для снижения изнашивания вследствие микрорезания.
3. Из полученных данных следует, что при трении в среде биологического масла исходная интенсивность внедрения снижается на 36% (а путь трения до максимальной интенсивности внедрения увеличился на 65%) относительно гиалуроновой кислоты, что связано с более высокой несущей способностью смазочного слоя.
4. Так как непрерывно происходит совершенствование материалов и конструкций машин и оборудования, то очень актуальным является не только применение уже известных методов исследования материалов и анализа экспериментальных данных, но также развитие и совершенствование методов и методик исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tomoyuki Kaya. Recent developments in Research, production and application of titanium in Japan / Kaya Tomoyuki // Ti-2007. Science and technology. Proceedings of the 11th World conference on titanium. Kyoto. Japan. 2007. pp. 49–56.
2. Wang Hao. Overview and prospect of the world titanium emerging applications market / Hao Wang // Ti-2011. Science and technology. Proceedings of the 12th World conference on titanium. Beijing. China. 2011. pp. 2227–2231.
3. Niinomi Mitsuo Recent trends in titanium research and development in Japan / MitsuoNiinomi // Ti-2011. Science and technology. Proceedings of the 12th World conference on titanium. Beijing. China. 2011. pp. 30–37.
4. Niinomi Mitsuo, Kazuo Kagami. Recent topics of titanium research and development in Japan / MitsuoNiinomi, Kazuo Kagami // Ti-2015. Science and technology. Proceedings of the 13th World conference on titanium. SanDiego. USA. 2016. pp. 27–40.
5. Jing Li, Jianzhong Zhou, Aixin Feng, Shu Huang, XiankaiMeng, Yunhui Sun, Yunjie Sun, Xuliang Tian and Yu Huang, Investigation on mechanical properties and microstructural evolution of TC6 titanium alloy subjected to laser peening at cryogenic temperature, Materials Science & Engineering A, 734, 2018, pp. 291–298.
6. L.C. Zhou, Y.H. Li, W.F. He, G.Y. He, X.F. Nie, D.L. Chen, Z.L. Lai, Z.B. An, Deforming TC6 titanium alloys at ultrahigh strain rates during multiple laser shock peening, Materials Science & Engineering A. 578 (2013) 181–186.
7. R. Shi, Z.H. Nie, Q.B. Fan, F.C. Wang, Y. Zhou, X. Liu, Correlation between dislocation-density-based strain hardening and microstructural evolution in dual phase TC6 titanium alloy, Materials Science & Engineering A. 715 (2018), 101–107.

8. Ночовная Н.А., Ширяев А.А. Влияние режимов термической обработки на механические свойства и структуру экспериментальной композиции высокопрочного псевдо- β -титанового сплава // Труды ВИАМ. 2018. № 6 (66). С. 22–29.
9. Sokolov S.A., Plotnikov D.G., Grachev A.A., Lebedev V.A. Evaluation of loads applied on engineering structures based on structural health monitoring data. *International Review of Mechanical Engineering*, 2020, 14(2), С. 146–150.
10. Skotnikova M.A., Krylov N.A., Ivanova G.V., Tsvetkova A.A. (2015) Structural and phase transformation in material of blades of steam turbines from titanium alloy after technological treatment. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 22:93-101.
11. Shaboldo O.P., Vitorskii Y.M., Skotnikova M.A. (2017) Formation of the structure and properties of β -type titanium alloy upon thermomechanical treatment. *Physics of Metals and Metallography* 18:75-80.
12. Скотникова М.А., Иванова Г.В., Попов А.А., Паитова О.В. Локализация пластической деформации в ГПУ-кристаллах при вдавливании и царапании. Современное машиностроение: Наука и образование: материалы 6-й международной научно-практической конференции / Под ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. с. 402–412.
13. Skotnikova M.A., Ivanova G.V., Strelnikova A.A. Macromechanism destruction of structurally and crystallographically textured titanium billets/ *International Conference on Industrial Engineering*. Springer, Cham, 2019. Pp. 1097–1105.
14. Skotnikova M.A., Strelnikova A.A., Ivanova G.V., Popov A.A. Syundyukov I.S. Localization of plastic deformation in austenitic steel at low-temperature cycling loading/ *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2020. Pp. 175–182.
15. Skotnikova M.A., Krylov N.A. About the Nature of Dissipative Processes in Cutting Treatments of Titanium Vanes / *Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference “Modern Engineering: Science and Education”*, Saint Petersburg, Russia, June 2016. Springer - Verlag. Berlin-Heidelberg. 2017. Pp. 115–124.
16. Cong Li, Like Qin, Ming Li, Hui Xiao, Qi Wang, Jian Chen, Influence of deformation strain rate on the mechanical response in a metastable b titanium alloy with various microstructures, *Journal of Alloys and Compounds*, Volume 815, (2020)
17. Белый А.В., Кукареко В.А., Кононов А.Г. и др. // Трение и износ. – 2008. – Т. 29. – № 6. – С. 571–577.
18. Чертовских С. В. Триботехнические характеристики ультрамелкозернистого титана и его сплавов: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 2008.
19. В.М. Савостиков, А.И. Потекаев, А.Н. Табаченко, Е.Ф. Дударев, И.А. Шулепов, Физико-механические и трибологические свойства титановых сплавов с градиентным антифрикционным покрытием Ti–C–Mo–S, *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2012. – Т. 55. – № 9. – С. 71–77.
20. Breki, A.D., Chulkin, S.G., Gvozdev, A.E., Kuzovleva, O.V. On the evolution of mathematical models of friction sliding of solids // *Chebyshevskii Sbornik* this link is disabled, 2020, 21(4), С. 327–332.

21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Kuzovlev V.Yu. Empirical mathematical models of plasticity, strength and wear resistance of materials on the example of P18 steel // *Chebyshevskii Sbornik* this link is disabled, 2020, 21(3), стр. 272–291.
22. Breki, A.D., Chulkin, S.G., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G. Mathematical Simulation of the Sliding Friction of Silicon Carbide in an Aqueous Medium // *Russian Metallurgy (Metally)* this link is disabled, 2021, 2021(4), стр. 507–511.
23. Breki, A.D., Chulkin, S.G., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Kuzovleva, O.V. Empirical Mathematical Model for the Wear Kinetics of Porous Gas-Thermal Coatings // *Russian Metallurgy (Metally)* this link is disabled, 2021, 2021(4), стр. 496–500.

REFERENCES

1. Tomoyuki Kaya. 2007, “Recent developments in Research, production and application of titanium in Japan”, Ti-2007. *Science and technology. Proceedings of the 11th World conference on titanium*, Kyoto, Japan. pp. 49–56.
2. Wang Hao. 2011, “Overview and prospect of the world titanium emerging applications market”, Ti-2011. *Science and technology. Proceedings of the 12th World conference on titanium*, Beijing. China. pp. 2227–2231.
3. Niinomi Mitsuo 2011, “Recent trends in titanium research and development in Japan”, Ti-2011. *Science and technology. Proceedings of the 12th World conference on titanium*, Beijing. China. pp. 30–37.
4. Niinomi Mitsuo, Kazuo Kagami. 2016, “Recent topics of titanium research and development in Japan”, Ti-2015. *Science and technology. Proceedings of the 13th World conference on titanium*, San Diego. USA. pp. 27–40.
5. Jing Li, Jianzhong Zhou, Aixin Feng, Shu Huang, XiankaiMeng, Yunhui Sun, Yunjie Sun, Xuliang Tian and Yu Huang, 2018, “Investigation on mechanical properties and microstructural evolution of TC6 titanium alloy subjected to laser peening at cryogenic temperature”, *Materials Science & Engineering A*, 734, pp. 291–298.
6. L.C. Zhou, Y.H. Li, W.F. He, G.Y. He, X.F. Nie, D.L. Chen, Z.L. Lai, Z.B. An, 2013, “Deforming TC6 titanium alloys at ultrahigh strain rates during multiple laser shock peening”, *Materials Science & Engineering A*. 578. pp. 181–186.
7. R. Shi, Z.H. Nie, Q.B. Fan, F.C. Wang, Y. Zhou, X. Liu, 2018, “Correlation between dislocation-density-based strain hardening and microstructural evolution in dual phase TC6 titanium alloy”, *Materials Science & Engineering A*. 715. pp. 101–107.
8. Nochovnaya N.A., Shiryaev A.A. 2018, “Influence of heat treatment modes on mechanical properties and structure of experimental composition of high-strength pseudo- β -titanium alloy”, *Trudy VIAM*. No. 6 (66). pp. 22–29.
9. Sokolov S.A., Plotnikov D.G., Grachev A.A., Lebedev V.A. 2020, “Evaluation of loads applied on engineering structures based on structural health monitoring data”, *International Review of Mechanical Engineering*, 14 (2). pp. 146–150.
10. Skotnikova M.A., Krylov N.A., Ivanova G.V., Tsvetkova A.A. 2015, “Structural and phase transformation in material of blades of steam turbines from titanium alloy after technological treatment”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. pp. 93–101.

11. Shaboldo O.P., Vitorskii Y.M., Skotnikova M.A. 2017, "Formation of the structure and properties of β -type titanium alloy upon thermomechanical treatment", *Physics of Metals and Metallography*, pp. 75–80.
12. Skotnikova M.A., Ivanova G.V., Popov A.A., Paitova O.V. 2017, *Localization of plastic deformation in hcp crystals upon indentation and scratching. Modern mechanical engineering: Science and education: materials of the 6th international scientific and practical conference*, Ed. A.N. Evgrafova and A.A. Popovich. SPb.: Publishing house of Polytechnic. University. 402–412.
13. Skotnikova M.A., Ivanova G.V., Strelnikova A.A. 2019, "Macromechanism destruction of structurally and crystallographically textured titanium billets", *International Conference on Industrial Engineering*. Springer, Cham. pp. 1097–1105.
14. Skotnikova M.A., Strelnikova A.A., Ivanova G.V., Popov A.A. Syundyukov I.S. 2020, "Localization of plastic deformation in austenitic steel at low-temperature cycling loading", *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. pp. 175–182.
15. Skotnikova M.A., Krylov N.A. 2017, "About the Nature of Dissipative Processes in Cutting Treatments of Titanium Vanes», *Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education"*, Saint Petersburg, Russia, June 2016. Springer - Verlag. Berlin-Heidelberg. pp. 115–124.
16. Cong Li, Like Qin, Ming Li, Hui Xiao, Qi Wang, Jian Chen. 2020, "Influence of deformation strain rate on the mechanical response in a metastable b titanium alloy with various microstructures", *Journal of Alloys and Compounds*. V.815.
17. Bely A.V., Kukareko V.A., Kononov A.G. and etc. 2008, "Friction and wear". T.29. No.6. pp. 571–577.
18. Chertovskikh S.V. 2008, "Tribotechnical characteristics of ultrafine-grained titanium and its alloys": Author. dis. ... Cand. tech. sciences.
19. Savostikov V.M., Potekaev A.I., Tabachenko A.N., Dudarev E.F., Shulepov I.A. 2012, "Physico-mechanical and tribological properties of titanium alloys with gradient antifriction coating Ti – C – Mo – S", *Bulletin of higher educational institutions. Physics*, Vol. 55, No.9. pp. 71–77.
20. Breki A.D., Chulkin S.G., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V. 2020, "On the evolution of mathematical models of friction sliding of solids", *Chebyshevskii Sbornik*, 21 (4). pp. 327–332.
21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Kuzovlev V.Yu. 2020, "Empirical mathematical models of plasticity, strength and wear resistance of materials on the example of P18 steel", *Chebyshevskii Sbornik*, 21 (3), pp. 272–291.
22. Breki A.D., Chulkin S.G., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2021, "Mathematical Simulation of the Sliding Friction of Silicon Carbide in an Aqueous Medium", *Russian Metallurgy (Metally)*, 4, pp. 507–511.
23. Breki A.D., Chulkin S.G., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Kuzovleva O.V. 2021, "Empirical Mathematical Model for the Wear Kinetics of Porous Gas-Thermal Coatings", *Russian Metallurgy (Metally)*, 4, pp. 496–500.

Получено 27.02.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-201-208

**О сумме характеров по модулю,
равному степени простого числа 2**

Х. аль-Ассад

Хафез аль-Ассад — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Аннотация

В данной работе найден аналог формулы А. Г. Постникова для примитивных характеров Дирихле по модулю, равному степени простого числа два. Вывод основан на детальном рассмотрении алгебраической структуры приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа два.

Ключевые слова: характеры Дирихле, формула Постникова, суммы характеров.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Х. аль-Ассад. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа 2 // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 201–208.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-201-208

**On the character sums modulo
equal of the power prime number 2**

H. Al-Assad

Hafez Al-Assad — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Abstract

In this paper the analog of A.G.Postnikov formula for a primitive Dirichlet's character on modulo equals a prime-power of number two is found. The deduction is based on the detail consideration the algebraic structure of a reducing of a residues system modulo of a prime-power of the number two.

Keywords: Dirichlet's character, Postnikov's formula, character sums.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

H. Al-Assad, 2022, "On the character sums modulo equal of the power prime number 2", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 201–208.

1. Введение

В 1955 г. А.Г.Постников нашел формулу, выражающую значения характера Дирихле по модулю, равному степени нечетного простого числа, в виде экспоненты с мнимым показателем и с многочленом в экспоненте. Тем самым задача об оценке неполной суммы характеров была сведена к оценке сумм Г.Вейля.

Дирихле (1837 г.) ввел в рассмотрение характеры для изучения распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть $D > 1$ — натуральное число, $(l, D) = 1$ и x — любое достаточно большое число. Тогда из расширенной гипотезы Римана при любом $D \leq x^{1/2-\varepsilon}$ для числа $\pi(x; D, l)$ простых чисел $p \leq x, p \equiv l \pmod{D}$ следует асимптотическая формула

$$\pi(x; D, l) = \frac{\pi(x)}{\varphi(D)}(1 + O((\ln x)^{-M})),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная, а M — как угодно велико.

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \dots x_k = n$. Тогда из расширенной гипотезы Римана при $D \leq x^{1/2-\varepsilon}$ и $x \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{x Q_k(\ln x)}{\varphi(D)}(1 + O((\ln x)^{-M})),$$

где $Q_k(x)$ — многочлен степени $k-1$ от переменной x с действительными коэффициентами, зависящими от k .

В настоящее время вышеприведенные асимптотики не удается получить. Тем не менее для последовательности чисел D , являющихся степенями фиксированного нечетного простого числа подобные асимптотики получены при $D \leq x^{3/8-\varepsilon}$ (1964 г., М. Б. Барбан, Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков) и (1979 г., М. М. Петечук).

В настоящей работе дан вывод аналога формулы А. Г. Постникова для примитивных характеров Дирихле по модулю, равному степени числа два.

2. Леммы о мультипликативной структуре приведенной системы вычетов по модулю, равному степени простого числа

Пусть p — простое число, μ — натуральное число. Как известно, приведенная система вычетов по модулю, равному $p^\mu, p > 2, \mu \geq 1$, степени простого числа, является циклической группой по умножению порядка $\varphi(p^\mu) = (p-1)p^{\mu-1}$. Ее обозначим P_μ . Группа P_μ разлагается в прямое произведение циклических групп P'_μ порядка $p-1$ и P''_μ порядка $p^{\mu-1}$. Данное утверждение основано на следующих леммах. Первая из них является следствием бинорма Ньютона.

ЛЕММА 1. Пусть $p \neq 2$ — простое число g — любое целое число, $c \equiv 1 + gp \pmod{p^2}$. Тогда

$$c^{p^{\mu-1}} \equiv 1 + gp^\mu \pmod{p^{\mu+1}}, \text{ если } \mu \geq 1.$$

Пусть, далее, $p = 2, c \equiv 1 + g2^2 \pmod{2^3}$. Тогда

$$c^{2^{\mu-2}} \equiv 1 + g2^\mu \pmod{2^{\mu+1}}, \text{ если } \mu \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [3], лемма 3, с.85.

Индукцией по параметру μ из леммы 1 выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $p > 2$ — простое число, $\mu \geq 2$ — натуральное. Тогда группа P'_μ порождается классом вычетов w по модулю p^μ , образованным любым первообразным корнем w_0 по модулю p и удовлетворяющим сравнению $w \equiv w_0^{p^{\mu-1}} \pmod{p^\mu}$, причем выполняются сравнения

$$w \equiv w_0 \pmod{p}, \quad w^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\mu}.$$

Группа P''_μ порождается при любом $g \not\equiv 0 \pmod{p}$ по рождается классом вычетов $1 + gp \pmod{p^\mu}$, например, $1 + p \pmod{p^\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [3], п. е), с.87.

Далее, из прямого произведения $P_\mu = P'_\mu \otimes P''_\mu$, находим следующее представление.

ЛЕММА 3. Пусть $p > 2, \mu \geq 2$. Тогда любой элемент $a \in P_\mu$ единственным образом представляется в виде

$$a \equiv w^{\alpha'} (1 + p)^{\alpha''} \pmod{p^\mu}, \quad 0 \leq \alpha' < p, \quad 0 \leq \alpha'' \leq p^{\mu-1},$$

где w — первообразный корень по модулю p с условием $w^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [3], III, с.88.

Другими словами, вычеты $w; 1+p$ являются базисом циклической группы P_μ . Это означает, что мультипликативным операциям в P_μ взаимно однозначно отвечают аддитивные операции с показателями $\alpha' \pmod{p-1}$ и $\alpha'' \pmod{p^{\mu-1}}$.

Весьма интересным представляется случай $p = 3$. В лемме 3 можно положить $w = -1$. Тогда для любого вычета a , взаимно простого с 3, получим

$$a \equiv (-1)^{\alpha'} 4^{\alpha''} \pmod{3^\mu},$$

причем, если a пробегает приведенную систему вычетов по модулю p^μ , т.е. все элементы группы P_μ , то показатели α' и α'' независимо друг от друга пробегает соответственно полные системы вычетов по модулям 2 и $3^{\mu-1}$ (см. [3], примеры, с.90). Этот случай $p = 3$ позволяет сформулировать подобное утверждение для $p = 2$.

3. О структуре приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа 2

Приведенная система вычетов по модулю, равному степени $\mu \geq 1$ простого числа 2 состоит из $\varphi(2^\mu) = 2^{\mu-1}$ вычетов. При $\mu \geq 2$ эта система вычетов образует мультипликативную группу P_μ , которая является прямым произведением двух циклических групп P'_μ и P''_μ соответственно порядков 2 и $2^{\mu-2}$.

ЛЕММА 4. Пусть $p = 2, \mu \geq 3$. Тогда для любого $a \in P_\mu$ имеет место однозначное представление через базисные классы вычетов по модулю 2^μ вида

$$a \equiv (-1)^{\alpha'} 5^{\alpha''} \pmod{2^\mu},$$

где показатели α' и α'' независимо друг от друга пробегает соответственно полные системы вычетов по модулям 2 и $2^{\mu-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [3], V, с.92.

Отметим отличие циклической группы P_μ при $p > 2$, т.е. существование в ней первообразного корня по модулю p^μ , от группы P_μ при $p = 2, \mu \geq 3$, в которой для любого нечетного числа a справедливо сравнение $a^{2^{\mu-2}} \equiv 1 \pmod{2^\mu}$, т.е. в P_μ отсутствуют элементы порядка $\varphi(2^\mu) = 2^{\mu-1}$, а циклическая группа P''_μ по лемме 1 порождается при нечетном g вычетом $1 + 4g$ по модулю p^μ , например, классом вычетов числа 5 по модулю 2^μ , причем $5^{2^{\mu-3}} \not\equiv 1 \pmod{2^\mu}$, $5^{2^{\mu-2}} \equiv 1 \pmod{2^\mu}$.

4. Характер Дирихле по модулю степени простого числа

Характер Дирихле по модулю натурального числа $m > 1$ определяется на абелевой мультипликативной группе классов вычетов, взаимно простых с модулем m , как периодическая вполне мультипликативная функция, отличная от нуля на области определения. Для заданного m существует $\varphi(m)$ характеров. Они образуют группу, изоморфную группе вычетов из приведенной системы вычетов по модулю m (принцип двойственности). Любой характер χ по модулю $m = \prod_{p^{\nu_p(m)} \parallel m} p^{\nu_p(m)}$ можно единственным образом представить в виде

$$\chi = \prod_{p|m} \chi_{p^{\nu_p(m)}}.$$

Поэтому дальнейшее изучение группы характеров проведем для приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа p^{ν} .

По леммам 3 и 4 и по принципу двойственности ([3], с.237) имеем, что любой характер по модулю p^{ν} при $p \neq 2$ и $\nu > 1$ имеет единственное представление в виде

$$\chi(x) = \chi_p^{\kappa'}(x) \chi_{p^{\nu}}^{\kappa''}(x), \quad \kappa' \pmod{p-1}, \kappa'' \pmod{p^{\nu-1}}$$

и при $p = 2, \nu > 2$ имеем

$$\chi(x) = \chi_4^{\kappa'}(x) \chi_{2^{\nu}}^{\kappa''}(x), \quad \kappa' \pmod{2}, \kappa'' \pmod{2^{\nu-2}},$$

где $\chi_p(a) = e^{2\pi i \frac{a'}{p-1}}$, а при $\nu > 1$ имеем $\chi_{p^{\nu}}(a) = e^{2\pi i \frac{a''}{p^{\nu-1}}}$, и соответственно при $p = 2, \nu > 2$ находим

$$\chi_4(a) = (-1)^{a'}, \chi_{2^{\nu}}(a) = e^{2\pi i \frac{a''}{2^{\nu-2}}},$$

причем характер будет примитивным по модулю p^{ν} , если при $p \neq 2$ имеем $\kappa' \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ для $\nu = 1$, и $\kappa'' \not\equiv 0 \pmod{p}$ для $\nu > 1$, и соответственно для $p = 2$ находим $\kappa' \not\equiv 0 \pmod{2}$ для $\nu = 2$, и $\kappa'' \not\equiv 0 \pmod{2}$ для $\nu > 2$.

5. Представление характера Дирихле по модулю степени простого числа в виде экспоненты с мнимым полиномиальным показателем

Будем рассматривать только примитивные характеры по модулю степени простого числа $p^{\nu}, \nu > 1$. Пусть (лемма 3)

$$a \equiv w^{\alpha'}(1+p)^{\alpha''} \pmod{p^{\nu}}, b \equiv w^{\beta'}(1+p)^{\beta''} \pmod{p^{\nu}}.$$

Тогда из п.4 следует, что

$$\chi(ab) = e^{2\pi i \kappa' \frac{\alpha' + \beta'}{p-1}} \cdot e^{2\pi i \kappa'' \frac{\alpha'' + \beta''}{p^{\nu-1}}}.$$

Подобно, воспользовавшись леммой 4, при $p = 2, \nu > 2$, находим

$$a \equiv (-1)^{\alpha'} 5^{\alpha''} \pmod{2^{\nu}}, b \equiv (-1)^{\beta'} 5^{\beta''} \pmod{2^{\nu}}.$$

Вновь, пользуясь результатами из п.4, при $\nu > 2$ получим

$$\chi(ab) = (-1)^{\kappa'(\alpha' + \beta')} \cdot e^{2\pi i \kappa'' \frac{\alpha'' + \beta''}{2^{\nu-2}}}.$$

Другими словами, для $\alpha' = \alpha'(a)$, $\beta' = \beta'(b)$ и $\alpha'' = \alpha''(a)$, $\beta'' = \beta''(b)$ имеем сравнения

$$\alpha'(ab) \equiv \alpha'(a) + \beta'(b) \pmod{(p-1)}, \alpha''(ab) \equiv \alpha''(a) + \beta''(b) \pmod{p^{\nu-1}}$$

если $p \neq 2, \nu > 1$, а при $p = 2, \nu > 2$ приходим к сравнениям вида

$$\alpha'(ab) \equiv \alpha'(a) + \beta'(b) \pmod{2}, \alpha''(ab) \equiv \alpha''(a) + \beta''(b) \pmod{2^{\nu-2}}.$$

Положим $a \equiv 1 + px \pmod{p^2}$ при $p \neq 2$ и $a \equiv 1 + 4x \pmod{8}$. Имеем $\alpha' \equiv 0 \pmod{(p-1)}$ или $\alpha' \equiv 0 \pmod{2}$.

Отсюда вытекает, что при $p \neq 2, \nu > 1, 0 \leq s \leq \nu - 1$, справедливо равенство

$$\chi(1+p)^s = e^{2\pi i s \kappa'' \frac{\alpha''}{p^{\nu-1}}}, \alpha'' = \alpha''(1+p),$$

т.е. α'' — функция от вычета $1+p$.

Подобно при $p = 2, \nu \geq 3, 0 \leq s \leq \nu - 2$, получим

$$\chi(5^s) = e^{2\pi i s \kappa'' \frac{\alpha''}{2^{\nu-2}}}, \alpha'' = \alpha''(5).$$

6. Формула Постникова и ее обобщения

Для полноты изложения приведем схему вывода формулы А.Г.Постникова. Это придаст определенную ясность нашим выводам при $p = 2$.

ТЕОРЕМА 1. (А.Г.Постников). Пусть $p > 2$ — простое, n — натуральное, $n \neq ap^f - \nu$, $f \geq 1$, $0 \leq \nu \leq f$, $(a, p) = 1$. Пусть χ — примитивный характер по модулю p^n . Тогда найдется $(\Lambda, p) = 1$ такое, что

$$\chi(1+pu) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+pu)}{p^n}},$$

где

$$F_n(1+pu) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(pu)^k}{k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Шаг 1. По лемме 3 при $p > 2$ циклическая мультипликативная группа приведенной системы вычетов по модулю p^n , $n \geq 1$, порожденная первообразным корнем g по модулю p^n , является прямым произведением циклических P'_n и P''_n соответственно порядков $p-1$ и p^{n-1} , причем группа P''_n порождается, например, вычетом $1+p$ по модулю p^{n-1} .

Шаг 2. Для любого целого p -адического числа u функция $\ln(1+pu)$ разлагается в сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(pu)^k}{k} = \ln(1+pu),$$

причем при любых целых p -адических u_1, u_2 справедливо тождество

$$\ln((1+pu_1)(1+pu_2)) = \ln(1+pu_1) + \ln(1+pu_2).$$

Следовательно, для многочлена

$$F_n(1+pu) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(pu)^k}{k}$$

имеем

$$F_n((1 + pu_1)(1 + pu_2)) \equiv F_n(1 + pu_1) + F_n(1 + pu_2) \pmod{p^n}.$$

Для того, чтобы обеспечить справедливость последнего сравнения необходимо потребовать выполнения следующего условия

$$n + \nu - 1 - \alpha_{n+\nu} > n - 1 - \alpha_{n-1},$$

где α_k определяется из равенства $k = p^{\alpha_k} k_1, (k_1, p) = 1$. Пусть $n + \nu = ap^f, (a, p) = 1$, т.е. $f = \alpha_{n+p}$. Следовательно, $f - \nu < \alpha_{n-1}$. Поэтому $n \neq ap^f - \nu, f - \nu \geq \alpha_{n-1} \geq 0$. Окончательно, имеем для любого натурального $f \geq 1$ величина n удовлетворяет неравенствам $n \neq ap^f - \nu, 0 \leq \nu \leq f$.

Шаг 3. Далее, при $p \neq 2$ имеем $p^{-1}F_n(1 + p) \equiv 1 \pmod{p}$ и $\alpha''(1 + p) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Отсюда получим, что найдется число $\Lambda \not\equiv 0 \pmod{p}$ и такое, что

$$\alpha''(1 + p) \equiv \Lambda p^{-1}F_n(1 + p) \pmod{p^{n-1}}.$$

Шаг 4. Поскольку группа P_n'' — циклическая и вычет $1 + p$ является ее образующей по модулю p^{n-1} , вычеты $(1 + p)^s$ при $0 \leq s < p^{n-1}$ пробегают все элементы группы P_n'' . Значит, для любого u по модулю p^{n-1} найдется единственное число s такое, что

$$1 + pu \equiv (1 + p)^s \pmod{p^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$s\alpha''(1 + p) \equiv \alpha''((1 + p)^s) \equiv \Lambda p^{-1}F_n((1 + p)^s) \equiv p^{-1}F_n(1 + pu) \pmod{p^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$\chi(1 + pu) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+pu)}{p^{n-1}}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть n — натуральное, $n \neq a2^f - \nu, f \geq 1, 0 \leq 2\nu \leq f, (a, p) = 1$. Пусть χ — примитивный характер по модулю 2^n . Тогда найдется $(\Lambda, 2) = 1$ такое, что

$$\chi(1 + 4u) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+4u)}{2^n}},$$

где

$$F_n(1 + 4u) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(4u)^k}{k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Шаг 1. По лемме 4 при $p = 2$ и $n \geq 3$ мультипликативная группа приведенной системы вычетов не является циклической, но представляет собой прямое произведение циклических групп P_n' и P_n'' соответственно порядков 2 и 2^{n-2} , причем группа P_n'' порождается, например, вычетом 5 по модулю 2^{n-2} .

Шаг 2. Для любого целого 2-адического числа u имеем разложение $\ln(1 + 4u)$ в сходящийся степенной ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(4u)^k}{k} = \ln(1 + 4u),$$

обладающий функциональным свойством функции логарифм:

$$\ln((1 + 4u_1)(1 + 4u_2)) = \ln(1 + 4u_1) + \ln(1 + 4u_2),$$

где u_1 и u_2 — любые целые 2-адические числа.

Следовательно, для многочлена

$$F_n(1+4u) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(4u)^k}{k}$$

имеем

$$F_n((1+4u_1)(1+4u_2)) \equiv F_n(1+4u_1) + F_n(1+4u_2) \pmod{2^n}.$$

Пусть $k = 2^{\alpha_k} k_2$, $(2, k_2) = 1$ и пусть $2n + 2\nu - 2 - \alpha_{n+\nu} \leq 2n - 2 - \alpha_{n-1}$. Представим $n + \nu$ в виде $n + \nu = a2^f$, $(a, 2) = 1$. Тогда $f = \alpha_{n+p}$. Далее находим $f - 2\nu \geq \alpha_{n-1} \geq 0$. Отсюда следует, что формула верна для любого $f \geq 1$ при $n \neq a2^f - \nu$, $(a, 2) = 1$ и $0 \leq 2\nu \leq f$.

Шаг 3. Далее, имеем $4^{-1}F_n(5) \equiv 1 \pmod{2}$ и $\alpha''(5) \not\equiv 0 \pmod{2}$. Отсюда получим, что найдется число $\Lambda \not\equiv 0 \pmod{2}$ и такое, что

$$\alpha''(5) \equiv \Lambda 4^{-1}F_n(5) \pmod{2^{n-2}}.$$

Шаг 4. Поскольку группа P_n'' — циклическая и вычет 5 является ее образующей по модулю 2^{n-2} , вычеты 5^s при $0 \leq s < 2^{n-2}$ пробегает все элементы группы P_n'' . Значит, для любого u по модулю 2^{n-2} найдется единственное число s такое, что

$$1 + 4u \equiv 5^s \pmod{2^{n-2}}.$$

Следовательно,

$$s\alpha''(5) \equiv \alpha''(5^s) \equiv \Lambda 4^{-1}F_n(5^s) \equiv 4^{-1}F_n(1+4u) \pmod{2^{n-2}}.$$

Таким образом,

$$\chi(1+4u) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+4u)}{2^{n-2}}}.$$

7. Заключение

Найденная в работе формула для примитивного характера Дирихле по модулю, равному степени числа два, позволяет получить асимптотики для числа простых чисел, не превосходящих любой наперед заданной границы и лежащих в арифметической прогрессии с разностью, равной степени числа два. В частности, отсюда следует верхняя граница для наименьшего простого числа в данной прогрессии. Найденная формула дает возможность получить асимптотики средних значений арифметических функций в подобных прогрессиях с растущей разностью (см., [1]–[10]). Предполагается эти исследования выполнить в дальнейшем.

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Н.Чубарикову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 144 с.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Физматлит. 1983, 160 с.
3. Хассе Г. Лекции по теории чисел. — М.: Изд-во иностр. лит. 1953, с. 78-94.
4. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. матем., 1955. т.19, № 1, с.11-16.

5. Барбан М. Б., Линник Ю. В., Чудаков Н. Г. О простых числах в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа // *Acta arithm.*, 1964. vol. 9, № 4, с.375-390.
6. Hua Loo-Keng. *Selected Papers*. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.
7. Архипов Г. И. *Избранные труды*. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
8. Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел*. 2-е изд. — М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат.лит.-ры, 1983. 240 с.
9. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа // *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1979. т.43, № 4, с.892-907.
10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. *Лекции по математическому анализу*. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1976. Special variants of the trigonometrical sums method. — M.: Fizmatlit, pp. 144.
2. Vinogradov I. M. 1983. Elements of the number theory. — M.: Fizmatlit, pp. 160.
3. Hasse H. 1950. *Vorlesungen ueber Zahlentheorie*. — Berlin, 78-114.
4. Postnikov A. G. 1955. On character sums modulo equals the power of prime number. // *Izv. AN SSSR, ser. math.*, v.19, No. 1, p.11-16.
5. Barban M. B., Linnik J. V., Chudakov N. G. 1964. On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference. // *Acta arithm.* V.9, №4, p.375-390.
6. Hua Loo-Keng. 1983. *Selected Papers*. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp.888.
7. Arkhipov G. I., 2013. *Selected papers*. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.
8. Karatsuba A. A. 1983. *Foundations of analytic number theory*. 2nd Ed. — M.: Nauka. Gl. red. phis.-math.literature, pp. 240 (in Russian).
9. Petechuk M. M. 1979. A sum of the divisor function values in an arithmetic progression with a odd prime-power difference. // *Acta arithm.* V.9, №4, p.375-390.
10. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. *Lecture on mathematical analysis*. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. pp. 640.

Получено 16.03.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-209-211

Одно замечание о бесконечности

Х. М. Салиба

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, университет Нотр-Дам-Луэз (г. Бейрут, Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Аннотация

В работе описывается взаимосвязь законов православной веры и понятия бесконечности в математическом анализе. Существенно используются высказывания евангелистов и апостолов. Тем самым устанавливается совместимость математики с христианским богословием.

Ключевые слова: бесконечные множества, предел, полнота вещественной оси, критерий Коши

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Х. М. Салиба. Одно замечание о бесконечности // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 209–211.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-209-211

One note on an infinity

H. M. Saliba

Saliba Holem Mansour — candidate of physics and mathematics, Notre Dame University-Louaize (Beirut, Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Abstract

In the paper an interconnection of orthodox laws belief and the notion of infinity in mathematical analysis is described. Essentially use the statement of evangelists and apostles. Hence the comtability of mathematics and christian teology is established.

Keywords: infinity sets, limit, the completeness of the real axis, Coushi criteria

Bibliography: 5 titles.

For citation:

Н. М. Saliba, 2022, "One note about infinity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 209–211.

Законы Православной веры, в основе которых лежит учение о единосущной и нераздельной Святой Троице (см., например, [1]-[5]), самым тесным образом связаны с математическими понятиями бесконечности и неограниченности множеств, свойств и явлений любой природы. Как известно, математика во всем многообразии возникает тогда, когда появляется понятие бесконечности.

Это связано в первую очередь с появлением счетных множеств и множества всех натуральных чисел при изучении правил и выводов арифметики на основе законов логики, индукции и интуиции.

Другая сторона бесконечности связана с геометрией числовой прямой. Здесь наряду с упорядоченностью множества и замнутостью относительно четырех арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления, возникает понятие непрерывности. Охарактеризуем его.

Во-первых, для любых двух различных действительных чисел всегда найдется третье, отличное от них и находящееся между ними.

Во-вторых, если все действительные числа разбиты на две совокупности так, что каждое число из первой совокупности всегда меньше любого числа из второй совокупности, то найдется такое действительное число, что оно будет наибольшим в первой совокупности и наименьшим во второй.

Переменной величиной на числовой прямой назовем бесконечное множество точек на ней, быть может, совпадающих. Первым и важнейшим примером переменной величины является занумерованная последовательность точек или просто числовая последовательность.

Определим понятие предела переменной величины как некоторое действительное число к которому "приближаются" значения этой переменной величины так, что модуль разности между значениями переменной и предела становятся сколь угодно малыми. Уточним его для числовой последовательности: для любого положительного сколь угодно малого числа найдется номер такой, что для всех номеров последовательности, больших его, модуль разности между значением последовательности, начиная с указанного номера, и пределом, был меньше наперед заданного малого числа.

Фундаментальным утверждением полноты множества действительных чисел является критерий Коши существования предела последовательности: для того, чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого наперед заданного положительного числа нашелся номер такой, что для всех номеров последовательности, больших указанного, модуль разности членов последовательности был меньше заданного числа.

Итак, предел предполагается всегда действительным числом, а, значит, конечной величиной.

Дадим теперь определение бесконечно большой последовательности: для любого наперед заданного числа найдется номер такой, что для всех больших номеров, модули значений членов последовательности будут больше этого заданного числа.

Это определение само по себе не включает бесконечность в явном виде. Все числа в нем действительны, и по тому — конечны; но дает подход к пониманию бесконечности.

Чтобы пояснить понятие бесконечного и, следовательно, неограниченного можно рассмотреть наше подражание Иисусу Христу, как человеческому существу (*Человека, сказавшего вам истину*, Евангелие от Иоанна (8:40)), то есть конечному существу, несущему Логос (*Слово стало плотью*, Евангелие от Иоанна (1:14)), это слово Бог, (*Слово было Бог*, Евангелие от Иоанна (1:1)). Неограниченный (*полнота Наполняющего все во всем*, Послание к Ефессянам (1:23)); и не наполняю ли Я небо и землю? Книга пророка Иеремии (23:24)). Это отражает роль Иисуса, ограничено об неограничено (*Видевший Меня видел Отца*, Евангелие от Иоанна

(14:9)). Христианство учит, что Бог Безграничен, то есть Бесконечен, воплощенный в Иисусе Христе, в ограниченной фигуре (*ибо в Нем обитает вся полнота Божества телесно*, Послание к Колоссянам (2:9)), и (*Сей, получил сияние славы и образ ипостаси Его и сила всей силы Своей*, Послание к Евреям (1 :3)). Бог есть Неограниченная Единица (*Господь, Бог наш, Господь един есть*, Второзаконие (6:4)); любая существующая часть Бога, если ее можно вообразить, есть Сам Бог; это может быть отражено любой существующей частью бесконечности есть бесконечности (скажем, бесконечность, деленная на два есть бесконечность), которая может быть получена из вышеупомянутого определения. Любая добавленная стоимость ограниченного (человека) не имеет влияния на Безграничного (Бога) (*Он твердыня; совершенны дела Его*, Второзаконие (32:4)), отражается любым существующим числом, к бесконечности, равной бесконечности (скажем, бесконечность, поделенная на два есть бесконечность), что также может быть получено из приведенного выше определения. С богословской точки зрения, сами по себе мы не можем получить спасение, но в Боге Искупление. Никакая существующая вещь не может сравниться с Богом, Безграничным Божеством, с точки зрения ограниченного с Беспредельным. Несмотря на то, что нас просят строго выполнять дела, подобные Ему (*Итак, будьте совершенны, как совершенный Отец ваш Небесный*, Евангелие от Матфея (5:48)), это понимается как сравнение с работой Иисуса во плоти. Поскольку Его дела — это полная праведность, более праведная, чем любая другая; мы сравниваем наши дела с Иисусом, но дела Иисуса божественны. Мы можем написать, что два меньше бесконечности, что несет в себе понятие сравнения конечного с бесконечным, но мы понимаем это, что бесконечное больше любого числа, которое можно вывести из приведенного выше определения. Но идея заключается в том, что никакая существующая вещь не может сравниться с бесконечностью.

Следовательно, математика совместима с христианским богословием, не противоречит и не отрицает его. Арифметические правила, касающиеся связанности, не применяются слепо к неограниченности; нам нужны специальные правила для неограниченности. Между прочим, это видно в христианстве по его учению о Троице. Мы уже обсуждали это в нашей статье «Об одном подобии Святой Троицы». По этому поводу мы благодарим господина Вахиба Салибу за важную идею о производной экспоненциальной функции. Наконец, и прежде всего, мы благодарим профессора Владимира Николаевича Чубарикова за очень важные обсуждения и идеи, связанные с каждым пунктом этой статьи, а также за все статьи и работы с момента нашей первой встречи весной 1994 года в МГУ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блаженный Августин. О Граде Божием. — М.:Изд-во Спасо-Преображенского Валаамского Монастыря. 1994, т. I-IV.
2. Святой Иоанн, Дамаскин. Точное изложение православной веры. Книга 1, гл. VIII. <http://www.vehi.net/damaskin/index.html>
3. Святитель Игнатий Брянчанинов. О образе и подобии Божиих в человеке. Творения святителя Игнатия Брянчанинова в 7 томах. — М.: Изд. Донского монастыря и изд-ва “Правило Веры”. 1993, т. II, с.128–136.
4. Раушенбах Б.В. Логика троичности// Вопросы философии.- 1993.- №3.- С. 63.
5. Х.М. Салиба, “Об одном подобии Святой Троицы”, Чебышевский сборник., 12:4 (2011), 272–277.

Получено 22.03.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-212-218

Мартин Давидович Гриндлингер — основатель алгебраической школы и его роль в возрождении теоретико-числовой школы в Туле (к 90-летию профессора)

Б. П. Ваньков, Н. М. Добровольский

Ваньков Борис Петрович — доцент, кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: vankovbp@tspu.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

Данная работа посвящена девяностолетию доктора физико-математических наук, профессора Мартина Давидовича Гриндлингера, основателя алгебраической школы и его роли в возрождении теоретико-числовой школы в городе Тула. Приводятся биографические данные, краткий обзор его научной, педагогической, организаторской и издательской деятельности. Особенное внимание уделяется роли М. Д. Гриндлингера в возрождении научной школы теории чисел в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Ключевые слова: группа, полугруппа, алгоритмические проблемы, теория чисел, теоретико-числовой метод в приближенном анализе, решётки, сетки, гиперболическая дзета-функция решёток, приближение алгебраических чисел.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Б. П. Ваньков, Н. М. Добровольский. Мартин Давидович Гриндлингер — основатель алгебраической школы и его роль в возрождении теоретико-числовой школы в Туле (К 90-летию профессора) // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 212–218.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-212-218

Martin Davidovich Grindlinger — founder of the algebraic school and his role in the revival of the number-theoretic school in Tula (To the 90th anniversary of the professor Grindlinger M. D.)

B. P. Vankov, N. M. Dobrovol'skiy

Vankov Boris Petrovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: vankovbp@tspu.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

This work is dedicated to the ninetieth anniversary of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Martin Davidovich Grindlinger, the founder of the algebraic school and his role in the revival of the number-theoretic school in the city of Tula. Biographical data, a brief overview of his scientific, pedagogical, organizational and publishing activities are given. Particular attention is paid to the role of M. D. Grindlinger in the revival of the scientific school of number theory at the TSPU L. N. Tolstoy.

Keywords: group, semigroup, algorithmic problems, number theory, number-theoretic method in approximate analysis, lattices, grids, hyperbolic zeta function of lattices, approximation of algebraic numbers.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Martin Davidovich Grindlinger — founder of the algebraic school and his role in the revival of the number-theoretic school in Tula (To the 90th anniversary of the professor Grindlinger M. D.)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 212–218.

1. Введение

Доктор физико-математических наук, профессор Мартин Давидович Гриндлингер занимает важное место в научной деятельности Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.



В работах [1], [2], посвящённых 80 и 85-летию профессора Мартина Давидовича Гриндлингера, изложена его биография и деятельность по созданию Тульской алгебраической школы. Приведем некоторые факты, не вошедшие в указанные сборники, и рассмотрим роль и значение М. Д. Гриндлингера в возрождении теоретико-числовой школы в городе Тула.

Мартин Давидович Гриндлингер родился 25 марта 1932 г в США в Нью-Йорке. После окончания школы два года учился в Нью-Йоркском университете на отделении физики. Затем после окончания отделения математики Бруклинского колледжа в 1954 году четыре года был аспирантом у профессора В. Магнуса. Защитил докторскую диссертацию, посвящённую решению проблемы равенства слов в классе $C'(1/8)$ -групп [7], и получил учёную степень доктора философии в 1960 году.

После участия в VI Всемирном фестивале молодёжи и студентов в Москве в 1957 году, в 1958 году Мартин Давидович женился на гражданке СССР Елене Ивановне и в 1961 году получил советское гражданство. В настоящее время супруги проживают в США в городе Филадельфия.

2. М. Д. Гриндлингер и Тульская алгебраическая школа

Около 30 лет Мартин Давидович Гриндлингер работал в советских вузах, при этом около 20 лет – в Тульском государственном педагогическом институте им. Л. Н. Толстого. Мартин Давыдович руководил аспирантурой и организовал городской научный алгебраический семинар, который быстро приобрёл международную известность. В Туле стал издаваться межвузовский сборник научных трудов «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». В работе семинара помимо учеников Мартина Давыдовича активно участвовали видные учёные из других регионов страны. Взаимосвязь с ведущими отечественными и зарубежными учёными способствовала плодотворной работе Тульской алгебраической школы. По тематике исследований М. Д. Гриндлингера защищено более 20 кандидатских и 6 докторских диссертаций.

Научные исследования и результаты М. Д. Гриндлингера, связанные с решением алгоритмических проблем равенства слов и сопряжённости для малосократимых групп с предельной мерой налегания для определяющих слов [7]–[15], имеют большое значение в комбинаторной теории групп.

3. Роль М. Д. Гриндлингера в возрождении Тульской школы теории чисел

М. Д. Гриндлингер сыграл заметную роль в возрождении Тульской школы теории чисел. Как отмечено в [3], [5], [6] она начала свою деятельность с 1950 года под руководством доцента В. Д. Подсыпанина, который был учеником профессора Д. К. Фаддеева. Проводились исследования по теории чисел и комбинаторному анализу, в частности, с его учеником М. Н. Добровольским, – по разрешению проблемы «ограниченности неполных частных» с помощью полиномов Туэ и диофантовым приближениям алгебраических чисел.

Исследования по теории чисел в Туле с конца семидесятых годов прошлого столетия связаны с теоретико-числовым методом приближенного анализа, разработанным профессором Н. М. Коробовым. Активное участие в работе семинара по тригонометрическим суммам и их приложениям под руководством Н. М. Коробова в МГУ имени М. В. Ломоносова принимал туляк Н. М. Добровольский. Широта его взглядов на математическую науку способствовала поступлению в 1981 году в аспирантуру М. Д. Гриндлингера в Туле. Продолжавшееся тесное сотрудничество с Н. М. Коробовым выразилось, например, в получении в 1984 году

Н. М. Добровольским эффективного доказательства теоремы Рота о неухудшаемости нижней оценки квадратичного отклонения сеток [4]. В силу изящности приведенного доказательства профессор В. И. Нечаев рекомендовал соискателям ученой степени кандидата физико-математических наук в программе для подготовки к кандидатскому экзамену по специальности использовать именно его. Далее последовали защиты Н. М. Добровольским кандидатской диссертации на тему «Теоретико-числовые сетки и их приложения» в 1985 году, а в 2000 году и докторской – «Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения».

Примеры профессоров М. Д. Гриндлингера и Н. М. Коробова, организовавшими свои знаменитые научные семинары, способствовали привлечению к научным исследованиям молодых ученых. Под руководством профессора В. И. Нечаева, при активном участии Н. М. Добровольского и заинтересованном внимании профессора Н. М. Коробова, а также участников руководимого им семинара, были успешно защищены кандидатские диссертации выпускниками Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого: В. С. Ваньковой (1992 г.), А. Л. Рощеней (1998 г.), И. Ю. Ребровой (2000 г.). Темы их диссертаций связаны с изучением квадратичного отклонения теоретико-числовых сеток различных структур, а также гиперболической и обобщённой гиперболической дзета-функций решёток.

Позднее под руководством профессоров Д. А. Митькина и Н. М. Добровольского состоялась защита кандидатской диссертации ещё одной выпускницы вуза О. В. Родионовой (2005 г.). Всего с 1985 года по данному направлению исследований защищено 12 кандидатских и 1 докторская диссертация. Примечательно, что развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе стало приводить к темам, которыми занимались В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский.

4. Математические конференции в ТГПУ им. Л.Н. Толстого

Эффективная работа тульской алгебраической и теоретико-числовой школ выразилась, в частности, в том, что с 1993 года в Туле проведено большое количество международных конференций по алгебре и теории чисел. Так только за последние семь лет восьмой по счёту является XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы (май 2022 г., г. Тула). Знаменательно, что ведущий специалист в области теории чисел в СССР и России, заведующий отделом теории чисел МИАН, профессор кафедры теории чисел МГУ А. А. Карацуба выступал в Туле с пленарным докладом в сентябре 2001 года на IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения», посвященной 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова, на которой было принято решение издавать в Туле математический журнал «Чебышевский сборник», вошедший впоследствии в Scopus.



Рис. 1: Выступление А. А. Карацубы на IV Международной конференции в Туле

В следствие развития исследований в области алгебраических методов и теоретико-числового метода в приближенном анализе в Туле была создана проблемно-ориентированная информационная вычислительная система «ТМК» (Теоретико-числовой метод Коробова), предназначенная для эффективного внедрения результатов исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе.

5. Заключение

Сегодня в стенах ТГПУ им. Л.Н. Толстого активно организуется общение учёных-математиков алгебраической и теоретико-числовой школ. За последние годы в работе международных конференций в Туле принимали участие учёные с мировыми именами, академики, доктора, кандидаты наук. И среди них большое количество учёных, которые знают лично и имеют непосредственное отношение к М. Д. Гриндлингеру, который на протяжении длительного периода времени занимался исследованиями комбинаторной теории групп, но при этом всегда держал в поле зрения её соприкосновения с другими областями математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В.Н., Устьян А.Е. Гриндлингер Мартин Давидович – Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. № 1-1 (41). С. 5-8.
2. Безверхний В.Н., Добрынина И.В., Трубицын Ю.Э., Устьян А.Е. М.Д. Гриндлингер – основатель Тульской алгебраической школы (к 85-летию профессора) – Чебышевский сборник. 2017. №1 (61).
3. Реброва И.Ю., Чубариков В.Н. Н.М. Коробов, В.И. Нечаев, С.Б. Стечкин, Н.М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел – Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 196-217.
4. Добровольский Н.М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении – УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155-156.
5. Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Устьян А.Е., Подсыпанин Ф.В., Подсыпанин Е.В. К 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910-11.10.1968) – Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. Выпуск 1, С. 301-316.
6. Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Устьян А.Е., Подсыпанин Ф.В., Подсыпанин Е.В. Тульская школа теории чисел (к 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) – Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции. Дополнительный том. Тула: изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 20-85.
7. Grindlinger M. On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems with applications // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641 — 677.
8. Grindlinger M. Dehn's algorithm for the word problem // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 67 - 83.
9. Grindlinger M. A class of groups all of whose elements have trivial centralizers // Math. Z. 1962. V. 78. P. 91 - 96.

10. Гриндлингер М. Д. Решение проблемы сопряженности для одного класса групп, совпадающих со своими антицентрами, с помощью обобщенного алгоритма Дэна // Доклады АН СССР. 1964. Т. 158. С. 1254 — 1256.
11. Гриндлингер М. Д. Решение проблемы тождества для одного класса групп и проблемы сопряженности обобщением алгоритма Дэна // Доклады АН СССР. 1964. Т. 154. С. 507 - 509.
12. Гриндлингер М. Д. К проблеме тождества слов и сопряженности // Известия АН СССР, серия матем. 1965. Т. 29. С. 245 — 268.
13. Гриндлингер М. Д. О проблеме сопряженности и совпадения с антицентром в теории групп // Сиб. мат. журнал. 1966. Т. 7. С. 785 — 803.
14. Гриндлингер М. Д. Сопряженность подгрупп свободных групп // Сиб. мат. журнал. 1970. Т. 11. С. 875 — 876.
15. Grindlinger L. Grindlinger M. On three of Lyndon's results about maps // Contributions to group theory. Contemp. Math. 1984. V. 33, P. 212 — 213.

REFERENCES

1. Безверхний В.Н., Устьян А.Е. Гриндлингер Мартин Давидович – Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. № 1-1 (41). С. 5-8.
2. Безверхний В.Н., Добрынина И.В., Трубицын Ю.Э., Устьян А.Е. М.Д. Гриндлингер – основатель Тульской алгебраической школы (к 85-летию профессора) – Чебышевский сборник. 2017. №1 (61).
3. Реброва И.Ю., Чубариков В.Н. Н.М. Коробов, В.И. Нечаев, С.Б. Стечкин, Н.М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел – Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 196-217.
4. Добровольский Н.М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении – УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155-156.
5. Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Устьян А.Е., Подсыпанин Ф.В., Подсыпанин Е.В. К 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанова (16.01.1910-11.10.1968) – Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. Выпуск 1, С. 301-316.
6. Добровольский Н.М., Реброва И.Ю., Устьян А.Е., Подсыпанин Ф.В., Подсыпанин Е.В. Тульская школа теории чисел (к 105-летию юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанова (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) – Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции. Дополнительный том. Тула: изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 20-85.
7. Grindlinger M. On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems with applications // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641 — 677.
8. Grindlinger M. Dehn's algorithm for the word problem // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 67 - 83.
9. Grindlinger M. A class of groups all of whose elements have trivial centralizers // Math. Z. 1962. V. 78. P. 91 - 96.

10. Гриндлингер М. Д. Решение проблемы сопряженности для одного класса групп, совпадающих со своими антицентрами, с помощью обобщенного алгоритма Дэна // Доклады АН СССР. 1964. Т. 158. С. 1254 — 1256.
11. Гриндлингер М. Д. Решение проблемы тождества для одного класса групп и проблемы сопряженности обобщением алгоритма Дэна // Доклады АН СССР. 1964. Т. 154. С. 507 - 509.
12. Гриндлингер М. Д. К проблеме тождества слов и сопряженности // Известия АН СССР, серия матем. 1965. Т. 29. С. 245 — 268.
13. Гриндлингер М. Д. О проблеме сопряженности и совпадения с антицентром в теории групп // Сиб. мат. журнал. 1966. Т. 7. С. 785 — 803.
14. Гриндлингер М. Д. Сопряженность подгрупп свободных групп // Сиб. мат. журнал. 1970. Т. 11. С. 875 — 876.
15. Grindlinger L. Grindlinger M. On three of Lyndon's results about maps // Contributions to group theory. Contemp. Math. 1984. V. 33, P. 212 — 213.

Получено 26.01.22

Принято в печать 22.06.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 517.5, 378.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-219-231

Маргарита Бабкеновна Налбандян и её исследования по истории математики в России (к 90-летию со дня рождения)

Ю. С. Налбандян

Налбандян Юлия Сергеевна — кандидат физико-математических наук, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону).

e-mail: ysnalbandyan@sfedu.ru

Аннотация

Эта статья посвящена жизни и научной деятельности известного историка математики Маргариты Бабкеновны Налбандян (1931 – 2004). 90-летие которой отмечается 3 сентября. Рассматриваются ключевые моменты её биографии на фоне истории становления ростовской математической школы, которая начала формироваться в 1915 году после переезда в Ростов-на-Дону Варшавского университета. Физико-математический факультет, переживший революцию и гражданскую войну, многочисленные реорганизации и разнообразные реформы, в 20-е – 30-е годы пополнился собственными талантливыми выпускниками, а после возвращения из эвакуации в 1944 году успешно стал восстанавливать предвоенный статус одного из ведущих математических центров. Именно 50-е годы XX века, с которыми совпала студенческая юность М.Б.Налбандян, считаются одними из лучших в истории физмата (мехмата).

В статье кратко проанализированы условия, которые определили и выбор тематики исследований, и особенности научного стиля М. Б. Налбандян, разобраны её основные работы по истории развития в России теории эллиптических функций (они были опубликованы в конце 60-х – начале 70-х годов). Один из разделов посвящен материалам, связанным с биографией известного математика, основателя ростовской математической школы, Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского, которые М.Б.Налбандян собирала и публиковала на протяжении многих лет. Особое внимание уделяется сотрудничеству Маргариты Бабкеновны с ведущими советскими историками математики, среди которых можно упомянуть Галину Павловну Матвиевскую и Елену Петровну Ожигову. В заключительном разделе рассмотрена судьба научного наследия и домашнего архива.

Ключевые слова: эллиптические функции, Д. Д.Мордухай-Болтовской, ростовская математическая школа, М. Б. Налбандян.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

Ю. С. Налбандян. Маргарита Бабкеновна Налбандян и её исследования по истории математики в России (к 90-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 219–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 517.5, 378.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-219-231

**Margarita Babkenovna Nalbandyan and her research
on the History of Mathematics in Russia
(for the 90th anniversary of her birth)**

Yu. S. Nalbandyan

Nalbandyan Yulia Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science in the name of I. I. Vorovich, Southern Federal University (Rostov-on-Don).

e-mail: ysnalbandyan@sfedu.ru

Abstract

This article is devoted to the life and scientific activity of the famous historian of mathematics Margarita Babkenovna Nalbandyan (1931-2004). Whose 90th anniversary is celebrated on September 3. The key points of her biography are considered against the background of the history of the development of the Rostov mathematical school, which began to form in 1915 after the Warsaw University moved to Rostov-on-Don. The Faculty of Physics and Mathematics (phizmat), which survived the revolution and the civil war, numerous reorganizations and various reforms, was replenished with its own talented graduates in the 20s-30s, and after returning from evacuation in 1944, it successfully began to restore status of one of the leading soviet mathematical centers. 50s of the XX century, which coincided with the student youth of M. B. Nalbandyan, are considered one of the best in the history of phizmat (mehmat).

The article analyzes the main works on the history of the development of the theory of elliptic functions in Russia (they were published in the late 60s-early 70s) and materials related to the biography of the famous mathematician, the founder of the Rostov mathematical school, D.D. Mordukhai-Boltovsky, which M. B. Nalbandyan collected and published for many years. Special attention is paid to the cooperation of Margarita Babkenovna with leading Soviet historians of mathematics, among whom we can mention G.P. Matviyevskaya and E.P. Ozhigova. In conclusion the fate of the scientific heritage and the home archive is considered.

Keywords: elliptic functions, D. D. Mordukhai-Boltovskoy, Rostov mathematical school, M. B. Nalbandyan.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

Yu. S. Nalbandyan, 2022, "Margarita Babkenovna Nalbandyan and her research on the History of Mathematics in Russia (for the 90th anniversary of her birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 219–231.

1. Введение

Советская школа истории математики, занимавшая ведущие позиции в мировой историко-математической науке и опиравшаяся на работы М. Е. Ващенко–Захарченко (1825–1912), В. В. Бобынина (1849–1919) и И. Ю. Тимченко (1862–1939), сформировалась в 20-е годы XX века. У её истоков стояли М. Я. Выгодский (1898–1965) и С. А. Яновская (1896–1966), работавшие в Московском государственном университете. В 1932 году был основан Институт истории

науки и техники, в 1953 году начал свою деятельность его Ленинградский филиал. Историко-математические школы успешно работали во многих городах Советского Союза (подробный очерк, посвящённый исследованиям советских учёных, можно найти, например, в [1]). Одна из них сформировалась в Ростове-на-Дону. Переехавший сюда в 1915 году вместе с Варшавским университетом профессор Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952) заложил основы подготовки научных кадров в области истории математики (упомянутый ранее М. Я. Выгодский был учеником Мордухай-Болтовского, но уехал из Ростова в 1918 году), написал ряд статей, подготовил к публикации и прокомментировал несколько работ И. Ньютона и «Начала» Евклида. Эти традиции были поддержаны Н. А. Дерновым (возглавлявший в 30-е годы Ростовский университет, он готовил учебник по истории математики, завершить который не успел, т.к. был расстрелян в 1938 году) и С. Е. Белозёровым. Выпускник физико-математического отделения педфака Саратовского университета, несколько лет посвятивший партийной работе, сменил Н. А. Дернова на посту ректора и в 1939 году в числе первых учеников М. Я. Выгодского защитил кандидатскую диссертацию «Из истории теории функций комплексного переменного». Сохранив университет в годы Великой Отечественной войны, он в конце 40-х годов возобновил собственную научную деятельность, вернул курсы по истории математики в учебную программу и восстановил деятельность аспирантуры (некоторые подробности можно найти в [2]). Среди учеников С. Е. Белозёрова была и Маргарита Бабкеновна Налбандян, продолжившая его исследования, связанные как с историей аналитических функций, так и с развитием математики в Варшавском (впоследствии Ростовском) университете.

2. Становление учёного

Маргарита Бабкеновна родилась в Новосибирске. Вскоре семья (Бабкен Мушегович и Ираида Васильевна Налбандян) переехали в Ростов-на-Дону, к месту новой службы отца. Мирное и благополучное детство закончилось 22 июня 1941 года. Отец ушёл на фронт, а 10-летней Маргарите вместе с мамой пришлось отправиться в эвакуацию – через Кавказские Минеральные воды к побережью Каспийского моря, далее на танкере, под бомбёжками, в Среднюю Азию, во Фрунзе. Потом было возвращение в разрушенный бомбами и разграбленный фашистами Ростов, окончание семилетки в 1946 году. Жизнь в послевоенном городе была тяжёлой, однако в старших классах (Маргарита Налбандян училась в женской полной средней школе № 22) хватало времени и сил и на учёбу, и на разнообразную общественную деятельность. Активная комсомолка, Маргарита всегда возилась с младшими школьниками, не раз выезжала в пионерские лагеря горкома ВЛКСМ. Это была настоящая школа жизни – с походами и ночёвкой в лесу, со спортивными соревнованиями и военными играми, с купанием, кострами, литературными чтениями, песнями и бальными танцами.

Насыщенным оказалось и лето 1949 года. Поездка в лагерь состоялась между выпускными экзаменами (их было 11) и вступительными (7!), которые пришлось сдавать, поскольку уже перед самым награждением медалистов Маргарите были до «4» снижены оценки по русскому языку и геометрии. И уже с сентября 1949-го вся её дальнейшая жизнь оказалась связанной с математикой и с Ростовским государственным (ныне – Южным федеральным) университетом.

Мехмат (в те годы физмат) РГУ в конце 40-х годов восстанавливался после возвращения из эвакуации. Возрождаться из руин пришлось не в первый раз. Хотя ростовскую математическую школу в полной мере можно считать преемницей традиций петербургской математической школы (см. по этому поводу [3]), её становление началось в 1915 году, после переезда Варшавского университета в Ростов-на-Дону (подробности см. в [3]–[4]). Физико-математический факультет прибыл в южную столицу фактически в полном составе. Основная группа ученых во главе с Д. Д. Мордухай-Болтовским, В. П. Вельминым, Д. Н. Горячевым и В. И. Романовским, а также недавние выпускники М. Ф. Субботин и С. А. Хвьялковский быст-

ро включились в активную научную и педагогическую деятельность. В Ростове к ним присоединились представитель петербургской математической школы Б. М. Коялович – в 1919 году; бывший профессорский стипендиат Варшавского университета, работавший с 1915 года в Новоград-Волынском Н. М. Несторович – в 1920; приехавший из Красноярска выпускник Московского университета М. П. Черняев – в 1922; демобилизованный из рядов Красной Армии воспитанник Варшавского университета В. К. Матышук – в 1923. Пережив революцию, годы гражданской войны, разнообразные реформы, коллектив физмата пополнился молодыми талантливыми собственными выпускниками – в [5] упоминаются математики и механики А. П. Гремяченский, Г. П. Самко, М. Г. Хапланов, П. С. Папков, А. А. Батырев, А. Ф. Бермант, А. А. Налбандян, В. И. Квальвассер, В. П. Лысков, физики Н. С. Новосильцев и В. И. Кессених.

Тридцатые годы стали временем стабилизации и активного развития Ростовского-на-Дону университета вообще и физмата в частности. Возросший уровень подготовки абитуриентов позволил расширить объем и повысить сложность математических курсов. Были открыты новые кафедры, функционировал Научно-исследовательский физико-математический институт (НИФМИ), действовали несколько научных семинаров, активизировалась работа аспирантуры, начали выходить сборники студенческих научных работ. Однако всё изменилось в июне 1941 года. Многие из студентов и выпускников университета в первые же дни войны ушли на фронт, часть коллектива отправилась в эвакуацию в Ош. Занятия в Ростове возобновились в мае 1944-го. Параллельно с учебным процессом велись восстановительные работы — преподаватели, научные сотрудники, студенты около ста тысяч часов отработали на строительстве и ремонте зданий. Коллектив возвращался к научной деятельности, снова начал работать НИФМИ, в состав которого вошли исследовательские группы по теории чисел, геометрии, теории функций. В 1946 году прошла первая университетская студенческая научная конференция, в 1948 г. вступил в строй астрономический павильон и состоялись первые послевоенные заседания областного физико-математического общества. Как отмечено в [5, с.24], «к 1950 г. университет достиг, а по некоторым показателям и превзошел довоенный уровень в научной работе, подготовке высококвалифицированных кадров.» Во главе физмата с 1947 года стоял Константин Константинович Мокрищев — один из ведущих лекторов, известный геометр, пользовавшийся уважением за свой профессионализм, требовательность к себе, чуткость и доброжелательность к коллегам. В 1952 году он передаст бразды правления механику Алексею Константиновичу Никитину, вернется на должность декана в 1955, а потом возглавит кафедру геометрии, которой будет руководить до последних дней жизни.

Итак, в 1949 году М. Б. Налбандян становится студенткой отделения математики физмата Ростовского государственного университета. Годы её учёбы пришлись, как отчасти следует из сказанного выше, на один из лучших периодов в истории факультета. Ведь наряду с событиями, упомянутыми ранее, в это время шла реорганизация кафедр и обновлялся кадровый состав. С одной стороны, продолжали активно работать преподаватели, пережившие тяжёлые военные годы: так, студентам набора 1949 года курс математического анализа читали С. Я. Альпер и А. П. Гремяченский, теорию функций комплексного переменного М. Г. Хапланов, аналитическую геометрию М. П. Черняев, дифференциальную геометрию К. К. Мокрищев, астрономию А. А. Батырев, алгебру Е. Л. Литвер. С другой стороны, факультет пополнялся новыми сотрудниками. В 1953 году в Ростов-на-Дону из Казани вместе с группой талантливых учеников приехал профессор Фёдор Дмитриевич Гахов. Он организовал знаменитый «большой гаховский семинар» по математическому анализу и механике, а прочитанный им курс лекций вскоре лёг в основу фундаментальной монографии «Краевые задачи». В 1950 году серьезное подкрепление получила кафедра теоретической механики – в лице вчерашних фронтовиков, воспитанников Московского университета Никиты Николаевича Моисеева, Иосифа Израилевича Воровича и Леонида Александровича Толоконникова.

Л. А. Толоконников в 1957 году переедет в Тулу (а в 1959 на основании проведенных в Ро-

стве исследований блестяще защитит на совете механико-математического факультета МГУ докторскую диссертацию «Некоторые вопросы нелинейной теории упругости»). Н. Н. Моисеев (см. [6]), будущий академик АН СССР, заложивший основы многих новых направлений в механике и прикладной математике, перед своим возвращением в Москву в 1956 году успеет создать в университете крепкую научную школу (среди его учеников, например, один из ведущих профессоров РГУ С. В. Жак). А И. И. Ворович останется в Ростове, в 1961 году возглавит кафедру теории упругости, а в 1971 – только что созданный НИИ механики и прикладной математики, которым будет руководить до последних дней своей жизни. Благодаря его научному и педагогическому таланту сформируется знаменитая на весь мир ростовская школа механиков-упругистов. Сегодня имя лауреата Государственных премий СССР и Российской федерации носит Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (преемник традиций физмата–мехмата РГУ).

И И. И. Ворович, и Н. Н. Моисеев сыграли важную роль в судьбах студентов набора 1949 года. Так, Никиту Николаевича назначили «классной дамой» этого курса, он часто встречался с ребятами в неформальной обстановке, был душой факультетской волейбольной («волей больной») команды, организовал в РГУ секцию альпинизма. Однокурсник М. Б. Налбандян, будущий декан факультета управления и прикладной математики МФТИ и один из ведущих сотрудников Вычислительного центра АН СССР Ю. П. Иванюков в своих воспоминаниях [7] отметил особенности преподавательской работы вчерашних москвичей: «Несмотря на принадлежность к одному научному уровню, люди были совершенно разные. Как они читали лекции? Моисеев начинал читать дотоле неизвестный ему самому курс и, как только что-то начинал в нём понимать, менял на другой. Ворович был полная противоположность Моисееву. Он тщательно доказывал все теоремы, буквально «разжёвывая» каждое определение до такой степени, что оно становилось понятным любому присутствующему. И, наконец, у Толоконникова также была собственная манера: он бросал слушателям идею и, не очень заботясь о её развитии и вне зависимости от понимания студентами этой идеи, переходил к следующей».

Выпуск 1954 года стал едва ли не самым сильным в истории физмата. Вчерашние студенты разъехались в вузы и школы различных городов СССР, стали преподавать в ростовских вузах, в том числе в родном университете (так, всю свою жизнь связали с ним Э. Хасабов, В. Саченко, Г. Аржанов, А. Снопов). В. Г. Зубчанинов, отметивший в 2021 году своё 90-летие, стал ректором Тверского политехнического института (ныне ТГТУ). В Москве, помимо Ю. П. Иванюкова, успешно работали С. А. Бостанджиян, В. В. Барзыкин и, конечно, А. Г. Мержанов, будущий академик РАН, ставший в 1960 году заведующим лабораторией воспламенения и перехода горения в детонацию (самым молодым завлабом в СССР!) и создавший в 1986 г. Институт структурной макрокинетики (ныне — ИСМАН имени А. Г. Мержанова).

Маргарита Налбандян по распределению уехала в Джамбул (Казахстан), в течение года преподавала математику в школе № 3, подчинявшейся Министерству путей сообщения, а затем вернулась в Ростов-на-Дону (из-за болезни мамы). После короткого периода работы в Шахтинском государственном педагогическом институте она в сентябре 1956 года стала ассистентом на родном факультете, а в 1958 г. поступила в аспирантуру к С. Е. Белозёрову.

3. Исследования по теории эллиптических функций

С. Е. Белозёров, возглавлявший Ростовский университет в 1938–1954 гг., после того, как передал полномочия ректора члену-корреспонденту АН СССР гидрохимику О. А. Алекину, несколько лет работал советником министра высшего образования в Румынии. Затем он вернулся в Ростов-на-Дону, стал доцентом кафедры геометрии и высшей математики, а в 1960 возглавил кафедру высшей математики. Учёный продолжал изучать историю аналитических функций, одновременно занимаясь кропотливыми исследованиями, связанными с историей

университета (итог этой работы был подведён в [4]).

С первых дней аспирантуры М.Б. Налбандян стала активной помощницей Семёна Ефимовича в обработке материалов для его монографий, а вскоре начала самостоятельный поиск в архивах (можно упомянуть Ленинградский государственный исторический архив, Ленинградское и Московское отделения Архива АН, Центральные государственные исторические архивы УССР, ЭССР, ТатАССР, Москвы, Одессы, Центральный государственный военно-исторический архив Москвы, Архив МГУ). Первые результаты кропотливой и скрупулезной работы по изучению истории эллиптических функций в России были подведены в сборниках материалов второй и третьей научных конференций аспирантов РГУ (1960–1961 гг.). В одной из статей анализировались особенности преподавания теории эллиптических функций в России, в другой разбирались труды О. И. Сомова по этой тематике. Впоследствии обзоры найденных документов были сделаны в докладах на конференциях самого различного уровня (IV Всесоюзный математический съезд, межвузовские конференции в Ростове-на-Дону, Ярославле, Тамбове, Прибалтийская конференция по истории науки, годовые конференции Ленинградского отделения советского национального объединения историков естественных и технических наук, заседания семинара по истории математики в МГУ и многие другие). Из публикаций можно выделить [8]–[10].

В [8] М.Б. Налбандян проанализировала не только опубликованные работы Е. И. Золотарёва, но и ряд архивных материалов, в частности, его рукописные тетради, хранящиеся в Архиве Академии Наук в Москве и в его Санкт-Петербургском филиале. А статья [10] представляла собой конспект доклада, сделанного на математической секции Пленума Советского национального объединения историков естествознания и техники, и была посвящена результатам, полученным русскими математиками «в теории эллиптических функций и особенно в её приложениях к актуальным проблемам математики и механики». Среди учёных, труды которых разбирались в [10] достаточно детально – О. И. Сомов, И. П. Долбня, С. В. Ковалевская, Е. И. Золотарёв, П. С. Назимов (всего было упомянуто 29 математиков, работавших в Москве, Санкт-Петербурге, Казани, Киеве, Тарту, Харькове). При этом особо подчёркивалось, что их «педагогическая деятельность... находилась в тесной связи с исследовательской работой в области теории функций и нередко выступала в качестве своеобразного стимула» [10, с.363].

В июне 1972 года на заседании Объединённого Учёного совета по истории физико-математических наук при Институте истории естествознания и техники АН СССР состоялась защита диссертации М.Б. Налбандян «Теория эллиптических функций и её приложения в работах русских математиков XIX века» [11], представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Оппонентами выступали доктор физико-математических наук, профессор Ростовского государственного университета М.Г. Хапланов и старший научный сотрудник Ленинградского отделения ИИЕиТ АН СССР, кандидат физико-математических наук Е. П. Ожигова.

Михаил Григорьевич Хапланов (1902–1977), ученик Д. Д. Мордухай-Болтовского, выпускник РГУ 1925 года, относится к числу людей, которых можно считать лицом физмата-мехмата. Он был деканом факультета в самые тяжёлые годы (1936–1940, 1942–1947), руководил кафедрой математического анализа, в 70-е заведовал созданной им кафедрой теории функций и функционального анализа. М.Г. Хапланов разработал матричную теорию линейных непрерывных операторов, интенсивно использующуюся в работах отечественных и зарубежных математиков, написал уникальный учебник «Теория функций комплексного переменного», воспитал не одно поколение ростовских (да и не только ростовских) математиков (см. [5, с. 28-29] и [12]). А Елена Петровна Ожигова (1923–1994) — один из ведущих отечественных историков науки, выпускница ЛГУ, автор многочисленных книг по истории российской математики, в том числе – научной биографии Е. И. Золотарёва (подробности жизни и исследовательской деятельности Е.П. Ожиговой можно найти в [13]–[14]).

Диссертация, подготовленная М. Б. Налбандян, представляла собой весьма объёмный труд

и включала в себя 195 страниц основного текста, 30 страниц приложений, список литературы из 380 названий, а также перечень использованных архивных документов (упоминались 79 дел из 20 фондов 11 различных архивов). Введение было посвящено общим вопросам развития теории эллиптических функций и интегралов, в нём с разной степенью подробности рассматривались работы Я. Бернулли, Л. Эйлера, А. М. Лежандра, К. Ф. Гаусса, Н. Х. Абеля, К. Г. Якоби, Ж. Лиувилля, К. Вейерштрасса и его учеников. Завершив этот анализ, М. Б. Налбандян определила основные направления исследований, которые проводились в России: проблемы элементарно-геометрического представления эллиптических интегралов и функций и их вычисления; приведение алгебраических иррациональных интегралов к простейшим видам; теорема сложения и примыкающие к ней вопросы. Обзор полученных в этом направлении результатов составил содержание второй главы диссертации.

В её первом параграфе отмечается, что работы русских математиков А. Ю. Давидова, В. Г. Имшенецкого, П. С. Назимова, посвященные геометрическому представлению эллиптических интегралов и функций, «выгодно отличаются от исследований их зарубежных коллег как по подходу к рассматриваемой проблеме, так и по результатам» [9, с.69] (имеются в виду проанализированные публикации Э. Ш. Каталана, А. Штрнада, И. Вилларсо). Здесь же автор подробно разбирает магистерскую диссертацию П. П. Граве «О геометрическом представлении эллиптических интегралов и функций» (Казань, 1894), подчёркивая, что в ней представляет интерес исторический очерк, а вот теоретические исследования оказываются несовершенными. Также обращается внимание на результаты Ю. В. Сохоцкого и С. Г. Петровича.

Второй параграф посвящён теореме сложения, которая занимает центральное место в общей теории эллиптических функций; в нём детально проанализированы работы О. И. Сомова, Н. Б. Делоне, М. А. Тихомандрицкого, Б. Я. Букреева, В. А. Анисимова, П. М. Покровского.

Сформулировав в начале третьего параграфа общую проблему преобразования эллиптических интегралов, М. Б. Налбандян отмечает, что в относящихся к этому направлению исследованиях русских математиков решались самые разные вопросы и «были получены интересные результаты» как в области приведения эллиптических интегралов к одному из канонических видов, так и в «более сложном вопросе приведения абелевых и ультра-эллиптических интегралов к эллиптическим» [11, с.107-108]. Здесь упоминаются публикации Н. Н. Алексеева, И. П. Долбни, Д. Д. Мордухай-Болтовского.

В заключительном, четвёртом, параграфе второй главы подчёркивается, что эллиптические и θ -функции широко использовались при решении прикладных задач, а потому особое значение имели исследования, направленные на облегчение вычислений. Разобрав работы О. И. Сомова, Н. Б. Делоне, Д. А. Граве, М. Б. Налбандян обращает внимание на то, что эта тематика «продолжает привлекать внимание математиков и до сих пор, причём характерно, что исследованиями в этом направлении занимаются, в основном, представители технических вузов» [11, с.122].

Третья глава была посвящена приложениям теории эллиптических функций, области, в которой представители русской математической школы получили самые значимые результаты. Так, первый параграф представлял собой разбор работ О. И. Сомова и И. П. Долбни, посвящённых решению таких задач как спрямление дуг круговых линий, квадратура конуса и эллиптического параболоида, вычисление объема тела, ограниченного конической поверхностью, поверхностью второго порядка с центром в начале координат и двумя плоскостями. Во втором параграфе анализировались исследования О. И. Сомова и С. В. Ковалевской, связанные с задачей о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки, в третьем рассматривались задачи из области теории чисел, которые привлекли к себе внимание Е. И. Золотарёва, Н. В. Бугаева и его ученика П. С. Назимова. В центре внимания четвёртого параграфа оказалась теорема П. Л. Чебышёва о возможности или невозможности представления в элементарных функциях интеграла

$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+ax^3+bx^2+cx+d}}$ с рациональными коэффициентами

подынтегрального многочлена и её доказательство Е. И. Золотарёвым (с применением аппарата эллиптических функций К. Якоби). Здесь же разбирались работы И. П. Долбни, причём сравнивались разные точки зрения на значение его трудов, отмечались особенности творчества учёного, а в качестве вывода приводились слова Г. Дарбу о том, что результаты русского математика «оказали честь их автору и его родине, стране Чебышёва и Золотарёва» [11, с.184]. Завершалась третья глава параграфом, в котором М. Б. Налбандян убедительно доказала, что русские учёные сыграли важную роль в расширении круга вопросов, требующих для своего решения применения теории эллиптических функций. Основной упор сделан на исследования Е. И. Золотарёва, связанные с теорией приближения функций.

Высоко оценив вторую и третью главу диссертации, оппоненты, тем не менее, основной заслугой автора назвали первую главу – «Теория эллиптических функций как учебная дисциплина в России в XIX и в начале XX вв.». В ней прослеживалось развитие трёх основных направлений в изложении этой дисциплины (по Абелю и Якоби, по Лиувиллю, по Вейерштрассу), анализировались подготовленные русскими учёными учебники и учебные пособия, обосновывалась важная роль, которую отводили теории эллиптических функций при подготовке научных работников и преподавателей. Е. П. Ожигова, разобрав результаты этой главы, подчеркнула, что большинство упомянутых сочинений было «изучено в историко-математической литературе впервые».

Можно упомянуть также отзыв о диссертации М. Б. Налбандян, написанный одним из ведущих советских историков математики А. П. Юшкевичем, который отметил «большую работу по разысканию и исследованию многочисленных источников», что позволило «значительно дополнить (а в ряде случаев изменить) наши представления о развитии математики в России». А завершить обзор исследования, которое в свое время рекомендовали положить в основу монографии, лучше всего словами Е. П. Ожиговой: «Автор этой работы – человек постоянно недовольный собой и потому постоянно продолжающий поиски новых материалов, их систематизацию и изучение, выясняющий всё новые и новые связи, новые и новые стороны своей любимой темы. В диссертации всё сделано «своими руками» – собран новый интересный материал, расшифрованы тексты архивных документов, сделаны переводы документов и работ иностранных авторов (с немецкого, французского, английского, итальянского, латинского языков), осуществлен критических обзор многих источников, проведено сравнение различных методов и их результатов».

4. Исследования, посвящённые Д. Д. Мордухай-Болтовскому

Публикации, связанные с историей теории эллиптических функций, появлялись и позже (см., например, [15]), однако знакомство с работами Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского, одного из ярких представителей петербургской, «чебышёвской» школы, приехавшего в свое время в Ростов-на-Дону вместе с Варшавским университетом, привело М. Б. Налбандян к исследованиям, связанным с биографией этого учёного. Работа в архивах, общение с родственниками, изучение документов, связанных со становлением ростовской математической школы, основателем которой в полной мере считается Д. Д. Мордухай-Болтовской... В 1971 году Маргарита Бабкеновна успешно выступила на XIII Международном Конгрессе по истории науки с докладом «О некоторых неопубликованных работах Д. Д. Мордухай-Болтовского», в котором был дан обзор статей, хранящихся в фондах Санкт-Петербургского филиала архива РАН (впоследствии в поле зрения попали и материалы, рукописи которых находятся в ростовских архивах). А в 1974 году вышла статья [16], подготовленная в соавторстве с учениками Дмитрия Дмитриевича. Со временем домашний архив пополнился фотографиями, эпистолярным наследием учёного (письма к коллегам, к сыну, деловая переписка), учебными программами, отзывами и рецензиями. К сожалению, так и

не была написана научная биография выдающегося математика, однако часть материала вошла в одну из глав исследования [5]. Особое внимание там уделялось работам, посвящённым трансцендентным числам и функциям (эти публикации были высоко оценены Ж. Адамаром и А. О. Гельфондом, см. [5, с.13-14]).

Далеко не всё удавалось обработать и опубликовать сразу. Так, найденные М.Б.Налбандян неизвестные публицистические статьи Д. Д. Мордухай-Болтовского были представлены широкой общественности и проанализированы Т. С. Поляковой и В. Е. Пырковым в 2007 году (см. [17]), а архивные материалы «Общественного пересмотра научных работников» упоминались в [2] и подробно разбирались в [18].

Интерес к личности и работам Д. Д. Мордухай-Болтовского, работа с архивными материалами и беседы с сотрудниками мехмата, помнившими события ещё предвоенных лет, позволили Маргарите Бабкеновне продолжить исследования С. Е. Белозёрова, связанные с историей университета (и, прежде всего, физико-математического факультета). Так появилась основанная на архивных документах большая статья [19], посвящённая истории Общества естествоиспытателей, которое было создано при Варшавском университете в 1889 году (утверждение Устава — 23.12.1888, торжественный акт открытия — 19.02.1889, [19, с.5]) и успешно продолжило свою деятельность в Ростове-на-Дону (последние документы, связанные с Обществом, датируются 1928 годом, «косвенные факты» подтверждают работу, «хоть и менее интенсивную», до 1930 года).

В 1989 году значительная часть собранных материалов была использована при подготовке монографии [5]. В авторский коллектив, помимо Маргариты Бабкеновны Налбандян, вошли профессор Юрий Фёдорович Коробейник и одна из старейших преподавательниц факультета Нина Николаевна Рожанская (им обоим в послевоенные годы довелось слушать лекции Д. Д. Мордухай-Болтовского), а также декан мехмата тех лет Яков Михайлович Ерусалимский. В последующие годы появился цикл статей, посвящённых различным представителям ростовской математической школы. В 1991 году, после работы в архивах Ростова, Кирова и Воронежа, М.Б.Налбандян опубликовала интересные документы о трагической судьбе расстрелянного в 1938 г. ректора университета Николая Андреевича Дернова (см. [20]); а в 1999 г. в статье [21] проанализировала неизвестные до того времени материалы о студенческих годах жизни лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, директора НИИ-1 Министерства авиационной промышленности (ныне Исследовательский центр имени М.В.Келдыша Российского космического агентства) В. Я. Лихущина. Доклады об учениках Д. Д. Мордухай-Болтовского Н. В. Ефимове, Б. Я. Левине, М. Г. Хапланове, о различных этапах становления ростовской математической школы не раз звучали на ежегодных конференциях Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники, на регулярно проходящих Колмогоровских чтениях (Ярославль) и на Международных школах-семинарах по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.

5. Заключение

Маргарита Бабкеновна Налбандян на протяжении всей своей исследовательской деятельности сотрудничала с многими специалистами в области истории математики — можно вспомнить и Нину Ивановну Невскую, и Юдифь Хаимовну Копелевич, и Миру Михайловну Рожанскую... Нельзя не упомянуть дружбу и сотрудничество с Галиной Павловной Матвиевской — отголоски этого можно найти и в переписке, и в поиске материалов для книги Г. П. Матвиевской об ученике Д. Д. Мордухай-Болтовского В. И. Романовском.

Нежная дружба, зародившаяся в процессе подготовки к защите кандидатской диссертации, связывала М.Б.Налбандян с Е. П. Ожиговой. Выступив поначалу в роли очень доброжелательного, но принципиального и дотошного оппонента, Елена Петровна впоследствии

немало помогала Маргарите Бабкеновне и советами, и документами, и просто моральной поддержкой. А при подготовке к печати в серии «Научное наследство» переписки В. А. Стеклова с отечественными математиками выступающая в роли редактора Е. П. Ожигова привлекла к работе и М. Б. Налбандян (в связи с письмами А. Гурвица).

Как вспоминала сама Маргарита Бабкеновна, и Е. П. Ожигова, и Г. П. Матвиевская повлияли на её становление как профессионального историка науки в не меньшей степени, чем С. Е. Белозёров. У них она училась скрупулёзности в работе с документами, точности библиографических ссылок, неформальному отношению к подготовке рецензий и отзывов на статьи коллег и на представляемые к защите диссертации.

С 1956 года и до последних дней своей жизни Маргарита Бабкеновна Налбандян работала на физико-математическом (впоследствии — после реорганизации в 1961 г. — на механико-математическом) факультете Ростовского университета. Можно упомянуть математические курсы для студентов биолого-почвенного и геолого-географического факультетов, разнообразные методические публикации, исполнение обязанностей заведующего кафедрой высшей математики и борьбу за её функционирование (не особо успешную: в 1976 году кафедру всё же расформировали, а М. Б. Налбандян стала доцентом кафедры геометрии). В последние годы жизни все свои силы она отдавала возрождению на факультете курсов по истории математики. Сначала для слушателей отделения «математика», получающих дополнительное педагогическое образование, затем для бакалавров и магистрантов всех специальностей. Но всё неожиданно и резко оборвалось в 2004 году.

Какова же судьба материалов, собираемых М. Б. Налбандян с 60-х годов XX века — архивных документов, описаний исследованных архивных фондов, фотографий? Часть материалов, не вошедших в диссертацию, была обработана и опубликована позже (например, в статье [22], посвященной трудам Ю. В. Сохоцкого по теории эллиптических функций и полностью написанной на основании архивных материалов). Некоторые «заготовки» легли в основу публикаций и докладов автора этой статьи. Но многое всё ещё ждёт своего часа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юшкевич А. П. История математики / Математика в СССР за 40 лет. 1917–1957. Т. 1. Обзорные статьи. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1959. С. 953–985.
2. Налбандян Ю. С. М. Б. Налбандян и история математики в Ростовском государственном (Южном Федеральном) университете / Труды IX Международных Колмогоровских чтений. Сборник статей. Ярославль: Издательство ЯГПУ. 2011. С. 294–298.
3. Налбандян Ю. С. Варшавский императорский... Ростовский государственный... Южный федеральный... Ростовская математическая школа / Леонард Эйлер и современная наука. Материалы Международной научной конференции. Спб.: Политехника-сервис. 2007. С. 247–252.
4. Белозёров С. Е. Очерки истории Ростовского университета. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета. 1959. 362 с.
5. Коробейник Ю. Ф., Ерусалимский Я. М., Налбандян М. Б., Рожанская Н. Н. Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк). Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета. 1989. 64 с.
6. Ерешко Ф. И. Учитель, или судьба страны в судьбе учёного. К 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Моисеева // Вестник Российской Академии наук. 2018. Т. 87. № 10. С. 927–939.

7. Интервью с деканом ФУПМ Ю. П. Иваниловым // За науку. Орган ректората, парткома, профкома и комитета ВЛКСМ Московского ордена Трудового Красного Знамени физико-технического института. 23 марта 1979 г. № 8 (678).
8. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и её приложения в трудах Е. И. Золотарёва // Историко-математические исследования. 1965. В. XVI. С. 191-206.
9. Налбандян М. Б. О некоторых проблемах интегрирования эллиптических дифференциалов в трудах русских математиков XIX века // История и методология естественных наук. В. 5. Математика. М.: Издательство МГУ. 1966. С. 96–104.
10. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и её приложения в трудах русских математиков XIX века // Историко-математические исследования. 1966. В. XVII. С. 361–369.
11. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и её приложения в работах русских математиков XIX в.: диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук: 09.00.00. Ростов-на-Дону, 1971. 267 с.
12. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Памятные даты: Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952) и М. Г. Хапланов (1902–1977) / Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета. 2002. С. 11–14.
13. Елена Петровна Ожигова / Сост. Л. И. Брылевская, И. К. Зубова, И. В. Игнатушина. СПб.: Нестор-История. 2008. 40 с.
14. Зубова И. К., Матвиевская Г. П., Налбандян Ю. С. Елена Петровна Ожигова. К 90-летию со дня рождения // История науки и техники. 2013. № 11. С. 30–38.
15. Налбандян М. Б. Работы петербургских математиков по теории абелевых интегралов (конец XIX – начало XX вв.) // Наука и техника. Вопросы истории и теории. В. X. Москва–Ленинград. 1979. С. 75–76.
16. Минковский В. Л., Мокрищев К. К., Налбандян М. Б., Хапланов М. Г. Д. Д. Мордухай-Болтовской (к 100-летию со дня рождения) // Вопросы истории естествознания и техники. В. 3–4. М.: Наука. 1977. С. 102–103.
17. Полякова Т. С., Пырков В. Е. К творческой биографии Д. Д. Мордухай-Болтовского: публицистика 1917–1918 гг. // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2007. В. 12(47). С. 333–345.
18. Налбандян Ю. С. «Общественный пересмотр научных работников» и ростовская математическая школа / Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы. Сборник научных статей. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2015. С. 175–178.
19. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Из истории общества естествоиспытателей при Варшавском (Донском, Северо-Кавказском) университете. Деп. в НИИ высшего образования 11.07.1994. № 140–94. 20 стр.
20. Налбандян М. Б., Налбандян Ю. С. Н. А. Дернов (1891–1938). К 100-летию со дня рождения. Деп. в НИИ высшего образования 04.10.1991. № 632–91. 32 стр.
21. Налбандян М. Б. Валентин Яковлевич Лихущин (1918–1992) // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1999. № 3. С. 109–110.

22. Налбандян М. Б. Эллиптические функции в работах профессора Ю. В. Сохоцкого // XXII Szkoła Historii Matematyki. Krakow: Wydawnictwo Wydziału Matematyki Stosowanie Akademii Gorniczo-Hutnicze. 1999. С. 162–168.

REFERENCES

1. Yushkevich, A. P., 1959, “History of mathematics”, *Matematika v SSSR za 40 let. 1917-1957. T.1. Obzornye stat'i* [Mathematics in the USSR for 40 years. 1917-1957. Vol. 1. Review articles], Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, pp. 953-985.
2. Nalbandyan, Yu. S., 2011, “M.B. Nalbandyan and the history of mathematics at the Rostov State (Southern Federal) University”, *Trudy IX Mezhdunarodnyh Kolmogorovskih chtenij. Sbornik statej* [Proceedings of the IX International Kolmogorov Readings. Digest of articles], Yaroslavl, pp. 294-298.
3. Nalbandyan, Yu. S., 2007, “Warsaw imperial . . . Rostov state . . . Southern federal . . . Rostov mathematical school”, *Leonard Ejler i sovremennaya nauka. Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Leonard Euler and modern science. Materials of the International Scientific Conference], Politehnika-servis, Saint Petersburg, pp. 247-252.
4. Belozerov, S. E., 1959, *Ocherki istorii Rostovskogo universiteta* [Essays on the history of Rostov University], Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, Rostov-on-Don, 362 p.
5. Korobeinik, Yu. F., Erusalimsky, Ya. M., Nalbandyan, M. B. & Rozhanskaya, N. N., 1989, *Mekhaniko-matematicheskij fakul'tet Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta (kratkij istoricheskij ocherk)* [Faculty of Mechanics and Mathematics, Rostov State University (brief history)], Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, Rostov-on-Don, 64 p.
6. Ereshko, F. I., 2018, “A teacher, or the fate of a country in the fate of a scientist. For the 100th anniversary of the birth of Academic N. N. Moiseev”, *Vestnik Rossijskoj Akademii nauk* [Herald of the Russian Academy of Sciences], vol. 87, no. 10, pp. 927-939.
7. “Interview with the dean of FUPM Yu. P. Ivanilov”, 1979, *Za nauku. Organ rektorata, partkoma, profkoma i komiteta VLKSM Moskovskogo ordena Trudovogo Krasnogo Znameni fiziko-tekhnicheskogo instituta* [For Science. Organ of the administration, party committee, trade union committee and committee of the All-Union Leninist Young Communist League of the Moscow Order of the Red Banner of Labor of the Physics and Technology Institute]. March 23, no. 8 (678).
8. Nalbandyan, M. B., 1965, “The theory of elliptic functions and its applications in the works of E. I. Zolotarev”, *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* [Historical and mathematical research], issue XVI, pp. 191-206.
9. Nalbandyan, M. B., 1966, “On some problems of integration of elliptic differentials in the works of Russian mathematicians of the XIX century”, *Istoriya i metodologiya estestvennyh nauk* [History and Methodology of Natural Sciences], issue V, Mathematics, Izdatel'stvo Moskovskogo universitetan, Moscow, pp. 96-104.
10. Nalbandyan, M. B., 1966, “The theory of elliptic functions and its applications in the works of Russian mathematicians of the XIX century”, *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* [Historical and mathematical research], issue XVII., pp. 361-369.

11. Nalbandyan, M. B., 1971, *The theory of elliptic functions and its applications in the works of Russian mathematicians of the 19th century: dissertation for the degree of candidate of physics and mathematics. Sciences: 09.00.00*, Rostov-on-Don, 267 p.
12. Nalbandyan, M. B. & Nalbandyan, Yu. S., 2002, "Memorable dates: D. D. Mordukhai-Boltovskoy (1876–1952) and M. G. Khaplanov (1902–1977)", *Trudy uchastnikov Mezhdunarodnoj shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyati N. V. Efimova* [Proceedings of the participants of the International School-Seminar on Geometry and Analysis of Memory of N. V. Efimov]. Rostov-on-Don, pp. 11-14.
13. *Elena Petrovna Ozhigova* / Comp. L. I. Brylevskaya, I. K. Zubova, I. V. Ignatushina, 2008, Izdatel'stvo Nestor-Istoriya, Saint Petersburg, 40 p.
14. Zubova, I. K., Matvievskaia, G. P. & Nalbandyan Yu. S., 2013, "Elena Petrovna Ozhigova. On the occasion of the 90th anniversary of his birth", *Istoriya nauki i tekhniki* [History of Science and Engineering], no. 11, pp.30-38.
15. Nalbandyan, M. B., 1979, "Works of St. Petersburg mathematicians on the theory of Abelian integrals (late XIX - early XX centuries)", *Nauka i tekhnika. Voprosy istorii i teorii* [The Science and Engineering. Questions of history and theory], issue X. Moscow-Leningrad, pp. 75-76.
16. Minkovsky, V. L., Mokrishchev, K. K., Nalbandyan, M. B. & Khaplanov, M. G., 1977, "D. D. Mordukhai-Boltovskoy (for the 100th anniversary of his birth)", *Voprosy istorii estestvoznaniya i tekhniki* [Questions of the history of natural science and technology], issue 3-4, Nauka, Moscow, pp. 102-103.
17. Polyakova, T. S. & Pyrkov, V. E., 2007, "To the creative biography of D. D. Mordukhai-Boltovskoy: journalism 1917–1918", *Istoriko-matematicheskie issledovaniya. Vtoraya seriya* [Historical and mathematical research. Second series], issue 12(47), pp. 333-345.
18. Nalbandyan, Yu. S., 2015, "«Public review of researchers» and the Rostov mathematical school", *Matematika i matematicheskoe modelirovanie: problemy i perspektivy. Sbornik nauchnykh statej* [Mathematics and mathematical modeling: problems and prospects. Collection of scientific articles], Orenburg, pp. 175-178.
19. Nalbandyan, M. B. & Nalbandyan, Yu. S., 1994, *From the history of the Society of Naturalists at the Warsaw (Don, North Caucasus) University*, An article deposited at the Research Institute of Higher Education 11.07.1994, no. 140-94, 29 p.
20. Nalbandyan, M. B. & Nalbandyan, Yu. S., 1991, *N. A. Dernov (1891-1938). For the 100th anniversary of his birth*, An article deposited at the Research Institute of Higher Education, 04.10.1991, no. 632-91, 32 p.
21. Nalbandyan, M. B., 1999, "Valentin Yakovlevich Likhushin (1918-1992)", *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki* [Bulletin of higher educationl institutes. North Caucasus region. Natural Sciences], no. 3, pp. 109-110.
22. Nalbandyan, M. B. 1999, "Elliptic functions in the works of Professor Yu. V. Sokhotskiy", *XXII Szkola Historii Matematyki* [XXII Conference on the History of Mathematics], Krakow, pp. 162-168.

Получено 07.07.21

Принято в печать 22.06.2022

Памяти Виктора Александровича Ведерникова



14 января 1940 — 21 февраля 2021

21 февраля 2022 года на 83-ом году жизни скончался действительный член Академии естественных наук, профессор, доктор физико-математических наук, профессор департамента математики и физики института цифрового образования Московского городского педагогического университета Ведерников Виктор Александрович. Российская и Белорусская науки потеряли известного ученого, талантливого педагога, интеллигентного и жизнерадостного человека.

В. А. Ведерников родился 14 января 1940 года в селе Поим Кувандыкского района Оренбургской области. В 1962 году окончил Орский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко по специальности «математика и физика» с присвоением квалификации и звания учителя средней школы. Поработав в Орском филиале Всесоюзного заочного политехнического института и отслужив в армии, Виктор Александрович в 1965 году поступил в очную аспирантуру Института математики АН БССР (г. Гомель) по специальности «алгебра и теория чисел» к академику АН БССР Сергею Антоновичу Чунихину. В 1968 году В. А. Ведерников защитил кандидатскую диссертацию на тему «Характеризация конечных групп подгруппами», тем самым связав себя с направлением «математическая логика, алгебра и теория чисел», с которым он не расставался в течение всей своей жизни. В 1968 году Виктору Александровичу была присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук.

После успешной защиты диссертации Виктор Александрович Ведерников работал в Орском филиале Всесоюзного заочного политехнического института (1968-1974 гг.), где в 1972 году ему было присвоено ученое звание доцента по кафедре «высшая математика, физика и теоретическая механика», а также в Новомосковском филиале Московского химико-технологического института им. Д. И. Менделеева (1974–1976 гг.).

В 1976 году Виктор Александрович Ведерников возглавил кафедру алгебры Брянского государственного педагогического института им. академика И. Г. Петровского (БГПУ). В этот период он продолжает активно заниматься наукой и подготовкой кадров высшей квалификации. Под его руководством на постоянной основе работал научный кафедральный семинар, статьи членов кафедры систематически публиковались в сборнике трудов Гомельского алгебраического семинара Института Математики АН БССР, в республиканском межведомственном сборнике «Вопросы алгебры», в журналах «Математические заметки», «Алгебра и

логика» и др. В тесном сотрудничестве с Гомельской алгебраической школой на кафедре алгебры стало развиваться направление исследования классов конечных групп. С 1991 года по 1993 год на двухгодичный период В. А. Ведерников был переведен на должность научного сотрудника кафедры для завершения работы над диссертацией на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В 1994 году им была успешно защищена докторская диссертация на тему «Конечные подпрямые произведения групп». В диссертации было получено конструктивное описание конечных подпрямых произведений групп, тем самым для конечного числа множителей приведено решение задачи А. Г. Куроша о строении подгрупп прямых произведений; решена по модулю гипотезы Шрейера проблема Л. А. Шеметкова о замкнутости класса E_π относительно конечных подпрямых произведений; а также получены положительные ответы на некоторые вопросы из Коуровской тетради, связанные с конечными подпрямыми произведениями групп. В том же 1994 году Виктору Александровичу была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук, а в 1995 году — присвоено ученое звание профессора кафедры алгебры. В период с 1994 года по 1998 год В. А. Ведерников вновь возглавляет кафедру алгебры БГПУ и осуществляет руководство алгебраическими исследованиями студентов, аспирантов и преподавателей физико-математического факультета. Под его руководством выпускниками вуза были защищены 10 кандидатских и 1 докторская диссертации.

В 1998 году Ведерников Виктор Александрович переезжает в Москву и становится профессором кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания математического факультета Московского городского педагогического университета (МГПУ). В этот новый отрезок своего жизненного пути Ведерников В.А. входит признанным специалистом в области теории групп, пользующимся большим авторитетом в научных кругах, но, по-прежнему, оставаясь простым и доступным в общении человеком, обладающим огромной трудоспособностью. За время работы в МГПУ Виктором Александровичем была разработана и под его руководством реализована магистерская программа «Математика в профессиональном образовании». Работая на кафедре, В. А. Ведерников был руководителем научной школы «Теория групп», участники которой (аспиранты и преподаватели) занимались исследованием алгебраических структур с условиями конечности, активно участвовали в Международных и Всероссийских алгебраических конференциях, двое учеников стали кандидатами физико-математических наук.

В педагогической деятельности, осуществляемой в институте цифрового образования МГПУ, Виктора Александровича отличали высокий профессионализм, ответственность и трудолюбие. Студенты и аспиранты с безграничным уважением относились к профессору Ведерникову. В. А. Ведерников не раз был отмечен премиями по месту работы, награжден грамотой Департамента образования г. Москвы (2010 год), а также почетной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации (2012 год).

Областью научных интересов В. А. Ведерникова всегда была теория групп. В 1999 году Виктор Александрович предложил принципиально новый функциональный подход к изучению классов групп, который привел к необходимости рассмотрения для формаций и классов Фиттинга наряду с функциями-спутниками новой функции-направления, определяемой как отображение множества всех простых чисел (класса всех простых конечных групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга. Поскольку таких направлений существует бесконечное множество, то для фиксированного непустого множества ω простых чисел (для фиксированного непустого класса Ω простых конечных групп) можно построить бесконечное множество новых видов ω -веерных (Ω -расслоенных) формаций. Дальнейший анализ понятия расслоенности формации конечных групп и групп, обладающих конечными композиционными рядами, показал, что понятие расслоенности формации носит более универсальный характер и может быть применено к построению расслоенных формаций универсальных алгебр, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. Так, в 2009 году В. А. Ведерников построил теорию Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных

T -групп с конечными композиционными рядами. Разработанные В. А. Ведерниковым теории активно развиваются его учениками в настоящее время.

В. А. Ведерников опубликовал 6 учебно-методических и более 130 научных работ. Виктор Александрович рецензировал статьи из рецензируемых научных изданий, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования. В. А. Ведерников был членом следующих диссертационных советов: объединенного диссертационного совета при Московском городском педагогическом университете и Тульском государственном педагогическом университете им Л. Н. Толстого; диссертационного совета при Московском педагогическом государственном университете; диссертационного совета при Гомельском государственном университете им. Франциска Скорины. Виктор Александрович неоднократно выступал оппонентом кандидатских и докторских диссертаций.

Ведерникову Виктору Александровичу было присуще умение мыслить творчески, азартно вовлекать в научную деятельность студентов и молодых специалистов-математиков. Он был энергичным, жизнерадостным, отзывчивым, доброжелательным, вежливым, сильным духом человеком, всегда полным новых научных идей, прекрасным семьянином. Именно таким Виктор Александрович навсегда останется в нашей памяти.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Виктору Александровичу Ведерникову в связи с его кончиной.

Е. Н. Бажанова, М. М. Сорокина, В. В. Гринишун, С. Г. Григорьев, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Е. В. Лавренова, Ю. А. Семеняченко

Памяти Бориса Михайловича Широкова



1 апреля 1937 — 3 декабря 2021

3 декабря 2021 г. после тяжёлой болезни от коронавируса на 85-ом году жизни скончался видный специалист по аналитической теории чисел Борис Михайлович Широков.

Борис Михайлович родился 1 апреля 1937 г. в селении Сорока (в 1938 году переименованном в г. Беломорск) в семье потомственного петербуржца, приехавшего по комсомольской путёвке на строительство будущего порта пяти морей.

В школьные годы Борису Михайловичу нравились все предметы, и они ему давались легко. Он учился в мужской школе №9 г. Петрозаводска, где прослыл физиком и литератором, астрономом и фотокорреспондентом, но большее предпочтение, конечно же, отдавал математике.

В 1954 г. Борис Михайлович поступил в Карело-Финский государственный университет и уже на первых курсах стал серьёзно заниматься наукой. Его работа «Об одном свойстве гармонических функций» заняла третье место на Всесоюзной выставке студенческих научных работ.

В 1983 году Б. М. Широков на заседании диссертационного совета Ленинградского государственного университета защитил кандидатскую диссертацию на тему «Средние значения и распределение арифметических функций». Научным руководителем работы выступал доктор физико-математических наук, профессор Александр Васильевич Малышев, крупный специалист в области теории чисел, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова. Один из официальных оппонентов, доктор физико-математических наук Эугениус Антано Манставичюс, изучив диссертационную работу Б. М. Широкова, высоко её оценил и даже предложил представить её на соискание учёной степени доктора физико-математических наук.

Исследования в области аналитической теории чисел с А. В. Малышевым продолжились и после защиты кандидатской диссертации. В их совместной работе сделан существенный вклад в развитие дискретного эргодического метода академика Ю. В. Линника, построен новый вариант ключевой леммы этого метода, охватывающий одновременно оба случая равномерного распределения целых точек на гиперболоидах.

Библиографический список работ Б. М. Широкова содержит более 70 фундаментальных публикаций. Основные результаты его работ опубликованы в таких журналах как «Доклады

Академии наук СССР», «Записки научных семинаров ЛОМИ», «Труды Петрозаводского государственного университета. Серия: Математика», «Вестник Ленинградского государственного университета», «Чебышевский сборник», «Известия высших учебных заведений», «Russian Mathematics».

Являясь доцентом Петрозаводского государственного университета, Борис Михайлович много сил отдавал педагогической и редакционно-издательской работе. На протяжении многих лет он читал лекции по математическому анализу студентам математического факультета ПетрГУ, руководил научными семинарами. Борис Михайлович являлся ответственным редактором издания «Аналитическая теория чисел: межвузовский сборник», выходявшего в Петрозаводске.

Будучи в Москве на курсах повышения квалификации, Борис Михайлович увидел, как работает Тех, восхитился, изучил сам и привёз его в Карелию, обучил всех коллег и студентов этому мастерству. Борис Михайлович написал также учебные пособия по этой издательской системе, которые были востребованы и за пределами Карелии.

Он разработал стилевую опцию Petrgu.sty для оформления журнала «Проблемы анализа – Issues of Analysis», который является продолжением издания «Труды Петрозаводского государственного университета. Серия: Математика», выпускавшегося в ПетрГУ с 1993 года при его непосредственном активном участии.

И в дни своей болезни он готовил очередную публикацию своих научных результатов.

Коллеги, ученики и друзья Бориса Михайловича сохраняют о нём светлую память и постараются продолжить развивать его научные идеи.

Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, У. М. Пачев, И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 23 Выпуск 2

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 23 Issue 2

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 23 Issue 2

F. S. Avdeev, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko. Generalization of the Laplace transform for solving differential equations with piecewise constant coefficients	5
I. Allakov, A. S. Safarov. A new estimate for the exceptional set of the sum of two primes from the arithmetic progression	21
A. M. Vetoshkin. Linear manifolds of projectors	42
N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. The final deviation and the main quality measure for Korobov grids.....	56
M. Y. Zhitnaya. Modeling of minimal parametric networks in Euclidean spaces using hinge mechanisms.....	74
A. A. Zhukova, A. V. Shutov. An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system	88
M. D. Kovalev. On the geometric definition of the hinge mechanism, Kempe's theorem and overripe mathematics.....	106
V. V. Kochergin. About the works of O. M. Kasim-Zadeh in the field of complexity theory and the theory of multivalued logics	121
A. G. Malashina, A. B. Moose. Construction and analysis of models of the Russian language in connection with the research of cryptographic algorithms	151
A. Senusi, M. Sofrani. Generalization of some integral inequalities for the Riemann-Liouville operator	161
Le Xuan Hung. Uniquely list colorability of complete tripartite graphs.....	170

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

A. D. Breki, S. E. Alexandrov, A. S. Biel, S. G. Chulkin, V. A. Yakhimovich, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Protopopov. Generalized mathematical model of the dynamics of the change in the friction force at rest and the beginning of sliding	179
A. A. Strelnikova, A. D. Breki, M. A. Skotnikova, D.G. Plotnikov, J. Padgurskas, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva. Research of the influence of diological lubricants on the tribological properties of the steel-titanium alloy friction pair	191

BRIEF MESSAGE

H. Al-Assad. On the character sums modulo equal of the power prime number 2	201
H. M. Saliba. One note about infinity	209

MEMORABLE DATES

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. Martin Davidovich Grindlinger – founder of the algebraic school and his role in the revival of the number-theoretic school in Tula (To the 90th anniversary of the professor Grindlinger M. D.).....	212
Y. S. Nalbandian. Margarita Babkenovna Nalbandian and her research on the history of mathematics in Russia (To the 90th anniversary).....	219
To the memory of Viktor Aleksandrovich Vedernikov	232
To the memory of Boris Mikhailovich Shirokov	235