

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

---

*Научно-теоретический журнал*

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXIII

Выпуск 1 (82)

Тула

2022

Учредитель: ФГБОУ ВО  
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»  
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,  
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,  
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:  
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

---

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

---

---

**Главный редактор**

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

**Ответственные секретари:**

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

**Заместители главного редактора:** Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),  
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

**Редакционная коллегия:**

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Том 23 Выпуск 1

---

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| От редакции .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 5   |
| Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. М. Бухштабер, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков,<br>А. Лауринчикас, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,<br>Н. В. Бударина, В. В. Бересневич, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша. Василий Иванович<br>Берник (к 75-летию) .....                                                                           | 6   |
| А. И. Шафаревич, А. Т. Фоменко, В. Н. Чубариков, А. О. Иванов, В. Г. Чирский,<br>В. И. Берник, В. А. Быковский, А. И. Галочкин, С. С. Демидов, С. Б. Гашков,<br>А. И. Нижников, А. А. Фомин, Е. И. Деза, А. Я. Канель-Белов, Н. М. Добровольский,<br>Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, В. Х. Салихов. Юрий Валентинович Нестеренко<br>(к 75-летию) ..... | 10  |
| П. А. Андрианов. О построении многомерных периодических фреймов всплесков .....                                                                                                                                                                                                                                                                            | 21  |
| О. Е. Арсеньева. О геометрии обобщенных почти кватернионных многообразий<br>вертикального типа .....                                                                                                                                                                                                                                                       | 33  |
| В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова. Целочисленные многочлены<br>и теорема Минковского о линейных формах .....                                                                                                                                                                                                                        | 45  |
| В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало. Биллиардные книжки малой сложности и реализация<br>слоений Лиувилля интегрируемых систем .....                                                                                                                                                                                                                             | 53  |
| Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва,<br>Н. М. Добровольский. Обобщённая проблема Дирихле для двумерной решётки<br>приближений Дирихле .....                                                                                                                                                                           | 83  |
| В. Ф. Кириченко, О. Е. Арсеньева, Е. В. Суровцева. Геометрия интегральных<br>многообразий контактного распределения .....                                                                                                                                                                                                                                  | 106 |
| А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Функция потребления в модели<br>экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции<br>сбережения .....                                                                                                                                                                  | 118 |
| М. В. Меликян. Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием<br>случайного стационарного внешнего поля .....                                                                                                                                                                                                                                 | 130 |
| А. Р. Рустанов, Е. А. Полькина, Г. В. Теплякова. Интегральные многообразия первого<br>фундаментального распределения $lcAC_S$ -структур .....                                                                                                                                                                                                              | 142 |
| В. Г. Чирский. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество<br>простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым<br>параметром .....                                                                                                                                                                            | 153 |
| М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов. Среднеквадратическое приближение некоторых<br>классов функций комплексного переменного рядами фурье в весовом пространстве<br>бергмана $B_{2,\gamma}$ .....                                                                                                                                                              | 167 |

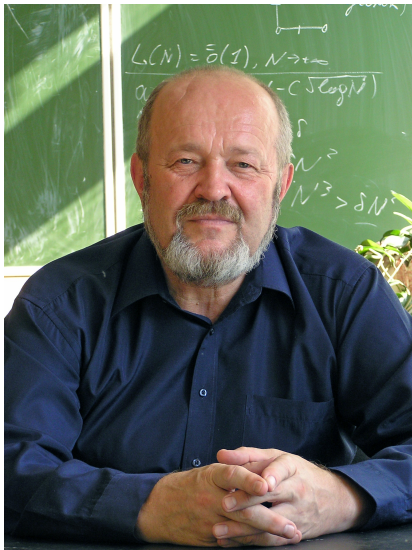
## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин. Численная оптимизация процесса получения шихты электродиспергированием отходов сплава Т5К10 .....                                                                                                                    | 183 |
| Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, В. О. Поданов, А. Е. Агеева. Математический размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде .....                                                           | 197 |
| Р. Р. Мухин. О теореме Пуанкаре — Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем .....                                                                                                                                                                          | 209 |
| Н. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, А. Н. Чуканов, Д. С. Клементьев. О возможности использования метода NASE при проведении ускоренных испытаний арматурного проката на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание ..... | 223 |
| Г. И. Синкевич. Иоганн Альбрехт Эйлер и его неопубликованная рукопись по истории геометрии .....                                                                                                                                                                              | 236 |
| А. С. Смирнов, Б. А. Смольников. История механического резонанса — от первоначальных исследований до авторезонанса .....                                                                                                                                                      | 269 |
| Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука .....                                                                                                                      | 293 |
| Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием .....                                                                                                                                  | 312 |
| ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
| Памяти Вадима Федоровича Кириченко .....                                                                                                                                                                                                                                      | 328 |
| РЕДКОЛЛЕГИЯ .....                                                                                                                                                                                                                                                             | 330 |
| THE EDITORIAL BOARD .....                                                                                                                                                                                                                                                     | 334 |
| TABLE OF CONTENTS .....                                                                                                                                                                                                                                                       | 338 |



От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен 75-летию со дня рождения выдающихся советских, белорусского и российского математиков, доктора физико-математических наук, профессора Василия Ивановича Берника и доктора физико-математических наук, профессора, член-корреспондента РАН Юрия Валентиновича Нестеренко.



В. И. Берник



Ю. В. Нестеренко

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-6-9

**Василий Иванович Берник (к 75-летию)**

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. М. Бухштабер, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков,  
 А. Лауринчикас, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,  
 Н. В. Бударина, В. В. Бересневич, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша

**Аннотация**

Данная работа посвящена семидесятипятилетию доктора физико-математических наук, профессора Василия Ивановича Берника. В ней приводятся биографические данные, краткий анализ его научных работ и педагогической и организационной деятельности. В работу включён список из 13 основных научных работ В. И. Берника за последние 5 лет.

*Ключевые слова:* теория чисел, диофантовы приближения, метрическая теория диофантовых приближений, биография, юбилей.

*Библиография:* 13 названий.

**Для цитирования:**

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. М. Бухштабер, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков,  
 А. Лауринчикас, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. В. Бударина,  
 В. В. Бересневич, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша. Василий Иванович Берник (К 75-летию) // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 6–9.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-6-9

**Vasily Ivanovich Bernik (to the 75th anniversary)**

Yu. V. Nesterenko, V. A. Bykovskij, V. M. Buhstaber, V. G. Chirskij, V. N. Chubarikov,  
 A. Laurinčikas, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, N. V. Budarina,  
 V. V. Beresnevich, D. V. Vasilyev, N. I. Kalosha

**Abstract**

This paper commemorates the seventy-fifth anniversary of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Vasily Ivanovich Bernik. His curriculum vitae is presented, together with a brief analysis of his work in scientific research, education and management. 13 major scientific papers of V.I. Bernik are referenced.

*Keywords:* number theory, Diophantine approximation, metric theory of Diophantine approximation, biography, anniversary.

*Bibliography:* 13 titles.

**For citation:**

Yu. V. Nesterenko, V. A. Bykovskij, V. M. Buhstaber, V. G. Chirskij, V. N. Chubarikov, A. Laurinčikas, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, N. V. Budarina, V. V. Beresnevich, D. V. Vasilyev, N. I. Kalosha, 2022, "Vasily Ivanovich Bernik (to the 75th anniversary)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 6–9.

Василий Иванович Берник родился 9 января 1947 года в деревне Слобода-Пырашевская Узденского района Минской области в семье учителей. В 1953 году семья переехала в город Узда, где он в 1965 году закончил с золотой медалью среднюю школу №2 имени А. С. Пушкина. В период с 1965 года по 1970 год учился на математическом факультете Белорусского государственного университета и закончил его с отличием. Неоднократно был победителем республиканских математических олимпиад.

В 1967 году, будучи студентом второго курса, начал посещать спецкурсы молодого доктора физико-математических наук Владимира Геннадьевича Спринджук. Дипломная работа В. И. Берника опубликована в двух журнальных публикациях [1, 2]. Защитил в 1973 году кандидатскую диссертацию „К метрической теории диофантовых приближений зависимых величин“, а в 1986 году докторскую диссертацию „Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин и размерность Хаусдорфа“. В кандидатской диссертации доказал аналог теоремы А. Я. Хинчина в случае расходимости ряда, а в докторской диссертации решил проблему Бейкера-Шмидта, найдя точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-w}, \quad w > n$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах степени  $n$  и высоты  $H$ .

С 1975 по 2005 годы был председателем жюри республиканской школьной олимпиады по математике, а с 1984 по 1992 год был членом жюри всесоюзной школьной олимпиады по математике (председателем жюри в те годы был Ю. В. Нестеренко). Член редколлегии журнала „Квант“.

В. И. Берник — автор более чем 150 журнальных статей по математике и школьному математическому образованию. Приведем результаты и публикации В. И. Берника за последние 5 лет. Предыдущие материалы содержатся в статье к его 70-летию в журнале „Чебышевский сборник“ (2016 г., том 17, выпуск 4). В последние годы В. И. Берник занимается проблемами распределения алгебраических чисел и векторов с алгебраическими координатами в областях евклидова пространства малой меры, а также распределения дискриминантов и результатов целочисленных многочленов. Перечислим некоторые из полученных результатов.

Для многочленов  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами и корнями  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  через  $D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$  обозначим его дискриминант. Будем считать, что  $\deg \alpha \leq n$ ,  $n \geq 2$  и высота  $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j| \leq Q$ ,  $Q \in \mathbb{N}$  и  $Q > 1$ . Если  $D(P) \neq 0$ , то для  $|D(P)|$  верна оценка

$$1 \leq |D(P)| < c_1(n) Q^{2n-2}$$

при подходящей величине  $c_1(n)$ , не зависящей от  $Q$ . Основная задача состоит в нахождении асимптотических по  $Q$  оценок для

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) = \#\{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg \leq n, \quad H(P) \leq Q, \quad 0 \leq |D(P)| < Q^{2n-2-2v}, \quad 1 \leq v \leq n\}.$$

Величины дискриминантов оценивались в работах Давенпорта в связи с различными задачами диофантовых приближений. Этот показатель характеризует взаимное распределение корней  $P(x)$  и количество тех из них, которые являются действительными. В. И. Берником в [3] доказана оценка снизу

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) > c_2 Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}, \quad 0 \leq v \leq n-1, \quad (1)$$

а также оценки сверху [3, 4, 6, 7] для  $n = 3, 4$  при  $0 < v \leq 1$ .

Отметим также последние работы В. И. Берника. В статье [12] определены длины интервалов  $I$ , на которых полиномы  $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, 0)$  удовлетворяют аналогу теоремы Дирихле, т.е.  $|P(x)| < Q^{-n}$ . Работа [11] посвящена наследию академика Йонаса Петровича Кубилюса и истории развития метрической теории диофантовых приближений.

За цикл работ по теории диофантовых приближений В. И. Бернику и его ученику В. В. Бересневичу в 2004-ом году присуждена Государственная премия республики Беларусь. К настоящему времени 30 его учеников защитили кандидатские диссертации. В. И. Берник более 20 раз выступал с пленарными докладами на международных конференциях практически во всех центрах мира, где ведутся исследования по диофантовым приближениям.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник, В. И. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах (исправленный вариант) / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015 — Т. 79. — С. 21–42.
2. Bernik, V. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves / V. Bernik, F. Götze, A.B. Gusakova // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2016. — С. 14–47.
3. Beresnevich, V. V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze // Adv. Math. — 2016. — Vol. 298. — P. 393–412.
4. Bernik, V. Discriminants of polynomials in the Archimedean and non-Archimedean metrics / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Acta Mathematica Hungarica. — 2018. — Т. 154. — №2. — С. 265–278.
5. Bernik, V. Exact upper bounds for the number of the polynomials with given discriminants / V. Bernik, N. Budarina, F. Götze // Lithuanian Mathematical Journal. — 2017. — № 57. — P. 283–293.
6. Bernik, V. New estimates for the number of integer polynomials with given discriminants / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Lithuanian Mathematical Journal. — 2019. — № 60. — P. 179–200.
7. Берник, В. И. О количестве алгебраических чисел в коротких интервалах, содержащих рациональные точки / В. И. Берник, Ф. Гётце, Н.И. Калоша // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2019. — № 1. — С. 4–11.
8. Берник, В. И. Оценки снизу для количества векторов с алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей / В. И. Берник, Н. В. Бударина, Д. Диккинсон // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2020. — Т. 64. — №1. — С. 7–12.
9. Bernik, V. How small can polynomials be in an interval of given length? / V. Bernik, S. McGuire // Glasgow Mathematical Journal. — 2020. — Vol. 62, no. 2. — P. 261–280.
10. Берник, В. И. Диофантовы приближения с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах / В. И. Берник, Д.В. Васильев, Е.В. Засимович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2021. — Т. 65. — №4. — С. 397–403.
11. Берник, В. И. Вклад Йонаса Кубилюса в метрическую теорию диофантовых приближений зависимых переменных / В. И. Берник, В. В. Бересневич, Ф. Гётце, Е.В. Засимович, Н. И. Калоша // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2021. — №3. — С. 34–50.

12. Берник, В. И. Целочисленные многочлены и теорема Минковского о линейных формах / В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова // Чебышевский сборник. — 2022. —

## REFERENCES

1. Bernik, V. I., Götze, F. 2015. “Distribution of real algebraic numbers of an arbitrary degree in short intervals” (corrected version), *Izv. RAN Ser. matem.*, Vol. 79, № 1, P. 21–42.
2. Bernik, V., F. Götze, F., Gusakova A.B. 2016. “On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves”, *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, P. 21–42.
3. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Götze, F. 2016. “Integral polynomials with small discriminants and resultants”, *Adv. Math.*, Vol. 298, p. 393–412.
4. Bernik V., Budarina N., O’Donnell H. 2018. “Discriminants of polynomials in the Archimedean and non-Archimedean metrics”, *Acta Mathematica Hungarica*, №154, Vol. 2, p. 265–278.
5. Bernik, V., Budarina, N., Götze, F. 2017. “ Exact upper bounds for the number of the polynomials with given discriminants”, *Lithuanian Mathematical Journal*, № 57, P. 283–293.
6. Bernik, V., Budarina, N., O’Donnell, H. 2019. “New estimates for the number of integer polynomials with given discriminants”, *Lithuanian Mathematical Journal*, №60, P. 265–278.
7. Bernik, V., Götze, F., Kalosha, N. 2019. “ Counting algebraic numbers in short intervals with rational points”, *State University. Mathematics and Informatics.*, №1, P. 4–11.
8. Bernik, V. I., Budarina, N.V., Dickinson D. 2020. “Lower bounds for the number of vectors with algebraic coordinates near smooth surfaces”, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, Vol. 64, № 1, P. 7–12.
9. Bernik, V., Mc Guire, S. 2020. “How small can polynomials be in an interval of given length? ”, *Glasgow Mathematical Journal*, Vol. 62, № 2, P. 261–280.
10. Bernik, V., Vasilyev, D., Zasimovich E. 2021. “Diophantine approximation with the constant right-hand side of inequalities on short intervals”, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, Vol. 65, № 4, P. 397–403.
11. Bernik, V., Beresnevich, V., Götze, F., Zasimovich, E., Kalosha N. 2021. “Contribution of Jonas Kubilius to the metric theory of Diophantine approximation of dependent variables”, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.*, №3, P. 34–50.
12. Bernik, V., Korlyukova, I., Kudin, I., Titova, A. 2022. “On approximation to real numbers by algebraic numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, №94, Vol. 1, p. 1–24.

Получено 15.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

### Том 23. Выпуск 1.

---

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-10-20

### Юрий Валентинович Нестеренко

(к 75-летию)

А. И. Шафаревич, А. Т. Фоменко, В. Н. Чубариков, А. О. Иванов, В. Г. Чирский,  
В. И. Берник, В. А. Быковский, А. И. Галочкин, С. С. Демидов, С. Б. Гашков,  
А. И. Нижников, А. А. Фомин, Е. И. Деза, А. Я. Канель-Белов, Н. М. Добровольский,  
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, В. Х. Салихов

**Для цитирования:** А. И. Шафаревич, А. Т. Фоменко, В. Н. Чубариков, А. О. Иванов, В. Г. Чирский, В. И. Берник, В. А. Быковский, А. И. Галочкин, С. С. Демидов, С. Б. Гашков, А. И. Нижников, А. А. Фомин, Е. И. Деза, А. Я. Канель-Белов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, В. Х. Салихов. Юрий Валентинович Нестеренко (к 75-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 10–20.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-10-20

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

### Vol. 23. No. 1.

---

### Yuri Valentinovich Nesterenko

(to the 75th anniversary)

A. I. Shafarevich, A. T. Fomenko, V. N. Chubarikov, A. O. Ivanov, V. G. Chirsky,  
V. I. Bernik, V. A. Bykovskii, A. I. Galochkin, S. S. Demidov, S. B. Gashkov,  
A. I. Nizhnikov, A. A. Fomin, E. I. Deza, A. Ya. Kanel-Belov, N. M. Dobrovolsky,  
N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, V. Kh. Salikhov

**For citation:** A. I. Shafarevich, A. T. Fomenko, V. N. Chubarikov, A. O. Ivanov, V. G. Chirsky, V. I. Bernik, V. A. Bykovskii, A. I. Galochkin, S. S. Demidov, S. B. Gashkov, A. I. Nizhnikov, A. A. Fomin, E. I. Deza, A. Ya. Kanel-Belov, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, V. Kh. Salikhov, 2022, "Yuri Valentinovich Nesterenko (to the 75th anniversary)" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, с. 10–20.



Юрий Валентинович Нестеренко — заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова с 2003 г., член-корреспондент РАН с 2000 г., доктор физико-математических наук с 1986 г., профессор с 1992 г., Заслуженный профессор МГУ с 2013 г., лауреат премии имени А. А. Маркова РАН (2006 г.), международных премий А. Островского (1997 г.), общества Харди–Рамануджана (1997 г.) и Александра фон Гумбольдта (2003 г.)

Ю. В. Нестеренко родился 05.12.1946 г. в г. Харькове в семье служащих. Мать Меркулова Нина Григорьевна (1918–2000) и отчим Забуга Алексей Николаевич (1913–1974) — инженеры по образованию, работали в промышленности. Отчим впоследствии преподавал в Харьковском станко-инструментальном техникуме. По окончании в 1964 г. школы с серебряной медалью Ю. В. Нестеренко поступил учиться на механико-математический факультет МГУ. Закончив его в 1969 г. с отличием, поступает в аспирантуру к проф. А. Б. Шидловскому. В 1973 г. по окончании аспирантуры он защищает кандидатскую диссертацию на тему "О некоторых свойствах решений линейных дифференциальных уравнений и их приложениях в теории трансцендентных чисел". Ю. В. Нестеренко работает на механико-математическом факультете МГУ с 1972 года в должности ассистента, с 1976 года — в должности доцента, с 1992 года — в должности профессора. В 1986 году он защитил докторскую диссертацию "Об алгебраической независимости значений аналитических функций".

Ю. В. Нестеренко — известный специалист в области теории чисел, автор более 100 научных, научно-популярных и методических работ, в том числе 3 монографий и 3 учебников по различным разделам теории чисел, а также 5 книг по элементарной математике для школьников (в соавторстве).

В 1980-е годы Ю. В. Нестеренко разработал новый метод доказательства алгебраической независимости значений аналитических функций, основанный на использовании в теории трансцендентных чисел идей коммутативной алгебры. С помощью этого метода доказаны наилучшие в настоящее время оценки степени трансцендентности полей, порожденных значениями экспоненциальной и эллиптической функций, установлены неулучшаемые оценки меры алгебраической независимости значений эллиптических функций и функций, удовлетворяющих специальным функциональным уравнениям. Метод оказался применимым и в  $p$ -адической области, где Ю. В. Нестеренко также получил ряд наилучших в настоящее время результатов, например, об оценках степени трансцендентности полей, порожденных значениями  $p$ -адической экспоненциальной функции. Применение этих идей в работах ряда российских и зарубежных математиков определило существенный прогресс в развитии теории трансцендентных чисел в последние 30 лет.

В 1996 г. Ю. В. Нестеренко удалось доказать общую теорему о степени трансцендентности полей, порожденных значениями модулярных функций и с ее помощью существенно расширить наши знания об арифметической природе ряда классических постоянных. При этом получилось решение одной из старых и труднейших проблем теории трансцендентных чисел об алгебраической независимости чисел  $\pi$  и  $e^\pi$ . Последнее утверждение имело множество следствий. Например, так впервые была доказана иррациональность числа  $\pi/\ln \pi$ , а также трансцендентность суммы ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \pi \cdot \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}\right)$ . Еще одним следствием указанной теоремы является трансцендентность значений тета-функций Якоби в алгебраических точках. Этот вопрос оставался открытым с 1851 года, когда Лиувилль доказал иррациональность таких значений в рациональных точках специального вида.

Ю. В. Нестеренко обнаружил важность для исследования задач теории трансцендентных чисел оценок кратностей нулей полиномов от решений алгебраических дифференциальных уравнений. Им установлены неулучшаемые оценки такого рода, имевшие ряд важных теоретико-числовых приложений, в частности, для решения упомянутых выше проблем. Этими работами было сформировано новое направление исследований, получившее интенсивное

развитие в работах ряда российских и зарубежных математиков.

Серия работ Ю. В. Нестеренко посвящена исследованиям арифметических свойств значений гипергеометрических функций, в частности, полилогарифмов и, как следствие, значений в целых точках дзета-функции Римана. Им предложен и исследован ряд общих конструкций совместных диофантовых приближений к таким значениям, обнаружена связь этих чисел со значениями квази-модулярных функций.

Известны результаты Ю. В. Нестеренко по дифференциальной алгебре (разработка методов доказательства алгебраической независимости решений дифференциальных уравнений), метрической теории чисел как в действительной, так и в  $p$ -адической областях, результаты в области теории диофантовых приближений. Ю. В. Нестеренко получены эффективные конструкции приближений Эрмита–Паде и разложения в многомерные непрерывные дроби обобщенных гипергеометрических функций, частными случаями которых являются классические конструкции Гаусса, Римана и Гейне.

Ю. В. Нестеренко много лет руководит научными исследованиями важных прикладных задач, связанных с алгоритмическими проблемами теории чисел и применением суперкомпьютерной техники.

Научные результаты Ю. В. Нестеренко получили широкое мировое признание. Они докладывались на многих Всесоюзных, Российских и Международных конференциях по теории чисел. Ю. В. Нестеренко был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе 1990 года в Японии. Он выступал с докладами о своих исследованиях на международных конференциях, в научных и учебных организациях России, Польши, Венгрии, Чехословакии, Австрии, Англии, Германии, Голландии, Индии, Испании, Канады, США, Финляндии, Франции, Швейцарии, Японии, бывших республиках СССР.

Ю. В. Нестеренко — опытный и высококвалифицированный преподаватель. В течение многих лет он читает на механико-математическом факультете МГУ основные и специальные курсы по теории чисел, руководит научно-исследовательскими и студенческими семинарами. Под его руководством 13 аспирантов подготовили и защитили кандидатские диссертации, один из них стал доктором наук.

Большое внимание Ю. В. Нестеренко уделяет математическому просвещению школьников. Много лет он руководил подготовкой и проведением Всероссийской и Всесоюзной олимпиад школьников по математике. В течение последних пяти лет он Председатель Ученого Совета СУНЦ МГУ — школы интерната им. А. Н. Колмогорова. Ю. В. Нестеренко входит в состав двух Диссертационных Советов на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и Диссертационного Совета в Математическом институте РАН им. В. А. Стеклова, он член Ученого Совета механико-математического факультета МГУ. Он входит в Редакционные коллегии журналов "Известия РАН, сер. математическая", "Математические вопросы криптографии", "Чебышевский сборник". Он также член Бюро Отделения математических наук РАН.

### Список основных работ Ю. В. Нестеренко.

1. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической независимости значений  $E$ -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям", Матем. заметки, 5:5 (1969), 587–598 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic independence of the values of  $E$ -functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations", Math. Notes, 5:5 (1969), 352–358
2. Ю. В. Нестеренко, "Оценка меры алгебраической независимости значений  $E$ -функций с растущими степенью и высотой", УМН, 27:4(166) (1972), 218 Перевод на английский язык Yu. V. Nesterenko, "An estimation of the measure of algebraic independence of the values of  $E$ -functions with increasing degree and height", Uspekhi Mat. Nauk, 27:4(166) (1972), 218



3. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей аналитических функций некоторого класса и их приложения в теории трансцендентных чисел", Доклады Академии наук, 205:2 (1972), 292-295, М.; М. Английская версия Yu. V. Nesterenko, "Estimates of the orders of zeros of analytic functions of a certain class and their application to the theory of transcendental numbers", Doklady Mathematics, 13:205 (1972), 938-942, Russian Federation
4. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической зависимости компонент решений системы линейных дифференциальных уравнений", Изв. АН СССР. Сер. матем., 38:3 (1974), 495-512 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic dependence of the components of solutions of a system of linear differential equations", Math. USSR-Izv., 8:3 (1974), 501-518
5. Ю. В. Нестеренко, "Функция порядка для почти всех чисел", Матем. заметки, 15:3 (1974), 405-414 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "Order function for almost all numbers", Math. Notes, 15:3 (1974), 234-240
6. А. М. Полосуев, Ю. В. Нестеренко, "Андрей Борисович Шидловский (к 60-летию со дня рождения)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 30:5 (1975), 114-116, М.
7. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел", Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:2 (1977), 253-284 Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers", Math. USSR-Izv., 11:2 (1977), 239-270
8. Yu. V. Nesterenko, "On the number  $\pi$  and Lindemann's theorem", Comment. Math. Univ. Carolinae, 20 (1979), 335-343
9. Ju. V. Nesterenko, "On the algebraical independence of algebraic numbers to algebraic powers", Diophantine approximations and transcendental numbers, Luminy, 1982, Progr. Math, 31, Birkhäuser Boston, Mass, 1983, 199-220
10. Ю. В. Нестеренко, "Об одном достаточном признаке алгебраической независимости чисел", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1983, 4, 63-68, М.; Yu. V. Nesterenko, "On a sufficient criterion for algebraic independence of numbers", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 38:4 (1983), 70-76
11. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей функций некоторого класса", Матем. заметки, 33:2 (1983), 195-205; Yu. V. Nesterenko, "Estimates of orders of zeros of functions of a certain class", Math. Notes, 33:2 (1983), 98-104
12. Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин, "Очерк о цепных дробях", Квант, 1983, 5, 16-20, 6, 26-30, М.
13. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, Изд-во МГУ, М., 1984, 147 с.
14. Ю. В. Нестеренко, "О диофантовых приближениях в поле  $p$ -адических чисел", Матем. заметки, 35:5 (1984), 653-662; Yu. V. Nesterenko, "Diophantine approximations in the field of  $pp$ -adic numbers", Math. Notes, 35:5 (1984), 342-347
15. Ю. В. Нестеренко, "О диофантовых приближениях в поле  $p$ -адических чисел", УМН, 39:1(235) (1984), 147-148; Yu. V. Nesterenko, "On diophantine approximations in a field of  $p$ -adic numbers", Russian Math. Surveys, 39:1 (1984), 173-174

16. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости почти всех пар  $p$ -адических чисел.", Матем. заметки, 36:3 (1984), 295-304 ; Yu. V. Nesterenko, "Measure of algebraic independence for almost all pairs of  $p$ -adic numbers", Math. Notes, 36:3 (1984), 642-647
17. Ю. В. Нестеренко, "Оценки характеристической функции простого идеала", Матем. сб., 123(165):1 (1984), 11-34 ; Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the characteristic function of a prime ideal", Math. USSR-Sb., 51:1 (1985), 9-32
18. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел", Матем. сб., 123(165):4 (1984), 435-459 ; Yu. V. Nesterenko, "On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers", Math. USSR-Sb., 51:2 (1985), 429-454
19. Ю. В. Нестеренко, "К теореме о среднем И.М. Виноградова", Тр. ММО, 48, Издательство Московского университета, М., 1985, 97-105 ; Yu. V. Nesterenko, "On I.M. Vinogradov's mean value theorem", Trans. Mosc. Math. Soc, 1986, 105-113
20. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений некоторых функций", Матем. сб., 128(170):4(12) (1985), 545-568 ; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions", Math. USSR-Sb., 56:2 (1987), 545-567
21. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции в алгебраических точках", УМН, 40:4(244) (1985), 221-222 ; Yu. V. Nesterenko, "On the measure of algebraic independence of the values of an elliptic function at algebraic points", Russian Math. Surveys, 40:4 (1985), 237-238
22. Ю. В. Нестеренко, "О мере линейной независимости чисел", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1985, 1, 46-49, М. ; Yu. V. Nesterenko, "On the linear independence of numbers", Moscow University Mathematics Bulletin, 40:1 (1985), 69-74
23. Ю. В. Нестеренко, "Об оценке меры алгебраической независимости чисел", Диофантовы приближения, т. 1, ред. П.Л. Ульянов, Издательство МГУ Москва, 1985, 65-77
24. В.В. Вавилов, Ю.В. Нестеренко, "Неравенства (ММО, тренинг)", Препринт МП СССР, 1986, 8, 2-10
25. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений показательной функции", Доклады Академии наук, 286:4 (1986), 817-821, М.; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of the algebraic independence of the values of the exponential function", Doklady Mathematics, 33:286 (1986), 200-203, Russian Federation
26. Yu. V. Nesterenko, "Measures of algebraic independence of numbers and functions", Journées arithmétiques de Besançon, Astérisque, 147, Société Mathématique de France Paris, 1987, 141-149
27. Ю. В. Нестеренко, "О числе  $\pi$ ", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1987, 3, 6-10, М.
28. Yu. V. Nesterenko, "Effective estimates of the measure of algebraic independence of the values of  $E$ -functions", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 43:1 (1988), 84-87
29. Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the number of zeros of certain functions", New advances in transcendence theory, Durham, 1986, Cambridge, Univ. Press Cambridge, 1988, 263-269

30. Ю. В. Нестеренко, "О степени трансцендентности некоторых полей, порожденных значениями экспоненциальной функции", Матем. заметки, 46:3 (1989), 40-49 ; Yu. V. Nesterenko, "Transcendence degree of some fields generated by values of the exponential function", Math. Notes, 46:3 (1989), 706-712
31. С.Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М.К. Потапов, Старинные занимательные задачи, Венгрия, Будапешт, 1990 , 169 с.
32. Ю. В. Нестеренко, "Оценки числа нулей функций некоторых классов", Acta Arithmetica, 51 (1990), 61-78 , Poland
33. В. И. Арнольд, А. Г. Витушкин, Е. А. Горин, В. Я. Лин, Ю. В. Нестеренко, В. М. Тихомиров, П. Л. Ульянов, А. Б. Шидловский, М. А. Шубин, "Олейников Вячеслав Алексеевич (некролог)", УМН, 45:1(271) (1990), 163-165 ; V. I. Arnol'd, A. G. Vitushkin, E. A. Gorin, V. Ya. Lin, Yu. V. Nesterenko, V. M. Tikhomirov, P. L. Ul'yanov, A. B. Shidlovskii, M. A. Shubin, "Vyacheslav Alekseevich Oleinikov (obituary)", Russian Math. Surveys, 45:1 (1990), 191-194
34. Yuri Nesterenko, "Algebraic independence of values of analytic functions", Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), v. I, II, Math. Soc. Japan Tokyo, 1991, 447-457
35. Yuri V. Nesterenko, "On a measure of algebraic independence of the values of elliptic functions", Diophantine Approximations and Transcendental Numbers (Proceedings of the Colloquium (1990, Luminy, France)), de Gruyter, Berlin, Germany, 1992, 239-248
36. С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов, Старинные занимательные задачи, Испания, Бильбао, 1994 , 216 с.
37. Yu. V. Nesterenko, "Hermite-Padé approximations of the generalized hypergeometric functions", Séminaire de théorie des nombres (Paris, France, 1991-92), Progress in Mathematics, 116, eds. David Sinnou, Birkhäuser Boston, MA, 1994, 191-216
38. Ю. В. Нестеренко, "Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций", Матем. сб., 185:10 (1994), 39-72 ; Yu. V. Nesterenko, "Hermite-Padé approximants of generalized hypergeometric functions", Russian Acad. Sci. Sb. Math., 83:1 (1995), 189-219
39. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, 2-е изд., Издательство МГУ, 1995, ISBN: 5-211-03075-3 , 160 с.
40. M. Laurent, M. Mignotte, Y. Nesterenko, "Linear forms in two logarithms and interpolation determinants", Journal of Number Theory, 55:2 (1995), 285-321 , United States
41. Н. М. Коробов, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "Наум Ильич Фельдман (некролог)", УМН, 50:6(306) (1995), 157-162 ; N. M. Korobov, Yu. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskii, "Naum Il'ich Feld'man (obituary)", Russian Math. Surveys, 50:6 (1995), 1247-1252
42. О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко, С. М. Никольский, М. К. Потапов, В. А. Садовничий, П. Л. Ульянов, "Андрей Борисович Шидловский (к восьмидесятилетию со дня рождения)", УМН, 50:6(306) (1995), 229-232 ; O. B. Lupanov, Yu. V. Nesterenko, S. M. Nikol'skii, M. K. Potapov, V. A. Sadovnichii, P. L. Ul'yanov, "Andrei Borisovich Shidlovskii (on his eightieth birthday)", Russian Math. Surveys, 50:6 (1995), 1329-1333

43. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции", Изв. РАН. Сер. матем., 59:4 (1995), 155-178 ; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function", Izv. Math., 59:4 (1995), 815-838
44. Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "Памяти Наума Ильича Фельдмана (1918-1994)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 6 (1995), 108-109 , М.
45. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of  $\pi$  and  $e^\pi$ ", Number theory and its applications (Ankara, 1996), Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 204, Dekker New York, United States, 1996, 121-149
46. Yu. V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence problems", Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, Sér. I, 322 (1996), 909-914
47. T.N. Shorey, Yu.V. Nesterenko, "Perfect powers in products of integers from a block of consecutive integers II", Acta Arithmetica, 76:2 (1996), 191-198 , Poland
48. С. П. Новиков, А. И. Аптекарев, Е. П. Долженко, В. А. Калягин, В. В. Козлов, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов, В. Н. Сорокин, П. Л. Ульянов, "Евгений Михайлович Никишин (к пятидесятилетию со дня рождения)", УМН, 51:2(308) (1996), 181-182 ; S. P. Novikov, A. I. Aptekarev, E. P. Dolzhenko, V. A. Kalyagin, V. V. Kozlov, Yu. V. Nesterenko, M. K. Potapov, V. N. Sorokin, P. L. Ul'yanov, "Evgenii Mikhailovich Nikishin (on the fiftieth anniversary of his birth)", Russian Math. Surveys, 51:2 (1996), 361-362
49. Ю. В. Нестеренко, "Модулярные функции и вопросы трансцендентности", Матем. сб., 187:9 (1996), 65-96 ; Yu. V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence questions", Sb. Math., 187:9 (1996), 1319-1348
50. Ю. В. Нестеренко, "Некоторые замечания о  $\zeta(3)$ ", Матем. заметки, 59:6 (1996), 865-880 ; Yu. V. Nesterenko, "A few remarks on  $\zeta(3)$ ", Math. Notes, 59:6 (1996), 625-636
51. Ю. В. Нестеренко, М. Waldschmidt, "О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма", Диофантовы приближения, Математические записки, 2, Издательство МГУ Москва, 1996, 23-42
52. Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "О линейной независимости значений  $E$ -функций", Матем. сб., 187:8 (1996), 93-108 ; Yu. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskii, "Linear independence of values of  $EE$ -functions", Sb. Math., 187:8 (1996), 1197-1211
53. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана", Аналитическая теория чисел и приложения, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, 218, Наука, М., 1997, 299-334 ; Yu. V. Nesterenko, "On the measure of algebraic independence of the values of Ramanujan functions", Proc. Steklov Inst. Math., 218 (1997), 294-331
54. N.I. Feldman, Yu.V. Nesterenko, Transcendental numbers, т. IV, Encyclopaedia Math. Sci., 44, Number theory, Springer, Berlin, 1998, ISBN: 3-540-61467-2 , 345 с.
55. Yu.V. Nesterenko, T.N. Shorey, "On an equation of Goormaghtigh", Acta Arithmetica, 83:4 (1998), 381-389 , Poland
56. Ю. В. Нестеренко, "Алгоритмические проблемы теории чисел", Матем. просв., 2, МЦН-МО, М., 1998, 87-114 ; Yu. V. Nesterenko, Mat. Pros., 2, МССМЕ, М., 1998, 87-114

- 
57. Yu. Nesterenko, "Differential fields and complex differential equations", Function spaces and complex analysis, Joensuu 1997 (Pomantsi), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep., 2, Univ. Joensuu, Joensuu, 1999, 79-106
  58. Ю. В. Нестеренко, "Оценки кратностей нулей для тэта-констант", Фундамент. и прикл. матем., 5:2 (1999), 557-562 ; Yu. V. Nesterenko, "Multiplicity estimates for theta constants", Fundam. Prikl. Mat., 5:2 (1999), 557-562
  59. Ю. В. Нестеренко, "Об одном тождестве Гильберта", Матем. заметки, 66:4 (1999), 527-532 ; Yu. V. Nesterenko, "On a Hilbert identity", Math. Notes, 66:4 (1999), 431-435
  60. Yuri Nesterenko, "Linear forms in logarithms of rational numbers", Diophantine approximation (Cetraro, 2000), Lecture Notes in Mathematics, 1819, Springer Berlin, 2000, 53-106
  61. Ю. В. Нестеренко, "Об одном комбинаторном неравенстве", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2000, 6, 50-52 , М., М. ; Yu. V. Nesterenko, "One combinatorial inequality", Moscow University Mathematics Bulletin, 55:6 (2000), 31-33
  62. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Варианты экзаменационных задач по математике для поступающих в вузы, Дрофа, 2001 , 192 с.
  63. Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов, Конкурсные задачи по математике, Москва, Москва, 2001
  64. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Математика для абитуриентов, Русское слово, 2001 , 350 с.
  65. Yuri V. Nesterenko, "Algebraic independence for values of Ramanujan functions", Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, Springer Berlin, 2001, 27-46
  66. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of values of Ramanujan functions", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 56:2 (2001), 5-9
  67. Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, eds. Yu. V. Nesterenko, P. Philippon, Springer Berlin, 2001 , 256 pp.
  68. Yuri V. Nesterenko, "Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations", Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, Springer Berlin, 2001, 149-165
  69. Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic independence of numbers", A panorama in number theory or The view from Baker's garden. Based on a conference in honor of Alan Baker's 60th birthday, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2002, 148-167
  70. Ю. В. Нестеренко, "Интегральные тождества и конструкции совместных приближений к значениям дзета-функции Римана", Современные проблемы теории чисел и ее приложения (Труды IV Международной конференции), г.Тула, 2001г., механико-математический факультет МГУ, М., 2002, 115-132
  71. Ю. В. Нестеренко, "Частные Ферма и  $p$ -адические логарифмы", Тр. по дискр. матем., 5, Физматлит, М., 2002, 173-188 ; Yu. V. Nesterenko, "Fermat quotients and  $pp$ -adic logarithms", Tr. Diskr. Mat., 5, Fizmatlit, Moscow, 2002, 173-188
  72. Ю. В. Нестеренко, "7-я проблема Гильберта", Математические события XX века, ФАЗИС, Москва, 2003, 335-348

73. Yu.V. Nesterenko, E.M. Nikishin, "Continued fractions", Math. Nachr., Wien, 192 (2003), 22-39
74. Yuri V. Nesterenko, "Integral identities and constructions of approximations to zeta-values", Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 15:2 (2003), 535-550
75. Ю. В. Нестеренко, "О доказательстве простоты чисел (следуя М. Агравалу, Н. Кайялу и Н. Саксене)", Развитие криптографии в России и Московский Университет (Труды конференции), МЦНМО Москва, 2003, 85-97
76. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Математика для поступающих в вузы, АСТ-Астрель, 2004 , 183 с.
77. Ю. В. Нестеренко, "Проверка чисел на простоту", Вопросы кибернетики, 13 (2004), 41-58
78. Ю.В. Нестеренко, Я.Ю. Никитин, "Научная конференция памяти академика Ю.В. Линника", Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, 2005, 4, 3-6
79. Ю. В. Нестеренко, "Об арифметических свойствах значений тета-констант", Фундамент. и прикл. матем., 11:6 (2005), 95-122 ; Yu. V. Nesterenko, "On arithmetic properties of values of theta-constants", J. Math. Sci., 146:2 (2007), 5697-5716
80. Ю. В. Нестеренко, "Трансцендентные числа", Наукові записки Міжнародного гуманітарного університету - Одесса, 3 (2005), 47-57
81. А.И. Виноградов, Ю.В. Нестеренко, редакторы, "Труды по теории чисел", Труды по теории чисел, Записки научных семинаров ПОМИ, 322, ПОМИ, СПб., 2005, 1-250 ; A. I. Vinogradov, Yu. V. Nesterenko (eds), "Works on number theory", Journal of Mathematical Sciences (New York), 137:2 (2006), 4609-4762
82. Ю. В. Нестеренко, "О проблеме Варинга (элементарные методы)", Труды по теории чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ, 322, ПОМИ, СПб., 2005, 149-175 ; Yu. V. Nesterenko, "On Waring's problem (elementary methods)", J. Math. Sci. (N. Y.), 137:2 (2006), 4699-4715
83. М.К. Потапов, Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, Задачи на смекалку, Дрофа, М., 2006 , 236 с.
84. М.К. Потапов, Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, Старинные занимательные задачи, Дрофа, М., 2006 , 175 с.
85. Yu. V. Nesterenko, "A simple proof of the irrationality of  $\pi i$ ", Russian Journal of Mathematical Physics, 13:4 (2006), 473-473 , Russian Federation
86. В. В. Козлов, О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов, В. А. Садовничий, П. Л. Ульянов, "Андрей Борисович Шидловский (к 90-летию со дня рождения)", УМН, 61:2(368) (2006), 183-190 ; V. V. Kozlov, O. B. Lupanov, Yu. V. Nesterenko, M. K. Potapov, V. A. Sadovnichii, P. L. Ul'yanov, "Andrei Borisovich Shidlovskii (on his 90th birthday)", Russian Math. Surveys, 61:2 (2006), 379-386
87. Yu. V. Nesterenko, "Hilbert's seventh problem", Mathematical events of the twentieth century, Springer, Berlin, 2006, 269-282
88. Yu. V. Nesterenko, "On some identities for theta-constants", Proceedings of the conference Diophantine analysis and related fields, Seminar on Mathematical Sciences, 35, Keio University, Department of Mathematics Yokohama, Yokohama, Japan, 2006, 151-160

- 
89. Г.И. Архипов, А.И. Галочкин, Г.Я. Галин, А.А. Карацуба, В.Н. Латышев, Т.П. Лукашенко, О.Б. Лупанов, Ю.Н. Макаров, Ю. В. Нестеренко, М.К. Потапов, В.Г. Чирский, В.Н. Чубариков, "Андрей Борисович Шидловский (по случаю 90-летия со дня рождения)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2006, 3, 68-70, М.
  90. Ю. В. Нестеренко, "Об одном тождестве Малера", Матем. заметки, 79:1 (2006), 107-119 ; Yu. V. Nesterenko, "On an Identity of Mahler", Math. Notes, 79:1 (2006), 97-108
  91. A. I. Galochkin, Yu. V. Nesterenko, V. G. Chirskii, "Andrey Borisovich Shidlovski. (Dedicated to professor Shidlovski on the occasion of his 90th birthday)", Journal of Mathematical Sciences (New York), 146:2 (2007), 5625-5628
  92. Ю. В. Нестеренко, Теория чисел, Академия, М., 2008, ISBN: 978-5-7695-4646-4, 272 с.
  93. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence in the  $p$ -adic domain", Diophantine equations, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 20, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Mumbai, 2008, 177-195
  94. Yuri V. Nesterenko, "Construction of approximations to zeta-values", Diophantine approximation, Developments in Mathematics, 16, Wien, Austria, Wien, Austria, 2008, 275-293
  95. Ю. В. Нестеренко, "Алгебраическая независимость  $p$ -адических чисел", Изв. РАН. Сер. матем., 72:3 (2008), 159-174 ; Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of  $p$ -adic numbers", Izv. Math., 72:3 (2008), 565-579
  96. Yu. V. Nesterenko, Algebraic independence, Narosa Publishing House New Delhi, 2009, ISBN: 978-81-7319-984-4, 162 pp.
  97. Ю. В. Нестеренко, "Некоторые замечания в связи с демонстрационной версией задания для ЕГЭ в 2010 году", Математика в школе, 2009, 10, 67-76, М.
  98. Ю. В. Нестеренко, "Церковные календари и пасхалия (математический подход)", Богословские труды, 42 (2009), 318-362, изд. Московской патриархии
  99. Ю. В. Нестеренко, "Диофантовы приближения, церковные календари и пасхалия", Историко-астрономические исследования, 35 (2010), 217-288
  100. Ю. В. Нестеренко, "О показателе иррациональности числа  $\ln 2$ ", Матем. заметки, 88:4 (2010), 549-564 ; Yu. V. Nesterenko, "On the Irrationality Exponent of the Number  $\ln 2$ ", Math. Notes, 88:4 (2010), 530-543
  101. Yuri Nesterenko, "Some identities of Ramanujan type", Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 1:2 (2011), 89-99
  102. Е. А. Гречников, С. В. Михайлов, Ю. В. Нестеренко, И. А. Поповян, Вычислительно сложные задачи теории чисел, Издательство Московского университета Москва, 2012, 312 с.
  103. О. Н. Герман, Ю. В. Нестеренко, Теоретико-числовые методы в криптографии, Издательство Академия Москва, 2012, ISBN: 978-5-7695-6786-5, 270 с.
  104. Yu. V. Nesterenko, "On a criterion of linear independence of  $p$ -adic numbers", Manuscripta Mathematica, 139:3-4 (2012), 405-414, Germany

105. Ф. С. Авдеев, Г. И. Архипов, С. Б. Гашков, Н. М. Добровольский, Б. С. Кашин, И. И. Мельников, М. П. Минеев, Ю. В. Нестеренко, С. М. Никольский, А. Н. Паршин, В. П. Платонов, Ю. В. Прохоров, В. А. Садовничий, А. Т. Фоменко, В. Г. Чирский, "Владимир Николаевич Чубариков (к 60-летию со дня рождения)", УМН, 67:1(403) (2012), 187-191 ; F. S. Avdeev, G. I. Arkhipov, S. B. Gashkov, N. M. Dobrovol'skii, B. S. Kashin, I. I. Mel'nikov, M. P. Mineev, Yu. V. Nesterenko, S. M. Nikol'skii, A. N. Parshin, V. P. Platonov, Yu. V. Prokhorov, V. A. Sadovnichii, A. T. Fomenko, V. G. Chirskii, "Vladimir Nikolaevich Chubarikov (on his 60th birthday)", Russian Math. Surveys, 67:1 (2012), 189-193
106. С. В. Востоков, С. О. Горчинский, А. Б. Жеглов, Ю. Г. Зархин, Ю. В. Нестеренко, Д. О. Орлов, Д. В. Осипов, В. Л. Попов, А. Г. Сергеев, И. Р. Шафаревич, "Алексей Николаевич Паршин (к семидесятилетию со дня рождения)", УМН, 68:1(409) (2013), 201-207 ; S. V. Vostokov, S. O. Gorchinskiy, A. B. Zheglov, Yu. G. Zarkhin, Yu. V. Nesterenko, D. O. Orlov, D. V. Osipov, V. L. Popov, A. G. Sergeev, I. R. Shafarevich, "Aleksei Nikolaevich Parshin (on his 70th birthday)", Russian Math. Surveys, 68:1 (2013), 189-197
107. C. Elsner, Yu. V. Nesterenko, I. Shiokawa, "Algebraic Independence of Values of Exponential Type Power Series," Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 3:1-2 (2013), 17-36
108. А. И. Аптекарев, П. А. Бородин, Б. С. Кашин, Ю. В. Нестеренко, П. В. Парамонов, А. В. Покровский, А. Г. Сергеев, А. Т. Фоменко, "Евгений Прокофьевич Долженко (к восьмидесятилетию со дня рождения)", УМН, 69:6(420) (2014), 192-196 ; A. I. Aptekarev, P. A. Borodin, B. S. Kashin, Yu. V. Nesterenko, P. V. Paramonov, A. V. Pokrovskii, A. G. Sergeev, A. T. Fomenko, "Evgenii Prokof'evich Dolzhenko (on his 80th birthday)", Russian Math. Surveys, 69:6 (2014), 1143-1148
109. Н. Н. Андреев, В. М. Бухштабер, А. И. Гарбер, В. В. Козлов, С. П. Коновалов, А. А. Мальцев, Ю. В. Нестеренко, С. П. Новиков, А. Н. Паршин, И. Х. Сабитов, А. Л. Семенов, А. Г. Сергеев, О. К. Шейнман, М. И. Штогрин, Е. В. Щепин, "Николай Петрович Долбилин (к семидесятилетию со дня рождения)", УМН, 69:1(415) (2014), 187-188 ; N. N. Andreev, V. M. Buchstaber, A. I. Garber, V. V. Kozlov, S. P. Konovalov, A. A. Mal'tsev, Yu. V. Nesterenko, S. P. Novikov, A. N. Parshin, I. Kh. Sabitov, A. L. Semenov, A. G. Sergeev, O. K. Sheinman, M. I. Shtogrin, E. V. Shchepin, "Nikolai Petrovich Dolbilin (on his 70th birthday)", Russian Math. Surveys, 69:1 (2014), 181-182
110. Ю. В. Нестеренко, "О вычислении сумм Эйлера", 50 лет школе имени А.Н. Колмогорова, Сборник статей: Математика, т. 1, Азбука-2000, М., 2014, 94-114
111. Ю. В. Нестеренко, "Юлианский календарь", Потенциал, 2015, 4, 25-31, 5, 34-45
112. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, В. Г. Чирский, В. Х. Салихов, "Андрей Борисович Шидловский (13.8.1915-23.03.2007)", Чебышевский сб., 16:3 (2015), 6-34 ; A. I. Galochkin, Yu. V. Nesterenko, V. G. Chirskiy, V. Kh. Salikhov, "Andrei Borisovich Shidlovskii", Chebyshevskii Sb., 16:3 (2015), 6-34
113. Ю. В. Нестеренко, "О постоянной Каталана", Алгебра, геометрия и теория чисел, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова, Тр. МИАН, 292, МАИК, М., 2016, 159-176 ; Yu. V. Nesterenko, "On Catalan's Constant", Proc. Steklov Inst. Math., 292 (2016), 153-170

Получено 14.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-21-32

О построении многомерных периодических фреймов всплесков<sup>1</sup>

П. А. Андрианов

**Андрианов Павел Андреевич** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail:* [p.andrianov@spbu.ru](mailto:p.andrianov@spbu.ru)

## Аннотация

Изучаются многомерные периодические системы всплесков с матричным коэффициентом растяжения. В работе используется конструкция периодического кратномасштабного анализа, наиболее общее определение которого дано И. Максименко и М. Скопиной в [25]. Описан алгоритмический метод построения двойственных фреймов всплесков по набору коэффициентов Фурье одной подходящей функции. Данная функция является первой функцией в масштабирующей последовательности, формирующей двойственные периодические кратномасштабные анализы, которые используются для конечного построения систем всплесков. Условия, накладываемые на исходную функцию, представляют собой ограничения на скорость убывания её коэффициентов Фурье, а также на взаимное расположение нулевых и ненулевых коэффициентов.

*Ключевые слова:* периодический кратномасштабный анализ, фреймы всплесков, Бесселева система, двойственные фреймы.

*Библиография:* 25 названий.

## Для цитирования:

П. А. Андрианов. О построении многомерных периодических фреймов всплесков, *Чебышевский сборник*, т. 23, вып. 1, с. 21–32.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055)

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-21-32

**On construction of multidimensional periodic wavelet frames**

P. A. Andrianov

**Andrianov Pavel Andreevich** — Saint Petersburg State University (Saint Petersburg).*e-mail: p.andrianov@spbu.ru***Abstract**

Multidimensional periodic wavelet systems with matrix dilation in the framework of periodic multiresolution analyses are studied. In this work we use notion of a periodic multiresolution analysis, the most general definition of which was given by Maksimenko and M. Skopina in [25]. An algorithmic method of constructing multidimensional periodic dual wavelet frames from a suitable set of Fourier coefficients of one function is provided. This function is used as the first function in a scaling sequence that forms two periodic multiresolution analyses, which are used to construct wavelet systems. Conditions that the initial function has to satisfy are presented in terms of a certain rate of decay of its Fourier coefficients, and also mutual arrangement of zero and non-zero coefficients.

*Keywords:* wavelet function, periodic multiresolution analysis, wavelet frame, Bessel system, dual frames.

*Bibliography:* 25 titles.

**For citation:**

P. A. Andrianov, “On construction of multidimensional periodic wavelet frames”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 21–32.

**1. Introduction**

A natural way to define periodic wavelet system is to periodize standard wavelet systems from  $L_2(\mathbb{R})$ , which is possible if wavelet functions have sufficient decay rate. Such systems are widely studied ([6, §9.3], [13], [19], [20], [22], [12]). But many periodic objects that can reasonably be classified as wavelet systems cannot be obtained that way, and thus there exist other approaches to defining periodic wavelets in a more general sense. Just as in nonperiodic case, wavelets can be obtained on the basis of multiresolution analyses. Specifically, orthogonal bases and tight frames are built using one periodic multiresolution analysis (for brevity, PMRA in the sequel), and biorthogonal bases and dual frames are built using two PMRAs (see [4], [14], [8], [23], [21]). In this paper we use the definition of PMRA given by I. Maksimenko and M. Skopina in [25] (also see [24, Chapter 9]). In [2] N. Atreas has shown that in order to establish that dual wavelet systems are frames, one should check that, along with a few technical conditions, these systems are Bessel. It is worth noting that similar constructions of tight frames do not require this check. Algorithmic methods for the construction of PMRA-based tight wavelet frames were suggested in [7], and in [2] for multidimensional case. However, the condition of systems being Bessel is critical for the construction of dual wavelet frames. Sufficient conditions, under which multidimensional periodic wavelet system is Bessel, were established in [1]. Basing on this result, we provide an algorithmic method of constructing multidimensional periodic dual wavelet frames, starting with any suitable set of Fourier coefficients. In the provided scheme these coefficients define a function that induces two scaling sequences, which generate dual frames.

## 2. Notation and auxiliary results

As usual,  $\mathbb{N}$  is a set of positive integers,  $\mathbb{R}^d$  is a  $d$ -dimensional euclidean space,  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_d)$  are its elements (vectors),  $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ ,  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ ,  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ ,  $\mathbb{Z}^d$  is integer lattice in  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^1$ ,  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ ,  $\mathbb{T}^d = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^d$  is a  $d$ -dimensional unit torus,  $\delta_{n,k}$  is Kronecker delta,  $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-2\pi i(k,t)} dt$  is  $k$ -th Fourier coefficient of  $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ ,  $\langle f, g \rangle$  is inner product in  $L_2(\mathbb{T}^d)$ .

If  $A$  is  $d \times d$  matrix, then  $\|A\|$  is its euclidean operator norm from  $\mathbb{R}^d$  to  $\mathbb{R}^d$ ,  $A^*$  is its Hermitian adjoint,  $A^{*j} = (A^*)^j$ ,  $I_d$  is  $d \times d$  identity matrix. If  $A$  is a  $d \times d$  nonsingular integer matrix, we say that vectors  $k, n \in \mathbb{Z}^d$  are congruent modulo  $A$  and write  $k \equiv n \pmod{A}$  if  $k - n = Al$ ,  $l \in \mathbb{Z}^d$ . We denote by  $\mathbb{Z}_{\mathbf{0},A}^d$  set of all  $l \in \mathbb{Z}^d$ , such that  $l \equiv \mathbf{0} \pmod{A}$ . The integer lattice  $\mathbb{Z}^d$  is partitioned into cosets with respect to this congruence. The number of these cosets equals to  $|\det A|$  (see, for instance, [11, Proposition 2.1.1]). Any set containing only one representative of each coset is called a set of digits of the matrix  $A$ . When it does not matter which set of digits is chosen, we assume that it is chosen arbitrarily and denote it by  $D(A)$ . Let us also note that  $H(A) := \mathbb{Z}^d \cap A\mathbb{T}^d$  is a set of digits (see [11, Proposition 2.1.1]). Also, there is a following lemma that establishes connection between sets of digits of matrices  $A$ ,  $A^j$  and  $A^{j+1}$ .

LEMMA 1 ([11], Lemma 2.1.3). *Let  $A$  be a nonsingular integer  $d \times d$  matrix,  $|\det A| > 1$ . Then the set  $\{r + A^j p\}$  for all possible  $r \in D(A^j)$  and  $p \in D(A)$  is a set of digits of the matrix  $A^{j+1}$ .*

In this paper  $M$  denotes a square integer matrix with eigenvalues greater than one in modulus. We will also denote  $m := |\det M|$ . Note that matrix  $M^{-1}$  has all eigenvalues less than one in modulus, and there is only finite number of them, and hence spectral radius of matrix  $M^{-1}$  is also less than one. This implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^{-n}\| = 0. \quad (1)$$

For any  $l \in \mathbb{Z}^d$ ,  $l_j$  is a vector such that  $l_j \in H(M^{*j})$ ,  $l_j \equiv l \pmod{M^{*j}}$  (note that it is unique).

A matrix  $M$  is called isotropic if it is similar to a diagonal matrix such that numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  are placed on the main diagonal and  $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_d|$ . Thus,  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  are eigenvalues of  $M$  and the spectral radius of  $M$  is equal to  $|\lambda|$ , where  $\lambda$  is one of the eigenvalues of  $M$ . Note that if matrix  $M$  is isotropic then  $M^*$  is isotropic and  $M^j$  is isotropic for all  $j \in \mathbb{Z}$ . It is well known that for an isotropic matrices  $M$  and for any  $j \in \mathbb{Z}$  we have

$$C_1^M |\lambda|^j \leq \|M^j\| \leq C_2^M |\lambda|^j, \quad (2)$$

where  $\lambda$  is one of the eigenvalues of  $M$ .

For any sequence of functions  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$  we will denote its shifts by  $f_{jk} := f_j(\cdot + M^{-j}k)$ . By wavelet system we will mean a system of shifts  $\{f_{jk}\}_{j \in \mathbb{Z}_+, k \in D(M^j)}$ , associated with a sequence of functions  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ , and denote it by  $\{f_{jk}\}_{j,k}$ . If we have several sequences  $\{f_j^{(\nu)}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , the system that represents a union of wavelet systems of each sequence we will also call a wavelet system and denote it by  $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ . In the case if we will need to specify the sets of indices, we will write  $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j \in \mathbb{Z}_+, k \in D(M^j), \nu=1, \dots, n}$ .

In this paper we rely on the following result that establishes sufficient conditions for wavelet systems to be Bessel.

THEOREM 1 ([1]). *Let Fourier coefficients of functions  $\psi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , satisfy the following conditions*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2} \widehat{\psi_j}(l)| \leq C \min \left\{ |M^{*-j}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)}, |M^{*-j}l|^\alpha \right\} \quad (3)$$

for some  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Then, the wavelet system  $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$  is Bessel.

Let us now proceed to defining periodic multiresolution analysis.

DEFINITION 1 ([24], Definition 9.1.1). *A collections of sets  $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $V_j \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ , is called PMRA, if the following properties hold:*

- **MR1.**  $V_j \subset V_{j+1}$ ;
- **MR2.**  $\bigcup_{j=0}^\infty V_j = L_2(\mathbb{T}^d)$ ;
- **MR3.**  $\dim V_j = m^j$ ;
- **MR4.**  $\dim\{f \in V_j : f(\cdot + M^{-j}n) = \lambda_n f \ \forall n \in \mathbb{Z}^d\} \leq 1, \ \forall \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d}, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ;
- **MR5.**  $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot + M^{-j}n) \in V_j \ \forall n \in \mathbb{Z}^d$ ;
- **MR6.** a)  $f \in V_j \Rightarrow f(M \cdot) \in V_{j+1}$ ;  $f \in V_{j+1} \Rightarrow \sum_{s \in D(M)} f(M^{-1} \cdot + M^{-1}s) \in V_j$ .

DEFINITION 2 ([24], Definition 9.1.3). *Let  $\{V_j\}_{j=0}^\infty$  be a PMRA in  $L_2(\mathbb{T}^d)$ . Sequence of functions  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ ,  $\varphi_j \in V_j$ , is called a scaling sequence, if functions  $\varphi_{jk}$ ,  $k \in D(M^j)$ , form a basis for  $V_j$ .*

THEOREM 2 ([24], Theorem 9.1.4). *Functions  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \subset L_2(\mathbb{T}^d)$  form a scaling sequence for some PMRA if and only if:*

- **S1.**  $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ , for all  $k \neq 0$ ;
- **S2.** for all  $j \in \mathbb{Z}_+$ , and for all  $n \in \mathbb{Z}^d$  exists  $m \equiv n \pmod{M^{*j}}$ , such that  $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$ ;
- **S3.** for all  $k \in \mathbb{Z}^d$  exists  $j \in \mathbb{Z}_+$ , such that  $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$ ;
- **S4.** For all  $j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n \in \mathbb{Z}^d$ , exists  $\gamma_n^j \neq 0$ , such that  $\gamma_n^j \widehat{\varphi_j}(k) = \widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k)$  for all  $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ ;
- **S5.** For all  $j \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^d$ , exists  $\mu_n^j$ , such that  $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_n^j \widehat{\varphi_j}(k)$  for all  $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ .

Let us note that in Theorem 2 the sequences of numbers  $\{\gamma_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $\{\mu_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  are  $M^{*j}$ -periodic with respect to  $k$  for every  $j \in \mathbb{Z}_+$ .

Now we define how scaling sequences generate wavelet systems. Let  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $\{\widetilde{\varphi_j}\}_{j=0}^\infty$  be two scaling sequences,  $s_k$  – arbitrarily enumerated digits of the matrix  $M^*$ , and matrices  $A^{(r)} = \{a_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$ ,  $\widetilde{A}^{(r)} = \{\widetilde{a}_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$  are such that

$$a_{0k}^{(r)} = \mu_{r+M^{*j}s_k}^{j+1}, \quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)} = \widetilde{\mu}_{r+M^{*j}s_k}^{j+1}, \quad (4)$$

and for any  $r \in D(M^{*j})$  it is true that  $A^{(r)} \widetilde{A}^{(r)*} = mI_m$ . For  $\nu = 1, \dots, m-1$ , let

$$\alpha_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j} = a_{\nu k}^{(r)}, \quad \widetilde{\alpha}_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j} = \widetilde{a}_{\nu k}^{(r)}. \quad (5)$$

By lemma 1, vectors  $r + M^{*j}s_k$  form a set of digits  $D(M^{*j+1})$ , i. e. we can  $M^{*j+1}$ -periodically extend these sequences to  $\mathbb{Z}^d$ . Let us define functions  $\psi_j^{(\nu)}$ ,  $\widetilde{\psi_j}^{(\nu)}$  by defining its Fourier coefficients

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l) = \alpha_l^{\nu,j} \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi_j}^{(\nu)}}(l) = \widetilde{\alpha}_l^{\nu,j} \widehat{\widetilde{\varphi_{j+1}}}(l). \quad (6)$$

Systems  $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j \in \mathbb{Z}_+, k \in D(M^j), \nu=1, \dots, m-1}$  and  $\{\widetilde{\varphi_0}\} \cup \{\widetilde{\psi_{jk}^{(\nu)}}\}_{j,k,\nu}$  we will call *dual wavelet systems that are generated by scaling sequences*  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $\{\widetilde{\varphi_j}\}_{j=0}^\infty$ . Now let us cite a theorem that establishes frame conditions for such systems.

THEOREM 3 ([2]). Let  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$  be scaling sequences that satisfy the condition

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} m^j \widehat{\varphi_j}(k) \overline{\widehat{\tilde{\varphi}_j}(k)} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad (7)$$

and let  $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$  and  $\{\tilde{\varphi}_0\} \cup \{\tilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$  be Bessel dual wavelet systems generated by them. Then these systems are dual frames.

### 3. Main result

THEOREM 4. Let  $M$  be an isotropic matrix such that  $\mathbb{T}^d \subset M^* \mathbb{T}^d$ , and  $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T}^d)$  with Fourier coefficients given by

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_0, & \text{if } l = \mathbf{0}, \\ a_l \left(\frac{1}{|l|}\right)^\alpha, & \text{if } l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, l \in Q, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $\alpha > d/2$ ,  $0 < C_1 \leq |a_l| \leq C_2$  for  $l = \mathbf{0}$  and all  $l \in Q$ , where  $Q \subset \mathbb{Z}^d$  is such that  $Q \cap \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d = \emptyset$ ,  $H(M^*) \subset Q$  and satisfies the condition:

(Z) If  $l \notin Q$  and  $l \in H(M^{*j})$  for some  $j \in \mathbb{N}$ , then  $l + M^j k \notin Q$  for every  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Then there exist scaling sequences  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$  that generate wavelet systems  $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$  and  $\{\tilde{\varphi}_0\} \cup \{\tilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ , which are dual frames.

For any vector  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, l \notin Q$  we set  $a_l = C_1$ , and define  $\{a_l^*\}, l \in \mathbb{Z}^d$ , by

$$a_l^* = \begin{cases} a_l, & \text{if } l = \mathbf{0} \text{ or } l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, \\ a_k, & \text{if } l = M^{*n} k, n \in \mathbb{N}, k \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d. \end{cases}$$

Next, we construct scaling sequences  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$  by defining their Fourier coefficients. We start with setting

$$\widehat{\varphi_j}(l) := \begin{cases} m^{-\frac{j+1}{2}} a_l^{*-1}, & \text{if } l \in H(M^{*j}), \\ 0, & \text{if } l \notin H(M^{*j}), \end{cases}$$

and, since  $\mathbb{T}^d \subset M^* \mathbb{T}^d$ ,

$$\tilde{\mu}_l^j = \begin{cases} \sqrt{m}, & \text{if } l \in H(M^{*j-1}), \\ 0, & \text{if } l \notin H(M^{*j-1}). \end{cases} \quad (8)$$

Thus, the functions  $\tilde{\varphi}_j$  are defined, and they are trigonometric polynomials.

Construction of  $\{\varphi_j\}_j$  is slightly more sophisticated. First of all we define the function on 0-th level,

$$\widehat{\varphi_0}(\mathbf{0}) := \sqrt{m} \cdot \widehat{\varphi_1}(\mathbf{0}), \quad \widehat{\varphi_0}(l) := 0, \quad l \neq \mathbf{0}.$$

Note that the already have Fourier coefficients of  $\varphi_1$ . Next we define coefficients  $\widehat{\varphi_j}(l)$  for the rest of the scaling sequence, recursively by  $j$ .

I. ( $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ ) Define  $\widehat{\varphi_j}(l)$  and find  $\mu_l^j$  for  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, k \in \mathbb{Z}^d, j > 1$ .

1) Let  $l \in H(M^{*j})$ . Two cases may occur:

$$a) \quad \widehat{\varphi_{j-1}}(l) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := \frac{|l_j|^\alpha \widehat{\varphi_{j-1}}(l)}{\sqrt{m} |l_{j-1}|^\alpha}, \quad \mu_l^j = \sqrt{m} \left( \frac{|l_{j-1}|}{|l_j|} \right)^\alpha; \quad (9)$$

$$b) \quad \widehat{\varphi_{j-1}}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \frac{|l_j|}{|l|} \right)^\alpha a_l^*, \quad \mu_l^j = 0. \quad (10)$$

Note that the case  $l = \mathbf{0}$  is not described here, and hence  $|l_{j-1}| \neq 0$ .

2) Let  $l \notin H(M^{*j})$ . Since numbers  $\mu_l^j$  should be  $M^{*j}$ -periodic with respect to  $l$ , we will periodically extend them from  $l \in H(M^{*j})$ , where we defined these numbers at previous step. Again, two cases may occur:

$$a) \quad \mu_l^j \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := \frac{\widehat{\varphi_{j-1}}(l)}{\mu_l^j}; \quad (11)$$

$$b) \quad \mu_l^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := 0. \quad (12)$$

**II.** ( $l \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ ) Now we define  $\widehat{\varphi_j}(l)$  and find  $\mu_l^j$  for  $l \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ ,  $j > 1$ .

$$\widehat{\varphi_j}(l) := \frac{1}{\sqrt{m}} \widehat{\varphi_{j-1}}(M^{*-1}l), \quad \mu_l^j = \mu_{M^{*-1}l}^{j-1}. \quad (13)$$

Note that  $\gamma_l^j = \frac{1}{\sqrt{m}}$  for all  $l \in \mathbb{Z}^d$  due to this formula.

Thus, we have defined all  $\widehat{\varphi_j}(l)$ . Obviously, the corresponding functions  $\varphi_j$  are in  $L_2$ . For  $l = \mathbf{0}$  we, by definition (13), have a simple formula  $\widehat{\varphi_j}(0) = \frac{1}{\sqrt{m}} \widehat{\varphi_{j-1}}(0)$ . Next, let us show that for the following inequality holds for all  $l \neq \mathbf{0}$ ,

$$|\widehat{\varphi_j}(l)| \leq C^* m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \frac{|l_j|}{|l|} \right)^\alpha |a_l^*|, \quad (14)$$

where for  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$  inequality turns into equality with  $C^* = 1$ , and  $C^* = (C_2^{M^*})^{2\alpha}$  for  $l \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ . For  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ , it follows directly from the formulas (9)-(12). Now let  $l = M^{*n}k$ ,  $k \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ , and let  $\widehat{\varphi_j}(l) \neq 0$ . Using definition (13)  $n$  times, we have

$$\widehat{\varphi_j}(l) = \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \right)^n \widehat{\varphi_{j-n}}(M^{*-n}l) = m^{-\frac{n}{2}} m^{-\frac{j-n-1}{2}} \left( \frac{|(M^{*-n}l)_{j-n}|}{|M^{*-n}l|} \right)^\alpha a_{M^{*-n}l}^*.$$

According to definition of  $a_l^*$ ,  $a_{M^{*-n}l}^* = a_l^*$ . Also, due to properties of matrix  $M$  and definition of  $l_j$ , we know that  $(M^{*-n}l)_{j-n} = M^{*-n}l + M^{*j-n}r$ , where  $r \in \mathbb{Z}^d$  is such that  $M^{*-n}l + M^{*j-n}r \in M^{*j-n}\mathbb{T}^d$ . This means that  $M^{*n}(M^{*-n}l)_{j-n} = l + M^{*j}r \in M^{*j}\mathbb{T}^d$ , and hence  $l + M^{*j}r = l_j$ . Thus,  $(M^{*-n}l)_{j-n} = M^{*-n}l_j$ . Using these facts, we obtain

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi_j}(l)| &= m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \frac{|M^{*-n}l_j|}{|M^{*-n}l|} \right)^\alpha |a_l^*| \\ &\leq m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \frac{\|M^{*-n}\| |l_j| |l|}{|M^{*-n}l| |l|} \right)^\alpha |a_l^*| \\ &\leq m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \frac{\|M^{*-n}\| \|M^{*-n}M^{*n}l\| |l_j|}{|M^{*-n}l| |l|} \right)^\alpha |a_l^*| \\ &\leq m^{-\frac{j-1}{2}} \left( \|M^{*-n}\| \|M^{*n}\| \frac{|l_j|}{|l|} \right)^\alpha |a_l^*|. \end{aligned} \quad (15)$$

It remains to recall that  $M$  is an isotropic matrix, which implies that  $\|M^{*-n}\| \|M^{*n}\| \leq (C_2^{M^*})^2$ .

Let us show that  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $\{\widehat{\varphi_j}\}_{j=0}^\infty$  are scaling sequences. Condition **S1** is obviously fulfilled. Since

$$\widehat{\varphi_j}(l) \neq 0, \quad \widehat{\varphi_j}(l) \neq 0$$

whenever  $l \in H(M^{*j})$ , conditions **S2** and **S3** are also granted. Condition **S4** (periodicity of  $\gamma_k^j$ ) is also fulfilled, because all  $\gamma_k^j$  are equal to each others. The last, condition **S5** (periodicity of  $\mu_k^j$ ) is granted by the fact that for every  $j \in \mathbb{Z}_+$  we defined  $\mu_k^j$  on  $H(M^{*j})$ , and then extended it to  $\mathbb{Z}^d$ . It

is also worth noting that the fulfillment of condition (Z) grants us absence of collisions during the process of defining  $\mu_k^j$ .

Noting that  $l_j = l$  for sufficiently large  $j$ , we can see that the equality

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m^j \widehat{\varphi_j}(l) \overline{\widehat{\varphi_j}(l)} = 1 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^d$$

follows from inequality (14) for  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ , which, as it was mentioned above, turns into equality with  $C^* = 1$ ; and from equality (15) for  $l \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ .

Now, we introduce and analyze wavelet systems generated by the scaling sequences  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $\{\widetilde{\varphi_j}\}_{j=0}^\infty$ .

Let us define Fourier coefficients of  $\psi_j, \widetilde{\psi_j}$ . It will be suitable for us to represent a set of digits of the matrix  $M^{*j}$  as given in Lemma 1, i. e.

$$D(M^{*j}) = \bigcup_{\substack{r \in D(M^{*j-1}) \\ p \in D(M^*)}} \{r + M^{*j-1}p\}. \quad (16)$$

But we should note that this set is not necessarily the same as  $H(M^{*j})$ . However, when speaking about  $\mu_n^j$ , due to its  $M^{*j}$ -periodicity we can safely regard it as defined on any set of digits (particularly on  $H(M^{*j})$ ), whenever they are defined on at least one set of digits.

It follows from (8) that

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_k^{j+1} &\neq 0 \quad \text{for } k \in H(M^{*j}), \\ \widetilde{\mu}_k^{j+1} &= 0 \quad \text{for } k \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}). \end{aligned} \quad (17)$$

Using lemma 1, with  $D(M^{*j}) = H(M^{*j})$ ,  $D(M^*) = H(M^*)$ , we can rewrite it as

$$\forall r \in H(M^{*j}) \quad \widetilde{\mu}_{r+M^{*j}p}^{j+1} \begin{cases} \neq 0, & \text{for } p = \mathbf{0}, \\ = 0, & \text{for } p \neq \mathbf{0}, p \in H(M^*). \end{cases} \quad (18)$$

Let us now build matrices  $A^{(r)}$  and  $\widetilde{A}^{(r)}$  for every  $r \in H(M^{*j})$ . First, enumerate digits  $p \in H(M^*)$  such that  $p_0 = \mathbf{0}$ . Then we define the first row as

$$a_{0k}^{(r)} = \mu_{r+M^{*j}p_k}^{j+1}, \quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)} = \widetilde{\mu}_{r+M^{*j}p_k}^{j+1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (19)$$

It is easy to see that, due to (18),  $\widetilde{a}_{0k}^{(r)} = 0$  for  $k = 1, \dots, m-1$ . Extend these matrices to square matrices in the following fashion

$$\begin{aligned} A^{(r)} &= \begin{bmatrix} \mu_r^{j+1} & \mu_{r+M^{*j}p_1}^{j+1} & \cdots & \mu_{r+M^{*j}p_{m-1}}^{j+1} \\ 0 & -\widetilde{\mu}_r^{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\widetilde{\mu}_r^{j+1} \end{bmatrix}, \\ \widetilde{A}^{(r)} &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_r^{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_{r+M^{*j}p_1}^{j+1} & -\mu_r^{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{r+M^{*j}p_{m-1}}^{j+1} & 0 & \cdots & -\mu_r^{j+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Due to (9),  $\mu_r^{j+1} = \sqrt{m} \left( \frac{|r_j|}{|r_{j+1}|} \right) = \sqrt{m}$ , since  $r \in H(M^{*j})$ . Using this equality and (8), it is easy to check that  $A^{(r)} \tilde{A}^{(r)*} = mI_m$ . Now we let

$$\alpha_{r+M^{*j}p_k}^{\nu,j} = a_{\nu k}^{(r)}, \quad \tilde{\alpha}_{r+M^{*j}p_k}^{\nu,j} = \tilde{a}_{\nu k}^{(r)}.$$

Vectors  $r + M^{*j}p_k$ ,  $k = 1, \dots, m-1$  are a set of digits  $D(M^{*j+1})$ , since  $r \in H(M^{*j})$ ,  $p_k \in H(M^{*j})$ . Thus, we can  $M^{*j+1}$ -periodically extend the coefficients  $\alpha_l^{\nu,j}$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{\nu,j}$  to  $\mathbb{Z}^d$ .

Now, for  $\nu = 1, \dots, m-1$ , we let

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l) = \alpha_l^{\nu,j} \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\tilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l) = \tilde{\alpha}_l^{\nu,j} \widehat{\tilde{\varphi}_{j+1}}(l).$$

We can see that

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l) = \begin{cases} -\sqrt{m} \widehat{\varphi_{j+1}}(l), & \text{for } l \equiv r + p_\nu \pmod{M^{*j+1}}, \\ & r \in H(M^{*j}); \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad (20)$$

$$\widehat{\tilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l) = \begin{cases} -\sqrt{m} \widehat{\tilde{\varphi}_{j+1}}(l), & \text{for } l \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}); \\ \mu_{l+M^{*j}p_\nu}^{j+1} \widehat{\tilde{\varphi}_{j+1}}(l), & \text{for } l \in H(M^{*j}), \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad (21)$$

To estimate them we consider two cases:

1) Let  $l \in H(M^{*j})$ . In this case,  $|M^{*-j}l| \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$ , and hence,

$$|M^{*-j}l|^\alpha \leq C_{d,\alpha} |M^{*-j}l|^{-\alpha}, \quad (22)$$

where  $C_{d,\alpha} = \left( \frac{2}{\sqrt{d}} \right)^{-2\alpha}$ . From (20),  $|\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| = 0$ . Next,

$$|\widehat{\tilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l)| = |\mu_{l+M^{*j}p_\nu}^{j+1}| m^{-\frac{j+2}{2}} |a_l^{*-1}|,$$

$$|\mu_{l+M^{*j}p_\nu}^{j+1}| = \sqrt{m} \left( \frac{|(l + M^{*j}p_\nu)_j|}{|(l + M^{*j}p_\nu)_{j+1}|} \right)^\alpha.$$

It is not hard to see that  $(l + M^{*j}p_\nu)_j = l$ , and since  $p_\nu \neq \mathbf{0}$ ,  $(l + M^{*j}p_\nu)_{j+1} \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$ , which means that  $|(l + M^{*j}p_\nu)_{j+1}| \geq \frac{1}{2\|M^{*-j}\|}$ . Using this and the fact that  $M^*$  is isotropic, we have

$$\begin{aligned} |\mu_{l+M^{*j}p_\nu}^{j+1}| &= \sqrt{m} \left( \frac{|l|}{|(l + M^{*j}p_\nu)_{j+1}|} \right)^\alpha \leq \sqrt{m} \left( 2\|M^{*j}\| \|M^{*-j}\| |M^{*-j}l| \right)^\alpha \\ &\leq \sqrt{m} 2^\alpha (C_2^{M^*})^{2\alpha} \left( |M^{*-j}l| \right)^\alpha, \end{aligned}$$

and thus, according to (21), we have

$$m^{j/2} |\widehat{\tilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l)| \leq m^{\frac{3}{2}} 2^\alpha (C_2^{M^*})^{2\alpha} \left( |M^{*-j}l| \right)^\alpha |a_l^{*-1}| \leq C_{d,\alpha} m^{\frac{3}{2}} 2^\alpha (C_2^{M^*})^{2\alpha} \left( |M^{*-j}l| \right)^{-\alpha} |a_l^{*-1}|.$$

2) Let  $l \notin H(M^{*j})$ . In this case  $|M^{*-j}l| \geq \frac{1}{2}$ , and hence

$$|M^{*-j}l|^{-\alpha} \leq \left( 4|M^{*-j}l| \right)^\alpha.$$



By (21),  $|\widehat{\psi_j}(l)| = -\sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l)$  for  $l \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$ , i. e. where  $|M^{*-j}l| \leq \|M^*\|\sqrt{d}$ , and 0 otherwise. Thus, we have the following estimate

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| = |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*-1}| \leq |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*-1}||M^*|^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}}|M^{*-j}l|^{-\alpha} \leq |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*-1}||M^*|^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}}(4|M^{*-j}l|)^\alpha$$

Next, from (14), for non-zero coefficients we have  $|\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leq C^*m^{-\frac{j}{2}}\left(\frac{|l_{j+1}|}{|l|}\right)^\alpha |a_l^*|$ , where  $|l_{j+1}| \leq \frac{\sqrt{d}\|M^{*j+1}\|}{2}$ , since  $l_{j+1} \in H(M^{*j+1})$ . Using this and the fact that  $M^*$  is isotropic,

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| &\leq C^*m^{-\frac{j}{2}}\left(\frac{|M^{*-(j+1)}l||l_{j+1}|}{|M^{*-(j+1)}l||l|}\right)^\alpha |a_l^*| \leq C^*m^{-\frac{j}{2}}\left(\frac{\sqrt{d}\|M^{*j+1}\|\|M^{*-(j+1)}l\|}{2|M^{*-(j+1)}l||l|}\right)^\alpha \\ &\leq C^*m^{-\frac{j}{2}}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^\alpha \|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^{-\alpha} \\ &\leq C^*m^{-\frac{j}{2}}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^\alpha 4^\alpha \|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^\alpha. \end{aligned}$$

By definition,

$$\begin{aligned} m^{j/2}|\widehat{\psi_j}(l)| &= m^{j/2}|\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leq C^*\sqrt{m}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^\alpha \|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^{-\alpha} \\ &\leq C^*\sqrt{m}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^\alpha 4^\alpha \|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^\alpha. \end{aligned}$$

As for coefficients that are equal to zero, the same estimates are obviously held.

Thus, we have shown that all conditions of theorems 1 and 3 are satisfied, and hence, wavelet systems  $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$  and  $\{\tilde{\varphi}_0\} \cup \{\tilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$  are dual frames.

**COROLLARY 1.** *Let  $M$  be an isotropic matrix such that  $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$ , and  $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T}^d)$  with Fourier coefficients given by*

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_0, & \text{if } l = \mathbf{0}, \\ a_l\left(\frac{1}{|l|}\right)^\alpha, & \text{if } l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, \\ 0, & \text{if } l \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d, l \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

where  $\alpha > d/2$ ,  $0 < C_1 \leq |a_l| \leq C_2$  for  $l = \mathbf{0}$  and all  $l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d$ . Then there exist scaling sequences  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ ,  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$  that generate wavelet systems  $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$  and  $\{\tilde{\varphi}_0\} \cup \{\tilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ , which are dual frames.

It suffices to check that, in this case,  $Q = \{l : l \notin \mathbb{Z}_{\mathbf{0}, M^*}^d\}$ . This set obviously satisfies condition (Z) from Theorem 4.

## 4. Conclusion

We have presented a method of constructing periodic dual wavelet frames with an isotropic matrix dilation, starting with only one suitable function. Its Fourier coefficients have to have a sufficient rate of decay, and also satisfy the condition (Z) on mutual arrangement of zero and non-zero coefficients. The resulting wavelet systems can be built layer by layer, with the provided recurrent formulas for its Fourier coefficients.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. A. Andrianov, "Sufficient conditions for a multidimensional system of periodic wavelets to be a frame", *Zap. Nauchn. Sem. POMI (Russian)*, 2019, Volume 480, 48–61.
2. N. D. Atreas, 2002, "Characterization of dual multiwavelet frames of periodic functions", *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol. 14, No. 03, 1650012.
3. C. K. Chui, H. N. Mhaskar, 1993, "On trigonometric wavelets", *Constr. Approx.*, 9, 2-3, 167-190.
4. C. K. Chui, J. Z. Wang, 1992, "A general framework of compact supported splines and wavelets", *J. Approx. Theory* 71, 263-304.
5. I. Daubechies, B. Han, A. Ron, Z. Shen, 2003, "Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames", *ACHA*, Volume 14, Issue 1 Pages 1-46.
6. I. Daubechies, 1992, "Ten lectures on Wavelets", *CBMS-NSR Series in Appl. Math.*, SIAM.
7. S. S. Goh, B. Han, Z. Shen, 2011, "Tight periodic wavelet frames and approximation orders", *ACHA*, Volume 31, Issue 2, Pages 228-248.
8. S. S. Gon, S. Z. Lee, Z. Shen, W. S. Tang, 1998, "Construction of Schauder decomposition on banach spaces of periodic functions", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Volume 41, Issue 1, pp. 61-91.
9. B. Han, 1997, "On dual wavelet tight frames", *ACHA*, V. 4. P. 380-413.
10. B. Han, 2003, "Compactly supported tight wavelet frames and orthonormal wavelets of exponential decay with a general dilation matrix", *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 155. P. 43-67.
11. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, 2016, "Multivariate Wavelet Frames", *Springer Singapore*, P. 182.
12. E. Lebedeva, 2017, "On a connection between nonstationary and periodic wavelets", *J. Math. Anal. Appl.*, 451:1, 434–447
13. Y. Meyer, 1990, "Ondelettes", *Herman, Paris*.
14. A. P. Petukhov, 1997, "Periodic wavelets", *Mat. Sb.*, 188:10, 69–94.
15. A. Ron, Z. Shen, 1995, "Gramian analysis of affine bases and affine frames", *Approximation Theory VIII, V. 2: Wavelets (C.K. Chui and L. Schumaker, eds)*, World Scientific Publishing Co. Inc (Singapore). P. 375-382.
16. A. Ron, Z. Shen, 1995, "Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ", *Canad. J. Math.*, V. 47. N. 5. P. 1051-1094.
17. A. Ron, Z. Shen, 1997, "Affine systems in  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : the analysis of the analysis operator", *J. Func. Anal.*, V. 148. P. 408-447.
18. A. Ron, Z. Shen, 1997, "Affine systems in  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : dual systems", *J. Fourier. Anal. Appl.*, V. 3. P. 617-637.
19. M. Skopina, 1998, "Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets", *J. Approx. Theory.*, V. 94. P. 191-202.

20. M. Skopina, 2000, "Wavelet approximation of periodic functions", *J. Approx. Theory*, V. 104. P.302-329.
21. M. Skopina, 1997, "Multiresolution analysis of periodic functions", *East Journal On Approximations*, Volume 3, Number 2, 203-224.
22. G. G. Walter, L. Cai., 1999 "Periodic Wavelets from Scratch", *Journal of Computational Analysis and Applications*, Volume 1, Issue 1, pp 25-41.
23. V. A. Zheludev, 1994, "Periodic splines and wavelets", *Proc. of the Conference "Math. Analysis and Signal Processing"*, Cairo, Jan. 2-9, 1994.
24. Novikov, I. Y., Protasov, V. Y., Skopina, M. A., 2011, "Wavelet Theory", *American Mathematical Society*.
25. I. Maksimenko, M. Skopina, 2004, "Multivariate periodic wavelets", *St. Petersburg Math. J.*, 15, 165-190.

## REFERENCES

1. P. A. Andrianov, "Sufficient conditions for a multidimensional system of periodic wavelets to be a frame", *Zap. Nauchn. Sem. POMI (Russian)*, 2019, Volume 480, 48-61.
2. N. D. Atreas, 2002, "Characterization of dual multiwavelet frames of periodic functions", *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol. 14, No. 03, 1650012.
3. C. K. Chui, H. N. Mhaskar, 1993, "On trigonometric wavelets", *Constr. Approx.*, 9, 2-3, 167-190.
4. C. K. Chui, J. Z. Wang, 1992, "A general framework of compact supported splines and wavelets", *J. Approx. Theory* 71, 263-304.
5. I. Daubechies, B. Han, A. Ron, Z. Shen, 2003, "Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames", *ACHA*, Volume 14, Issue 1 Pages 1-46.
6. I. Daubechies, 1992, "Ten lectures on Wavelets", *CBMS-NSR Series in Appl. Math.*, SIAM.
7. S. S. Goh, B. Han, Z. Shen, 2011, "Tight periodic wavelet frames and approximation orders", *ACHA*, Volume 31, Issue 2, Pages 228-248.
8. S. S. Gon, S. Z. Lee, Z. Shen, W. S. Tang, 1998, "Construction of Schauder decomposition on banach spaces of periodic functions", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Volume 41, Issue 1, pp. 61-91.
9. B. Han, 1997, "On dual wavelet tight frames", *ACHA*, V. 4. P. 380-413.
10. B. Han, 2003, "Compactly supported tight wavelet frames and orthonormal wavelets of exponential decay with a general dilation matrix", *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 155. P. 43-67.
11. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, 2016, "Multivariate Wavelet Frames", *Springer Singapore*, P. 182.
12. E. Lebedeva, 2017, "On a connection between nonstationary and periodic wavelets", *J. Math. Anal. Appl.*, 451:1, 434-447

13. Y. Meyer, 1990, "Ondelettes", *Herman, Paris*.
14. A. P. Petukhov, 1997, "Periodic wavelets", *Mat. Sb.*, 188:10, 69–94.
15. A. Ron, Z. Shen, 1995, "Gramian analysis of affine bases and affine frames", *Approximation Theory VIII, V. 2: Wavelets (C.K. Chui and L. Schumaker, eds)*, World Scientific Publishing Co. Inc (Singapore). P. 375-382.
16. A. Ron, Z. Shen, 1995, "Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ", *Canad. J. Math.*, V. 47. N. 5. P. 1051-1094.
17. A. Ron, Z. Shen, 1997, "Affine systems in  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : the analysis of the analysis operator", *J. Func. Anal.*, V. 148. P. 408-447.
18. A. Ron, Z. Shen, 1997, "Affine systems in  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : dual systems", *J. Fourier. Anal. Appl.*, V. 3. P. 617-637.
19. M. Skopina, 1998, "Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets", *J. Approx. Theory.*, V. 94. P. 191-202.
20. M. Skopina, 2000, "Wavelet approximation of periodic functions", *J. Approx. Theory.*, V. 104. P.302-329.
21. M. Skopina, 1997, "Multiresolution analysis of periodic functions", *East Journal On Approximations*, Volume 3, Number 2, 203-224.
22. G. G. Walter, L. Cai., 1999 "Periodic Wavelets from Scratch", *Journal of Computational Analysis and Applications*, Volume 1, Issue 1, pp 25-41.
23. V. A. Zheludev, 1994, "Periodic splines and wavelets", *Proc. of the Conference "Math. Analysis and Signal Processing"*, Cairo, Jan. 2-9, 1994.
24. Novikov, I. Y., Protasov, V. Y., Skopina, M. A., 2011, "Wavelet Theory", *American Mathematical Society*.
25. I. Maksimenko, M. Skopina, 2004, " Multivariate periodic wavelets", *St. Petersburg Math. J.*, 15, 165-190.

Получено 22.10.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-33-44

**О геометрии обобщенных почти кватернионных многообразий  
вертикального типа**

О. Е. Арсеньева

**Арсеньева Ольга Евгеньевна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Аннотация**

В работе исследуются обобщенные почти кватернионные многообразия вертикального типа. Приведены примеры этого типа многообразий. Доказано, что на обобщенном почти кватернионном многообразии всегда существует почти  $\alpha$ -кватернионная связность, которая в главном расслоении индуцирует метрическую связность. Получен критерий автодуальности проектируемой вертикальной 2-формы на почти  $\alpha$ -кватернионном многообразии. Получены компоненты структурного эндоморфизма на пространстве  $G$ -структуры. Получен ответ на вопрос: когда эндоморфизм Римана-Кристоффеля сохраняет келеров модуль многообразия. Доказано, эндоморфизм Римана-Кристоффеля эрмитова почти  $\alpha$ -кватернионного многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским. Откуда как следствие получаем, что четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля. Полученное следствие показывает, что предыдущий результат является широким обобщением теоремы Атьи-Хитчина-Сингера, дающей критерий эйнштейновости 4-мерных римановых многообразий в терминах автодуальных форм, поскольку результат обобщает эту теорему на случай нейтральной псевдоримановой метрики. С другой стороны, этот результат тесно связан с известным результатом Берже, который уточняет её в частном случае кватернионно-келеровых многообразий: если многообразие  $M$  кватернионно-келерово, то его риманова связность (а не только оператор Римана-Кристоффеля) сохраняет келеров модуль многообразия. В этом случае  $M$  является многообразием Эйнштейна.

*Ключевые слова:* алгебра обобщенных кватернионов, обобщенная почти кватернионная структура, кватернионно-келерово многообразие, многообразие Эйнштейна.

*Библиография:* 4 названия.

**Для цитирования:**

О. Е. Арсеньева. О геометрии обобщенных почти кватернионных многообразий вертикального типа // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 33–44.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-33-44

**On the geometry of generalized almost quaternionic manifolds of vertical type**

О. Е. Arsenyeva

**Arsenyeva Olga Evgenievna** — candidate of physical and mathematical sciences, docent, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Abstract**

We study generalized almost quaternionic manifolds of vertical type. Examples of this type of manifolds are given. It is proved that on a generalized almost quaternionic manifold there always exists an almost  $\alpha$ -quaternionic connection, which in the main bundle induces a metric connection. The criterion of the auto-duality of the projected vertical 2-form on an almost  $\alpha$ -quaternion manifold is obtained. The components of the structural endomorphism on the space of the  $G$ -structure are obtained. The answer to the question is obtained: when does the Riemann-Christoffel endomorphism preserve the Kähler module of a variety. It is proved that the Riemann-Christoffel Hermitian endomorphism of an almost  $\alpha$ -quaternionic variety of vertical type preserves the Kähler module of a variety if and only if the structural sheaf of this variety is Einstein. Hence, as a consequence, we obtain that a four-dimensional manifold with a Riemannian or neutral pseudo-Riemannian metric is an Einstein manifold if and only if its module of auto-dual forms is invariant with respect to the Riemann-Christoffel endomorphism. The resulting corollary shows that the previous result is a broad generalization of the Atiyah-Hitchin-Singer theorem, which gives the Einstein criterion for 4-dimensional Riemannian manifolds in terms of auto-dual forms, since the result generalizes this theorem to the case of a neutral pseudo-Riemannian metric. On the other hand, this result is closely related to the well-known result of Berger, who clarifies it in the special case of quaternionic-Kähler manifolds: if a variety  $M$  is quaternionic-Koehler, then its Riemann connectivity (and not just the Riemann-Christoffel operator) preserves the Koehler modulus of the variety. In this case,  $M$  is an Einstein manifold.

**Keywords:** algebra of generalized quaternions, generalized almost quaternionic structure, quaternionic-Kaehler manifold, Einstein manifold.

**Bibliography:** 4 titles.

**For citation:**

О. Е. Arsenyeva, 2022, “On the geometry of generalized almost quaternionic manifolds of vertical type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 33–44.

**1. Введение**

Почти кватернионной структурой на многообразии  $M$  называется подрасслоение расслоения линейных операторов на  $M$ , типовым слоем которого является алгебра кватернионов. Особый интерес представляют собой так называемые кватернионно-эрмитовы структуры. Геометрия таких структур представляет интерес, прежде всего потому, что она естественным образом обобщает геометрию 4-мерных римановых многообразий, играющих особую роль в теоретической физике. В частности, с почти кватернионными многообразиями естественным

образом ассоциируется твисторная геометрия, обобщающая знаменитую твисторную программу Пенроуза.

В настоящей работе рассмотрены обобщенные почти кватернионные структуры, типовым слоем структурного расслоения которых является алгебра обобщенных кватернионов. Наиболее подробно рассмотрены обобщенные почти кватернионные структуры вертикального типа, естественно обобщающие кватернионно-келеровы структуры. Основной результат работы показывает, что структурный пучок такого многообразия является эйнштейновским тогда и только тогда, когда его келеров модуль инвариантен относительно оператора кривизны Римана-Кристоффеля. Это, с одной стороны, широко обобщает классический результат Пенроуза-Хитчина-Сингера об эйнштейновости 4-мерных автодуальных римановых многообразий [1], и, с другой стороны, тесно связано с известным результатом Берже об эйнштейновости кватернионно-келеровых многообразий [2].

## 2. Алгебра обобщенных кватернионов

Напомним [3], что алгебра обобщенных кватернионов получается двукратным применением процедуры удвоения Кэли-Диксона из поля  $R$  вещественных чисел:

$$((\mathbf{R}, \alpha), \beta) = \mathbf{R} \otimes i\mathbf{R} \otimes k\mathbf{R}, i = (0, 1) \in (\mathbf{R}, \alpha) = \text{Re}_\alpha, j = (0, 1) \in (\text{Re}_\alpha, \beta), k = ij; \alpha, \beta \neq 0$$

и с точностью до умножения  $i$  и  $j$  на константы  $\sqrt{|\alpha|}$  и  $\sqrt{|\beta|}$  соответственно представляет собой либо тело  $\mathbf{H}$  кватернионов ( $\alpha = \beta = -1$ ), либо кольцо  $\mathbf{AH}$  антикватернионов ( $\alpha = \beta = 1$ ). Обозначим её  $\mathbf{H}_\alpha$ ,  $\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{AH}$ , а ее элементы  $q$  назовём  $\alpha$ -кватернионами. С геометрической точки зрения эта алгебра представляет собой 4-мерное вещественное псевдоевклидово пространство, снабженное канонической метрикой  $g = (\cdot, \cdot)$ ,  $(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 q_2 + \bar{q}_2 q_1)$ , где  $q \rightarrow \bar{q}$  — оператор сопряжения. Метрика  $g$  положительно определена в случае  $\alpha = -1$  и нейтральна в случае  $\alpha = 1$ . Ортогональное дополнение единицы в этой метрике представляет собой 3-мерное подпространство  $\mathcal{IQ}_\alpha$  чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов, характеризующихся тем, что  $q \in \mathcal{IQ}_\alpha \leftrightarrow \bar{q} = -q$ . В частности, система  $\{j_1, j_2, j_3\} \in \mathcal{IQ}_\alpha$  образует ортонормированный базис пространства  $\mathcal{IQ}_\alpha$  тогда и только тогда, когда

$$j_k j_m + j_m j_k = \begin{cases} \pm 2 (k = m); \\ 0 (k \neq m); \end{cases} \quad k, m = 1, 2, 3.$$

## 3. Обобщённые почти кватернионные структуры

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\mathcal{X}(M)$  — модуль гладких векторных полей на  $M$  над кольцом  $C^\infty(M)$  гладких на  $M$  функций,  $TM = \cup_{p \in M} T_p(M)$  — касательное расслоение над  $M$ ,  $\mathcal{T}(M) = \oplus_{r,s=0}^\infty T_r^s(M)$  — тензорная алгебра, а  $\Lambda(M) = \oplus_{r=0}^\infty \Lambda^r(M)$  — алгебра Грассмана многообразия  $M$ ,  $\{E\}$  — модуль гладких сечений расслоения  $(E, M, \pi)$  над  $M$ . Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Почти  $\alpha$ -кватернионной (короче,  $\mathcal{AQ}_\alpha$ -) структурой на  $M$  называется подрасслоение  $\mathcal{L}$  расслоения  $\mathcal{T}_1^1(M)$  с типовым слоем  $\mathbf{H}_\alpha$ .

При  $\alpha = -1$  это понятие совпадает с классическим понятием почти кватернионной структуры [4]. Многообразие, несущее почти  $\alpha$ -кватернионную структуру, называется *почти  $\alpha$ -кватернионным многообразием*. Расслоение  $\mathcal{L}$  назовем структурным. Сечения этого расслоения, так же, как и элементы его произвольного слоя, будем называть  $\alpha$ -кватернионами. Естественно возникают также подрасслоение  $\mathcal{J}$  чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов и  $\mathcal{I}$  чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов единичного модуля, называемое расслоением твисторов над  $M$ .

Очевидно,  $\mathcal{L}$  — четырехмерное векторное расслоение, ассоциированное главному расслоению  $B\mathcal{L} = (B(\mathcal{L}), M, \pi, G_\alpha)$ , элементами тотального пространства которого служат четверки  $\{id, J_1, J_2, J_3\}$   $\alpha$ -кватернионов в произвольной точке  $p \in M$ , удовлетворяющие тождествам  $J_1^2 = J_2^2 = \alpha id$ ;  $\alpha = \pm 1$ ,  $J_1 \circ J_2 + J_2 \circ J_1 = 0$ ,  $J_3 = J_1 \circ J_2$ , которые в силу сказанного выше образуют ортонормированный базис слоя расслоения  $\mathcal{L}$ , а структурной группой  $G_\alpha$  является группа автоморфизмов алгебры  $\alpha$ -кватернионов.

Алгебра  $\mathbf{H}_\alpha$  допускает каноническое представление  $\lambda : \mathbf{H}_\alpha \rightarrow \text{End}(\mathbf{H}_\alpha)$ ,  $\lambda(q)(X) = q \cdot X$ , где  $X \in \mathbf{H}_\alpha$ . В самом деле,  $\lambda(q_1 q_2)(X) = (q_1 q_2)(X) = q_1(q_2 X) = \lambda(q_1)\lambda(q_2)X$ , т.е.  $\lambda(q_1 q_2) = \lambda(q_1)\lambda(q_2)$ .

Пусть  $\{1, j_1, j_2, j_3\}$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbf{H}_\alpha$  указанного выше вида,  $q = a + bj_1 + cj_2 + dj_3 \in \mathbf{H}_\alpha$ . Тогда в этом базисе

$$(\lambda(q)_j^i) = \begin{pmatrix} a & ab & ac & -d \\ b & a & ad & -ac \\ c & -ad & a & ab \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Таким образом, всякий  $\alpha$ -кватернион допускает отождествление с некоторым эндоморфизмом 4-мерного вещественного пространства  $\mathbf{H}_\alpha$ . Опуская индекс у этого эндоморфизма, получим тензор типа  $(2,0)$  на этом линейном пространстве, который будет кососимметрическим тогда и только тогда, когда  $a = 0$ , т.е.  $\alpha$ -кватернион чисто мнимый. В свою очередь, расслоение  $\mathcal{L}$  имеет естественную метрику  $g = (\cdot, \cdot)$ , порожденную метрикой алгебры  $\mathbf{H}_\alpha$ . Опуская с её помощью индекс у чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона, рассматриваемого в своем каноническом представлении, получим 2-форму на пространстве расслоения  $\mathcal{L}$ , которую назовём фундаментальной формой этого  $\alpha$ -кватерниона. Эту форму  $\omega$  можно рассматривать как тензор  $t$  типа  $(2,2)$  на  $M$ :  $t(X, Y, u, v) = \omega(q_1(X, u), q_2(Y, v))$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** *Связность на  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии  $(M, \mathcal{L})$  называется почти  $\alpha$ -кватернионной, или  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связностью если модуль  $\{\mathcal{L}\}$  инвариантен относительно всех параллельных переносов, порождённых этой связностью.*

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *На  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии  $M$  всегда существует  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{\mathcal{U}_\beta\}_{\beta \in B}$  — покрытие многообразия  $M$ , тривиализирующее расслоение  $\mathcal{L}$ , и пусть  $\{id, \mathcal{I}_{(\beta)}, \mathcal{J}_{(\beta)}, \mathcal{K}_{(\beta)}\}$  — локальный ортонормированный базис модуля  $\mathbb{X}(U_\beta)$ ,  $\beta \in B$ . Как известно, на  $\mathcal{U}_\beta$  существует связность  $\nabla_{(\beta)}$ , в которой тензоры  $\mathcal{I}_{(\beta)}$ ,  $\mathcal{J}_{(\beta)}$  и  $\mathcal{K}_{(\beta)}$  ковариантно постоянны, в частности,  $\nabla_{(\beta)}$  —  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность на  $\mathcal{U}_\beta$ . Пусть  $\{\phi_\beta\}_{\beta \in B}$  — разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{\mathcal{U}_\beta\}_{\beta \in B}$ . Тогда очевидно, что  $\nabla = \sum_{\beta \in B} \phi_\beta \nabla_{(\beta)}$  —  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность на  $M$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Всякая  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность  $\nabla$  на  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии  $M$  индуцирует метрическую связность в расслоении  $\mathcal{L}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f \in C^\infty(M)$ ,  $q \in \{\mathcal{L}\}$ ,  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Тогда  $\nabla_X(fq)(Y) = \nabla_X(fq(Y)) - fq(\nabla_X Y) = X(f)q(Y) + f\nabla_X(q)Y + fq(\nabla_X Y) - fq(\nabla_X Y) = X(f)q(Y) + f\nabla_X(q)Y$ , и в силу произвола  $Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $\nabla_X(fq) = X(f)q + f\nabla_X(q)$ , т.е.  $\nabla$  — линейная связность в расслоении  $\mathcal{L}$ . Далее, пусть  $q_1, q_2 \in \{\mathcal{L}\}$ . Поскольку  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность порождает дифференцирование алгебры  $\mathcal{T}(M)$ , перестановочное со свертками, то  $\forall X \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow \nabla_X(q_1 q_2) = \nabla_X(q_1)q_2 + q_1 \nabla_X(q_2)$ . Кроме того, легко видеть, что  $\nabla_X \bar{q} = \overline{\nabla_X q}$ ,  $q \in \mathcal{L}$ . Отсюда следует:

$$\begin{aligned} 1) \nabla_X(\bar{q}_1 q_2) &= \overline{\nabla_X(q_1)} q_2 + \bar{q}_1 \nabla_X q_2; \\ 2) \nabla_X(\bar{q}_2 q_1) &= \overline{\nabla_X(q_2)} q_1 + \bar{q}_2 \nabla_X q_1. \end{aligned}$$



Почленно складывая эти равенства, с учетом определения метрики  $(\cdot, \cdot)$  получим:

$$\nabla_X(q_1, q_2) = (\nabla_X q_1, q_2) + (q_1, \nabla_X q_2),$$

т.е.  $\nabla$  — метрическая связность в  $\mathcal{L}$ . В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что на  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии фиксирована  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность. Тогда  $\mathbb{X}(\mathcal{L}) = V \oplus H$ , где  $V$  и  $H$ , соответственно, вертикальное и горизонтальное распределения индуцированной метрической связности в расслоении  $\mathcal{L}$ ,  $V = \{\mathcal{L}\}$ .

Напомним, что тензор  $t \in \mathcal{T}_r^s(\mathcal{L})$  называется вертикальным, если он обращается в нуль, когда хотя бы один из аргументов этого тензора, рассматриваемого как полилинейная функция, горизонтален. Иначе говоря, для  $\forall X_1, \dots, X_r \in \mathbb{X}(\mathcal{L})$  и  $\forall \omega^1, \dots, \omega^s \in \mathbb{X}^*(\mathcal{L}) \Rightarrow t(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t(X_1^V, \dots, X_r^V, \omega_V^1, \dots, \omega_V^s)$ , где  $X^V$ ,  $\omega_V$  — вертикальные составляющие вектора  $X$  и ковектора  $\omega$  соответственно. Вертикальные тензоры определяют подалгебру тензорной алгебры  $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ , которую мы назовем вертикальной тензорной алгеброй и обозначим  $\mathcal{T}_V(\mathcal{L})$ . Аналогичные замечания относятся к алгебре Грассмана  $\Lambda(\mathcal{L}) \supset \Lambda_V(\mathcal{L})$ . В частности, точечная локализация модуля  $\Lambda_V^r(\mathcal{L})$  имеет размерность  $C_4^r = \frac{4!}{r!(4-r)!}$ ,  $0 \leq r \leq 4$ , и нулевую размерность при  $r > 4$ . Таким образом, естественно определена алгебра Грассмана  $\Lambda_V(\mathcal{L}) = \bigoplus_{r=0}^4 \Lambda_V^r(\mathcal{L})$ , которую мы назовем вертикальной алгеброй Грассмана.

Заметим, что модуль  $\Lambda_V^4(\mathcal{L})$  одномерен; в качестве его базиса естественно взять форму  $\tau$ , определенную равенством

$$\tau_p = \sqrt{\det(g)_p} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4,$$

где  $(g)_p$  — матрица Грамма метрики  $g$ ,  $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$  — кобазис, дуальный базису  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  пространства  $V_p = \mathcal{L}_p$  ( $p \in \mathcal{L}$ ). Стандартным образом проверяется независимость  $\tau_p$  от выбора базиса. Назовём форму  $\tau$  вертикальной формой объема. Очевидно, она порождает ориентацию пучка  $V = \{\mathcal{L}\}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** *Оператором Ходжа в расслоении  $\mathcal{L}$  называется оператор  $*$  :  $\Lambda_V(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda_V(\mathcal{L})$ , определяемый тождеством*

$$\omega \wedge (*\omega) = (\omega, \omega)\tau; \quad \omega \in \Lambda_V^r(\mathcal{L}), \quad r = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\Lambda_V(\mathcal{L})$ , индуцированное метрикой в  $\mathcal{L}$ .

В частности,  $*$  :  $\Lambda_V^2(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda_V^2(\mathcal{L})$ , причём  $(\omega, \omega) = \frac{1}{4!} \omega_{ij} \tilde{\omega}^{ij}$  и, значит,  $(*\omega)_{ab} = \omega_{cd}$ , где  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$  — чётная перестановка. Отсюда следует, что  $(*)^2 = id$  на  $\Lambda_V^2(\mathcal{L})$  и, значит, имеет собственные значения  $\pm 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** *Вертикальная 2-форма на  $\mathcal{L}$  называется автодуальной (соответственно, антиавтодуальной), если она является собственным вектором оператора Ходжа с собственным значением 1 (соответственно, -1). Если она к тому же параллельна вдоль слоев расслоения (т.е. проектируема), она называется формой на  $M$ .*

Модуль автодуальных (соответственно, антиавтодуальных) форм на  $M$  будем обозначать  $\Lambda^+(M)$  (соответственно,  $\Lambda^-(M)$ ).

**ТЕОРЕМА 1.** *Проектируемая вертикальная 2-форма автодуальна на  $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии  $M$  тогда и только тогда, когда она является фундаментальной формой чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона. При этом ориентация пучка  $\mathcal{L}$ , порождённая внешним квадратом этой формы, согласована с канонической ориентацией этого пучка тогда и только тогда, когда этот  $\alpha$ -кватернион имеет положительную норму.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\omega$  — проектируемая вертикальная 2-форма. Согласно определению,  $\omega \in \Lambda^+(M) \Leftrightarrow *\omega = \omega$ , т.е.  $g_{\beta\gamma}g_{\delta\epsilon}\tau^{\gamma\epsilon\xi\eta}\omega_{\xi\eta} = \omega_{\beta\delta}$ . В ортонормированном базисе

$\{J_0 = id, J_1, J_2, J_3\}$  пространства  $\mathcal{L}_p$  ( $p \in M$ ), в котором  $(g_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , эта фор-

мула означает, что  $\epsilon_{\beta\epsilon\gamma}\omega_{\beta\gamma} = \omega_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$ , где  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \beta & \gamma & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$  — чётная перестановка,  $\beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$ ,  $\epsilon_{\xi} = (J_{\xi}, J_{\xi})$ . Отсюда следует, что

$$\omega \in \Lambda^+(M) \Leftrightarrow (\omega_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x & \alpha y & -z \\ -\alpha x & 0 & -z & y \\ -\alpha y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Поднимая индекс у этой формы, получим эндоморфизм пучка  $\mathcal{L}$ , который в силу сказанного выше может быть отождествлён с чисто мнимым  $\alpha$ -кватернионом  $q = xJ_1 + yJ_2 + zJ_3$ . Очевидно, верно и обратное: в силу (1), фундаментальная форма чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона автодуальна. Заметим, что в силу определения автодуальной формы,  $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge (*\omega) = (\omega, \omega)\tau$ , и, следовательно, ориентация пучка  $\mathcal{L}$ , порождённая формой  $\omega \wedge \omega$ , совпадает с канонической ориентацией этого пучка тогда и только тогда, когда  $\|\omega\|^2 > 0$ , т.е.  $\|q\|^2 > 0$ .

Пусть  $(M, \mathcal{L})$  —  $\alpha$ -кватернионное многообразие. Задание  $\mathcal{AQ}_{\alpha}$ -структуры на  $M$  равносильно заданию  $G$ -структуры на нем со структурной группой  $\mathcal{G} = GL(n, \mathbb{H}_{\alpha}) \times SP_{\alpha}(1)$ , где  $SP_{\alpha}(m)$  — симплектическая группа порядка  $m$  над кольцом  $\mathbb{H}_{\alpha}$ . Элементы этой  $\mathcal{G}$ -структуры, называемые адаптированными реперами, или А-реперами, строятся следующим образом. Пусть  $p \in M$ ,  $(J_0 = id, J_1, J_2, J_3)$  — ортонормированный базис слоя  $\mathcal{L}_p$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис пространства  $T_p(M)$ , рассматриваемого как  $\mathbb{H}_{\alpha}$ -модуль: если  $q = a + bj_1 + cj_2 + dj_3 \in \mathbb{H}_{\alpha}$ ,  $X \in T_p(M)$ , то  $qX = aX + bJ_1(X) + cJ_2(X) + dJ_3(X)$ . Условимся, что греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, а латинские — от 1 до  $n$ . Обозначим  $e_{\beta a} = \tau_{\beta}(e_a)$ . Тогда  $\{p, e_{\beta a}; \beta = 0, \dots, 3; a = 1, \dots, n\}$  есть репер пространства  $T_p(M)$ , называемый адаптированным. Очевидно, в этом репере

$$(J_1) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}; \quad (J_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(J_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & -\alpha I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

и значит,  $(J_k) = (j_k) \otimes I$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $I$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Очевидно, задание тензора  $t$  типа (1,1) на  $M$  определяется заданием набора функций  $\{t_{\gamma i}^{\beta j}\}$  на пространстве  $G$ -структуры, являющихся компонентами этого тензора в соответствующем А-репере. Из (2) следует, что такой тензор является  $\alpha$ -кватернионом  $q = aid + bJ_1 + cJ_2 + dJ_3$

тогда и только тогда, когда  $t_{\gamma i}^{\beta j} = q_{\gamma}^{\beta} \delta_i^j$ , где  $(q_{\gamma}^{\beta}) = \begin{pmatrix} a & \alpha b & \alpha c & -d \\ b & a & \alpha d & -\alpha c \\ c & -\alpha d & a & \alpha b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$  — матрица

$\alpha$ -кватерниона  $q$  в базисе  $\{id, J_1, J_2, J_3\}$ , рассматриваемого как эндоморфизм структурного пучка. Рассмотрим естественное представление алгебры эндоморфизмов касательного пучка

$\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразия  $(M, \mathcal{L})$  в алгебру эндоморфизмов модуля этой алгебры, порождённое левыми сдвигами. Именно, если  $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$ , сопоставим ему эндоморфизм  $\hat{f}$ , действующий по формуле  $\hat{f}(g) = f \circ g$ , где  $g \in \mathcal{T}_1^1(M)$ . Очевидно, отображение  $f \rightarrow \hat{f}$  является представлением в силу ассоциативности алгебры эндоморфизмов. Возникает естественный вопрос: когда элемент  $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$  в этом представлении сохраняет структурный пучок и, следовательно, индуцирует эндоморфизм структурного пучка? Ответ дает следующая

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $M$  —  $\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразие. Эндоморфизм  $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$  индуцирует эндоморфизм структурного пучка тогда и только тогда, когда его компоненты на пространстве  $G$ -структуры имеют вид:

$$t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c. \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть выполняется тождество (3),  $q \in \{\mathcal{L}\}$ . Положим  $\hat{t}(q) = t \circ q$ . Зафиксируем реперы  $(p, J_\alpha; \alpha = 0, 1, 2, 3)$  в  $\mathcal{L}_p$  и соответствующий ему А-репер  $(p, e_{\beta b} \in \mathcal{G})$ . Имеем:  $\hat{t}(J_\beta)(e_b) = t \circ J_\beta(e_b) = t(J_\beta(e_b)) = t(e_{\beta b}) = t_{\beta b}^{\gamma c} e_{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c e_{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} e_{\gamma b} = J_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}(e_b) \forall b = 1, \dots, n$ , откуда  $\hat{t}(J_\beta) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}$ , т.е. эндоморфизм  $\hat{t} : f \rightarrow t \circ f$  пучка  $\mathcal{T}_1^1(M)$  сохраняет структурный пучок и, значит, индуцирует его эндоморфизм. Обратно, пусть  $\hat{t} : f \rightarrow t \circ f$  сохраняет структурный пучок. Тогда  $\hat{t}(J_\beta) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}$  и, значит,  $t(e_{\beta b}) = t(J_\beta(e_b)) = t \circ J_\beta(e_b) = \hat{t}(J_\beta)(e_b) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}(e_b) = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c J_{\gamma}(e_c) = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c e_{\gamma c}$ . Таким образом,  $t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c$ .

Очевидно, задание эндоморфизма  $\hat{t}$  структурного пучка равносильно заданию вертикального тензора  $t_V \in (\mathcal{T}_1^1)_V(\mathcal{L})$  и, таким образом, теорему 2 можно сформулировать так:

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $M$  —  $\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразие. Эндоморфизм  $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$  порождает вертикальный тензор  $t_V \in (\mathcal{T}_1^1)_V(\mathcal{L})$  тогда и только тогда, когда его компоненты на пространстве  $G$ -структуры имеют вид:

$$t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c.$$

В связи с этим эндоморфизм  $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$ , обладающий свойством (3), назовем вертикальным, а его образ  $t_V$ , при указанном соответствии — базисным эндоморфизмом.

Как мы уже видели, всякий  $\alpha$ -кватернион удовлетворяет условию теоремы 3 и, следовательно, является вертикальным эндоморфизмом. Справедливость (3) в этом случае можно показать и несколько иначе. Пусть  $q \in \mathcal{L}$ . Тогда  $q(e_{\beta b}) = q(J_\beta(e_b)) = q^{\gamma} J_{\gamma}(J_\beta(e_b)) = q^{\gamma} (J_{\gamma} \circ J_\beta) e_b = q^{\gamma} c_{\gamma\beta}^{\epsilon} J_{\epsilon}(e_b) = q^{\gamma} c_{\gamma\beta}^{\epsilon} \delta_b^c J_{\epsilon}(e_c) = q_{\beta}^{\epsilon} \delta_b^c e_{\epsilon c}$ , т.е.  $q_{\beta b}^{\epsilon c} = q_{\beta}^{\epsilon} \delta_b^c$ , где  $q_{\beta}^{\epsilon} = c_{\gamma\beta}^{\epsilon} q^{\gamma}$ ,  $c_{\gamma\beta}^{\epsilon}$  — структурный тензор алгебры  $\alpha$ -кватернионов.

Аналогичную терминологию сохраним для других типов тензоров, полученных из вертикальных эндоморфизмов с помощью классических операций тензорной алгебры. В частности, 2-форму  $\omega \in \Lambda^2(M)$  назовём вертикальной, если она при операции поднятия индекса (в случае фиксации псевдоримановой метрики на  $M$ ) соответствует вертикальному эндоморфизму. Очевидно, совокупность всех вертикальных 2-форм на  $M$  образуют подмодуль  $\Lambda_V^2(M) \subset \Lambda^2(M)$ , который мы назовём модулем вертикальных 2-форм на  $M$ , а его образ при композиции операций поднятия индекса, естественного представления и опускания индекса с помощью метрики  $g$  — модулем базисных тензоров. Подмодуль кососимметрических базисных тензоров назовём модулем базисных 2-форм и обозначим  $\Lambda_B^2(\mathcal{L})$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** ([4])  $\mathcal{AQ}_\alpha$ -структура  $\mathcal{L}$  на  $M$  называется эрмитовой, или  $\mathcal{HAQ}_\alpha$ -структурой, если на  $M$  фиксирована псевдориманова метрика  $G = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , такая, что  $\forall J \in \{\mathcal{I}\} \Rightarrow \langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0$ ;  $X, Y \in \mathbb{X}(M)$ .

В этом случае для любого чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона  $q$  тензор  $\Omega(X, Y) = \langle X, q(Y) \rangle$  является вертикальной 2-формой, которую мы назовем келеровой формой  $\alpha$ -кватерниона  $q$ .

Келеровы 2-формы на  $M$  образуют подмодуль  $\mathcal{K}(M) \subset \Lambda_V^2(M)$ , который мы назовём келеровым модулем. Очевидно, образ келерова модуля в естественном представлении есть модуль  $\Lambda^+(M)$  автодуальных форм и, таким образом,  $\Lambda^+(M) \subset \Lambda_V^2(M)$ .

Задание  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -структуры на многообразии  $M$  равносильно заданию  $\mathcal{G} = Sp_\alpha(n) \cdot Sp_\alpha(1)$ -структуры на  $M$ , элементами которой служат А-реперы, векторы  $e_1, \dots, e_n$  которых образуют ортонормированную систему в кватернионно-эрмитовой метрике

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + i \langle X, IY \rangle + j \langle X, JY \rangle + k \langle X, KY \rangle,$$

где  $id, I, J, K$  — ортонормированный базис слоя  $\mathcal{L}_p$ , где  $p \in M$ .

Пусть  $(M, \mathcal{L}, G)$  —  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразие,  $R$  — тензор Римана-Кристоффеля метрики  $G$ . Этот тензор можно рассматривать как эндоморфизм модуля 2-форм на  $M$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.**  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -структуру  $(\mathcal{L}, G)$  на многообразии  $M$  назовём структурой вертикального типа, если эндоморфизм  $R$  Римана-Кристоффеля, порождённый метрикой  $G$ , сохраняет модуль вертикальных 2-форм на  $M$ .

**ПРИМЕР 1.** Кватернионно-келерово многообразие определяется как  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_1$ -многообразие, структурный пучок которого инвариантен относительно параллельных переносов в римановой связности. Тем более этим свойством обладают модуль вертикальных эндоморфизмов и модуль вертикальных 2-форм. Значит, всякое кватернионно-келерово многообразие является  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразием вертикального типа.

Пусть  $M$  —  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразие вертикального типа. Тогда эндоморфизм  $R$  Римана-Кристоффеля индуцирует эндоморфизм  $r$  модуля базисных тензоров. Найдём матрицу этого эндоморфизма как систему функций  $\{r_{\beta\gamma\delta\epsilon}\}$  на пространстве расслоения  $B\mathcal{L}$ . Пусть  $\{G_{\beta b\gamma c}\}$  и  $\{R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h}\}$  — компоненты тензоров  $G$  и  $R$  на пространстве  $G$ -структуры соответственно,  $t$  — вертикальный кососимметрический эндоморфизм на  $M$ ,  $t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c$ . Тогда

$$R(t)_{\beta b\gamma c} = R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} G^{\epsilon h\theta f} t_{\theta f}^{\delta d} = R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} G^{\epsilon h\theta d} t_{\theta}^{\delta}$$

и значит,

$$R(t)_{\gamma c}^{\chi r} = G^{\chi r\beta b} G^{\epsilon h\theta d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta}. \quad (4)$$

Учитывая, что  $R(t)$  — тоже вертикальный тензор на  $M$ , имеем:  $R(t)_{\gamma c}^{\chi r} = r(t)_{\gamma}^{\chi} \delta_c^r$ . Поэтому, свёртывая (4) по индексам  $r$  и  $c$ , получим:  $r(t)_{\gamma}^{\chi} = \frac{1}{n} G^{\chi r\beta b} G^{\epsilon h\theta d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta}$ . Последнее равенство можно переписать в виде:

$$r(t)_{\eta\gamma} = \frac{1}{n} g_{\eta\theta} g_{\chi\kappa} G^{\theta c\beta b} G^{\epsilon h\kappa d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta\chi}$$

и значит,

$$r_{\eta\gamma\delta\chi} = \frac{1}{n} g_{\eta\theta} g_{\chi\kappa} G^{\theta c\beta b} G^{\epsilon h\kappa d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h}, \quad (5)$$

что и даёт нужный результат. Кроме того, проведя в (5) следующие переобозначения индексов:  $\theta \leftrightarrow \kappa$ ,  $\beta b \leftrightarrow \epsilon h$ ,  $c \leftrightarrow d$ , и используя классические свойства тензора Римана-Кристоффеля, получаем, что матрица компонент эндоморфизма  $r$  обладает следующим свойством симметрии:

$$r_{\eta\gamma\delta\chi} = r_{\chi\delta\gamma\eta}, \quad (6)$$

откуда немедленно следует

**ТЕОРЕМА 4.** *Эндоморфизм Римана-Кристоффеля  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа индуцирует симметричный эндоморфизм модуля базисных 2-форм этого многообразия.*

Возникает естественный вопрос — когда эндоморфизм  $r$  сохраняет также модуль автодуальных форм многообразия? Мы уже знаем, что этот модуль в естественном соответствии отвечает келерову модулю многообразия, и, следовательно, вопрос можно переформулировать так: когда эндоморфизм Римана-Кристоффеля сохраняет келеров модуль многообразия?

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** *Структурный пучок  $\mathcal{L}$   $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа назовем эйнштейновским, если на пространстве расслоения  $B\mathcal{L}$*

$$g^{\beta b} r_{\beta\gamma b\epsilon} = c g_{\gamma\epsilon}; \quad c \in C^\infty(\mathcal{L}). \quad (7)$$

Ясно, что если  $\dim M = 4$ , свойство эйнштейновости структурного пучка равносильно эйнштейновости многообразия  $M$ .

**ТЕОРЕМА 5.** *Эндоморфизм Римана-Кристоффеля  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение теоремы, очевидно, равносильно следующему: эндоморфизм  $r$  сохраняет модуль  $\Lambda^+(M)$  автодуальных форм  $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия  $M$  вертикального типа тогда и только тогда, когда на  $M$  справедливы соотношения (7). Пусть  $\omega \in \Lambda^+(M)$ . На пространстве  $B(\mathcal{L})$  эта 2-форма характеризуется матрицей функций

$$(\omega_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & -z & -\alpha y \\ y & z & 0 & \alpha x \\ z & \alpha y & -\alpha x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Следовательно,  $r(\Lambda^+(M)) \subset \Lambda^+(M) \Leftrightarrow \forall \omega \in \Lambda^+(M) \Rightarrow r(?) \in \Lambda^+(M)$ , т.е.

$$\begin{aligned} 1) & (\alpha r_{01\beta\gamma} + r_{23\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0; \\ 2) & (\alpha r_{02\beta\gamma} - r_{13\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0; \\ 3) & (\alpha r_{03\beta\gamma} - r_{12\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее,  $\omega^{\beta\gamma} = g^{\beta\delta} g^{\gamma\kappa} \omega_{\delta\kappa} = \epsilon_{\beta\epsilon} \epsilon_{\gamma\eta} \omega_{\beta\gamma}$  и с учетом (8),

$$(\omega^{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x & \alpha y & -z \\ -\alpha x & 0 & -z & y \\ -\alpha y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, соотношения (9) примут вид:

$$\begin{aligned} 1) & (\alpha r_{0101} + r_{2301}) \alpha x + (\alpha r_{0102} + r_{2302}) \alpha y - (\alpha r_{0103} + r_{2303}) z - \\ & - (\alpha r_{0112} + r_{2312}) z + (\alpha r_{0113} + r_{2313}) y - (\alpha r_{0123} + r_{2323}) x = 0. \end{aligned}$$

Ввиду того, что это соотношение должно выполняться тождественно относительно  $x, y, z$ , получим

$$\begin{cases} r_{0101} - r_{2323} = 0; \\ r_{0102} + \alpha r_{2302} + \alpha r_{0113} + r_{2313} = 0; \\ -\alpha r_{0103} - r_{2303} - \alpha r_{0112} - r_{2312} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$2) (\alpha r_{0201} - r_{1301})\alpha x + (\alpha r_{0202} - r_{2302})\alpha y - (\alpha r_{0203} - r_{1303})z - \\ - (\alpha r_{0212} - r_{1312})z + (\alpha r_{0213} - r_{1313})y - (\alpha r_{0223} - r_{1323})x = 0;$$

откуда

$$\begin{cases} r_{0201} - \alpha r_{1301} - \alpha r_{0223} + r_{1323} = 0; \\ r_{0202} - r_{1313} = 0; \\ -\alpha r_{0203} + r_{1303} - \alpha r_{0212} + r_{1312} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Далее

$$3) (r_{0301} - r_{1201})\alpha x + (\alpha r_{0302} - r_{1202})\alpha y - (r_{0303} - r_{1203})z - \\ - (r_{0312} - r_{1212})z + (r_{0313} - r_{1213})y - (r_{0323} - r_{1323})x = 0;$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha r_{0301} - \alpha r_{1201} - r_{0323} + r_{1223} = 0; \\ \alpha r_{0302} - \alpha r_{1202} + r_{0313} - r_{1213} = 0; \\ -r_{0303} + r_{1212} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Сравнивая (10<sub>2</sub>) и (11<sub>1</sub>), получим:

$$r_{0102} + r_{1323} = 0; \quad r_{2302} + r_{0113} = 0. \quad (13)$$

Аналогично, сравнивая (10<sub>3</sub>) и (12<sub>1</sub>), (11<sub>3</sub>) и (12<sub>2</sub>), получим, соответственно:

$$\alpha r_{0112} + r_{0323} = 0; \quad \alpha r_{0103} + r_{1223} = 0; \quad (14)$$

$$\alpha r_{0212} - r_{0313} = 0; \quad \alpha r_{0203} - r_{1213} = 0. \quad (15)$$

Равенства (13)-(15) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} r_{0102} + r_{1323} &= 0; \quad r_{1013} + r_{2023} = 0; \\ -\alpha r_{1012} + r_{3032} &= 0; \quad r_{0103} - \alpha r_{2123} = 0; \\ \alpha r_{2021} - r_{3031} &= 0; \quad r_{0203} - \alpha r_{1213} = 0; \end{aligned}$$

или  $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = 0$ , т.е.  $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = cg_{\gamma\epsilon}$  ( $\gamma \neq \epsilon$ ).

Утверждается, что система оставшихся равенств

$$r_{0101} = r_{2323}; \quad r_{0202} = r_{1313}; \quad r_{0303} = r_{1212} \quad (16)$$

равносильна соотношениям

$$g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\gamma} = cg_{\gamma\gamma},$$

т.е.

$$g^{\beta\delta}r_{\beta 0\delta 0} = -\alpha g^{\beta\delta}r_{\beta 1\delta 1} = -\alpha g^{\beta\delta}r_{\beta 2\delta 2} = g^{\beta\delta}r_{\beta 3\delta 3},$$

т.е.

$$\begin{aligned} -\alpha r_{1010} - \alpha r_{2020} + r_{3030} &= -\alpha r_{0101} + r_{2121} - \alpha r_{3131} = \\ &= -\alpha r_{0202} + r_{1212} - \alpha r_{3232} = r_{0303} - \alpha r_{1313} - \alpha r_{2323}. \end{aligned} \quad (17)$$

В самом деле, сравнивая первое и четвертое выражения в (17), получим:

$$r_{1010} + r_{2020} = r_{1313} + r_{2323}.$$

С другой стороны, сравнивая второе и третье выражения в (17), находим, что

$$r_{1010} - r_{2020} = -r_{1313} + r_{2323},$$

откуда

$$r_{1010} = r_{2323}; \quad r_{2020} = r_{1313}.$$

С учетом этого, сравнивая первое и второе выражения в (17), находим, что

$$-\alpha r_{2020} + r_{3030} = r_{2121} - \alpha r_{2020},$$

т.е.  $r_{3030} = r_{1212}$ .

Очевидно, что справедливо и обратное. Объединяя эти результаты, получим, что  $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = cg_{\gamma\epsilon}$ .

Обратно, из сказанного выше следует, что выполнение этих условий равносильно (13)-(16), которые, как мы видели, равносильны (9) в силу (8), т.е. инвариантности модуля  $\Lambda^+(M)$  относительно эндоморфизма  $r$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля.*

## 4. Заключение

В работе доказано, что эндоморфизм Римана-Кристоффеля эрмитова почти  $\alpha$ -кватернионного многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским. А значит, четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля.

Этот результат показывает, что доказанная нами теорема 5 является широким обобщением теоремы Атьи-Хитчина-Сингера, дающей критерий эйнштейновости 4-мерных римановых многообразий в терминах автодуальных форм [1], поскольку само обобщает эту теорему на случай нейтральной псевдоримановой метрики.

С другой стороны, теорема 5 тесно связана с известным результатом Берже [2], который уточняет её в частном случае кватернионно-келеровых многообразий: если многообразие  $M$  кватернионно-келерово, то его риманова связность (а не только оператор Римана-Кристоффеля) сохраняет келеров модуль многообразия. В этом случае  $M$  является многообразием Эйнштейна.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry // Proc. Roy. London. 1978. Vol. 362, No. 1711. P. 425-461.
2. Berger M. Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes Riemanniennes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. Vol. 262. P. 316-318.
3. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 431 с.
4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Том 2. 703 с.

**REFERENCES**

1. Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. & Singer, M. 1978, "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry", Proc. Roy. Soc. London, vol. 362, no. 1711. pp. 425-461.
2. Berger, M. 1996, "Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes Riemanniennes", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 262, pp. 316-318.
3. Zhevlakov, K. A., Slinko, A. M., Shestakov, I. P., Shirshov, A. I. 1978. "Rings that are nearly associative", Moscow, Nauka, 431 p.
4. Besse, A. L. 1987, "Einstein Manifolds", Springer, vol. 2, 703 p.

Получено 23.08.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-45-52

Целочисленные многочлены и теорема Минковского  
о линейных формах

В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова

**Берник Василий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

*e-mail: bernik.vasili@mail.ru*

**Корлюкова Ирина Александровна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Гродненский государственный университет (г. Гродно).

*e-mail: korlyukova@mail.ru*

**Кудин Алексей Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

*e-mail: knxd@yandex.ru*

**Титова Анастасия Владимировна** — аспирант, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

*e-mail: anastasia.titova111@gmail.com*

## Аннотация

В статье теорема Минковского о линейных формах [1] применяется к многочленам с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

степени  $\deg P = n$  и высоты  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ . Тогда для любого  $x \in [0, 1)$  и натурального числа  $Q > 1$  получим неравенство

$$|P(x)| < c_1(n) Q^{-n}, \quad (2)$$

для некоторого  $P(x)$ ,  $H(P) \leq Q$ . Неравенство (2) означает, что весь интервал  $[0, 1)$  может быть покрыт интервалами  $I_i, i = 1, 2, \dots$  во всех точках которых верно неравенство (2). Дан ответ на вопрос о величине интервалов  $I_i$ . Основной результат статьи заключается в доказательстве следующего утверждения.

Для любого  $v$ ,  $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$ , найдется интервал  $J_k, k = 1, \dots, K$ , такой что для всех  $x \in J_k$  выполняется неравенство (2) и при этом

$$c_2 Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3 Q^{-n-1+v}.$$

**Ключевые слова:** диофантовы приближения, мера Лебега, теорема Минковского.

**Библиография:** 22 названия.

## Для цитирования:

В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова. Целочисленные многочлены и теорема Минковского о линейных формах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 45–52.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-45-52

## Integer polynomials and Minkowski's theorem on linear forms

V. I. Bernik, I. A. Korlyukova, A. S. Kudin, A. V. Titova

**Bernik Vasilii Ivanovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

*e-mail: bernik.vasili@mail.ru*

**Korlyukova Irina Alexandrovna** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Grodno State University (Grodno).

*e-mail: korlyukova@mail.ru*

**Kudin Alexey Sergeevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

*e-mail: knxd@yandex.ru*

**Titova Anastasia Vladimirovna** — postgraduate student, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

*e-mail: anastasia.titova111@gmail.com*

## Abstract

In paper Minkowski's theorem on linear forms [1] is applied to polynomials with integer coefficients

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (3)$$

with degree  $\deg P = n$  and height  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ . Then, for any  $x \in [0, 1)$  and a natural number  $Q > 1$ , we obtain the inequality

$$|P(x)| < c_1(n) Q^{-n} \quad (4)$$

for some  $P(x)$ ,  $H(P) \leq Q$ . Inequality (4) means that the entire interval  $[0, 1)$  can be covered by intervals  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  at all points of which inequality (4) is true. An answer is given to the question about the size of the  $I_i$  intervals. The main result of this paper is proof of the following statement.

For any  $v$ ,  $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$ , there is an interval  $J_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , such that for all  $x \in J_k$ , the inequality (4) holds and, moreover,

$$c_2 Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3 Q^{-n-1+v}.$$

**Keywords:** diophantine approximation, Lebesgue measure, Minkowski's theorem.

**Bibliography:** 22 titles.

## For citation:

V. I. Bernik, I. A. Korlyukova, A. S. Kudin, A. V. Titova, 2022, "Integer polynomials and Minkowski's theorem on linear forms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 45–52.

## 1. Введение

Пусть  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  — целочисленный полином степени  $\deg P = n$  и высоты  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ , а  $I \subset \mathbb{R}$  — некоторый интервал. Далее в статье  $I = [0, 1)$ . Из теоремы Минковского о линейных формах [1] нетрудно получить, что для любого целого  $Q \geq 1$  существует  $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ , где

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\} \quad (5)$$

такой, что при любом  $x \in I$  верно неравенство (2).

Решаемые в статье задачи возникли в классификации действительных и комплексных чисел К. Малера [10]. Обозначим  $\psi(x)$  монотонно убывающую функцию  $x \in \mathbb{R}_+$  и через  $L(\psi)$  — множество  $x \in I$ , для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \psi(H) \quad (6)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах  $P(x)$ . Малер [10] доказал, что при  $\psi_1(x) = x^{-4-\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ , его гипотеза верна. Последовательные улучшения результата Малера были получены Й. Кубилюсом [11], В. Шмидтом [12], Б. Фолькманом [14], А. Бейкером [15]. Полное доказательство гипотезы Малера получено В.Г. Спринджуким [13, 17]. Однако при  $n = 1$  еще ранее уже существовала теорема Хинчина [18], в которой функция  $\psi(x)$  была не степенной, а произвольной. В конце прошлого века в работах [19] и [5] было доказано, что

$$\mu L_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейших работах утверждение (6) было обобщено [20] с многочленов на произвольные невырожденные функции [20, 21, 22], а также для оценок количества многочленов с заданным распределением корней [6], а также с заданными дискриминантами и результатами [7, 9]. При  $n = 1$  неравенство (2) — это теорема Дирихле. Значение  $c_1 = c_1(n)$  нетрудно посчитать и для любого интервала  $I$ . Обозначим  $\sigma(P)$  — множество  $x \in [0, 1)$ , для которых выполняется (2) для фиксированного  $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$  и  $\mu\sigma(P)$  — меру Лебега  $\sigma(P)$ . Неравенство (2) можно интерпретировать следующим образом:

$$[0, 1) \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P) \quad \text{и} \quad \mu \left( \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P) \right) = 1. \quad (8)$$

Ясно, что для каждого  $P(x)$  множество  $\sigma(P)$  есть объединение не более  $n$  интервалов с центрами в одном из корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  полинома  $P(x)$ . В статье мы установим следующие теоремы, которые справедливы для многочленов из (5). Величины  $c_2, c_3, \dots$  зависят от  $n$  и не зависят от  $H$  и  $Q$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для любого  $v$ ,  $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$ , найдется интервал  $J_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , такой что для всех  $x \in J_k$  выполняется неравенство (6) и при этом

$$c_2 Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3 Q^{-n-1+v}. \quad (9)$$

**ТЕОРЕМА 2.** Верно неравенство  $K > c_4 Q^{-n-1}$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Существуют интервалы длины  $c_5 Q^{-1}$ , для всех точек которых выполняется неравенство (2).

## 2. Основной текст статьи

Доказательство теорем 1 - 3 проводится методами метрической теории диофантовых приближений.

**ЛЕММА 1.** [2] Пусть  $\alpha_1$  — ближайший к точке  $x$  корень полинома  $P(x)$ . Упорядочим корни  $P(x)$  следующим образом:  $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$ . Тогда

$$|x - \alpha_1| < n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \quad (10)$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (11)$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} \min_{2 \leq j \leq n} (|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_1 - \alpha_j|)^{\frac{1}{j}}. \quad (12)$$

Неравенства (10)-(12) точные. Это доказано для  $j \leq 2$  в монографии Спринджук [2], а для  $3 \leq j \leq n$  в недавних работах [3, 4].

**ЛЕММА 2.** [22] Пусть  $v_2 < v_1 \leq n$ ,  $v_2 < \frac{n}{2} - 1$  и  $c_6 Q^{-v_2} < |P'(x)|$ ,  $|P(x)| < c_7 Q^{-v_1}$ . Тогда при достаточно большом  $Q$  выполняются неравенства

$$\frac{1}{2}|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)|. \quad (13)$$

**ЛЕММА 3.** [6, 7] Для  $\delta_0 < c_8$  обозначим через  $B \subset [0, 1)$  множество  $x$ , для которых в неприводимых полиномах  $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$  выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P(x)| < c_8 Q^{-v_0}, \\ \delta_0 Q^{-v_1} < |P'(x)| < c_8 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q < |P''(x)| < c_8 Q. \end{cases} \quad (14)$$

Также пусть  $v_0 + v_1 = n - 1$ ,  $v_0 > 2v_1 + 1$ . Тогда существуют такие  $\delta_0 = \delta_0(n)$  и  $c_8 = c_8(n)$ , что

$$\mu B > \frac{3}{4}.$$

Лемма 3 была доказана для всех  $n$  производных в работах Бересневича [6, 7, 8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из леммы 3 выделим подсистему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < c_8 Q^{-v_0}, \\ |P'(x)| > \delta_0 Q^{-v_1}, \\ v_0 + v_1 = n - 1, v_0 \geq 2v_1 + 1. \end{cases} \quad (15)$$

Из (15) и леммы 1 получаем  $|x - \alpha_1| < 2^n c_8 \delta_0^{-1} Q^{-v_0+v_1}$ . Возьмем точку  $x_1 \in [0, 1) \cap B_1$ . Не умаляя общности, можно считать, что  $P(x_1) > 0$ ,  $P'(x_1) < -\delta_0 Q^{-v_1}$ . Остальные случаи в системе неравенств (14) рассматриваются аналогично. Тогда многочлен  $P(x)$  в окрестности точки  $x_1$  удовлетворяет лемме 3. В неравенстве  $v_0 > 2v_1 + 1$  будем считать

$$\epsilon = v_0 - 2v_1 - 1, \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}. \quad (16)$$

Возьмем точку  $x_{11} = x_1 + 2\delta_0^{-1} c_8 Q^{-v_0+v_1}$ . Из разложения  $P(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_1$  имеем

$$P(x_{11}) = P(x_1) + P'(x_1)(x_{11} - x_1) + \frac{1}{2}P''(x_1)(x_{11} - x_1)^2 + \dots \quad (17)$$

Оценим слагаемые в (17) при достаточно большом  $Q > Q_0$

$$0 < P(x_1) < c_8 Q^{-v_0},$$

$$P'(x_1) < 2c_8 Q^{-v_0},$$

$$\left| \frac{1}{2} P''(x_1) (x_1 - x_1)^2 \right| < 4\delta^{-2} c_8^3 Q^{-2v_0+2v_1+1}.$$

За счет степени  $k \geq 3$  в  $(x_{11} - x_1)^k$  остальные члены разложения в (17) по модулю будут меньше  $\frac{1}{n} Q^{-v_0}$  и поэтому  $P(x_{11}) < 0$ , откуда на отрезке  $[x_1, x_{11}]$  многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами имеет корень. Этот корень - алгебраическое число, которое обозначим  $\alpha_{11}$ . В интервале

$$I_1 = |x - \alpha_{11}| < 0,5c_8^{-1} c_9 Q^{-n+v_1}.$$

верно неравенство  $|P(x)| < c_9 Q^n$  и поэтому многочлен  $P(x)$  является многочленом Дирихле. Длина интервала  $I_1$  может быть оценена

$$c_{10} Q^{-n-1+v} < \mu I_1 < c_{11} Q^{-n-1+v}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рациональное число  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена первой степени  $p = qx - p = 0$  высота  $q$ . Число  $\frac{p}{q}$  не является корнем многочлена  $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$  с корнями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  степени  $n \geq 2$  и старшим коэффициентом  $a_n$ . Поэтому результат  $R(P_1, P) \neq 0$ . Поэтому если

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha_1 \right| < c_{12} Q^{-1},$$

то

$$1 \leq |R(P_1, P)| \leq q^n a_n \left| \frac{p}{q} - \alpha_1 \right| \prod_{j=2}^n \left| \frac{p}{q} - \alpha_j \right| \leq q Q c_{12} Q^{-1} \prod_{j=2}^n \left| \frac{p}{q} - \alpha_j \right| < c_{12} c_{13} q, \quad (19)$$

где  $c_{13} = \prod_{j=2}^n \left| \frac{p}{q} - \alpha_j \right|$  и  $c_{13} \leq 3^{n-1}$  для всех  $P \in \mathcal{P}_n(Q)$  с условием  $a_n > \frac{Q}{2}$  [17]. Поэтому правая часть неравенства (19) не превосходит  $c_{12} q 3^{n-1}$  и при  $c_{12} < q^{-1} 3^{-n+1}$  неравенство (19) противоречиво.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и неравенства (9).

### 3. Заключение

В теоремах 1 и 3 указаны значения, которые могут принимать длины интервалов  $I$  в теореме Дирихле. Согласно полученным теоремам

$$cQ^{-n-1} < \mu I < cQ^{-1}.$$

Возникает гипотеза, что  $\mu I$  может принимать любые значения вида  $cQ^{-s}$ ,  $1 \leq s \leq n+1$ . Методы теории диофантовых приближений позволяют доказать эту гипотезу.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений // Москва: Изд-во Иностр. Литер. 1961. 213 с.
2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Мн.: Наука и Техника. 1967. 184 с.
3. Кемеш О. Н., Пантелеева Ж. И., Титова А. В. Точные оценки меры малых значений целочисленных полиномов // «Веснік» Могилевского государственного университета им. А. А. Кулешова. 2021. Т. 57, №1. С. 81–86.
4. Кудин А. С., Пантелеева Ж. И., Титова А. В. Неулучшаемые оценки меры Хаара множеств  $p$ -адических чисел с малыми значениями целочисленных полиномов // «Веснік» Могилевского государственного университета им. А. А. Кулешова. (в печати)
5. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 90, №2. P. 97–112.
6. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, №5. P. 1165–1179.
7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412.
8. Beresnevich, V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 175, №1. P. 187–235.
9. Берник В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений. Acta Arithmetica. 1983;42:219–253. Bernik V. I. Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation // Acta Arithmetica. 1983. Vol. 42, №3. P. 219–253.
10. Mahler, K. Über das Mass der Menge aller  $S$ -Zahlen // Math. Ann. 1932. Vol. 106. P. 131–139.
11. Кубилюс Й. П. О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // ДАН СССР. 1949. Т. 67. стр. 783–786.
12. Schmidt WM. Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen // Monatshefte für Mathematik. 1964. Vol. 68, №2. P. 154–166.
13. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества  $S$ -чисел // Изв. АН СССР. 1965. Т. 29, №2. С. 379–436.
14. Volkmann, B. Ein metrischer Beitrag über Mahlerschen  $S$ -Zahlen, I // J. reine und angew. Math. 1960. Vol. 203, №3–4. P. 154–156.
15. Baker, A. On a Theorem of Sprindzuk // Proc. R. Soc. Lond. A. 1966. Vol. 292, №1428. P. 92–104.
16. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. // Минск: Наука и техника. 1967. 181 с.
17. Khintchine, A. Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen. // Mathematische Annalen. 1924. Vol. 92, №1–2. P. 115–125.

18. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // *Acta Arithmetica*. 1989–1990. Vol. 53, №1. P. 17–28.
19. Beresnevich V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds. // *Acta Mathematica Hungarica*. 2002. Vol. 94, №1–2. P. 99 –130.
20. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // *International Mathematics Research Notices*. 2001. Vol. 9. P. 453– 486.
21. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds. // *Moscow Mathematical Journal*. 2002. Vol. 2, № 2. P. 203–225.
22. Bernik V, Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // *Izvestiya: Mathematics*. 2015. Vol. 79, № 1. P. 18–39.

## REFERENCES

1. Cassels, J. V. S. 1961, “Introduction to the theory of Diophantine approximations“ *Moscow: Izd-vo Inostr. Liter* 213 p.
2. Sprindzhuk, V. G. 1967, “Mahler’s problem in metric number theory“ *Minsk: Science and Technology* 184 p.
3. Kemesheva O. N., Panteleeva Zh. I., Titova A. V. 2021, “Sharp estimates for the measure of small values of integer polynomials“ *"Vestnik" of the Mogilev State University A.A. Kuleshova* vol. 57, no. 1. pp. 81–86.
4. Kudin A. S., Panteleeva Zh. I., Titova A. V. (in press), “Unimprovable estimates for the Haar measure of sets of p-adic numbers with small values of integer polynomials“ *"Vestnik" of the Mogilev State University. A.A. Kuleshova*
5. Beresnevich V. 1999, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers“ *Acta Arithmetica*, vol. 90, no. 2, pp. 97–112.
6. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2010, “The distribution of close conjugate algebraic numbers“ *Compositio Mathematica*, vol. 146, no. 5, pp. 1165–1179.
7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2016, “Integral polynomials with small discriminants and resultants“ *Advances in Mathematics*, vol. 298, pp. 393–412.
8. Beresnevich V. 2012, “Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation“ *Annals of Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 187–235.
9. Bernik V. I. 1983, “Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation“ *Acta Arithmetica*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.
10. Mahler K. 1932, “Über das Mass der Menge aller  $S$ -Zahlen“ *Math. Ann.*, vol. 106, pp. 131–139.
11. Kubilius Y. P. 1949, “On the application of the method acad. Vinogradov to the solution of one problem of metric number theory“ *DAN USSR*, vol. 67, pp. 783–786.
12. Schmidt WM. 1964, “Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen“ *Monatshefte für Mathematik*, vol. 68, no. 2, pp. 154–166.

13. Sprindzhuk V. G. 1965, “Proof of Mahler’s conjecture on the measure of the set of S-numbers“ *Izv. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 29, no. 2, pp. 379–436.
14. Volkmann, B. 1960, “Ein metrischer Beitrag über Mahlerschen  $S$ –Zahlen, I“ *J. reine und angew. Math.*, vol. 203, no. 3–4, pp. 154–156.
15. Baker, A. 1966, On a Theorem of Sprindzuk *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 292, no. 1428, pp. 92–104.
16. Sprindzhuk V. G. 1967, “Mahler’s problem in metric number theory“ *Minsk: Science and technology*, 181 p.
17. Khintchine, A. 1924, “Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen“ *Mathematische Annalen*, vol. 92, no. 1–2, pp. 115–125.
18. Bernik V. I. 1989–1990, “On the Exact Order of Approximation of Zero by Values of Integer Polynomials“ *Acta Arithmetica*, vol. 53, no. 1, pp. 17–28.
19. Beresnevich V. 2002, “A Groshev type theorem for convergence on manifolds“ *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 94, no. 1–2, pp. 99 –130.
20. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. 2001, “Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions“ *International Mathematics Research Notices*, vol. 9, pp. 453– 486.
21. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. 2002, “Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds“ *Moscow Mathematical Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 203–225.
22. Bernik V., Götze F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“ *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1. pp. 18–39.

Получено 7.08.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-53-82

**Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений  
Лиувилля интегрируемых систем<sup>1</sup>**

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало

**Ведюшкина Виктория Викторовна** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: arinir@yandex.ru*

**Кибкало Владислав Александрович** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

*e-mail: slava.kibkalo@gmail.com*

**Аннотация**

В статье изучается топология интегрируемых билиардных книжек, то есть систем на клеточных комплексах, склеенных из столов плоских софокусных билиардов. Получены существенные продвижения по доказательству локальной версии гипотезы Фоменко о билиадах. В частности, билиардами удалось реализовать важный класс подграфов в графе-инварианте Фоменко–Цишанга, классифицирующем интегрируемые системы с точки зрения топологии их слоений Лиувилля. Затем выполнена комбинаторная классификация билиардных книжек малой сложности (имеющих малое число одномерных клеток), склеенных из плоских областей, содержащие фокусы семейства квадрик. Для этих систем ведется вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга.

*Ключевые слова:* интегрируемые билиарды, инвариант Фоменко–Цишанга, перестановка.

*Библиография:* 37 названий.

**Для цитирования:**

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало. Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 53–82.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-71-00155 в МГУ имени М.В.Ломоносова).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-53-82

**Billiard books of low complexity and realization of Liouville foliations of integrable systems**

V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo

**Vedyushkina Victoria Viktorovna** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: arinir@yandex.ru*

**Kibkalo Vladislav Alexandrovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: slava.kibkalo@gmail.com*

**Abstract**

In paper we study the topology of integrable billiard books, (i.e. systems on CW-complexes glued from flat domains of confocal billiards. Significant progress has been made in proving the local version of the billiard Fomenko conjecture. In particular, billiards were used to realize an important class of subgraphs of the Fomenko - Zieschang graph invariants (that classify Liouville foliations of integrable systems in topological sense). Then we classify in combinatorial sense billiard books of low complexity (with a small number of one-dimensional cells), glued from flat domains that contain foci of the family of quadrics. Calculation of Fomenko–Zieschang invariants for these systems is in progress.

*Keywords:* integrable billiards, Fomenko-Zieschang invariant, permutation.

*Bibliography:* 37 titles.

**For citation:**

V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, 2022, “Billiard books of low complexity and realization of Liouville foliations of integrable systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 53–82.

**1. Введение**

Системы математических билиардов — динамических систем с ударами — привлекают внимание исследователей из самых разных областей математики и смежных наук. Теории билиардов посвящены, например, монографии Д.Биркгофа [1], С.Л.Табачникова [2], В.Драговича и М.Раднович [3], В.В.Козлова и Д.В.Трещева [4]. Важное занимает при этом изучение интегрируемого случая.

Совсем недавно были доказаны различные формулировки гипотезы Биркгофа — критерия интегрируемости билиардов из тех или иных классов, см. [5, 6]. Так плоский компактный односвязный стол с кусочно-гладкой границей (исключая столы-многоугольники) должен быть ограничен дугами квадрик с общими фокусами (с углами  $\pi/2$  в точках излома).

Открытые В.В.Ведюшкиной *билиардные книжки* [7] — кусочно-плоские клеточные комплексы с перестановками, склеенные из плоских софокусных столов — наследуют интегрируемость плоских софокусных билиардов, но принципиально расширяют их класс. Наличие на каждой 1-клетке циклической перестановки и правило коммутирования перестановок при каждой 0-клетке позволяют задать непрерывное движение шара по столу-комплексу.

Используя новые классы бильярдных, удалось доказать ряд положений фундаментальной гипотезы А.Т.Фоменко о бильярдах [8]. Согласно последней, с точки зрения топологии слоений Лиувилля, интегрируемых бильярдных “не меньше”, чем интегрируемых систем (с некоторыми условиями). Как известно из теории топологической классификации интегрируемых систем [10, 11, 12], разработанной А.Т.Фоменко вместе с соавторами и учениками, классифицирующим инвариантом Фоменко–Цишанга этой эквивалентности является граф со следующим оснащением. При вершинах указаны типы особенностей, на ребрах — пары меток  $r = \mathbb{Q} \bmod 1 \cup \{\infty\}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , а метка  $n \in \mathbb{Z}$  стоит на связных подграфах (состоящих из седловых особенностей), прообраз которых образует единое многообразие Зейферта с нестягиваемым в  $Q^3$  слоем.

Любая невырожденная особенность [7] и база слоения Лиувилля с такими вершинами-атомами [13] были реализованы В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой как инварианты слоения Лиувилля подходящей, причем задаваемой алгоритмически, бильярдной книжки. Естественным вопросом стала реализация произвольных значений числовых меток (да, они реализуются [14, 15]) и их локальных комбинаций, в том числе, на конкретных подграфах инварианта. Эти вопросы стали предметом “локальной” версии гипотезы А.Т.Фоменко [16], формулировку которой приведем в разделе 2. Иными словами, ее вопрос в том реализуется ли любое слоение в окрестности прообраза ребра или подграфа-семьи (прообраз которого — многообразие Зейферта с нестягиваемым слоем)? В настоящей работе получены существенные продвижения, например, полный ответ для случая многообразий Зейферта прямого произведения и любой метки  $n$  на нем.

Другой обсуждаемой задачей является классификация бильярдных книжек и вычисление их инвариантов (прежде всего, содержащих фокусы квадрик). Классификация наборов коммутирующих перестановок выполнено для важного класса бильярдных книжек малой сложности. Для важных семейств таких систем получены инварианты Фоменко–Цишанга. Полное решение этой задачи, как ожидается, будет использовать подходы и результаты алгебры и теории чисел: теории конечных групп, колец вычетов и коммутирующих перестановок.

Мы посвящаем нашу работу профессору механико-математического факультета МГУ Владимиру Николаевичу Чубарикову в связи с его 70-тилетием, присоединяемся к поздравлениям и всем добрым пожеланиям.

### 1.1. Интегрируемость геодезических потоков и плоских бильярдных

В нашей работе рассмотрен случай интегрируемых бильярдных, то есть имеющих, помимо энергии, еще одну функцию (дополнительный первый интеграл), постоянную на фазовых траекториях. Изучение таких систем было начато еще классиками. В первую очередь, отметим известную теорему Якоби и Шаля (см. [17], а также [4]).

**ТЕОРЕМА 1** (Якоби, Шаль). *Геодезический поток индуцированной метрики на невырожденной квадрике размерности  $n - 1$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  вполне интегрируем.*

А именно, касательная линия к его траектории касается одновременно еще  $n - 2$  квадрик (помимо самого конфигурационного пространства как квадрики в  $\mathbb{R}^n$ ). Все  $n - 1$  квадрик должны быть софокусными, т.е. удовлетворять уравнению

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1, \quad -\infty < a_i < \lambda_i < a_{i+1} < \infty, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

для некоторых значений  $\lambda_i, i = 1, \dots, n - 1$  параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$  и констант  $a_1 < \dots < a_n$ . Последние являются квадратами длин полуосей квадрики со значением  $\lambda = 0$ . Тогда числа  $\lambda_i$ , как и модуль вектора скорости частицы, могут пониматься как первые интегралы системы.

В последние годы в изучении интегрируемых билиардов с двумя степенями свободы был достигнут существенный прогресс. С одной стороны, доказательство нескольких формулировок знаменитой гипотезы Биркгофа о билиардах [18, 5, 6] показало, что интегрируемость плоского билиарда на компактном односвязном столе с гладкой границей *не только следует из того*, что граница — это эллипс или окружность, но и наоборот, *требует этого*. Близкие эффекты, отметим, наблюдаются в случае кусочно-гладкой границы стола [18], системах геодезических потоков метрик постоянной кривизны [5], в билиардах в постоянном магнитном поле [19], а также в случае систем большей размерности [20].

Из гипотезы Биркгофа, наравне с выводом о наличии тесной связи интегрируемости с софокусными квадриками, следует также и “узость” класса *плоских* интегрируемых билиардов в топологическом смысле. Опуская детали, у таких билиардов замыкания их фазовых траекторий, попадающих на фиксированный трехмерный уровень энергии  $Q_h^3 = \{H = h\}$ , устроены одним из конечного числа способов. Иными словами, эти уровни энергии принадлежат к одному классу послойной гомеоморфности (сохраняющей слоение Лиувилля системы — разбиение фазового пространства и его подмногообразий на совместные уровни энергии и интеграла).

В описанной в разделе 1.3 конструкции билиардной книжки (стола-комплекса с перестановками, склеенного из таких плоских билиардов), предложенной В.В.Ведюшкиной [21, 7], они играют роль “элементарных кирпичей”. Хотя топология слоения для каждого плоского стола хорошо известна [22, 23, 24], топология слоений Лиувилля систем на столах-комплексах оказалась очень разнообразной

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** *Большой интерес представляет изучение замкнутых траекторий систем билиардов на столах, ограниченных софокусными квадриками. В недавних работах [25, 26] В.Драговича и М.Раднович была установлена связь  $n$ -периодических траекторий билиарда внутри эллипсоида  $E^{d-1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$  с экстремальными полиномами на наборе из нескольких промежутков числовой прямой  $\mathbb{R}$ . Рассмотрены были, в частности, полиномы П.Л.Чебышева, Е.И.Золотарева и Н.И.Ахиезера.*

## 1.2. Топологические инварианты интегрируемых систем

Топологические свойства интегрируемых билиардов, как и других интегрируемых систем, определяются тем, как неособый трехмерный уровень постоянной энергии в фазовом пространстве расслаивается на двумерные торы и особые слои, на которых постоянны значения дополнительного интеграла. Отметим, что почти все такие слои являются замыканиями фазовых траекторий системы. Иными словами, наличие послойного гомеоморфизма между такими слоениями двух систем на уровнях их энергии означает возможность перевести друг в друга замыкания почти всех решений одной системы в замыкания почти всех решений другой.

В работах А.Т.Фоменко, его соавторов и учеников (см., например, [11, 27]) была построена теория топологической классификации таких слоений (и соответствующих систем). Подробный обзор данной теории и ее приложений к задачам геометрии, механики и математической физики имеется в монографии [12]. В основе лежит отмеченное и изученное А.Т.Фоменко в более ранних работах [28, 10] свойство *боттовости* (невырожденности) критических точек, обобщающее свойство точек Морса на интегрируемый случай.

Трехмерные уровни энергии  $Q_h^3 : H = h$  невырожденных интегрируемых систем с боттовскими особенностями склеиваются из окрестностей особых слоев, содержащих критические окружности, по граничным торам этих окрестностей-атомов. Такие связные блоки, содержащие ровно один особый слой, называют 3-атомами Фоменко. Они бывают эллиптическими (минимальными или максимальными) или седловыми (прямого произведения или с поворотом на  $\pi$ ). Это зависит от того, являются вещественными или мнимыми собственные значения оператора линеаризации некоторого гамильтонова векторного поля в критических точках, подробнее [12, т. 1, гл. 1].

Эллиптический атом есть произведение слоя  $S^1$  на диск  $D^2$ , расслоенный функций Морса с одной точкой минимума или максимума. Его особый слой одномерен и совпадает с критическим множеством, а его окрестность послойно гомеоморфна расслоенному полноторию.

Седловые окружности лежат на двумерных особых слоях. Окрестность седловой боттовской окружности имеет тип произведения окрестности седловой морсовской точки в  $D^2$  на окружность, возможно, с поворотом на  $\pi$ . В последнем случае говорят о *седловом атоме со звездочками*. Отметим, что в разделе 2.3 все атомы предполагаются без звездочек, т.е. прямого произведения  $S^1$  на двумерную базу  $V^2$ .

Классифицирующим инвариантом  $Q_h^3$  относительно лиувиллевой эквивалентности (т.е. послойной гомеоморфности с учетом некоторых ориентаций) является граф, оснащенный символами особенностей-атомов при своих вершинах и числовыми метками  $r, \varepsilon, n$ . Его называют инвариантом Фоменко–Цишанга или меченой молекулой.

Для нахождения числовых меток  $r, \varepsilon, n$  по формулам из [12, т.1, гл. 4, пар. 3] требуется определить на граничных торах 3-атомов некоторые базисы, т.е. пары циклов из  $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ . Для наглядности будем понимать их как замкнутые кривые на торе без “лишних” точек самопересечения, устранимых путем гомотопии.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Отметим некоторые детали (подробнее см. [12, т.1, гл. 3, 4]), важные для понимания основных шагов доказательств:

- на каждом торе базис состоит из однозначно определенного цикла  $\lambda$  (для атома  $A$  это стягиваемый по полноторию цикл, а для седлового без звездочек он гомологичен критической окружности), и цикла  $\mu$ , дополняющего цикл  $\lambda$  до базиса и определенного неоднозначно;
- базисы на системе граничных торов седлового 3-атома  $V$  связаны условием: циклы  $\mu$  образуют единое 2-сечение атома  $V$
- матрица перехода между базисами на каждой паре склеиваемых торов имеет определитель  $-1$ .

Метки  $r \in \mathbb{Q} \bmod 1 \cup \{\infty\}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , стоящие на ребре молекулы и метка  $n \in \mathbb{Z}$ , стоящая на некоторых подграфах, имеют собственную топологическую интерпретацию. Например, значение метки  $r = \infty$  между двумя седловыми атомами, склеенными по паре своих граничных торов, означает, что критические окружности указанных 3-атомов задают гомологичные циклы в 3-многообразии с границей, получаемом после склейки. В то же время значение  $r = \infty$  на ребре, соединяющем эллиптический атом  $A$  и седловой атом, означает, что критическая окружность седлового атома гомологична меридиану — циклу  $\lambda$  — полнотория (атома  $A$ ), т.е. сама гомологична нулю в  $H_1(Q^3)$ .

### 1.3. Биллиарды на столах-комплексах и их фазовая топология

Применение описанной выше теории топологической классификации интегрируемых систем к изучению класса интегрируемых биллиардов оказалось весьма плодотворным. Приведем вначале следующий пример.

Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на эллипсоиде  $E^2 \subset \mathbb{R}^3$  и устремим малую полуось эллипсоида к нулю. Инварианты Фоменко–Цишанга биллиарда и геодезического потока были вычислены (первый был независимо найден В.В.Ведюшкиной [23] и В.Драговичем, М.Раднович [22], а второй совпадает с таковым для знаменитого волчка Эйлера, см. [12]).

Такой предельный переход от эллипсоида к эллипсу меняет топологию конфигурационного пространства и слоения Лиувилля системы. Например, изменился тип 3-атома: 3-атом  $B$  вместо 3-атома  $C_2$ , см. [12]. Вместе с тем, каждой траектории полученного этим переходом биллиарда в эллипсе естественно соответствует две (проецирующиеся на нее) траектории на биллиарда кусочно-плоском столе  $2A_2$  (склеенном из двух столов плоского биллиарда  $A_2$

внутри эллипса). Возможно, именно поэтому указанное обобщение билиардов не было замечено ранее, до постановки задачи о топологии слоений Лиувилля на фазовом пространстве этих систем и вычисления их инвариантов, сравнения получаемых ответов.

Система билиарда на столе  $2A_2$  может служить весьма понятным примером систем топологических (обобщенных) билиардов, класс которых был введен В.В.Ведюшкиной в работе [29]. Конфигурационное пространство является кусочно-плоским двумерным многообразием, склеенным из плоских софокусных столов по изометричной склейке дуг границы. Топологические свойства таких билиардов были изучены: как вопрос “структурной” классификации их столов [29, 30], так и последующее вычисление для них инвариантов Фоменко–Цишанга, [29, 31]. В этом случае удается получить полный и обозримый ответ, а найденные инварианты совпадают с таковыми для многих интегрируемых систем из приложений (см. обзоры [8, 32]).

Следующим шагом оказалось введение В.В.Ведюшкиной класса билиардных книжек. Эти столы-комплексы, как и топологические билиарды, являются кусочно-плоскими, но теперь по 1-клетке (общему ребру склейки) могут склеиваться более двух плоских столов. В таком случае динамика частицы после удара о данную 1-клетку задается циклической перестановкой на множестве склеенных по ней 2-клеток. При проекции комплекса на плоскость эти 1-клетки отображаются на дуги софокусных квадрик. Таким дугам припишем перестановку, равную произведению независимых циклов. Для корректности определения движения в вершинах (0-клетках комплекса) наложим дополнительное условие на перестановки. При каждой вершине должны коммутировать перестановки на двух взаимно-перпендикулярных квадриках, проходящих через проекцию вершины.

Тем самым, был получен новый и весьма обширный класс, изучение которого сразу ставит вопросы из области алгебры систем перестановок с условиями коммутирования (для классификации столов-комплексов) и теории классов вычетов по конечным модулям (для вычисления инвариантов). Дело в том, что для описания циклов-кривых допустимых базисов (необходимых для вычисления меток инварианта Фоменко–Цишанга) потребуется ответить на вопрос, как устроены независимые циклические перестановки системы коммутирующих перестановок и некоторых их степеней.

Изучение билиардных книжек и вычисление их топологических инвариантов позволило доказать ряд положений фундаментальной гипотезы А.Т.Фоменко о билиардах (подробнее см. программную статью [8]). Были алгоритмически построены билиарды, имеющие в своем слоении произвольный 3-атом [7] (боттовскую особенность интегрируемых систем), а затем — и произвольную наперед заданную базу слоения Лиувилля (инвариант Фоменко–Цишанга в отсутствие меток). Кроме того, слоения многих билиардов (даже на достаточно простых столах) эквивалентны таковым для многих известных интегрируемых систем из механики и математической физики [9, 33]. Тем не менее, ответ на общий вопрос пока остается неясен.

#### 1.4. Элементарные плоские билиарды: напоминание

Зафиксируем семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda).$$

Здесь  $a, b$  — фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если  $a > b > 0$ , данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая  $y = 0$  и предельная гипербола  $x = 0$ .

Под элементарным билиардом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик и не содержит углов  $3\pi/2$ . Отметим, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами. Запрет углов  $3\pi/2$  позволяет однозначно определить билиардное движение после попадания материальной точки в

угол, и это движение непрерывно. А именно, после отражения точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол.

На множестве элементарных бильярдов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое, как было показано ранее [29], сохраняет слоение Лиувилля. Нестрого говоря, два бильярда называются эквивалентными, если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ стола-области так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа. Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах  $(-\infty, b)$ ), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах  $(b, a]$ ), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным  $b$ ). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству софокусных квадрик с параметрами  $a$  и  $b$ . Примеры элементарных бильярдов различных классов, необходимых в настоящей работе изображены на рис. 1. Их обозначения совпадают с теми, которые даны в статье [29].

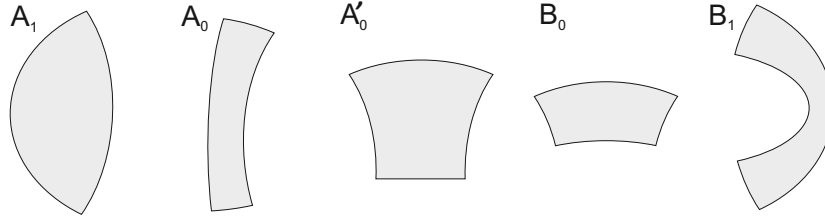


Рис. 1: Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

*Замечание 3.* Для систем бильярдов возможно изобразить цикл на конфигурационном пространстве, спроецировав его за счет известного устройства слоения в прообразе каждой точки бильярдного стола. Отметим, что при этом надо сохранить информацию о направлении обхода по циклу и о том, каким из 4-х способов были направлены вектора скорости, в парах с точками цикла на столе составлявшие цикл на торе. Более подробно процедура изложена в [34].

Тем самым, задание циклов и подсчет меток конкретного бильярда оказывается весьма наглядным, в отличие от многих систем из приложений [12, т.2]

## 2. Локальная гипотеза А.Т. Фоменко о бильярдах.

### 2.1. Формулировка локальной гипотезы

Локальная гипотеза, сформулированная А.Т.Фоменко в [16], предполагает возможность реализовать бильярдом слоение Лиувилля, “фрагмент” инварианта которого имеет произвольный вид. А именно, предполагается возможность реализовать произвольные значения меток  $r, \varepsilon$  (стоящих на каждом ребре инварианта, пункт 1), произвольное значение метки  $n$  (стоящей на некоторой семье инварианта, пункт 2), усиления 3 и 4 этих пунктов 1 и 2 (учитывающие типы атомов на концах ребра и вид этой семьи), а также их дальнейшие усиления — меченые окрестности ребра или семьи (пункты 5 и 6).

**ГИПОТЕЗА (А.Т.Фоменко).** Каждое из нижеперечисленных подмножеств инварианта Фоменко–Цишанга интегрируемой гамильтоновой системы с 2 степенями свободы реализуется как подмножество инварианта Фоменко–Цишанга некоторого интегрируемого бильярда:

1. (реберный инвариант) ребро с выбранной парой меток  $(r, \varepsilon)$ ;

2. (усиление пункта 1) ребро с выбранной парой меток  $(r, \varepsilon)$  между двумя выбранными атомами;
3. (инвариант семьи) выбранная метка  $n$  на некоторой семье  $S$ ;
4. (усиление пункта 3) выбранная метка  $n$  на произвольной выбранной семье  $S$ ;
5. (меченая окрестность семьи). выбранная семья  $S$  с выбранной меткой  $n$  на ней и выбранными реберными инвариантами  $(r, \varepsilon)$  на ее внешних ребрах;
6. (меченая окрестность ребра). Две семьи  $S_1$  и  $S_2$  с метками  $n_1$  и  $n_2$ , выбранные граничные торы которых соединены ребром с любым выбранным реберным инвариантом  $(r, \varepsilon)$ .

Разделы 1 и 3 этой гипотезы, доказанные авторами [14, 15], вместе с результатом В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой [7] дают следующее утверждение: каждое значение каждого компонента инварианта Фоменко–Цишанга (тип 3-атома при вершине графа, метки  $r, \varepsilon$  на ребре, метка  $n$  на некоторой семье) возникает в инварианте слоения подходящего интегрируемого билиярда. Иными словами, каждое из них не является препятствием к реализации слоения билиярдом.

В настоящем разделе получено существенное продвижение по разделам 2 и 4 локальной гипотезы.

## 2.2. Реализация новых инвариантов окрестности ребра

Фиксируем в семействе софокусных квадрик некоторый эллипс  $e_0$  и некоторую гиперболу  $h_0$ . Рассмотрим следующие плоские интегрируемые билиарды: билиард  $A_1$ , ограниченный дугой эллипса  $e_0$  и выпуклой дугой гиперболы  $h_0$  (см. рис. 1), и билиард  $A_0$ , ограниченный тем же эллипсом  $e_0$  и двумя дугами гиперболы  $h_0$ . Фиксируем число  $n$  и склеим из  $2m$  экземпляров билиярда  $A_1$  и одного билиярда  $A_0$  билиардную книжку. Рассмотрим  $m$  экземпляров  $A_1$ , склеим их друг с другом вдоль дуги гиперболы, и вдоль этой же дуги приклеим к левой дуге граничной гиперболы билиярда  $A_0$ . Оставшиеся билиарды  $A_1$  также склеим друг с другом вдоль дуги гиперболы и вдоль этой же дуги приклеим вдоль правой дуги гиперболы к билиярду  $A_0$ . Левые билиарды  $A_1$  обозначим через  $a_i$ , правые – через  $c_i$ , а билиард  $A_0$  через  $b$ . Теперь укажем на корешках полученной книжки следующие перестановки. На корешке между группой билиардов  $a_1$  и билиардом  $b$  поставим циклическую  $\sigma$ , переставляющую билиарды в следующем порядке  $b, a_1, a_2, \dots, a_m$ . На другом корешке книжки – циклическую перестановку  $\rho$ , которая переставляет билиарды в порядке  $b, c_1, c_2, \dots, c_m$ . Полученную книжку обозначим через  $\mathbb{B}_1$ . Пример такой книжки для  $m = 3$  изображен на рисунке 2 а).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Инвариант Фоменко–Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности билиардной книжки  $\mathbb{B}_1$ , состоящей из  $2m$  экземпляров билиярда  $A_1$  и одного билиярда  $b$  с циклическими перестановками на корешках, имеет вид, изображенный на рис. 2б).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Разобьем доказательство предложения на два шага. Вначале вычислим грубую молекулу для данной билиардной книжки, а затем вычислим метки.

### Шаг первый. Вычисление грубой молекулы.

Опишем вначале поведение критических траекторий. При наименьшем значении интеграла траектории представляют собой криволинейные движения по дугам эллипса  $e_0$ . Таких траекторий ровно две. Покажем это, рассмотрев два случая. Пусть  $m$  – нечетно. Тогда одна траектория – проходит по нечетным листам  $a_i$  вверх, по четным листам  $a_i$  вниз, по верхнему граничному сегменту билиярда  $b$  слева направо, далее по нечетным листам  $c_i$  вниз, а по



четным – вверх, и после выхода на бильярд  $b$  проходит по нижнему сегменту справа налево. Другая траектория проходит по тем же листам в противоположном направлении. Пусть теперь  $m$  – четно. Тогда после выхода с листов  $c_i$  обратно на лист  $b$  траектория опять проходит по верхнему сегменту бильярда  $b$  но уже справа налево. Вторая траектория при движении по бильярду  $b$  проходит по нижнему сегменту.

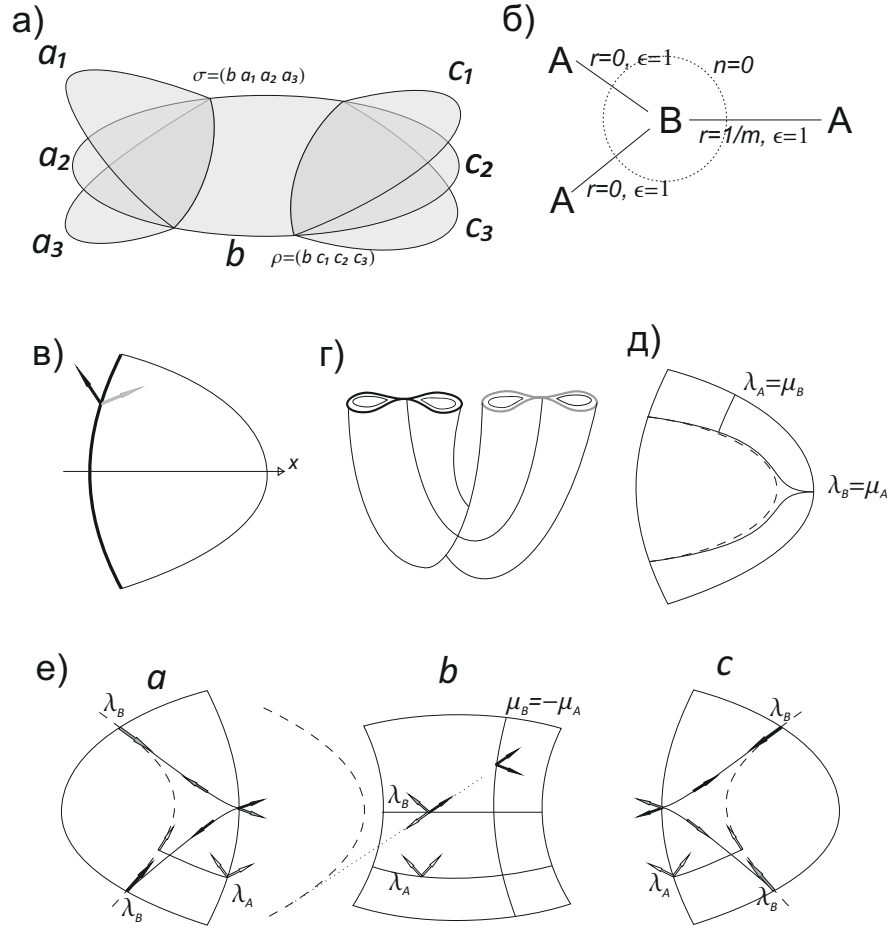


Рис. 2: а) бильярдная книжка  $\mathbb{W}_1$  при  $m = 3$ . б) инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля изоэнергетической 3-поверхности бильярдной книжки  $\mathbb{W}_1$ .

При значении параметра дополнительного интеграла соответствующего вырожденной квадратике (оси  $Ox$ ) траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Этот уровень назовем фокальным уровнем. Критическая траектория ровно одна, она проходит вдоль отрезков оси  $Ox$ . Последовательность отрезков вместе с направлением на них следующая: движение по  $b$  направо, далее в каждом из бильярдов  $c_i$  движение направо и после удара влево, движение по  $b$  влево, далее в каждом из бильярдов  $a_i$  движение влево и после удара направо.

При значении параметра интеграла, соответствующего гиперболе, лежащей на оси  $Oy$ , получаем ровно одну траекторию проходящую только по листу  $b$ .

Остальные значения интеграла невырождены и им соответствуют двумерные торы. Покажем это, доказав, что окрестности седлового слоя соответствует атом  $B$ .

Рассмотрим бильярд  $A_1$ . Бифуркация на его фокальном слое описывается атомом  $A^*$ . Соответствующее этому атому слоение Зейферта имеет один особый слой. Трансверсальное критической окружности сечение – 2-атом  $B$ . Отменим в бильярде  $A_1$  бильярдный закон на дуге граничной гиперболы. Прообраз этой дуги есть трансверсальное сечение 3-атома  $A^*$ ,

т.е. 2-атом  $B$ . На рисунке 2 в) жирным выделена граничная дуга гиперболы и указана пара векторов, которые были склеены до отмены бильярдного закона: черный вектор при этом направлен наружу области бильярда  $A_1$ , а серый – внутрь. После отмены мы получаем, что бифуркация в окрестности фокального слоя распалась в прямое произведение 2-атома  $B$  на отрезок. На рисунке г) изображен результат после разреза, а границы этого разреза соответствуют парам точка-вектор своего цвета (черного наружу области, а серого – внутрь).

Склеим теперь  $m$  экземпляров разрезанного стола  $A_1$  по правилу – пары точка-вектор склеиваются, если они соответствуют одной точке на дуге гиперболы и черный вектор предыдущего экземпляра  $A_1$  отождествляется с серым вектором следующего. Эта склейка продиктована новым бильярдным законом, который отвечает перестановкам  $\sigma$  и  $\rho$ . Разрезанные 3-атомы  $A^*$  склеиваются в единый атом, представляющий собой прямое произведение 2-атома  $B$  на отрезок.

Отметим следующий факт. Необходимо помнить, что если бильярдный закон в столе  $A_1$  вернуть, то соответствующий 3-атом не имеет структуру прямого произведения. В его 3-атоме возникает “перекрутка”. Эту перекрутку можно представлять себе так. Протащим по разрезанному 3-атому 2-атом  $B$  – дугу гиперболы, оснащенную векторами внутрь. У этой дуги до протаскивания выделяется часть выше оси  $Ox$  и ниже оси  $Ox$ . После того как эта часть перейдет в эту же гиперболу с векторами наружу эти части поменяются местами (более подробно см. [34]). Этот эффект обеспечивает наличие одного фокуса в бильярде  $A_1$ .

Осталось приклеить к двум описанным кускам бифуркации разрезанный прообраз листа  $b$ . Бифуркация на фокальном слое соответствующего ему бильярда  $A_0$  есть 3-атом  $B$ . В самом деле, рассмотрим прообраз любой гиперболы софокусного семейства, пересекающейся с бильярдом  $A_0$ . Прообраз этой гиперболы есть пара 2-атомов  $B$ , один атом соответствует направлению на критической окружности направо, а другой – налево. Седловой 3-атом разбивается таким образом на два куска – одна часть отвечает движению направо (и гомеоморфна прямому произведению 2-атома  $B$  на отрезок), а вторая – движению налево. При этом до отмены бильярдного на гиперболических границах бильярда  $A_0$  эти части склеиваются так что часть прообраза гиперболы на одном куске, расположенная выше оси  $Ox$  склеивается с частью прообраза гиперболы на другом куске также расположенной выше оси  $Ox$ . Это обеспечивает то, что при склейке всех разрезанных кусков изоэнергетической поверхности  $Q^3$  в один в полученном произведении 2-атома  $B$  на отрезок будет четное число перекруток. Т.е. итоговый атом гомеоморфен 3-атому  $B$ .

Для завершения вычисления грубой молекулы осталось заметить, что если каустика совпадает с гиперболой  $h_0$ , то на этом уровне бифуркации не происходит, т.е. уровень дополнительного интеграла по прежнему гомеоморфен двумерному тору.

**Шаг второй. Вычисление меток.** Напомним, что циклы  $\lambda$  на граничных торах седловых атомов выбираются гомотопными слоям расслоения Зейферта, т.е. критическим окружностям. Они определены однозначно, причем их ориентация обязана совпадать с ориентацией критических окружностей. Дополняющие их циклы  $\mu$  выбираются неоднозначно, но все они должны лежать на граничных окружностях трансверсальной критической окружности сечения – 2-атома. Циклы  $\lambda$  на граничных торах минимаксных атомов  $A$  однозначно выбираются как стягиваемые в точку внутри атомов-полноторий. Несмотря на то что сами по себе дополняющие их циклы  $\mu$  выбираются неоднозначно, на них тем не менее можно однозначно определить ориентацию. Дело в том, что при стремлении к критическому слою-окружности атома  $A$  эти циклы переходят в эту самую критическую окружность траекторию, которая и задаст на них искомую ориентацию.

Для наглядного представления цикла на граничном торе в нашем случае будем изображать проекцию этого цикла на бильярдный стол. Для восстановления цикла необходимо рассмотреть прообраз этой кривой на торе. Этот прообраз может быть несвязен. В этом случае мы либо в качестве цикла берем любую компоненту связности или либо ту, которая соответствует

указанным на рисунке векторам скорости (например, направленным вправо или вверх).

На ребрах графа Фоменко, соответствующих траекториям, касающихся эллипсов (назовем такие ребра и соответствующие им торы эллиптическими) проекции циклов на столы  $A_i$ , входящие в состав бильярдной книжки  $\mathbb{B}_1$ , изображены на рисунке 2д). Очевидно, что цикл  $\lambda_B = \mu_A$  переходит часть критической траектории при стремлении к тора к особым слоям атомов  $B$  и  $A$ , а другой цикл их дополняет и стягивается в точку внутри полнотория  $A$ . Циклы  $\lambda_B = \mu_A$  на листе  $b$  бильярдной книжки проходят по сегменту каустики-эллипсу. Очевидно, что матрица склейки в этом случае имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, причем вклада в метку  $n$  такие матрицы не дают.

На гиперболическом ребре (траектории касаются гипербол) проекции циклов изображены на рисунке 2е). Прокомментируем цикл  $\lambda_B$ . На листах  $a_i$  и  $c_i$  для этого цикла необходимо выбирать прообраз кривой, оснащенной черными стрелками на нечетных листах и серыми стрелками на четных листах. На листе  $b$  в случае нечетного  $m$  необходимо выбрать часть прообраза кривой, соответствующей векторам направленным вправо вверх и влево вниз (черные и белые стрелки), а в случае четного — только вверх (черные и серые стрелки). Заметим, что этот цикл пересекается с циклом  $\lambda_A$ , ровно в  $m$  точках: каждая пара  $a_i, c_i$  дает только одну точку пересечения с данным циклом.

Выберем ориентацию цикла  $\mu_B$  так, чтобы она была противоположна ориентации цикла  $\mu_A$ . Напомним, что мы вольны выбирать здесь ориентацию, так как она зависит, вообще говоря, от выбора ориентации на  $Q^3$ . Тогда матрица склейки на этом ребре примет вид  $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку  $n$  равен  $\left[-\frac{-1}{m}\right] = 0$ . Предложение доказано.

□

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Заметим, что если мы модифицируем книжку и удалим часть бильярдных  $A_1$  то это может привести к изменению грубой молекулы. А именно, в том и только в том случае, если число бильярдных  $A_1$  станет нечетным. В этом случае у произведения 2-атома  $B$  на отрезок будет нечетное число перекруток, что приведет к тому, что полученный седловой атом будет гомеоморфен 3-атому  $A^*$ .

Фиксируем гиперболу  $h_1$ , параметр которой больше чем параметр гиперболы  $h_0$ , т.е. которая расположена ближе к оси  $Oy$ , чем гипербола  $h_0$ . Разобьем в бильярдной книжке  $\mathbb{B}_1$  лист  $b$  по дуге некоторой гиперболы  $h_1$  на два листа  $b_1$  и  $b_3$  и вклеим в линию разреза лист  $b_2$ , который помимо дуг гиперболы  $h_1$  и эллипса  $e_0$  ограничен осью  $Oy$ . Полученную бильярдную книжку обозначим через  $\mathbb{B}_1(A_0)$  (см. пример на рисунке 3а)).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки  $\mathbb{B}_1(A_0)$ , имеет вид, изображенный на рис. 3б), где на всех ребрах метки  $r = 0, \varepsilon = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим параметр гиперболы  $h_1$  через  $\lambda_1$ . Покажем, что при вклейке в книжку  $\mathbb{B}_1$  листа  $b_2$ , во-первых, не меняется вид бифуркации на фокальном слое, а во-вторых, появляется новая бифуркация  $B$  на уровне  $\Lambda = \lambda_1$ .

Напомним, что на фокальном слое бильярда  $A_0$ , которому эквивалентен лист  $b_2$ , бифуркация гомеоморфна прямому произведению атома  $B$  на окружность. Отмена бильярдного закона на дуге гиперболы  $h_1$  — это разрез этого 3-атома трансверсально критической окружности. Замена бильярдного закона на этой дуге с перестановки  $(b_1, b_3)$  на перестановку  $(b_1, b_2, b_3)$  представляет собой разрез исходного 3-атома  $B$  трансверсально критической окружности и вклейку прямого произведения 2-атома  $B$  на отрезок. При этом не происходит смены атома на  $A^*$  так как в новом листе  $b_2$  нет фокусов и следовательно, не происходит “перекруток”.

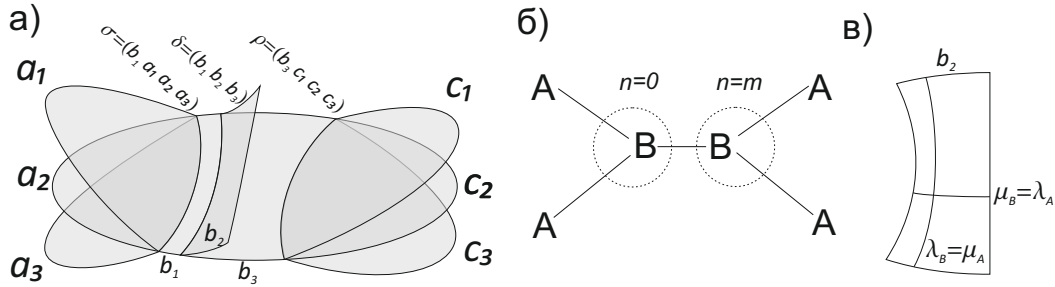


Рис. 3: На рисунке а) представлен пример биллиардной книжки  $\mathbb{W}_1(A_0)$  для  $m = 3$ . В молекуле на рисунке б) все метки на ребрах  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ .

Заметим, что по отношению к биллиардам  $b_2$  и  $b_3$  дуга гиперболы  $h_1$  является невыпуклой. Тогда на уровне интеграла  $\Lambda = \lambda_1$  не определено продолжение траектории, которая коснулась этой дуги. При дальнейшем увеличении значения интеграла  $\Lambda$  траектории разбиваются на два класса – проходящие по листу  $b_2$  и по листу  $b_3$ . Каждый тип траектории лежит на одном торе (так как это просто биллиарды, эквивалентные биллиарду  $A_0$ ). На этих торах прообраз дуги гиперболы  $h_1$  есть окружность. При  $\Lambda = \lambda_1$  происходит склейка этих торов вдоль этих окружностей с образованием особого слоя 3-атома  $B$ . При дальнейшем уменьшении значения интеграла происходит разрыв вдоль этой окружности и приклейка кольца – разрезанного тора, соответствующего прообразу листа  $b_1$ . В качестве критической окружности мы будем здесь рассматривать пары точка-вектор, где точка лежит на дуге гиперболы  $h_1$ , а вектора скорости её касаются. Заметим, что в данном случае невыпуклая склейка не является траекторией.

Покажем вычисление меток. На рисунке 3в) показаны проекции циклов  $\lambda_B$  и  $\mu_B$ , соответствующих бифуркации на уровне  $\Lambda = \lambda_1$ , на биллиардный лист  $b_2$ . Очевидно, что гомеоморфный слою расслоения Зейферта на 3-атоме  $B$  цикл  $\lambda_B$  совпадает с периодическим циклом  $\mu_A$ , который переходит в траекторию на атоме  $A$ . Дополняющий их цикл стягивается в точку на атоме  $A$ , то есть с одной стороны является циклом  $\lambda_A$ , а с другой –  $\mu_A$ . Получаем что на ребрах между атомом  $B$  и атомами  $A$  матрицы склейки  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Они задают искомые метки на ребрах и не дают вклада в метки  $n$ .

Рассмотрим соотношение циклов на ребре между атомами  $B$ . Ориентируем ребро по направлению к фокальному атому  $B$ . Фактически, по сравнению с вычислением предыдущей матрицы склейки нам необходимо вместо циклов  $\lambda_A$ ,  $\mu_A$  взять соответственно циклы  $\mu_B$ ,  $\lambda_B$  нового атома  $B$ . Для удобства выберем теперь ориентацию цикла  $\mu^+$  противоположной чем в доказательстве предыдущего предложения. Тогда матрица склейки примет вид  $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку  $n$  равен  $[-\frac{0}{1}] = 0$  в левую семью и  $[\frac{m}{1}] = m$  в правую семью. Предложение доказано.

□

Возникает естественный вопрос – можно ли вместо нового атома  $B$  добавить в молекулу произвольную семью? Напомним что в терминах теории Фоменко-Цишанга семьей называется часть молекулы, которая содержит только седловые атомы, все метки на ребрах между которыми бесконечны, причем на всех ребрах между семьей и остальным графом конечны. В молекулах выше семьи состоят из одних атомов  $B$ .

Напомним здесь два важных результата, которые были получены в рамках доказательства общей гипотезы А.Т. Фоменко о моделировании интегрируемых систем биллиардами.

**ТЕОРЕМА 2.** Для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов  $A'_0$  (см. рис.

1), такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла  $\Lambda = b$  (в случае атома  $A$  особого значения  $\lambda = 0$ ) её изоэнергетической поверхности  $Q^3$  послойно гомеоморфно данному атому.

**ТЕОРЕМА 3.** Для любой грубой молекулы алгоритмически построена бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдов  $B_0$  (см. рис. 1), такая, что ее инвариант Фоменко–Цишанга имеет структуру графа, совпадающего с данной грубой молекулой. Более точно: изоэнергетическая поверхность такой бильярдной книжки склеена из кусков наперед заданных атомов в порядке, задаваемом грубой молекулой.

Теорема 2 была доказана В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой в работе [7] (см. также [21]), а теорема 3 — ими же в работе [13].

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Теорема 2 и с доказательство разделов 1 и 3 локальной гипотезы Фоменко вместе означают, что каждый элемент, из которых собирается инвариант Фоменко–Цишанга — граф с типами особенностей при вершинах и метками  $r, \varepsilon, n$  — реализуется бильярдом, пусть пока и по-отдельности. Из теоремы 3 следует, что относительно более грубой эквивалентности, чем лиувиллева (ее инвариантом является база слоения Лиувилля, т.е. инвариант Фоменко–Цишанга без числовых меток) классы интегрируемых систем и интегрируемых бильярдов совпадают (все особенности послойно гомеоморфны боттовским особенностям ранга 1).

Аналогично данным теоремам докажем следующий факт.

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $W$  — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы  $A$ . Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

Тогда алгоритмически строится бильярдная книжка  $\mathbb{B}(W, 0)$ , склеенная из бильярдов  $A_0$ , меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа  $W$  приписывается атом  $B$  и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами  $A$ . К каждому свободному верхнему ребру графа  $W$  приписывается атом  $A$ . На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки  $r = 0, \varepsilon = 1$ . Все семьи имеют метку  $n = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся конструкцией-алгоритмом, использованным для доказательства теорем 2, 3. Бильярды, реализующие произвольные атомы без звездочек устроены следующим образом. Они получены склейкой нескольких экземпляров бильярда  $A'_0$  вдоль фокальной прямой и вдоль выпуклого эллиптического ребра. При этом все склейки вдоль фокальной прямой локально склеивают не более двух бильярдов (а каждой такой склейке соответствует транспозиция в перестановке на фокальном корешке). Алгоритм работает по-разному для различных функций высоты на атомах. К примеру, для атома  $B$  перестраивающего один тор в два и два тора в один будут получаться различные бильярдные книжки. Теперь заменим все бильярды  $A'_0$  на бильярды  $B_0$ . В результате фокальный слой переместится на уровень меньшего граничного эллипса. Несмотря на то, что траектории на этом уровне при касании границы склейки не определены, слоение Лиувилля по-прежнему можно определить. Окрестность нового особого слоя по-прежнему будет послойно гомеоморфна наперед заданному атому.

Склейка же произвольной грубой молекулы (без атомов со звездочками) происходит следующим образом. Каждому седловому особому слою приписывается некоторый строго положительный параметр эллипса  $\lambda$  так, что чем больше  $\lambda$ , тем выше в грубой молекуле расположен атом. Далее каждый атом реализуется алгоритмом выше некоторой бильярдной книжкой, склеенной из бильярдов  $B_0$ . При этом границы бильярда  $B_0$  лежат на эллипсах с параметром 0 (большой) и  $\lambda$  (меньший). Для всех седловых атомов гиперболические границы

бильярдов  $B_0$  лежат на дугах одних и тех же гипербола. Последовательно склеим все атомы в молекулу. Каждой склейке двух атомов по ребру будет соответствовать изменение перестановки на большей дуге эллипса (перестановка на меньшей останется неизменной). Подробнее о том как меняются перестановки, см. работу [13].

Пусть теперь  $W$  – граф, указанный в формулировке теоремы. Заменяем его на граф  $W^-$  поменяв знак соответствующей функции высоты. Эта операция в частности меняет направление роста функции на атомах, а также меняет местами верхние и нижние висячие вершины. Склеим по графу граф  $W^-$  (дополненному атомами  $A$ ) бильiardную книжку из бильiardров  $B_0$  по алгоритму Ведюшкиной–Харчевой. Заменяем теперь каждый бильiard  $B_0$  на бильiard  $B_1$ , удлинив его, выбрав другую дугу гипербола. В этом случае можно показать, что слоеение на уровне  $\lambda < b$  не изменится. При этом все перестройки, соответствующие графу  $W^-$ , происходят на уровнях  $\lambda < b$ .

Рассмотрим набор торов Лиувилля, соответствующий движению на уровне интеграла  $b - \varepsilon$  для достаточно малого положительного  $\varepsilon$ . Количество торов в точности равно количеству “верхних” ребер в графе  $W^-$ . При прохождении уровня  $\Lambda = b$  движение по бильiardу  $B_1$  распадается на два движения по бильiardам  $B_0$ . Каждый тор верхнего ребра в графе  $W^-$  распадается на два тора. Перестройка очевидно, происходит с помощью атома  $B$ .

Опишем метки в возникающей молекуле. Рассмотрим тор Лиувилля и его проекцию на бильiardную книжку. Она проектируется в некоторое количество бильiardров  $B_1$ . В каждом бильiardе  $B_1$  рассмотрим связную часть прообраза некоторых фиксированных эллипса и гипербола (см. рис. 4). Очевидно, что на торе эти циклы пересекаются в одной точке. При этом эта пара циклов всегда является подходящей парой циклов для некоторого атома. Например, в графе  $W^-$  на торах между седловыми атомами прообразы эллипсов – это циклы  $\lambda_S$ , а прообразы гипербола – дополняющие их циклы  $\mu_S$ . Все они гомологичны и одинаково ориентированы, что приводит к меткам  $r = \infty, \varepsilon = 1$  на ребрах между седловыми атомами в графе  $W^-$ . Аналогично разбираются случаи всех остальных ребер: на них циклы  $\lambda$  уже не гомологичны, что приводит к меткам  $r = 0, \varepsilon = 1$ , при этом вклад в метку  $n$  всегда нулевой.

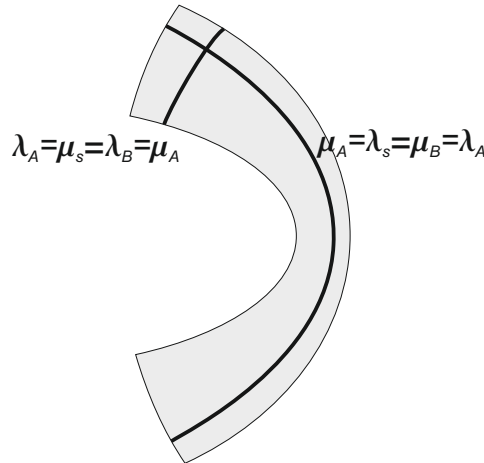


Рис. 4: В представленных равенствах левые циклы лежат на граничных торах минимальных атомов  $A$ , а правые – максимальных.

Для получения искомой бильiardной книжки осталось заменить каждый бильiard  $B_1$  на бильiard  $A_0$ . При этом все дуги эллипсов с параметром 0 переходят в дугу гипербола с параметром  $a$  (вертикальная прямая). Все склейки теперь происходят вдоль дуг гипербола. Этот переход переворачивает молекулу, в результате мы получаем, что требовалось.  $\square$

### 2.3. Реализация бильярдами слоений с произвольным классом Эйлера на многообразии Зейферта типа прямого произведения

В данном разделе получим существенное усиление результатов работ [16] и [14] по моделированию подграфов инварианта Фоенко–Цишанга, состоящих из седловых атомов, все особые слои которых гомологичны (а потоки поля  $\text{sgrad } H$  на них сонаправлены). В прообразе такого объекта, напомним, находится трехмерное многообразие Зейферта  $Q$  со структурой  $S^1$ -расслоения. Оно согласовано со слоением Лиувилля: каждая окружность лежит на некотором уровне интеграла  $F$ . В частности, все критические окружности интегрируемой системы, лежащие в  $Q$ , являются боттовскими, седловыми и гомологичны друг другу. Такой объект в теории топологической классификации интегрируемых систем был назван “семьей”, а его инвариант состоит из графа (все вершины — седловые атомы, все метки на ребрах равны  $r = \infty, \varepsilon = +1$ ) и целого числа — метки  $n$  (которая в ряде случаев соответствует классу Эйлера расслоений Зейферта, подробнее см. [35]).

Основной результат можно сформулировать так: пусть расслоение Зейферта имеет вид прямого произведения (окружности  $S^1$  на двумерную базу  $M^2$ , т.е. все 3-атомы не имеют звездочек, см. [12]). Тогда пара из любой такой семьи  $W$  и любого значения целочисленной метки  $n = t$  на ней реализуется бильярдом, а именно, содержится в инварианте Фоенко–Цишанга слоения Лиувилля построенных ниже книжек  $\mathbb{B}(W, m)$ .

Ранее нами было показано [14], что в слоениях бильярдных систем реализуется произвольное значение метки  $n$ , т.е. для каждого  $m \in \mathbb{Z}$  была построена бильярдная книжка, у которой одна из семей инварианта Фоенко–Цишанга имеет метку  $n = m$ . Отметим, что все метки  $n$  проанализированных ранее интегрируемых систем из приложений принимают одно из значений  $0, \pm 1, \pm 2$ .

Пункт 4 локальной гипотезы задавал более общий вопрос: любая ли пара  $W, m$  семьи  $W$  и значения  $m$  метки  $n$  реализуется бильярдом? Вопрос не очевиден: например, в конструкции из работы [14] сложность семьи (количество критических окружностей системы) и ее валентность (количество граничных тором у многообразия Зейферта) линейно росли с ростом  $m$ . В работе [16] была предложена новая конструкция, где на семье из одного конкретного атома с двумя критическими окружностями и четырьмя граничными торами было реализовано любое значение метки  $n$ .

Пусть  $W$  — связный граф Фоенко (граф Роба, в вершинах которого указаны атомы-перестройки), у которого удалены все минимаксные атомы  $A$ , а седловые особенности не содержат особых слоев расслоения Зейферта (т.е. описывающие их атомы не содержат звездочек). Для этого графа построим по алгоритму из теоремы 4 бильярдную книжку  $\mathbb{B}(W, 0)$ . Эта книжка склеена из бильярдов вида  $A_0$ , не содержащих фокусов и расположенных между ветвями гипербол из фиксированного софокусного семейства. Потребуем, что все бильярды  $A_0$  были ограничены дугами одного и того же эллипса.

Все ребра графа  $W$  ориентируются по направлению роста дополнительного интеграла. Рассмотрим произвольное нижнее ребро  $e$  этого графа. При реализации книжкой  $\mathbb{B}(W, 0)$  это ребро (с нулевой меткой  $r$ ) соединяет граф  $W$  с атомом  $B$ , из которого исходят два атома  $A$ . Напомним, что траектории, которые отвечают этому участку молекулы устроены так. Пусть  $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$  это набор бильярдов-листов книжки  $\mathbb{B}(W, 0)$  причем по бильярдам  $A_0^i$  с нечетными номерами  $i$  траектории, отвечающие ребру  $e$  совершают движения слева направо, а с четными — справа налево. Направление движения меняется в те моменты, когда траектория достигает граничной гиперболы и переходит на другой бильярд. Если  $k$  нечетно, то как минимум один бильярд в этом наборе встретится дважды (один раз с четным, а другой раз — с нечетным номером).

При движении по ребру  $e$  вниз при достижении атома  $B$  выделяется одна критическая траектория, проходящая по отрезкам фокальной прямой. Расположенным ниже этого атома  $B$

ребрам отвечают движения по двум наборов билиардов  $B_0^1, B_0^2, \dots, B_0^k$ , расположенных выше и ниже фокальной прямой. Они являются подобластями билиардов  $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$  и получены из них удалением внутренности эллипса – каустики, которой касаются траектории.

Модифицируем книжку  $\mathbb{B}(W, 0)$  следующим образом. Пусть  $m \in \mathbb{N}$  произвольное натуральное число. Рассмотрим билиарды  $A_0^1, A_0^2$  и  $A_0^3$ . Пусть билиарды  $A_0^1$  и  $A_0^2$  склеены вдоль гиперболической дуги  $h_1$ , а билиарды  $A_0^2$  и  $A_0^3$  вдоль гиперболической дуги  $h_2$ . Траектории проходящие по листу  $A_0^1$  слева направо после удара о корешок склейки  $h_1$  переходят на билиард  $A_0^2$  и продолжают движение справа налево. Траектории проходящие по листу  $A_0^2$  справа налево после удара о корешок склейки  $h_2$  переходят на билиард  $A_0^3$  и продолжают движение слева направо. В силу алгоритма построения книжки одна из дуг  $h_1$  или  $h_2$  лежит на оси  $Oy$ . Без ограничения общности можно считать, что это дуга  $h_1$ , так как можно считать, что на последнем шаге алгоритма все невыпуклые эллиптические дуги склейки перешли в гиперболические дуги, расположенные левее оси  $Oy$ .

Приклеим к корешку  $h_1$  справа от вертикальной оси  $m$  подходящих билиардов  $A_1$  (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все билиарды  $A_0$  и вертикальной прямой). На корешке  $h_1$  изменим перестановку, вставив в цикл между номерами билиардов  $A_0^1$  и  $A_0^2$  новые номера, присвоенные билиардам  $A_1$ .

Приклеим к корешку  $h_2$  слева от него  $m$  подходящих билиардов  $A_1$  (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все билиарды  $A_0$  и гиперболой, на которой лежит корешок  $h_2$ ). На корешке  $h_2$  изменим перестановку, вставив в цикл между номерами билиардов  $A_0^2$  и  $A_0^3$  новые номера, присвоенные билиардам  $A_1$ . Полученную билиардную книжку обозначим через  $\mathbb{B}(W, m)$ .

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $W$  — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы  $A$ . Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

Тогда алгоритмически строится билиардная книжка  $\mathbb{B}(W, m)$ , склеенная из билиардов  $A_0$  и  $A_1$ , меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа  $W$  приписывается атом  $B$  и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами  $A$ . К каждому свободному верхнему ребру графа  $W$  приписывается атом  $A$ . На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки  $r = 0, \varepsilon = 1$ . Семье, которую образует граф  $W$ , отвечает метка  $n = m$ , все остальные семьи имеют метку  $n = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Сделаем важное замечание о связи траекторий билиардных книжек  $\mathbb{B}(W, 0)$  и  $\mathbb{B}(W, m)$ . Оказывается, что при таком определении книжки  $\mathbb{B}(W, m)$  меняются только торы Лиувилля (и отвечающие им траектории), соответствующие в молекуле Фоменко выбранному ребру  $e$ . В самом деле, для того чтобы траектория попала на билиарды  $A_1$  материальная точка должна либо удариться в ребро  $h_1$ , совершая движение слева направо, либо ударится в ребро  $h_2$  при движении в обратном направлении. При этом очевидно, она должна находиться на выделенных нами билиардах  $A_0^1$  и  $A_0^2$ . Это позволяет говорить о том, что матрицы склейки на остальных ребрах молекулы не меняются.

Осталось рассмотреть траектории, проходящие по выделенным билиардам  $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$  в указанном в алгоритме направлении (по нечетным — слева направо, по четным — справа налево). Анализ соответствующих торов и траекторий почти дословно повторяет доказательство Предложения 2. Матрица склейки на ребре  $e$  теперь будет давать вклад в метку  $n$  для верхней семьи равный  $m$ .  $\square$



### 3. Бильярдные книжки малой сложности: классификация, свойства слоений Лиувилля

В работах [29] и [31] В.В.Ведюшкиной были классифицированы топологические бильярды, имеющие только с выпуклые дуги склейки и имеющие произвольные (выпуклые и невыпуклые) дуги склейки. Напомним, что склейка стола-комплекса происходит по общим гладким дугам границы стола (эллипсам, гиперболам или отрезкам двух осей). А именно, для каждого плоского листа (элементарного бильярдного стола) определена проекция на плоскость, причем проекции всех граничных дуг всех листов являются дугами кривых из одного и того же семейства софокусных квадрик (в том числе, двух вырожденных).

Напомним, что в топологическом бильярде каждая граничная дуга плоских столов комплекса является либо склейкой ровно двух плоских столов (проекции которых лежат или по одну, или по разные стороны от проекции ребра склейки, т.е. дуги некоторой софокусной квадрики), либо свободной границей ровно одного плоского листа.

При этом могут возникать вершины склейки: когда два листа склеиваются хотя был по двум своим граничным дугам, имеющим общую точку. Здесь и далее мы полагаем, что каждый угол каждого плоского листа равен  $\pi/2$ , т.е. не равен  $3\pi/2$ .

В терминах бильярдных книжек топологический бильярд можно описать следующим образом. Каждая перестановка на каждом 1-ребре стола-комплекса является тождественной (свободная границы) или транспозицией. Тем самым, каждой дуге на плоскости (проекции одной или несколько ребер стола-комплекса) сопоставлена перестановка, состоящая из неподвижных точек и независимых транспозиций. В каждой вершине выполнено условие коммутирования перестановок на пересекающихся ребрах.

Естественным следующим вопросом является задача классификации бильярдных книжек. Данная задача существенно сложнее, чем в случае топологических бильярдов. Дело в том, последние не могли иметь “разветвлений”: окрестность каждой точки конфигурационного пространства гомеоморфна или открытому диску, или полудиску (как частный случай, четверть диска с центром в вершине угла). Единственным же условием для книжек является коммутирование перестановок в каждой вершине комплекса.

#### 3.1. Классификация книжек с малым числом ребер склейки

Здесь и далее перестановки на эллиптических дугах обозначим символом  $\omega$ , на гиперболических — символом  $\sigma$ , а на фокальных, т.е. лежащих на оси  $Ox$  — символом  $\tau$ .

Опишем все бильярдные столы-комплексы с малым (1, 2 или 3) числом ребер склейки. Поскольку граница проекции стола на плоскость заведомо не может иметь меньше гладких граничных дуг, чем количество ребер комплекса, то граница стола может быть лишь областями вида  $A_2, A_1, A'_2, A'_1$  (см. например, [34], а также рис. 1):

- область  $A_2$ : внутренность эллипса, в ней два фокуса;
- область  $A_1$ : ограничена дугой гиперболы и дугой эллипса, в ней один фокус;
- область  $A'_1$  и  $A'_2$ : верхняя половина  $y \geq 0$  областей  $A_1$  и  $A_2$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** 1. Любая бильярдная книжка с одним 1-ребром имеет вид  $A_2(N, \omega)$ , т.е. является склейкой  $N$  эллипсов по циклической перестановке  $\omega = (1, \dots, N)$ .

2. Особыми значениями интеграла являются  $\lambda = 0, b, a$ . При этом уровень  $\lambda = 0$  состоит из двух (минимальных) окружностей, уровень  $\lambda = a$  состоит из одной (при нечетном  $N$ ) или двух (при четном  $N$ ) максимальных окружностей. Уровень  $\lambda = b$  содержит такое же количество особых окружностей, и слоение Лиувилля в окрестности такой окружности послойно гомеоморфно седловой боттовской (невыврожденной) особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Первый факт следует из того, что элементарные билиарды (кроме области  $A_2$ , ограниченной эллипсом) имеют более одной граничной дуги.

2. Класс гомеоморфности поверхности уровня энергии и интеграла билиардной системы без потенциала меняется лишь при уровнях  $\lambda$ , соответствующих полуосям ( $\lambda = b, a$ ) или граничным дугам склеиваемых 2-граней комплекса.

Уровень  $\lambda = 0$  содержит границу каждой плоской области стола  $A_2(N, \omega)$ . Поскольку в комплексе имеется лишь одно такое ребро, то ему соответствует движение по эллипсу (по или против часовой стрелки). По аналогии с областями  $A_2, 2A_2$  и т.п. (см. [29]) нетрудно видеть, что в окрестности данной окружности слои являются торами, и каждая из двух полулокальных особенностей послойно гомеоморфна минимальному атому  $A$  [12], т.е. произведению расслоенного диска на окружность.

При  $\lambda = a$  в проекции на плоскость  $Oxy$  движение частицы происходит по вертикальной оси  $Oy$ . Каждая траектория частицы замкнута, т.е. после нескольких отражений она должна вернуться на тот же лист и иметь то же направление (вверх или вниз), что в начале. Поскольку каждое отражение меняет направление, то циклу соответствует четное число ударов о границу (т.е. четное количество применения  $\omega$  — степень перестановки  $\omega^2$ ). Если  $N \neq 2$ , то перестановка  $\omega^2$  для циклической  $\omega$  состоит из двух циклов длины  $N/2$ . Аналогично доказательству для простейших изученных книжек [36], это один или два атома  $A$ .

В случае  $\lambda = b$  особое множество проектируется на ось  $Ox$ . При этом проекция особого слоя (и близких слоев  $\lambda = b \pm \varepsilon$ ) содержит не только окрестность данного отрезка. Аналогично случаю  $\lambda = a$ , особое множество состоит из двух окружностей. В окрестности каждой точки отрезка оси  $Ox$  (лежащего внутри эллипса), исключая фокусы и концы отрезка (отражение от границы), слоение Лиувилля послойно гомеоморфно слоению вблизи седловой боттовской точки ранга 1 в  $Q^3$  интегрируемой системы. Поскольку фокусы лежат далеко от границы, то для них то же самое следует из анализа области  $A_2$ , а для окрестности точки отражения это следует по аналогии с топологическими билиардами.

Предложение доказано.  $\square$

Теперь опишем все билиардные книжки с ровно двумя 1-ребрами склейки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Любая билиардная книжка с двумя граничными ребрами, т.е. комплекс с двумя 1-клетками, является либо склейкой  $N$  колец  $C_2$  (ограниченных двумя эллипсами) по перестановкам  $\omega_1 = (1, \dots, N)$  и  $\omega_2 = (i(1), \dots, i(N))$  порядка  $N$  на внешнем и внутреннем эллипсах, либо склейкой  $N$  листов вида  $A_1$  по перестановкам  $\sigma, \omega$  на гиперболическом и эллиптическом корешках либо склейкой  $N$  листов типа  $A'_2$  с перестановками  $\omega, \tau$  на эллиптическом и фокальном корешках следующего вида:

- $C_2(N, \omega_1, \omega_2) : N \in \mathbb{N}, \omega_1 = (1, \dots, N), \omega_2 = (i(1), \dots, i(N)) \in S_n$ , где порядок  $\omega_2$  равен  $N$ .
- $A'_2(N, \tau, \omega) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \dots, N), \tau = \sigma^k, \gcd(k, N) = 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оба ребра (1-клетки) книжки проецируются на одну и ту же квадрику, то книжка не связна. Если проекции двух ребер не пересекаются, то это два софокусных эллипса (и перенумерацией одну из перестановок можно записать как  $(1, \dots, N)$ , а ограничения на другую отсутствуют).

Если два ребра (и их проекции) пересекаются, то перестановки коммутируют. Поскольку над каждой дугой проекции находится лишь одно ребро книжки, то перестановки имеют длину  $N$ . Следовательно, одна есть степень другой, причем наибольший общий делитель степени  $k$  и порядка  $N$  равен 1.  $\square$

Теперь обсудим свойства особых окружностей их слоений Лиувилля. А именно, выясним, когда окрестность каждой такой точки (и их орбиты целиком) в трехмерном уровне энергии

$Q^3$  послойно гомеоморфна таковой для боттовской (невырожденной) особенности ранга 1 в интегрируемой системе.

Для биллиарда  $C_2(N, \omega_1, \omega_2)$  особенность, чьи критические окружности проецируются на внутренний эллипс, будет боттовской только при  $N = 2$ , т.е.  $\omega_2 = \omega_1 = (12)$ . При  $N = 1$  особенности тут нет: соответствующие слои гомеоморфны торам. Остальным уровням интеграла соответствуют боттовские особенности при всех  $N$  и  $\omega_2$  порядка  $N$ .

Фокальному уровню биллиарда на столе  $A_1(N, \sigma, \omega)$  соответствует одна или несколько седловых критических окружностей, т.е. окрестность каждой такой окружности в полулокальной особенности послойно гомеоморфна боттовской (невырожденной) седловой окружности. На удалении от концевых точек отрезка (оси  $Ox$ , лежащего внутри данной области типа  $A_1$ ) это следует из свойств слоения для  $A_1$ , а вблизи концов (лежащих “вдали” от фокусов) — из поведения слоения Лиувилля при склейке (в биллиардных книжках), далекой от фокусов семейства квадрик.

Фокальному уровню биллиарда на столе  $A'_2(N, \tau, \omega)$  соответствует неботтовская седловая критическая окружность, если  $\tau$  содержит циклы длины 3 и более (т.к. что напрямую следует для невыпуклой склейки более чем двух областей). В оставшемся (боттовском) случае имеем  $N = 2, \omega = \omega^1 = (12)$ . Его инвариант Фоменко–Цишанга известен и вычислен в [34] (там такой стол был обозначен как  $\delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ ).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Любая биллиардная книжка с тремя граничными ребрами является либо склейкой  $N$  эллиптических колец  $C_2$  по перестановкам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где одна из них равна  $(1, \dots, N)$  а другая состоит из двух независимых циклов (сумма длин которых равна  $N$ ), либо склейкой  $N$  листов вида  $A_1$  по перестановкам  $\sigma, \omega$  либо склейкой  $A'_2$  по перестановкам  $\tau, \omega$  следующего вида:

- $A_1(N, \sigma, \omega) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \dots, N), \omega = \sigma^k, \gcd(k, N) = 2$ ;
- $A_2(N, \tau, \omega) : N \in \mathbb{N}, \gcd(k, N) = 2$ , где  $\omega = (1, \dots, N), \tau = \omega^k$  или  $\tau = (1, \dots, N), \sigma = \tau^k$ .
- стол склеен из  $N_1$  “левых” половин эллипса и  $N_2$  “правых” половин эллипса (областей типа  $A_1$ ). Тогда  $N_1 = N_2 = N$ , и слоение Лиувилля такого биллиарда совпадает со слоением биллиарда, склеенного из  $2N$  областей типа  $A_1$  по перестановкам вида  $\sigma = (1, \dots, 2N)$  на вертикальной (гиперболической) граничной дуге и  $\omega = \sigma^2$  на эллиптической. Все особые окружности являются боттовскими
- стол склеен из  $N$  областей типа  $A'_1$  (например, часть эллипса, лежащая в одном из четырех квадрантов). При этом каждая из перестановок  $\omega$  (на эллиптической дуге),  $\sigma$  (на гиперболической или вертикальной) и  $\tau$  (на фокальной) должны быть циклическими длинны  $N$  степенями одной и той же перестановки (например,  $\sigma = \omega^k, \tau = \omega^m$ ). Исключая  $N = 1, 2$ , слоения Лиувилля обладают неботтовскими особенностями.

Случай  $A_1(N, \sigma, \omega)$  с перестановками  $\sigma = (1, \dots, N), \omega = \sigma^k$  и наибольшим общим делителем  $\gcd(k, N) = 2$  означает, что перестановка  $\omega$  имеет 2 цикла длины  $N/2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Разумеется, можно построить стол из класса  $A_1(N, \sigma, \omega)$ , поменяв перестановки  $\sigma, \omega$  местами, т.е. взяв  $\sigma = \omega^2, \omega = (1, \dots, N)$ . Слоения Лиувилля двух таких систем будут отличаться направлением роста интеграла, а сами столы-комплексы будут изоморфны друг другу.

Отметим, что при разбиении областей  $A_1$  или  $A'_2$  на половинки (и нетривиальной перестановки их склейки) мы получим не менее четырех ребер склейки (новое ребро поделит хотя бы одну из существующих дуг хотя бы на 2 части).

Стол  $A'_1(N, \omega, \sigma, \tau)$ , исключая  $\tau = (1, 2) \dots (2m-1, 2m)(2m+1) \dots (N)$ , имеет неботтовские перестройки на уровне  $\lambda = b$ . При условии наличия не более трех ребер комплекса, имеем или  $N = 1, \sigma = \omega = \tau = (1) = id$ , или  $N = 2, \sigma = \omega = \tau = (12)$ . При  $N = 1$  слоение Лиувилля не имеет седловых особенностей, а во втором — имеет атом  $A^*$  с метками  $r = 1/2$ , меткой  $n = -1$  и изоэнергетической поверхностью  $Q^3$ , гомеоморфной сферическому расслоению Зейфера с тремя особыми слоями [34].

### 3.2. Биллиардные столы над областью $A_1$

В данном разделе обсудим вопрос классификации биллиардных книжек  $A_1(N, \sigma, \omega)$  над областью  $A_1$  (содержащей один фокус и ограниченной дугой эллипса и дугой ветви гиперболы), склеенных из  $N$  ее одинаковых экземпляров по перестановкам  $\sigma, \omega$  на гиперболической и эллиптической дугах соответственно.

Напомним, что перестановки  $\omega$  и  $\sigma$  коммутируют, а связность стола означает, что образ любого элемента  $1 \dots N$  под действием перестановок  $\omega^\alpha, \sigma^\beta$  по всем  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  совпадает со всем множеством  $N$  листов (т.е. группа, порожденная перестановками  $\sigma$  и  $\omega$ , действует транзитивно на множестве листов).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** Пусть  $\omega \circ \sigma = \sigma \circ \omega$ , и элемент 1 входит в  $O_\sigma(1)$  — независимый цикл длины  $p$  перестановки  $\sigma$ . Тогда множество  $O_\sigma(\omega(1))$  есть независимый цикл длины  $p$  перестановки  $\sigma$ , который либо совпадает с  $O_\sigma(1)$  (если  $\omega(1) = \sigma^k(1), 0 < k < p$ ), либо не пересекается с  $O_\sigma(1)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Данный факт следует из коммутативности  $\sigma$  и  $\omega$ :  $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1))$ . Если  $\omega(1) \in O_\sigma(1)$ , то цикл  $O_\sigma(\omega(1)) \subset O_\sigma(1)$ . Тогда множество образов 1 при действии всех  $\omega^\alpha, \sigma^\beta$  совпадает с  $O_\sigma(1)$ , т.е. из связности стола будет следовать цикличность перестановок  $\sigma$  и  $\omega = \sigma^k$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Пара чисел  $k, N$  полностью задает данную пару перестановок. Перестановка  $\omega = \sigma^k$  имеет  $\gcd(N, k)$  независимых циклов длины  $\frac{N}{\gcd(N, k)}$ . Отметим, что при  $\gcd(N, k) = 2$  отсюда следует результат Предложения 4 для столов  $A_1(\omega, \sigma, N)$ .

Если  $\omega(1) \notin O_\sigma(1)$ , то циклы  $O_\sigma(1)$  и  $O_\sigma(\omega(1))$  не пересекаются. Т.к. число  $p$  — первый натуральный номер, начиная с которого  $\sigma^p(1) = \sigma^0(1) = 1$ , то  $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1)) \neq \omega(1)$  при  $0 < k < p$  (и номера совпадают при  $k = p$ ).  $\square$

Тем самым, все циклы  $O_\sigma(1), O_\sigma(\omega(1)), \dots, O_\sigma(\omega^q(1)) = O_\sigma(1)$  имеют одну и ту же длину  $p$ . Здесь  $q$  — длина цикла  $O_\omega(1)$  (и остальных независимых циклов перестановки  $\omega$ ).

Иными словами, из связности слоя следует, что обе перестановки  $\sigma$  и  $\omega$  есть произведение независимых циклов соответствующих длин  $p$  и  $q$ . В группе всех перестановок вида  $\omega^\alpha, \sigma^\beta$  степени перестановки  $\sigma$  и степени перестановки  $\omega$  образуют циклические подгруппы.

Тем самым, возникают следующие соотношения для некоторых наименьших натуральных  $s, t$  и некоторых  $\alpha \in [0, p-1], \beta \in [0, q-1]$ :

$$\omega^s = \sigma^\beta, \quad \sigma^t = \omega^\alpha, \quad \alpha \in [0, q-1], \quad \beta \in [0, p-1].$$

Стартуем с чисел  $N, p, q$ . Здесь  $N$  — количество листов в книжке, а числа  $p, q$  — длины циклов  $\sigma$  и  $\omega$  соответственно. В качестве таких длин подходят любые делители  $N$ , такие что  $pq \mid N$ . Количество циклов в перестановках  $\sigma$  и  $\omega$  равно  $N/p$  и  $N/q$  соответственно.

Циклы  $O_\sigma(1)$  и  $O_\omega(1)$  имеют  $pq/N$  пересечений. Расстояние между двумя последовательными (в смысле  $\sigma$ , например) пересечениями равно  $p/(pq/N) = N/q$ . Значит, такая степень  $\sigma$  переведет первое в  $O_\sigma$  пересечение в следующее. Тем самым,

$$s = N/p, \quad t = N/q.$$

Числа  $\alpha, \beta$  являются произведениями чисел  $N/p$  и  $N/q$  с некоторыми порождающими элементами (натуральными числами  $a, b$ ) в циклической группе длины  $\frac{pq}{N}$  (т.к. орбиты элемента 1 при действии степени перестановки  $\sigma^\beta$  или  $\omega^\alpha$  порождают пересечение  $O_\sigma$  и  $O_\omega$  целиком).

$$\sigma^t = \omega^\alpha = \omega^{a \cdot s} \quad \omega^s = \sigma^\beta = \sigma^{b \cdot t} = (\sigma^t)^b = \omega^{ab \cdot s}.$$

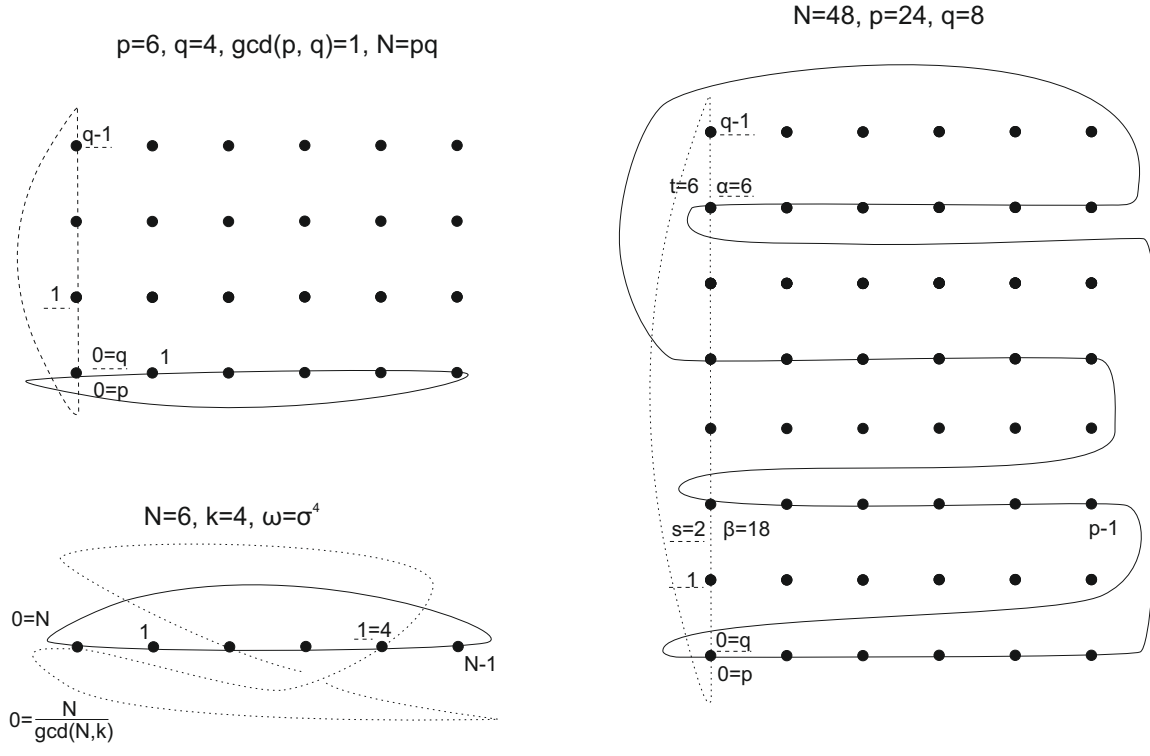


Рис. 5: Действие пары перестановок на множестве из  $N$  элементов, отмеченных точками. Сплошной и штриховой линией отмечены независимые циклы перестановок  $\sigma$  и  $\omega$  соответственно. Указаны степени, в которые надо возвести перестановки  $\sigma$  (число) и  $\omega$  (число с подчеркиванием) для получения перехода в указанную точку из левой нижней. Иллюстрации приведены для трех случаев: а.  $\omega = \sigma^k$  (внизу слева),  $N = pq$  (вверху слева),  $N < pq, \omega^2 = \sigma^{18}, \sigma^6 = \omega^6$  (справа).

Иначе говоря, имеем

$$ab \equiv 1 \pmod{\frac{p \cdot q}{N}}.$$

Тем самым, в кольце вычетов  $\mathbb{Z}_r$ , где  $r = \frac{p \cdot q}{N}$ , надо выбрать группу обратимых элементов  $\mathbb{Z}_r^\times$ , и в ней взять два взаимно-обратных элемента  $a, b$ .

**ТЕОРЕМА 6.** *Связная биллиардная книжка типа  $A_1(N, p, q)$  полностью задается следующими данными:*

- $N \in \mathbb{N}$  — количество листов книжки

- $p, q: N \vdash p, N \vdash q, p \cdot q \vdash N$  — длины циклов  $O_\sigma(1), O_\omega(1)$  перестановок  $\sigma$  и  $\omega$  соотв.,
- $a \in \mathbb{Z}_r^\times$  (где  $r = \frac{p \cdot q}{N} \in \mathbb{N}$ ) задает величины сдвигов на пересечении циклов  $O_\sigma(1)$  и  $O_\omega(1)$

$$\sigma^t = \omega^a = \omega^{at}, \quad \omega^s = \sigma^b = \sigma^{bt}, \quad s = \frac{N}{q}, \quad t = \frac{N}{p}, \quad a \cdot b \equiv 1 \pmod{r}.$$

Все такие билиарды имеют боттовские особенности. Данный результат несложно обобщить на случай трех коммутирующих перестановок, где третья перестановка  $\tau$  стоит на фокальной граничной дуге. Если она не является произведением независимых транспозиций и неподвижных элементов, то особенность на уровне  $\lambda = b$  заведомо не будет боттовской.

### 3.3. Инварианты слоений для книжек над областью $A_1$

Выше мы получили классификацию билиардных книжек малой сложности, в частности, столов-комплексов, имеющих малое количество одномерных ребер — дуг склейки. Рассмотрим случай, когда одна из перестановок — циклическая порядка  $m$ . Тогда из условия коммутирования следует, что другая перестановка будет ее степенью.

Задача вычисления инвариантов билиардов на столах, листы которых содержат фокусы семейства эллипсов и гипербол, весьма непростая задача даже в случае плоских и топологических билиардов.

**ТЕОРЕМА 7.** Пусть  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$  — циклическая перестановка из  $m$  элементов. Рассмотрим билиардные книжки  $A_1(m, \sigma, id)$ , склеенные из  $m$  экземпляров билиарда  $A_1$  по перестановкам  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$  на гиперболическом корешке и  $\omega = id$  на эллиптическом корешке, а также билиардные книжки  $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$  для  $\omega = \sigma^{-1}$ . Тогда инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля этих билиардов на изокэнергетической поверхности  $Q_h^3, h > 0$  изображены на рис. 7а) для билиардной книжки  $A_1(m, \sigma, id)$  и на рис. 7б) (для билиардной книжки  $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$ ).

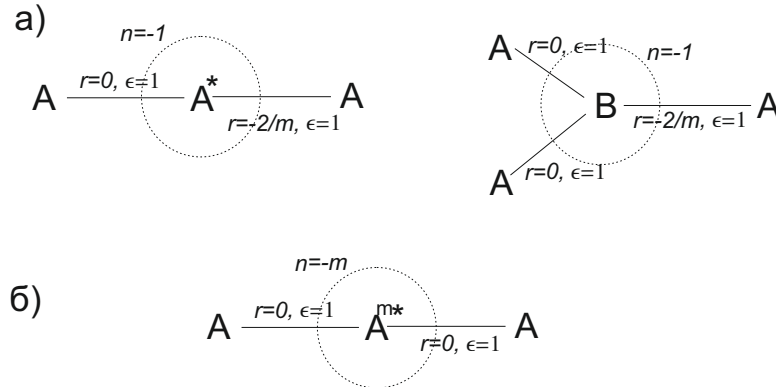


Рис. 6: Инварианты Фоменко–Цишанга для книжки, склеенной из  $m$  экземпляров билиарда  $A_1$ , где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$ , а на эллиптическом корешке — тождественная (а) или обратная ей (б) перестановка. В случае а) вид грубой молекулы зависит от четности  $m$ . Для нечетного  $m$  — молекула слева, а для четного — справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим случай бильярдной книжки  $A_1(m, \sigma, id)$ .

1a. Количество торов на уровне интеграла  $\lambda < b$  (на нём траектории касаются эллипсов) описывается количеством циклов в перестановке  $\sigma^2$ . В самом деле, совершая движение сверху вниз вдоль каустики-эллипса и ударяясь только в эллиптическую границу материальная точка не меняет номер бильярда. При ударе о гиперболическую границу номер бильярда увеличивается на единицу (результат необходимо взять по модулю  $m$ ), но направление вдоль эллипсов (каустики и граничного) меняется на противоположное. Чтобы снова его поменять, материальной точке необходимо дважды удариться о гиперболическую границу, поменяв номер бильярда по перестановке  $\sigma^2$ . Количество циклов этой перестановки фиксирует количество торов Лиувилля. Поэтому оно в случае четного  $m$  равно двум, т.к.  $\sigma^2 = (1\ 3\ \dots\ m-1)(2\ 4\ \dots\ m)$ , а в случае нечетного  $m$  – единице, т.к.  $\sigma^2 = (1\ 3\ \dots\ m\ 2\ 4\ \dots\ m-1)$ .

На уровне интеграла  $\lambda > b$  (траектории касаются гипербол) всегда один тор. Материальная точка в результате ударов о гиперболическую границу может произвольно поменять номер бильярда (ударившись подходящее число раз).

На уровне интеграла  $\lambda = b$  выделена ровно одна критическая траектория, проходящая по фокальной прямой. Так как можно показать, что все перестройки в бильярдах невырожденные, то вид атома этим полностью определяется. Перестройку на этом уровне можно описать и по-другому. Перестройка торов в бильярде  $A_1$  на фокальном уровне описывается атомом  $A^*$ . Причем отмена бильярдного закона на гиперболической границе приводит к разрезу этого атома вдоль двумерного атома  $B$ , трансверсального критической окружности. Склейка  $m$  экземпляров разрезанного бильярда  $m$  в бильярдную книжку  $A_1(m, \sigma, id)$  приводит к склейке  $m$  разрезанных атомов  $A^*$ . Поэтому если число  $m$  четно, то у полученного атома будет четное число “перекруток” (что делает его гомеоморфным атому  $B$ ). Если  $m$  нечетно, то итоговый атом останется гомеоморфным атому  $A^*$  (см. аналогичное доказательство Предложения 1).

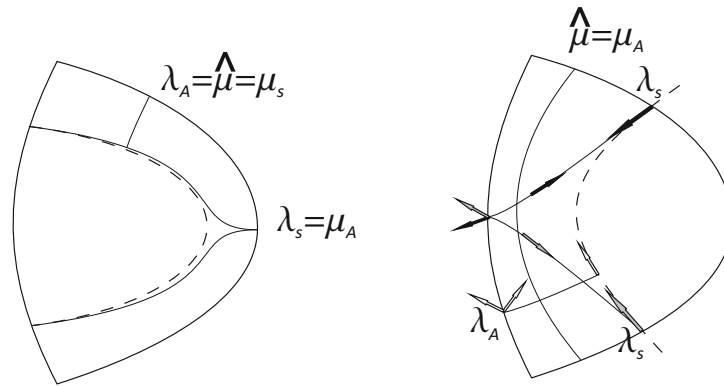


Рис. 7: Циклы для книжки  $A_1(m, \sigma, id)$ .

1б. Остается вычислить метки. Ориентируем все ребра по направлению к седловому атому. На рисунке 7 изображены проекции циклов на бильярдный стол. Как и в доказательстве остальных положений данной работы, мы будем изображать циклы их проекциями — кривыми на бильярдном столе, прообразы которых на торах Лиувилля будут реализовывать подходящие циклы  $\lambda$  и  $\mu$ .

На торах, траектории на которых касаются эллипсов, проекции циклов  $\lambda_A$  (и соответственно  $\mu_s$ ) лежат только на одном листе бильярдной книжки (без ограничения общности можно считать, что на первом). Проекция циклов  $\lambda_s$  и  $\mu_A$  проходит по всем листам книжки. Вследствие очевидных соотношений  $\lambda_s = \mu_A$ ,  $\mu_s = \lambda_A$  получаем что матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Откуда метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  такая матрица не дает.

Далее вычислим метки на ребре графа, соответствующем семейству торов, для которых траектория частицы касается гипербол (т.е.  $\lambda$ ). Разберем отдельно случаи четного и нечетного  $m$ .

1в. Пусть  $m$  четно. Тогда при взятии прообраза кривой для восстановления цикла  $\lambda_s$  необходимо брать часть кривой с черными векторами скорости на нечетных номерах листов бильярдной книжки и часть кривой с серыми векторами скорости на четных номерах листов бильярдной книжки (см. рис. 7). Тогда такой цикл будет пересекаться с циклом  $\hat{\mu} = \mu_s$  в одной точке (напомним что проекция этого цикла лежит только в одном листе бильярда). Исчезающий цикл  $\lambda_A$  проходит по всем листам бильярдной книжки проходя на каждом листе от каустики до границы. В результате мы имеем на этом ребре следующие соотношения. Во-первых,  $\mu_s = \mu_A$  – цикл  $\hat{\mu}$  пересекается с циклом  $\lambda_A$  в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку бильярда. Во-вторых,  $\lambda_s = -\lambda_A + \frac{m}{2}\mu_A$ . Поясним, что цикл  $\lambda_A$  на каждом листе бильярда проходит до каустики и обратно, так же как и соответствующая дуга-проекция цикла  $\lambda_s$ . Знак минус перед  $\lambda_A$  выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель (так как ранее мы фиксировали ориентацию на  $Q^3$  ориентацией цикла  $\mu_s$  выбрав её сонаправленной с ориентацией цикла  $\mu_A$ ). Далее заметим что цикл  $\lambda_s$  проходит вдоль каустики в обоих направлениях на каждой паре бильярдных  $A_1$ , то есть в итоге он проходит вдоль каустики ровно  $\frac{m}{2}$  раз. Когда соответствующий тор Лиувилля стремится к седловому значению этот цикл переходит в критическую траекторию, а когда к максимальному то наматывается на критическую подходящее число раз, оставаясь сонаправленным с ней. Это определяет знак перед  $\mu_A$  в рассматриваемом соотношении. Матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Откуда метки  $r = -\frac{2}{m}$ ,  $\varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n = [-\frac{1}{\frac{m}{2}}] = [-\frac{2}{m}] = -1$ .

1г. Пусть теперь  $m$  нечетно. Тогда для восстановления цикла  $\lambda_s$  необходимо брать обе части кривой, изображенной на рисунке 7 (как с черными так и с серыми векторами скорости). Теперь выражение этого цикла через базис на граничном торе атома  $A$  выглядит так:  $\lambda_s = -2\lambda_A + m\mu_A$  (фактически мы вынуждены были удвоить этот цикл). Далее, такой цикл  $\lambda_s$  теперь пересекает цикл  $\hat{\mu}$  в двух точках. Теперь в качестве  $\mu_s$  необходимо выбрать цикл  $\frac{\hat{\mu} + \lambda_s}{2}$  (см. подробнее правила выбора циклов на граничных торах атомов со звездочками [12]). Тогда  $\mu_s = \frac{\hat{\mu} + \lambda_s}{2} = \frac{\hat{\mu} - 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = \frac{\mu_A - 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = -\lambda_A + \frac{m+1}{2}\mu_A$ . Матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -2 & m \\ -1 & \frac{m+1}{2} \end{pmatrix}$ . Откуда метки  $r = -\frac{2}{m}$ ,  $\varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n = [-\frac{\frac{m+1}{2}}{\frac{m}{2}}] = [-\frac{m+1}{2m}] = -1$ .

2. Рассмотрим бильярдную книжку  $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$ . Она отличается от предыдущей тем, что вместо тождественной перестановки на эллиптическом корешке теперь на нём стоит обратная к  $\sigma$  перестановка.

2а. На минимальном и максимальном уровнях интеграла в силу симметрии теперь одна особая траектория (и примыкающий к ней один тор). А на седловом – ровно  $m$  критических траекторий, проходящих по фокальной прямой: траектория двигая по листу  $i$  влево и по листу  $i + 1 \bmod m$  влево. Тогда, атом описывающий перестройку однозначно определяется как атом  $A^{m*}$ , где число звездочек равно  $m$  (только он перестраивает один тор в один так чтобы на особом слое лежало  $m$  критических траекторий). Накрывающий его атом  $C_m$  может быть восстановлен как прообраз дуги фиксированной гиперболы.

2б. Вычислим метки. Отметим, что на ребре соответствующем тору, траектории которого касаются эллипсов проекции циклов можно взять также как на рисунке 7. Однако теперь цикл  $\lambda_A = \hat{\mu} = \mu_s$  проходит по всем листам бильярдной книжки, а цикл  $\lambda_s = \mu_A$  только по двум (например по первому и последнему). Поэтому они по-прежнему пересекаются только в одной точке. Рассмотрим тор, траектории которого касаются гипербол. Для выбора циклов  $\lambda_s$ ,  $\lambda_A$ ,  $\hat{\mu}$  также воспользуемся рисунком 7. Цикл  $\lambda_s$  также проходит по двум листам, при этом можно



считать, что на первом листе он направлен к каустике-гиперболе, а на последнем (с номером  $m$ ) от неё. Этот цикл пересекается с циклом  $\lambda_A$  в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку при стремлении тора к критической максимальной окружности. Следовательно,  $\lambda_s = \mu_A$ .

Для выбора  $\mu_s$  согласно правилу выбора циклов необходимо чтобы выполнялось следующее соотношение  $\frac{\sum \hat{\mu} + m\lambda_s}{2} = \sum \mu_s$  так как седловой атом имеет ровно  $m$  звездочек. На торе где траектории касаются эллипсов мы имеем один цикл  $\hat{\mu}$  который в одной точке пересекается с циклом  $\lambda_s$ . Поэтому подправить прибавив необходимое число циклов  $\lambda_s$  необходимо цикл  $\hat{\mu}$  на другом ребре.

2в. Найдем связь между циклами  $\hat{\mu}$  (связной частью прообраза дуги гиперболы) и циклами  $\lambda_A$  и  $\mu_A = \lambda_s$ . Цикл  $\mu_A$  проходит вдоль каустики в обоих направлениях один раз, и от каустики до гиперболического корешка в обе стороны дважды. Цикл  $\lambda_A$  проходит от каустики до гиперболического корешка и обратно  $m$  раз (по разу на каждом листе). Сколько раз вдоль каустики проходит связная часть прообраза дуги гиперболы (цикл  $\hat{\mu}$ ) зависит от четности  $m$ . Если  $m$  четно, то циклов  $\hat{\mu}$  два. Для одного из них на нечетных листах вектора скорости направлены вверх, а на нечетных – вниз, а для другого – наоборот. Получается движение вдоль каустики и обратно было совершено  $\frac{m}{2}$  раз. Если  $m$  нечетно, то движение вдоль каустики и обратно было совершено ровно  $m$  раз (на каждом листе вверх и вниз). Получаем, что при нечетном  $m$  искомое соотношение имеет вид

$$-2\lambda_A + \hat{\mu} = m\mu_A,$$

а при четном

$$-2\lambda_A + 2\hat{\mu} = m\mu_A.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, знак минус перед  $\lambda_A$  выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель. Дело в том, что ориентацию цикла  $\hat{\mu}$  на этом торе мы уже зафиксировали совпадающей с ориентацией цикла  $\mu_A$ .

2г. Пусть теперь  $m$  нечетно. Тогда цикл  $\hat{\mu}$  один и мы получаем, что

$$\mu_s = \frac{\hat{\mu} + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Если  $m$  четно, то циклов  $\hat{\mu}$  два и мы получаем, что

$$\mu_s = \hat{\mu} + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Матрица склейки равна  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ . Откуда метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $n = [-\frac{m}{1}] = -m$ .

□

## 4. Заключение

Построенные в работе бильярды показывают, что для многообразия Зейферта без особых слоев можно *независимо* выбирать значение метки  $n$  и тип слоения Лиувилля (задаваемый связным подграфом с седловыми 3-атомами без звездочек в вершинах). Вопрос о реализации многообразий Зейферта со слоями  $(1, 2)$ , т.е. седловыми критическими окружностями, имеющими неориентируемую сепаратрисную диаграмму, пока открыт. Было бы интересно выяснить, можно ли модифицировать предложенную в работе конструкцию для нового случая. Начатая в работе классификация бильярдных книжек и вычисление их инвариантов также весьма интересна и открывает много вопросов, связанных с теорией накрытий, алгеброй и топологией.

При решении задач о бильярдных книжках и их слоениях, как ожидается, возникнут связи с рядом задач и направлений алгебры и теории чисел: конечные группы, кольца вычетов, коммутирующие перестановки и вопросы делимости. Например, в одной из задач о бильярдных столах, гомеоморфных тору, полученный ответ выражался в терминах коэффициентов Безу [37] из разложения наибольшего общего делителя.

Кроме того, поскольку оба объекта — инвариант Фоменко–Цишанга и бильярдный стол-комплекс — допускают описание в виде графов, оснащенных перестановками и некоторыми метками, а вычисление инварианта бильярда не требует интегрирования или решения систем алгебраических уравнений (т.е. допускает чисто комбинаторные решения), то вызывает большой интерес построение алгоритма вычисления такого инварианта для бильярдной книжки.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы // Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
2. Табачников С. Л. Геометрия и бильярды // М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский инсп. комп. исслед., 2011.
3. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе // М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
4. Козлов В.В., Трещев Д.В. *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991.
5. Glutyuk A. On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature // J. of the Europ. Math. Soc. 2021. V. 23, №3. P. 995-1049.
6. Kaloshin V., Sorrentino A. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Ann. of Math. 2018. V. 188, №1. P. 315-380.
7. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209, №12. С. 17-56.
8. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. Унив., Матем. Мех. 2019. №3. С. 15-25.
9. Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // ДАН. 2015. Т. 465, №2. С. 150-153.
10. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276-1307.
11. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, №3. С. 546-575.
12. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2 // Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет». 1999.
13. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Ливилля интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2021. Т. 212, №8. С. 89-150.

14. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех. 2020. №4. С. 22-28.
15. Ведюшкина В. В. Локальное моделирование слоений Лиувилля бильярдами: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. Унив. Матем. Механ. №2. С. 60-64.
16. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А., Фоменко А. Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. Матем., Механ. Процессы упр. 2020. Т. 493. С. 9-12.
17. Якоби К. Лекции по динамике, М., Л. ОНТИ. 1936.
18. Glutsyuk A. A. On Two-Dimensional Polynomially Integrable Billiards on Surfaces of Constant Curvature // Dokl. Math. 2018. V. 98, №1. P. 382-385.
19. Bialy M., Mironov A. E. Algebraic non-integrability of magnetic billiards // J. Phys. A. 2016. V. 49, №45. P. 455101.
20. Glutsyuk A. A., On commuting billiards in higher-dimensional spaces of constant curvature // Pacific J. Math. 2020. V. 305, №2. P. 577-595.
21. Vedyushkina V. V., Fomenko A. T., Kharcheva I. S., Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards // Dokl. Math. 2018. V. 97, №2. P. 174-176.
22. Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. 2009. V. 14, №4-5. P. 479-494.
23. Фокичева В. В. Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе” // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. №5. С. 31-34.
24. Фокичева В. В., Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014, №4. С. 18-27.
25. Dragović V. & Radnović M.. Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials // Regul. Chaotic Dyn. 2019. V. 24, №1. P. 1-35.
26. Adabrah A. K., Dragović V., Radnović M. Elliptical Billiards in the Minkowski Plane and Extremal Polynomials // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15, №4. P. 397-407.
27. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, №2. С. 49-77.
28. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, №5. С. 1071-1075.
29. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб., 2015. Т. 206, №10. С. 127-176.
30. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, №4. С. 20-67.

31. Ведюшкина В.В. Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических билиардов // Матем. сб. 2019. Т. 210, №3 17-74.
32. Кибкало В.А., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками Труды Моск. матем. общ.. 2021. Т. 82, №1. С. 45-78.
33. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Силовые эволюционные билиарды и билиардная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа // Доклады РАН. 2021. Т. 496. С. 5-9.
34. Фокичева В.В. Топологическая классификация интегрируемых билиардов // Канд. Диссерт., Москва. МГУ. 2016.
35. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии // М., изд-во МГУ, 1991, 303 с.
36. Ведюшкина В.В. Интегрируемые билиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы // Докт. Диссерт., Москва. МГУ. 2020.
37. Ведюшкина В.В. Интегрируемые билиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Матем. сб. 2020. Т. 211, №2. С. 46-73.

## REFERENCES

1. Birkhoff, G. D. 1927, Dynamical systems // AMS Colloq. Publ., 9, AMS, New York, 1927, 295p.
2. Tabachnikov, S.L. 2005, Geometry and Billiards, Student Mathematical Library, vol. 30.
3. Dragovic, V. & Radnovic, M. 2010, Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 302p.
4. Kovlov, V.V & Treshchev, D.V. 1991, Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts, Transl. Math. Monogr., 89, AMS, Providence, RI, 1991, viii+171 p.
5. Glutyuk, A. 2021, "On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature", *J. of the Europ. Math. Soc.*, vol. 23, no. 3, pp. 995-1049.
6. Kaloshin, V. & Sorrentino, A. 2018, "On the local Birkhoff conjecture for convex billiards", *Ann. of Math.*, vol. 188, no. 1, pp. 315-380.
7. Vedyushkina, V.V. & Kharcheva, I.S. 2021, "Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 12, pp. 1690-1727.
8. Fokicheva, V.V. & Fomenko, A.T. 2019, "Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 74, no. 3, pp. 98-107.
9. Fokicheva, V.V. & Fomenko, A.T. 2015, Integrable Billiards Model Important Integrable Cases of Rigid Body Dynamics", *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 682-684.
10. Fomenko A.T. 1987, "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629-658.
11. Fomenko A.T. & Zieschang H. 1991, "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567-596.

12. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
13. Vedyushkina, V. V. & Kharcheva, I. S. 2021, "Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems", *Sb. Math.*, vol. 212, no. 8, pp. 1122-1179.
14. Vedyushkina, V. V. & Kibkalo, V. A. 2020, "Realization of the numerical invariant of the Seifert fibration of integrable systems by billiards", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 75, no. 4, pp. 161-168.
15. Vedyushkina, V. V. 2020, "Local Modeling of Liouville Foliations by Billiards: Implementation of Edge Invariants", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 76, no. 2, pp. 60-64.
16. Vedyushkina, V. V., Kibkalo, V. A. & Fomenko, A. T. 2020, Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants", *Dokl. Math.*, vol. 102, no. 1, pp. 269-271.
17. Jacobi, C. G. 1884, Vorlesunger uber Dynamik, Berlin: Druck und Verlag von Reimer.
18. Glutsyuk, A. A. 2018, "On Two-Dimensional Polynomially Integrable Billiards on Surfaces of Constant Curvature", *Dokl. Math.*, vol. 98, no. 1, pp. 382-385.
19. Bialy, M. & Mironov A. E. 2016, "Algebraic non-integrability of magnetic billiards", *J. Phys. A.*, vol. 49, no. 45, pp. 455101.
20. Glutsyuk, A. A. 2020, "On commuting billiards in higher-dimensional spaces of constant curvature", *Pacific J. Math.*, vol. 305, no. 2, pp. 577-595.
21. Vedyushkina, V. V., Fomenko, A. T. & Kharcheva, I. S. 2018., "Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards", *Dokl. Math.*, vol. 97, no. 2, pp. 174-176.
22. Dragović, V. & Radnović, M. 2009, "Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 14, no. 4-5, pp. 479-494.
23. Fokicheva, V. V. 2012, "Description of singularities for system "billiard in an ellipse", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 67, no. 5-6, pp. 217-220.
24. Fokicheva, V. V. 2014, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 69, no. 4, pp. 148-158.
25. Dragović, V. & Radnović, M. 2019, "Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 24, no. 1, pp. 1-35.
26. Adabrah, A. K., Dragović, V. & Radnović, M. 2019, "Elliptical Billiards in the Minkowski Plane and Extremal Polynomials", *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, vol. 15, no. 4, pp. 397-407.
27. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko A. T. 1990, "Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity", *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59-94.
28. Fomenko, A. T. 1986, "Morse theory of integrable Hamiltonian systems", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 33, no. 2, pp. 502-506.
29. Fokicheva, V. V. 2015, "A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics", *Sb. Math.*, vol. 206, no. 10, pp. 1463-1507.

- 30. Vedyushkina, V.V. & Fomenko, A.T., “Integrable Topological Billiards and Equivalent Dynamical Systems“, *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688–733.
- 31. Vedyushkina, V.V. 2019, “The Fomenko–Zieschang invariants of nonconvex topological billiards“, *Sb. Math.*, vol. 210, no. 3, 310–363.
- 32. Kibkalo, V. A., Fomenko, A. T. & Kharcheva, I. S. 2021, “Realization of Integrable Hamiltonian Systems by Billiard Books“, *Trans. of Moscow Math. Soc.*, vol. 82, no. 1, (in press). Available at: <https://arxiv.org/abs/2012.05337> .
- 33. Vedyushkina, V.V. & Fomenko, A.T. 2021, “Force Evolutionary Billiards and Billiard Equivalence of the Euler and Lagrange Cases“, *Dokl. Math.*, vol. 103, no. 1, pp. 1-4.
- 34. Fokicheva, V. 2016, Topological Classification of Integrable Billiards, PhD Thesis, Moscow, Lomonosov MSU.
- 35. Matveev, S.V. & Fomenko A.T. 1997, Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds, Springer, 352 p.
- 36. Vedyushkina, V.V. 2020, Integrable billiards on CW-complexes and integrable Hamiltonian systems, Doctoral Thesis, Moscow, Lomonosov MSU.
- 37. Vedyushkina, V.V. 2020, “Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus“, *Sb. Math.*, vol. 211, no. 2, pp. 201-225.

Получено 15.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-83-105

Обобщённая проблема Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле<sup>1</sup>

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва,  
Н. М. Добровольский

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Добровольский Михаил Николаевич** — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).

*e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru*

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: chubarik2009@live.ru*

**Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

**Добровольский Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

## Аннотация

В работе изучается связь проблемы определения количества точек двумерной решётки приближений Дирихле в гиперболическом кресте и интегрального представления гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Введено понятие компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Найдено представление для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле через дзета-функцию Римана. Относительно первой компоненты установлен парадоксальный факт, что она непрерывна для любого иррационального  $\beta$  и разрывна во всех рациональных точках  $\beta$ . Это относится к зависимости только от параметра  $\beta$ .

Для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального значения  $\beta = \frac{a}{b}$  получена асимптотическая формула для количества точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле в гиперболическом кресте. Полученная формула даёт интегральное представление в плоскости  $\sigma > \frac{1}{2}$ .

Основным инструментом исследований была формула суммирования Эйлера. Для целей работы необходимо было получить явные выражения остаточных членов в асимптотических формулах для числа точек классов вычетов двумерной решётки приближений Дирихле по растянутой фундаментальной решётке  $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

И теорема 1, и теорема 2, доказанные в работе, показывают наличие зависимости второго члена асимптотической формулы и вычета гиперболической дзета-функции решётки

<sup>1</sup>Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004\_р\_а при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

$\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$  от величины знаменателя  $b$  и независимости от числителя  $a$ . Ранее аналогичные эффекты были обнаружены А. Л. Рощеней для других обобщений проблемы Дирихле.

В работе поставлена задача об уточнении порядка остаточного члена в асимптотических формулах с помощью изучения величин

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

Предлагается сначала изучить возможности элементарного метода И. М. Виноградова, а потом получить наиболее точные оценки с помощью метода тригонометрических сумм.

В работе намечены направления дальнейших исследований по данной тематике.

*Ключевые слова:* дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция Гурвица.

*Библиография:* 20 названий.

#### Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обобщённая проблема Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле // Чебышевский сборник. 2021. Т. 23, вып. 1, С. 83–105.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-83-105

### Generalized Dirichlet problem for a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations<sup>2</sup>

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

**Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Pedagogical University; Tula State University (Tula).

*e-mail:* [cheb@tspu.tula.ru](mailto:cheb@tspu.tula.ru), [nikolai.dobrovolsky@gmail.com](mailto:nikolai.dobrovolsky@gmail.com)

**Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich** — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

*e-mail:* [m.dobrovolsky@gcras.ru](mailto:m.dobrovolsky@gcras.ru)

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail:* [chubarik2009@live.ru](mailto:chubarik2009@live.ru)

**Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* [i\\_rebrova@mail.ru](mailto:i_rebrova@mail.ru)

**Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* [dobrovol@tspu.ru](mailto:dobrovol@tspu.ru)

<sup>2</sup>This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 \_r\_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.



### Abstract

The paper studies the relationship between the problem of determining the number of points of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in a hyperbolic cross and the integral representation of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations. The concept of components of hyperbolic zeta-functions of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations is introduced. A representation is found for the first component of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations via the Riemann zeta function. With respect to the first component, the paradoxical fact is established that it is continuous for any irrational  $\beta$  and discontinuous at all rational points of  $\beta$ . This refers to the dependency only on the  $\beta$  parameter.

For the second component of the hyperbolic zeta-function of the two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of a rational value  $\beta = \frac{a}{b}$ , an asymptotic formula is obtained for the number of points of the second component of the two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the hyperbolic cross. The resulting formula gives an integral representation in the half-plane  $\sigma > \frac{1}{2}$ .

The main research tool was the Euler summation formula. For the purposes of the work, it was necessary to obtain explicit expressions of the residual terms in asymptotic formulas for the number of points of residue classes of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations over a stretched fundamental lattice  $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Both Theorem 1 and Theorem 2, proved in the paper, show the dependence of the second term of the asymptotic formula and the deduction of the hyperbolic zeta function of the lattice  $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$  depends on the magnitude of the denominator  $b$  and independence from the numerator  $a$ . Earlier, similar effects were discovered by A. L. Roscheney for other generalizations of the Dirichlet problem.

The paper sets the task of clarifying the order of the residual term in asymptotic formulas by studying the quantities

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

It is proposed to first study the possibilities of the elementary method of I. M. Vinogradov, and then to obtain the most accurate estimates using the method of trigonometric sums. The paper outlines the directions of further research on this topic.

*Keywords:* Riemann zeta function, Dirichlet series, Hurwitz zeta function.

*Bibliography:* 20 titles.

### For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Generalized Dirichlet problem for a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 83–105.

## 1. Введение

В работах [6] – [8] была решена проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки. В работах [5], [20] эта проблема нашла своё решение для случая гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки.

Уже случай двумерной решётки приближений Дирихле при иррациональном  $\beta$  не является декартовой решёткой.

В работе [9] было найдено удобное функциональное уравнение для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального  $\beta$ .

Проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решётки тесно связана с проблемой определения количества точек решётки в гиперболическом кресте.

Цель настоящей работы — найти асимптотическую формулу для количества точек двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального  $\beta$ .

## 2. Компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

Пусть у нас задано вещественное число  $\beta > 0$ . Рассмотрим решетку Дирихле диофантовых приближений  $\Lambda(\beta)$ , заданную равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}$$

с базисом  $\vec{\lambda}_1 = (1, \beta)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (0, -1)$  и базисной матрицей  $M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Если  $\beta$  — рациональное число, то решётка  $\Lambda(\beta)$  — декартова решётка, в противном случае она не является декартовой решёткой. В любом случае она является унимодулярной решёткой.

Действительно, если  $\beta = \frac{a}{b}$  — рациональное число,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $(a, b) = 1$ , то получаем объединение  $b$  простейших декартовых решёток:

$$\Lambda\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{ \left( q, q\frac{a}{b} - p \right) \mid q, p \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k=0}^{b-1} \left( \left( k, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right) = \bigcup_{k=0}^{b-1} (k + b\mathbb{Z}) \times \left( \left\{ \frac{ak}{b} \right\} + \mathbb{Z} \right). \quad (1)$$

Из разбиения (1) мы видим, что решётка приближений Дирихле при рациональном  $\beta = \frac{a}{b}$  содержит целочисленную подрешётку  $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  индекса  $b$  и разбивается на  $b$  классов вычетов  $(k, \{\frac{ak}{b}\}) + b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , которые будем обозначать через  $\Lambda(\frac{a}{b}, k)$ .

Если  $b = 1$ , то для любого целого  $a$  решётка  $\Lambda(a) = \mathbb{Z}^2$ .

Заметим, что для любой решетки Дирихле диофантовых приближений  $\Lambda(\beta)$  её гиперболический параметр  $q(\Lambda(\beta)) = 1$ . Действительно,

$$q(\Lambda(\beta)) = \min_{(q, q\beta - p) \neq (0, 0)} \bar{q} \cdot \overline{q\beta - p} = \bar{1} \cdot \overline{\{\beta\}} = 1.$$

Нетрудно задать её взаимную решётку  $\Lambda^*(\beta)$ , которая определяется взаимным базисом  $\vec{\lambda}_1^* = (1, 0)$ ,  $\vec{\lambda}_2^* = (\beta, -1)$ , базисной матрицей  $M^*(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$  и имеет вид:

$$\Lambda^*(\beta) = \{(q + p\beta, -p) | q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(p - q\beta, q) | q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что взаимная решётка  $\Lambda^*(\beta)$  — унимодулярная и  $q(\Lambda^*(\beta)) = 1$ .

Решётка  $\Lambda(\beta)$  переводится во взаимную решётку  $\Lambda^*(\beta)$  с помощью унимодулярного линейного преобразования  $M$ , задаваемого матрицей

$$M = \begin{pmatrix} \beta^2 + 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, унимодулярное линейное преобразование  $M_1$  с матрицей  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  также переводит решётку  $\Lambda(\beta)$  во взаимную решётку  $\Lambda^*(\beta)$ .

Гиперболическая дзета-функция решётки  $\Lambda(\beta)$  задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(\beta) | \alpha) = \sum_{(q, p) \neq (0, 0)} \frac{1}{(\bar{q}q\beta - p)^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

где  $\bar{x} = \max(1, |x|)$  для любого вещественного  $x$ . Иногда её удобнее записать как сумму по всем точкам решётки:

$$\zeta_H(\Lambda(\beta) | \alpha) = -1 + \sum_{q, p = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(\bar{q}q\beta - p)^\alpha} = -1 + \sum_{\nu=0}^2 \zeta_{H, \nu}(\Lambda(\beta) | \alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_{H,0}(\Lambda(\beta)|\alpha) &= \sum_{q,p=0} 1, \quad \zeta_{H,1}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \sum_{q,p=-\infty, q \neq 0, |q\beta-p| < 1}^{\infty} \frac{1}{|q|^{\alpha}} + \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|p|^{\alpha}}, \\ \zeta_{H,2}(\Lambda(\beta)|\alpha) &= \sum_{q,p=-\infty, q \neq 0, |q\beta-p| \geq 1}^{\infty} \frac{1}{(|q||q\beta-p|)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величины  $\zeta_{H,\nu}(\Lambda(\beta)|\alpha)$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ) назовём  $\nu$ -тыми компонентами гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично,  $\nu$ -тыми компонентами решётки приближений Дирихле  $\Lambda(\beta)$  назовём множества  $\Lambda_{\nu}(\beta)$ , заданные равенствами

$$\begin{aligned}\Lambda_0(\beta) &= \{(0, 0)\}, \quad \Lambda_1(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q \neq 0, |q\beta - p| < 1\} \cup \{(0, -p) | p \neq 0\}, \\ \Lambda_2(\beta) &= \{(q, q\beta - p) | q \neq 0, |q\beta - p| \geq 1\}.\end{aligned}$$

Аналогичное представлению (2), имеем представление для гиперболической дзета-функции взаимной решётки:

$$\zeta_H(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = -1 + \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p - q\beta\bar{q})^{\alpha}} = -1 + \sum_{\nu=0}^2 \zeta_{H,\nu}(\Lambda^*(\beta)|\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_{H,0}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) &= \sum_{p,q=0} 1, \quad \zeta_{H,1}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = \sum_{p,q=-\infty, q \neq 0, |p-q\beta| < 1}^{\infty} \frac{1}{|q|^{\alpha}} + \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|p|^{\alpha}}, \\ \zeta_{H,2}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) &= \sum_{p,q=-\infty, q \neq 0, |p-q\beta| \geq 1}^{\infty} \frac{1}{(|p-q\beta||q|)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величины  $\zeta_{H,\nu}(\Lambda^*(\beta)|\alpha)$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ) назовём  $\nu$ -тыми компонентами гиперболической дзета-функции взаимной двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично,  $\nu$ -тыми компонентами взаимной решётки приближений Дирихле  $\Lambda^*(\beta)$  назовём множества  $\Lambda_{\nu}^*(\beta)$ , заданные равенствами

$$\begin{aligned}\Lambda_0^*(\beta) &= \{(0, 0)\}, \quad \Lambda_1^*(\beta) = \{(p - q\beta, q) | q \neq 0, |p - q\beta| < 1\} \cup \{(p, 0) | p \neq 0\}, \\ \Lambda_2^*(\beta) &= \{(p - q\beta, q) | q \neq 0, |p - q\beta| \geq 1\}.\end{aligned}$$

Ясно, что унимодулярное линейное преобразование  $M_1$  переводит каждую  $\nu$ -тую компоненту решётки  $\Lambda(\beta)$  в  $\nu$ -тую компоненту взаимной решётки  $\Lambda^*(\beta)$ .

ЛЕММА 1. Справедливо равенство

$$\zeta_{H,1}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \zeta_{H,1}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = \begin{cases} 6\zeta(\alpha), & \text{при иррациональном } \beta, \\ 4\zeta(\alpha), & \text{при целом } \beta, \\ (6 - \frac{2}{b^{\alpha}})\zeta(\alpha), & \text{при рациональном } \beta = \frac{a}{b}, b > 1. \end{cases} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если  $\beta$  иррациональное, то для первой компоненты решётки  $\Lambda(\beta)$  справедливо представление

$$\begin{aligned}\Lambda_1(\beta) &= \{(q, \{q\beta\}) | q \geq 1\} \cup \{(q, \{q\beta\} - 1) | q \geq 1\} \cup \{(-q, \{-q\beta\}) | q \geq 1\} \cup \\ &\cup \{(-q, \{-q\beta\} - 1) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует первое равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично, доказывается этот случай для взаимной решётки.

$$\Lambda_1^*(\beta) = \{(-\{q\beta\}, q) | q \geq 1\} \cup \{(-\{q\beta\} + 1, q) | q \geq 1\} \cup \{(-\{-q\beta\}, -q) | q \geq 1\} \cup \\ \cup \{(-\{-q\beta\} + 1, -q) | q \geq 1\} \cup \{(-p, 0) | p \geq 1\} \cup \{(p, 0) | p \geq 1\}.$$

Рассмотрим случай  $\beta$  — целое число. В этом случае, как было показано выше,  $\Lambda(\beta) = \mathbb{Z}^2$ . Отсюда сразу следует, что

$$\Lambda_1(\beta) = \Lambda_1^*(\beta) = \mathbb{Z}_1^2 = \{(q, 0) | q \geq 1\} \cup \{(-q, 0) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.$$

Отсюда следует второе равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле и для первой компоненты гиперболической дзета-функции взаимной решётки.

Пусть теперь  $\beta = \frac{a}{b}$  — рациональное,  $(a, b) = 1$ , тогда для первой компоненты решётки  $\Lambda(\beta)$  справедливо представление

$$\Lambda_1\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{ \left( q, \left\{ q \frac{a}{b} \right\} \right) \middle| q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \left\{ \left( q, \left\{ q \frac{a}{b} \right\} - 1 \right) \middle| q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left( -q, \left\{ -q \frac{a}{b} \right\} \right) \middle| q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \left\{ \left( -q, \left\{ -q \frac{a}{b} \right\} - 1 \right) \middle| q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \\ \cup \{(qb, 0) | q \geq 1\} \cup \{(-qb, 0) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.$$

Отсюда следует третье равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично доказывается этот случай для взаимной решётки.  $\square$

Из доказанной леммы следует, что первая компонента гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле равна первой компоненте гиперболической дзета-функции взаимной решётки и они обе являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости, кроме точки  $\alpha = 1$ , в которой у них полюс первого порядка.

Относительно первой компоненты получаем парадоксальный факт, что она непрерывна для любого иррационального  $\beta$  и разрывна во всех рациональных точках  $\beta$ . Это относится к зависимости только от параметра  $\beta$ .

### 3. Вспомогательные леммы

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du = \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2}, \quad r(\delta) = \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2}, \\ I(T, \delta) = \int_T^\infty \frac{2\sigma(x - \delta)}{x^3} dx, \quad R_1(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\}, \quad R_2(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\}, \\ R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}; \\ S_1(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[ \frac{T}{bq} - \delta \right], \quad S_2(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[ \frac{T}{bp + b\delta} \right], \quad S_3(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{T}{b+b\delta}} \left[ \frac{T}{bq} - \delta \right].$$

Очевидно, что

$$R_1(T, b, \delta) = O\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right), R_1^*(T, b, \delta) = O\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right), R_2^*(T, b, \delta) = O(\sqrt{T}), R_2^*(T, b, \delta) = O(\sqrt{T}).$$

ЛЕММА 2. Для произвольного  $\delta \geq 0$  справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\{ \delta - \frac{k}{b} \right\} = \frac{b-1}{2} + \{b\delta\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $c = [b\{\delta\}]$ ,  $\theta = \{b\delta\}$ , тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{b-1} \left\{ \delta - \frac{k}{b} \right\} &= \sum_{k=1}^{b-1} \left\{ \frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} \right\} = \sum_{k=0}^c \left( \frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} \right) + \sum_{k=c+1}^{b-1} \left( \frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} + 1 \right) = \\ &= \frac{(c+\theta)b}{b} - \frac{b-1}{2} + b-1-c = \frac{b-1}{2} + \{b\delta\}. \end{aligned}$$

□

Приведём без доказательства формулу суммирования Эйлера (см. [15], стр. 10, или [2], стр. 33).

ЛЕММА 3. Пусть  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[a, b]$ , тогда

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx.$$

□

Мы неоднократно будем использовать известную асимптотическую формулу (см. [3], стр. 108)

$$\sum_{q=1}^X \frac{1}{q} = \ln X + \gamma - \frac{\theta(X)}{X}, \quad -1 < \theta(X) < 2,$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера.

Для дальнейшего потребуется более общая лемма, которая в близкой формулировке встречается в малодоступных работах А. Л. Рощени [16]–[19].

ЛЕММА 4. При  $0 < \delta < 1$  справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \ln T + \frac{\rho(T-\delta)}{T} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(T, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя формулу суммирования Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} &= \sum_{0 < p \leq T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \int_0^{T-\delta} \frac{dx}{x+\delta} + \frac{\rho(T-\delta)}{T} - \frac{\rho(0)}{\delta} - \left( -\frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} \right) + \left( -\frac{\sigma(0)}{\delta^2} \right) + \\ &+ \int_0^{T-\delta} \frac{2\sigma(x)}{(x+\delta)^3} dx = \ln T - \ln \delta + \frac{\rho(T-\delta)}{T} - \frac{1}{2\delta} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + \int_{\delta}^1 \frac{2\sigma(x-\delta)}{x^3} dx + I(1, \delta) - I(T, \delta). \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 \frac{2\sigma(x)}{x^3} dx &= \int_{\delta}^1 \frac{x - \delta - x^2 + 2x\delta - \delta^2}{x^3} dx = \left( \frac{1}{\delta} - 1 \right) (1 + 2\delta) + \ln \delta - \\ &- \frac{\delta + \delta^2}{2} \left( \frac{1}{\delta^2} - 1 \right) = \ln \delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta} - \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \ln \delta + \frac{1}{2\delta} + r(\delta). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \ln T + \frac{\rho(T-\delta)}{T} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(T, \delta).$$

□

ЛЕММА 5. Справедливо неравенство  $0 < I(T, \delta) < \frac{1}{8T^2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$0 \leq \{x - \delta\} - \{x - \delta\}^2 \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < \int_T^{\infty} \frac{\{x - \delta\} - \{x - \delta\}^2}{x^3} dx < \frac{1}{4} \int_T^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8T^2}.$$

□

Заметим, что при  $\delta = 0$  получаем уточнение известной асимптотической формулы

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^X \frac{1}{p} &= \ln X + \frac{\frac{1}{2} - \{X\}}{X} + \frac{\{X\} - \{X\}^2}{2X^2} + \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx - \int_X^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx = \\ &= \ln X + \gamma - \frac{\theta(X)}{X}, \quad -1 < \theta(X) < 2, \end{aligned}$$

так как

$$\gamma = \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx, \quad -\frac{5}{8} < \frac{1}{2} - \{X\} + \frac{\{X\} - \{X\}^2}{2X} - X \int_X^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx < \frac{5}{8}.$$

ЛЕММА 6. Справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} S_1(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\ &- R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя лемму 4 при  $\delta = 0$  получим:

$$\begin{aligned}
S_1(T, b, \delta) &= \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[ \frac{T}{bq} - \delta \right] = \frac{T}{b} \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \frac{1}{q} - \delta \cdot \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] - \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} = -\delta \cdot \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] + \\
&+ \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \frac{b \cdot \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \right)}{\sqrt{T}} + \frac{b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right)}{T} + \gamma - I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) \right) - R_1(T, b, \delta) = \\
&= \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}}{2} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - R_1(T, b, \delta) - \\
&- \delta \cdot \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] = \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\
&- R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right].
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 7. Справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left( \frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - \\
&- R_2^*(T, b, \delta).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя лемму 4 получим:

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, \delta) &= \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[ \frac{T}{bp + b\delta} \right] = \frac{T}{b} \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \frac{1}{p + \delta} - \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} = -R_2(T, b, \delta) + \\
&+ \frac{T}{b} \left( \frac{\ln T}{2} + \frac{\rho(\sqrt{T} - \delta)}{\sqrt{T}} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{T} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(\sqrt{T}, \delta) \right) = -R_2^*(T, b, \delta) + \\
&+ \frac{T}{b} \left( \frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} I(\sqrt{T}, \delta).
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 8. Справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
S_3(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} (\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r(\delta) + I(1, \delta)) + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - R_1^*(T, b, \delta) - R_2^*(T, b, \delta) - \\
&- \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot \left( I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(\sqrt{T}, \delta) \right).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$\begin{aligned}
S_3(T, b, \delta) &= \sum_{q=1}^{\frac{T}{b+b\delta}} \left[ \frac{T}{bq} - \delta \right] = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[ \frac{T}{bq} - \delta \right] + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[ \frac{T}{bp + b\delta} \right] - \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left[ \sqrt{T} - \delta \right] = \\
&= S_1(T, b, \delta) + S_2(T, b, \delta) - \frac{T}{b} + \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] \cdot \delta + \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T}.
\end{aligned}$$

По леммам 6 и 7 имеем:

$$\begin{aligned}
S_3(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\
&- R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{T}}{b} \right\rfloor + \frac{T}{b} \left( \frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \\
&- \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - R_2^*(T, b, \delta) - \frac{T}{b} + \left\lfloor \frac{\sqrt{T}}{b} \right\rfloor \cdot \delta + \left\lfloor \frac{\sqrt{T}}{b} \right\rfloor \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} = \\
&= \frac{T}{b} (\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r(\delta) + I(1, \delta)) + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - R_1^*(T, b, \delta) - \\
&- \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - R_2^*(T, b, \delta).
\end{aligned}$$

□

#### 4. Обобщенная проблема Дирихле двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального параметра

В соответствие с разбиением (1) получаем разбиение второй компоненты решётки  $\Lambda_2 \left( \frac{a}{b} \right)$  на вторые компоненты классов вычетов  $\Lambda_2 \left( \frac{a}{b}, k \right)$ , которые задаются равенствами

$$\Lambda_2 \left( \frac{a}{b}, k \right) = \left\{ \left( bq + k, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} - p \right) \mid bq + k \neq 0, \left| \left\{ \frac{ak}{b} \right\} - p \right| \geq 1 \right\}, \quad (k = 0, \dots, b-1).$$

Таким образом, имеем:

$$\Lambda_2 \left( \frac{a}{b} \right) = \bigcup_{k=0}^{b-1} \Lambda_2 \left( \frac{a}{b}, k \right).$$

Если  $D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right)$  — количество точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле  $\Lambda \left( \frac{a}{b} \right)$  в гиперболическом кресте  $K_2(T)$ , а  $D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b}, k \right) \right)$  — количество точек второй компоненты класса вычетов  $\Lambda_2 \left( \frac{a}{b}, k \right)$  в гиперболическом кресте  $K_2(T)$ , то справедливо равенство

$$D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right) = \sum_{k=0}^{b-1} D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b}, k \right) \right). \quad (5)$$

Естественно, что обобщённой проблемой Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального параметра называется проблема подсчёта точек второй компоненты решётки в гиперболическом кресте.

Начнём изучение со случая  $b = 1$ .

**ЛЕММА 9.** Для любого целого  $a$ ,  $a \neq 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned}
D_2(T \mid \Lambda(a)) &= D_2(T \mid \mathbb{Z}^2) = 4T \ln T + 4(2\gamma - 1)T + \Delta(T), \\
\Delta(T) &= -8R_1^*(T, 1, 0) + 4 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) = O \left( \sqrt{T} \right),
\end{aligned}$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения величины  $D_2(T|\mathbb{Z}^2)$  имеем:

$$D_2(T|\mathbb{Z}^2) = \sum_{|q|, |p| \geq 1, 1 \leq |q| |p| \leq T} 1 = 4 \sum_{q=1}^T \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}} 1 = 4 \sum_{q=1}^T \left[ \frac{T}{q} \right].$$

Применим разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left[ \frac{T}{q} \right] + 4 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left[ \frac{T}{p} \right] - 4 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} 1 = 8S_1(T, 1, 0) - 4 \left( \sqrt{T} - \left\{ \sqrt{T} \right\} \right)^2.$$

По лемме 6 имеем:

$$S_1(T, 1, 0) = T \cdot \left( \frac{1}{2} \ln T + \gamma \right) - \sqrt{T} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \sigma \left( \sqrt{T} \right) - T \cdot I \left( \sqrt{T}, 0 \right) - R_1^*(T, 1, 0).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D_2(T|\Lambda(\beta)) &= 4T \ln T + 4(2\gamma - 1)T + \Delta(T), \\ \Delta(T) &= -8R_1^*(T, 1, 0) + 8\sqrt{T} \left\{ \sqrt{T} \right\} - 4 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - 8\sqrt{T} \left\{ \sqrt{T} \right\} + 4 \left\{ \sqrt{T} \right\} - 4 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - \\ &\quad - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) = -8R_1^*(T, 1, 0) + 4 \left\{ \sqrt{T} \right\} - 8 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0). \end{aligned}$$

В силу леммы 5 имеем:

$$-5 < 4 \left\{ \sqrt{T} \right\} - 8 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) < \frac{1}{2},$$

поэтому  $\Delta(T) = -8R_1^*(T, 1, 0) + O(1) = O \left( \sqrt{T} \right)$ .  $\square$

ЛЕММА 10. Для рационального  $\beta = \frac{a}{b}$ ,  $b > 1$ ,  $(a, b) = 1$  и целого  $k$ ,  $0 \leq k \leq b - 1$  при  $T > b^2$  справедливы равенства:

при  $k = 0$

$$\begin{aligned} D_2 \left( T \left| \Lambda \left( \frac{a}{b}, 0 \right) \right. \right) &= \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \Delta \left( T, \frac{a}{b}, 0 \right), \\ \Delta \left( T, \frac{a}{b}, 0 \right) &= -4 (R_1^*(T, b, 0) + R_2^*(T, b, 0)) - 4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \frac{4\sigma(\sqrt{T}) + 4b^2\sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right)}{b} - \\ &\quad - \frac{4T}{b} \left( I(\sqrt{T}, 0) + I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) \right) = O \left( \sqrt{T} \right), \end{aligned}$$

при  $k = 1, \dots, b - 1$

$$\begin{aligned} D_2 \left( T \left| \Lambda \left( \frac{a}{b}, 0 \right) \right. \right) &= \frac{2T}{b} \left( 2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r \left( \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + r \left( 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \Delta \left( T, \frac{a}{b}, k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\left(T, \frac{a}{b}, k\right) = \\
& = -2\left(R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)\right) + \\
& + 4\left(b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) + \frac{\sigma\left(\sqrt{T} - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)}{b}\right) - \frac{2T}{b} \cdot \left(2I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I\left(\sqrt{T}, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(\sqrt{T}, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)\right) - \\
& - 2\left(\left\{\frac{\sqrt{T}}{b}\right\} \left\{\sqrt{T} - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right\} + \left\{\frac{\sqrt{T}}{b}\right\} \left\{\sqrt{T} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right\}\right),
\end{aligned}$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай  $k = 0$ . Для  $\Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right) = b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  имеем:

$$D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) = 4 \sum_{q=1}^{\frac{T}{b}} \left[ \frac{T}{bq} \right].$$

Чтобы получить нужную асимптотическую формулу, применим разбиение Дирихле, получим:

$$\begin{aligned}
D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) &= 4 \left( \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[ \frac{T}{bq} \right] + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left[ \frac{T}{bp} \right] - \left[ \frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left[ \sqrt{T} \right] \right) = \\
&= 4 \left( S_1(T, b, 0) + S_2(T, b, 0) - \frac{T}{b} \right) + 4 \left( \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} + \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} \right).
\end{aligned}$$

По леммам 6 и 7 имеем:

$$\begin{aligned}
S_1(T, b, 0) &= \frac{T}{b} \left( \frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) - \frac{T}{b} \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
&- R_1^*(T, b, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, 0) &= \frac{T}{b} \left( \frac{\ln T}{2} + \gamma \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, 0) - \\
&- R_2^*(T, b, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) &= \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right), \\
\Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right) &= -4(R_1^*(T, 1, 0) + R_2^*(T, b, 0)) + 4 \left( \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} + \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} \right) + \\
&+ 4 \left( -\sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) - \frac{T}{b} \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, 0) \right) = \\
&= -4(R_1^*(T, 1, 0) + R_2^*(T, b, 0)) - 4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} + 4 \left( b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} \right) - \\
&- \frac{4T}{b} \left( I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I(\sqrt{T}, 0) \right).
\end{aligned}$$

Пусть теперь  $1 \leq k \leq b-1$ , тогда  $0 < \left\{ \frac{ak}{b} \right\} < 1$  и

$$\begin{aligned} D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b}, k \right) \right) &= 2 \left( \sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{T}{b+b\left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\rfloor} \left[ \frac{T}{bq} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right] + \sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{T}{2b-b\left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\rfloor} \left[ \frac{T}{bq} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right] \right) = \\ &= 2 \left( S_3 \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + S_3 \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\begin{aligned} D_2 \left( T \mid \Lambda \left( \frac{a}{b}, k \right) \right) &= 2 \left( \frac{T}{b} \left( \ln T - \ln b + \gamma - 1 + r \left( \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \right. \\ &\quad \left. - R_1^* \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - R_2^* \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \frac{\sigma \left( \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{b} \cdot \left( I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left( \sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \frac{T}{b} \left( \ln T - \ln b + \gamma - 1 + r \left( 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) - R_1^* \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - R_2^* \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma \left( \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} - \frac{T}{b} \cdot \left( I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left( \sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{2T}{b} \left( 2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r \left( \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + r \left( 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) - \\ &\quad - 2 \left( R_1^* \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_1^* \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \\ &\quad + 4 \left( b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left( \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right) - \frac{2T}{b} \cdot \left( 2I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left( \sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( \sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) - \\ &\quad - 2 \left( \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} \right). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 11. Для  $Mm \left( T, \frac{a}{b} \right)$ , заданного равенством

$$\begin{aligned} Mm \left( T, \frac{a}{b} \right) &= \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2T}{b} \left( 2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r \left( \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + I \left( 1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + r \left( 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( 1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

справедливо равенство

$$Mm \left( T, \frac{a}{b} \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) = \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2T}{b} \left( 2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r\left(\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + \right. \\ \left. + I\left(1, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + \frac{4T(b+1)}{b} (\gamma - 1) + \\ + \frac{4T}{b} (R(T, b) + J(T, b)),$$

где

$$R(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left( r\left(\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right), \quad J(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left( I\left(1, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right).$$

Так как  $(a, b) = 1$ , то

$$R(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left( r\left(\left\{\frac{k}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{k}{b}\right\}\right) \right) = \sum_{k=1}^{b-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{3k}{2b} + \frac{k^2}{2b^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{k}{b}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{b}\right)^2 \right) = \\ = \sum_{k=1}^{b-1} \left( \frac{k}{b} + \frac{k^2}{b^2} \right) = \frac{b-1}{2} + \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} = \frac{(b-1)(5b-1)}{6b}. \\ J(T, b) - 2I(1, 0) = \int_1^\infty \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2 + \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\}^2 \right)}{x^3} dx$$

Положим  $y = [bx]$ , тогда  $x = \frac{y}{b} + \frac{\{bx\}}{b}$  и

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2 + \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\}^2 \right) = \\ = \sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{\frac{y-k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} - \left( \left\{\frac{y-k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} \right)^2 + \left\{\frac{y+k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} - \left( \left\{\frac{y+k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} \right)^2 \right) = \\ = \frac{2}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \left( k + \{bx\} - \frac{(k + \{bx\})^2}{b} \right) = b - 1 + 2\{bx\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{3b} - \frac{2(b-1)}{b} \{bx\} - \frac{2}{b} \{bx\}^2 = \\ = \frac{b^2 - 1}{3b} + \frac{2}{b} (\{bx\} - \{bx\}^2).$$

Отсюда следует, что

$$J(T, b) - 2I(1, 0) = \int_1^\infty \frac{\frac{b^2-1}{3b} + \frac{2}{b} (\{bx\} - \{bx\}^2)}{x^3} dx = \frac{b^2 - 1}{6b} + \frac{2}{b} \int_1^\infty \frac{\{bx\} - \{bx\}^2}{x^3} dx = \frac{b^2 - 1}{6b} + \\ + \frac{2}{b} \int_b^\infty \frac{\{t\} - \{t\}^2}{\left(\frac{t}{b}\right)^3} d\frac{t}{b} = \frac{b^2 - 1}{6b} + 2bI(b, 0).$$

Таким образом, имеем:

$$R(T, b) + J(T, b) = \frac{(b-1)(5b-1)}{6b} + 2I(1, 0) + \frac{b^2 - 1}{6b} + 2bI(b, 0) = b - 1 + 2I(1, 0) + 2bI(b, 0) = \\ = b - 2 + 2\gamma + 2bI(b, 0).$$

Отсюда окончательно для  $Mm\left(T, \frac{a}{b}\right)$  получим:

$$\begin{aligned} Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) &= 4T \ln T - 4T \ln b + \frac{4T(b+1)}{b}(\gamma - 1) + \frac{4T}{b}(b - 2 + 2\gamma + 2bI(b, 0)) = \\ &= 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left( \frac{2b-1}{b}\gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 12. Для  $R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right)$ , заданного равенством

$$R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right)$$

справедливо равенство

$$R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = \\ &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} + \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) = \\ &= -2 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{ \frac{T}{bq} - \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} + \left\{ \frac{T}{bq} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} \right) + 2\sqrt{T} = \\ &= -2 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{ \frac{\left[\frac{T}{q}\right] + \left\{\frac{T}{q}\right\} - k}{b} \right\} + \left\{ \frac{\left[\frac{T}{q}\right] + \left\{\frac{T}{q}\right\} + k}{b} \right\} \right) + 2\sqrt{T} = \\ &= -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left( \frac{k}{b} + \frac{\left\{\frac{T}{q}\right\}}{b} \right) + 2\sqrt{T} = -2 \left\lfloor \frac{\sqrt{T}}{b} \right\rfloor (b-1) - 4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2\sqrt{T} = \\ &= -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 13. Для  $R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right)$ , заданного равенством

$$R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( R_2^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right)$$

справедливо равенство

$$R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
 R_2^* \left( T, \frac{a}{b} \right) &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( R_2^* \left( T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left( T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) = \\
 &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( \sum_{p=1}^{\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \left\{ \frac{T}{bp + b \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2} + \sum_{p=1}^{\sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \left\{ \frac{T}{bp + b - b \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2} \right) = \\
 &= -4 \sum_{k=0}^{b-1} \sum_{p=1}^{\sqrt{T} - \frac{k}{b}} \left\{ \frac{T}{bp + k} \right\} + 2b\sqrt{T} = -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}.
 \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 14. Для  $S\sigma \left( T, \frac{a}{b} \right)$ , заданного равенством

$$S\sigma \left( T, \frac{a}{b} \right) = 4 \sum_{k=0}^{b-1} \left( b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left( \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right)$$

справедливо равенство

$$S\sigma \left( T, \frac{a}{b} \right) = 4b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{b^2 - 1}{3b^2} + 2 \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
 S\sigma \left( T, \frac{a}{b} \right) &= 4 \sum_{k=0}^{b-1} \left( b \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left( \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right) = 4b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{4}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \sigma \left( \sqrt{T} - \frac{k}{b} \right). \\
 2 \sum_{k=0}^{b-1} \sigma \left( \sqrt{T} - \frac{k}{b} \right) &= \sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{ \frac{[b\sqrt{T}] + \{b\sqrt{T}\} - k}{b} \right\} - \left\{ \frac{[b\sqrt{T}] + \{b\sqrt{T}\} - k}{b} \right\}^2 \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{b-1} \left( \frac{k}{b} + \frac{\{b\sqrt{T}\}}{b} - \left( \frac{k}{b} + \frac{\{b\sqrt{T}\}}{b} \right)^2 \right) = \frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{b-1}{b} \{b\sqrt{T}\} - \\
 &\quad - \frac{\{b\sqrt{T}\}^2}{b} = \frac{b^2 - 1}{6b} + \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b}.
 \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 15. Для  $SI \left( T, \frac{a}{b} \right)$ , заданного равенством

$$SI \left( T, \frac{a}{b} \right) = -\frac{2T}{b} \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \left( 2I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left( \sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left( \sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right)$$

справедливо равенство

$$SI \left( T, \frac{a}{b} \right) = -4TI \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3b^2} - 4T \cdot I(b\sqrt{T}, 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
 SI\left(T, \frac{a}{b}\right) &= -\frac{2T}{b} \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \left( 2I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I\left(\sqrt{T}, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(\sqrt{T}, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
 &\quad - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \frac{k + \{bx\}}{b} - \left(\frac{k + \{bx\}}{b}\right)^2}{x^3} dx = \\
 &= -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\frac{b-1}{2} + \{bx\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{(b-1)\{bx\}}{b} - \frac{\{bx\}^2}{b}}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
 &\quad - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\frac{b^2-1}{6b} + \frac{\{bx\} - \{bx\}^2}{b}}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{b^2-1}{3b^2} - 4T \int_{b\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx.
 \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 16. Для  $SD\left(T, \frac{a}{b}\right)$ , заданного равенством

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left( \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} \right)$$

справедливо равенство

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left( \frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{k + \{b\sqrt{T}\}}{b} = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left( \frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).$$

□

ТЕОРЕМА 1. Справедливо асимптотическое равенство

$$D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\right) = Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) + R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) + R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) + S\sigma\left(T, \frac{a}{b}\right) + SI\left(T, \frac{a}{b}\right) + SD\left(T, \frac{a}{b}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
 Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) &= 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right), \\
 R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) &= -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^* \left( T, \frac{a}{b} \right) &= -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}, \\
S\sigma \left( T, \frac{a}{b} \right) &= 4b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{b^2 - 1}{3b^2} + 2 \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b^2}, \\
SI \left( T, \frac{a}{b} \right) &= -4T \cdot I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3b^2} - 4T \cdot I(b\sqrt{T}, 0), \\
SD \left( T, \frac{a}{b} \right) &= -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left( \frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (5) и лемм 10–16 следует утверждение теоремы.  $\square$

## 5. Интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

По теореме Абеля вторую компоненту гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_{H,2}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{D_2(t|\Lambda(\beta))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где  $D_2(T|\Lambda(\beta))$  — количество точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле  $\Lambda(\beta)$  в гиперболическом кресте  $K_2(T)$ . Гиперболический крест  $K_2(T)$  задается равенством

$$K_2(T) = \{(x, y) | \bar{x} \cdot \bar{y} \leq T\}.$$

ЛЕММА 17. Для иррационального  $\beta$  справедливо равенство

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4T \ln T + 2(4\gamma - 3 + \theta(T))T + O(\sqrt{T}),$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера и  $\frac{1}{6} \leq \theta(T) < 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения величины  $D_2(T|\Lambda(\beta))$  имеем:

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = \sum_{|q\beta-p| \geq 1, 1 \leq |q||q\beta-p| \leq T} 1 = 2 \sum_{q=1}^T \sum_{1 \leq |q\beta-p| \leq \frac{T}{q}} 1 = 2 \sum_{q=1}^T \left( \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}-\{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}-1+\{q\beta\}} 1 \right).$$

Применим разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left( \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}-\{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}-1+\{q\beta\}} 1 \right) + 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left( \sum_{q \geq 1, q(p+\{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q \geq 1, q(p+1-\{q\beta\}) \leq T} 1 \right) -$$



$$\begin{aligned}
 & -2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left( \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-1+\{q\beta\}} 1 \right) = 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left( \frac{T}{q} - \{q\beta\} - \left\{ \frac{T}{q} - \{q\beta\} \right\} + \frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\} - \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\} \right\} \right) - 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left( \sqrt{T} - \{q\beta\} - \left\{ \sqrt{T} - \{q\beta\} \right\} + \sqrt{T} - 1 + \{q\beta\} - \left\{ \sqrt{T} - 1 + \{q\beta\} \right\} \right) + \\
 & + 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left( 2 \frac{T}{p+1} - 2 \left\{ \frac{T}{p+1} \right\} + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\{q\beta\}) \leq T} 1 \right) = 2(S_1 + S_2 - S_3).
 \end{aligned}$$

Для  $S_1$  получим:

$$S_1 = 2T \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \frac{1}{q} - O(\sqrt{T}) = T \ln T + 2\gamma T + O(\sqrt{T}).$$

Для  $S_3$  имеем оценку:  $S_3 = T - O(\sqrt{T})$ .

Перейдем к оценке  $S_2$ . Так как  $\max(\{q\beta\}, 1 - \{q\beta\}) = 1 - \|q\beta\| \geq \frac{1}{2}$ ,  $\min(\{q\beta\}, 1 - \{q\beta\}) = \|q\beta\| \leq \frac{1}{2}$ , то

$$\begin{aligned}
 S_4(p) &= \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\{q\beta\}) \leq T} 1 = \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\|q\beta\|) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\|q\beta\|) \leq T} 1 = \\
 &= \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q \leq \frac{T}{p+\frac{1}{2}}} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+\frac{1}{2}}, q(p+\|q\beta\|) \leq T} 1 + \sum_{q \geq \frac{T}{p+1}, q(p+1-\|q\beta\|) \leq T} 1.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$S_4(p) \geq \frac{T}{p+\frac{1}{2}} - \frac{T}{p+1} - 1 = \frac{T}{2(p+\frac{1}{2})(p+1)} - 1, \quad S_4(p) \leq \frac{T}{p} - \frac{T}{p+1} + 1 = \frac{T}{p(p+1)} + 1.$$

Отсюда следует, что

$$S_2 = 2T \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \frac{1}{p+1} + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} S_4(p) + O(\sqrt{T}) = T \ln T + (2\gamma - 2)T + \theta(T)T + O(\sqrt{T}),$$

где  $\frac{1}{6} \leq \theta(T) < 1$ . Объединяя все оценки, получим требуемое утверждение

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4T \ln T + 2(4\gamma - 3 + \theta(T))T + O(\sqrt{T}).$$

□

Заметим, что оценка константы в остаточном члене в 10 раз лучше чем та, что получается из общей оценки работы [13].

**ТЕОРЕМА 2.** Для рационального  $\frac{a}{b}$ ,  $b > 1$  и  $\sigma > \frac{1}{2}$  справедливо интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

$$\zeta_{H,2} \left( \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) | \alpha \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} + \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + \alpha \int_1^\infty \frac{\Delta_2 \left( t \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right| \right) dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 \left( T \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right. \right) &= -4 \left( \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) - 4 \left( \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} - \frac{b\sqrt{T}}{2} \right) + \\ &+ 4 \left( b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma(b\sqrt{T})}{b^2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ b\sqrt{T} \right\} \right) - 4T \cdot \left( I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(b\sqrt{T}, 0) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} D_2 \left( T \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right. \right) &= 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) - 4 \left( \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) - \\ &- 4 \left( \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} - \frac{b\sqrt{T}}{2} \right) + 4 \left( b^2 \cdot \sigma \left( \frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma(b\sqrt{T})}{b^2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ b\sqrt{T} \right\} \right) - \\ &- 4T \cdot \left( I \left( \frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(b\sqrt{T}, 0) \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) + \\ &+ \Delta_2 \left( T \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right. \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_{H,2} \left( \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \middle| \alpha \right) = \alpha \int_1^\infty \frac{4t \ln t - 4t \ln b + 4t \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) dt}{t^{\alpha+1}} + \alpha \int_1^\infty \frac{\Delta_2 \left( t \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right. \right) dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Второй несобственный интеграл абсолютно сходится при  $\sigma > \frac{1}{2}$ , так как числитель подынтегральной функции есть  $O(\sqrt{t})$ .

Для первого несобственного интеграла имеем:

$$\begin{aligned} &\alpha \int_1^\infty \frac{4t \ln t - 4t \ln b + 4t \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) dt}{t^{\alpha+1}} = \\ &= \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + 4\alpha \int_1^\infty \frac{\ln t dt}{t^\alpha}, \\ &\alpha \int_1^\infty \frac{\ln t dt}{t^\alpha} = \frac{-\alpha((\alpha-1) \ln t + 1)}{(\alpha-1)^2 t^{\alpha-1}} \Big|_1^\infty = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_{H,2} \left( \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \middle| \alpha \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} + \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left( \frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + \alpha \int_1^\infty \frac{\Delta_2 \left( t \left| \Lambda \left( \frac{a}{b} \right) \right. \right) dt}{t^{\alpha+1}}.$$

□

## 6. Заключение

Найденное интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального  $\beta$  в полуплоскости  $\sigma > \frac{1}{2}$  позволяет ставить вопрос о получении новых интегральных представлений, для которых абсцисса абсолютной сходимости последовательно сдвигается влево. Изучение этого вопроса будет темой следующих статей по этой теме.

И теорема 1, и теорема 2 показывают наличие зависимости второго члена асимптотической формулы и вычета гиперболической дзета-функции решётки  $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$  от величины знаменателя  $b$  и независимости от числителя  $a$ . Ранее аналогичные эффекты были обнаружены А. Л. Рошенин для других обобщений проблемы Дирихле в работах [16]–[19].

Из содержания работы следует, что для уточнения порядка остаточного члена в асимптотических формулах важно изучение величин

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\sqrt{\frac{T}{b}}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

Естественно, сначала следует изучить возможности элементарного метода И. М. Виноградова, изложенного в [1]–[4]. Затем необходимо получить наиболее точные оценки с помощью метода тригонометрических сумм (см. [15]).

Важным является вопрос о переносе полученных результатов на случай иррационального  $\beta$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. М. Виноградовъ, “Новый способъ для полученія асимптотическихъ выражений арифметическихъ функцій”, Известія Академіи Наукъ, 11:16 (1917), 1347–1378.
2. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. — М.-Л., Гостехиздат, 1952. 180 с.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей — М., 1967г., 378 с.
4. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. Элементарные методы в аналитической теории чисел — М., Физматгиз, 1962г., 272 с.
5. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
6. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.
7. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.
8. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.
9. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

10. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
11. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Известия Тульского государственного университета. — Тула, 1996. Т. 2, вып. 1. С. 77–87.
12. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Тезисы докладов III международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения". — Тула. 1996. С. 49
13. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки, 1998. Т. 63, вып. 3. С. 363–369.
14. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, И. Ю. Реброва. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Матем. заметки, 1998. Т. 63, вып. 4, С. 522–526.
15. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М., 1983 г.
16. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте // Современные проблемы теории чисел и ее приложения": Тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 120.
17. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решётки под гиперболой  $x \cdot y = N$ . Тула, 1996. Деп. в ВИНТИ. N 2743-B-96.
18. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте. Тула, 1997. Деп. в ВИНТИ. N 2087-N-97.
19. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.
20. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0\_2.

## REFERENCES

1. I. M. Vinogradov, 1917, "A new method for obtaining asymptotic expressions of arithmetic functions", *Izvestia Akademii Nauk*, 11:16, 1347–1378.
2. I. M. Vinogradov, 1952, "Fundamentals of number theory". — M.-L., *Gostekhizdat*, 180 p.
3. A. O. Gelfond, 1967, "Calculus of finite differences". — M., 378 p.
4. A. O. Gelfond, Yu. V. Linnik, 1962, "Elementary methods in analytical number theory". — M., *Fizmatgiz*, 272 p.
5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
6. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

7. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Doklady akademii nauk*, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.
8. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, no. 3, pp. 18–23.
9. M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "About one functional equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 359–364.
10. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Izvestiya Tula State University*. — Tula, Vol. 2, issue. 1. P. 77–87.
12. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1996, "On the analytic continuation of the hyperbolic zeta function of rational lattices", *Abstracts of the III International Conference "Modern problems of number theory and its applications"*. — Tula. P. 49.
13. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1998, "Number of lattice points in the hyperbolic cross", *Math. Notes*, 63:3, P. 319–324.
14. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roschenya, I. Y. Rebrova, 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices" // *Math. notes*, Vol. 63, issue 4, pp. 522–526.
15. A. A. Karatsuba, 1983, *Fundamentals of analytical number theory*. — Moscow.
16. A. L. Roshchenya, 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross" // *Modern problems of number theory and its applications: Tez. dokl. III International Conf. Tula*, p. 120.
17. A. L. Roshchenya, 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of a shifted lattice under the hyperbola  $x \cdot y = N$ ", Tula, Dep. in VINITI. № 2743-№ -96.
18. A. L. Roshchenya, 1997, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Tula, Dep. in VINITI. № 2087-№ -97.
19. A. L. Roshchenya, 1998, "Analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices" / *Dissertation of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences*. Moscow. MPGU.
20. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0\_2.

Получено 24.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-106-117

Геометрия интегральных многообразий контактного  
распределения

В. Ф. Кириченко, О. Е. Арсеньева, Е. В. Суровцева

**Кириченко Вадим Фёдорович** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Арсеньева Ольга Евгеньевна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Суровцева Елена Викторовна** — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: Surovtseva\_elena@inbox.ru*

## Аннотация

В данной работе рассматриваются различные классы почти контактных метрических структур в предположении вполне интегрируемости их контактного распределения. Получен аналитический критерий вполне интегрируемости контактного распределения почти контактного метрического многообразия. Выяснено, какие почти эрмитовы структуры индуцируются на интегральных многообразиях контактного распределения некоторых почти контактных метрических многообразий. В частности доказано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения многообразия Кенмоцу, является келеровой структурой. А почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения нормального многообразия, является эрмитовой структурой. Слабо косимплектическая структура с инволютивным первым фундаментальным распределением является точнее косимплектической структурой и на его интегральных подмногообразиях максимальной размерности вполне интегрируемого контактного распределения индуцируется приближенно келерова структура. Также доказано, что контактное распределение квази-сасакиева многообразия интегрируемо тогда и только тогда, когда это многообразие является косимплектическим. На максимальных интегральных многообразиях контактного распределения косимплектического многообразия индуцируется келерова структура. А на интегральных многообразиях максимальной размерности контактного распределения локально конформно квази-сасакиева многообразия, с инволютивным первым фундаментальным распределением, индуцируется структура класса  $W_4$  почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. Она будет келеровой тогда и только тогда, когда  $grad\sigma \subset M$ , где  $\sigma$  — определяющая функция соответствующего конформного преобразования.

**Ключевые слова:** вполне интегрируемое распределение, почти контактная метрическая структура, почти эрмитова структура, контактное распределение.

**Библиография:** 16 названий.

## Для цитирования:

В. Ф. Кириченко, О. Е. Арсеньева, Е. В. Суровцева. Геометрия интегральных многообразий контактного распределения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 106–117.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-106-117

## Geometry of integral manifolds of contact distribution

V. F. Kirichenko, O. E. Arseneva, E. V. Surovceva

**Kirichenko Vadim Fedorovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Arsenyeva Olga Evgenievna** — candidate of physical and mathematical sciences, docent, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

*e-mail: highgeom@yandex.ru*

**Surovtseva Elena Viktorovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

*e-mail: Surovtseva\_elena@inbox.ru*

## Abstract

In this paper, various classes of almost contact metric structures are considered under the assumption that their contact distribution is completely integrable. An analytical criterion for the complete integrability of the contact distribution of an almost contact metric manifold is obtained. It is found which almost Hermitian structures are induced on the integral manifolds of the contact distribution of some almost contact metric manifolds. In particular, it is proved that an almost Hermitian structure induced on integral submanifolds of maximum dimension of the first fundamental distribution of a Kenmotsu manifold is a Kähler structure. An almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximum dimension of a completely integrable first fundamental distribution of a normal manifold is a Hermitian structure. We show that a nearly cosymplectic structure with an involutive first fundamental distribution is the most closely cosymplectic one and approximately Kähler structure is induced on its integral submanifolds of the maximum dimension of a completely integrable contact distribution. It is also proved that the contact distribution of an inquasi-Sasakian manifold is integrable only in case of this manifold is cosymplectic. Kähler structure is induced on the maximal integral manifolds of the contact distribution of a cosymplectic manifold. If  $M$  is a  $lcQS$ -manifold with an involutive first fundamental distribution, then the structure of the class  $W_4$  of almost Hermitian structures in the Gray-Hervella classification is induced on integral manifolds of the maximum dimension of its contact distribution. It is Kähler if and only if  $grad \sigma \subset M$ , where  $\sigma$  is an arbitrary smooth function on  $M$  of corresponding conformal transformation.

**Keywords:** completely integrable distribution, almost contact metric structure, almost Hermitian structure, contact distribution.

**Bibliography:** 16 titles.

## For citation:

V. F. Kirichenko, O. E. Arseneva, E. V. Surovceva, 2022, "Geometry of integral manifolds of contact distribution", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 106–117.

## 1. Introduction

This work is devoted to the research of the contact distribution of almost contact metric structures under the assumption that it is completely integrable. Almost contact metric structures are one of the most meaningful examples of differential geometric structures. The theory of these structures development began only in the 1950s. Almost contact and almost contact metric manifolds were introduced A. Gray [1]. The theory of almost contact metric structures was actively developed in the works of S. Chern, W. Boothby, S. Sasaki [2, 3, 4].

Almost contact metric structures are naturally induced on hypersurfaces of almost Hermitian manifolds, as well as on spaces of principal toroidal bundles over almost Hermitian manifolds. These cases are most important examples of almost contact metric structures. We may say, that they determined the role of almost contact metric structures in differential geometry.

In this paper we investigate following questions:

1. Which case is the first fundamental distribution  $\mathcal{L}$  completely integrable in?
2. What is relationship between the class of an almost contact metric structure on the manifold  $M$  and the corresponding class of the almost Hermitian structure on the integral manifold of maximal dimension of the first fundamental distribution of  $M$ ?

## 2. The terms for the completely integrability of the contact distribution

The article uses the following designations:

$M$  — a smooth manifold, dimension  $2n + 1$ ;

$C^\infty(M)$  — the algebra of smooth functions on the manifold  $M$ ;

$\mathcal{X}(M)$  —  $C^\infty(M)$ -module of smooth vector fields on  $M$ ;

$g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — the Riemannian metric on the manifold  $M$ ;

$[\cdot, \cdot]$  — taking Lie brackets operation;

$d$  — external differentiation operator;

$\nabla$  — the Riemannian connection of the metric  $g$ .

Let's define the basic concepts used in the presentation of the article.

DEFINITION 1. A contact structure on a manifold  $M$  is a differential 1-form  $\eta$  on  $M$  is such that at each point of the manifold  $\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \dots \wedge d\eta}_{n \text{ times}} \neq 0$ . A manifold with a fixed contact structure on it is called a contact manifold [5].

DEFINITION 2. An almost contact metric structure ( $AC$ -structure) on a manifold  $M$  is a quadruple  $(\eta, \xi, \Phi, g)$  on this manifold, where  $\eta$  is a differential 1-form called a contact form,  $\xi$  is a vector field, called characteristic,  $\Phi$  is an endomorphism of the module  $\mathcal{X}(M)$ , called a structural endomorphism, and  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  is a Riemannian metric on  $M$  so the following conditions are satisfied

$$1) \eta(\xi) = 1; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi;$$

$$5) \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

If we put  $Y = \xi$  in formula 5, then  $\langle X, \xi \rangle = \eta(X)$ .

It is well known that specifying a contact structure on a manifold generates an almost contact metric structure, which explains the term «almost contact metric structure». Generally speaking, the converse is not true.



A manifold with an almost contact metric structure fixed on it is called *an almost contact metric manifold*.

If we define an almost contact metric structure on the manifold  $M$ , then naturally a pair of mutually complementary projectors arises in the module  $\mathcal{X}(M)$ :  $m = \eta \otimes \xi$ ;  $l = id - \eta \otimes \xi$ . Obviously,  $m + l = id$ . Moreover, it is an easy way to show  $l = -\Phi^2$ . These will be projections onto the distributions  $\mathcal{L} = Im\Phi = ker\eta$  and  $\mathcal{M} = ker\Phi$ , respectively, we will call them *the first (or the contact)* and *the second fundamental distributions* of the AC-structure. Thus, for the module  $\mathcal{X}(M)$  of smooth vector fields,  $\mathcal{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$ , where  $dim\mathcal{L} = 2n$  and  $dim\mathcal{M} = 1$ . Moreover, if we introduce in consideration  $\mathcal{X}(M)^C = C \oplus \mathcal{X}(M)$  — the complexification of the module  $\mathcal{X}(M)$ , then  $\mathcal{X}(M)^C = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$ , where  $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ ,  $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ ,  $D_\Phi^0$  are the proper distributions of the structural endomorphism  $\Phi$  corresponding to the eigenvalues  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-1}$  and 0. Moreover, the endomorphisms  $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $\bar{\pi} = -\frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $m = \eta \otimes \xi$  [6].

Consider the differential 1-form  $\omega = \eta \circ \pi_*$ , where  $\pi$  is the natural projection in the principal bundle of frames over the manifold  $M$ ,  $\pi_*$  is the entrainment of  $\Phi$ -connected vector fields on the manifold  $M$ . Obviously, this form is the Pfaffian form of the first fundamental distribution  $\mathcal{L}$ , that is, the basis of the codistribution associated with the first fundamental distribution  $\mathcal{L}$  [7].

By the classical Frobenius theorem, the completely integrability of the first fundamental distribution is equivalent to the condition for the existence of a form  $\theta$  so that  $d\omega = \theta \wedge \omega$ , that is, the exterior differential of the form  $\omega$  must belong to the ideal of the Grassmann algebra of the manifold  $M$  [6].

Consider the first group of structure equations for an almost contact metric manifold on the space of the associated G-structure [6], [8]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_a^b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab} \omega \wedge \omega_b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_{ab} \omega \wedge \omega^b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b + C_a{}^b \omega^a \wedge \omega_b + C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a. \end{aligned} \quad (1)$$

We draw attention to the third equation of system (1). In it, the first three terms do not correspond to the form  $d\omega = \theta \wedge \omega$ , and the last two  $\underbrace{C_a \omega^a \wedge \omega}_\theta$ ,  $\underbrace{C^a \omega_a \wedge \omega}_\theta$  do. Thus, the first fundamental distribution  $\mathcal{L}$  is completely integrable only in case of  $C_{ab} = 0$ ,  $C^{ab} = 0$ ,  $C_a{}^b = 0$ . Whence we get that

$$\begin{aligned} C_{ab} &= -\sqrt{-1}\Phi_{[a,b]}^0 = 0, \quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0 = 0, \\ C_a{}^b &= -\sqrt{-1}(\Phi_{\hat{a},a}^0 + \Phi_{a,\hat{b}}^0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Here  $\Phi_{j,k}^i$  are the components of the covariant differential of the structural endomorphism  $\Phi$  on the space of the frame bundle.

Consider equalities (2). Since  $C_a{}^b = 0$ , then  $\Phi_{b,a}^0 = -\Phi_{a,\hat{b}}^0$ . Let's write the resulting expression in non-indexed form — the left and right sides taking into account that  $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $\bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $m = \eta \otimes \xi$ :

$$\begin{aligned} m(\nabla_{\pi Y}(\Phi)(\bar{\pi}X)) &= \eta \left( \nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(Y)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right)(X) \right) \xi = \\ &= \eta(\nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2)(Y)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 \right)(X) + \nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2)(Y)}(\Phi) \left( \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right)(X) + \\ &+ \nabla_{(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(Y)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 \right)(X) + \nabla_{(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(Y)}(\Phi) \left( \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right)(X)) \xi = \\ &= \eta \left( \frac{1}{4} \nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) - \frac{\sqrt{-1}}{4} \nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi(X) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{-1}}{4} \nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) - \frac{1}{4} \nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi(X) \right) \xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(\nabla_{\pi X}(\Phi)(\pi Y)) &= \eta \left( \nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(X)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right) (Y) \right) \xi = \\
&= \eta(\nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2)(X)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 \right) (Y) + \nabla_{(-\frac{1}{2}\Phi^2)(X)}(\Phi) \left( -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right) (Y) + \\
&+ \nabla_{(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(X)}(\Phi) \left( -\frac{1}{2}\Phi^2 \right) (Y) + \nabla_{(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi)(X)}(\Phi) \left( -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi \right) (Y)) \xi = \\
&= \eta \left( \frac{1}{4} \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi^2(Y) + \frac{\sqrt{-1}}{4} \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi(Y) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{-1}}{4} \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi^2(Y) - \frac{1}{4} \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi(Y) \right) \xi.
\end{aligned}$$

Let us equate the real and imaginary parts of these identities, respectively:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) - \nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi(X) &= \\
= \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi^2(Y) - \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi(Y); &\quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi(X) - \nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) &= \\
= \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi^2(Y) - \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi(Y); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). &\quad (4)
\end{aligned}$$

Replacing  $Y$  by  $\Phi(Y)$  in equality (4), taking into account that:

$$\Phi(\Phi(Y)) = \Phi^2(Y), \quad \Phi^2(\Phi(Y)) = -\Phi(Y); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad (5)$$

we get for  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) + \nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) &= \\
= \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi^2(Y) + \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi(Y); &\quad (6)
\end{aligned}$$

Adding equalities (3) and (6) term-by-term, we obtain:

$$\nabla_{\Phi^2(Y)}(\Phi) \Phi^2(X) = \nabla_{\Phi^2(X)}(\Phi) \Phi^2(Y); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (7)$$

Subtracting equality (5) term by term from equality (3), we obtain:

$$\nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi(X) = \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi(Y); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (8)$$

Taking into account (5), we conclude that identities (7) and (8) are equivalent.

The described procedure is called the identity restoration procedure [6, 8].

So, we can formulate the result.

**THEOREM 1.** *The contact distribution of an almost contact metric manifold is completely integrable if and only if the following relation holds:  $\nabla_{\Phi(Y)}(\Phi) \Phi(X) = \nabla_{\Phi(X)}(\Phi) \Phi(Y)$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .*

Let  $M$  be an almost contact metric manifold with a completely integrable first fundamental distribution  $\mathcal{L}$ . Taking into account (1), from the above mentioned, we obtain that the first group of structure equations of such a manifold has the following form:

$$\begin{aligned}
d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab} \omega \wedge \omega_b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\
d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega^c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_{ab} \omega \wedge \omega^b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b; \\
d\omega &= C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a.
\end{aligned}$$

Let  $N \subset M$  be an integral manifold of maximal dimension of the first fundamental distribution of  $M$ . Then an almost Hermitian structure  $\langle J, \tilde{g} \rangle$  is canonically induced on it, where  $J = \Phi|_{\mathcal{L}}$ ,

$\tilde{g} = g|_{\mathcal{L}}$ . Since the form  $\omega$  is the Pfaffian form of the first fundamental distribution, the first group of structural equations of an almost Hermitian structure on  $N$  has the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Bearing in mind the Gray-Hervella classification of almost Hermitian structures, written in the form of a table [6, p. 450], we can reveal the connection between the class of an almost contact metric structure on the manifold  $M$  and the corresponding class of the almost Hermitian structure on the manifold  $N$ . Consider some examples.

### 3. Structures of Kenmotsu

**DEFINITION 3.** [6]. A Kenmotsu structure is an almost contact metric structure for which the identity  $\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle - \eta(Y)\Phi X$ ;  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  holds. A manifold with a fixed Kenmotsu structure is called Kenmotsu manifold.

This class of manifolds was introduced by the Japanese geometer Kenmotsu in 1971. An example of such manifolds is the odd-dimensional Lobachevsky space of curvature (-1) [9]. The first group of structural equations of Kenmotsu structures is as follows [6]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

The third equation of system (10) indicates that the first fundamental distribution of Kenmotsu structures is completely integrable. The first group of structural equations of an almost Hermitian structure induced on its integral submanifolds looks as follows:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Equations (9) turn into equations (11) if  $B^{abc} = 0$  and  $B^{ab}_c = 0$ . Taking into account the above table ([6], p. 450), we see that the almost Hermitian structure induced on integral submanifolds of the manifold  $M$  is Kähler. Thus, the theorem is proved.

**THEOREM 2.** An almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximum dimension of the first fundamental distribution of a Kenmotsu manifold is a Kähler structure.

### 4. Normal structures

**DEFINITION 4.** [6]. An AC-structure is called normal if the Nijenhuis tensor  $N_\Phi$  of its structural endomorphism satisfies the condition  $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$ .

The concept of normality was introduced by Sasaki and Hatakeyama in 1961 [4]. It is one of the most fundamental concepts of contact geometry. Examples of normal structures are cosymplectic and Sasakian structures, which are widely studied in modern research.

The structural equations of normal manifolds have the form [8]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= C_a^b \omega^a \wedge \omega_b. \end{aligned} \quad (12)$$

Under the assumption that the first fundamental distribution is completely integrable, equations (12) take the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Equations (13) are obtained from structural equations (9) under the condition  $B^{abc} = 0$ . From the table ([6], p. 450), we find that in this case a Hermitian structure is induced on integral manifolds of maximum dimension. Thus, we can formulate a theorem.

**THEOREM 3.** *An almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximum dimension of a completely integrable first fundamental distribution of a normal manifold is a Hermitian structure.*

## 5. Nearly cosymplectic manifolds

**DEFINITION 5.** [11]. *An almost contact metric structure is called nearly cosymplectic if  $\nabla_X(\Phi)X = 0$ ;  $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ; if  $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ ;  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , the structure is called cosymplectic.*

An example of a nearly cosymplectic manifold is the five-dimensional sphere  $S^5$  embedded in  $S^6$  as a totally geodesic submanifold equipped with a canonical nearly Kähler structure [12].

The structural equations of nearly cosymplectic manifolds have the form [8]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2} C^{ab} \omega_b \wedge \omega; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \frac{3}{2} C_{ab} \omega^b \wedge \omega; \\ d\omega &= C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b. \end{aligned} \quad (14)$$

Considering the third equation of system (14), we see that in order the first fundamental distribution to be completely integrable, it is necessary and sufficient that the terms  $C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b$  and  $C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b$  should be zero. This means that the coefficients  $C_{ab}$  and  $C^{ab}$  must be zeroed.

Thus, under the assumption that the first fundamental distribution is completely integrable, the equations of a nearly cosymplectic structure take the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

It is known that this equation is the most closely cosiplectic structure [13].

Thus, taking into account the Frobenius theorem, we can formulate the result.

**THEOREM 4.** *Let  $M$  be a nearly cosymplectic manifold, then its first fundamental distribution is involutive if and only if  $M$  is the most closely cosymplectic manifold.*

Further, the structure equations of an almost Hermitian structure induced on integral manifolds of an almost contact metric manifold have the form (9). As we can see, equations (9) turn into equations (15) if  $B_c^{ab} = 0$ . Taking into account that for nearly cosymplectic manifolds the condition  $B^{abc} = B^{[abc]}$  [6] is satisfied, according to the table ([6], p. 450), we find that in this case a nearly Kähler structure is induced on integral manifolds of maximum dimension.

Thus, the theorem is proved.

**THEOREM 5.** *An almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximum dimension of a completely integrable first fundamental distribution of a nearly cosymplectic manifold is a nearly Kähler structure.*

## 6. Quasi-Sasakian structures

**DEFINITION 6.** *A quasi-Sasakian structure is a normal almost contact metric structure with a closed fundamental form.*

This class of structures was introduced by Blair in his thesis, as well as in [14]. This class of structures is interesting, because it includes the classes of cosymplectic and Sasakian structures.

The structural equations of the quasi-Sasakian structure are as follows [8]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^a_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_a^b \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 2B^a_b \omega^a \wedge \omega_b. \end{aligned} \tag{16}$$

Considering the third equation of system (16), we note that for the contact distribution to be completely integrable it is necessary and sufficient that  $B^a_b = 0$ . It is known that this condition is equivalent to the condition  $\nabla_{\Phi X} \xi = 0$  [15]. Then equations (16) take the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

It is known that these are equations of cosymplectic structure [8]. Taking into account the table ([6], p. 450), we get the following results.

**THEOREM 6.** *Let  $M$  be a quasi-Sasakian manifold. Then the following conditions are equivalent:*

- 1) *The contact distribution of the manifold  $M$  is involutive;*
- 2)  *$\nabla_{\Phi X} \xi = 0$ ,  $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ;*
- 3)  *$M$  is a cosymplectic manifold.*

**THEOREM 7.** *The contact distribution of a quasi-Sasakian manifold is completely integrable if and only if this manifold is cosymplectic. In this case, a Kähler structure is induced on the maximal integral manifolds of the contact distribution.*

Since cosymplectic manifolds are a special case of quasi-Sasakian manifolds, we can formulate a corollary.

**COROLLARY 1.** *A Kähler structure is induced on the maximal integral manifolds of the contact distribution of a cosymplectic manifold.*

## 7. Locally conformally quasi-Sasakian structures

Let  $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$  be an  $AC$ -structure on a manifold  $M^{2n+1}$  of greater than three dimension.

DEFINITION 7. [14]. A conformal transformation of an  $AC$ -structure  $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$  on manifold  $M$  is a transition from  $S$  to an  $AC$ -structure  $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ , where  $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$ ,  $\tilde{\xi} = e^{\sigma}\xi$ ,  $\tilde{\Phi} = \Phi$ ,  $\tilde{g} = e^{-2\sigma}g$ ,  $\sigma$  is an arbitrary smooth function on  $M$ , called the defining transformation function.

DEFINITION 8. An  $AC$ -structure  $S$  on  $M$  is called a locally conformally quasi-Sasakian structure, in short, an  $lcQS$ -structure, if the restriction of this structure to some neighborhood  $U$  of an arbitrary point  $p \in M$  admits a conformal transformation into a quasi-Sasakian structure.

We will call this transformation *locally conformal*. A manifold on which a  $lcQS$ -structure is fixed is called a  $lcQS$ -manifold.

Kenmotsu structure [9] is an example of  $lcQS$ -structure.

The first group of structural equations of  $lcQS$ -structures have the form [14]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a}\delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + (\sigma_0 \delta_b^a + C_b^a) \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + (\sigma_0 \delta_a^b - C_a^b) \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 2C_a^b \omega^a \wedge \omega_b - \sigma_a \omega \wedge \omega^a - \sigma^a \omega \wedge \omega_a. \end{aligned} \quad (18)$$

As noted earlier, the contact distribution  $\mathcal{L}$  is completely integrable if and only if there is a form  $\theta$  such that  $d\omega = \theta \wedge \omega$ . Hence, the third equation of system (18) should have the form:  $d\omega = \sigma_a \omega^a \wedge \omega + \sigma^a \omega \wedge \omega_a$  (Since the first term of the third equation of system (18), generally speaking, does not satisfy the condition  $d\omega = \theta \wedge \omega$ ). Hence, it is necessary that  $C_a^b = 0$ . Then the first group of structural equations of a  $lcQS$ -manifold takes the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a}\delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + (\sigma_0 \delta_b^a + C_b^a) \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + (\sigma_0 \delta_a^b - C_a^b) \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega &= \sigma_a \omega^a \wedge \omega + \sigma^a \omega_a \wedge \omega. \end{aligned}$$

This means that the structure equations of an almost Hermitian structure induced on integral manifolds of the maximum dimension of the contact distribution  $\mathcal{L}$  can be written as follows:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a}\delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Equations (19) are equations of the class  $W_4$  of almost Hermitian structures in the Gray-Hervella classification [6]. Note that if we put  $\sigma_a = \sigma^a = 0$  in these equations, then they will take the form:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b; \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

These are the equations of the Kähler structure. Let us find out when the condition  $\sigma_a = \sigma^a = 0$  is satisfied. Obviously, this condition can be written in the form  $d\sigma \parallel \eta$ . This condition is equivalent to  $\text{grad}\sigma \subset M$ , which in turn is equivalent to the normality of the  $lcQS$ -structure [14]. Thus, we can formulate a conclusion.

THEOREM 8. Let  $M$  be an  $lcQS$ -manifold with an involutive first fundamental distribution, then the structure of the class  $W_4$  of almost Hermitian structures in the Gray-Hervella classification is induced on integral manifolds of the maximum dimension of its contact distribution. It is Kähler if and only if  $\text{grad}\sigma \subset M$ .

## 8. Conclusion

It is proved that an almost Hermitian structure induced on integral submanifolds of maximum dimension of the first fundamental distribution of a Kenmotsu manifold is a Kähler structure. An almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximum dimension of a completely integrable first fundamental distribution of a normal manifold is a Hermitian structure. We show that a nearly cosymplectic structure with an involutive first fundamental distribution is the most closely cosymplectic one and approximately Kähler structure is induced on its integral submanifolds of the maximum dimension of a completely integrable contact distribution. It is also proved that the contact distribution of an inquasi-Sasakian manifold is integrable only in case of this manifold is cosymplectic. Kähler structure is induced on the maximal integral manifolds of the contact distribution of a cosymplectic manifold. If  $M$  is a  $lcQS$ -manifold with an involutive first fundamental distribution, then the structure of the class  $W_4$  of almost Hermitian structures in the Gray-Hervella classification is induced on integral manifolds of the maximum dimension of its contact distribution. It is Kähler if and only if  $grad \sigma \subset M$ , where  $\sigma$  is an arbitrary smooth function on  $M$  of corresponding conformal transformation.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gray J. W. Contact structures, Abst. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh: Univ. Edinburgh, 1958. 113 p.
2. Chern S. S. Pseudo-groups continus infinis // Colloq. Internat. Centre Nat. Rech. Scient. Strasbourg. 1953. Vol. 52. P. 119-136.
3. Boothby W. On contact manifolds // Ann. Math. 1958. Vol. 68. No 3. P. 721-734.
4. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tohoku Math. J. 1960. Vol. 2. pp. 459-476.
5. Blair D. E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, vol. 203. 343 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-4959-3.
6. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный дом». 2013. 458 с.
7. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли: пер. с англ. – М.: Мир. 1987. 304 с.
8. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математические заметки. 2002. Т.8, №193. С. 1173-1201.
9. Кириченко В. Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу // Доклады академии наук. 2002. М. Т.380, №5. С. 585-587.
10. Sasaki S., Hatakeyama Y. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II // Tohoku Math. J. 1961. Vol. 13. P. 281-294.
11. Blair D. E., Showers D. K. Almost contact manifolds with Killing structure tensors II // J. Diff. Geom. 1974. Vol.9. P. 577-582. DOI: 10.4310/jdg/1214432556
12. Blair D. E. Almost contact manifolds with Killing structure tensors // Pacific Journal of Mathematics. 1971. Vol. 39, № 2. P. 285-292.

13. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М. ВИНТИ АН СССР. 1986. Т.18. С. 25-70.
14. Blair D. E. The theory of quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. Vol. 1. P. 333-345.
15. Кириченко В. Ф., Баклашова Р. С. Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икиты // Математические заметки. 2007. Т.82, №3. С. 347-360.
16. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2008. Т.84, №6. С. 838-850.

## REFERENCES

1. Gray, J.W. 1958, "Contact structures", Abst. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Univ. Edinburgh.
2. Chern, S.S. 1953, "Pseudo-groupes continus infinis", Colloq. Internationaux du C.N.R.S., Strasbourg, vol. 52, pp. 119-136.
3. Boothby, W. M., & Wang, H. C. 1958, "On contact manifolds", Ann. Math., vol. 68, pp. 721-734.
4. Sasaki, S. 1960, "On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure". Tohoku Math. J., vol. 12, pp. 459-476.
5. Blair, D. E. 2010, "Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds", Progress in Mathematics, vol. 203. 343 p.
6. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential-geometric structures on manifolds", Odessa: "Printing House", 458 p.
7. Warner, W. F. 1983, "Foundations of differentiable manifolds and Lie groups", Graduate Texts in Mathematics, 304 p.
8. Kirichenko, V. F. & Rustanov, A. R. 2002, "Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds", Mathematical Collection, vol. 8, pp. 71-100.
9. Kirichenko, V. F. 2001, "On the geometry of Kenmotsu manifolds", DAN Math., vol. 380, pp. 585-587.
10. Sasaki, S. & Hatakeyama, Y. 1961, "On differentiable manifolds with certain structure which are closely related to almost contact structure II", Tohoku Math. J., vol. 13, pp. 281-294.
11. Blair, D. E. & Showers, D. K. 1974, "Almost contact manifolds with Killing structure tensors II", J. Diff. Geom., vol. 9, pp. 577-582.
12. Blair, D. E. 1972, "Almost contact manifolds with Killing structure tensors", Pacific Journal of Mathematics, vol. 39, no. 2, pp. 285-292.
13. Kirichenko, V. F. 1988, "Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost-contact manifolds", J. Sov. Math., vol. 42, no. 5, pp. 1885-1919.
14. Blair, D. E. 1967, "The theory of quasi-Sasakian structures", J. Diff. Geom., vol. 1, pp. 333-345.
15. Kirichenko, V. F. & Baklashova, N. S. 2007, "The geometry of contact Lee forms and a contact analog of Ikuta's theorem", Mathematical Notes, vol. 82, pp. 309-320.



- 
16. Kirichenko, V.F. & Uskorev, I.V. 2008, “Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures“, *Mathematical Notes*, vol. 84, pp. 783–794.

Получено 27.09.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129

**Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения<sup>1</sup>**

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

**Козко Артем Иванович** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*

**Лужина Любовь Михайловна** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

*e-mail: lluzhina@gmail.com*

**Попов Антон Юрьевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*

**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru***Аннотация**

В статье исследуется зависимость функций капитала (ресурса) и потребления в экономической модели Рамсея — Касса — Купманса в случае, когда сбережение является тождественной постоянной. В сделанных предположениях система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию рассматриваемой экономической модели, решена в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления.

*Ключевые слова:* Математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, функция капитала, потребления.

*Библиография:* 19 названий.

**Для цитирования:**

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 118–129.

<sup>1</sup>Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129

**The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function**

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

**Kozko Artem Ivanovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

*email: prozerpi@yahoo.co.uk*

**Luzhina Lyubov Mihailovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

*e-mail: lluzhina@gmail.com*

**Popov Anton Yurievich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow center of fundamental and applied mathematics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*

**Chirskii Vladimir Grigorevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Abstract**

We study the dependence of the functions of capital (resource) and consumption in the Ramsey–Kass–Koopmans economic model in the case when saving is an identical constant. The system of differential equations describing the evolution of the economic model under consideration is solved in quadratures under the assumptions made. Upper estimates of the consumption function are found based on the obtained solution.

*Keywords:* Mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, function of capital, consumption.

*Bibliography:* 19 titles.

**For citation:**

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2022, “The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 118–129.

**1. Введение и основной результат**

Данная статья является продолжением исследований, начатых авторами в работе [3]. В модели Рамсея — Касса — Купманса, применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют

функции  $K(t)$  — капитал в момент времени  $t$  и  $C(t)$  — потребление в момент времени  $t$ :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант  $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$ , характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Первая группа констант  $a, \alpha, \theta$  определяет производственную функцию Кобба – Дугласа  $f$  и функцию полезности  $U_\theta$ . В качестве функции  $f(K)$ , выражающей зависимость производства продукции от капитала  $K$ , берут степенную функцию Кобба–Дугласа [8]–[13]

$$f(K) = aK^\alpha. \quad (2)$$

В последних работах Гомеса [19], [20] экономическая модель Рамсея – Касса – Купманса разбиралась также и для CES производственной функции, т.е. для функции вида  $f(K) = B(\alpha K^\psi + (1 - \alpha))^{1/\psi}$ , где  $B > 0$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ ,  $\psi < 1$ .

Нами задача решается на бесконечном промежутке времени  $t \in [0; \infty)$ . Отметим также некоторые интересные обобщения данной модели, в которых рассматриваются задачи на конечном промежутке времени (модель с "известным концом света") с учётом режима производства технологической информации см. [18].

Во всех востребованных на практике моделях показатель степени  $\alpha$  в производственной функции Кобба –Дугласа лежит в пределах  $0.7 \leq \alpha \leq 0.97$ . Модели со значениями показателя  $\alpha$  меньше  $2/3$  считаются заведомо неэффективными и не рассматриваются см. [16]. В качестве функции полезности  $U_\theta$  обычно берут

$$U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \quad U_1(C) = \ln C. \quad (3)$$

Значение параметра  $\theta$  обычно лежит в отрезке  $0.4 \leq \theta \leq 4$ .

Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются  $x_1 = x + n + \delta$  и  $x_2 = \frac{\delta + \rho}{\theta} + x$ , связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы ( $n, x, \delta, \theta$ ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [8]–[13]. В дальнейших рассмотрениях существенно, что  $x_1, x_2$  — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

В этой работе мы изучаем решения системы уравнений (1) в том важном частном случае, когда величины  $x_1$  и  $x_2$  связаны между собой соотношением

$$x_2 = \alpha x_1. \quad (4)$$

Равенство (4) рассматривалось в ряде публикаций, поскольку при его выполнении функция сбережения (см. о ней в [9]) является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (3) в квадратурах даже при выполнении связи (4) между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также из этой системы приближённо выражают зависимость  $C(K)$ , показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

В случае выполнения равенства (4) мы получили решение системы дифференциальных уравнений (1) в квадратурах, хотя решение содержит интегралы от элементарных функций, в общем случае через элементарные функции не выражаемые. В то же время, в процессе решения системы (1) мы получили, введя функции

$$v(t) = K(t)e^{x_1 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}, \quad (5)$$

явную зависимость  $v(w)$  через элементарные функции. Анализ этой зависимости позволил обнаружить ограничение на значения функции потребления  $C(t)$ , выражаемое через начальные условия

$$K(0) = K_0, \quad C(0) = C_0. \quad (6)$$

Как правило, в статьях, где рассматривались экономические модели, описываемые системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), рассматривались только возрастающие решения системы (1) (как  $K(t)$ , так и  $C(t)$ ). Необходимым (но недостаточным) условием возрастания  $K(t)$  является следующее неравенство между начальными условиями:

$$C_0 \leq f(K_0). \quad (7)$$

Мы несколько расширили допустимый класс решений системы (1), не требуя возрастания  $K(t)$ ; мы лишь требуем, чтобы возрастающей являлась функция  $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$ . Очевидно, что неубывание  $K(t)$  влечёт за собой возрастание  $v(t)$ , но не наоборот.

В указанных предположениях доказана теорема 1, которая является основным результатом нашей работы. Говоря описательно, содержание этой теоремы состоит в том, что если начальное значение  $C_0$  функции потребления  $C(t)$  "ненамного" меньше значения производственной функции  $f$  от начального капитала  $K_0$ , то  $C(t)$  не может "значительно" подняться над своим начальным уровнем без того, чтобы нарушилось возрастание  $v(t)$  и, как следствие, начала бы снижаться величина капитала  $K(t)$ .

Перед формулировкой теоремы введём сравнительную характеристику начальных условий (6)

$$\Delta = \frac{f(K_0)}{C_0} - 1, \quad (8)$$

неотрицательную согласно ограничению (7). Введённая характеристика связана с начальным значением неотрицательной функции  $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$ , известной как норма валового сбережения. Нетрудно убедиться в справедливости равенства  $\Delta = \frac{s(0)}{1-s(0)}$ . Откуда вытекает равносильность  $\Delta \geq 0 \iff s(0) \geq 0$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $K(t)$ ,  $C(t)$  — решения системы (1) на произвольном отрезке  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющие начальным условиям (6), подчинённым ограничению (7). Тогда при условии (4) связи между параметрами справедливо следующее утверждение. Для того, чтобы функция  $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$  была неубывающей на всем отрезке  $[0; T]$ , функция  $w(t) = C(t)e^{x_2 t}$  во всех точках отрезка  $[0; T]$  необходимо должна удовлетворять оценке сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \quad (9)$$

$$w(t) \leq C_0 e^{\Delta}, \quad \text{если } \theta = 1. \quad (10)$$

Если  $\theta > 1$ , то оценка сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (11)$$

выполняется при условии  $0 < \Delta < (\theta - 1)^{-1}$ .

Функция  $w(t)$  является возрастающей, и поэтому выполнение неравенств (9)–(11) в точке  $T$  следует, что они выполняются во всех точках интервала  $(0; T)$ , причём неравенства становятся строгими.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если функция  $w(t)$  достигнет в некоторой точке  $t = T_0$  значения, стоящего в правой части неравенств теоремы 1 (какого именно неравенства — зависит от

значения  $\theta$ ), то при всех  $t > T_0$  функция  $w(t)$  в силу своего возрастания превзойдёт эту границу. А тогда функция  $v(t)$  (и тем более  $K(t)$ ) будет иметь при любом  $t > T_0$  отрицательную производную.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае  $\theta > 1$ , когда  $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$  наш метод не дает ограничений на значения  $w(t)$  (или хотя бы  $C(t)$ ), однако возможность наличия подобных ограничений не исключена.

Из теоремы 1 и тождества  $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$  получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 для функции потребления  $C(t)$  при всех значениях  $t > 0$  верны следующие оценки сверху;

$$\begin{aligned} C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \\ C(t) &\leq C_0 e^{(\Delta - x_2)t}, \quad \text{если } \theta = 1, \\ C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta > 1, \Delta < (\theta - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

## 2. Выражение зависимости $v(w)$ в элементарных функциях

В этом параграфе мы преобразуем системы дифференциальных уравнений (1) относительно функций  $K(t)$  и  $C(t)$  в систему дифференциальных уравнений относительно функций  $v(t)$  и  $w(t)$ , определённых формулами (5). Полученная в результате этих преобразований система дифференциальных уравнений относительно функции  $v$  и  $w$  будет выглядеть проще, нежели система (1), но, в отличие от неё, окажется не автономной: в правых частях уравнений будут присутствовать множители, явно зависящие переменной  $t$ . Однако, в силу равенства (4) эти множители являются одинаковыми. Данное обстоятельство позволит вывести для зависимости  $v(w)$  дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши для которого явно решается известными методами.

Перейдем к осуществлению изложенного плана. Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \frac{d}{dt} (v(t)e^{-x_1 t}) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 v(t)e^{-x_1 t} = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) &= \frac{d}{dt} (w(t)e^{-x_2 t}) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 w(t)e^{-x_2 t} = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 C(t). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\dot{K}(t) + x_1 K(t) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t}, \quad \dot{C}(t) + x_2 C(t) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t}. \quad (12)$$

Из (12) заключаем, что после перехода от  $K(t)$  и  $C(t)$  к функциям  $v(t)$  и  $w(t)$  по формулам (5) система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v}e^{-x_1 t} = av^\alpha(t)e^{-\alpha x_1 t} - w(t)e^{-x_2 t}; \\ \dot{w}e^{-x_2 t} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1}(t)w(t)e^{((1-\alpha)x_1 - x_2)t}. \end{cases} \quad (13)$$

После умножения первого уравнения системы (13) на  $e^{x_1 t}$ , а второго — на  $e^{x_2 t}$  приходим к равносильной (4) системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = av^\alpha e^{x_1(1-\alpha)t} - we^{(x_1 - x_2)t}; \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1} we^{x_1(1-\alpha)t}. \end{cases} \quad (14)$$

Вследствие условия (4) величины  $x_1(1 - \alpha)$  и  $x_1 - x_2$  совпадают. Обозначим

$$x_1 - x_2 = x_1(1 - \alpha) = \varkappa > 0.$$

Ввиду сказанного, система уравнений (14), равносильная исходной системе (1) при ограничении (4), приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^\alpha - w)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha awv^{\alpha-1}e^{\varkappa t}. \end{cases} \quad (15)$$

Из системы (15) мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости  $v(w)$ . Поскольку мы рассматриваем только положительные решения и отправляемся от положительных начальных условий

$$v(0) = K_0, \quad w(0) = C_0$$

(они выполняются в силу (5), (6)), то обе части второго уравнения системы (15) положительны. Следовательно, деление первого уравнения системы (15) на второе корректно, и мы получаем

$$\frac{\dot{v}}{\dot{w}} = \frac{dv}{dt} : \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dw} = \frac{av^\alpha - w}{\theta^{-1}\alpha awv^{\alpha-1}} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{v}{w} - \frac{\theta}{\alpha a} v^{1-\alpha}, \quad (16)$$

причём, когда  $w = C_0$ , функция  $v(w)$  принимает значение  $K_0$ .

Мы пришли к задаче Коши для дифференциального уравнения (16), входящего в класс уравнений Бернулли. Такие уравнения решаются стандартными известными методами. Первый этап решения состоит в сведении уравнения (16) к линейному неоднородному уравнению. Это достигается введением новой функции, являющейся некоторой степенью функции  $v$ . В данном случае полагаем  $y(w) = v^\alpha$ . Тогда

$$v(w) = (y(w))^{1/\alpha}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{1}{\alpha} (y(w))^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy}{dw}. \quad (17)$$

Подставив выражения (17) для функции  $v$  и её производной по  $w$  через  $y(w)$  и  $y'(w)$  в уравнение (16), преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{\alpha} (y(w))^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy}{dw} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{w} - \frac{\theta}{\alpha a} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \iff \frac{dy}{dw} = \theta \frac{y}{w} - \frac{\theta}{a}.$$

Последнее уравнение является линейным неоднородным уравнением, для которого имеется начальное условие  $y(C_0) = K_0^\alpha$ . Решение этого уравнения будем искать в виде

$$y(w) = z(w)w^\theta. \quad (18)$$

Поскольку согласно (18) имеем

$$y'(w) = z'(w)w^\theta + \theta z(w)w^{\theta-1} = z'(w)w^\theta + \theta \frac{y(w)}{w},$$

то из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция  $y(w)$ , мы получим следующее элементарно интегрируемое уравнение для функции  $z(w)$ :

$$z'(w)w^\theta = -\frac{\theta}{a} \iff z'(w) = -\frac{\theta}{a} w^{-\theta}, \quad (19)$$

А так как  $z(w)$  удовлетворяет начальному условию  $z(C_0) = K_0^\alpha C_0^{-\theta}$ , то, интегрируя уравнение (19) находим

$$\begin{aligned} z(w) &= K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta}{a} \cdot \frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta \neq 1, \\ z(w) &= \frac{K_0^\alpha}{C_0} + \frac{1}{a} \ln \left( \frac{C_0}{w} \right), \quad \theta = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что  $z(w)$  единообразно можно выразить через функцию полезности (3):

$$z(w) = K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta}{a} \cdot (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)), \quad w \geq C_0.$$

(Поскольку функция  $w(t)$  возрастает, а в начальной точке принимает значение, равное  $C_0$ , то нас интересуют только значения  $w \geq C_0$ , и, следовательно, функции  $z(w)$ ,  $y(w)$ , равно как зависимость  $v$  от  $w$ , мы рассматриваем только на луче  $C_0 \leq w < +\infty$ ). Отсюда окончательно получаем

$$ay(w) \equiv av^\alpha = aK_0^\alpha \left( \frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)).$$

Последнее выражение, используя производственную функцию Кобба –Дугласа (2), можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$ay(w) \equiv f(v) = f(K_0) \left( \frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (20)$$

Итогом рассмотрений данного параграфа является следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** *Если экономические параметры, определяющие систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), связаны соотношением (4), то между функциями  $v = v(t)$  и  $w = w(t)$ , выражающимися через  $K(t)$  и  $C(t)$  по формулам (5), имеется следующая зависимость:*

$$v = \left( K_0^\alpha \left( \frac{w}{C_0} \right)^\theta + \frac{\theta w^\theta}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)) \right)^{1/\alpha}.$$

### 3. Доказательство основного результата

Из первого уравнения системы (15) видно, что функция  $v(t)$  имеет неотрицательную производную по переменной  $t$  тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$w \leq av^\alpha \iff w \leq f(v).$$

Согласно полученной выше зависимости (20) между функциями  $v$  и  $w$ , это неравенство записывается в следующей равносильной форме:

$$w \leq f(K_0) \left( \frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (21)$$

Введём обозначение  $u = w/C_0$ . Из (21) видно, что нам следует решить неравенство

$$u \leq \frac{f(K_0)}{C_0} \cdot u^\theta + \theta C_0^{\theta-1} u^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(uC_0)). \quad (22)$$



Сначала рассмотрим особый (и наиболее простой) случай  $\theta = 1$ . В этом случае после деления на  $u$  обеих частей неравенства (22) получаем

$$1 \leq \frac{f(K_0)}{C_0} + U_1(C_0) - U_1(uC_0) \iff U_1(uC_0) - U_1(C_0) \leq \frac{f(K_0)}{C_0} - 1.$$

Правая часть последнего неравенства, согласно (8), обозначена  $\Delta$ , а ввиду (3) имеем  $U_1(uC_0) - U_1(C_0) = \ln(uC_0) - \ln C_0 = \ln u$ . Тем самым, мы вывели ограничение

$$\ln u \leq \Delta \iff u \leq e^\Delta \iff w \leq C_0 e^\Delta.$$

Неравенство (10) получено.

Пусть теперь  $\theta \neq 1$ . В результате применения обозначения (8) и расшифровки обозначения (3), неравенство (22) записывается следующим образом:

$$u \leq (1 + \Delta)u^\theta + \theta C_0^{\theta-1} u^\theta \cdot \frac{C_0^{1-\theta} - (uC_0)^{1-\theta}}{1-\theta} \iff u \leq u^\theta \left(1 + \Delta + \frac{\theta}{1-\theta}\right) - \frac{\theta}{1-\theta} \cdot u.$$

После несложных преобразований последнее неравенство принимает вид

$$\frac{u}{1-\theta} \leq \left(\frac{1}{1-\theta} + \Delta\right) u^\theta \iff \begin{cases} u^{1-\theta} \leq 1 + \Delta(1-\theta), & 0 < \theta < 1, \\ u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1), & \theta > 1. \end{cases}$$

При  $\theta \in (0; 1)$  имеем

$$u \leq (1 + \Delta(1-\theta))^{\frac{1}{1-\theta}},$$

что и означает справедливость неравенства (9). При  $\theta > 1$  рассмотрим два случая. Если  $\Delta \geq (\theta-1)^{-1}$ , то  $1 - \Delta(\theta-1) \leq 0$ , и неравенство  $u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1)$  выполняется при любом  $u > 0$ . Таким образом, при  $\Delta \geq (\theta-1)^{-1}$  наш метод не дает ограничений на значения  $u$ , а значит и на значения  $w$ . Если же  $\Delta < (\theta-1)^{-1}$ , то  $1 - \Delta(\theta-1) > 0$  и, ввиду отрицательности степени  $1-\theta$ , имеем

$$u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1) \iff u \leq (1 - \Delta(\theta-1))^{\frac{1}{1-\theta}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1 полностью доказана.

## 4. Заключение

Проделанное исследование имеет целью дать количественное выражение интуитивно очевидному принципу, состоящему в том, что успешный экономический рост невозможен, если уровень производства "значительно" не опережает уровень потребления. Но сколь значительным должно быть это опережение в начальный момент времени? Мы получили первые теоретически обоснованные результаты в данном направлении для экономических систем со стационарной функцией сбережения. Для того, чтобы дать оценку сверху максимально возможному уровню потребления в рассматриваемых нами экономических моделях, мы ввели численную характеристику начального состояния экономической системы, определяемую формулой (8), которую можно назвать относительным превышением значения производственной функции от начального капитала над начальным уровнем потребления. В терминах этой величины мы дали ограничения на то, во сколько раз может вырасти уровень потребления в процессе эволюции рассматриваемой экономической системы. Более того, мы указали границу, выше которой уровень потребления никак не может подняться, чтобы не нанести ущерб имеющемуся в рассматриваемой структуре экономическому ресурсу.

Полученное ограничение существенно зависит от выбранного в модели значения параметра  $\theta$ ; это объясняется тем, что от параметра  $\theta$  зависит норма валового сбережения  $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$  (здесь  $f$  — производственная функция, в нашем случае функция Кобба–Дугласа), которая в стационарном состоянии (когда  $\dot{K}(t) = \dot{C}(t) = 0$ ) в случае функции Кобба–Дугласа принимает вид:

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\rho + \theta x + \delta} = \frac{\alpha}{\theta} \cdot \frac{x_2}{x_1},$$

которая тем меньше, чем больше значение  $\theta$ . Поэтому с увеличением значения  $\theta$  ограничения на  $C(t)$  делаются менее обременительными.

Статья ставит ряд вопросов. Отметим три из них.

1. Сколь окончательно полученные ограничения? Думается, что они допускают усиления.
2. Если  $\theta > 0$ , то при  $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$  наш метод ограничения на  $C(t)$  не даёт. Должно ли оно быть?
3. Как трансформируются ограничения, если  $x_2 \neq \alpha x_1$ ? Например, если разность  $x_2 - \alpha x_1$  — очень малое положительное или отрицательное число.

Скажем несколько слов о перспективах развития теоремы 2. Нетрудно убедиться в том, что явное выражение функции  $v$  через  $w$  позволяет решить систему дифференциальных уравнений (15) в квадратурах, но получающиеся интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому для детального изучения поведения решений системы (15), т.е. функций  $v(t)$  и  $w(t)$ , придётся применять к подынтегральным функциям методы теории приближений, аппроксимируя их функциями, интегралы от которых имеют достаточно простой вид.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея - Касса - Купманса в случае стационарной функции сбережения // Чебышевский сборник. 2021;22(2):501-509. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509>.
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начально-го экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019;20(4):188-196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
8. Rahul, Giri, 2018, “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, [http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans\\_model.pdf](http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf).
9. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
10. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
11. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.
12. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <https://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
13. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
14. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.
15. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.
16. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.
17. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 [https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a\\_f14/Notes\\_Ramsey\\_Cass\\_Koopmans\\_pog.pdf](https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf)
18. Акаев А.А., Садовничий В.А. К вопросу о выборе математических моделей для описания динамики цифровой экономики // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 743-752.
19. Gómez, M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci., 94, 49-57, (2018)
20. Gómez, M. A., Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply. // Economics Letters 172, 89-92 (2018)

## REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press*. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011. “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press*. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2021, "Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey-Kass-Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 22(2), pp. 501-509. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509>.
4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Optimal exponent in the Ramsey-Kass-Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 197-207. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, "On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice", *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review*. vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow*. pp. 87-88.
7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
8. Rahul, Giri, 2018, "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model", [http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans\\_model.pdf](http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf).
9. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series No. 1701*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. "When Economic Growth is Less than Exponential", 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.
12. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>.
13. Romer, D. "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.
14. Robert J. Barro. 1999. "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
15. Douglas, Paul H. 1972. "In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas", *New York, Harcourt Brace Jovanovich*.
16. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review*. vol. 83, September, pp. 908-931.
17. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, "Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model", *UC Berkeley Fall*, [https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a\\_f14/Notes\\_Ramsey\\_Cass\\_Koopmans\\_pog.pdf](https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf).

18. Akaev A.A., Sadovnichii V.A. 2019. "On the choice of mathematical models for describing the dynamics of digital economy" Differential Equations. 2019. vol. 55, no. 5. pp. 729-738.
19. Gómez, M. A. 2018. "Economic growth and factor substitution with elastic labor supply" Math. Social Sci., 94, pp. 49-57.
20. Gómez, M. A. 2018. "Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply" Economics Letters 172, pp. 89-92.

Получено 3.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

---

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-130-141

**Большая система осцилляторов с ультралокальным  
воздействием случайного стационарного внешнего поля**

М. В. Меликян

**Меликян Маргарита Врежовна** — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: mv.melikian@gmail.com*

**Аннотация**

В статье рассматривается влияние на поведение больших гамильтоновых систем частиц внешней силы, которая представлена стационарным случайным процессом. Сама система предполагается имеющей квадратичное взаимодействие, а возмущение системы внешней силой предполагается локальным. Точнее, только одна фиксированная частица подвержена влиянию внешнего поля. Такие системы исследовались ранее, дается краткий обзор предыдущих работ. В нашем случае, когда внешнее воздействие является стационарным в широком смысле процессом, исследуется поведение средней энергии системы для больших времен. Основной результат состоит в выделении 4 различных случаев соотношения спектра матрицы гамильтоновой системы и спектральной плотности корреляционной функции стационарного процесса, дающих разное асимптотическое поведение траекторий и средней энергии. Типичным поведением является либо ограниченность, либо квадратичный рост средней энергии.

*Ключевые слова:* стационарные случайные процессы, линейные Гамильтоновы системы, локальное внешнее влияние, резонанс, асимптотика средней энергии.

*Библиография:* 28 названий.

**Для цитирования:**

М. В. Меликян. Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием случайного стационарного внешнего поля // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 130–141.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-130-141

**Large system of oscillators with ultralocal stochastic stationary external field influence**

M. V. Melikian

**Melikian Margarita Vrezhovna** — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: mv.melikian@gmail.com*

**Abstract**

In this paper influence of external force, assumed to be random stationary process, on the behavior of large Hamiltonian particle systems is studied. The Hamiltonian system is assumed to have quadratic interaction, and the external influence is assumed to be local. More exactly, the external force acts on only one fixed particle. Such systems were studied earlier, it is given short review of the previous papers. In our case, when the external force is a stationary random process in the wider sense, large time asymptotics of the mean energy of the system is studied. Main result is the characterization of 4 different cases for the spectrum of the matrix of quadratic interaction and the spectral density of the correlation function of the stationary random process, which give different asymptotic behaviour of the trajectories and of the mean energy. Typical behaviour appears to be either uniform boundedness or quadratic growth of the mean energies.

*Keywords:* stationary random processes, linear Hamiltonian systems, local external influence, resonance, asymptotics of mean energies.

*Bibliography:* 28 titles.

**For citation:**

M. V. Melikian, 2022, “Large system of oscillators with ultralocal stochastic stationary external field influence”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 130–141.

**1. Введение**

В настоящей статье исследуется многочастичная система с квадратичным взаимодействием между частицами и локальным случайным внешним воздействием. При этом взаимодействие между частицами рассматривается только в рамках классических законов Ньютона (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). Отличием от статьи [3] является то, что в настоящей статье вопрос столкновений частиц (свойство регулярности) не рассматривается.

В описание поведения систем большого числа частиц случайность вводили многие авторы. Причем вводилась она разными способами. Здесь нельзя не отметить цикл работ [8, 9, 10, 11], в которых исследуются цепочки гармонических осцилляторов с различными случайными начальными условиями (у этой же группы авторов есть и более ранние работы, однако приведенные выше видятся основными). Интерес к подобным моделям не угас до сих пор, см., например, [12].

Также, например, в ряде работ, где исследуется поток тепла в конечной неупорядоченной цепочке осцилляторов, случайными могут предполагаться массы частиц. Первым такую модель рассмотрел Дайсон [13]. Позднее результаты были получены Матсудом и Ишии [14], Лейбовицем (см. [15, 16]).

Случайными также могут быть начальные условия или же внешнее воздействие. Здесь хочется отметить работы Дудниковой Т.В., например, [17, 18, 19], статью Лыкова А.А. [20], а также цикл физических работ (выполненных скорее в математическом духе) [21, 22, 23, 24].

Большинство указанных работ рассматривают системы связанных гармонических осцилляторов и их обобщения, что не случайно – это классический объект изучения в математической физике, как и в самой физике. Дело в том, что в физике модель гармонического осциллятора играет важную роль, особенно при исследовании малых колебаний систем около положения устойчивого равновесия. Существование решений и их эргодические свойства были изучены в [25]. Также было проведено обширное исследование сходимости к равновесию счетной гармонической цепочки, находящейся в контакте с термостатом [9, 19, 26, 27]. Свойство равномерной ограниченности траекторий частиц системы (по времени  $t$  и номеру частицы  $k$ ) особо важно для некоторых приложений. Например, равномерная ограниченность траекторий частиц в конечной гармонической цепи позволяет вывести уравнения Эйлера и газ Чаплыгина (уже упомянутая статья [1]). Равномерная ограниченность траекторий частиц в односторонней несимметричной гармонической цепочке играет важную роль в некоторых моделях транспортного потока [5].

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук проф. Малышеву В.А. за постановку задачи и ценные обсуждения в ходе работы.

Работа посвящается профессору механико-математического факультета МГУ Владимиру Николаевичу Чубарикову в связи с его семидесятилетием с пожеланиями крепкого здоровья.

## 2. Модель

В настоящей работе рассматривается конечная система точечных частиц единичных масс в случайном поле на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  с координатами  $\{x_k\}_{k=1}^N$  и скоростями  $\{v_k\}_{k=1}^N$ .

Определим гамильтониан (общую энергию системы) посредством формулы:

$$H(x(t), v(t)) = \sum_{k=1}^N \frac{v_k^2}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{a_{kk}}{2} (x_k(t) - ka)^2 + \sum_{\substack{k, j=1 \\ k \neq j}}^N \frac{a_{kj}}{2} (x_k(t) - x_j(t) - (k-j)a)^2,$$

где параметры  $a > 0$ ,  $a_{kk} \geq 0$ . При этом первая сумма отвечает кинетической энергии системы, а оставшееся – потенциальной. А именно, вторая сумма в гамильтониане означает, что частица с номером  $k$ , где  $a_{kk} > 0$ , является гармоническим осциллятором (осцилляция происходит около положения  $ka$ ), последняя же сумма отвечает за взаимодействие между частицами с номерами  $k$  и  $j$ , где  $a_{kj} \neq 0$ , причем в зависимости от знака  $a_{kj}(x_k(t) - x_j(t) - (k-j)a)$  имеют место притяжение или отталкивание между соответствующими частицами (расстояние  $(k-j)a$  здесь является тем расстоянием, к которому эти частицы «стремятся»).

Положением равновесия системы (состояние, где достигается минимум энергии) будет:

$$x_k = ka, \quad v_k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Это означает, что если начальные условия находятся в положении равновесия, то частицы не будут двигаться, т.е. будем иметь  $x_k(t) = ka$ ,  $v_k(t) = 0$  для всех  $t \geq 0$ . В таком случае будет удобно перейти к новым переменным – отклонениям:

$$q_k(t) = x_k - ka, \quad p_k(t) = \dot{q}_k(t) = v_k(t).$$

Выразим гамильтониан в новых переменных и запишем его в виде:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^N a(k-j)q_k q_j,$$



где потребуем, чтобы функция  $a(k)$  удовлетворяет двум условиям:

1. симметрия:  $a(k) = a(-k)$ ;
2. матрица  $V$  положительно определена, где  $V_{k,j} = a(k-j) = a(j-k)$ .

Мы будем рассматривать нулевые начальные условия

$$q_k(0) = 0, p_k(0) = 0, k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Тогда движение системы описывается следующей системой ОДУ:

$$\ddot{q}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}, j = 1, \dots, N,$$

где  $f(t)$  – внешняя сила, действующая на частицу с номером  $n$ ,  $\delta_{j,n}$  – символ Кронекера. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем в гамильтоновом виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = p_j, \\ \dot{p}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}. \end{cases} \quad (2)$$

Введем вектор  $\psi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ . Тогда система перепишется в виде:

$$\dot{\psi} = A\psi + f(t)g, g = (0, e_n)^T, e_n(j) = \delta_{j,n}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда  $f(t)$  – стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с ортогональной мерой  $Z(dx)$ , спектральной мерой  $\mu(dx)$ , носитель которой отделим от спектра оператора  $V$ , и непрерывной ковариационной функцией  $B(s)$ , то есть:

$$B(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \mu(dx), f(s) \stackrel{\text{a.s.}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{isx} Z(dx). \quad (4)$$

Будем говорить, что последовательности случайных процессов  $\{q_k(t)\}_k, \{p_k(t)\}_k$  решают систему уравнений (2), если они непрерывно дифференцируемы в среднеквадратичном и при их подстановке правая и левая часть равны по соответствующей мере. Начальные условия, лежащие в соответствующем гильбертовом пространстве, гарантируют существование и единственность решений уравнения, принадлежащему этому пространству при каждом  $t$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Для любого  $\psi \in \mathbb{R}^{2N}$  существует и единственно (п.н.) решение  $\psi(t)$  системы (3) с начальным условием  $\psi$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно следует из существования и единственности решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, см., например, [28].  $\square$

## 2.1. Результаты

Ввиду того, что матрица  $V$  положительно определена и, значит, все ее собственные значения строго положительны, удобно далее обозначать их  $a_k = \nu_k^2, k = 1, \dots, N$ , причем удобно считать, что все  $\nu_k$  положительны. Соответствующую им систему собственных векторов обозначим через  $\{u_k, k = 1, \dots, N\}$ . Далее всегда считаем эту систему ортонормированной.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть мера  $\mu$  такова, что корреляционную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде:

$$B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} b(x) dx, \quad (5)$$

тогда средняя энергия системы выражается как:

$$E(H(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \frac{(x^2 + \nu_k^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_k t)) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2} dx,$$

при этом

1. если носитель  $b(x)$  не пересекается со спектром корня из матрицы  $V$  (т.е. множеством  $\{\nu_k, k = 1, \dots, N\}$ ), то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

2. если для всех  $j$ , таких что  $\nu_j$  лежит в  $\text{supp } b(x)$ ,  $(u_j, e_n)^2 = 0$ , то вновь имеет место ограниченность по времени средней энергии;

3. если есть точка спектра  $\nu_j$ , лежащая в  $\text{supp } b(x)$ , такая что  $(u_j, e_n)^2 \neq 0$ , то

3.1. если  $\nu_j = 0$  и выполнено

$$b(0) = b'(0) = 0, \quad (6)$$

то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

3.2. иначе (т.е. для тех индексов  $j \in \{1, \dots, N\}$ , для которых либо  $\nu_j \neq 0$ , либо  $\nu_j = 0$ , но не выполнено (6)) средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная  $C$ , такая что:

$$E(H(t)) \sim Ct^2.$$

## 2.2. Доказательство Теоремы 2

$$\ddot{q}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда решение системы выражается известной формулой (см., например, [28]):

$$q(t) = \int_0^t f(s)(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t-s))e_n ds + \cos(\sqrt{V}t)q(0) + (\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}t)p(0), \quad (7)$$

$$p(t) = \int_0^t f(s) \cos(\sqrt{V}(t-s))e_n ds - \sqrt{V} \sin(\sqrt{V}t)q(0) + \cos(\sqrt{V}t)p(0), \quad (8)$$

Учтем (1):

$$q(t) = \int_0^t f(s)(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t-s))e_n ds,$$

$$p(t) = \int_0^t f(s) \cos(\sqrt{V}(t-s))e_n ds.$$

Выразим средние кинетическую и потенциальную энергии. Начнем с кинетической:

$$2E(E_{kin}(t)) = E(p(t), p(t)) = E \int_0^t \int_0^t f(s_1)e_n^T \cos^T(\sqrt{V}(t-s_1))f(s_2) \cos(\sqrt{V}(t-s_2))e_n ds_1 ds_2.$$

Можно рассмотреть разложение вектора из  $\mathbb{R}^N$  по системе собственных векторов  $\{u_k, k = 1, \dots, N\}$ :

$$e_n = \sum_{k=1}^N (u_k, e_n) u_k. \quad (9)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} E(p(t), p(t)) &= \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) (\cos(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, \cos(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2 = \\ &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) \cos(\nu_k(t - s_1)) \cos(\nu_k(t - s_2)) ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

Воспользуемся (5), тогда

$$\begin{aligned} E(p(t), p(t)) &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(u-v)x} b(x) \cos(\nu_k u) \cos(\nu_k v) dx du dv = \\ &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \int_0^t e^{iux} \cos(\nu_k u) du \int_0^t e^{-ivx} \cos(\nu_k v) dv dx. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} h_k(t, x) &= \int_0^t e^{ivx} \cos(\nu_k v) dv = \int_0^t e^{ivx} d \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} = e^{ivx} \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} \Big|_{v=0}^{v=t} - \\ &- ix \int_0^t \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} e^{ivx} dv = e^{itx} \frac{\sin(\nu_k t)}{\nu_k} + \frac{ix}{\nu_k^2} (e^{itx} \cos(\nu_k t) - 1) + \frac{x^2}{\nu_k^2} h_k(t, x), \end{aligned}$$

откуда:

$$h_k(t, x) = \frac{\nu_k e^{itx} \sin(\nu_k t) + ix(e^{itx} \cos(\nu_k t) - 1)}{\nu_k^2 - x^2}.$$

Нам понадобятся

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h_k(t, x)) &= \frac{\nu_k \sin(\nu_k t) \cos(tx) - x \sin(tx) \cos(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}, \\ \operatorname{Im}(h_k(t, x)) &= \frac{\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - x + x \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$|h_k(t, x)|^2 = \frac{\nu_k^2 \sin^2(\nu_k t) + x^2 \cos^2(\nu_k t) + x^2 - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - 2x^2 \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2}. \quad (10)$$

Итого,

$$E(E_{kin}(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) |h_k(t, x)|^2 dx,$$

где  $|h_k(t, x)|^2$  найдено в (10).

Далее средняя потенциальная энергия:

$$\begin{aligned} 2E(E_{pot}(t)) &= E(q(t), Vq(t)) = \\ &= E \int_0^t \int_0^t f(s_1) f(s_2) ((\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, V(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) (\sin(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, \sin(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2,$$

вновь применяем формулы (5) и (9):

$$2E(E_{pot}(t)) = \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \int_0^t e^{iux} \sin(\nu_k u) du \int_0^t e^{-ivx} \sin(\nu_k v) dv dx.$$

Ищем

$$\begin{aligned} g_k(t, x) &= \int_0^t e^{ivx} \sin(\nu_k v) dv = \int_0^t e^{ivx} d \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} = e^{ivx} \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} \Big|_{v=0}^{v=t} - \\ &- ix \int_0^t \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} e^{ivx} dv = \frac{1 - e^{itx} \cos(\nu_k t)}{\nu_k} + \frac{ix}{\nu_k^2} e^{itx} \sin(\nu_k t) + \frac{x^2}{\nu_k^2} g_k(t, x), \end{aligned}$$

откуда:

$$g_k(t, x) = \frac{\nu_k(1 - e^{itx} \cos(\nu_k t)) + ix e^{itx} \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}.$$

Нам понадобятся

$$\operatorname{Re}(g_k(t, x)) = \frac{\nu_k - \nu_k \cos(tx) \cos(\nu_k t) - x \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2},$$

$$\operatorname{Im}(g_k(t, x)) = \frac{-\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) + x \cos(tx) \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2},$$

откуда

$$|g_k(t, x)|^2 = \frac{x^2 \sin^2(\nu_k t) + \nu_k^2 + \nu_k^2 \cos^2(\nu_k t) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - 2\nu_k^2 \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2}. \quad (11)$$

Итого,

$$E(E_{pot}(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) |g_k(t, x)|^2 dx,$$

где  $|g_k(t, x)|^2$  найдено в (11). Отсюда полная средняя энергия системы выражается как:

$$E(H(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \frac{(x^2 + \nu_k^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_k t)) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2} dx,$$

Откуда делаем вывод, что если носитель  $b(x)$  не пересекается со спектром матрицы  $V$ , то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени. В случае, если есть точка спектра  $\nu_j$ , лежащая в  $\operatorname{supp} b(x)$  (здесь  $\operatorname{supp} b(x)$  – носитель функции), то в случае, если  $(u_j, e_n)^2 \neq 0$ , соответствующий интеграл будет давать следующий вклад (рассмотрим подынтегральную функцию в окрестности этой точки, для чего сделаем замену  $x = y + \nu_j$ ). Начнем с числителя:

$$\begin{aligned} (x^2 + \nu_j^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_j t)) - 2x\nu_j \sin(tx) \sin(\nu_j t) &= y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - \\ &- (y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2) \cos(\nu_j t) (\cos(ty) \cos(\nu_j t) - \sin(ty) \sin(\nu_j t)) - \\ &- (2\nu_j y + 2\nu_j^2) \sin(\nu_j t) (\cos(ty) \sin(\nu_j t) + \sin(ty) \cos(\nu_j t)) = \\ &= y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - y^2 \cos(\nu_j t) (\cos(ty) \cos(\nu_j t) - \sin(ty) \sin(\nu_j t)) - \\ &- (2\nu_j y + 2\nu_j^2) \cos(ty). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

1.  $\nu_j = 0$ . Тогда числитель равен  $y^2 - y^2 \cos(ty)$ , а знаменатель будет равен  $(\nu_j^2 - x^2)^2 = y^2(y + 2\nu_j)^2 = y^4$ . Итого, данный интеграл будет иметь вид

$$\int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy,$$

оценим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{|1 - \cos(ty)|}{y^2} dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{b(y)}{y^2} dy = \\ &= 2 \left( \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \frac{b(y)}{y^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(y)}{y^2} dy \right), \end{aligned}$$

для некоторого  $\delta > 0$ . Здесь первый интеграл

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \frac{b(y)}{y^2} dy \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} b(y) dy < \infty.$$

Исследуем на сходимость второй интеграл (от знакопостоянной функции, особая точка — точка нуль):

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(y)}{y^2} dy &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(0) + b'(0)y + b''(0)y^2/2 + \bar{o}(y^2)}{y^2} dy \sim^{(1)} \\ &\sim^{(1)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b''(0)y^2/2}{y^2} dy < \infty, \end{aligned}$$

здесь под  $\sim^{(1)}$  имеется ввиду эквивалентность по сходимости, а  $\bar{o}(y^2)$  —  $\bar{o}$ -малое при  $y \rightarrow 0$ , при этом учтено (6). Иначе

$$\int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy = \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy.$$

Первый интеграл сходится аналогично предыдущему, а второй:

$$\int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy \sim \int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{t^2 y^2 / 2}{y^2} dy = C_1 t^2.$$

2.  $\nu_j \neq 0$ . Тогда числитель (при  $y \rightarrow 0$  и фиксированном  $t$ ) равен

$$\begin{aligned} y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - y^2(\cos^2(\nu_j t)(1 - \frac{(ty)^2}{2} + \bar{o}((ty)^2) - \cos(\nu_j t) \sin(\nu_j t)(ty + \bar{o}((ty)^2))) - \\ - (2\nu_j y + 2\nu_j^2)(1 - \frac{(ty)^2}{2} + \bar{o}((ty)^2))) = y^2(1 - \cos^2(\nu_j t)) + \nu_j^2 t^2 y^2 + \bar{o}((ty)^2). \end{aligned}$$

А знаменатель будет равен  $(\nu_j^2 - x^2)^2 = y^2(y + 2\nu_j)^2 \sim y^2$ ,  $y \rightarrow 0$ . Откуда получаем, что в окрестности нуля дробь ведет себя как  $1 - \cos^2(\nu_j t) + \nu_j^2 t^2$ , то есть порядок роста (по времени) равен  $\sim \nu_j^2 t^2$ , что завершает доказательство теоремы.

### 3. Заключение

Показано, что даже локальное воздействие на конечную систему частиц способно привести к явлению резонанса, изучены условия его возникновения и средняя энергия системы в условиях резонанса и его отсутствия.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lykov A., Malyshev V. From the  $N$ -body problem to Euler equations // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2017. Vol. 24, №1, P. 79-95.
2. Lykov A. A., Malyshev V. A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields. 2012. Vol. 18, P. 1-10.
3. Лыков А. А., Малышев В. А., Чубариков В. Н. Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: системы без взаимодействия // Чебышёвский сборник. 2016. Т. 17, №3, С. 148–165.
4. Lykov A. A., Malyshev V. A. Convergence to Gibbs Equilibrium — Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields. 2013. Vol. 19, P. 643–666.
5. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V. Phase diagram for one-way traffic flow with local control // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier BV (Netherlands). 2017. Vol. 486, P. 849-866.
6. Lykov A., Melikian M. Long time behavior of infinite harmonic chain with  $l_2$  initial conditions // Markov Processes and Related Fields. 2020. Vol. 26, №2, P. 189-212.
7. Лыков А. А., Малышев В. А., Меликян М. В. Резонанс в многокомпонентных линейных системах // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. Вып. 3. 2021. С. 74-79.
8. Dobrushin R. L., Fritz J. Non-Equilibrium Dynamics of One-dimensional Infinite Particle Systems with a Hard-Core Interaction // Commun. math. Phys. 1977. Vol. 55, P. 275-292.
9. Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L. Convergence to Stationary States for Infinite Harmonic Systems // Journal of Statistical Physics. 1983. Vol. 30, №1.
10. Boldrighini C., Dobrushin R. L., Sukhov Yu. M. One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics // Journal of Statistical Physics. 1983. Vol. 31, №3, P. 123-155.
11. Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Suhov Yu. M., Triolo L. One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics // Journal of Statistical Physics. 1986. Vol. 43, 3/4.
12. Bernardin C., Huveneers F., Olla S. Hydrodynamic Limit for a Disordered Harmonic Chain // Commun. Math. Phys. 2019. 365:215.
13. Dyson F. J. The dynamics of a disordered linear chain // Phys. Rev. 1953. Vol. 92, №6, P. 1331-1338.
14. Matsuda H., Ishii K. Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1970. Vol. 45, P. 56-88.
15. O'Connor A. J., Lebowitz J. L. Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15, P. 692-703.
16. Casher A., Lebowitz J. L. Heat flow in regular and disordered harmonic chains // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12, №8, P. 1701-1711.
17. Dudnikova T. V. Behavior for Large Time of a Two-Component Chain of Harmonic Oscillators // ISSN 1061 – 9208, Russian Journal of Mathematical Physics. 2018. Vol. 25, №4, P. 470-491.

18. Dudnikova T. Long-time asymptotics of solutions to a hamiltonian system on a lattice // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 219, №1, P. 69-85.
19. Dudnikova T., Komech A., Spohn H. On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals // J. Math. Phys. 2003. Vol. 44, №6, P. 2596-2620.
20. Lykov A. A. Energy Growth of Infinite Harmonic Chain under Microscopic Random Influence // Markov Processes and Related Fields. 2020. Vol. 26, P. 287-304.
21. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions // J. Micromech. and Mol. Phys. 2018. Vol. 3, P. 1-2.
22. Hemmen J. Dynamics and ergodicity of the infinite harmonic crystal // Physics Reports. 1980. Vol. 65, №2, P. 43-149.
23. Fox R. Long-time tails and diffusion // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 27, №6, P. 3216-3233.
24. Florencio J., Lee H. Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 31, №5, P. 3221-3236.
25. Lanford O., Lebowitz J. Time evolution and ergodic properties of harmonic systems // Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser (eds), Springer, Berlin, Heidelberg, Lect. Notes Phys. 1975. Vol. 38, P. 144-177.
26. Bogolyubov N. N. On Some Statistical Methods in Mathematical Physics // Ac. Sci. USSR, Kiev. 1945.
27. Spohn H., Lebowitz J. Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems // Commun. Math. Phys. 1977. Vol. 54, P. 97-120.
28. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений // КомКнига, Москва. 2007.

## REFERENCES

1. Lykov A., Malyshev V., 2017, "From the  $N$ -body problem to Euler equations", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 24, no. 1, pp. 79-95.
2. Lykov A. A., Malyshev V. A., 2012, "Harmonic Chain with Weak Dissipation", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 18, pp. 1-10.
3. Lykov A. A., Malyshev V. A., Chubarikov V. N., 2016, "Regular continual point particle systems. I: systems without interaction", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 17, no. 3, pp. 148-165.
4. Lykov A. A., Malyshev V. A., 2013, "Convergence to Gibbs Equilibrium — Unveiling the Mystery", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 19, pp. 643-666.
5. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V., 2017, "Phase diagram for one-way traffic flow with local control", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier BV (Netherlands), vol. 486, pp. 849-866.
6. Lykov A., Melikian M., 2020, "Long time behavior of infinite harmonic chain with  $l_2$  initial conditions", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 26, no. 2, pp. 189-212.

7. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V., 2021, "Resonance in Large Linear Systems", *Vestnik Mosk. Univ. S. 1. Math. Mech.*, 3, pp. 74-79.
8. Dobrushin R. L., Fritz J., 1977, "Non-Equilibrium Dynamics of One-dimensional Infinite Particle Systems with a Hard-Core Interaction", *Commun. math. Phys.*, vol. 55, pp. 275-292.
9. Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L., 1983, "Convergence to Stationary States for Infinite Harmonic Systems", *Journal of Statistical Physics*, vol. 30, no. 1.
10. Boldrighini C., Dobrushin R. L., Sukhov Yu. M., 1983, "One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics", *Journal of Statistical Physics*, vol. 31, no. 3, pp. 123-155.
11. Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Sukhov Yu. M., Triolo L., 1986, "One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics", *Journal of Statistical Physics*, vol. 43, 3/4.
12. Bernardin C., Huveneers F., Olla S., 2019, "Hydrodynamic Limit for a Disordered Harmonic Chain", *Commun. Math. Phys.*, 365:215.
13. Dyson F. J., 1953, "The dynamics of a disordered linear chain", *Phys. Rev.*, vol. 92, no. 6, pp. 1331-1338.
14. Matsuda H., Ishii K., 1970, "Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain", *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 45, pp. 56-88.
15. O'Connor A. J., Lebowitz J. L., 1974, "Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals", *J. Math. Phys.*, vol. 15, pp. 692-703.
16. Casher A., Lebowitz J. L., 1971, "Heat flow in regular and disordered harmonic chains", *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 8, pp. 1701-1711.
17. Dudnikova T. V., 2018, "Behavior for Large Time of a Two-Component Chain of Harmonic Oscillators", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 25, no. 4, pp. 470-491.
18. Dudnikova T., 2016, "Long-time asymptotics of solutions to a hamiltonian system on a lattice", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 219, no. 1, pp. 69-85.
19. Dudnikova T., Komech A., Spohn H., 2003, "On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals", *J. Math. Phys.*, vol. 44, no. 6, pp. 2596-2620.
20. Lykov A. A., 2020, "Energy Growth of Infinite Harmonic Chain under Microscopic Random Influence", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 26, pp. 287-304.
21. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., 2018, "Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions", *J. Micromech. and Mol. Phys.*, vol. 3, pp. 1-2.
22. Hemmen J., 1980, "Dynamics and ergodicity of the infinite harmonic crystal", *Physics Reports*, vol. 65, no. 2, pp. 43-149.
23. Fox R., 1983, "Long-time tails and diffusion", *Phys. Rev. A.*, vol. 27, no. 6, pp. 3216-3233.
24. Florencio J., Lee H., 1985, "Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain", *Phys. Rev. A.*, vol. 31, no. 5, pp. 3221-3236.
25. Lanford O., Lebowitz J., 1975, "Time evolution and ergodic properties of harmonic systems", *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser (eds), Springer, Berlin, Heidelberg, Lect. Notes Phys., vol. 38, pp. 144-177.



- 
26. Bogolyubov N. N., 1945, “On Some Statistical Methods in Mathematical Physics”, *Ac. Sci. USSR*, Kiev.
  27. Spohn H., Lebowitz J., 1977, “Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems”, *Commun. Math. Phys.*, vol. 54, pp. 97-120.
  28. Filippov A. F., 2007, “Introduction to differential equations theory”, *KomKniga*, Moscow.

Получено 13.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-142-152

**Интегральные многообразия первого фундаментального распределения  $lcAC_S$ -структуры**

А. Р. Рустанов, Е. А. Полькина, Г. В. Теплякова

**Рустанов Алигаджи Рустанов** — кандидат физико-математических наук, Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (г. Москва).

*e-mail: aligadzhi@yandex.ru*

**Полькина Елена Александровна** — кандидат физико-математических наук, Институт физики, технологии и информационных систем; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: polkina.ea@mail.ru*

**Теплякова Галина Васильевна** — кандидат педагогических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

*e-mail: galinka-78@list.ru*

**Аннотация**

В статье рассмотрены аспекты эрмитовой геометрии  $lcAC_S$ -структур. Исследовано влияние обращения в нуль тензора Нейенхейса и связанных с ним тензоров  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$ ,  $N^{(4)}$  на класс почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении  $lcAC_S$ -структур. Доказано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения:  $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса  $W_2 \oplus W_4$ , причем она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда  $grad \sigma \subset L(\xi)$ ; интегрируемого  $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса  $W_4$ ; нормального  $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой;  $lcAC_S$ -многообразия, для которого  $N^{(2)}(X, Y) = 0$ , или  $N^{(3)}(X) = 0$ , или  $N^{(4)}(X) = 0$ , является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

**Ключевые слова:** почти контактные структуры, почти эрмитовы структуры, интегрируемость структур, тензор Нейенхейса, нормальные структуры.

**Библиография:** 11 названий.

**Для цитирования:**

А. Р. Рустанов, Е. А. Полькина, Г. В. Теплякова. Интегральные многообразия первого фундаментального распределения  $lcAC_S$ -структур // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 142–152.

# CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-142-152

## Integral manifolds of the first fundamental distribution $lcAC_S$ -structure

A. R. Rustanov, E. A. Polkina, G. V. Teplyakova

**Rustanov Aligaji Rustanov** — candidate of physical and mathematical sciences, Institut of Digital Technolitics and Modeling in Construction, National Research Moscow State University of Civil Engineering (Moscow).

*e-mail: aligadzhi@yandex.ru*

**Polkina Elena Aleksandrovna** — candidate of physical and mathematical sciences; Institute of Physics, Technology and Informational Systems; Moscow State Pedagogical University (Moscow).

*e-mail: polkina.ea@mail.ru*

**Teplyakova Galina Vasilyevna** — candidate of pedagogical sciences, Orenburg State University (Orenburg).

*e-mail: galinka-78@list.ru*

### Abstract

In paper we consider aspects of the Hermitian geometry of  $lcAC_S$  structures. The effect of the vanishing of the Neyenhuis tensor and the associated tensors  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$ ,  $N^{(4)}$  on the class of almost Hermitian structure induced on the first fundamental distribution of  $lcAC_S$  structures is investigated. It is proved that the almost Hermitian structure induced on integral manifolds of the first fundamental distribution:  $lcAC_S$ -manifolds is a structure of the class  $W_2 \oplus W_4$ , and it will be almost Kähler if and only if  $grad \sigma \subset L(\xi)$ ; an integrable  $lcAC_S$ -manifold is a structure of the class  $W_4$ ; a normal  $lcAC_S$ -manifold is a Kähler structure; a  $lcAC_S$ -manifold for which  $N^{(2)}(X, Y) = 0$ , or  $N^{(3)}(X) = 0$ , or  $N^{(4)}(X) = 0$ , is an almost Kähler structure in the Gray-Hervell classification of almost Hermitian structures.

**Keywords:** almost contact structures, almost Hermitian structures, integrability of structures, Neyenhuis tensor, normal structures.

**Bibliography:** 11 titles.

### For citation:

A. R. Rustanov, E. A. Polkina, G. V. Teplyakova, 2022, “Integral manifolds of the first fundamental distribution  $lcAC_S$  - structures”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 142–152.

## 1. Введение

Контактная и эрмитова геометрия довольно тесно взаимосвязаны. Ряд работ посвящен изучению почти контактных структур, индуцируемых на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. В данной работе мы изучаем почти эрмитовы структуры, индуцируемые на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Одним из наиболее интересных тензоров почти контактных метрических многообразий, с геометрической точки зрения, является тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма. Как

известно, обращение в нуль тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма почти контактной метрической структуры равносильно интегрируемости структуры. С тензором Нейенхейса естественным образом связаны еще четыре тензора. Исследуем обращение этих тензоров в нуль, а именно, каким образом обращение каждого из этих тензоров влияет на почти эрмитову структуру, индуцируемую на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\dim M = 2n + 1$ ;  $\mathcal{X}(M) = C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на многообразии  $M$ ;  $\otimes$  — тензорное произведение,  $\wedge$  — внешнее умножение,  $d$  — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ . В данной работе будем полагать, что индексы  $i, j, k, \dots$  принимают значения от 0 до  $2n$ , а индексы  $a, b, c, \dots$  — значения от 1 до  $n$ , и будем считать, что  $\hat{a} = a + n$ ,  $\hat{\hat{a}} = a$ ,  $\hat{0} = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** [1, 3]. *Почти контактной метрической (короче, АС-) структурой на нечетномерном ориентируемом многообразии  $M$  называется четверка  $(\eta, \xi, \Phi, g)$  тензорных полей на этом многообразии, где  $\eta$  — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры,  $\xi$  — векторное поле, называемое характеристическим,  $\Phi$  — эндоморфизм модуля  $\mathcal{X}(M)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — риманова структура на  $M$ . При этом*

$$\begin{aligned} &1) \eta(\xi) = 1; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \\ &5) \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется, **почти контактным метрическим** (короче, АС-) многообразием.

Задание почти контактной метрической структуры на многообразии внутренним образом порождает присоединенную  $G$ -структуру, тотальное пространство расслоения которой состоит из, так называемых,  $A$ -реперов. Матрицы компонент тензоров  $\Phi$  и  $g$  в  $A$ -репере имеют вид соответственно

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $I_n$  — единичная матрица порядка  $n$ . Структурной группой такой  $G$ -структуры является группа  $\{1\} \times U(n)$  [2]–[4].

В модуле  $\mathcal{X}(M)$  АС-структуры  $(\eta, \xi, \Phi, g)$  многообразия  $M^{2n+1}$  внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора  $m = \eta \otimes \xi$  и  $l = id - m = -\Phi^2$  на подмодули  $M$  и  $L$  соответственно [2]–[4]. Таким образом,  $\mathcal{X}(M) = L \oplus M$ , где  $L = Im l = Im(\Phi) = \ker \eta$  — так называемое первое фундаментальное распределение,  $M = Imm = L(\xi)$  — второе фундаментальное распределение (линейная оболочка структурного вектора). Распределения  $M$  и  $L$  инвариантны относительно  $\Phi$  и взаимно ортогональны. Более того, если ввести в рассмотрение  $\mathcal{X}(M)^C = C \oplus \mathcal{X}(M)$  — комплексификацию модуля  $\mathcal{X}(M)$ , то  $\mathcal{X}(M)^C = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$ , где  $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ ,  $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ ,  $D_\Phi^0$  — собственные распределения структурного эндоморфизма  $\Phi$ , отвечающие собственным значениям  $\sqrt{-1}$ ,  $-\sqrt{-1}$  и 0 соответственно. Причем, проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы  $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $\bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ ,  $m = \eta \otimes \xi$  [3], [4].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2** [5]. *Конформным преобразованием АС-структуры  $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$  на многообразии  $M$  называется переход от  $S$  к АС-структуре  $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ , где  $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$ ,  $\tilde{\xi} = e^\sigma \xi$ ,  $\tilde{\Phi} = \Phi$ ,  $\tilde{g} = e^{-2\sigma}g$ , где  $\sigma$  — произвольная гладкая функция на  $M$ , называемая определяющей функцией преобразования.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6]. Почти контактная метрическая структура  $(\xi, \eta, \Phi, g)$  на многообразии  $M$  называется локально конформно почти косимплектической (короче,  $lcAC_S$ -структурой), если сужение этой структуры на некоторую окрестность  $U$  произвольной точки  $p \in M$  допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру.

Многообразие, снабженное локально конформно почти косимплектической структурой, называется **локально конформно почти косимплектическим** (короче,  $lcAC_S$ ) многообразием.

Первая группа структурных уравнений  $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной  $G$ -структуры имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= -\sigma_a \omega \wedge \omega^a - \sigma^a \omega \wedge \omega_a; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b; \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$1) \quad B^{[abc]} = B_{[abc]} = 0; \quad 2) \quad B^{[ab]} = B_{[ab]} = 0.$$

## 2. Интегральные многообразия первого фундаментального распределения

Рассмотрим дифференциальную 1-форму  $\omega = \eta \circ \pi_*$ , где  $\pi$  — естественная проекция в главном расслоении реперов над многообразием  $M$ ,  $\pi_*$  — порожденное ей увлечение  $\Phi$ -связанных векторных полей на многообразии  $M$ . Очевидно, эта форма является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, то есть базисом кораспределения ассоциированного с первым фундаментальным распределением  $L$  [7].

По классической теореме Фробениуса вполне интегрируемость первого фундаментального распределения равносильна условию существования такой формы  $\theta$ , что  $d\omega = \theta \wedge \omega$ , т.е. внешний дифференциал формы  $\omega$  должен принадлежать идеалу алгебры Грассмана многообразия  $M$  [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Распределение на многообразии  $M$  называется инволютивным, если через каждую точку многообразия проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Первое фундаментальное распределение  $lcAC_S$ -многообразия является вполне интегрируемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2:1) следует, что первое фундаментальное распределение  $L$   $lcAC_S$ -многообразия инволютивно, а значит, в силу теоремы Фробениуса [4] вполне интегрируемо.

Пусть  $N \subset M$  — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения  $lcAC_S$ -многообразия  $M$ . Тогда на нем канонически индуцируется почти эрмитова структура  $\langle J, \tilde{g} \rangle$ , где  $J = \Phi|_L$ ,  $\tilde{g} = g|_L$ . Поскольку форма  $\omega$  является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры на  $N$  имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно классификации Грея — Хервеллы почти эрмитовых структур ([4], стр. 450) это уравнения почти эрмитовой структуры класса  $W_2 \oplus W_4$ .

Заметим, что если в этих уравнениях положить  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ , то они примут вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

Это уравнения почти келеровой структуры. Выясним, когда выполняется условие  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ . Очевидно, последнее можно записать в виде  $d\sigma \parallel \eta$ . Это условие равносильно тому, что  $\text{grad } \sigma \subset L(\xi)$ , что в свою очередь, равносильно нормальности  $lcAC_S$ -структуры. Таким образом, можем сформулировать вывод.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $M$  —  $lcAC_S$ -многообразие, тогда на интегральных многообразиях максимальной размерности его контактного распределения индуцируется структура класса  $W_2 \oplus W_4$  почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. Она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда  $\text{grad } \sigma \subset L(\xi)$ .

Напомним, что компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора  $\Phi$  в римановой связности  $\nabla$  для  $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной  $G$ -структуры имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \Phi_{0,b}^a &= -\Phi_{\hat{a},b}^0 = -\sqrt{-1}\delta_b^a \sigma_0; & 2) \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,\hat{b}}^0 = \sqrt{-1}\delta_a^{\hat{b}} \sigma_0; \\ 3) \Phi_{0,0}^a &= -\Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1}\sigma^a; & 4) \Phi_{0,0}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1}\sigma_a; \\ 5) \Phi_{b,c}^a &= 4\sqrt{-1}\sigma^{[a}\delta_c^{b]}; & 6) \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1}\sigma_{[a}\delta_{\hat{b}}^{\hat{c}}]; \\ 7) \Phi_{b,\hat{c}}^a &= 4\sqrt{-1}B^{cab} & 8) \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1}B_{cab}; \\ 9) \Phi_{a,b}^0 &= -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}B_{ab}; & 10) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 &= -\Phi_{0,\hat{b}}^a = \sqrt{-1}B^{ab}; \\ 11) \Phi_{\hat{b},0}^a &= \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Тензором Нейенхейса** [1, 8, 9] эндоморфизма  $\Phi$  называется тензор  $N$  типа  $(2,1)$ , определяемый формой

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В терминах ковариантного дифференцирования тензор Нейенхейса  $AC$ -структуры можно определить так

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi\nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi\nabla_Y(\Phi)X\}.$$

На пространстве присоединенной  $G$ -структуры компоненты тензора  $N$  определяются тождествами

$$\begin{aligned} 1) N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[a,b]}^0; & 2) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= -N_{b\hat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{(\hat{a},b)}^0; \\ 3) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; & 4) N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{\hat{b},0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,\hat{b}}^a; \\ 5) N_{b\hat{c}}^a &= \sqrt{-1}\Phi_{[b,\hat{c}]}^a; & 6) N_{bc}^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}; \\ 7) N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю [3, 4].

Тогда согласно (4) и (5) ненулевые компоненты тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма  $lcAC_S$ -структуры задаются равенствами:

$$\begin{aligned} 1) N_{b0}^a &= -N_{0b}^a = -\frac{1}{2}B^{ab}; & 2) N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = -\frac{1}{2}B_{ab}; \\ 3) N_{b\hat{c}}^a &= 2B^{abc}; & 4) N_{bc}^{\hat{a}} &= 2B_{abc}. \end{aligned} \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [4, 8].  $AC$ -структура на многообразии называется интегрируемой, если  $AC$ -многообразие локально эквивалентно произведению комплексного многообразия на гладкое многообразие без дополнительной структуры.

Обращение тензора Нейенхейса в нуль равносильно интегрируемости  $AC$ -структуры [4, 8].

Пусть  $lcAC_S$ -структура интегрируема, тогда из (6) следует, что  $B^{abc} = B_{abc} = 0$ ,  $B_{ab} = B^{ab} = 0$ . Тогда первая группа структурных уравнений (2) примет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= \sigma_b \omega \wedge \omega^b + \sigma^b \omega \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

А первая группа структурных уравнений (3) почти эрмитовой структуры интегральных многообразий распределения  $L$  интегрируемой  $lcAC_S$ -структуры запишется в виде

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Т.е. в классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является структурой класса  $W_4$ .

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого  $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса  $W_4$  в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Известно [9], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$ ,  $N^{(4)}$ , а именно:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi; \\ N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X); \\ N^{(3)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\Phi)(X); \\ N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(X); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{L}_X$  — производная Ли в направлении векторного поля  $X$ .

В [10, 11] приводится аналитическое выражение тензоров  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$ ,  $N^{(4)}$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad N^{(2)}(X, Y) &= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}; \\ 2) \quad N^{(3)}(X) &= \nabla_{\xi}(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi(\nabla_X\xi); \\ 3) \quad N^{(4)}(X) &= \nabla_{\xi}(\eta)(X); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \tag{7}$$

Для получения компонент этих тензоров на пространстве присоединенной  $G$ -структуры  $lcAC_S$ -многообразия, проведем предварительные вычисления. Пусть  $M$  —  $lcAC_S$ -многообразие, тензорные компоненты формы римановой связности имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \theta_b^a &= -2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c - 2B^{cab} \omega_c; \quad 2) \quad \theta_b^{\hat{a}} = -2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c - 2B_{cab} \omega^c; \\ 3) \quad \theta_0^a &= \sigma_0 \omega^a + B^{ab} \omega_b - \sigma^a \omega; \quad 4) \quad \theta_0^{\hat{a}} = \sigma_0 \omega_a + B_{ab} \omega^b - \sigma_a \omega; \\ 5) \quad \theta_a^0 &= -\sigma_0 \omega_a - B_{ab} \omega^b + \sigma_a \omega; \quad 6) \quad \theta_a^{\hat{0}} = -\sigma_0 \omega^a - B^{ab} \omega_b + \sigma^a \omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим характеристический вектор  $lcAC_S$ -многообразия. Поскольку  $\xi$  — тензор типа  $(0,1)$ , его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над  $M$  удовлетворяют уравнениям  $d\xi^i + \xi^j \theta_j^i = \xi^i, j\omega^j$ , где  $\xi^i_{,j}$  — компоненты тензора  $\nabla\xi$ . Расписывая эти

соотношения на пространстве присоединенной  $G$ -структуры с учетом (8) и того обстоятельства, что на этом пространстве  $\xi^a = 0$ ,  $\xi^{\hat{a}} = 0$ ,  $\xi^0 = 1$ , получаем для  $lcAC_S$ -многообразий:

$$\begin{aligned} 1) \xi^0_{,j} &= 0; \quad 2) \xi^a_{,0} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,0} = -\sigma^a; \\ 3) \xi^a_{,b} &= \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b} = \sigma_0\delta^a_b; \quad 4) \xi^a_{,\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}} = B^{ab}; \\ 5) \xi^{\hat{a}}_{,0} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,0} = -\sigma_a; \quad 6) \xi^{\hat{a}}_{,b} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = B_{ab}; \\ 7) \xi^{\hat{a}}_{,\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \sigma_0\delta^b_a. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для контактной формы  $\eta$   $lcAC_S$ -многообразия получим компоненты ковариантной производной:

$$\begin{aligned} 1) \eta_{0,i} &= 0; \quad 2) \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,0} = -\sigma^a; \\ 3) \eta_{\hat{a},b} &= \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b} = \sigma_0\delta^a_b; \quad 4) \eta_{\hat{a},\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}} = B^{ab}; \\ 5) \eta_{a,0} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,0} = -\sigma_a; \quad 6) \eta_{a,b} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = B_{ab}; \\ 7) \eta_{a,\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \sigma_0\delta^b_a. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что  $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$ , где  $\pi$  — естественная проекция пространства присоединенной  $G$ -структуры на  $lcAC_S$ -многообразие  $M$ , находим, что на этом пространстве тензор  $N^{(1)}$  имеет компоненты:

$$\begin{aligned} 1) (N^{(1)})^0_{a0} &= -(N^{(1)})^0_{0a} = \sigma_a; \quad 2) (N^{(1)})^0_{\hat{a}0} = -(N^{(1)})^0_{0\hat{a}} = \sigma^a; \\ 3) (N^{(1)})^a_{\hat{b}0} &= -(N^{(1)})^a_{0\hat{b}} = -\frac{1}{2}B^{ab}; \quad 4) (N^{(1)})^a_{\hat{b}\hat{c}} = 2B^{abc}; \\ 5) (N^{(1)})^{\hat{a}}_{bc} &= 2B_{abc}, \quad 6) (N^{(1)})^{\hat{a}}_{b0} = -(N^{(1)})^{\hat{a}}_{0b} = -\frac{1}{2}B_{ab}. \end{aligned} \quad (11)$$

Остальные компоненты нулевые.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6** [1, 9]. *Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если  $N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$ .*

Понятие нормальности было введено Сасаки С. и Хатакеямой Дж. [9] и является одним из фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

Пусть  $M$  — нормальное  $lcAC_S$ -многообразие. Тогда из (11) и Определения 6 следует, что  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ ,  $B^{ab} = B_{ab} = 0$ ,  $B^{abc} = B_{abc} = 0$ .

Первая группа структурных уравнений нормального  $lcAC_S$ -многообразия запишется в виде:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + \sigma_0\delta^a_b \omega \wedge \omega^b; \\ 3) d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + \sigma_0\delta^b_a \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

А первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении такого многообразия, примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b; \\ 2) d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Т.е. в классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является келеровой структурой.

А значит, мы можем сформулировать следующую теорему.



**Теорема 3.** *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального  $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой.*

На пространстве присоединенной  $G$ -структуры тождество (7:1) примет вид:

$$N_{ij}^{(2)} = \eta_{j,k} \Phi_i^k - \eta_{i,k} \Phi_j^k + \eta_k \Phi_{i,j}^k - \eta_k \Phi_{j,i}^k.$$

С учетом соотношений  $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$ ,  $\eta_0 = 1$ , (1), (4) и (10), из последнего выражения получим:

$$\begin{aligned} 1) N_{0a}^{(2)} &= -N_{a0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma_a; \\ 2) N_{0\hat{a}}^{(2)} &= -N_{\hat{a}0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1} \sigma^a, \end{aligned} \quad (12)$$

остальные компоненты нулевые.

Пусть на  $lcAC_S$ -многообразии  $N^{(2)}(X, Y) = 0$  тогда, из (12) следует, что  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ . Первая группа структурных уравнений такого  $lcAC_S$ -многообразия примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ 3) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Тогда первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении данного  $lcAC_S$ -многообразия, имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

В классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является почти келеровой структурой. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 4.** *Почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении  $lcAC_S$ -многообразия, для которого  $N^{(2)}(X, Y) = 0$ , является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.*

На пространстве присоединенной  $G$ -структуры тождество (7:2) равносильно соотношениям:  $(N^{(3)})_k^i = \Phi_{k,j}^i \xi^j - \xi^i_{,j} \Phi_k^j + \Phi_j^i \xi^j_{,k}$ .

А значит, с учетом (1), (4) и (9) ненулевые компоненты  $N^{(3)}$  для  $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной  $G$ -структуры имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) (N^{(3)})_a^0 &= \Phi_{a,0}^0 = \sqrt{-1} \sigma_a; \\ 2) (N^{(3)})_{\hat{a}}^0 &= \Phi_{\hat{a},0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma^a; \\ 4) (N^{(3)})_{\hat{b}}^a &= 2\sqrt{-1} \xi^a_{,\hat{b}} = -2\Phi_{0,\hat{b}}^a = 2\sqrt{-1} B^{ab}; \\ 5) (N^{(3)})_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= -2\sqrt{-1} \xi^{\hat{a}}_{,\hat{b}} = -2\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = -2\sqrt{-1} B_{ab}. \end{aligned} \quad (13)$$

Обращение в нуль тензора  $N^{(3)}(X)$  на  $lcAC_S$ -многообразии влечет, согласно (13), выполнение равенств  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ ,  $B^{ab} = B_{ab} = 0$ . И первая группа структурных уравнений  $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной  $G$ -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\ 3) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Следовательно, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении  $lcAC_S$ -многообразия, для которого  $N^{(3)}(X) = 0$ , является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Наконец, рассмотрим тензор  $N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X)$ ;  $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ . На пространстве присоединенной  $G$ -структуры это равенство запишется в виде  $(N^{(4)})_i = \eta_{i,0}$ , последнее равносильно соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) & (N^{(4)})_0 = \eta_{0,0} = 0; \\ 2) & (N^{(4)})_a = \eta_{a,0} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = -\sigma_a; \\ 3) & (N^{(4)})_{\hat{a}} = \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi_{0,0}^a = -\sigma^a. \end{aligned} \quad (14)$$

Равенство нулю тензора  $N^{(4)}(X)$ , согласно (14) равносильно соотношениям  $\sigma_a = \sigma^a = 0$ . И в этом случае первая группа структурных уравнений  $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной  $G$ -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} 1) & d\omega = 0; \\ 2) & d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0\delta_b^a\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b; \\ 3) & d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0\delta_a^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

А значит, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении  $lcAC_S$ -многообразия, для которой  $N^{(4)}(X) = 0$ , является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Как промежуточный факт можно отметить следующее

**Предложение 2.** Для  $lcAC_S$ -многообразия обращение тензора  $N^{(2)}$  в нуль равносильно обращению в нуль тензора  $N^{(4)}$ .

**Доказательство.** Сравнивая полученные для  $lcAC_S$ -многообразия компоненты тензора  $N^{(2)}$  и тензора  $N^{(4)}$  на пространстве присоединенной  $G$ -структуры, а именно соотношения (12) и (14), получим то, что и требуется доказать.

### 3. Заключение

Обобщая вышеизложенное, сформулируем следующий результат

**Теорема.** Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения:

- а)  $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса  $W_2 \oplus W_4$ , причем она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда  $grad \sigma \subset L(\xi)$ .
- б) интегрируемого  $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса  $W_4$ ;
- в) нормального  $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой;
- г)  $lcAC_S$ -многообразия, для которого  $N^{(2)}(X, Y) = 0$ , или  $N^{(3)}(X) = 0$ , или  $N^{(4)}(X) = 0$ , является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blair D.E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1976. Vol. 509. P. 1-146.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М. ВИНТИ. 1986. Т. 18. С. 25-71.

3. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71-100. <https://doi.org/10.4213/sm675>.
4. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный дом». 2013.
5. Vaisman I. Conformal changes of almost contact metric manifolds // Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New-York. 1980. Vol. 792. P. 435-443.
6. Харитоновна С. В. О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 1. С. 126–138. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5249>.
7. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли: пер. с англ. М.: Мир. 1987.
8. Кобаяши Ш., Номидзу К. М. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука. 1981.
9. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J. 1961. Vol. 13, № 2. P. 281-294.
10. Рустанов А. Р. Свойства интегрируемости  $NC_{10}$ -многообразий // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 5. С. 32-38. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.4>.
11. Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитоновна С. В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20, № 3. С. 4–20 DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17829>.

## REFERENCES

1. Blair, D. E. 1976, “Contact manifolds in Riemannian geometry”, *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, vol. 509. pp. 1-146.
2. Kirichenko, V. F. 1988, “Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost-contact manifolds”, *J. Math. Sci.*, vol. 42. pp. 1885–1919 <https://doi.org/10.1007/BF01094419>.
3. Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R., 2002, “Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds”, *Sbornik: Mathematics*, vol.193(8). pp. 1173–1201. <http://dx.doi.org/10.1070/SM2002v193n08ABEH000675>.
4. Kirichenko, V. F., 2013, “Differential-geometric structures on manifolds”, Odessa: Printing House.
5. Vaisman, I., 1980, “Conformal changes of almost contact metric manifolds”, *Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New-York*, vol. 792. pp. 435-443.
6. Kharitonova, S. V., 2009, “On the geometry of locally conformally almost cosymplectic manifolds”, *Mathematical Notes*, vol. 86, pp. 121–131. <https://doi.org/10.1134/S0001434609070116>.
7. Warner, F., 1987, “Fundamentals of smooth manifolds and Lie group”, М.: Mir.
8. Kobayashi, S., Nomidzu, K. M., 1981, “Fundamentals of differential geometry”, М.: Nauka.

9. Sasaki, S., Hatakeyama, J., 1961, "On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II", *Tohoku Math. J.*, vol. 13 (2), pp. 281-294.
10. Rustanov, A. R., 2017, "Integrability properties of  $NC_{10}$ -manifolds", *Mathematical physics and computer modeling*, vol. 20(5), pp. 32-38. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.4>.
11. Abu-Saleem, A., Rustanov, A. R., Kharitonova, S. V., 2018, "Integrability Properties of Generalized Kenmotsu Manifolds", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 20(3). pp.4-20, DOI 10.23671/VNC.2018.3.17829.

Получено 04.08.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-153-166

**Бесконечная линейная независимость с ограничениями на  
подмножество простых чисел значений рядов эйлера типа  
с полиадическим лиувиллевым параметром**

В. Г. Чирский

**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).  
*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Аннотация**

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых  $p$ -адических чисел по всем простым числам  $p$ . Элементы  $\theta$  этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых  $p$ -адических чисел обозначаем  $\theta^{(p)}$ . Бесконечная линейная независимость полиадических чисел  $\theta_1, \dots, \theta_m$  означает, что для любой ненулевой линейной формы  $h_1x_1 + \dots + h_mx_m$  с целыми коэффициентами  $h_1, \dots, h_m$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + \dots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Вместе с тем, представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество.

Каноническое представление элемента  $\theta$  кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого — целые числа, сходящийся во всех полях  $p$ -адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число  $\theta$  полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел  $n$  и  $P$  существует натуральное число  $A$  такое, что для всех простых чисел  $p$ , удовлетворяющих неравенству  $p \leq P$ , выполнено неравенство

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, \quad f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n.$$

с ограничениями на множество простых чисел в совокупности арифметических прогрессий.

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю.В. Нестеренко [4] аппроксимации Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций. Использован подход из работы Эрнвалл–Хитонен, Матала-Ахо, Сешела [5].

*Ключевые слова:* полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел .

*Библиография:* 17 названий.

#### Для цитирования:

В. Г. Чирский. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 153–166.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-153-166

### Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers of values of Eulerian-type series with polyadic Liouville parameter

V. G. Chirskii

**Chirskii Vladimir Grigorevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

*e-mail:* [vgchirskii@yandex.ru](mailto:vgchirskii@yandex.ru)

#### Abstract

A ring of polyadic integers is a direct product of rings of integer  $p$ -adic numbers over all primes  $p$ . The elements  $\theta$  of this ring can thus be considered as infinite-dimensional vectors whose coordinates in the corresponding ring of integer  $p$ -adic numbers are denoted by  $\theta^{(p)}$ . The infinite linear independence of polyadic numbers  $\theta_1, \dots, \theta_m$  means that for any nonzero linear form  $h_1x_1 + \dots + h_mx_m$  with integer coefficients  $h_1, \dots, h_m$  there is an infinite set of primes  $p$  such that in the field  $\mathbb{Q}_p$  the inequality

$$h_1\theta_1^{(p)} + \dots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0$$

holds. At the same time, problems in which primes are considered only from some proper subsets of the set of primes are of interest. In this case, we will talk about infinite linear independence with restrictions on the specified set. Canonical representation of the element  $\theta$  of the ring of polyadic integers has the form of a series

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Of course, a series whose members are integers converging in all fields of  $p$ -adic numbers is a polyadic integer. We will call a polyadic number  $\theta$  a polyadic Liouville number (or a Liouville polyadic number) if for any numbers  $n$  and  $P$  there exists a natural number  $A$  such that for all primes  $p$  satisfying the inequality  $p \leq P$  the inequality

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

This work continues the development of the basic idea embedded in [15]. Here the infinite linear independence with restrictions on the set of prime numbers in the aggregate of arithmetic progressions. of polyadic numbers

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n.$$

will be proved. An important apparatus for obtaining this result are Hermite–Pade approximations of generalized hypergeometric functions constructed in the work of Yu.V. Nesterenko [4]. The approach from the work of Ernvall-Hytonen, Matala-Aho, Seppela [5] was used.

*Keywords:* polyadic Liouville number, infinite linear independence with restrictions on the subset of prime numbers.

*Bibliography:* 17 titles.

### For citation:

V. G. Chirskii, 2022, “Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers of values of Eulerian-type series with polyadic Liouville parameter”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 153–166.

## 1. Введение

Работа продолжает исследования, начатые в [1]–[3]. Во введении работы [3] приведена краткая история исследований арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических рядов. Предлагаемая работа касается более широкого класса, чем  $F$ -ряды. В ней соединены подходы, использованные в статье автора [2] и в работе [5].

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых  $p$ -адических чисел по всем простым числам  $p$ . Элементы  $\theta$  этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых по соответствующему кольцу целых  $p$ -адических чисел обозначаем  $\theta^{(p)}$ . Бесконечная линейная независимость полиадических чисел  $\theta_1, \dots, \theta_m$  означает, что для любой ненулевой линейной формы  $h_1x_1 + \dots + h_mx_m$  с целыми коэффициентами  $h_1, \dots, h_m$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + \dots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Вместе с тем, представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество. Каноническое представление элемента  $\theta$  кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого – целые числа, сходящийся во всех полях  $p$ -адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число  $\theta$  полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел  $n$  и  $P$  существует натуральное число  $A$  такое, что для всех простых чисел  $p$ , удовлетворяющих неравенству  $p \leq P$  выполнено неравенство

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

Настоящая работа продолжает развитие заложенной в [2] основной идеи.

Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, \quad f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n.$$

с ограничениями на множество простых чисел в совокупности арифметических прогрессий.

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю.В. Нестеренко [4] аппроксимации Эрмита–Падэ обобщенных гипергеометрических функций.

## 2. Формулировка основного результата

Пусть  $\lambda_0 = 0$ , пусть  $\mu_0$  -произвольное натуральное число. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0, s_1 = \exp(\lambda_1)$$

Пусть  $\mu_1$  -произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа  $p \leq s_1 + \lambda_1 + 1$  выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \mu_1 \geq 2s_1 \ln s_1$$

При  $k \geq 2$  положим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1}, s_k = \exp \lambda_k \quad (1)$$

и пусть натуральное число  $\mu_k$  выбрано так, что для любого простого  $p \leq s_k + \lambda_k + 1$  выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \mu_k \geq 2s_k \ln s_k. \quad (2)$$

Пусть

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \quad (3)$$

Ряд (3) сходится в любом поле  $\mathbb{Q}_p$  согласно (1), (2) и его сумма в этом поле представляет собой целое  $p$ -адическое число. Более того, этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля, так как

$$|\lambda - \lambda_k|_p < p^{-2s_k \ln s_k} < \lambda_k^{-2s_k}.$$

для любого простого числа  $p \leq s_k + \lambda_k + 1$ .

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \quad (4)$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n, \quad (5)$$

где  $\lambda$  определено равенством (3). Ряды (4) и (5) сходятся в любом поле  $\mathbb{Q}_p$  при  $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$ .

Нам потребуются вспомогательные ряды. При всех  $k$  положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k)_n z^n, \quad (6)$$

$$f_{1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k + 1)_n z^n. \quad (7)$$

Коэффициенты этих рядов - натуральные числа, поэтому в любом поле  $\mathbb{Q}_p$  они сходятся при  $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$ .

Пусть  $M$  — натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по  $\text{mod}(M)$ . Как обычно, число элементов этой системы обозначается  $\varphi(M)$ , где  $\varphi(M)$  — функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны  $r$  различных элементов  $a_1, \dots, a_r$  этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$  множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями  $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$ . Используя стандартное обозначение  $\mathbb{P}$  для множества простых чисел, будем обозначать  $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$  множество простых чисел, входящих в объединение множеств  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ .



ТЕОРЕМА. Пусть  $M \geq 3$ ,  $r > \frac{\varphi(M)}{2}$ . Тогда для любых целых чисел  $h_0, h_1$ , не равных нулю одновременно, существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство

$$|L(\lambda)|_p = |h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda)|_p > 0. \quad (8)$$

Отличие от теоремы от теоремы из [2] состоит в том, что в этой статье рассматриваются не все простые числа, а только числа из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ . В свою очередь, отличие от теоремы 3 из [5] состоит в том, что в работе [5] параметр  $\lambda$  не является полиадическим числом Лиувилля, а равен числу 1.

### 3. Доказательство теоремы

Следуя работе Ю.В. Нестеренко [4], обозначим

$$\alpha_{1,k} = \lambda_k, \alpha_{2,k} = 1$$

и для  $N = 2s + r$ , где  $r = 1$  или  $r = 2$  полагаем  $\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s$ , иными словами,

$$\alpha_{2s+1,k} = \lambda_k + s, \alpha_{2s+2,k} = 1 + s. \quad (9)$$

Используя обычное обозначение

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!} z^n \quad (10)$$

положим

$$f_{N,k}(z) = F(\alpha_{N+1,k}, \alpha_{N+2,k} z).$$

Обозначим, далее,

$$u_{0,k}(z) = f_{0,k}(z), u_{1,k}(z) = \alpha_{1,k} f_{1,k}(z) \quad (11)$$

и для любого  $N$  положим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^{N-1} f_{N,k}(z).$$

Таким образом,

$$u_{2s+1,k}(z) = (\lambda_k)_{s+1} s! z^{2s} F(s+1, \lambda_k + s + 1, z), \quad (12)$$

$$u_{2s+2,k}(z) = (\lambda_k)_{s+1} (s+1)! z^{2s+1} F(\lambda_k + s + 1, s + 2, z). \quad (13)$$

В упомянутой выше статье Ю.В. Нестеренко [4] установлено, что для любого  $N$  существуют многочлены  $P_{N,i,k}(z)$ ,  $i = 0, 1$  такие, что выполняется равенство

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z) u_{0,k}(z) + P_{N,1,k}(z) u_{1,k}(z). \quad (14)$$

При этом

$$P_{0,0,k}(z) = 1, P_{0,1,k}(z) = 0, P_{1,0,k}(z) = 0, P_{1,1,k}(z) = 1. \quad (15)$$

В той же работе установлено, что при всех  $N$  справедливо равенство

$$u_{N+2,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z)$$

и вытекающие из него соотношения

$$P_{N+2,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,i,k}(z), i = 0, 1. \quad (16)$$

Пусть

$$\Delta_{N,k}(z) = \begin{vmatrix} P_{N,0,k}(z) & P_{N,1,k}(z) \\ P_{N+1,0,k}(z) & P_{N+1,1,k}(z) \end{vmatrix} \quad (17)$$

Из равенств (15) получаем, что  $\Delta_{0,k}(1) \equiv 1$ , а равенства (16) дают рекуррентное соотношение

$$\Delta_{N+1,k}(z) = \alpha_{N+1,k} z \Delta_{N,k}(z),$$

откуда

$$\Delta_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^N.$$

Пусть  $K_i, i = 1, 2, \dots$  обозначают натуральные числа. Пусть  $C_i, i = 1, 2, \dots$  обозначают положительные постоянные. Символом  $[a]$  обозначаем целую часть числа  $a$ .

По индукции, используя (9) и (16), доказывается следующая лемма.

**ЛЕММА 1.** *Существует  $K_1 \in \mathbb{N}$ , такое, что для всех  $k \in \mathbb{N}, k \geq K_1$ , при  $s = [s_k] + 1$  для многочленов  $P_{N,i,k}(z), N = 2s + 1$  или  $N = 2s + 2, i = 0, 1$  выполняются неравенства*

$$|P_{N,i,k}(\lambda_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k})$$

и эти неравенства останутся верными при замене числа  $N$  числом  $N + 1$ .

**ЛЕММА 2.** *Пусть  $k \in \mathbb{N}, k \geq K_2$ , где  $K_2$  — эффективная постоянная,  $s \in \mathbb{N}$ , причем  $s = [s_k] + 1$ . Тогда для  $N = 2s + 1$  или  $N = 2s + 2$  справедливы неравенства*

$$\prod_p |u_{N,k}(\lambda_k)|_p \leq \exp(-2 \frac{r}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_2 s_k \sqrt{\ln s_k},) \quad (18)$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющим неравенствам

$$\exp(\sqrt{\ln s_k}) \leq p \leq s_k + \lambda_k + 1. \quad (19)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как для любого простого числа  $p$ , согласно (10), величины

$$F(s + 1, \lambda_k + s + 1, 1), F(\lambda_k + s + 1, s + 2, 1)$$

представляют собой целые  $p$ -адические числа, из равенств (12), (13) следует, что как для  $N = 2s + 1$ , так и для  $N = 2s + 2$  имеем

$$|u_{N,k}(1)|_p \leq |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p$$

и, следовательно,

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p, \quad (20)$$

где произведения взяты по любому множеству простых чисел  $p$ . В разложение величины  $(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k + 1)!$  на простые множители входят только простые числа  $p$  с условием  $p \leq s_k + \lambda_k + 1$ .

Рассмотрим

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k + 1)!|_p,$$

где произведение взято по всем простым числам  $p$  из любого множества  $\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, r$ . Так как

$$(\lambda_k)_{s_k+1} = \frac{(\lambda_k + s_k)!}{(\lambda_k - 1)!}$$

$p$ -адическая норма этого числа равна

$$p^{-\left(\frac{\lambda_k+s_k-S_{\lambda_k+s_k}}{p-1}-\frac{\lambda_k-1-S_{\lambda_k-1}}{p-1}\right)} = \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1}(s_k+1+S_{\lambda_k-1}-S_{\lambda_k+s_k})\right).$$

$p$ -адическая норма числа  $(s_k+1)!$  равна

$$p^{-\frac{s_k+1-S_{s_k+1}}{p-1}} = \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1}(s_k+1-S_{s_k+1})\right).$$

В этих формулах  $S_N$  обозначает сумму цифр  $p$ -ичного разложения числа  $N$ . Очевидны неравенства

$$1 \leq S_N \leq (p-1)(\log_p N) + 1.$$

В итоге произведение  $(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!$  имеет  $p$ -адическую норму, равную

$$\exp\left(-\frac{\ln p}{p-1}(2(s_k+1)+S_{\lambda_k-1}-S_{\lambda_k+s_k}-S_{s_k+1})\right)$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$|(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!|_p \leq \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1}(2s_k - C_3 \ln s_k)\right). \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!|_p \leq \exp\left(-\sum_p \frac{\ln p}{p-1}(2s_k - C_3 \ln s_k)\right), \quad (22)$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющим неравенствам (19).

Используем равенство

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + \sum_p \ln p \left(\frac{1}{p(p-1)}\right) = \sum_p \frac{\ln p}{p} + C_4,$$

а также известную оценку (см. [6] стр. 129)

$$\sum_{p \leq x} \left(\frac{\ln p}{p}\right) = \frac{1}{\varphi(M)} \ln x + O(1), x \rightarrow \infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам  $p \leq x$ , принадлежащим множеству  $\mathbf{a}_i$  значений любой из рассматриваемых арифметических прогрессий.

Поэтому, согласно (22),

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \leq \exp\left(-2\frac{r}{\varphi(M)}s_k \ln s_k + C_5 s_k\right) \quad (23)$$

где произведение взято по всем простым числам  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющим неравенствам (19).

Оценим снизу произведение

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \quad (24)$$

взятое по всем простым числам  $p$ , удовлетворяющим неравенству

$$p \leq \exp \sqrt{\ln s_k}. \quad (25)$$

Простое число  $p$  входит в разложение  $(s+1)!$  в степени

$$\frac{s+1-S_p(s+1)}{p-1},$$

где символ  $S_p(s+1)$  обозначает сумму цифр  $p$ -ичного разложения числа  $s+1$ . Очевидно, что  $S_p(s+1) \leq (p-1)(\log_p(s+1)+1)$ . В произведение

$$(\lambda_k)_{s+1} = \lambda_k(\lambda_k+1) \dots (\lambda_k+s) = \frac{(\lambda_k+s)!}{(\lambda_k-1)!}$$

это простое число  $p$  входит в степени

$$\frac{\lambda_k+s-S_p(\lambda_k+s)}{p-1} - \frac{\lambda_k-1-S_p(\lambda_k-1)}{p-1} \leq \frac{s_k}{p-1} + C_6 \log_p s_k.$$

Это означает, что в произведение  $(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!$  это простое число  $p$  входит в степени, не превышающей

$$\frac{2s_k}{p-1} + C_7 \log_p s_k.$$

Поэтому для произведения (24) имеем оценку снизу

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \geq \exp\left(-\sum_p \ln p \left(\frac{2s_k}{p-1} + C_7 \log_p s_k\right)\right), \quad (26)$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам  $p$ , удовлетворяющим неравенству (25). Используя равенство

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + \sum_p \ln p \left(\frac{1}{p(p-1)}\right) = \sum_p \frac{\ln p}{p} + C_8,$$

и следующую из (25) оценку

$$C_7 \sum_p \ln s_k \leq C_7 \sqrt{\ln s_k} \exp \sqrt{\ln s_k},$$

оценим сумму

$$\sum_p \ln p \left(\frac{2s_k}{p-1} + C_7 \log_p s_k\right) \leq 2s_k \sum_p \left(\frac{\ln p}{p}\right) + 2C_8 s_k + C_7 \exp(\sqrt{\ln s_k}) \ln s_k. \quad (27)$$

Известно, что

$$\sum_{p \leq x} \left(\frac{\ln p}{p}\right) = \ln x + O(1), x \rightarrow \infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам  $p \leq x$ . Поэтому при  $k \geq K_4$  выполнено неравенство

$$2s_k \sum_p \frac{\ln p}{p} \leq 2s_k \ln(\exp \sqrt{\ln s_k}) + C_9 s_k = 2s_k \sqrt{\ln s_k} + C_9 s_k \quad (28)$$

Поэтому, ввиду неравенств (25)(27),(28), при  $k \geq K_5$  имеем

$$\sum_p \ln p \left(\frac{2s_k}{p-1} + C_7 \ln s_k\right) \leq 2s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{10} s_k. \quad (29)$$

Из неравенств (26) и (29) сразу следует, что

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \geq \exp(-2s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{10}s_k) \quad (30)$$

где произведение взято по всем простым числам  $p$ , удовлетворяющим неравенству (25). Неравенства (23) и (30) дают справедливое при  $k \geq K_6$  неравенство

$$\begin{aligned} \prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p &\leq \exp(-2s_k \frac{r}{\varphi(M)} \ln s_k + C_5 s_k + 2s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{10}s_k) \leq \\ &\leq \exp(-2s_k \frac{r}{\varphi(M)} \ln s_k + C_{11}s_k \sqrt{s_k}), \end{aligned}$$

где произведение взято по всем простым числам  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющим неравенствам (19). Но тогда из неравенства (20) следует, что при условиях, что  $K_2$  — наибольшее из чисел  $K_1, K_3, \dots, K_6$  и  $k \geq K_2$ , а  $C_2 = C_{11}$ ,

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \exp(-2s_k \frac{r}{\varphi(M)} \ln s_k + C_3 s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

где произведение взято по всем простым числам  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющим неравенствам (19). Неравенство (18) и лемма доказаны.

Вместе с линейной формой

$$L_k = h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1) \quad (31)$$

с целыми коэффициентами  $h_0, h_1, \max(|h_0|, |h_1|) = h$  рассмотрим линейную форму вида

$$l_k = \lambda_k L_k = \lambda_k (h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1))$$

и приведем ее к удобному для дальнейшего виду

$$\lambda_k h_0 u_{0,k}(1) + h_1 u_{1,k}(1),$$

используя равенства (11) и равенство  $\alpha_{1,k} = \lambda_k$ . Таким образом, рассматриваем линейную форму

$$l_k = H_0 u_{0,k}(1) + H_1 u_{1,k}(1), \max(|H_0|, |H_1|) = h \lambda_k = H(k). \quad (32)$$

Из равенств (15) и (17) следует, что  $\Delta_{N,k}(1) \neq 0$ . Поскольку форма  $l_k$  ненулевая, хотя бы один из определителей

$$\begin{aligned} \delta_{N+1,k} &= \begin{vmatrix} H_0 & H_1 \\ P_{N+1,0,k}(1) & P_{N+1,1,k}(1) \end{vmatrix} \\ \delta_{N,k} &= \begin{vmatrix} H_0 & H_1 \\ P_{N,0,k}(1) & P_{N,1,k}(1) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

отличен от 0. Без ограничения общности считаем, что определитель (33),  $\delta_{N,k} \neq 0$ . Ввиду следствия леммы 1, этот выбор  $N$  не повлияет на оценку

$$|\delta_{N,k}| \leq 2H(k) \exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Так как  $H(k) = h \lambda_k$ , ввиду равенств (1) и (2) при  $k \geq K_7 = K_7(h)$  получаем оценку

$$|\delta_{N,k}| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_{12} s_k \sqrt{\ln s_k}) \quad (34)$$

Заметим, что все выбираемые далее постоянные  $K_i$  будут, тем самым, зависеть от  $h$ . Это не будет специально отмечаться. Далее продelaем с определителем  $\delta_{N,k}$  такие преобразования: умножим его первый столбец на величину  $u_{0,k}(1)$  и прибавим к первому столбцу полученного определителя его второй столбец, умноженный на  $u_{1,k}(1)$ . С учетом равенств (32) и (14) получаем

$$\delta_{N,k}u_{0,k}(1) = \begin{vmatrix} l_k & H_1 \\ u_{N,k}(1) & P_{N,1,k}(1) \end{vmatrix} \quad (35)$$

Иными словами,

$$\delta_{N,k}u_{0,k}(1) = l_k P_{N,1,k}(1) - u_{N,k}(1)H_1 \quad (36)$$

По аналогии с (35) и (36) получаем равенство

$$\delta_{N,k}u_{1,k}(1) = -l_k P_{N,0,k}(1) + u_{N,k}(1)H_0 \quad (37)$$

Из равенств (6),(7) и (11) следует, что при всех  $k$

$$u_{0,k}(z) = 1 + zu_{1,k}(z),$$

следовательно,  $u_{0,k}(1) - u_{1,k}(1) = 1$ , откуда, с учетом (36), (37) получаем

$$\delta_{N,k} = l_k(P_{N,1,k}(1) + P_{N,0,k}(1)) - u_{N,k}(1)(H_0 + H_1). \quad (38)$$

**ЛЕММА 3.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq K_8$ . Тогда существует простое число  $p_k$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющее неравенствам (19), для которого справедливы оценки

$$|l_k|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{12}s_k \sqrt{\ln s_k}) \quad (39)$$

$$|L_k|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13}s_k \sqrt{\ln s_k}) \quad (40)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное, т.е. что для всех простых чисел  $p$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющих неравенствам (19), имеем неравенство

$$|l_k|_p < \exp(-s_k \ln s_k - C_{12}s_k \sqrt{\ln s_k})$$

Из отличия от нуля определителя (33), того факта, что коэффициент при форме  $l_k$  — целое число и известного для отличных от нуля целых чисел  $A$  неравенства

$$|A|_p \geq \frac{1}{|A|}$$

следует, что для всех рассматриваемых простых чисел  $p$  выполнено неравенство

$$|l_k|_p < |\delta_{N,k}|_p.$$

Тогда равенство (38) означает, согласно известным свойствам  $p$ -адического нормирования, что для всех рассматриваемых простых чисел  $p$  выполнено равенство

$$|\delta_{N,k}|_p = |u_{N,k}(1)(H_0 + H_1)|_p.$$

Так как число  $H_0 + H_1$  — целое, получаем справедливые для всех рассматриваемых простых чисел  $p$  неравенства

$$|\delta_{N,k}|_p \leq |u_{N,k}(1)|_p.$$

Поэтому, так как  $\delta_{N,k}$  — целое число, произведение по всем рассматриваемым простым числам  $p$  величин  $|\delta_{N,k}|_p$  не меньше, чем произведение этих величин по всем простым числам  $p$ , а

так как этот определитель - отличное от нуля целое число, и, значит, можно использовать равенство  $|A|_p = \frac{1}{|A|}$ , получаем, согласно (34),

$$\prod_p |\delta_{N,k}|_p \geq \exp(-(s_k \ln s_k + C_{12} \sqrt{\ln s_k})).$$

С другой стороны, по лемме 2 имеет место неравенство

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \exp(-2s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Полученные оценки противоречат друг другу при  $k \geq K_8$ , что опровергает сделанное предположение и доказывает справедливость неравенства (39) при некотором  $p_k$  из множества  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$ , удовлетворяющем неравенствам (19). Поскольку  $l_k$ , определенная равенством (32), отличается от  $L_k$ , определенной равенством (31), лишь множителем  $\lambda_k = \ln s_k$ , из неравенства (39) следует неравенство (40) и лемма 3 доказана.

В лемме 3 доказано, что для любого  $k \geq K_8$  существует простое число  $p_k$ , удовлетворяющее неравенствам

$$\exp \sqrt{\ln s_k} \leq p_k \leq s_k + \ln s_k + 1$$

такое, что выполнено неравенство (40), т.е.

$$|L_k|_{p_k} = |h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Рассмотрим линейную форму

$$L = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое  $p_k$ -адическое число, поэтому разность форм

$$L - L_k = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1) - (h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1))$$

тоже представляет собой целое  $p_k$ -адическое число. Согласно равенствам (4), (5), (7), (8)

$$f_0(1) - f_{0,k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda)_n - (\lambda_k)_n)$$

$$f_1(1) - f_{1,k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda + 1)_n - (\lambda_k + 1)_n).$$

При  $n = 0$  обе разности  $(\lambda)_n - (\lambda_k)_n$ ,  $(\lambda + 1)_n - (\lambda_k + 1)_n$  равны 0. Обозначим  $\Lambda_k = \lambda - \lambda_k$ . При  $n \geq 1$  обе эти разности являются целыми  $p_k$ -адическими числами, членами сходящегося в  $\mathbb{Q}_{p_k}$  ряда. Каждое из этих чисел можно представить в виде произведения  $\Lambda_k$  на целое  $p_k$ -адическое число, член сходящегося в  $\mathbb{Q}_{p_k}$  ряда. Из равенств (1), (3) и неравенства (2) вытекает, что

$$|\Lambda_k|_{p_k} = |\mu_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Это означает, что

$$|f_0(1) - f_{0,k}(1)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}$$

и

$$|f_1(1) - f_{1,k}(1)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Следовательно,

$$|L - L_k|_{p_k} = |h_0(f_0(1) - f_{0,k}(1)) + h_1(f_1(1) - f_{1,k}(1))|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k} \quad (41)$$

Неравенства (40),(41) означают, что при  $k \geq K_9$  получаем:

$$|L - L_k|_{p_k} < |L_k|_{p_k}.$$

Поэтому

$$|L|_{p_k} = |L_k|_{p_k},$$

то есть

$$|h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)|_{p_k} = |h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что при  $k \geq K_{10}$  справедливо неравенство  $p_k < p_{k+1}$ . Для этого, ввиду (19), достаточно доказать, что при  $k \geq K_{14}$  выполняется неравенство

$$s_k + \ln s_k + 1 < \exp \sqrt{\ln s_{k+1}}.$$

Согласно (1) и (2)  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k > \mu_k$  и

$$\mu_k \geq \prod_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \exp \ln p(2s_k \ln s_k) = \exp \sum_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \ln p(2s_k \ln s_k) \geq \exp s_k^2.$$

(Здесь была использована грубая оценка

$$\sum_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \ln p \geq \frac{s_k}{2 \ln s_k}.)$$

Таким образом,

$$s_{k+1} = \exp \lambda_{k+1} \geq \exp \mu_k,$$

$$\ln s_{k+1} \geq \mu_k \geq \exp s_k^2, \sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp \frac{1}{2} s_k^2,$$

следовательно,

$$\exp \sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp(\exp \frac{1}{2} s_k^2) > s_k + \ln s_k + 1,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, доказано, что для любой линейной формы  $L = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$ . существует бесконечное множество чисел  $k$  и простых чисел  $p_k$ , для которых  $|L|_{p_k} \neq 0$ , что и утверждалось в теореме.

## 4. Заключение

Дальнейшим развитием этой работы будут результаты о бесконечной линейной независимости с ограничениями на множество простых чисел значений гипергеометрических рядов более общего вида. Кроме того, планируется модифицировать обобщённый метод Зигеля-Шидловского и использовать его для более широкого класса, чем  $F$ -ряды, теория которых (а также теория полиадических чисел Лиувилля) изложена в работах [7]-[15].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.т.494, с. 69-70.( Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)



2. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter. // Russ. J. Math. Phys. 2021.- v.28, no.3, pp.294-302.
3. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром. // Чебышевский сборник, том 22, выпуск 3, с. 156 – 167
4. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций. // Матем. сб.-1994.-т.185.-но.3.-с.39-72. (Англий перевод Nesterenko Yu. V.. Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions. // Russ. Acad. Sci. Sb. Math. -1995.-83.-189-219)
5. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L. Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences, v.22.-2019.-Article 19.2.2, 10pp.
6. Прахар К. Распределение простых чисел. М.-"Мир".-1967.-512с.
7. Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J.. Effective estimates for global relations on Euler-type series. // Ann. Fac. Sci. Toulouse, v.13, no.2, 2004, pp.241-260.
8. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с. (Английский перевод: Andrei B. Shidlovskii. Transcendental Numbers. W. de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
9. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. // Доклады Академии наук, сер. матем. т.459, no. 6, 677-678. (Английский перевод Chirskii V. G., Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. Dokl. Math. 90(3), pp. 766–768(2014))
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических  $F$ -рядов. // Доклады Академии наук, сер. матем. т.483, no. 3, 257-258. (Английский перевод V. G. Chirskii, Arithmetic properties of generalized hypergeometric  $F$ -series. Dokl. Math. 98:3, 589–591 (2018).)
11. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory 186 (2018), 202-210.
12. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
13. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric  $F$ -series // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
14. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля. // Чебышевский сборник, том 22, выпуск 3, с. 245 – 255
15. Чирский В. Г. О полиадических числах Лиувилля. // Чебышевский сборник, том 22, выпуск 5, с. 243 – 251

## REFERENCES

1. Chirskii V. G., 2020 "Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Dokl. Math.*, Vol.102, no.2. pp.412-413.

2. Chirskii V. G. 2021, “Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.28, no.3, pp.294-302.
3. Chirskii V. G. 2021, “Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouvillean Point of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.156-167.
4. Nesterenko Yu. V. 1995. “Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions“, *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.*, Vol.83. pp.189-219.
5. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L., 2019. “Euler’s divergent series in arithmetic progressions“, *J. Integer Sequences*, v.22.-2019.-Article 19.2.2, 10pp
6. Prachar K. 1957 “Primzahlverteilung“, *Springer-Verlag.-Berlin.-Gottingen.-Heidelberg*, 512 pp..
7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004. “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol.13,no.2, pp.241-260.
8. Shidlovskii, A. B. 1989. “Transcendental Numbers“, *W. de Gruyter.-Berlin.-New York*. 467pp.
- Matveev V. Yu. 2018 “Algebraic independence of certain almost polyadic series“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp.156-167.
9. Chirskii V. G. 2014. “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Dokl. Math.* Vol. 90, no.3, pp. 766–768.
10. Chirskii V. G. 2018. “Arithmetic properties of generalized hypergeometric  $F$ -series“, *Dokl. Math.* Vol. 98, no.3, pp.589–591.
11. Matala-aho T., Zudilin W. V. 2018. “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory* Vol. 186, pp. 202-210.
12. Chirskii V. G. 2019, “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286-305.
13. Chirskii V. G. 2020. “Arithmetic properties of generalized hypergeometric  $F$ -series“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175-184.
14. Chirskii V. G. 2020. “Polyadic Liouville numbers  $F$ -series“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245-255.
15. Chirskii V. G. 2020. “On Polyadic Liouville numbers“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.5, pp.243-251.

Получено 7.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-167-182

Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана  $B_{2,\gamma}$ 

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов

**Шабозов Мирганд Шабозович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистан, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

*e-mail: shabozov@mail.ru*

**Саидусайнов Муким Саидусайнович** — Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

*e-mail: smuqim@list.ru, smuqim@gmail.com*

## Аннотация

В статье рассматриваются экстремальные задачи среднеквадратического приближения функций комплексного переменного, регулярных в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , рядами Фурье по ортогональной в  $\mathcal{D}$  системе функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ , принадлежащих весовому пространству Бергмана  $B_{2,\gamma}$  с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left( \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где  $\gamma := \gamma(|z|) \geq 0$  — вещественная интегрируемая в области  $\mathcal{D}$  функция, а интеграл понимается в смысле Лебега,  $d\sigma := dx dy$  — элемент площади.

Более подробно исследуется сформулированная задача в случае, когда  $\mathcal{D}$  — единичный круг в пространстве  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ ,  $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1 - |z|)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$  — вес Якоби. В этом случае доказаны точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие величину наилучшего среднеквадратичного полиномиального приближения  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  и  $\mathcal{H}$ -функционала Петре. В случае  $\gamma_{\alpha,\beta} \equiv 1$  получаем ранее известные результаты.

**Ключевые слова:** суммы Фурье, среднеквадратическое приближение, верхние грани наилучших приближений,  $\mathcal{H}$ -функционал Петре

**Библиография:** 17 названий.

## Для цитирования:

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана  $B_{2,\gamma}$  // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 167–182.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-167-182

**Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space  $B_{2,\gamma}$** 

M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov

**Shabozov Mirgand Shabozovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe).

*e-mail: shabozov@mail.ru*

**Saidusainov Mukim Saidusainovich** — Tajik National University (Dushanbe).

*e-mail: smuqim@list.ru, smuqim@gmail.com*

**Abstract**

The article considers extremal problems of mean-square approximation of functions of a complex variable, regular in the domain  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , by Fourier series orthogonal in the system of functions  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  in  $\mathcal{D}$  belonging to the weighted Bergman space  $B_{2,\gamma}$  with finite norm

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left( \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

where  $\gamma := \gamma(|z|) \geq 0$  is a real integrable function in the domain  $\mathcal{D}$ , and the integral is understood in the Lebesgue sense,  $d\sigma := dx dy$  is an element of area.

The formulated problem is investigated in more detail in the case when  $\mathcal{D}$  is the unit disc in the space  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ ,  $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1 - |z|)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$  — Jacobi weight. Sharp Jackson-Stechkin-type inequalities that relate the value of the best mean-squared polynomial approximation of  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  and the Peetre  $\mathcal{K}$ -functional were proved. In case when  $\gamma_{\alpha,\beta} \equiv 1$  we will obtain the earlier known results.

**Keywords:** Fourier's sum, mean-squared approximation, upper bound best approximation, Peetre  $\mathcal{K}$ -functional.

**Bibliography:** 17 titles.

**For citation:**

M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov, 2022, "Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space  $B_{2,\gamma}$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 167–182.

**1. Введение**

Условимся в дальнейшем называть весом неотрицательную интегрируемую по Лебегу в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  функцию  $\gamma := \gamma(|z|) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что

$$\iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) d\sigma > 0,$$

где  $d\sigma = dx dy$  – элемент площади. В этой работе будем рассматривать вопросы среднеквадратичного приближения суммами Фурье комплексных функций  $f$ , регулярных в односвязной области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , принадлежащих весовому пространству Бергмана  $B_{2,\gamma} := B_{2,\gamma}(\mathcal{D})$  с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left( \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. В случае  $\gamma(|z|) \equiv 1$  пространство  $B_{2,\gamma}$  превращается в обычное пространство Бергмана (см., например, [1, стр.259]). Отметим, что в случае приближения в среднем функций комплексной переменной, регулярных в односвязной области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , рядами Фурье по ортогональной в  $\mathcal{D}$  системе функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина в весовом пространстве  $B_{2,\gamma}$  изучалась в работах [2, 3].

Хорошо известно [1, стр.262-265], что теория среднеквадратичного приближения по области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  функций  $f$  тесно связана с теорией ортогональных по области  $\mathcal{D}$  функций. Поэтому для большей связности изложения мы приведем основные понятия, относящиеся к теории ортогональных с весом в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  системы функций. Последовательность функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  назовем ортогональной с весом  $\gamma$  по области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  системой комплексных функций, если

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{D} \frac{1}{2\pi} \iint \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma := \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2, & \text{при } k = l, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если

$$\|\varphi_k\|_{2,\gamma} = \left( \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} = 1,$$

то такая система называется ортонормальной. Очевидно, что если система  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  является ортогональной, то система  $\{\varphi_k(z) \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$  является ортонормальной.

Функции  $f$  сопоставляется ее ряд Фурье по ортогональной системе  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z), \quad (1)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma$$

– коэффициенты Фурье функции  $f$ . Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z) \quad (2)$$

– частная сумма  $n$ -го порядка ряда, стоящая в правой части равенства (1). Составим линейную комбинацию первых  $n$  функций системы  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ :

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(z), \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

и множество всех обобщенных полиномов вида (3) обозначим через  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

Величину

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

назовем наилучшим среднеквадратическим приближением функции  $f \in B_{2,\gamma}$  подпространством  $\mathcal{P}_{n-1}$ . Имеет место следующее утверждение.

**ЛЕММА 1.** *Среди всех обобщенных полиномов вида (3) наилучшее среднеквадратическое приближение функции  $f \in B_{2,\gamma}$  доставляет  $n$ -я частичная сумма (2). При этом*

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2. \quad (4)$$

Если система функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  ортонормальна в  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , то из (4) вытекает равенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma} = \left( \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство леммы 1 проводится стандартным путем (см., например, [1, с.202]), а потому мы её опускаем. В условиях леммы 1 имеет место

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Для произвольной функции  $f \in B_{2,\gamma}$  справедливо равенство*

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2,$$

причём если система функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  ортонормальна, то

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2.$$

## 2. Случай, когда область $\mathcal{D}$ есть единичный круг

Рассмотрим более подробно случай, когда область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  есть единичный круг  $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . В этом случае система функций  $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$  является ортогональной, но не ортонормальной, поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^k \bar{z}^l d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{k+l+1} e^{i(k-l)t} d\rho dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{D} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho := \lambda_k > 0, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, система функций

$$\varphi_k^*(z) := \left\{ \left( \sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty}$$

будет ортонормальной системой. Через  $\mathcal{A}(U)$  обозначим класс аналитических в круге  $U$  функций. Пусть теперь  $f$  – произвольная функция, принадлежащая классу  $\mathcal{A}(U)$ . Ряд Маклорена этой функции внутри  $U$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (5)$$

Найдем коэффициенты Фурье  $a_k(f)$  этой функции. Имеем:

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k^*(z)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) z^l \right\} \cdot (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \bar{z}^k d\sigma = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) \cdot \left\{ (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^l \bar{z}^k d\sigma \right\} = c_k(f) \cdot (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |z|^{2k} d\sigma = \\ &= c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \lambda_k = c_k(f) \cdot \sqrt{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f \in \mathcal{A}(U)$  по ортонормальной системе  $\varphi_k^*(z) = (\sqrt{\lambda_k})^{-1} z^k$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) с учетом (6) приобретает вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (7)$$

Этот ряд совпадает с рядом Маклорена (5), т.е. ряд Фурье функции  $f(z)$  внутри единичного круга  $U$  представляет собой аналитическую функцию (5), для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |c_k(f)|^2. \quad (8)$$

В частности, если  $\gamma(|z|) \equiv 1$ , то из (8) вытекает известное равенство (см., например, [1, с.208-209])

$$\|f\|_{2,1}^2 = \|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Равенство (7) означает, что ряд Фурье функции, аналитической в единичном круге  $U$ , одновременно является рядом Маклорена этой функции и, согласно второй теореме Вейерштрасса [4], может быть сколько угодно раз продифференцирована, причем все продифференцированные ряды равномерно сходятся к соответствующей производной, и для любого  $r \in \mathbb{N}$  имеет место равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где, ради краткости, положено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через  $\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  множество функций  $f \in B_{2,\gamma}$ , у которых  $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$ , т.е.  $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma} < \infty$ . Легко заметить, что при любом  $k \geq n > r$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(r)}(z) - S_{n-1}^{(r)}(f, z) = f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

в силу чего имеем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \inf \left\{ \|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho, \end{aligned} \quad (9)$$

а также имеет место равенство

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho. \quad (10)$$

Всюду далее через

$$\mu_s(\gamma) = \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^s d\rho, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

обозначим момент порядка  $s$  весовой функции  $\gamma(\rho)$  на отрезке  $[0, 1]$ . В силу обозначения (11) равенства (9) и (10) запишем в виде

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} := \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}, \quad (12)$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}. \quad (13)$$

Из равенств (12) и (13) при  $\gamma(\rho) \equiv 1$  вытекают соответствующие равенства из работы [5]:

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,1} := E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1},$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,1}^2 := \|f^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}.$$

При изложении дальнейших результатов мы предполагаем, что имеет место следующая

**Гипотеза.** Пусть  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \geq n > r$ ,  $\gamma(\rho)$  – непрерывная весовая функция. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma)}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma)} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma)}. \quad (14)$$

Доказать равенство (14) в такой общности для всех непрерывных весов нам не удалось. Остановимся на случае веса Якоби

$$\gamma(\rho) := \gamma_{\alpha,\beta}(\rho) = \rho^\alpha (1-\rho)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Очевидно, что  $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho)$  непрерывна при  $\alpha, \beta \geq 0$ . В этом случае, легко доказать, что равенство (14) имеет место. Более того равенство (14) выполняется даже при любых  $\alpha \geq 0, \beta > -1$ . Имеет место следующая



ЛЕММА 2. Пусть  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \geq n > r$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$ . Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нахождение точной области параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  для которых верно (15), это техническая сложная задача. Покажем, что (15) имеет место для  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$ ,  $r \geq 1$ . Положим

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}.$$

Легко вычислить, что при всех  $k \geq n > r \geq 1$ ,

$$\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)}, \quad \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)},$$

где  $\Gamma(a)$  – гамма-функция Эйлера. Пользуясь формулой [6, с.754]

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1)\Gamma(a)$$

функция  $\psi(k, r)$  представим в виде

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}.$$

Проверим, что

$$\frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \beta > -1, k \geq r+1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} &= \left( \frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2k+4+\alpha)}{\Gamma(2k+2+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2k+5+\alpha+\beta)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}{\Gamma(2(k-r)+4+\alpha)} = \\ &= \left( \frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{(2k+2+\alpha)(2k+3+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha+\beta)(2(k-r)+4+\alpha+\beta)}{(2k+3+\alpha+\beta)(2k+4+\alpha+\beta)(2(k-r)+2+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha)} = \\ &= \left( 1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left( 1 + \frac{2r}{2k+2+\alpha-2r} \right) \left( 1 + \frac{2r}{2k+3+\alpha-2r} \right) \cdot \\ &\quad \left( 1 - \frac{2r}{2k+3+\alpha+\beta} \right) \left( 1 - \frac{2r}{2k+4+\alpha+\beta} \right) \leq \\ &\leq \left( 1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left( 1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right)^2 \left( 1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)^2 = f^2(k, r). \end{aligned}$$

Проверим условие  $f(k, r) - 1 < 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} g(k, r) := f(k, r) - 1 &= \left( 1 - \frac{r}{k+1} \right) \left( 1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) \left( 1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right) - 1 = \\ &= -r \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{1}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) - \end{aligned}$$

$$-r^2 \left( \frac{1}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} + \frac{1}{\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} - \frac{1}{(k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{r^3}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Далее

$$(k+1)\left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \frac{g(k,r)}{r} =$$

$$= - \left( \left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + (k+1)\left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) - (k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right) -$$

$$-r \left( k+1+k+2+\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) \right) + r^2 =$$

$$= - \left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) \left(2k+3+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + (k+1) \left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - r \left(k+2+\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= -(k+1)^2 + (r-\alpha)k + r \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} \leq$$

$$\leq -(r+2)^2 + (r-\alpha)(r+1) + r \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} =$$

$$= - \left(2+\frac{\alpha}{2}\right)r - \frac{\alpha(7+\alpha+\beta)}{4} - 4 < 0.$$

Условие  $f(k,r) < 1$  выполнено и  $\psi(k,r) < \psi(n,r)$  при  $k \geq n \geq r+1$ . Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Одной интегрируемости веса Якоби на отрезке  $[0,1]$ , то есть выполнения условий  $\alpha, \beta > -1$  для справедливости гипотезы недостаточно.

Покажем, что для любого  $r \geq 1$ ,  $k = n = r+1$  существует  $\alpha \in (-1,0)$ ,  $\beta > 0$  такие, что

$$\psi(r+2,r) = \psi(n+1,r) > \psi(n,r) = \psi(r+1,r)$$

или что то же

$$\frac{\psi(r+2,r)}{\psi(r+1,r)} = \left(\frac{2}{r+2}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2r+6+\alpha)}{\Gamma(2r+4+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(4+\alpha)}{\Gamma(6+\alpha)} =$$

$$= \frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} > 1.$$

Так как

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} = 1,$$

то достаточно показать, что для любого  $r \geq 1$  существует  $\alpha \in (-1,0)$  такое, что

$$\frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} > 1. \quad (16)$$

Положим  $\alpha = -1/2$ . Тогда (16) эквивалентно очевидному неравенству

$$4r^2 + 16r + \frac{63}{4} > \frac{63}{16}(r^2 + 4r + 4) \Rightarrow 4(r^2 + 4r) > \frac{63}{16}(r^2 + 4r) \Rightarrow 4 > \frac{63}{16},$$

и таким образом в этом случае равенство (15) не имеет места.

Пользуясь леммой 2 сформулируем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. При всех  $k \geq n > r \geq 1$  и  $\alpha \geq 0, \beta > -1$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ , то для величины наилучшего приближения

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=n}^{\infty} \mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) |c_k(f)|^2 \quad (18)$$

этой функции, пользуясь утверждением леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right\} \leq \\ &\leq \max_{k \geq n > r} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \cdot E_{n-r+1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как неравенство (19) верно для любой функции  $f \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ , то из (19) получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (17)

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (20)$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию  $f_0(z) = z^n \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r$ . Для этой функции из равенств (12) и (18) сразу следует, что

$$E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}), \quad (21)$$

$$E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \alpha_{n,r}^2 \cdot \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}). \quad (22)$$

Учитывая равенства (21) и (22), получаем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \frac{E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}}{E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (23)$$

Сопоставляя оценку сверху (20) с оценкой снизу (23), получаем требуемое равенство (17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. ([5, с.621]) В условиях теоремы 1, при  $\alpha = \beta = 0$  для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n \geq r$  справедливо равенство

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}. \quad (24)$$

В самом деле, равенство (24) вытекает из (21) и (22) при  $\alpha = \beta = 0$ , т.е., когда  $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho) \equiv 1$ , поскольку

$$\mu_{2n+1}(1) = \frac{1}{n+1}, \quad \mu_{2(n-r)+1}(1) = \frac{1}{n-r+1},$$

а потому

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(1)}{\mu_{2(n-r)+1}(1)}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}.$$

Пусть  $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  ( $\alpha \geq 0, \beta > -1$ ) – множество функций  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ , у которых  $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$ . Требуется найти величину

$$E_{n-1} \left( \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\}.$$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$ . Тогда

$$E_{n-1} \left( \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (25)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$ , то для произвольной функции  $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  из равенства (17) следует, что

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}} \cdot E_{n-r-1} \left( f^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}},$$

откуда переходя к верхней грани по всем функциям  $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  запишем

$$E_{n-1} \left( \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (26)$$

С другой стороны, для функции

$$f_1(z) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{z^n}{\sqrt{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}},$$

$$E_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}, \quad (27)$$

и в силу (12) имеем

$$E_{n-r-1} \left( f_1^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = 1.$$

Последнее равенство означает, что  $f_1 \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ , а потому, учитывая (27), запишем оценку снизу

$$E_{n-1} \left( \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \geq E_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (28)$$

Требуемое равенство (25) получаем из сопоставления оценки сверху (26) с оценкой снизу (28). Теорема 2 доказана.

При решении экстремальных задач теории приближения часто требуется найти точные верхние грани модулей коэффициентов Фурье на различных классах  $2\pi$ -периодических функций (см., например, [7, 8, 9]). Аналогичные задачи рассматриваются также для коэффициентов Тейлора аналитических функций [10, 11]. Несомненно представляет интерес получить решение сформулированной задачи для класса  $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n \geq r$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$ . Тогда справедливо равенство

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая ортонормальность системы функций  $\varphi_k^*(z) = (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot z^k$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) в единичном круге  $U$ , для произвольной функции  $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  запишем

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) f(z) \bar{z}^n d\sigma \right| = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma(|z|) [f(z) - S_{n-1}(f, z)] \cdot \bar{z}^n d\sigma \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) |f(z) - S_{n-1}(f, z)| \cdot |\bar{z}^n| d\sigma, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $S_{n-1}(f, z)$  – частная сумма  $n$ -го порядка ряда Маклорена функции  $f \in \mathcal{A}(U)$ . Применяя неравенства Коши-Буняковского к интегралу в правой части (30), будем иметь

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \cdot \|\bar{z}^n\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \quad (31)$$

Учитывая соотношения (26), из (31) получаем

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma}^{(r)} \right\} \leq E_{n-1} \left( \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (32)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (32), рассмотрим снова функцию  $f_1(z) \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ , введенную нами в конце теоремы 2 и для которой

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} \geq |c_n(f_1)| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (33)$$

Требуемое равенство (29) вытекает из сравнения неравенств (32) и (33), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

### 3. Точные оценки приближения посредством $\mathcal{K}$ -функционала

В этом пункте докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения  $E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$  функции  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$  посредством  $\mathcal{K}$ -функционала Петре. Определение и основные свойства  $\mathcal{K}$ -функционала Петре приведены в монографиях [12, 13]. В статье [14] доказаны прямые и обратные теоремы приближения функций посредством  $\mathcal{K}$ -функционала Петре. В нашем случае мы определим  $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$  и  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$  следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f; t^m)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &:= \mathcal{K} \left( f; t^m; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + t^m \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right\}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Представляет несомненный интерес получить точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения (18) и  $\mathcal{K}$ -функционала (34).

ТЕОРЕМА 4. Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  – произвольные числа, такие что  $n \geq r + m$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > -1$ . Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left( \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left( f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[ \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} = 1. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (19), для произвольной функции  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left( \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left( \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $S_{n-r-1}(g)$  частная сумма  $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции  $g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$ . В силу равенства (9) и неравенства (20) запишем

$$\|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = E_{n-r-1}(g)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left( \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \quad (37)$$

Теперь из неравенств (36) и (37) следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left( \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + \|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left( \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left( \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Так как левая часть неравенства (38) не зависит от функции  $g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$ , то, переходя к нижней грани по всем таким функциям в обеих частях (38), с учетом определения  $\mathcal{K}$ -функционала (34), получим

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left( \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{K}_m \left( f^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[ \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины стоящей в левой части равенства (37):

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \left( \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left( f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[ \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \leq 1. \quad (39)$$

С целью получения оценки снизу той же величины, воспользуемся тем, что для произвольной  $p_n \in \mathcal{P}_n$  имеет место неравенство (см., напр. [15, 16])

$$\mathcal{K}_m(p_n, t^m)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \min \left\{ \|p_n\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}, t^m \|p_n^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \right\}. \quad (40)$$

Рассмотрим функцию  $f_0(z) = z^n$ . Так как для этой функции

$$f_0^{(r+m)}(z) = n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r) \cdots (n-r-m+1) z^{n-r-m} = \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} z^{n-(r+m)},$$

то в силу неравенства (40) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m \left( f_0^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[ \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[ \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \|f_0^{(r+m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[ \frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} [\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} = \alpha_{n,r} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим также, что

$$E_{n-1}(f_0)_2 = [\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Пользуясь соотношениями (41) и (42), имеем:

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left( f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \\ &\geq \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_m \left( f_0^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \\ &\geq \frac{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Требуемое равенство (35) получаем из сравнения оценки сверху (39) с оценкой снизу (43). Теорема 4 доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** ([17, с. 76]) Если в условиях теоремы 4 полагать  $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho) \equiv 1$ , то для любых  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n \geq r + m$  справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left( f^{(r)}, \mathcal{D} \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1.$$

## 4. Заключение

В работе рассматривается задача наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения функций комплексного переменного регулярных в односвязной области  $\mathcal{D}$  суммами Фурье по ортогональной системе функций  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  в весовом пространстве Бергмана  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}(\mathcal{D})$ , где  $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1 - |z|)^\beta$ ,  $\alpha \geq 0, \beta > -1$ ,  $z \in \mathcal{D}$ . В случае ортонормальной системы  $\varphi_k^*(z) := \left\{ (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty}$  и  $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} := U = \{z : |z| \leq 1\}$  решен ряд экстремальных задач среднеквадратического полиномиального приближения функций  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ . Найдено точное неравенство между наилучшим среднеквадратическим полиномиальным приближением функций  $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  и соответствующим  $\mathcal{K}$ -функционалом Петре.

Авторы благодарят профессора В.И. Иванова, который способствовал улучшению этой статьи.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л.: Наука, 1964. 440 с.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве  $L_2(D, p(z))$  // ЖВММФ. 2010. Т.50, № 6. С. 999 – 1004.
3. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавказ. матем. журн. 2018. Т.20, № 1. С. 86 – 97.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
5. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве  $L_2$  и значения  $n$ -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т.103, вып.4. С. 617 – 631.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. М.: Наука, 1970. 800 с.
7. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в  $L_2$  // Матем. заметки. 2006. Т.80, вып.1. С. 11 – 19.
8. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в  $L_2$  // Analysis Mathematica. 2012. Vol.38, no.2. P. 147 – 159.
9. Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from  $L_2$  and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.206, no.1. P. 97-114.
10. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Математический сборник. 2010. Т.201, № 8. С. 3 – 22.
11. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве  $H_{q,\rho}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < \rho \leq 1$  // Сибирский математический журнал. 2016. Т.57, № 2(336). С. 469 – 480.
12. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М. Мир, 1980
13. Mhaskar N.H. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 1986. Vol.46, no. 1. P. 100 – 110.
14. Ditzian Z., Totik V.  $\mathcal{H}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted  $L^p(\mathbb{R})$  // J. Approx. Theory. 1986. Vol.46, no. 1. P. 38 – 41.
15. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т.95, вып.5. С. 666 – 684.
16. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т.25, № 2. С. 351 – 364.



17. Saidusaynov M.S.  $\mathcal{H}$ -functionals and exact values of  $n$ -widths in the Bergman space // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol.3, №2(5). P. 74 – 81.

## REFERENCES

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A., 1964, “Functions of a Complex Variable: Constructive Theory”, *Moscow: Nauka*, 440 p.
2. Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K., 2010, “Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in  $L_2(D, p(z))$ ”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 50, no. 6, pp. 946 – 950.
3. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2018, “Mean-square approximation of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space”, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 1. pp. 86 – 97.
4. Bitsadze A. V., 1984, “Osnovy Teorii Analiticheskikh Funktsij Kompleksnogo Peremennogo”, *Moscow: Nauka*, 320 p.
5. Fikhtengol'ts G. M. “Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, t.2”, *Moscow: Nauka*, 800 p.
6. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2019, “Upper Bounds for the Approximation of Certain Classes of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Space  $L_2$  and  $n$ -Widths”, *Mathematical Notes*, vol. 103, no. 4, pp. 656–668.
7. Vakarchuk S. B., 2006, “Jackson-type inequalities and widths of function classes in  $L_2$ ”, *Mathematical Notes*, vol. 80, no. 1, pp. 11–18.
8. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., 2012, “On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of function classes in  $L_2$ ”, *Analysis Mathematica*, vol. 38, no. 2, pp. 147–159.
9. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I. 2015, “Structural characteristics of functions from  $L_2$  and the exact values of widths of some functional classes”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 206, no. 1., pp. 97 – 114.
10. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh., 2010 “The widths of classes of analytic functions in a disc”, vol. 201, no. 8, 1091–1110.
11. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A. 2016, “Best approximation methods and widths for some classes of functions in  $H_{q,\rho}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 57, no. 2, pp. 369–376.
12. Bergh J., Lofstrom J., 1976, “Interpolation Spaces”, *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York*, 220 p.
13. Mhaskar N. H., 1986, “Weighted polynomial Approximation”, *J. Approx. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 100 – 110.
14. Ditzian Z., Totik V., 1986, “ $\mathcal{H}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted  $L^p(\mathbb{R})$ ”, *J. Approx. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 38 – 41.

15. Vakarchuk S. B., 2014, “Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev-Hermite weight and widths of function classes”, *Mathematical Notes*, vol. 95, no. 5, pp. 599–614.
16. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2019, “Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no 2, pp. 351 – 364.
17. Saidusaynov M.S., 2017, “ $\mathcal{H}$ -functionals and exact values of  $n$ -widths in the Bergman space”, *Ural Mathematical Journal*, vol. 3, no. 2(5), pp. 74 – 81.

Получено 16.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-183-196

**Численная оптимизация процесса получения шихты  
электродиспергированием отходов сплава Т5К10<sup>1</sup>**

Е. В. Агеев, Е. В. Агеева, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин

**Агеев Евгений Викторович** — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: ageev\_ev@mail.ru*

**Агеева Екатерина Владимировна** — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: ageeva-ev@yandex.ru*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Калинин Антон Алексеевич** — Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: antony\_ak@mail.ru*

**Аннотация**

Одной из основных проблем использования вольфрамсодержащих твердых сплавов в настоящее время является высокая стоимость вольфрама. Ввиду высокой температуры плавления существует проблема их переработки для вторичного использования. Одним из перспективных методов их переработки в порошки сферической формы является электроэрозионное диспергирование (ЭЭД). К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения об использовании диспергированных электроэрозией частиц сплава Т5К10 в качестве шихты для производства вольфрам-титано-кобальтовых сплавов и режущего инструмента из них. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств изделий из полученной шихты требовалось провести оптимизацию режимов электроэрозионного диспергирования отходов сплава Т5К10 методом планирования эксперимента. Для шихты одним из основных технологических параметров является оптимальная дисперсность, поэтому оптимизацию процесса получения шихты для производства спеченных твердых сплавов проводили по среднему размеру частиц. Электроэрозионное диспергирование отходов сплава Т5К10 осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859). В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались твердосплавные частицы различной формы и размера. Оптимизация процесса электродиспергирования частиц, полученных ЭЭД отходов твердого сплава марки Т5К10, проводилась опытным определением сочетания уровней факторов, при котором достигалось необходимое значение среднего диаметра частиц электроэрозионной шихты. Для этого использовали метод крутого восхождения Бокса и Уилсона. Оптимизации процесса электродиспергирования сплава Т5К10 в дистиллированной воде и осветительном керосине осуществлялась с учетом таких факторов, как напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов.

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00123, <https://rscf.ru/project/22-29-00123/>.

Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации по среднему размеру электроэрозионных частиц, которые составили: для дистиллированной воды – 57,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц; для осветительного керосина – 64,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и повторное их использование при изготовлении режущего инструмента.

*Ключевые слова:* отходы твердого сплава Т5К10, электроэрозионное диспергирование, средний размер частиц, оптимизация процесса.

*Библиография:* 20 названий.

#### Для цитирования:

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин. Численная оптимизация процесса получения шихты электродиспергированием отходов сплава Т5К10 // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 183–196.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-183-196

### Numerical optimization of the charge production process by electrodispersion of T5K10 alloy waste

E. V. Ageev, E. V. Ageeva, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin

**Ageev Yevgeniy Viktorovich** — doctor of technical sciences, professor of the department of automobiles and automobile economy, Southwestern State University (Kursk).

*e-mail:* ageev\_ev@mail.ru

**Ageeva Ekaterina Vladimirovna** — candidate of technical sciences, associate professor, Southwestern State University (Kursk).

*e-mail:* ageeva-ev@yandex.ru

**Gvozdev Aleksander Evgenyevich** — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Kalinin Anton Alekseevich** — Tula State University (Tula).

*e-mail:* antony\_ak@mail.ru

#### Abstract

One of the main problems of using tungsten-containing hard alloys at present is the high cost of tungsten. Due to the high melting point, there is a problem of their recycling for secondary use. One of the promising methods of their processing into spherical powders is electroerosive dispersion (EED). To date, there is no complete information in the modern scientific and technical literature on the use of T5K10 alloy particles dispersed by electroerosion as a charge for the production of tungsten-titanium-cobalt alloys and cutting tools from them. For these purposes, comprehensive theoretical and experimental studies are required.

In order to predict the high physical and mechanical properties of products from the resulting charge, it was necessary to optimize the modes of electroerosive dispersion of T5K10 alloy waste by the experimental planning method. For the charge, one of the main technological

parameters is the optimal dispersion, therefore, the optimization of the process of obtaining the charge for the production of sintered hard alloys was carried out according to the average particle size. Electroerosive dispersion of T5K10 alloy waste was carried out on an experimental installation (RF Patent No. 2449859). As a result of exposure to short-term electrical discharges, carbide particles of various shapes and sizes were formed. Optimization of the process of electrodispersion of particles obtained by the EED of solid alloy waste of the T5K10 brand was carried out by experimental determination of a combination of levels of factors at which the required value of the average diameter of the particles of the electroerosion charge was achieved. To do this, the method of steep ascent of Box and Wilson was used. Optimization of the process of electrodispersing the T5K10 alloy in distilled water and lighting kerosene was carried out taking into account factors such as the voltage at the electrodes, the capacity of the discharge capacitors and the pulse repetition rate.

According to the conducted series of experiments, the limiting values of the optimization parameter for the average size of electroerosive particles were determined, which were: for distilled water – 57.1 microns with a capacity of discharge capacitors of 65.5 UF, a voltage at the electrodes of 200 V, a pulse repetition frequency of 200 Hz; for lighting kerosene - 64.1 microns with a capacity of discharge capacitors of 65.5 UF, a voltage at the electrodes of 200 V, a pulse repetition frequency of 200 Hz.

Carrying out the planned measures will solve the problem of recycling waste of tungsten-titanium-cobalt alloys and their reuse in the manufacture of cutting tools.

*Keywords:* solid alloy waste T5K10, electroerosive dispersion, average particle size, process optimization.

*Bibliography:* 20 titles.

#### For citation:

E. V. Ageev, E. V. Ageeva, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin, 2022, “Numerical optimization of the charge production process by electrodispersion of T5K10 alloy waste”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 183–196.

## 1. Введение

Спеченные вольфрамсодержащие твердые сплавы обладают рядом весьма ценных свойств, благодаря которым их эффективно используют во многих областях техники. В производстве металлокерамических твердых сплавов используются дорогостоящие карбиды вольфрама WC, титана TiC и тантала TaC, в качестве связующего материала – порошок металлического кобальта Co [1-6].

Одной из основных проблем использования вольфрамсодержащих твердых сплавов в настоящее время является высокая стоимость вольфрама. Ввиду высокой температуры плавления существует проблема их переработки для вторичного использования. Одним из перспективных методов их переработки в порошки сферической формы является электроэрозионное диспергирование (ЭЭД).

Прочностные характеристики твердых сплавов во многом зависят от способа их получения. В настоящее время для производства вольфрамсодержащих твердых сплавов, т.е. консолидации порошков используют спекание (или горячее прессование), недостатком которой является наличие пор. Для получения спеченных изделий с высокими механическими свойствами при повышенных температурах необходимо создание беспористой микроструктуры [7-9].

Современной альтернативой традиционному спеканию является SPS-синтез, при котором используется импульсы постоянного электрического тока, проходящего через графитовую матрицу, в которой находится образец. Процесс состоит из совместного воздействия температуры, осевого давления и электрического тока в присутствии электромагнитного поля (плазмы). Высокие локальные температуры между частицами испаряют загрязняющие вещества и оксиды на поверхности частиц до образования перемычки. Именно этот эффект

с одновременным приложением осевого давления позволяет значительно снизить температуру спекания и продолжительность процесса, что в свою очередь способствует значительному уменьшению скорости роста зерна, в отличие от спекания без нагрузки или горячего прессования. SPS-синтез позволит получать конкурентноспособный высокотехнологичный продукт с повышенными физико-механическими свойствами [10-13].

Решение вопросов, связанных с улучшением качества твердых сплавов, в полной мере касается так же качества порошковых материалов, используемых для их изготовления.

В связи с этим крайне актуальной задачей является комплексное изучение влияния исходного сырья на структуру и свойства сплавов, в частности, порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов сплава Т5К10 в процессе SPS-синтеза.

Выбор порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов сплава Т5К10 может быть обоснован его стоимостью и свойствами. Ресурс твердых сплавов из электроэрозионных порошков Т5К10 будет определяться не только свойствами исходного сырья, но и технологией их производства (SPS-синтез).

Наиболее интенсивные исследования в области материаловедения для перспективных твердых сплавов проводятся в странах с высоким научно-технологическим уровнем: США, Швеции, Германии, Японии и др. странах.

Разработанные в ходе выполнения данного проекта порошковые материалы для твердых сплавов, а также созданная технология для их производства (SPS-синтез) обеспечат экономические показатели на уровне мировых производителей и не допустят отставания России от ведущих стран мира.

К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения об использовании диспергированных электроэрозией частиц сплава Т5К10 в качестве шихты для производства вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и режущего инструмента из них. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований. Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и повторное их использование при изготовлении режущего инструмента.

Работы в области исследования новых вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов ведутся в научных и высших образовательных учреждениях, таких как: НИТУ МИСиС, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, МПУ, ЮЗГУ, Институт материаловедения Хабаровского НЦ ДВО РАН и др. Однако в трудах ученых этих организаций не рассматриваются вопросы, касающиеся использования диспергированных электроэрозией частиц сплава Т5К10 в качестве шихты для производства вольфрамо-титано-кобальтовых сплавов и режущего инструмента из них.

Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов тяжелых вольфрамовых сплавов, экономии дорогостоящего вольфрама и повторное его использование.

Требования к шихте для получения изделий заключается в технологичности, поэтому задача сводится к получению частиц необходимой дисперсности – от 50 мкм до 70 мкм. Однако, по результатам проведенных предварительных исследований необходимые значения среднего размера частиц получены не были.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств изделий из полученной шихты требуется провести оптимизацию режимов получения электроэрозионных материалов отходов сплава Т5К10 методом планирования эксперимента.

## 2. Основной текст статьи

Электроэрозионное диспергирование отходов сплава Т5К10 осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859) [14-20]. В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались твердосплавные частицы различной формы и размера.

Для шихты одним из основных технологических параметров является оптимальная дисперсность, поэтому оптимизацию процесса получения шихты для производства спеченных твердых сплавов (электродиспергирования отходов твердого сплава марки Т5К10) проводили по среднему размеру частиц.

Регулируя параметры работы установки электроэрозионного диспергирования (ЭЭД), в частности напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частоту следования импульсов, можно регулировать массовую производительность процесса. Масса электроэрозионных материалов находится в прямой зависимости от средней массы всех частиц, которая, в свою очередь, находится в зависимости со средним размером частиц и их количеством.

Определение оптимальных параметров работы установки ЭЭД проводили постановкой полного факторного эксперимента (ПФЭ) по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов.

Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.

Исследование формы и морфологии поверхности частиц, полученных ЭЭД отходов твердого сплава марки Т5К10, проводили на электронно-ионном сканирующем (растровом) микроскопе с полевой эмиссией электронов «QUANTA 600 FEG» (Нидерланды). Методика исследования формы и морфологии частиц представлена в виде блок-схемы на рисунке 1.

Средний размер частиц электроэрозионной шихты исследовали на лазерном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoTec» (Германия). Блок-схема методики исследования гранулометрического состава представлена на рисунке 2.

## 3. Результаты и их обсуждение

Анализ параметров формы частиц электроэрозионной шихты со средним размером 25 ... 100 мкм по изображениям с растрового микроскопа говорит о том, что электроэрозионные частицы имеют сферическую и эллиптическую форму, а также агломераты (рисунок 3). Микрофотография частиц электроэрозионной шихты, полученной:

Оптимизация процесса электродиспергирования частиц, полученных ЭЭД отходов твердого сплава марки Т5К10, проводилась опытным определением сочетания уровней факторов, при котором достигалось необходимое значение среднего диаметра частиц электроэрозионной шихты. Для этого использовали метод крутого восхождения Бокса и Уилсона.

При оптимизации процесса электродиспергирования сплава Т5К10 в дистиллированной воде и осветительном керосине с учетом факторов напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов были выбраны уровни и интервалы варьирования (таблица 1) и составлены матрицы планирования для экспериментов, проведенных в дистиллированной воде (таблица 2) и осветительном керосине (таблица 3).

Согласно проведенным расчетам, были получены уравнения регрессии, моделирующие полный факторный эксперимент в воде дистиллированной (1) и керосине осветительном (2).

$$\hat{y} = 31,37 + 12,27X_1 + 3,84X_2 + 8,1X_3 - 0,13X_1X_2 + 0,05X_1X_3 - 0,15X_2X_3 + 1,5X_1X_2X_3 \quad (1)$$

$$\hat{y} = 33,6 + 15,5X_1 + 3,7X_2 + 9,7X_3 + 0,69X_1X_2 + 1,31X_1X_3 - 0,59X_2X_3 + 0,26X_1X_2X_3 \quad (2)$$

Таблица 1: Уровни и интервалы варьирования

| Уровень варьируемых факторов | Обозначение кодовое | U, В           | $\nu$ , Гц     | C, мкФ         |
|------------------------------|---------------------|----------------|----------------|----------------|
|                              |                     | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> |
| Основной уровень             | 0                   | 150            | 150            | 45,5           |
| Интервал варьирования        | $\Delta x_i$        | 50             | 50             | 20             |
| Верхний уровень              | +1                  | 200            | 200            | 65,5           |
| Нижний уровень               | -1                  | 100            | 100            | 25,5           |

Таблица 2: Матрица планирования эксперимента (вода дистиллированная)

| №<br>п/п | X <sub>0</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>2</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>3</sub> | X <sub>2</sub><br>X <sub>3</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>2</sub><br>X <sub>3</sub> | Y <sub>1</sub> | Y <sub>2</sub> | Y <sub>3</sub> | $\bar{Y}_i$ | S <sup>2</sup> <sub>воспр</sub> |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|-------------|---------------------------------|
| 1        | ++             | -              | -              | -              | +                                | +                                | +                                | -                                                  | 5,3            | 5,4            | 5,5            | 5,4         | 0,02                            |
| 2        | +++            | +              | -              | -              | -                                | -                                | +                                | +                                                  | 33,2           | 33,4           | 32,9           | 33,1        | 0,14                            |
| 3        | +              | -              | +              | -              | -                                | +                                | -                                | +                                                  | 16,5           | 16,6           | 17,0           | 16,7        | 0,14                            |
| 4        | +              | +              | +              | -              | +                                | -                                | -                                | -                                                  | 37,8           | 37,9           | 38,0           | 37,9        | 0,02                            |
| 5        | +              | -              | -              | +              | +                                | -                                | -                                | +                                                  | 24,9           | 24,9           | 25,0           | 24,8        | 0,06                            |
| 6        | +              | +              | -              | +              | -                                | +                                | -                                | -                                                  | 46,9           | 46,9           | 46,3           | 46,7        | 0,24                            |
| 7        | +              | -              | +              | +              | -                                | -                                | +                                | -                                                  | 29,2           | 29,3           | 30,1           | 29,5        | 0,49                            |
| 8        | +              | +              | +              | +              | +                                | +                                | +                                | +                                                  | 56,4           | 57,4           | 56,9           | 56,9        | 0,50                            |

Таблица 3: Матрица планирования эксперимента (керосин осветительный)

| №<br>п/п | X <sub>0</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>2</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>3</sub> | X <sub>2</sub><br>X <sub>3</sub> | X <sub>1</sub><br>X <sub>2</sub><br>X <sub>3</sub> | Y <sub>1</sub> | Y <sub>2</sub> | Y <sub>3</sub> | $\bar{Y}_i$ | S <sup>2</sup> <sub>воспр</sub> |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|-------------|---------------------------------|
| 1        | ++             | -              | -              | -              | +                                | +                                | +                                | -                                                  | 5,6            | 5,7            | 5,9            | 5,8         | 0,06                            |
| 2        | ++<br>+        | +              | -              | -              | -                                | -                                | +                                | +                                                  | 33,8           | 33,1           | 33,4           | 33,4        | 0,25                            |
| 3        | +              | -              | +              | -              | -                                | +                                | -                                | +                                                  | 13,5           | 13,5           | 13,4           | 13,5        | 0,01                            |
| 4        | +              | +              | +              | -              | +                                | -                                | -                                | -                                                  | 42,7           | 42,8           | 43,0           | 42,8        | 0,05                            |
| 5        | +              | -              | -              | +              | +                                | -                                | -                                | +                                                  | 24,4           | 24,5           | 24,4           | 24,4        | 0,01                            |
| 6        | +              | +              | -              | +              | -                                | +                                | -                                | -                                                  | 56,1           | 56,3           | 56,1           | 56,2        | 0,03                            |
| 7        | +              | -              | +              | +              | -                                | -                                | +                                | -                                                  | 28,6           | 28,7           | 28,8           | 28,7        | 0,02                            |
| 8        | +              | +              | +              | +              | +                                | +                                | +                                | +                                                  | 64,4           | 64,5           | 64,1           | 64,3        | 0,09                            |

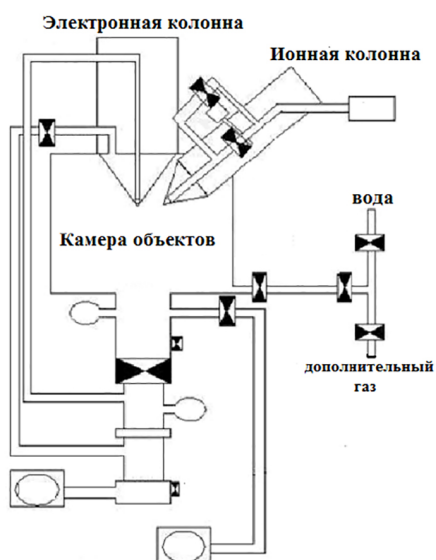
В результате проверки статистической значимости коэффициентов все коэффициенты уравнения (1), кроме  $b_{12}$  и  $b_{13}$ , оказались статистически значимыми. Все коэффициенты уравнения (2) оказались статистически значимыми.

После исключения статистически незначимых коэффициентов уравнения регрессии приняли вид:

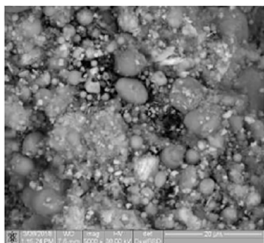




Электронно-ионный сканирующий  
микроскоп «Quanta 600 FEG»



Принципиальная схема процесса  
исследования шихты

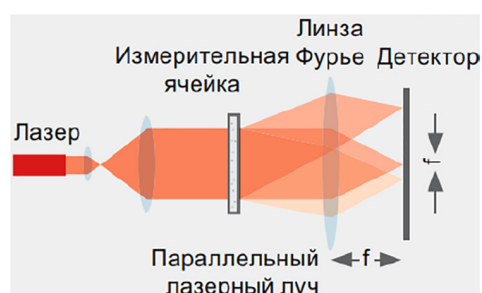


Снимки объемных изображений  
изучаемой структуры шихты

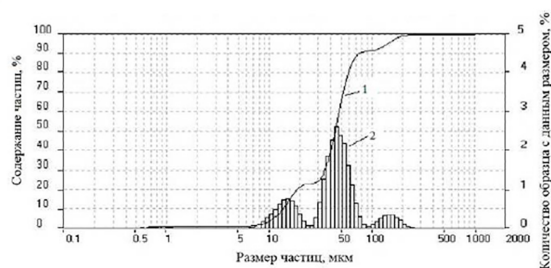
Рис. 1: Блок-схема методики исследования формы и морфологии частиц



Лазерный анализатор размеров частиц «Analysette 22 NanoTec»



Конструкция состоит из лазера, через измерительную ячейку направленного на детектор. Важным компонентом каждого лазерного прибора для измерения размера частиц является линза Фурье, которая фокусирует рассеянный свет лазера по траектории луча на детектор. Свет, рассеянный пропорционально размеру частиц, посредством линзы фокусируется на детектор.



По распределению рассеянного света при помощи комплексной математики рассчитывают распределение частиц по их размерам. В результате получают объемные доли, соответствующие эквивалентным диаметрам при лазерной дифракции.

Рис. 2: Блок-схема методики определения среднего размера частиц

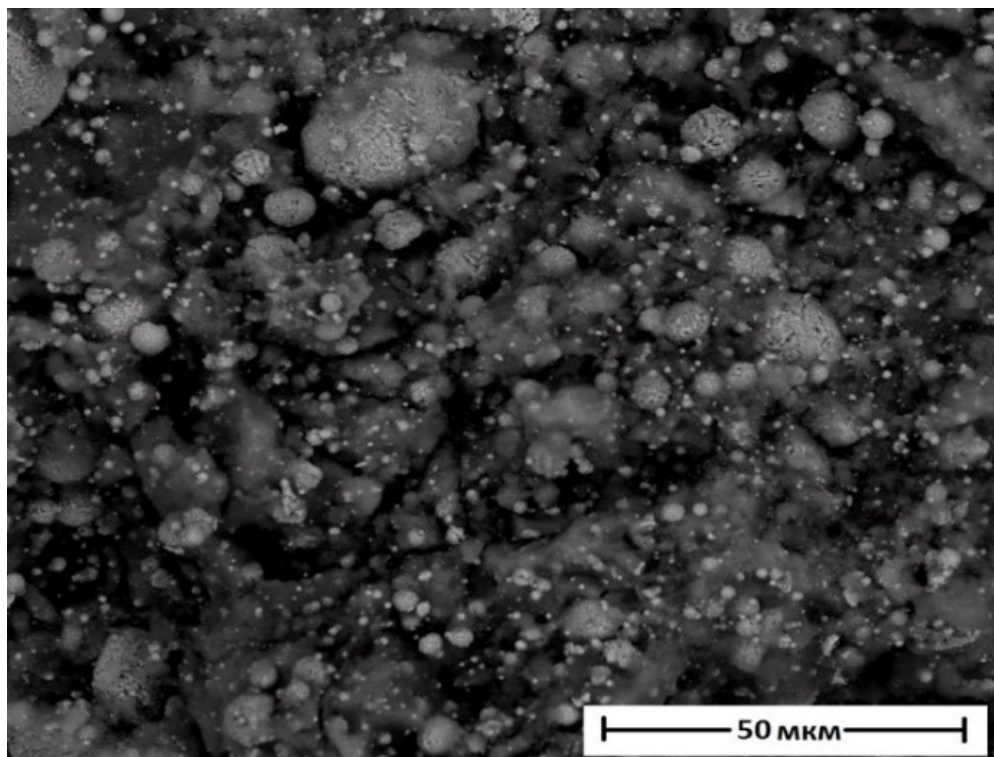


Рис. 3: в воде дистиллированной

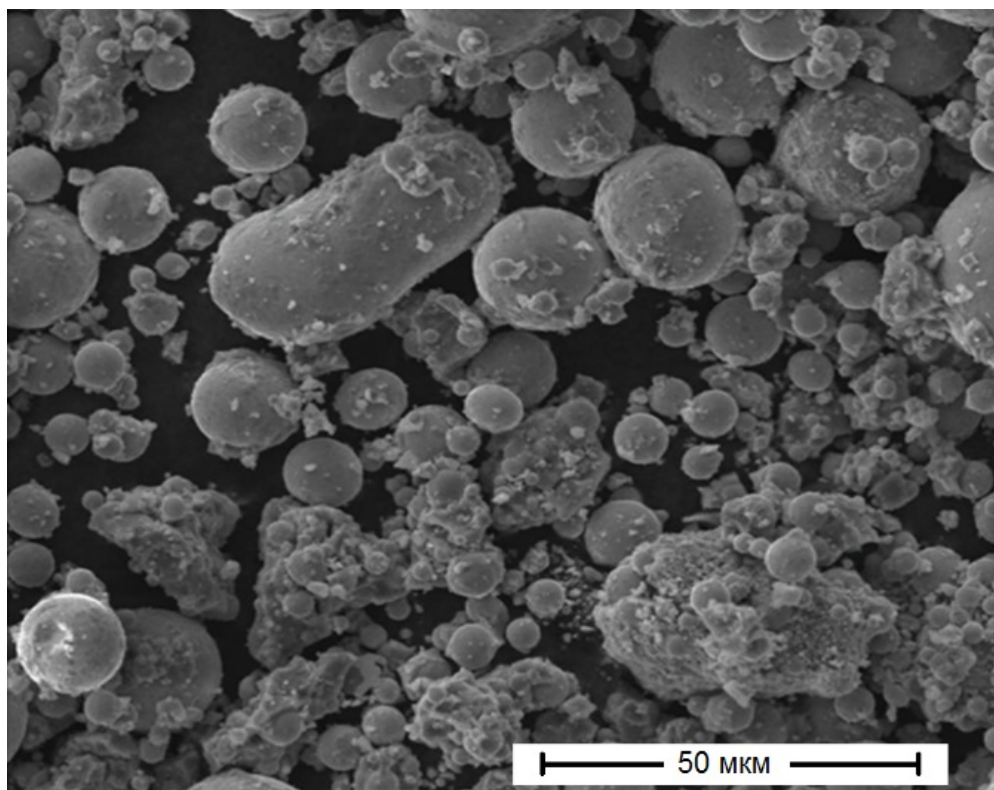


Рис. 4: в керосине осветительном (растровый микроскоп QUANTA 600 FEG)

$$\hat{y} = 31,37 + 12,27X_1 + 3,84X_2 + 8,1X_3 - 0,15 X_2X_3 + 1,5X_1X_2X_3 \quad (3)$$

$$\hat{y} = 33,6 + 15,5X_1 + 3,7X_2 + 9,7X_3 + 0,69X_1X_2 + 1,31X_1X_3 - 0,59 X_2X_3 + 0,26X_1X_2X_3 \quad (4)$$

Проверку уравнений на адекватность проводили с использованием критерия Фишера. В результате расчета установлено, что уравнения регрессии адекватны.

Полученные уравнения были использованы для расчета крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение начинали из нулевой точки (основные уровни):  $X_1=150$  В,  $X_2=150$  Гц,  $X_3=45,5$  мкФ.

Согласно проведенной серии опытов, результаты которых представлены в таблице 4, определены предельные значения параметра оптимизации  $\hat{y}$  (средний размер электроэрозионных частиц) для процесса электродиспергирования металлоотходов в дистиллированной воде, которые составили 57,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

Таблица 4: Расчет крутого восхождения (вода дистиллированная)

| Наименование                  | $X_1$<br>(U, В) | $X_2$<br>(f, Гц) | $X_3$<br>(C, мкФ) | Y,<br>мкм |
|-------------------------------|-----------------|------------------|-------------------|-----------|
| Основной уровень              | 150             | 150              | 45,5              | —         |
| Коэффициент $b_i$             | 12,27           | 3,84             | 8,1               | —         |
| Интервал варьирования $\xi_i$ | 50              | 50               | 20                | —         |
| $b_i \cdot \xi_i$             | 613,5           | 192              | 162               | —         |
| Шаг $\Delta_i$                | 30,6            | 9,6              | 8,1               | —         |
| Округленный шаг               | 31              | 10               | 8                 | —         |
| Опыт 1                        | 181             | 160              | 53,5              | 43,1      |
| Опыт 2                        | 200             | 170              | 61,5              | 52,1      |
| Опыт 3                        | 200             | 180              | 65,5              | 54,9      |
| Опыт 4                        | 200             | 190              | 65,5              | 56,0      |
| Опыт 5 (max)                  | 200             | 200              | 65,5              | 57,1      |

Согласно проведенной серии опытов, результаты которых представлены в таблице 5, определены предельные значения параметра оптимизации  $\hat{y}$  (средний размер электроэрозионных частиц) для процесса электродиспергирования металлоотходов в осветительном керосине, которые составили 64,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

#### 4. Заключение

1. Проведено определение оптимальных параметров работы установки ЭЭД методом постановкой полного факторного эксперимента по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, ёмкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов. Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.
2. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации по среднему размеру электроэрозионных частиц, которые составили: для дистиллированной воды – 57,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц; для осветительного керосина – 64,1 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

Таблица 5: Расчет крутого восхождения (керосин осветительный)

| Наименование                  | $X_1$<br>(U, В) | $X_2$<br>(f, Гц) | $X_3$<br>(C, мкФ) | Y,<br>мкм |
|-------------------------------|-----------------|------------------|-------------------|-----------|
| Основной уровень              | 150             | 150              | 45,5              | —         |
| Коэффициент $b_i$             | 15,5            | 3,7              | 9,7               | —         |
| Интервал варьирования $\xi_i$ | 50              | 50               | 20                | —         |
| $b_i \cdot \xi_i$             | 775             | 185              | 194               | —         |
| Шаг $\Delta_i$                | 38,75           | 9,25             | 9,7               | —         |
| Округленный шаг               | 39              | 9                | 10                | —         |
| Опыт 1                        | 189             | 159              | 55,5              | 51,7      |
| Опыт 2                        | 200             | 168              | 65,5              | 61,5      |
| Опыт 3                        | 200             | 177              | 65,5              | 62,3      |
| Опыт 4                        | 200             | 186              | 65,5              | 63,0      |
| Опыт 5                        | 200             | 195              | 65,5              | 63,7      |
| Опыт 6 (max)                  | 200             | 200              | 65,5              | 64,1      |

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеев Е.Н., Замулаева Е.И., Зайцев А.А., Коняшин И.Ю., Левашов Е.А. Структура и свойства крупнозернистых твердых сплавов WC-Co с особо однородной микроструктурой // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2019. № 4. С. 70-78.
2. Богодухов С.И., Козик Е.С., Свиденко Е.В. Исследование влияния температурных полей нагрева при непрерывной лазерной обработке на эксплуатационные свойства пластин твердого сплава T15K6 // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2018. № 2. С. 76-84.
3. Самотугин С.С., Кудинова Е.В., Христенко О.А., Беляковский В.П., Шибистая Я.Н. Выбор оптимальных режимов плазменной обработки инструмента из твердых сплавов // Технология машиностроения. 2018. № 7. С. 30-34.
4. Дворник М.И., Михайленко Е.А. Использование недостатка углерода для создания наноструктурного градиентного твердого сплава // Бюллетень научных сообщений. 2018. № 23. С. 22-27.
5. Богодухов С.И., Козик Е.С., Свиденко Е.В., Игнатюк В.Д. Термическая обработка непиретицируемых пластин из твердого сплава T15K6 непрерывным лазерным излучением // Упрочняющие технологии и покрытия. 2019. Т. 15. № 1 (169). С. 26-30.
6. Быстров В.А. Эффективность упрочнения твердым сплавом сменных деталей металлургических агрегатов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2018. Т. 61. № 12. С. 939-947.
7. Latypov R.A., Latypova G.R., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Elemental composition of the powder particles produced by electric discharge dispersion of the wastes of a VK8 hard alloy // Russian metallurgy (Metally). 2017. Т. 2017. № 12. С. 1083-1085.
8. Ageev E.V., Ugrimov A.S., Latypov R.A. Metallurgical features of the manufacture of hard-alloy powders by electroerosive dispersion of a T15K6 alloy in butanol // Russian metallurgy (Metally). 2016. Т. 2016. № 12. С. 1155-1157.

9. Ageev E.V., Ageeva E.V., Latypov R.A. Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. 2015. Т. 56. № 1. С. 52-62.
10. Кочергин С.А., Моргунов К.Т.Н.Ю.А., Саушкин Д.Т. Конечно-элементное моделирование процесса искрового плазменного спекания режущих пластин // СТИН. 2015. № 10. С. 28-32.
11. Смирнов А.В., Юшин Д.И., Кузнецов В.А. Моделирование искрового плазменного спекания: цели, задачи, проблемы и пути их решения // Молодой ученый. 2016. № 25 (129). С. 66-72.
12. Забелин Д.А., Чайникова А.С., Качаев А.А., Осин И.В., Гращенков Д.В. Синтез, структура и свойства керамики на основе оксинитрида алюминия (AlON), полученной методом искрового плазменного спекания // Труды ВИАМ. 2019. № 6 (78). С. 13-19.
13. Пристинский Ю.О., Перетягин Н.Ю., Кузнецова Е.В., Перетягин П.Ю. Сравнение механических свойств твердых сплавов вк6, полученных традиционным методом и искровым плазменным спеканием // Вестник машиностроения. 2019. № 9. С. 51-54.
14. Агеев Е. В., Латыпов Р. А., Агеева Е. В. Исследование свойств электроэрозионных порошков и твердого сплава, полученного из них изостатическим прессованием и спеканием // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2014. №6. С. 51–55.
15. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Морфология и элементный состав медных электроэрозионных порошков, пригодных к спеканию // Вестник машиностроения. 2014. №10. С. 66–68.
16. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Рентгеноспектральный микроанализ порошка, полученного из отходов быстрорежущей стали электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. 2014. №11. С. 71–72.
17. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование формы и морфологии электроэрозионных медных порошков, полученных из отходов // Вестник машиностроения. 2014. №8. С. 73–75.
18. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование распределения микрочастиц по размерам в порошках, полученных электроэрозионным диспергированием медных отходов // Вестник машиностроения. 2014. №9. С. 63–64.
19. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Воробьев Е. А. Гранулометрический и фазовый составы порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в керосине // Упрочняющие технологии и покрытия. 2014. №4 (112). С. 11–14.
20. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Анализ формы и морфологии частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. 2015. №7. С. 72–73.

## REFERENCES

1. Avdeenko E.N., Zamulaeva E.I., Zaitsev A.A., Konyashin I.Yu., Levashov E.A., 2019, "Structure and properties of coarse-grained WC-Co hard alloys with a particularly homogeneous microstructure", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy [Structure and properties of*

- coarse-grained WC-Co hard alloys with a particularly homogeneous microstructure]. Non-ferrous metallurgy*, No. 4, pp. 70-78.
2. Bogodukhov S.I., Kozik E.S., Svidenko E.V., 2018, "Investigation of the influence of temperature fields of heating during continuous laser processing on the operational properties of T15K6 hard alloy plates", *Izvestiya vysshchikh uchebnykh zavedenii. Powder metallurgy and functional coatings*, No. 2, pp. 76-84.
  3. Samotugin S.S., Kudinova E.V., Khristenko O.A., Belyakovskiy V.P., Shibistaya Ya.N., 2018, "The choice of optimal modes of plasma processing of tools made of hard alloys", *Technology of mechanical engineering*, No. 7, pp. 30-34.
  4. Dvornik M.I., Mikhailenko E.A., 2018, "The use of carbon deficiency to create a nanostructured gradient hard alloy", *Bulletin of scientific communications.*, No. 23, pp. 22-27.
  5. Bogodukhov S.I., Kozik E.S., Svidenko E.V., Ignatyuk V.D., 2019, "Heat treatment of non-sharpenable plates made of T15K6 hard alloy by continuous laser radiation", *Hardening technologies and coatings*, Vol. 15, No. 1 (169), pp. 26-30.
  6. Bystrov V.A., 2018, "Efficiency of hardening with a hard alloy of replaceable parts of metallurgical aggregates", *Izvestia of higher educational institutions. Ferrous metallurgy*, Vol. 61, No. 12, pp. 939-947.
  7. Latypov R.A., Latypova G.R., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V., 2017, "Elemental composition of the powder particles produced by electric discharge dispersion of the wastes of a VK8 hard alloy", *Russian metallurgy (Metally)*, Vol. 2017, No. 12, pp. 1083-1085.
  8. Ageev E.V., Ugrimov A.S., Latypov R.A., 2016, "Metallurgical features of the manufacture of hard-alloy powders by electroerosive dispersion of a T15K6 alloy in butanol", *Russian metallurgy (Metally)*, Vol. 2016, No. 12, pp. 1155-1157.
  9. Ageev E. V., Ageeva E. V., Latypov R. A., 2015, "Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering", *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, Vol. 56, No. 1, P. 52-62.
  10. Kochergin S. A., Morgunov Ph.D. Yu.A., Saushkin, D. T., 2015, "Finite element modeling of the process of spark plasma sintering inserts", *STIN*, No. 10, pp. 28-32.
  11. Smirnov A. V., Yushin D. I., Kuznetsov V. A., 2016, "Modeling of spark plasma sintering: goals, objectives, problems and solutions", *Young scientist*, No. 25 (129), pp. 66-72.
  12. Zabelin D.A., Chaynikova A.S., Kachaev A.A., Osin I.V., Grashchenkov D.V., 2019, "Synthesis, structure and properties of ceramics based on aluminum oxynitride (ALON) obtained by spark plasma sintering", *Proceedings of VIAM*, No. 6 (78), pp. 13-19.
  13. Pristinsky Yu.O., Peretyagin N.Yu., Kuznetsova E.V., Peretyagin P.Yu., 2019, "Comparison of mechanical properties of vk6 hard alloys obtained by the traditional method and spark plasma sintering", *Bulletin of Mechanical Engineering*, No. 9, pp. 51-54.
  14. Ageev E. V., Latypov R. A., Ageeva E. V., 2014, "Investigation of the properties of electroerosive powders and hard alloy obtained from them by isostatic pressing and sintering", *News of higher educational institutions. Non-ferrous metallurgy*, No.6, pp. 51-55.
  15. Ageeva E. V., Horyakova N. M., Ageev E. V., 2014, "Morphology and elemental composition of copper electroerosive powders suitable for sintering", *Bulletin of Mechanical Engineering*, No. 10, pp. 66-68.

16. Ageeva E. V., Ageev E. V., Vorobyev E. A., 2014, "X-ray spectral microanalysis of powder obtained from high-speed steel waste by electroerosive dispersion in kerosene", *Vestnik mashinostroeniya*, No.11, pp. 71-72.
17. Ageeva E. V., Horyakova N. M., Ageev E. V., 2014, "Investigation of the form and morphology of electroerosive copper powders obtained from waste", *Vestnik mashinostroeniya*, No.8, pp. 73-75.
18. Ageeva E. V., Horyakova N. M., Ageev E. V., 2014, "Investigation of the size distribution of microparticles in powders obtained by electroerosive dispersion of copper waste", *Vestnik Mashinostroeniya*, No. 9, pp. 63-64.
19. Ageev E. V., Ageeva E. V., Vorobiev E. A., 2014, "Particle size and phase composition of the powder obtained from tungsten-containing wastes tool materials by electroerosion dispersion in kerosene", *Strengthening technologies and coatings*, №4 (112), pp. 11-14.
20. Ageeva E. V. Ageev E. V., Vorob'ev E. A., 2015, "Analysis of the shape and morphology of the powder particles obtained from tungsten-containing wastes by electroerosion dispersion in kerosene", *Journal of mechanical engineering*, No. 7, pp. 72-73.

Получено 1.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-197-208

**Математический размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде<sup>1</sup>**

Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, В. О. Поданов, А. Е. Агеева

**Агеев Евгений Викторович** — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: ageev\_ev@mail.ru*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Протопопов Евгений Александрович** — кандидат технических наук, старший преподаватель, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: pea\_12@mail.ru*

**Поданов Вадим Олегович** — аспирант, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: vadim.podanov@yandex.ru*

**Агеева Анна Евгеньевна** — Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: ageevaanna2004@yandex.ru*

**Аннотация**

В настоящее время одна из основных проблем использования сплава ЖС6У связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др. и необходимостью его повторного использования путем измельчения. Одним из эффективных, но недостаточно изученных металлургических способов измельчения металлоотходов является электродиспергирование. К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения о составе, структуре и свойствах частиц сплава ЖС6У, полученных в условиях электроэрозионной металлургии.

Целью настоящей работы являлось проведение размерного анализа частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде.

Электродиспергирование отходов сплава жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в виде некондиционных «рабочих» лопаток турбины реактивного двигателя самолета осуществляли в воде дистиллированной на оригинальной установке. В результате воздействия кратковременных электрических разрядов в воде образовывались частицы порошка жаропрочного никелевого сплава ЖС6У различного размера. Размерные характеристики частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, исследовали на лазерном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoTec».

На основании проведенных экспериментальных исследований и их математической обработки, установлено, что частицы порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, имеют размеры от 0,1 до 285 мкм со средним объемным диаметром 67,1 мкм. Отмечены особенности формирования

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-596.2022.4).

фракционного состава частиц порошка в процессе электроэрозионной металлургии металлоотходов марки ЖС6У, а именно наличие двух экстремумов размеров частиц 10 мкм и 100 мкм: мелкая фракция (0,1 ... 25,0 мкм) образуется за счет конденсации парообразной фазы и крупная фракция (25,0 ... 300 мкм) образуется за счет конденсации жидкой фазы. Отмечено, что смещение экстремумов размеров частиц, образующихся при кристаллизации парообразной и жидкой фаз, определяется электрическими параметрами работы установки: напряжением на электродах, емкостью разрядных конденсаторов и частотой следования импульсов. Показано, что в порошке, полученном электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, содержится: 5% частиц с размером до 1,69 мкм; 10% частиц с размером до 3,36 мкм; 25% частиц с размером до 11,71 мкм; 50% частиц с размером до 50,07 мкм; 75% частиц с размером до 99,02 мкм; 90% частиц с размером до 165,74 мкм; 95% частиц с размером до 210,72 мкм; 99% частиц с размером до 281,09 мкм включительно. При этом удельная площадь поверхности порошка составляет  $7994 \text{ см}^2/\text{см}^3$ .

*Ключевые слова:* отходы жаропрочного никелевого сплава ЖС6У, электроэрозионное диспергирование, частицы порошка, размерные характеристики.

*Библиография:* 25 названий.

#### Для цитирования:

Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, В. О. Поданов, А. Е. Агеева. Математический размерный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 197–208.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-197-208

### Dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water

E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, V. O. Podanov, A. E. Ageeva

**Ageev Yevgeniy Viktorovich** — doctor of technical sciences, professor, Southwestern State University (Kursk).

*e-mail:* ageev\_ev@mail.ru

**Gvozdev Aleksander Evgenyevich** — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

**Protopopov Yevgeniy Aleksandrovich** — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail:* pea\_12@mail.ru

**Podanov Vadim Olegovich** — postgraduate student, Southwest State University (Kursk)

*e-mail:* vadim.podanov@yandex.ru

**Ageeva Anna Evgenievna** — Southwestern State University (Kursk)

*e-mail:* ageevaanna2004@yandex.ru

Currently, one of the main problems of using the ZhS6U alloy is associated with the presence of expensive components in its composition, such as Ni, Ti, Mo, Co, etc. and the need to reuse it by grinding. One of the effective, but insufficiently studied metallurgical methods of grinding metal waste is electrodispersion. To date, in the modern scientific and technical literature there is no complete information about the composition, structure and properties of the particles of the ZhS6U alloy obtained in the conditions of electroerosive metallurgy.

The purpose of this work was to conduct a dimensional analysis of powder particles obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZhS6U in water.

Electrodispersion of the waste of the heat-resistant nickel alloy ZHS6U in the form of substandard "working" turbine blades of the jet engine of the aircraft was carried out in distilled water at the original installation. As a result of exposure to short-term electrical discharges, particles of heat-resistant nickel alloy ZHS6U powder of various sizes were formed in the water. The dimensional characteristics of the powder particles obtained by electroerosive dispersion of the heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water were studied using a laser particle size analyzer "Analysette 22 NanoTec".

Based on the conducted experimental studies, it was found that the powder particles obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water have sizes from 0.1 to 285 microns with an average volumetric diameter of 67.1 microns. The features of the formation of the fractional composition of powder particles in the process of electroerosive metallurgy of metal waste of the ZhS6U brand are noted, namely, the presence of two extremes of particle sizes of 10 microns and 100 microns: a small fraction (0.1 ... 25.0 microns) is formed due to condensation of the vapor phase and a large fraction (25.0 ... 300 microns) is formed due to condensation of the liquid phase. It is noted that the displacement of the extremes of the particle sizes formed during the crystallization of the vapor and liquid phases is determined by the electrical parameters of the installation: the voltage on the electrodes, the capacity of the discharge capacitors and the pulse repetition frequency. It is shown that the powder obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water contains: 5% particles with a size up to 1.69 microns; 10% particles with a size up to 3.36 microns; 25% particles with a size up to 11.71 microns; 50% particles with a size up to 50.07 microns; 75% particles with a size up to 99.02 microns; 90% of particles with a size up to 165.74 microns; 95% of particles with a size up to 210.72 microns; 99% of particles with a size up to 281.09 microns inclusive. In this case, the specific surface area of the powder is  $7994 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ .

*Keywords:* waste of heat-resistant nickel alloy ZhS6U, electroerosive dispersion, powder particles, dimensional characteristics.

*Bibliography:* 25 titles.

#### For citation:

E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, V. O. Podanov, A. E. Ageeva, 2022, "Dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 197–208.

## 1. Введение

В настоящее время жаропрочные сплавы нашли широкое распространение для изготовления лопаток турбин, самым распространенным из них является сплав ЖС6У. Данный сплав имеет предел сточасовой прочности 170...180 МПа при 1000°С [1-4]. Верхний предел рабочих температур сплава ЖС6У составляет 1050...1100°С. Данный сплав обладает очень высокой жаропрочностью, что затрудняет процесс его переработки и повторного использования [5-8].

В настоящее время одна из основных проблем использования сплава ЖС6У связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др. и необходимостью его повторного использования путем измельчения [9-12]. Одним из эффективных, но недостаточно изученных металлургических способов измельчения металлоотходов является электродиспергирование [13-17].

К настоящему времени в промышленности данный способ практически не применяется, ввиду отсутствия полноценных комплексных сведений о составе, структуре и свойствах диспергированных электроэрозией частиц, а также сплавов, полученных на их основе. Для этого требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований.

К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения о составе, структуре и свойствах частиц сплава ЖС6У, полученных в условиях электроэрозионной металлургии.

Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований. Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему рециклинга отходов сплавов ЖС6У и дальнейшее их использование и, тем самым, снизить себестоимость производства конечного продукта. Помимо того, актуальность рециклинга данного сплава связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др.

Целью настоящей работы являлось проведение размерного анализа частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде.

## 2. Основной текст статьи

Электродиспергирование отходов сплава жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в виде некондиционных «рабочих» лопаток турбины реактивного двигателя самолета (рис. 1) осуществляли в дистиллированной воде на оригинальной установке [18-22, 25].



Рис. 1: Турбинная лопатка из жаропрочного сплава

Блок-схема процесса электроэрозионного диспергирования отходов сплава представлена на рис. 2.

В результате воздействия кратковременных электрических разрядов в воде образовывались частицы порошка жаропрочного никелевого сплава ЖС6У различного размера.

Размерные характеристики частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, исследовали на лазерном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoТес» (Германия). Блок-схема методики исследования гранулометрического состава представлена на рис. 3.

Лазерный анализатор размеров частиц «Analysette 22 NanoТес plus» определяет распределение по размерам частиц в суспензиях и эмульсиях. По сравнению с «классическими» методами измерения – рассеивом, седиментацией либо анализом по изображению, лазерная дифракция обладает рядом важных преимуществ, таких как краткое время анализа, хорошая

воспроизводимость и точность, простая калибровка, большой диапазон измерений и высокая универсальность.

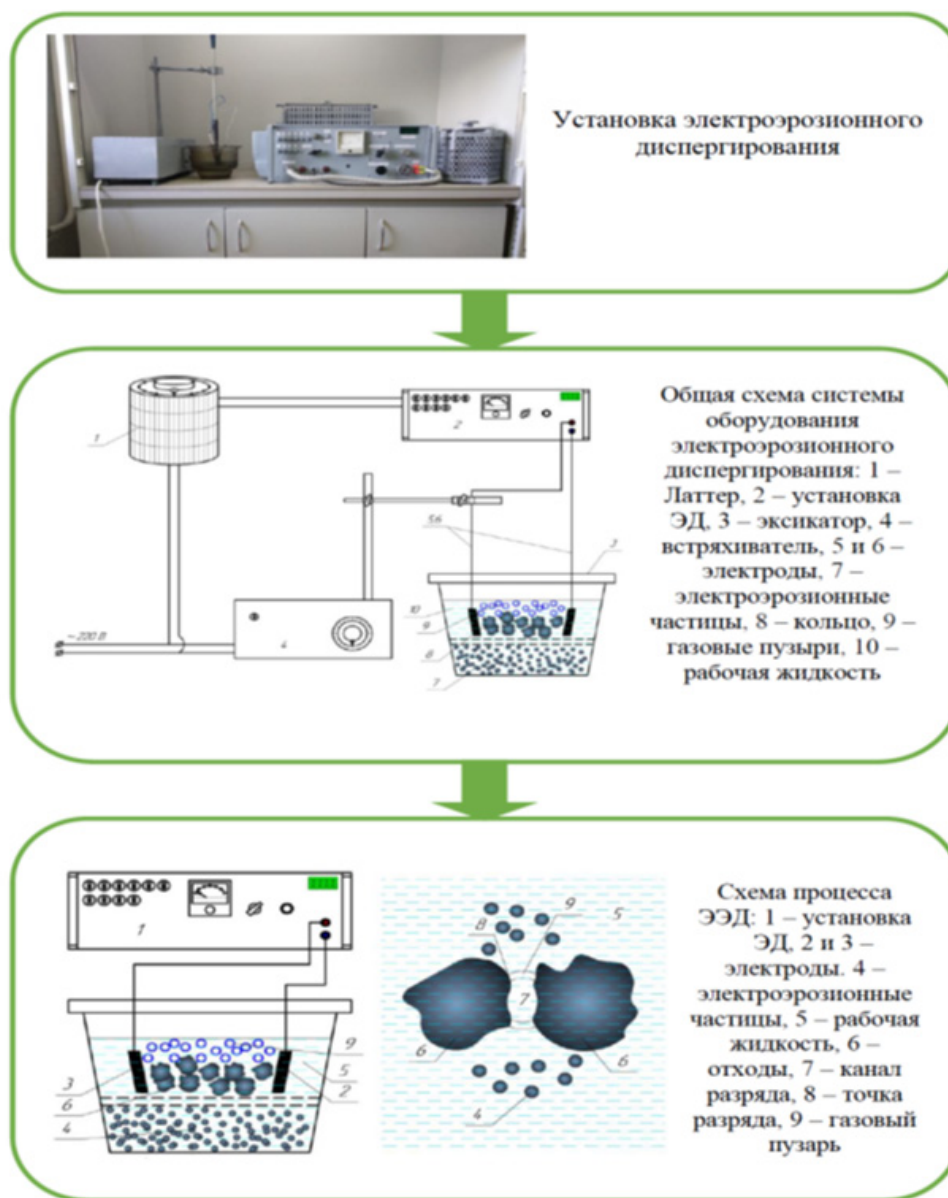


Рис. 2: Блок-схема процесса электродиспергирования металлоотходов

Диапазон измерений «Analysette 22 NanoTec plus» составляет от 0,01 до 2000 мкм. В анализаторах, определяющих распределение частиц по размерам посредством лазерной дифракции, используется физический принцип рассеяния электромагнитных волн. Конструкция состоит из лазера, через измерительную ячейку направленного на детектор. При помощи диспергирующего устройства частицы подают в измерительную ячейку и проходят сквозь лазерный луч. Свет, рассеянный пропорционально размеру частиц, посредством линзы фокусируется на детектор. По распределению рассеянного света при помощи комплексной математики рассчитывают распределение частиц по их размерам. В результате получают объемные доли, соответствующие эквивалентным диаметрам при лазерной дифракции. Благодаря встроенной ультразвуковой ванне (объем около 500 мл, энергия и частота ультразвука 80 Вт/36 кГц), даже труднодиспергируемые пробы могут анализироваться без применения дополнительно-

го оборудования. Цифровой ультразвуковой генератор всегда поддерживает установленную мощность на оптимальном и постоянном уровне. Нижний предел чувствительности при малых количествах мелких и крупных частиц в распределениях их по размерам (в пределах диапазона измерений) – 3%. Воспроизводимость согласно ISO 13320-1  $d_{50} \leq 1\%$ .

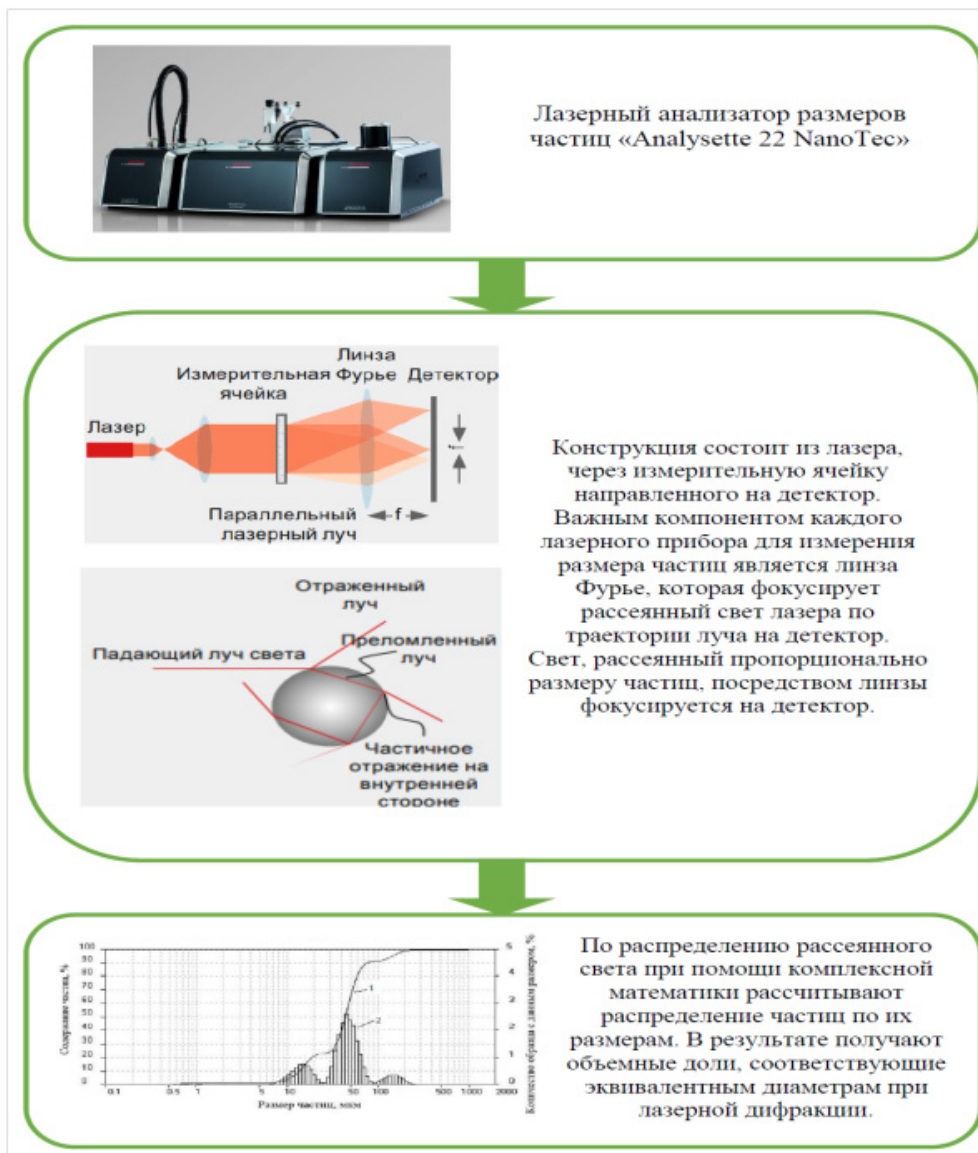


Рис. 3: Блок-схема методики определения среднего размера частиц

### 3. Результаты и их обсуждение

Экспериментально установлено, что частицы порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, имеют размеры от 0,1 до 285 мкм со средним объемным диаметром 67,1 мкм (рис. 4).

Отмечены особенности формирования фракционного состава частиц порошка в процессе электроэрозионной металлургии металлоотходов марки ЖС6У, а именно наличие двух экстремумов размеров частиц 10 мкм и 100 мкм: мелкая фракция (0,1 ... 25,0 мкм) образуется за счет конденсации парообразной фазы и крупная фракция (25,0 ... 300 мкм) образуется за

счет конденсации жидкой фазы.

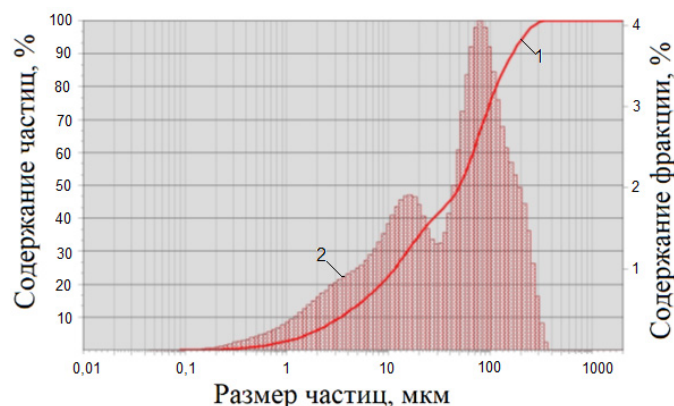


Рис. 4: Интегральная кривая (1) и гистограмма (2) распределения по размерам частиц твердосплавного порошка

Отмечено, что смещение экстремумов размеров частиц, образующихся при кристаллизации парообразной и жидкой фаз, определяется электрическими параметрами работы установки: напряжением на электродах, емкостью разрядных конденсаторов и частотой следования импульсов [23, 24].

Установлена зависимость, показывающая, что средний размер частиц увеличивается с повышением энергии импульса. Получены зависимости, позволяющие выполнить расчетную оценку фракционного состава диспергируемого материала, получаемого в условиях действия электроконтактных тепловых источников.

Размерные характеристики частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, представлены в табл. 1.

Таблица 1: Размерные характеристики частиц порошка

| Размерная характеристика                        | Величина |
|-------------------------------------------------|----------|
| D5, мкм                                         | 1,69     |
| D10, мкм                                        | 3,36     |
| D25, мкм                                        | 11,71    |
| D50, мкм                                        | 50,07    |
| D75, мкм                                        | 99,02    |
| D90, мкм                                        | 165,74   |
| D95, мкм                                        | 210,72   |
| D99, мкм                                        | 281,09   |
| Средний объемный диаметр, мкм                   | 1,69     |
| Модальный диаметр, мкм                          | 79,77    |
| Размах (D90-D10)/D50                            | 3,24     |
| Удельная поверхность, $\text{см}^2/\text{см}^3$ | 7994     |

Из представленных данных в табл. 1 видно, что в порошке, полученном электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, содержится: 5% частиц с размером до 1,69 мкм; 10% частиц с размером до 3,36 мкм; 25% частиц с размером до 11,71 мкм; 50% частиц с размером до 50,07 мкм; 75% частиц с размером до 99,02 мкм; 90% частиц

с размером до 165,74 мкм; 95% частиц с размером до 210,72 мкм; 99% частиц с размером до 281,09 мкм включительно.

При этом удельная поверхность полученного порошка, представляющая сумму наружных поверхностей всех частиц, составляющих единицу его объема, составляет  $7994 \text{ см}^2/\text{см}^3$ . Данная характеристика порошка, зависящая от размера и формы частиц, а также степени развитости их поверхности, возрастает с уменьшением размера, усложнением формы и увеличением шероховатости поверхности частиц и определяет его свойства и поведение при последующих операциях прессования и спекания.

#### 4. Заключение

На основании проведенных экспериментальных исследований, направленных на проведение размерного анализа частиц порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, показана высокая эффективность применения технологии электроэрозионного диспергирования, которая обеспечивает при низких затратах электроэнергии получение порошков, пригодных для практического применения. Отмечены особенности формирования фракционного состава частиц порошка в процессе электроэрозионной металлургии металлоотходов марки ЖС6У, а именно наличие двух экстремумов размеров частиц 10 мкм и 100 мкм: мелкая фракция (0,1 ... 25,0 мкм) образуется за счет конденсации парообразной фазы и крупная фракция (25,0 ... 300 мкм) образуется за счет конденсации жидкой фазы. Помимо того, установлено, что смещение экстремумов размеров частиц, образующихся при кристаллизации парообразной и жидкой фаз, определяется электрическими параметрами работы установки: напряжением на электродах, емкостью разрядных конденсаторов и частотой следования импульсов.

Экспериментально установлено, что частицы порошка, полученного электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в воде, имеют размеры от 0,1 до 285 мкм со средним объемным диаметром 67,1 мкм и содержат: 5% частиц с размером до 1,69 мкм; 10% частиц с размером до 3,36 мкм; 25% частиц с размером до 11,71 мкм; 50% частиц с размером до 50,07 мкм; 75% частиц с размером до 99,02 мкм; 90% частиц с размером до 165,74 мкм; 95% частиц с размером до 210,72 мкм; 99% частиц с размером до 281,09 мкм включительно. При этом удельная площадь поверхности порошка составляет  $7994 \text{ см}^2/\text{см}^3$ .

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новикова О.В., Кочетков В.А., Виноградов А.И., Жуков А.А., Тихонов А.А., Маринин С.Ф. Применение газоизостатического прессования для повышения эксплуатационной надежности лопаток турбины из жаропрочного сплава типа ЖС6У // Заготовительные производства в машиностроении. 2007. № 8. С. 54-56.
2. Курихина Т.В. Кинетика образования интерметаллида на основе Ni3Al в жаропрочном никелевом сплаве ЖС6У // Технология машиностроения. 2017. № 1. С. 5-8.
3. Добрынин Д.А., Алексеева М.С., Афанасьев-Ходыкин А.Н. Ремонт деталей горячего тракта газотурбинного двигателя из жаропрочного никелевого сплава марки ЖС6У // Труды ВИАМ. 2021. № 5 (99). С. 3-13.
4. Михайленко С.В., Настольная В.В., Бородихин А.С., Голубь Р.С. Исследование производительности обработки жаропрочной стали ЖС6У керамическими пластинами // Актуальные научные исследования в современном мире. 2020. № 12-1 (68). С. 128-131.



5. Быков Ю.Г., Логунов А.В., Разумовский И.М., Фролов В.С. Изменение плотности сплава ЖС6У в процессе эксплуатации // *Металловедение и термическая обработка металлов*. 2007. № 7 (625). С. 29-32.
6. Оспенникова О.Г., Орлов М.Р. Повышение свойств жаропрочного сплава ЖС6У-ВИ путем горячего изостатического прессования и последующей термической обработки // *Материаловедение*. 2007. № 9. С. 32-37.
7. Ерёмин Е.Н., Филиппов Ю.О., Давлеткильдеев Н.А., Миннеханов Г.Н. Исследование структуры сплава ЖС6У методом атомно-силовой микроскопии // *Омский научный вестник*. 2011. № 1 (97). С. 24-29.
8. Еремин Е.Н., Филиппов Ю.О., Маталасова А.Е. Исследование карбидных фаз в сплаве ЖС6У // *Омский научный вестник*. 2014. № 3 (133). С. 59-63.
9. Ерёмин Е.Н., Филиппов Ю.О., Миннеханов Г.Н., Лопаев Б.Е. Исследование фазовых превращений в сплаве ЖС6У методами термического анализа // *Омский научный вестник*. 2013. № 1 (117). С. 63-68.
10. Равилов Р.Г., Петрова М.А., Древняк В.В., Саадатибаи М. Методика оценки долговечности покрытия на лопатках турбины из сплавов ЖС6У и ЖС26ВЧНК // *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*. 2015. № 222 (12). С. 201-206.
11. Ageeva E.V., Khor'yakova N.M., Ageev E.V. Morphology of copper powder produced by electrospark dispersion from waste // *Russian Engineering Research*. 2014. Vol. 34(11). P. 694-696.
12. Ageeva E.V., Khor'yakova N.M., Ageev E.V. Morphology and composition of copper electrospark powder suitable for sintering // *Russian Engineering Research*. 2015. Vol. 35(1). P. 33-35.
13. Ageeva E.V., Ageev E.V., Latypov R.A. Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 2015. Vol. 56(1). P. 52-62.
14. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Y. Nanopowder produced from high-speed steel waste by electrospark dispersion in water // *Russian Engineering Research*. 2015. Vol. 35(3). P. 189-190.
15. Latypov R.A., Ageeva E.V., Kruglyakov O.V., Latypova G.R. Electroerosion micro- and nanopowders for the production of hard alloys // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2016. Vol. 2016(6). P. 547-549.
16. Latypov R.A., Ageev E.V., Latypova G.R., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Elemental Composition of the Powder Particles Produced by Electric Discharge Dispersion of the Wastes of a VK8 Hard Alloy // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2017. Vol. 2017(12). P. 1083-1085.
17. Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Manufacture of Cobalt–Chromium Powders by the Electric Discharge Dispersion of Wastes and Their Investigation // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2018. Vol. 2018(12). P. 1177-1180.
18. Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Effect of Temperature on the Porosity of the Additive Products Made of the Dispersed Wastes of Cobalt–Chromium Alloys // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2019. Vol. 2019(12). P. 1300-1303.

19. Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Ageeva E.V., Pykhtin A.I. Structure and mechanical properties of powders obtained by electrodispersing cobalt-chromium alloy // *Journal of Applied Engineering Science*. 2021. Vol. 19(1). P. 230-236.
20. Ageeva E.V., Ageev E.V., Latypov R.A. Properties of the VNZH Pseudoalloy Sintered from Spark Erosion Powders Fabricated in Distilled Water // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2021. Vol. 6. P. 119-123.
21. Ageeva E.V., Ageev E.V., Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E. Mathematical optimization of the process of electrodispersion of the waste of the alloy of the residence permit // *Chebyshevskii Sbornik*. 2021. Vol. 22(2). P. 389-401.
22. Ageeva E.V., Ageev E.V., Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E. Development of scientific and technological foundations for a new environmentally friendly and waste-free process for grinding conductive waste into micro- and nanofractions powders // *Chebyshevskii Sbornik*. 2021. Vol. 21(4). P. 314-326.
23. Ageev E.V., Ageeva E.V., Khoryakova N.M. X-Ray methods for studying the surface of powder obtained by electroerosion dispersion of the waste of W–Ni–Fe 95 pseudoalloy in kerosene // *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2021. Vol. 15. No. 4. P. 723-727.
24. Ageev E.V., Ageeva E.V. Wear Resistance of Hardened Components Produced from Electro-spark Cobalt–Chromium Powder by Additive Manufacturing // *Russian Engineering Research*. 2021. Vol. 41. No. 8. P. 731-733.
25. Агеев Е.В., Гвоздев А.Е. Быстрорежущие стали: сверхпластичность и рециклинг: монография // Курск: Изд-во ЗАО «Университетская книга», 2021. 386 с.

## REFERENCES

1. Novikova, O.V., Kochetkov, V.A., Vinogradov, A.I., Zhukov, A.A., Tikhonov, A.A. & Marinin, S.F. 2007, “The use of gas-static pressing to improve the operational reliability of turbine blades made of heat-resistant alloy type ZHS6U”, *Procurement production in mechanical engineering*, no. 8, pp. 54-56.
2. Kurikhina, T.V. 2017, “Kinetics of formation based on Ni3Al intermetallic compound in heat-resistant nickel alloy ZhS6U”, *Technology of mechanical engineering*, no. 1, pp. 5-8.
3. Dobrynin, D.A., Alekseeva, M.S. & Afanasiev-The Khodykin, A.N. 2021, “Repair of the hot gas path of a gas turbine engine from heat-resistant Nickel alloy grade ZHS6U”, *Trudy VIAM*, no. 5 (99), pp. 3-13.
4. Mikhailenko, S.V., Nastol'naya, V.V., Borodikhin, A.S. & Golub, R.S. 2020, “Investigation of the performance of processing heat-resistant steel ZhS6U with ceramic plates”, *Actual scientific research in the modern world*, no. 12-1 (68), pp. 128-131.
5. Bykov, Yu.G., Logunov, A.V., Razumovsky, I.M. & Frolov, V.S. 2007, “The change in the density of alloy ZHS6U in the process of operation”, *Metallurgy and heat treatment of metals*, no. 7 (625), pp. 29-32.
6. Ospennikova, O.G. & Orlov, M.R. 2007, “Improving the properties of the heat-resistant alloy ZhS6U-VI by hot isostatic pressing and subsequent heat treatment”, *Materials science*, no. 9, pp. 32-37.

7. Eremin, E.N., Filippov, Yu.O., Davletkildeev, N.A. & Minnekhanov, G.N. 2011, "Investigation of the structure of the alloy ZhS6U by atomic force microscopy", *Omsk Scientific Bulletin*, no. 1 (97), pp. 24-29.
8. Eremin, E.N., Filippov, Yu.O. & Matalasova, A.E. 2014, "Investigation of carbide phases in the alloy ZhS6U", *Omsk Scientific Bulletin*, no. 3 (133), pp. 59-63.
9. Eremin, E.N., Filippov, Yu.O., Minnekhanov, G.N. & Lopaev, B.E. 2013, "Investigation of phase transformations in the alloy ZhS6U by methods of thermal analysis", *Omsk Scientific Bulletin*, no. 1 (117), pp. 63-68.
10. Ravilov, R.G., Petrova, M.A., Drevnyak, V.V. & Saadatibai, M. 2015, "Methodology for assessing the durability of the coating on turbine blades made of alloys ZhS6U and ZHS26VSNK", *Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation*, no. 222 (12), pp. 201-206.
11. Ageeva, E.V., Horyakova, N.M. & Ageev, E.V. 2014, "Morphology of copper powder obtained by electric spark dispersion from waste", *Russian Engineering Research*, vol. 34 (11), pp. 694-696.
12. Ageeva, E.V., Horyakova, N.M. & Ageev, E.V. 2015, "Morphology and composition of electric spark copper powder suitable for sintering", *Russian Engineering Research*, vol. 35 (1), pp. 33-35.
13. Ageeva, E.V., Ageev, E.V. & Latypov, R.A. 2015, "Investigation of the properties of electroerosive powders and hard alloys obtained from them by isostatic pressing and sintering", *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, vol. 56 (1), pp. 52-62.
14. Ageeva, E.V., Ageev, E.V. & Karpenko, V.Y. 2015, "Nanopowder obtained from the wastes of high speed steel by electro-spark dispersion in water", *Russian engineering research*, vol. 35 (3), pp. 189-190.
15. Latypov, R.A., Ageeva, E.V., Kruglyakov, O.V. & Latypova, G.R. 2016, "Electroerosion micro- and nanopowders for the production of hard alloys", *Russian metallurgy (Metal)*, vol. 2016 (6), pp. 547-549.
16. Latypov, R.A., Ageev, E.V., Latypova, G.R., Altukhov, A.Y. & Ageeva, E.V. 2017, "Elemental composition of the powder particles produced by electric discharge dispersion of the wastes of a VK8 hard alloy", *Russian Metallurgy (Metally)*, vol. 2017 (12), pp. 1083-1085.
17. Latypov, R.A., Ageev, E.V., Altukhov, A.Y. & Ageeva, E.V. 2018, "Manufacture of cobalt–chromium powders by the electric discharge dispersion of wastes and their investigation", *Russian Metallurgy (Metally)*, vol. 2018 (12), pp. 1177-1180.
18. Latypov, R.A., Ageev, E.V., Altukhov, A.Y. & Ageeva, E.V. 2019, "Effect of temperature on the porosity of the additive products made of the dispersed wastes of cobalt–chromium alloys", *Russian Metallurgy (Metally)*, vol. 2019 (12), pp. 1300-1303.
19. Ageev, E.V., Altukhov, A.Yu., Ageeva, E.V. & Pykhtin, A.I. 2021 "Structure and mechanical properties of powders obtained by electrodispersing cobalt-chromium alloy", *Journal of Applied Engineering Science*, vol. 19 (1), pp. 230-236.
20. Ageeva, E.V., Ageev, E.V. & Latypov, R.A. 2021, "Properties of the VNZH pseudoalloy sintered from spark erosion powders fabricated in distilled water", *Russian Metallurgy (Metally)*, vol. 6, pp. 119-123.

21. Ageeva, E.V., Ageev, E.V., Kuzovleva, O.V. & Gvozdev, A.E. 2021, “Mathematical optimization of the process of electrodispersion of the waste of the alloy of the residence permit“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22 (2), pp. 389-401.
22. Ageeva, E.V., Ageev, E.V., Kuzovleva, O.V. & Gvozdev, A.E. 2021, “Development of scientific and technological foundations for a new environmentally friendly and waste-free process for grinding conductive waste into micro- and nanofractions powders“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21 (4), pp. 314-326.
23. Ageev, E.V., Ageeva, E.V. & Khoryakova, N.M. 2021, “X-Ray methods for studying the surface of powder obtained by electroerosion dispersion of the waste of W–Ni–Fe 95 pseudoalloy in kerosene“, *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, vol. 15, no. 4, pp. 723-727.
24. Ageev, E.V. & Ageeva, E.V. 2021, “Wear resistance of hardened components produced from electrospark cobalt–chromium powder by additive manufacturing“, *Russian Engineering Research*, vol. 41, no. 8, pp. 731-733.
25. Ageev, E.V. & Gvozdev, A.E. 2021, *High-speed steels: superplasticity and recycling*, Publishing House of ZAO Universitetskaya kniga, Kursk.

Получено 27.10.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-209-222

**О теореме Пуанкаре — Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем<sup>1</sup>**

Р. Р. Мухин

**Мухин Равиль Рафкатович** — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова, филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

*e-mail: mukhin@mail.ru*

**Аннотация**

Целью работы является изучение истории теоремы Пуанкаре — Биркгофа, которая является не только одним из результатов, лежащих в основе теории динамических систем, но имеет важное значение для приложений. До настоящего времени теорема Пуанкаре — Биркгофа рассматривалась в историческом плане лишь фрагментарно и не являлась предметом последовательного исторического исследования. Исследование основано на анализе оригинальных работ, историко-научной литературы с привлечением воспоминаний участников описываемых событий. Идея Пуанкаре заключалась в установлении периодических движений динамических систем с помощью предложенной им геометрической теоремы. Периодические движения, в свою очередь, должны были послужить основой для изучения других, сложных движений. Поиски доказательства явились мощным импульсом для Биркгофа в построении теории динамических систем, который вместе с Пуанкаре является основателем этой области математики. Теорема Пуанкаре — Биркгофа имеет ключевое значение в понимании механизма возникновения хаотического движения в гамильтоновых системах. История теоремы Пуанкаре — Биркгофа не закончена, она играет значительную роль в современной теории динамических систем и ее приложениях. Продолжаются поиски доказательства многомерного аналога теоремы, ее различных обобщений и дальнейших приложений.

*Ключевые слова:* интегрирование дифференциальных уравнений, проблема трех тел, динамическая система, периодические движения, хаотические движения.

*Библиография:* 38 названий.

**Для цитирования:**

Р. Р. Мухин. О теореме Пуанкаре — Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 209–222.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-011-00402 А)

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-209-222

# On the Poincaré-Birkhoff theorem as the important result of the theory of dynamical systems<sup>2</sup>

R. R. Mukhin

**Mukhin Raviľ Rafkatovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Sary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISiS” (Sary Oskol).

*e-mail: mukhiny@mail.ru*

## Abstract

The aim of this work is to study the history of the Poincaré-Birkhoff theorem, which is not only one of the results underlying the theory of dynamical systems, but is important for applications. Until now, the Poincaré-Birkhoff theorem has been considered historically only fragmentarily and has not been the subject of consistent historical research. The research is based on the analysis of original works, historical and scientific literature, involving the recollections of participants in the described events. Poincaré’s idea was to establish the periodic motions of dynamical systems using the geometric theorem he proposed. Periodic movements, in turn, were supposed to serve as a basis for studying other, complex movements. The search for a proof was a powerful impetus for Birkhoff in the construction of the theory of dynamical systems, who, together with Poincaré, is the founder of this area of mathematics. Poincaré-Birkhoff theorem is of key importance in understanding the mechanism of the onset of chaotic motion in Hamiltonian systems. The history of the Poincaré-Birkhoff theorem is not complete; it plays a significant role in the modern theory of dynamical systems and its applications. The search continues for a proof of a multidimensional analogue of the theorem, its various generalizations, and further applications.

**Keywords:** integration of differential equations, three-body problem, dynamical system, periodic motions, chaotic motions.

**Bibliography:** 38 titles.

## For citation:

R. R. Mukhin, 2022, “On the Poincaré-Birkhoff theorem as the important result of the theory of dynamical systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 209–222.

В 1912 г., незадолго до смерти, А. Пуанкаре направил в редакцию *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (Отчеты математического общества Палермо) статью под названием *Об одной геометрической теореме*. В письме редактору журнала Дж.Б. Гучча Пуанкаре с беспокойством писал:

«Мой дорогой друг, во время вашего последнего посещения я говорил вам о работе, которая удерживает меня вот уже два года. Я не продвинулся дальше и решаюсь пока оставить ее, чтобы дать ей время созреть. Было бы хорошо, если бы я был уверен, что смогу снова взяться за нее. Но в моем возрасте я не могу за это поручиться, а полученные результаты могут

<sup>2</sup>The work was supported by the RFBR, project No. 20-011-00402 A

направить исследователей на новые и неизведанные пути и кажутся мне слишком много обещающими, несмотря на причиненные мне ими разочарования, чтобы я ими пожертвовал. В таких условиях сочтете ли вы подходящим опубликовать незаконченный мемуар, где я изложил бы цель, которую преследовал, задачу, которую себе поставил, и результаты моих усилий ее решить?» [1, Т. 2. С. 984].

Вся математическая деятельность Пуанкаре была направлена главным образом на решение одной задачи – интегрирование дифференциальных уравнений. Здесь у него целая россыпь идей, созданы новые области и направления, которые в значительной степени определяют современный облик математики. Указанная работа является в некотором смысле итогом деятельности Пуанкаре, его «прощальным поклоном» и стоит в ряду его главных достижений.

Решение дифференциальных уравнений представляет важнейшую задачу с самого начала создания теории бесконечно малых. Главной областью приложений в первые два столетия являлась небесная механика – проблема  $n$  тел. Даже в самом простом случае при  $n = 3$  задача обладает неисчерпаемым содержанием. Впервые проблема трех тел была сформулирована И. Ньютоном в его «Началах» [2, С. 548-558], изучавшего движение Луны и Земли вокруг Солнца. Ньютон прекрасно осознавал крайнюю трудность задачи. Полученное им решение по лунной вариации очень близко к современным результатам и представляет один из первых и глубоких триумфов небесной механики [3, С. 237]. Результаты Ньютона по проблеме трех тел имеют еще более важное значение – ему принадлежит первый *общий подход* к решению дифференциальных уравнений. В проблеме трех тел мы имеем систему с 9-ю степенями свободы, описываемую 9-ю уравнениями движения второго порядка или 18-ю уравнениями первого порядка. С помощью редукции эту систему можно свести к 12 уравнениям, т.е. имеем систему в 12-мерном пространстве. Для построения интегральной кривой от исходной точки в этом пространстве находится последующая точка, и вся кривая строится с помощью последовательных малых элементов. Такой метод является очень общим, но его практическая реализация требует огромного объема вычислений. Лишь с появлением ЭВМ метод Ньютона нашел широкое применение. Можно сказать, что все численные методы представляют собой развитие и модернизацию идей Ньютона.

До самого конца XIX в. общим методом решения задач небесной механики оставались различные варианты теории возмущений, когда в изучаемой системе имеется малый параметр. Так, в рассматривавшейся еще Ньютоном задаче о движении Луны и Земли вокруг Солнца таким параметром является отношение масс Луны и Земли  $M_L/M_Z \approx 0.0123$ . Несмотря на успехи небесной механики, методы теории возмущений оставались ограниченными. Все это время не прекращались поиски новых подходов к главной задаче – интегрированию дифференциальных уравнений. Требовались новые идеи. Пуанкаре сам внес значительный вклад в методы теории возмущений, и как никто другой видел их ограниченность. Он предложил принципиально иной подход к решению задачи, взяв за основу периодические движения. Идея заключалась в том, что, если такие решения плотно заполняют какую-то область, то с их помощью можно будет изучить свойства других решений и периодические решения тогда приобретают большое теоретическое значение. Все было ясно для случая предельного поведения (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) систем с двумя степенями свободы, который уже был изучен Пуанкаре в его мемуарах по качественной теории дифференциальных уравнений [4]. Там положениям равновесия и периодическим решениям принадлежит центральное место. Но в более сложных случаях вопрос остается открытым и все устремления Пуанкаре были направлены на его разрешение. Периодические решения рассматривались задолго до Пуанкаре. В упомянутой теории Луны Ньютон указал на периодические решения в проблеме трех тел в системе вращающихся осей. Метод вращающихся осей получил систематическое развитие у Л. Эйлера, который нашел периодическое решение проблемы трех тел (1767) [5, С. 334-350], когда они находятся на одной прямой, вращающейся вокруг их центра масс. Другой класс периодических движений, когда три тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, был найден Ж.Л. Лагранжем

в его знаменитом мемуаре о проблеме трех тел (1772) [6]. Периодические решения играют очень важную роль в классических исследованиях движения Луны Дж. Хилла (1878) [7]. Но только у Пуанкаре периодические решения заняли центральное место.

Выделенность периодических решений определяется тем, что, как только они становятся известны на протяжении одного периода, они становятся известными на всей временной оси, и на их основе можно изучать все множество решений. Кроме того, периодические решения можно довольно просто изучать современными численными методами. По словам Пуанкаре: «Особая ценность периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной» [1, Т. 1. С. 75].

Периодические решения привлекали пристальное внимание Пуанкаре в течение всей его научной деятельности. К ним он впервые обратился в 1883 г. в небольшой заметке о проблеме трех тел [8] и продолжил их изучение в работе [9], в которой высказал идеи, легшие в основу его знаменитого конкурсного мемуара 1890 г. [10]. Наиболее полное развитие все это получило в «Новых методах небесной механики» [1]. Периодические решения сыграли ключевую роль в установлении неинтегрируемости проблемы трех тел.

Пуанкаре формулирует как основную задачу динамики изучение канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (1)$$

в предположении, что функция  $F$  может быть разложена по степеням малого параметра  $\mu$

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots \quad (2)$$

В III главе своего труда Пуанкаре переходит к подробному изучению периодических решений, исходя из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

где  $X$  – данные однозначные функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Пусть

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_3 = \phi_3(t) \quad (4)$$

является периодическим решением системы (3). Пуанкаре ставит следующую задачу: если в уравнениях (3) функции  $X$  зависят от некоторого  $\mu$  и при  $\mu = 0$  существуют периодические решения, то при каких условиях существуют решения для малых значений  $\mu$  [1, Т. I. С. 34, 73-75]?

Здесь надо подчеркнуть, что вся идеология «Новых методов» проникнута идеями качественного подхода. «Новые методы небесной механики» являются органическим продолжением трудов Пуанкаре «*Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle*» («О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями») [4] и конкурсного мемуара «*Sur le problème des trois corps et les équations dynamique*» [10]. Количественные методы, аналитические или численные, дают вполне точную информацию о поведении системы. Однако это обычно ограничивается данным решением и его малой окрестностью, причем в большинстве случаев точность уменьшается или исчезает вовсе с увеличением времени. Качественные методы основываются на строго доказанных утверждениях. Они устанавливают классификацию, существование и единственность решений, интегралы движения, особенности, асимптотические свойства. Если речь идет об уравнениях динамики, сюда можно добавить периодические решения, устойчивость, финальные движения, теорию КАМ, эргодическую теорию, структуру множества решений [11, С. 318].



С самого начала Пуанкаре столкнулся с двумя существенными ограничениями, сужающих область применимости развиваемых им методов. Во-первых, параметр  $\mu$  должен быть малым, чтобы ряд (2) сходился. И второе, при изменении  $\mu$  в каком-либо промежутке  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$  характер решения в качественном отношении должен сохраняться. Говоря современным языком, система не должна быть структурно неустойчивой. Например, периодическое решение может перейти в решение с бесконечно большим периодом. Не отказываясь от своей идеи, что произвольное движение динамической системы может быть аппроксимировано периодическими движениями при условии их всюду плотного распределения среди всех возможных движений, Пуанкаре искал способы выйти за пределы указанных ограничений. Этот путь в конечном итоге привел его к геометрической теореме.

В 1896 г. Пуанкаре в небольшой заметке [12] предложил искать периодические решения с помощью вариационного принципа. Для случая ньютоновского потенциала, обратно пропорционального расстоянию, Пуанкаре не удалось преодолеть встретившиеся трудности, поэтому он рассмотрел задачу для «потенциала сильного взаимодействия», обратно пропорционального квадрату расстояния (подробно об этом обсуждается в работе А. Шенсине [13]). В поисках периодических решений уравнений небесной механики Пуанкаре помимо трудностей по существу задачи столкнулся с трудностями, обусловленными спецификой уравнений. Постепенно он пришел к выводу, что надо рассмотреть самую простую динамическую задачу, свободную от второстепенных трудностей. Такой задачей является задача о геодезических линиях на поверхности. В этом случае имеются всего две степени свободы и можно выбрать поверхность без особых точек. Геодезический поток представляет собой обобщение математической модели движения материальной точки на гладкой поверхности и не подверженной действию внешних сил. Задачу о геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны решил Ж. Адамар (1898) [14]. Эта работа Адамара примечательна в том отношении, что в ней впервые была обнаружена важнейшая характеристика хаотического движения динамических систем, известная как чувствительная зависимость от начальных условий. Пуанкаре же через несколько лет после Адамара изучал задачу о геодезических потоках на выпуклых поверхностях (1905) [15], поскольку, как он отмечал: «Траектории задачи трех тел сопоставимы не с геодезическими линиями отрицательной кривизны, а, наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях» [15, С. 735]. Может создаться впечатление, что здесь Пуанкаре вроде бы не воспринял ключевую идею Адамара о чувствительной зависимости от начальных условий. Это кажется противоречащим описанию Пуанкаре гомоклинической сети в III томе «Новых методов небесной механики» (1897) [1, Т. 2. С. 339]. Кроме того, в своем труде «Наука и метод» Пуанкаре отмечает: «Небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем» [16, С. 323]. Возможное объяснение заключается в нацеленности Пуанкаре на главную задачу, а все связанное с хаотической динамикой выглядело в его глазах второстепенным и отошло на задний план. Замкнутые геодезические играют ту же роль, что периодические решения в проблеме трех тел. Хотя предложенный Пуанкаре метод не привел к поставленной им цели — выйти за пределы указанных ограничений в поисках периодических решений — новые идеи, с обычной для Пуанкаре щедростью представленные в работе [15], привели к важным результатам, полученными последующими поколениями математиков (Дж. Биркгофом, Л.А. Люстерником, Л.Г. Шнирельманом, М. Морсом и др.).

Перейдем к геометрической теореме Пуанкаре [17]. Она утверждает следующее (формулировка Биркгофа):

Пусть дано кольцо  $0 < a \leq r \leq b$  в плоскости, определяемой полярными координатами  $r$ ,  $\theta$  и некоторое взаимно однозначное, непрерывное, сохраняющее площадь преобразование  $T$  этого кольца в себя и  $p$  при этом такое, что точки окружности  $r = a$  передвигаются при этом преобразовании вперед (т.е. в направлении возрастающих  $\theta$ ), а точки окружности  $r = b$  передвигаются назад (в направлении убывающих  $\theta$ ). Тогда в кольце будут существовать по

меньшей мере две точки, инвариантные при преобразовании  $T$  [18, С. 172].

После пояснений к формулировке теоремы Пуанкаре показал, как ее можно использовать в задачах динамики. Сначала он рассмотрел простейшую задачу с двумя степенями свободы – проблему геодезических линий на выпуклой поверхности. Более важным является применение теоремы для ограниченной проблемы трех тел. Пуанкаре показал, что, если его теорема верна и существует периодическое решение, то существует бесконечно много периодических решений. Мемуар Пуанкаре [17] остался незаконченным, он не дал полного доказательства. Но здесь он предвосхитил основные положения теории Морса. Надо заметить, что в то время Пуанкаре уже был тяжело болен, и медицина того времени была бессильна ему помочь. Он успел рассмотреть большое количество частных случаев, и во всех из них теорема оказалась верной.

Через несколько месяцев после смерти Пуанкаре доказательство его теоремы было дано Джорджем Биркгофом [19]. С работ Биркгофа начинается новый этап в развитии качественной теории. Большое влияние на Биркгофа оказало его знакомство с известным геометром Оскаром Вебленом, когда Биркгоф недолго (1909–1912) работал в Принстонском университете – центре геометрических исследований в то время в США. У Веблена он изучал только что родившуюся топологию, что оказало глубокое воздействие на последующую научную деятельность Биркгофа. Биркгоф, не будучи непосредственным учеником Пуанкаре, был его главным последователем. Веблен вспоминал, что Биркгоф в беседах на математические темы часто ссыался на «Новые методы небесной механики» [20, Р. 6].

Найденное Биркгофом доказательство является очень простым и при том в духе Пуанкаре. Биркгоф доказал существование одной неподвижной точки, но его аргументация о существование второй оказалась не совсем верной. Эту ошибку Биркгоф исправил в другой своей работе (1926) [21]. Однако данное доказательство не для всех явилось убедительным, полностью логически безупречным, и поиски строго доказательства продолжались несколько десятилетий. Лишь в 1977 г. оно было дано М. Брауном и У. Нойманом [22]. Полная драматизма история доказательства геометрической теоремы Пуанкаре приведена в докладе А.Н. Кириллова [23].

Геометрическая теорема Пуанкаре дала мощные импульсы для развития исследований в нескольких направлениях математики и физики. В первую очередь следует назвать исследования самого Биркгофа, стимулированные поисками доказательства теоремы Пуанкаре. Биркгоф был математиком с широким кругом интересов, куда входили и такие области, как теория чисел и линейные дифференциальные уравнения. Но главный вклад он внес в теорию динамических систем. Исследования Биркгофа по динамическим системам проходили в трех направлениях. Он исходил из проблемы трех тел, от нее перешел к специальной задаче динамики систем с двумя степенями свободы и затем к общей теории динамических систем. Важным рубежом явился коллоквиум математиков в университете Чикаго в сентябре 1920 г., организованного Американским математическим обществом [24]. На коллоквиуме присутствовало 90 математиков и было прочитано два цикла лекций: Дж. Биркгофом «Динамические системы» и Ф.Р. Мултоном «О теории функций с бесконечным числом переменных» (так в то время назывался рождающийся функциональный анализ). Сам выбор тем весьма примечателен, это был передний край математической науки: приложения топологии и функциональный анализ. В лекциях Биркгофа принципиальное значение имело применение для исследования динамических систем топологических методов. Как сказано в одной работе, Биркгоф вместе с Пуанкаре (который является создателем этой области математики) повенчал топологию и анализ. Первая лекция была вводной и касалась традиционных подходов. А вот во второй лекции Биркгоф рассматривает периодические движения и методы их нахождения, геометрическую теорему Пуанкаре, гиперболические периодические движения и их асимптотики, устойчивые и неустойчивые эллиптические движения вместе с их асимптотиками, другие типы движений, в том числе обобщения периодических движений – рекуррентные движения. Различию гиперболических и эллиптических движений Биркгоф придает принципиальное значе-

ние. Заканчивается лекция рассмотрением общей теории динамических систем. Следующая лекция посвящена понятиям транзитивности и интранзитивности, то, что составляет предмет эргодической теории, и связанной с этими понятиями другого фундаментального понятия — неинтегрируемости. Четвертая лекция отведена приложению изложенных в предыдущих лекциях основ теории динамических систем к конкретной фундаментальной задаче — проблеме трех тел и ее обобщений. Весь материал этих четырех лекций составил ядро основного труда Биркгофа *Динамические системы*, который вышел в 1927 г. [18]. Этот труд явился итогом его исследований более, чем за полтора десятилетия.

Периодические движения находятся в центре внимания Биркгофа и в его последующих исследованиях [25]–[28]. Биркгоф развивает идею Пуанкаре об аппроксимации любого движения динамических систем периодическими движениями. Он показал, что в системе с двумя степенями свободы при наличии устойчивой периодической траектории в ее окрестности существует бесконечное множество устойчивых периодических движений, но вопрос плотности этого множества остается открытым. Особенно примечателен, написанный на французском языке, большой мемуар Биркгофа 1935 г. [28]. По непонятным причинам он незаслуженно менее известен, чем *Динамические системы* [18], и значительно меньше цитируется. Между тем, у этого мемуара богатое содержание. Биркгоф дает общую классификацию периодических движений; систематически исследует гиперболические и эллиптические случаи, отличая их фундаментальные различия; устанавливает плотность асимптотических решений. Очень важным является следующий результат: при итерациях отображения  $T_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) всегда существует бесконечное множество гиперболических неподвижных точек; из наличия одной эллиптической неподвижной точки следует существование бесконечного множества таких точек. Здесь упомянуто только главное из богатства этого мемуара. Более или менее подробный разбор потребует не одной статьи.

Теорема Пуанкаре–Бирхгофа нашла широкое применение в изучении сложного поведения динамических систем (см., например, [29, 30]). В интегрируемых гамильтоновых системах с  $N$  степенями свободы движение является условно-периодическим с  $N$  частотами  $\omega_i$  и траектории лежат на  $N$ -мерном торе. При наложении возмущения система становится неинтегрируемой. Решающее значение здесь имеют резонансы. Для двух степеней свободы с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  резонансы имеют место при условии  $l\omega_1 + m\omega_2 = 0$ , где  $l$  и  $m$  — целые числа, т.е. отношение частот (число вращения)  $\rho = \omega_1/\omega_2$  является рациональным и движение периодическое. При иррациональном отношении частот имеем квазипериодическое движение, плотно заполняющее поверхность тора. Резонансы являются основной причиной неинтегрируемости, что было установлено еще Пуанкаре, и приводят к расходимости рядов теории возмущений. Согласно теории КАМ при наложении возмущения большинство (в смысле меры) нерезонансных торов сохраняется и лишь деформируется, резонансные торы, мера которых  $\delta\Gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ , когда параметр возмущения  $\varepsilon \rightarrow 0$ , являются структурно неустойчивыми и они разрушаются.

Именно теорема Пуанкаре — Биркгофа лежит в основе понимания механизма разрушения резонансных торов, в возникновении сложного поведения системы. Как уже говорилось, характер неподвижных точек при отображении кольца бывают двух типов, качественно отличных друг от друга: гиперболические и эллиптические точки [18, 28]. В. И. Арнольд провел подробное исследование эллиптической точки общего вида и доказал ее устойчивость [31]. На современном языке все это можно представить следующим образом. Рассмотрение динамики системы упрощается при использовании сечения Пуанкаре, когда движение описывается рекуррентными соотношениями с дискретным временем. Для двумерных систем картина становится совершенно наглядной. Теореме Пуанкаре — Биркгофа для данного случая можно сформулировать следующим образом: в возмущенной системе с числом вращения  $\rho = \omega_1/\omega_2$  при итерациях отображения в сечении Пуанкаре имеется  $2k$  неподвижных точек. Половину из них составляют устойчивые эллиптические точки, другую половину — неустойчивые гиперболические точки. В окрестности гиперболической точки имеется четыре инвариантных

направления (ветви сепаратрисы), два из которых устойчивы и входят в гиперболическую точку, а два неустойчивы и выходят из нее (Рис. 1, 2). Пуанкаре показал, что пересечение ветвей сепаратрисы приводит к крайне сложной картине поведения системы [1, Т. 2. С. 339].

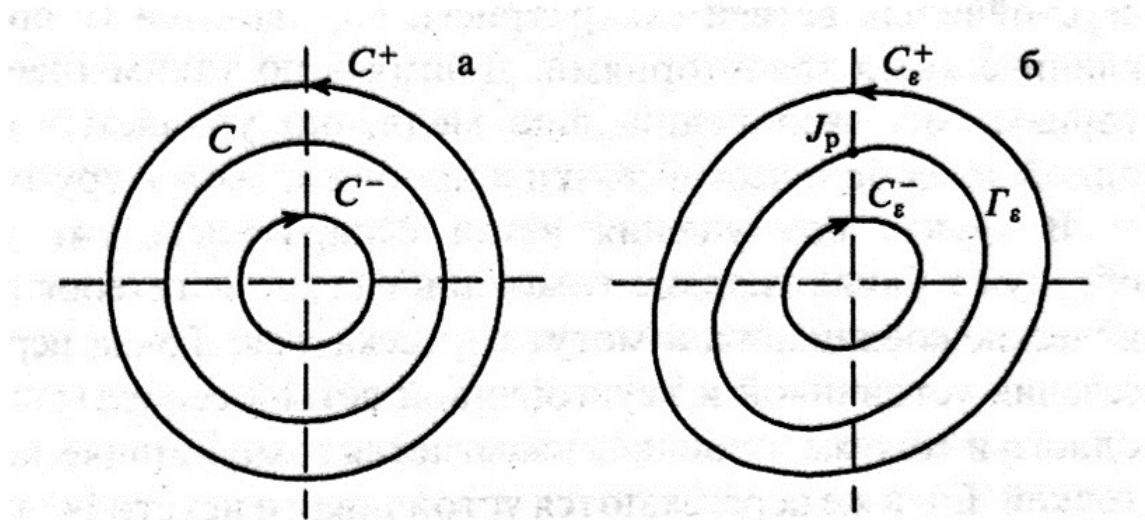


Рис. 1: (а)  $C, C^+, C^-$  невозмущенные отображения  $P_0$  при  $\rho = l/m$ ,  $\rho > l/m$  и  $\rho < l/m$  соответственно, (б) – результат действия возмущения  $P_\epsilon$  [32].

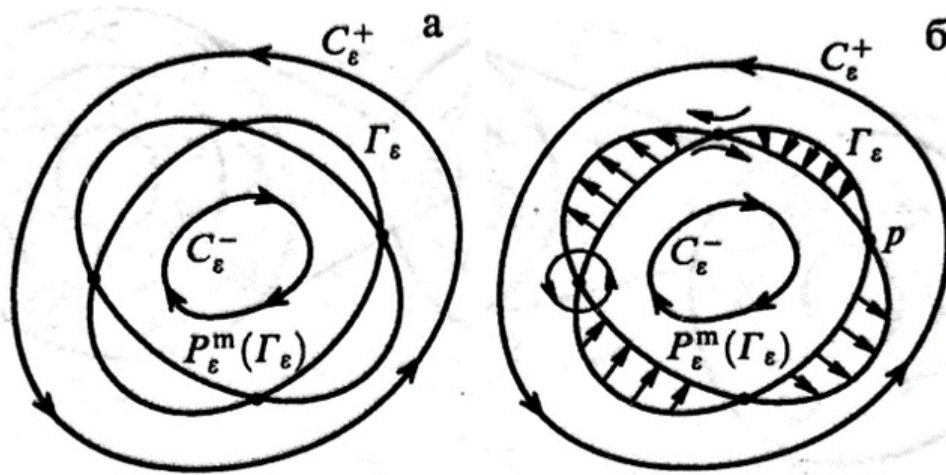


Рис. 2: Преобразование кривой  $\Gamma_\epsilon$  в кривую  $P_\epsilon(\Gamma_\epsilon)$  при действии отображения  $P_\epsilon$  (а) и возникновение при этом гиперболической и эллиптической точки (б) [32]

Каждая эллиптическая точка окружена инвариантными относительно  $m$ -кратной последовательности итераций отображения  $P_\epsilon^m$  замкнутыми траекториями, которые образуют островки устойчивости. Такая ситуация характерна для нелинейных систем в окрестности резонанса при малом возмущении. Каждый островок окружен вторичной цепочкой эллиптических и гиперболических точек и т.д., и он в миниатюре воспроизводит всю структуру в целом (Рис. 3). Насколько известно автору, картину в такой форме впервые представил Арнольд в своих лекциях в 1965 г. [33].

В реальных системах тоже присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Наличие этих островков влияет на близлежащие траектории, что приводит к изменению структуры фазового пространства. Особую проблему

составляет граничная область вблизи островков. Вокруг выбранного островка существует цепочка вторичных островков, которые в свою очередь окружены цепочками следующего уровня и т.д. Таким образом, имеется сложная самоподобная иерархическая структура (Рис. 4).

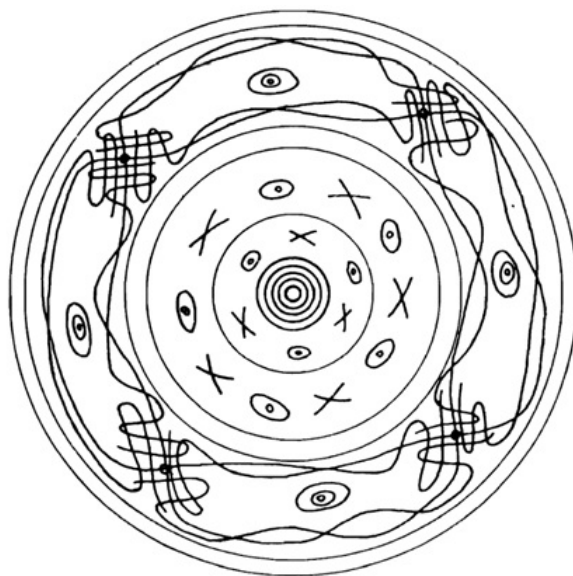


Рис. 3: Неподвижные точки отображения и регулярные и хаотические траектории [33]

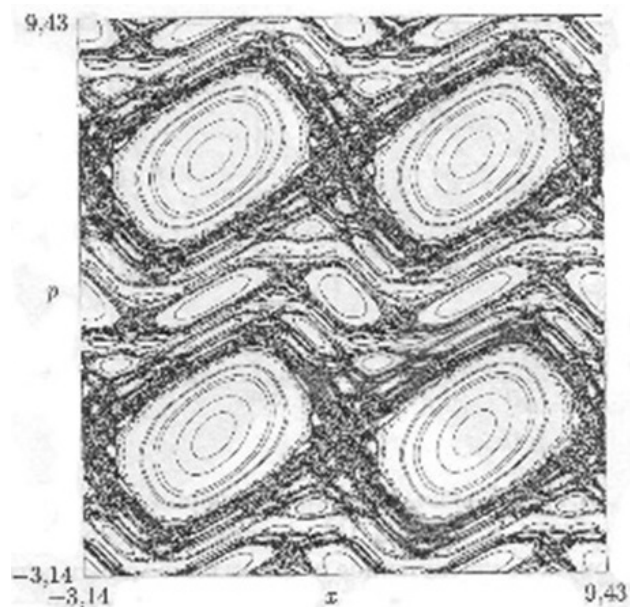


Рис. 4: Стохастическое “море” и островки устойчивости в разделенном фазовом пространстве [34]

Представленную математическую модель можно применить к конкретным физическим системам. Пуанкаре принадлежит глубокое замечание, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой [18, С. 255], и рассмотрим тот случай, который относят к сильной неинтегрируемости. При величине параметра стохастичности  $K \gg 1$  по Заславскому и Чирикову система становится локально неустойчивой почти всюду [29]. Под почти всюду понимается не исключение областей нулевой меры, как принято в эр-

голической теории, а относится к областям малой, но конечной меры. Это незначительное, на первый взгляд, различие приводит к очень важным последствиям. Эргодическая теория дает статистическое описание динамических систем, когда сложное поведение, хаотичность присутствует, так сказать, в “чистом виде”. Простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и хаоса с более или менее четко выраженной границей, является сильно идеализированным представлением. Реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области устойчивого движения малой меры.

Разделенное фазовое пространство, другими словами, сосуществование областей с регулярным и хаотическим движением представляет одну из самых удивительных особенностей хаоса и одновременно является главным препятствием для математически строгого описания. Последнее казалось бы, можно осуществить выделением областей с регулярным движением, что относится к случаю интегрируемых систем, а для нерегулярного движения использовать статистическое описание. Однако простое исключение из области неустойчивости “вкрапленных” с регулярным движением не приводит к упрощению ситуации, поскольку эргодическая компонента заполняет область фазового пространства очень сложной формы. Часть фазового пространства с хаотической динамикой получила название стохастического моря (Рис. 4). Если вспомнить, что островок в стохастическом море соответствует области начальных условий, при которых движение является регулярным, то становится ясным условность понятия интегрируемости в системах с разделенным фазовым пространством. Эта условность представляет отражение того факта, что регулярная и хаотическая компонента переплетены, обладают очень сложной топологией, которая трансформируется при изменении параметров системы.

История теоремы Пуанкаре — Биркгофа далеко не закончена. До сих пор рассматривался простейший вариант теоремы. Но она допускает глубокие обобщения и позволяет установить нетривиальные связи с различными разделами математики. Рассмотрение таких обобщений — это уже отдельная история, поэтому ограничимся только несколькими замечаниями. Теорема Пуанкаре — Биркгофа тесно связана с симплектической геометрией [35]–[37]. В этом случае круговое кольцо заменяется компактным замкнутым симплектическим многообразием. Было установлено, что гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм компактного симплектического многообразия  $M^{2n} \rightarrow M^{2n}$  имеет по меньшей мере столько критических точек, сколько критических точек у гладкой функции на этом многообразии. При применении к двумерному тору  $M^2 = T^2$  этот результат дает на торе 4 неподвижные точки, а в кольце — две [35]–[38]. Очень вероятно, что периодические траектории гамильтоновых систем общего положения всюду плотны, но это еще не доказано. По поводу обобщений можно сказать, что «развивающие эту тему работы Хофера, Флоера, Громова, Элиашберга, Витербо, Вейнстана, Гивенталья и др. уже могли бы составить целую книгу» [36, С. 393]. Современная математика в значительной степени развивается в освоении наследия Пуанкаре, которое еще далеко не исчерпано. Геометрическая теорема в этом процессе занимает важнейшее место.

Выражаю благодарность участникам XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия» (Тула, 2021) за обсуждение доклада, который положен в основу данной работы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // А. Пуанкаре. Избранные труды. М.: Наука. Т. I. 1971. 772 с.; Т. II. 1972. 998 с.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 690 с.
3. Идельсон Н.И. Закон всемирного тяготения и теория движения Луны // Н.И. Идельсон. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука, 1975. С. 205–272.

4. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équation differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. pp. 375–422; 1882. V. 8. pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. pp. 167–244; 1886. V. 2. pp. 151–217 / Рус. пер.: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
5. Субботин М.Ф. Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. Сб. в честь 250-летия со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 268–376.
6. Lagrange J.L. Essai sur le Problème des trois Corps // Oeuvres de Lagrange. T. VI. Paris, 1873. pp. 229–234.
7. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. V. 1. pp. 5–2, 129–147, 245–260.
8. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Comp. Rend. 1883. T. 97. pp. 251–252.
9. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Bull. astronom. 1884. T. 1. pp. 65–74.
10. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. V. 13. pp. 1–270.
11. Маршал К. Задача трех тел. Москва-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2004. 640 с.
12. Poincaré H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action // Comp. Rend. 1896. T. 123. pp. 915–918.
13. Шенсине А. Об одной заметке Пуанкаре // Нелин. динамика. 2005. Т. 1. № 1. С. 143–154.
14. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposees et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. pp. 27–73.
15. Poincaré H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. 1905. V. 6. pp. 237–274. / Рус пер.: А.Пуанкаре. Избр. труды: Т. 2. -М.: Наука, 1972. С. 735–774.
16. Пуанкаре А. Наука и метод // А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983. С. 284–403.
17. Poincaré H. Sur un théorème de géometrie // Rendicont. Circolo mat. Palermo. 1912. V. 33. pp. 375–407. / Рус. пер.: Об одной геометрической теореме / Последние работы А. Пуанкаре. Ижевск: РХД, 2001. С. 112–150.
18. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
19. Birkhoff G.D. Proof of Poincare's geometric theorem // Trans. AMS. 1913. V.14. pp. 14–22.
20. Veblen O. George David Berkhoff // Biograph. Memoirs. The National Academy Press, 2001. V. 80. pp. 2–14.
21. Birkhoff G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. pp. 297–311.
22. Brown M., Neumann W.D. Proof of Poincare-Birkhoff fixed point theorem // Michigan Math. J. 1977. V. 24. pp. 21–31.

23. Кириллов А.Н. Последняя геометрическая теорема Пуанкаре: история и драма идей / Семинар по истории математики. 7 сентября 2017 г. СПб., ПОМИ, Фонтанка 27.
24. Hurvitz W.A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. pp. 65–71.
25. Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems // Acta Math. 1927. V. 50. pp. 359–379.
26. Birkhoff G.D. A remark on the dynamical rule of Poincaré's last geometric theorem // Acta litt. ac Scientiarum, sect. Scientiarum math. Szeged, 15 Aug. 1928. V. 4. pp. 6–11.
27. Birkhoff G.D., Smith P. Structure Analysis of Surface Transformations // J. Math. Pures Appl. 1928. V. 9. pp. 345–379.
28. Birkhoff G.D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques // Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei. 1935. P. 3. V.1. pp. 85–216.
29. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук. 1971. Т.105. В. 1. С. 3–39.
30. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
31. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
32. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 9. С. 989–1015.
33. Arnold V.I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1968. 286 p.
34. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2004. 288 с.
35. Арнольд В.И. Первые шаги симплектической топологии // УМН. 1986. Т. 41. В. 6. С. 3–18.
36. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
37. Арнольд В.И. Недооцененный Пуанкаре // УМН. 2006. Т. 61. В. 1. С. 3–24.
38. Cohnley C.C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold // Invent. Math. 1983. V. 73. pp. 33–49.

## REFERENCES

1. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1892. Tome 1. 408 p. 1893. Tome II. 500 p. 1899. Tome III. 429 p.
2. Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy. N.Y.: Daniel Adee, 1846. 575 p.
3. Idelson N.I. The law of universal gravitation and the theory of the motion of the moon // N.I. Idelson. Studies on the history of celestial mechanics. Moscow: Nauka, 1975. pp. 205–272 (in Russian).



4. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équation differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. pp. 375–422; 1882. V. 8. pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. pp. 167–244; 1886. V. 2. pp. 151–217
5. Subbotin M.F. Astronomical works of Leonard Euler // Leonard Euler. Collection in honor of the 250th birthday anniversary. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1958, pp. 268–376 (in Russian).
6. Lagrange J.L. Essai sur le Problème des trois Corps // Oeuvres de Lagrange. T. VI. Paris, 1873. pp. 229–234.
7. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. V. 1. pp. 5–26, 129–147, 245–260.
8. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Comp. Rend. 1883. T. 97. pp. 251–252.
9. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Bull. astronom. 1884. T. 1. pp. 65–74.
10. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. V. 13. pp. 1–270.
11. Marshal C. The there-body problem. Amsterdam: Elsevier, 1990. 575 p.
12. Poincaré H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action // Comp. Rend. 1896. T. 123. pp. 915–918.
13. Chenciner A. A note by Poincaré // Nonlin. dyn. 2005. V. 1. N. 1. pp. 143–154 (in Russian).
14. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. pp. 27–73.
15. Poincaré H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. 1905. V. 6. pp. 237–274.
16. Poincaré A. Science and Method. London : T. Nelson, 1914. 296 p.
17. Poincaré H. Sur un théorème de géometrie // Rendicont. Circolo mat. Palermo. 1912. V. 33. pp. 375–407.
18. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhod Island: AMS, 1927. IX - 295 p.
19. Birkhoff G.D. Proof of Poincare's geometric theorem // Trans. AMS. 1913. V.14. pp. 14–22.
20. Veblen O. George David Berkhoff // Biograph. Memoirs. The National Academy Press, 2001. V. 80. pp. 2–14.
21. Birkhoff G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. pp. 297–311.
22. Brown M., Neumann W.D. Proof of Poincare-Birkhoff fixed point theorem // Michigan Math. J. 1977. V. 24. pp. 21–31.
23. Kirillov A.N. Poincaré's last geometric theorem: history and drama of ideas / Seminar on the history of mathematics. September 7, 2017 St. Petersburg, POMI, Fontanka 27 (in Russian).

24. Hurvitz W.A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. pp. 65–71.
25. Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems // Acta Math. 1927. V. 50. pp. 359–379.
26. Birkhoff G.D. A remark on the dynamical rule of Poincaré's last geometric theorem // Acta litt. ac Scientiarum, sect Sciantiarum math. Szeged, 15 Aug. 1928. V. 4. pp. 6–11.
27. Birkhoff G.D., Smith P. Structure Analysis of Surface Transformations // J. Math. Pures Appl. 1928. V. 9. pp. 345–379.
28. Birkhoff G.D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques // Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei. 1935. S. 3. V.1. pp. 85–216.
29. Zaslavsky G.M., Chirikov B.V. Stochastic instability of nonlinear oscillations // Soviet Physics. Uspekhi. 1971. V. 105. Issue 1. pp. 3–39.
30. Likhtenberg A., Liberman M. Regular and stochastic dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 692 p.
31. Arnold V.I. On the stability of equilibrium positions of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1961. T. 137. No. 2. pp. 255–257 (in Russian).
32. Loskutov A.Yu. Dynamic chaos. Systems of classical mechanics // Soviet Physics. Uspekhi. 2007. T. 177. No. 9. P. 989–1015 (in Russian).
33. Arnold V.I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1968. 286 p.
34. Zaslavsky G.M. Physics of chaos in Hamiltonian systems. L.: Imperial College Press, 1998. 315 p.
35. Arnold V.I. First steps of symplectic topology // Russian Math. Survey. 1986. V. 41. Issue 6. pp. 3–18 (in Russian).
36. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 464 p.
37. Arnold V.I. Underestimated Poincaré // Russian Math. Survey. 2006. V. 61. Issue 1. pp. 3–24 (in Russian).
38. Cohnley C.C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold // Invent. Math. 1983. V. 73. pp. 33–49.

Получено 16.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-223-235

**О возможности использования метода NACE при проведении ускоренных испытаний арматурного проката на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание**

Н. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов,  
А. Н. Чуканов, Д. С. Клементьев

**Сергеев Николай Николаевич** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: technology@tspu.tula.ru*

**Кутепов Сергей Николаевич** — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: kutepov.sergei@mail.ru*

**Сергеев Александр Николаевич** — доктор педагогических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: ansergueev@mail.ru*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Протопопов Евгений Александрович** — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: pea\_12@mail.ru*

**Чуканов Александр Николаевич** — доктор технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: alexchukanov@yandex.ru*

**Клементьев Денис Сергеевич** — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: denis.klementev.93@mail.ru*

**Аннотация**

В статье представлен анализ возможности использования стандарта NACE Standard TM0177-2005 при проведении ускоренных лабораторных испытаний на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание арматурного проката. Показано, что применение стандарта NACE при ускоренных лабораторных испытаниях арматурных сталей нецелесообразно, вследствие специфического размера и геометрии образцов для испытаний, не позволяющих приблизить условия испытания к реальным и значительного времени испытания.

**Ключевые слова:** водородное охрупчивание, коррозионное растрескивание, скорость деформации, арматурная сталь.

**Библиография:** 17 названий.

**Для цитирования:**

Н. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, А. Н. Чуканов, Д. С. Клементьев. О возможности использования метода NACE при проведении ускоренных испытаний арматурного проката на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 223–235.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-223-235

**About the possibility of using the NACE method when conducting accelerated tests of rebar rolled products for hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking**

N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov,  
A. N. Chukanov, D. S. Klement'yev

**Sergeev Nikolay Nikolaevich** — doctor of technical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: technology@tspu.tula.ru*

**Kutepov Sergey Nikolaevich** — candidate of pedagogical science, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: kutepov.sergei@mail.ru*

**Sergeev Aleksandr Nikolaevich** — doctor of pedagogical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: ansergueev@mail.ru*

**Gvozdev Aleksander Evgenyevich** — doctor of technical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru*

**Protopopov Evgeny Aleksandrovich** — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: pea\_12@mail.ru*

**Chukanov Aleksandr Nikolaevich** — doctor of technical science, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: alexchukanov@yandex.ru*

**Klement'yev Denis Sergeevich** — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: denis.klementev.93@mail.ru*

**Abstract**

The article presents an analysis of the possibility of using the NACE Standard TM0177-2005 standard during accelerated laboratory tests for hydrogen embrittlement and corrosion cracking of rebar rolled products. It is shown that the use of the NACE standard in accelerated laboratory tests of reinforcing steels is impractical, due to the specific size and geometry of the test samples, which do not allow to bring the test conditions closer to real and a significant test time.

**Keywords:** hydrogen embrittlement, corrosion cracking, deformation rate, reinforcing steel.

**Bibliography:** 17 titles.

**For citation:**

N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, A. N. Chukanov, D. S. Klement'yev, 2022, "About the possibility of using the NACE method when conducting accelerated tests of rebar rolled products for hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 223–235.

## 1. Введение

Жесткие требования по снижению металлоемкости и себестоимости современных и перспективных изделий и конструкций определили резкое возрастание спроса на высокопрочные арматурные стали. Однако в большинстве случаев повышение прочностных характеристик приводит к снижению запаса пластичности и повышению чувствительности материала к хрупкому разрушению. Процесс хрупкого разрушения высокопрочных сталей, как правило, осуществляется по механизму замедленного разрушения, при напряжениях, значительно меньше предела текучести под действием постоянной статической нагрузки спустя некоторое время после нагружения. Особую опасность при этом вызывает замедленное хрупкое разрушение, вызванное совместным воздействием растягивающих напряжений и агрессивных водородсодержащих сред [1, 2].

Основным способом изучения процесса коррозионно-механического разрушения арматурных сталей в водородосодержащих средах является оценка изменения их физико-механических свойств после наводороживания. Из анализа экспериментальных данных по влиянию водорода на свойства сталей следует, что при кратковременных механических испытаниях водородная хрупкость проявляется главным образом в снижении пластичности, а такие механические характеристики как прочность, текучесть, твердость, модуль нормальной упругости существенно не меняются при умеренном наводороживании. Из этого следует, что для оценки влияния водорода рационально использовать все методы испытаний, характеризующие пластичность сталей: испытания на изгиб, растяжение для определения относительного удлинения, сужения и др. [2, 3].

При моделировании процесса водородного растрескивания весьма важным аспектом является разработка соответствующей процедуры испытаний, поскольку от принятого варианта испытаний зависит чистота эксперимента и возможность прогнозирования реального времени до разрушения при водородном растрескивании. Анализ существующих методов коррозионно-механических испытаний показывает, что в России имеется сравнительно малое число ГОСТов, регламентирующих их проведение. Основными ГОСТами, регламентирующими проведение коррозионно-механических испытаний, являются: ГОСТ 9.901.1-89, ГОСТ 9.901.4-89, ГОСТ 9.903-81, ГОСТ Р 53679-2009, ГОСТ Р 9.915-2010. Среди зарубежных ГОСТов следует отметить стандарты ASTM F519-13, ASTM F519-17, NACE Standard TM0177-2005, регламентирующие проведение испытаний на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание.

Многообразие условий, при которых возникает хрупкое разрушение металлических деталей и конструкций, породило большое количество методов определения характеристик КМР. Ускоренные лабораторные испытания проводятся на оборудовании, в котором напряженное состояние образца достигается различными способами. В зависимости от способа создания напряженного состояния (одноосное растяжение, растяжение при изгибе и натяжение на неподвижные опоры) в процессе эксперимента может изменяться как уровень растягивающих напряжений, так и деформация образца [1, 2].

Поэтому выбор типа испытательных образцов и метода проведения ускоренных лабораторных испытаний на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание является весьма актуальной задачей при организации коррозионно-механических испытаний.

Цель настоящей работы – анализ применимости стандарта NACE Standard TM0177-2005 для испытаний стальной стержневой арматуры на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание.

## 2. Анализ стандарта «NACE Standard TM0177-2005»

За рубежом одним из наиболее часто используемых методов проведения лабораторных испытаний на водородное охрупчивание и коррозионное растрескивание под напряжением (КРН) является метод испытания с медленной скоростью деформации (Slow Strain Rate Test – SSRT).

С целью усовершенствования технологии испытаний для определения склонности легированных материалов к КРН с учетом взаимодействия механических нагрузок и агрессивных сред впервые в 1960-х годах было проведено испытание с медленной скоростью деформации. Одной из наиболее примечательных особенностей является скорость испытания, при которой экспериментальные результаты могут быть получены в течение определенного времени эксперимента [4]. Метод SSRT требует меньше финансовых ресурсов, чем испытания на распространение трещин по механике разрушения, потому что геометрия образца и процедура испытаний более просты [5]. По этим причинам метод SSRT был принят для испытаний материалов, которые работают в условиях эксплуатации близких к условиям коррозионного растрескивания под напряжением.

Сущность метода заключается в том, что испытуемый образец непрерывно перемещается с постоянной скоростью деформации до полного разрушения. Данный метод испытаний очень привлекателен, поскольку он дает окончательный ответ в течение относительно короткого времени на вопрос о том, проявляет ли система сплав – окружающая среда восприимчивость к КРН [6]. Время до разрушения материала обычно используется для того, чтобы сделать выводы о свойствах материала в конкретных условиях испытаний, поскольку оно может быть получено сразу после разрушения образца. Кроме того, параметры пластичности испытуемого образца, такие как сужение или удлинение, могут быть легко измерены после завершения испытания.

Поскольку этот метод испытаний наиболее чувствителен к скорости деформации, которая играет значительную роль в контроле времени до разрушения материала, необходимо предварительно определить соответствующую скорость деформации, чтобы гарантировать, что разрушение образца полностью вызвано совместным воздействием механических нагрузок и агрессивной среды.

Например, когда испытание проводится при относительно высоких скоростях деформации, разрушение материала не зависит от воздействия агрессивной среды, которое является основной причиной развития процесса КРН, поскольку для взаимодействия между материалами и окружающей средой требуется достаточный период времени. Поэтому разрушение за счет механизма коалесценции микропор на поверхности разрушения обычно обнаруживается и используется для описания процесса разрушения образца при быстром разрыве (вязкое разрушение). Разрушение образца при КРН может произойти при использовании соответствующей скорости деформации, поскольку необходимо обеспечить достаточное время для взаимодействия агрессивной среды, материала и механической нагрузки. Тем не менее, следует отметить, что скорость деформации не должна быть слишком низкой, поскольку в этом случае испытания занимают слишком большой промежуток времени.

В зависимости от конкретных условий испытаний и исследуемых материалов для SSRT-метода обычно рекомендуются постоянные скорости деформации в диапазоне от  $1,0 \cdot 10^{-5}$  до  $1,0 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$  для оценки чувствительности металлов и сплавов к растрескиванию, вызванного коррозионно-механическим воздействием [5-7].

Образцы для испытания методом SSRT на растяжение могут быть изготовлены в различных формах в зависимости от стандартных испытаний и заданных материалов. Основой для проведения испытаний служит NACE Standard TM0177-2005 «Laboratory Testing of Metals for Resistance to Sulfide Stress Cracking and Stress Corrosion Cracking in H<sub>2</sub>S Environments» (Лабораторные испытания металлов на устойчивость к сульфидному растрескиванию под на-

пряжением и КРН в сероводородсодержащих средах).

Данный стандарт был установлен Национальной ассоциацией инженеров по коррозии (NACE) для оценки чувствительности металлических материалов к сульфидному КРН в водородсодержащей среде. Основные положения этого стандарта можно свести к следующему:

1. Анизотропия материала по отношению к механическим свойствам и чувствительности к коррозионному растрескиванию является важным параметром. Характер распространения трещин в испытуемом образце должен соответствовать характеру распространения трещин, наблюдаемых в реальных условиях эксплуатации металлического изделия.

2. Гальванические эффекты между разнородными металлами могут либо ускорять, либо уменьшать чувствительность к растрескиванию: например, ускорение чувствительности к растрескиванию может иметь место в некоторых сплавах на основе никеля, когда они контактируют с электрохимически менее активными сплавами, например, низколегированной сталью, тогда как чувствительность к растрескиванию дуплексных нержавеющей сталей, соединенных с электрохимически менее активным сплавом, может быть уменьшена.

3. Температура испытания может повлиять на чувствительность к растрескиванию. Испытания при температурах выше  $+23\text{ }^{\circ}\text{C}$  снижают чувствительность исследуемых материалов (сталей) к растрескиванию, в то время как чувствительность к растрескиванию может быть значительно повышена, если испытание проводится при температурах ниже  $23\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

4. Различные методы испытаний могут не обязательно обеспечивать одинаковое время до разрушения однотипных материалов.

5. Неоднородная структура испытуемых материалов, например, сварных соединений, может привести к отклонению результатов испытаний.

6. Максимальные напряжения без разрушения в течение определенного периода воздействия следует рассматривать как кажущееся пороговое напряжение. Более длительное время выдержки или большее количество образцов могут привести к более низким пороговым значениям.

7. Результаты испытаний на сульфидное коррозионное растрескивание под напряжением могут обладать широким разбросом времени до разрушения. Повторные испытания необходимы для получения качественных значений, применимых для характеристики чувствительности материала к растрескиванию.

8. Время испытания варьируется в широких пределах в зависимости от различных типов испытаний (растяжение, изгиб) на коррозионное растрескивание под напряжением.

Стандарт устанавливает четыре метода испытаний на стойкость металлов и сплавов к растрескиванию: 1) стандартное испытание на растяжение (метод А); 2) стандартное испытание балки на изгиб (метод В), 3) стандартное испытание С-образных колец (метод С) и стандартное испытание двойной консольной балки (DCB) (метод D). Наиболее широкое применение нашел метод А. Рассмотрим основные особенности данного метода.

При изготовлении стандартного образца для испытаний методом А необходимо учитывать следующие моменты:

1. Влияние размера и формы образца – рабочая длина образца имеет длину 25,4 мм, а диаметр образца на этом участке составляет 6,4 мм и длину 25,4 мм.

2. Радиус кривизны на обоих концах образца для испытаний должен составлять не менее 15 мм, чтобы избежать высокой концентрации напряжений и разрушения в месте скругления.

3. Концы образца должны быть достаточно длинными, чтобы на них помещались уплотнения для коррозионной камеры, и чтобы они прочно удерживались в захватах испытательной машины.

4. Механическую обработку испытуемого образца необходимо производить осторожно, чтобы избежать перегрева и холодной обработки. Из последних двух проходов образца следует удалить не более 0,05 мм. Шлифование также допустимо. Шероховатость поверхности образца должна быть ниже 0,81 мкм.

5. Образец следует обезжирить перед установкой в испытательную камеру. Измерительную секцию не следует трогать или загрязнять после очистки.

Электролитический раствор для испытания на растяжение по стандарту NACE должен состоять из 5,0% масс. NaCl и 0,5% масс. уксусной кислоты в дистиллированной или деионизированной воде. Для получения точных результатов испытания процедуру испытания следует выполнять шаг за шагом следующим образом:

1. Измерение диаметра испытуемого образца для расчета нагрузки на образец в соответствии с требуемым уровнем напряжения.

2. Установка образца в коррозионную камеру и последующая ее герметизация во избежание загрязнения среды в камере в процессе испытания.

3. Внешнее растягивающее напряжение прикладывается к испытуемому образцу с небольшим увеличением монотонного смещения, но следует соблюдать осторожность, чтобы не превысить требуемый уровень напряжения.

4. Коррозионная камера немедленно заполняется деаэрированным раствором. Этот раствор следует продувать инертным газом в течение не менее 20 мин, чтобы убедиться, что испытуемый раствор не содержит кислорода перед введением сероводорода. Затем коррозионный раствор насыщают со скоростью от 100 до 200 мл·мин<sup>-1</sup> в течение 20 мин на литр коррозионного раствора.

5. Испытания считают успешным, если произошло разрушение образца или же он не разрушился в течение 720 ч испытаний. Если образец разрушился при времени испытания менее 720 ч, материал, из которого он изготовлен, считают нестойким к сульфидному коррозионному растрескиванию. Если же образец прошел испытания в течение 720 ч без разрушения, проводят его визуальный осмотр для выявления признаков растрескивания.

Время до разрушения представляется очень полезным и гораздо более применимым для оценки чувствительности материалов к коррозионному растрескиванию, вызванному взаимодействием механических нагрузок и агрессивных сред, и поэтому его следует регистрировать с помощью систем регистрации времени.

Исходя из вышеизложенного можно выделить следующие достоинства и недостатки данного метода испытаний:

– *достоинства*: возможность уменьшения продолжительности испытания за счет контроля скорости деформации; получение качественных данных для оценки стойкости материала к коррозионному растрескиванию; изменчивость условий испытаний в зависимости от конкретных условий;

– *недостатки*: значительная трудоемкость процесса; специфические размеры и геометрия образца для коррозионно-механических испытаний; высокие требования к контролю процесса коррозионного растрескивания и водородного охрупчивания во избежание получения некорректных результатов испытаний.

### 3. Влияние масштабного фактора поверхности на чувствительность арматурной стали к водородному охрупчиванию

Поскольку особенностью стержневой арматуры железобетона является периодический профиль, сформированный в процессе горячей прокатки, совершенно очевидно, что не учитывать эту особенность при исследовании процессов коррозионного растрескивания и водородного охрупчивания будет большой ошибкой.

Для определения влияния состояния поверхности и масштабного фактора на длительную коррозионную прочность в среде, вызывающей водородное охрупчивание, была выбрана арматурная сталь марки 20ГС2 (четыре плавки). Химический состав исследуемых плавок приведен в табл. 1.



Таблица 1: Химический состав и механические свойства исследованных плавок стали 20ГС2

| № плавки | Содержание элементов, % |      |      |       |       | Механические свойства |                      |                | Вид обработки поверхности, диаметр  |
|----------|-------------------------|------|------|-------|-------|-----------------------|----------------------|----------------|-------------------------------------|
|          | C                       | Mn   | Si   | S     | P     | $\sigma_B$ , МПа      | $\sigma_{0,2}$ , МПа | $\delta_5$ , % |                                     |
| 1        | 0,19                    | 1,13 | 2,17 | 0,040 | 0,016 | 1300                  | 1200                 | 14,3           | ВТМО, периодический профиль, Ø10 мм |
| 2        | 0,18                    | 1,30 | 2,04 | 0,032 | 0,017 | 1200                  | 1080                 | 15,0           | Гладкокатанная, Ø10 мм              |
| 3        | 0,20                    | 1,08 | 1,62 | 0,029 | 0,015 | 1280                  | 1130                 | 15,2           | Периодический профиль, Ø12 мм       |
| 4        | 0,23                    | 1,20 | 2,00 | 0,026 | 0,014 | 1300                  | 1180                 | 14,8           | Периодический профиль, Ø14 мм       |

Испытаниям подвергли натурные образцы ( $l = 300 \dots 400$  мм) различного диаметра (10, 12 и 14 мм) с гладкокатаным и с периодическим профилем (рис. 1, а,б). Также из натурных стержней (гладкокатанных и с периодическим профилем) диаметром 10, 12 и 14 мм были изготовлены образцы (рис. 1, в) с диаметром рабочей части от 6 до 10 мм через 1 мм с чистотой поверхности Ra 2,5.

По расположению этих кривых видно, что увеличение диаметра испытываемых образцов от 6 мм до исходного размера стержневой арматуры повышает длительную коррозионную прочность. Причем увеличение стойкости для образцов гладкокатанной стали значительно больше, чем с периодическим профилем. Отсюда следует, что несмотря на то, что точеные образцы Ø6 мм, изготовленные из арматурной стали периодического профиля, имеют лучшую стойкость по сравнению с точеными образцами из гладкокатанной стали; натурные образцы с периодическим профилем наоборот имеют меньшую стойкость, чем гладкокатаные натурные образцы. Это можно объяснить тем, что элементы периодического профиля являются концентраторами напряжений, наличие которых облегчает и ускоряет зарождение и развитие субмикротрещин и микротрещин [1, 8].

Длительную коррозионную прочность оценивали временем до разрушения по результатам испытаний трех-четырех образцов на каждую точку графика. Для создания условий эксперимента, максимально приближенных к эксплуатационным, испытания проводили в водном растворе серной кислоты с добавлением роданистого аммония (4,5 %  $H_2SO_4$  + 2,5 %  $NH_4CNS$ ) при комнатной температуре с катодной поляризацией  $j_K = 60$  А/м<sup>2</sup> и различном уровне растягивающих напряжений  $\sigma_{\Sigma} = 300 \dots 1000$  МПа. Данная среда была выбрана согласно рекомендациям, приведенным в работе [1].

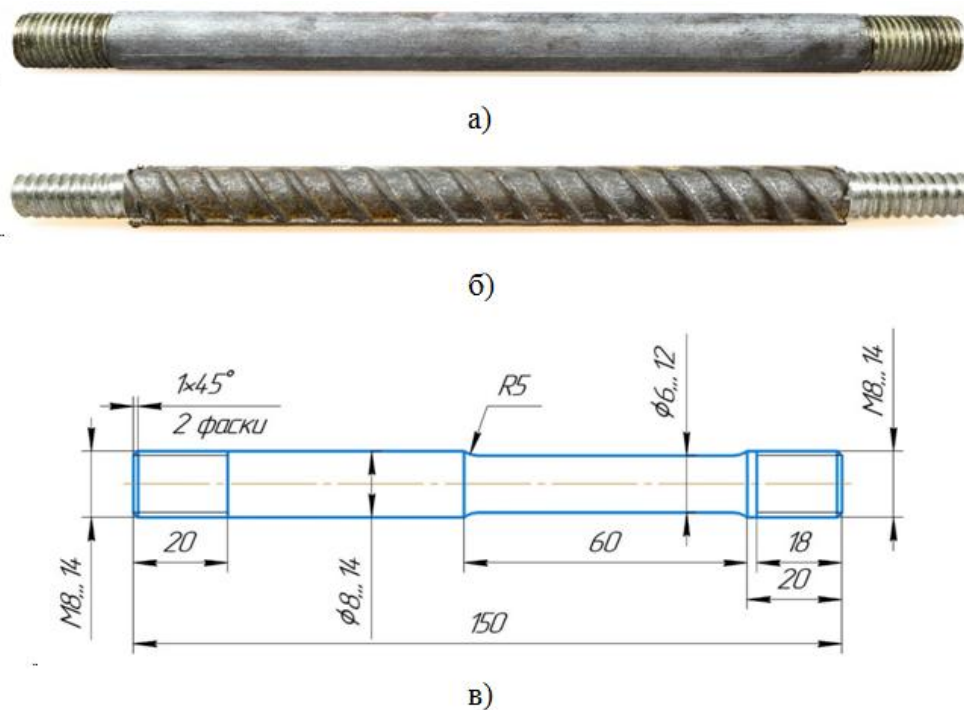


Рис. 1: Образцы для коррозионно-механических испытаний: а) натуральный гладкокатанный; б) натуральный периодической профиля; в) эскиз точеного образца

На рис. 2 представлены кривые длительной коррозионной прочности, отображающие стойкость натуральных образцов гладкокатанных и с периодическим профилем в зависимости от уровня растягивающих напряжений (на каждую точку было испытано по 4 образца).

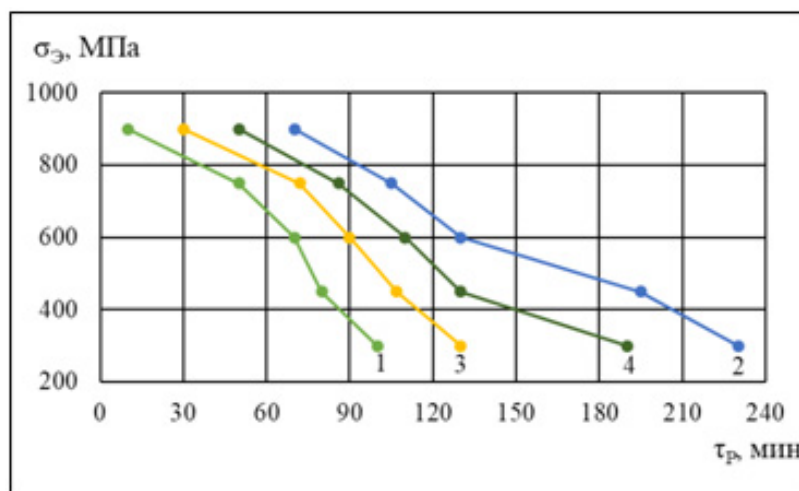


Рис. 2: Длительная коррозионная прочность точеных (1, 3) и натуральных (2, 4) образцов из стали 20ГС2 в среде, вызывающей ВР: 1) изготовленные из гладкокатанной стали ( $\phi 6$  мм); 2) натурные гладкокатанные; 3) изготовленные из стали с периодическим профилем ( $\phi 6$  мм); 4) натурные с периодическим профилем

Анализ влияния диаметра испытываемых образцов на длительную коррозионную прочность показал [8], что изменение стойкости образцов, изготовленных из гладкокатанной арматуры и из арматуры периодического профиля при различных уровнях растягивающего на-

пряжения, происходит по-разному. При уровне растягивающих напряжений 1000...600 МПа с возрастанием диаметра образца наблюдается увеличение длительной коррозионной прочности, а при переходе от точеных образцов к натурным наблюдается резкое понижение стойкости, причем для образцов с периодическим профилем уменьшение стойкости начинается с диаметра 8 мм.

При уменьшении растягивающих напряжений до 400 МПа начинает изменяться характер кривых, уменьшается влияние поверхности на длительную коррозионную прочность, а для образцов, изготовленных из гладкой арматурной стали, влияние поверхности при растягивающем напряжении 400 МПа практически отсутствует.

Для образцов, изготовленных из периодической арматурной стали, снижение стойкости наблюдается в интервале размеров диаметра от 8 мм до 9 мм с последующим повышением стойкости при переходе к натурным образцам. Это можно объяснить влиянием поверхности и живого сечения арматуры периодического профиля. При обтачивании арматуры до диаметра 9 мм нарушается поверхностная сплошность образца, но остаются концентраторы напряжений, в которых и происходит локальное накопление микронапряжений под воздействием внешних растягивающих напряжений, среды и диффундирующего водорода, которое может привести к зарождению и развитию микротрещин.

При высоких уровнях растягивающих напряжений и наличии концентраторов внутренних напряжений на поверхности происходит быстрое зарождение, а чаще всего развитие уже имеющихся на поверхности и в поверхностном объеме дефектов, которые и являются зародышами микротрещин. Ускорению этого процесса способствует совместное воздействие среды и водорода, которое на первых этапах облегчает процесс зарождения микротрещин за счет адсорбции этого эффекта, а затем может способствовать упрочнению поверхности, доводя внутренние напряжения до критического значения в локальных микрообъемах, приводящего к образованию микротрещин, а затем облегчает развитие и распространение этих микротрещин. Уменьшение внешних растягивающих напряжений замедляет протекание перечисленных процессов, а наличие остаточных локальных напряжений в поверхностном слое металла является недостаточным для быстрого зарождения субмикротрещин, в результате чего удлиняется инкубационный период.

Наблюдаемый масштабный эффект был проверен на натурных образцах высокопрочной арматурной стали марки 20ГС2 периодического профиля различного диаметра в состоянии поставки [8]. Анализ полученных результатов показал, что увеличение живого сечения испытываемых образцов приводит к возрастанию длительной коррозионной прочности, а дефектность поверхности (наличие окалина, задигов, микроязв и несплошностей, а также неравномерное распределение внутренних напряжений, обусловленное профилем) оказывает обратное влияние – уменьшает стойкость образцов при испытании в водородосодержащих средах.

Увеличение длительной коррозионной прочности высокопрочной арматурной стали как точеных, так и натурных образцов, можно объяснить специфической особенностью распределения диффундирующего водорода в напряженном поверхностном объеме металла. При увеличении сечения образца возрастает время диффузии водорода вглубь образца и в то же время наличие большого количества дефектов приводит к более равномерному распределению водорода в них и, следовательно, увеличивает время создания критического содержания водорода в локальных микрообъемах, которое способствует охрупчиванию металла и созданию высокого уровня локальных микронапряжений, приводящих к зарождению и развитию микротрещин. Зарождение большого количества субмикротрещин в поверхностном слое образца приводит к релаксации и перераспределению локальных микронапряжений, замедляя развитие этих субмикротрещин. Требуется определенное время для создания в этих локальных объемах соответствующего напряженного состояния, необходимого для развития микротрещин. Величина этого напряжения зависит от внешних растягивающих напряжений и концентрации водорода в этих микрообъемах.

## 4. Заключение

На основании проведенных исследований о влиянии геометрии и размера образца на длительную коррозионную прочность в среде, вызывающей водородное охрупчивание, можно сделать следующие *выводы*:

1) Натурные образцы арматурной стали марки 20ГС2 по сравнению с точеными обладают меньшей чувствительностью к водородному растрескиванию. Данное обстоятельство обусловлено тем фактом, что после механической обработки резанием в точеных образцах значение уровня остаточных растягивающих напряжений значительно выше, чем в натурных образцах.

2) Натурные образцы арматурной стали марки 20ГС2 с периодическим профилем обладают меньшей стойкостью к водородному растрескиванию по сравнению с натурными гладкокатыными образцами. Меньшая стойкость к водородному растрескиванию арматуры периодического профиля обусловлена наличием на ее поверхности ребер, которые играют роль естественных концентраторов напряжений.

Таким образом, проведенный анализ требований стандарта «NACE Standard TM0177-2005» и результаты коррозионно-механических испытаний стержневой арматуры марки 20ГС2, позволяют рекомендовать использовать для испытаний на коррозионно-механическое разрушение в средах, вызывающих наводороживание натурные образцы, т. к. их применение позволяет приблизить условия эксперимента к реальным условиям эксплуатации изделий, сократить трудоемкость проведения испытаний за счет более простой конфигурации образца, сохранения его профиля (что особенно важно при испытании арматуры периодического профиля) и использования коррозионной среды не требующей специальной подготовки.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов обработки материалов [9-17].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. Механические свойства и внутреннее трение высоко-прочных сталей в коррозионных средах: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 430 с.
2. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е., Ушаков М. В., Извольский В. В. Физико-механические и коррозионные свойства металлических материалов, эксплуатируемых в агрессивных средах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 553 с.
3. Сергеев Н. Н., Извольский В. В., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е., Клементьев Д. С., Пантюхин О. В. Разработка методики исследования коррозионно-механического разрушения арматурных сталей в водородосодержащих средах // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 8. С. 35-56.
4. Baumert K. L., Watkins W. R. Case histories using the slow strain rate test // Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications.; R.D.Kane (ed.). ASTM, 1993. P. 173-180.
5. Beavers J. A., Koch G. H. Limitations of the slow strain rate test technique // Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications.; R.D.Kane (ed.). ASTM, 1993. P. 22-39.
6. Parkins R. D. Slow strain rate testing – 25 years experience // Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications.; R.D.Kane (ed.). ASTM, 1993. P. 7-21.

7. Kane R. D., Wilhelm S. M. Status of standardization activities on slow strain rate testing techniques // Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications.; R.D.Kane (ed.). ASTM, 1993. P. 40-47.
8. Сергеев Н. Н., Извольский В. В., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е., Агеева Е. В., Клементьев Д. С., Кругляков О. В. Влияние масштабного фактора и состояния поверхности на чувствительность стали 20ГС2 к водородному растрескиванию // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019. Т. 23. № 5. С. 8-22.
9. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Кузовлева О. В., Селедкин Е. М., Клементьев Д. С., Калинин А. А. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография. Изд. 2-е, испр. и доп. М.; Вологда: Инфра-Инженерия, 2021. 360 с.
10. Sergeev N. N., Kutepov S. N., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Izvol'skii V. V., Gvozdev A. E. Long-term strength of 22Kh2G2AYu reinforcing-bar steel during corrosion cracking tests in a boiling nitrate solution // Russian Metallurgy (Metally). 2020. № 4. P.434-440.
11. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Klementev D. S. Influence of heat treatment on residual stress formation in the wear-resistant steel 60–steel 15–steel 60 bimetal material // Inorganic Materials: Applied Research. 2021. Vol. 12. № 1. P. 5-9.
12. Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Кузовлева О. В., Гвоздев А. Е., Клементьев Д. С. Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2020. С. 385-388.
13. Гвоздев А. Е. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 477 с.
14. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Золотухин В. И., Сергеев А. Н., Калинин А. А., Бреки А. Д., Сергеев Н. Н., Кузовлева О. В., Стариков Н. Е., Малий Д. В. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 235 с.
15. Программный комплекс для анализа коррозионных процессов и прогнозирования характеристик длительной прочности и долговечности арматурных сталей классов прочности А600-А1000 и Ат600-Ат1000 в условиях водородной стресс-коррозии: а. с. № 2019613673 Российская Федерация / Д. М. Хонелидзе, А. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов, Д. В. Малий, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев, Д. С. Метелкина, Е. В. Цой; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого». – № 2019612300; за-явл. 07.03.2019. опубл. 21.03.2019.
16. Способ формирования упрочненного поверхностного слоя в зоне лазерной резки деталей из легированных конструкционных сталей: патент на изобретение № 2707374 Российская Федерация / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Г. Колмаков, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, И. В. Голышев; заявитель и патентообладатель ООО «МЕТАЛЛИКА71» № 2019115250; заявл. 17.05.2019; опубл. 26.11.2019.

17. Математический цифровой комплекс для расчета длительной коррозионной прочности арматурной стали марки 20ГС2 при разных температурах отпуска: а. с. № 2021681247 / Д. С. Клементьев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, Ю. С. Дорохин, А. Е. Гвоздев; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого». №2021680533; заявл. 10.12.2021; опубл. 20.12.2021.

## REFERENCES

1. Sergeev N. N. & Sergeev A. N. 2018, *Mechanical properties and internal friction of high-strength steels in corrosion environments: monograph*, TulGU, Tula.
2. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Ushakov M. V. & Izvol'skii V. V. 2019, *Physical-mechanical and corrosion properties of metallic materials operated in aggressive environments*, TulGU, Tula.
3. Sergeev N. N., Izvol'skii V. V., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Klementev D. S. & Pantyukhin O. V. 2018, "Development of a method for studying the corrosion-mechanical failure of reinforcing steels in hydrogen-containing media", *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki*, issue 8, pp. 35-56.
4. Baumert, K. L. & Watkins, W.R. 1993, "Case histories using the slow strain rate test", *Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications*; R.D.Kane (ed.), ASTM, pp. 173-180.
5. Beavers J. A. & Koch G. H. 1993, "Limitations of the slow strain rate test technique", *Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications*, R.D.Kane (ed.), ASTM, pp. 22-39.
6. Parkins R. D. 1993, "Slow strain rate testing – 25 years experience", *Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications*, R.D.Kane (ed.), ASTM, pp. 7-21.
7. Kane R. D. & Wilhelm S. M. 1993, "Status of standardization activities on slow strain rate testing techniques", *Slow strain rate testing for the evaluation of environmentally induced cracking: Research and Engineering Applications*, R.D.Kane (ed.), ASTM, pp. 40-47.
8. Sergeev N. N., Izvol'skii V. V., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Ageeva E. V., Klementev D. S. & Kruglyakov O. V. 2019, "Influence of the scale factor and state of the surface on the sensitivity of steel 20GS2 to hydrogen cracking", *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, vol. 23, no. 5, pp. 8-22.
9. Shorshorov M. Kh., Gvozdev A. E., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Kuzovleva O. V., Seledkin E. M., Klementev D. S. & Kalinin A. A. 2021, *Modeling of resource-saving processes processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials: monograph. Ed. 2nd, rev. and additional*, Infra-Engineering, Moscow, Vologda.
10. Sergeev N. N., Kutepov S. N., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Izvol'skii V. V. & Gvozdev A. E. 2020, "Long-term strength of 22Kh2G2AYu reinforcing-bar steel during corrosion cracking tests in a boiling nitrate solution", *Russian Metallurgy (Metally)*, no. 4, pp. 434-440.
11. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. & Klementev D. S. 2021, "Influence of heat treatment on residual stress formation in the wear-resistant steel 60–steel 15–steel 60 bimetal material", *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 12, no. 1, pp. 5-9.

12. Sergeev A. N., Kutepov S. N., Kuzovleva O. V., Gvozdev A. E. & Klementev D. S. "Mathematical planning and modeling of the processes of behavior of metal systems in extreme conditions and states", *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennyye problemy, prilozheniya i problemy istorii* (Proc. XVIII Int. Conf. dedicated to the birthday of professors B.M. Bredikhina, V.I. Nechaev and S.B. Stechkin). Tula, 2020, pp. 385-388.
13. Gvozdev A. E. 2019, *Extremal effects of strength and plasticity in highly alloyed metal ingot and powder systems: monograph. 2nd ed., corrected and additional*, TulGU, Tula.
14. Shorshorov M. Kh., Gvozdev A. E., Zolotukhin V. I., Sergeev A. N., Kalinin A. A., Breki A. D., Sergeev N. N., Kuzovleva O. V., Starikov N. E. & Maliy D. V. 2016, *Development of progressive technologies for the production and processing of metals, alloys, powder and composite nanomaterials: monograph*, TulGU, Tula.
15. Khonelidze D. M., Sergeev A. N., Chukanov A. N., Maliy D. V., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Klementev D. S., Metelkina D. S. & Tsoi E. V. 2019, *Software package for analysis of corrosion processes and prediction of long-term strength and durability characteristics of reinforcing steels of strength classes A600-A1000 and At600-At1000 under hydrogen stress corrosion*, Russia, cer. of aut. no. 2019613673.
16. Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Gvozdev A. E., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Kutepov S. N., Maliy D. V. & Golyshev I. V. 2019, *Method for forming a hardened surface layer in the zone of laser cutting of parts from alloyed structural steels*, Russia, patent no. 2707374.
17. Klementev D. S., Sergeev A. N., Medvedev P. N., Kutepov S. N., Maliy D. V., Dorokhin Yu. S. & Gvozdev A. E. 2021, *Mathematical digital complex for calculating the long-term corrosion strength of 20GS2 reinforcing steel at different tempering temperatures*, Russia, cer. of aut. no. 2021681247.

Получено 28.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 51(091), 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-236-268

**Иоганн Альбрехт Эйлер и его неопубликованная рукопись  
по истории геометрии**

Г. И. Синкевич

**Синкевич Галина Ивановна** — доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: galina.sinkevich@gmail.com*

**Аннотация**

Статья содержит научную биографию Иоганна Альбрехта Эйлера (1734–1800), историю рукописи “История геометрии”, её публикацию и комментарии. И. А. Эйлер, старший сын Леонарда Эйлера, родился в Санкт-Петербурге, юность и молодость провёл с отцом в Берлине, где служил инспектором Берлинской обсерватории; в 32-летнем возрасте вернулся с семьёй в Петербург, где до конца жизни нёс обязанности конференц-секретаря Императорской Петербургской академии наук. Огромная административная работа и помощь слепнувшему отцу оставляли ему мало времени для самостоятельных научных исследований. Он сохранил за собой метеорологические и астрономические наблюдения, а также участие в домашних семинарах отца по теории Луны и некоторым вопросам теории чисел. Но его рукопись по истории геометрии показывает широту его математической культуры, строгость критериев и глубину знаний современной ему литературы по геометрии. Анализ текста рукописи проявляет воззрения отца и сына Эйлеров на историю геометрии вплоть до XVIII века, а также значение, которое они придавали прикладным направлениям развития геометрии (астрономия, подземная геометрия, фортификация, геодезия, картография, подсобные математические инструменты). В комментариях сделан обзор использованных И. А. Эйлером источников, как на основании прямых ссылок, так и на основании каталога библиотеки Эйлера и его личных контактов. Имена многих авторов вводятся в российский историко-математический оборот впервые. Несмотря на устойчивое мнение о том, что И. А. Эйлер, будучи конференц-секретарём Петербургской академии наук, не имел достаточно времени для научной работы, нами отмечены некоторые важные его результаты, а также показан круг его знаний и научных критериев. Для нас его работа интересна тем, что показывает уровень развития практической геометрии к XVIII в.

*Ключевые слова:* И. А. Эйлер, Л. Эйлер, история геометрии, неизвестная рукопись.

*Библиография:* 28 названий.

**Для цитирования:**

Г. И. Синкевич. Иоганн Альбрехт Эйлер и его неопубликованная рукопись по истории геометрии // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 236–268.



## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 51(091), 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-236-268

**Johann Albrecht Euler and his unpublished manuscript  
on the history of geometry**

G. I. Sinkevich

**Sinkevich Galina Ivanovna** — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (St. Petersburg)  
*e-mail: galina.sinkevich@gmail.com*

**Abstract**

The article contains the scientific biography of J. A. Euler (1734-1800), the history and publication of the manuscript “History of Geometry” found by us with our comments. Johann Albrecht, the eldest son of Leonard Euler, was born in St. Petersburg, spent his youth with his father in Berlin, where he served as an inspector at the Berlin Observatory; at the age of 32, he with his family returned to St. Petersburg, where until the end of his life he was the conference secretary of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences. Huge administrative work and assistance to his blind father left him little time for independent scientific research. He retained meteorological and astronomical observations, as well as participation in his father’s home seminars on the theory of the moon and some questions of number theory. But his manuscript on the history of geometry shows the breadth of his mathematical culture, the rigor of his criteria, and the depth of knowledge of his contemporary geometry literature. Analysis of the text of the manuscript reveals the views of Euler-father and son on the history of geometry up to the 18th century, as well as the importance they attached to the applied directions of the development of geometry (astronomy, underground geometry, fortification, geodesy, cartography, auxiliary mathematical tools). The comments provide an overview of the sources used by I.A. Euler, both on the basis of direct links, and on the basis of the list of Euler’s collection and his personal contacts. For the first time, the names of many authors are introduced into the Russian historical and mathematical circulation. Despite the strong opinion that I.A. Euler, being the conference secretary of the St. Petersburg Academy of Sciences, did not have enough time for scientific work, we noted some of his important results, and also showed the range of his knowledge and scientific criteria. For us, his work is interesting because it shows the level of development of practical geometry in the 18th century.

*Keywords:* I. A. Euler, L. Euler, History of Geometry, Unknown Manuscript.

*Bibliography:* 28 titles.

**For citation:**

G. I. Sinkevich, 2022, “Johann Albrecht Euler and his unpublished manuscript on the history of geometry”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 236–268.



Рис. 1: Иоганн Альбрехт Эйлер

## 1. Иоганн Альбрехт Эйлер, жизнь и творчество

Леонард Эйлер (1707–1783), отец нашего героя, приехал в Санкт-Петербург в 1727 г. из швейцарского города Базеля в незадолго до того созданную Санкт-Петербургскую академию наук. Его рекомендовали братья Даниил и Николай Бернулли, уже работавшие в Санкт-Петербурге. В Россию XVIII-XIX вв. стремилось много переселенцев из европейских стран, среди них было немало учёных. Леонард Эйлер зарекомендовал себя значительными научными результатами, со временем заняв позицию ведущего учёного Европы эпохи Просвещения. В 1733 г. Л. Эйлер стал академиком (профессором естествознания) и в том же году женился на своей соотечественнице, Катарине Гзелль (Katharina Elisa Euler Gsell, 1707–1773), дочери академического петербургского живописца Георга Гзелля, родом из Швейцарии. Их первенцем был Иоганн Альбрехт Эйлер (Иван Леонтьевич, 1734–1800).

В 1741 г. Л. Эйлер вместе с семьёй покинул Россию ради работы в Берлинской академии наук. Иоганну Альбрехту было неполных 7 лет. 25 следующих лет своей жизни семья Эйлера жила в Берлине. Леонард Эйлер уделял большое внимание образованию Иоганна Альбрехта. Как сообщает Р. Мументалер, Иоганн Альбрехт учился у частных учителей, возможно, посещал и государственную школу. Известно, что в октябре 1752 года молодой математик из Женевы Луи Бертран, который хотел продолжить своё образование у Леонарда Эйлера, сопровождал Иоганна Альбрехта из Гейдельберга в Берлин. Возможно, что Иоганн Альбрехт учился в Гейдельберге. Помимо этого Л. Эйлер, державший пансион для учеников, в том числе и из России, обучал математике наравне с ними и своего старшего сына. В одном из писем Л. Эйлер пишет о своем пансионере Котельникове, старше Иоганна Альбрехта на 10 лет: “Я всегда даю ему уроки в обществе моего Альбрехта, и я чувствую, что небольшое соперничество не даёт ни одному из них никакого преимущества, так как они примерно равны по силе” ([3], с. 89).

В возрасте 15 лет Иоганн Альбрехт помогал отцу при нивелировании Финов-канала<sup>1</sup>. В 20 лет (5.12.1754) он был избран членом Берлинской академии и назначен инспектором Берлинской обсерватории. В 1758 г. Иоганн Альбрехт наблюдал и описал комету Галлея.

В 1754 г. Л. Эйлер сформулировал для Геттингенского научного общества<sup>2</sup> конкурсную проблему: “Сколькими способами можно разложить плоский многоугольник диагоналями на треугольники”, предварительно узнав в Геттингене, может ли его сын претендовать на премию.

<sup>1</sup> между г. Либенвальде на реке Хафель и коммуной Липе на Одер-Хафель-канал

<sup>2</sup> С 1942 г. – Гёттингенская академия наук.

В ноябре того же года И. А. Эйлер предложил решение этой проблемы и получил премию, а Эйлер-отец не отрицал, что помогал сыну.

В 1755 году молодой И. А. Эйлер зачитал свою первую работу<sup>3</sup> в Берлинской академии и провёл физические опыты со стрелкой инклинатора. Л. Эйлер высоко оценил экспериментаторский талант сына, сам занимаясь теоретической частью работы.

В период между 1755 и 1766 годами И. А. Эйлер опубликовал четырнадцать работ в "Ме-муарах" Берлинской академии наук и получил несколько премий, участвуя в конкурсах. В 1762 году он стал почётным членом Мюнхенской академии, но так и не получил звания академика.

В 1760 г. И. А. Эйлер женился на Анне-Шарлотте-Софии фон Гагенмейстер, родственнице Самуэля Формея<sup>4</sup>, секретаря Берлинской академии. Это был счастливый и многодетный брак. После отъезда в Россию И. А. Эйлер долгие годы переписывался с Формеем; его письма служат богатым источником информации о жизни И. А. Эйлера в России. Иоганн Альбрехт с семьёй жил вместе с отцом до самой его смерти.

Надежды И. А. Эйлера на получение места профессора математики или астронома в Берлине или Геттингене так и остались ожиданиями. Леонард Эйлер также не был удовлетворён своим положением в Берлинской академии наук, Екатерина II предложила ему заманчивые условия в России, включая пост секретаря Академии для старшего сына.

В 1766 г. большая семья Леонарда Эйлера (18 человек) переехала в Россию.

И. А. Эйлер получил должность профессора физики, а с 1769 г. стал конференц-секретарём Академии. Первые годы пребывания в Петербурге он ещё мог уделять время научной работе, заниматься приборами Физического кабинета. Но после назначения конференц-секретарём все его силы уходили на административную работу: ведение огромной переписки с иностранными учёными, прежде всего с иностранными членами Академии; координация деятельности между отделами академии: библиотекой, типографией, архивом, работой переписчиков и проч.; визиты, связанные с переговорами о делах Академии<sup>5</sup>; переписка с участниками академических научных экспедиций и редактирование их отчётов; проверка знаний учеников Академии; редактирование изданий Академии: "Комментариев", "Acta" и "Nova Acta"; составление годовых отчётов Академии, а также написание резюме сочинений. Одновременно он состоял инспектором военных учебных заведений, некоторое время читал лекции по физике в университете, был директором по надзору за учебной работой ("директором наук") в Сухопутном Кадетском корпусе<sup>6</sup> (1776–1781); в придворных кругах ему приходилось выполнять неформальные функции научного советника и собеседника, популярно рассказывающего о научных проблемах; проводить ознакомительные экскурсии по Академии для иностранных гостей.

В XVIII в. нечёткий государственный статус Петербургской Академии наук ставил её в зависимость от придворных и политических интриг, некомпетентного руководства, а зачастую начальственного самодурства и корыстолюбия. В необходимости соблюдать академические интересы и сохранять своё достоинство И. А. Эйлеру помогал унаследованный от отца твёрдый характер: так же, как и отец, он не боялся ставить свои условия сильным мира сего, отстаивать справедливость. Например, в 1769 г. директор Академии, граф Владимир Ор-

<sup>3</sup>De tempore descensus corporis, ad centrum virium in ratione reciproca distantiarum attracti.

<sup>4</sup>Jean Henri Samuel Formey (1711–1797), писатель и философ, сын французского протестанта, бежавшего в Германию. Был пастором в Берлине, профессором философии в Берлинской французской коллегии и непременным секретарем Берлинской академии наук. Почетный член СПб. АН с 1748 г. Мать жены И. А. Эйлера, Анны-Шарлотты-Софии фон Гагенмейстер, приходилась невесткой Самуэлю Формею. Большая часть сведений о жизни И. А. Эйлера почерпнута из писем И. А. Эйлера к С. Формею, которого он называл дядей.

<sup>5</sup>Бывало, что ему приходилось весь день проводить в карете, чтобы повидать нужных людей, и повторять визиты, если застать хозяев не удавалось.

<sup>6</sup>Эйлер написал для Кадетского корпуса учебник "Eléments de Géometrie".

лов<sup>7</sup> предложил И. А. Эйлеру занять место Я. Штелина<sup>8</sup>, занимавшего должность секретаря Академии. Иоганн Альбрехт согласился, но поставил свои условия: Штелин должен уйти в отставку по собственному желанию, не потеряв своего содержания; в дальнейших отношениях Орлов, если будет недоволен И. А. Эйлером, выскажет это с глазу на глаз, не произнося обидных слов при посторонних. Другой пример: в январе 1774 г. отец и сын Эйлеры объявили забастовку в связи с несправедливым решением графа В. Орлова лишить Я. Штелина на месяц его жалования: “31-го в Академии, где у меня был бурный спор с графом, моим начальником: подробности которого я когда-нибудь смогу прислать, по крайней мере если он не предоставит мне исключительной сатисфакции. Он хотел собственной властью наказать статского советника Штелина, наложив на него штраф в размере месячного жалования: нечто, что мой отец, равно как и я, сочли невозможным для всей Академии. Так что с этого дня мы больше не появлялись в академической комиссии, ни мой отец, ни господин Штелин, ни я. Императрицу об этом поставят в известность, и мы посмотрим, что из этого получится. Господин Штелин чуть было не умер от сердечного приступа, а я на целый день потерял аппетит. Мой отец решил окончательно оставить Академию и только посещать Конференции, на которых граф никогда не появляется: я сам делаю то же самое и в настоящее время спокойно жду исхода этого бунта” ([3], с. 98). Против Орлова выступили все академики, в том числе и русские, и в конце того же года он получил отставку.

И. А. Эйлер, наравне с секретарями теряющего зрение отца, постоянно помогал ему в научной работе: обычно Л. Эйлер намечал основные идеи исследования, а его помощники развивали эти идеи и выполняли письменную, графическую и вычислительную часть работы. Часто отец и сын проводили вечера в прогулках по саду, обсуждая научные вопросы. И. А. Эйлер принимал участие в работе над последними исследованиями Л. Эйлера, а также над исследованием теории Луны вместе с Крафтом<sup>9</sup> и Лекселем<sup>10</sup>. В 1771 г. И. А. Эйлера избрали иностранным членом Шведской королевской академии наук.

Своей научной работой И. А. Эйлер занимался урывками, в вечернее время. Даже в таких условиях его отличала способность работать напряжённо и быстро. Например, И. А. Эйлер упоминает две старые статьи, опубликовать которые больше не имело смысла, поскольку они были написаны наспех: “Я написал их в большой спешке, потому что мой отец торопил меня писать письмо в Академию” ([3], с. 121). Тем не менее, имеются свидетельства того, что Эйлер, когда у него находилось время, умел работать очень быстро. Так, например, 6 августа 1774 года он упоминает о том, что с утра написал несколько историко-астрономических статей для Альманаха Академии. На следующий день он опять работал над ними и, по-видимому, закончил (*ibidem*).

<sup>7</sup>Владимир Григорьевич, (1743–1831), младший из пяти братьев Орловых. В 23-летнем возрасте был назначен Екатериной II директором Академии в благодарность за участие братьев Орловых в государственном перевороте. Несмотря на усилия в пользу Академии, был известен своей грубостью и самодурством. Я. Штелин называл его “молодым, неразумным, своенравным и несправедливым человеком, который считал всю Академию своей собственностью, а членов оной своими холопами” ([3], с. 99).

<sup>8</sup>Якоб Штелин (Jacob von Stäehlin, 1709–1785), гравёр, картограф, медальер, “мастер фейерверков”. Был приглашён в Петербургскую Академию наук в 1735 г. “для словесных наук и аллегорических изобретений для фейерверков, иллюминаций и медалей”; в 1738 г. стал профессором элоквенции и членом Академии. С 1742 по 1745 г. был учителем наследника Петра Федоровича (императора Петра III), затем его личным библиотекарем. В 1765–1769 Якоб Штелин был учёным секретарём Академии наук. Сохранились его многочисленные мемуары и обширная переписка с зарубежными учёными. Несмотря на то, что Екатерина II нейтрально относилась к бывшим приближённым Петра III, возможно, что граф В. Орлов, брат зачинщика переворота, перенёс на Штелина свою неприязнь.

<sup>9</sup>Крафт, Логин Юрьевич (Wolfgang Ludwig Krafft, 1743–1814), сын петербургского академика Георга Вольфганга Крафта, российский астроном, физик. Адыюнкт Петербургской Академии наук (1768), академик (1771). Работы в области астрономии и демографии.

<sup>10</sup>Андрей Иванович Лексель (Anders Johan Lexell, 1740–1784), российский астроном, математик и физик шведского происхождения, с 1768 г. жил в Петербурге. Член Петербургской Академии наук. Работы в полигонометрии, сферической тригонометрии и небесной механике; доказал, что Уран – не комета, а планета.

Справочник Поггендорфа ([18], Т. 1, ст. 704–705) содержит названия около 30 мемуаров И. А. Эйлера, преимущественно по физике, астрономии и приложениям к ним математики, опубликованных в немецких и российских академических изданиях, но этот список не полон. В 1770-е гг. Леонард Эйлер в окружении своих молодых помощников: Иоганна Альбрехта Эйлера, Николая Фусса, Андерса Лекселя (J.A. Lexell) и Л.Ю. Крафта (W.L. Krafft) обсуждал с ними вопросы астрономии, сферической тригонометрии и теории чисел. Это были домашние семинары, все идеи обсуждались и вырабатывались совместно. Их записи представляют собой последовательность поочередных заметок всех участников, посвящённых обсуждению одного и того же вопроса. Часть результатов участников включена в посмертный том работ Эйлера, подготовленный к печати Николаем и Павлом Фуссом и изданный в 1862 г. [16]. В этом томе содержится немало заметок И. А. Эйлера: теоретико-числовые проблемы, гипотезы и решения некоторых задач из диофантова анализа. В частности, И. А. Эйлеру принадлежит гипотеза (*ibidem*, с. 203) о том, что для представления любого числа как суммы квадратов треугольных чисел, необходимо не менее двенадцати членов; утверждение, что, для представления любого числа как суммы фигурных чисел (приведены примеры)  $1, n + a, \frac{(n+1)(n+2a)}{1 \cdot 2}, \frac{(n+1)(n+2)(n+3a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$ , требуется не более, чем  $a + 2n - 2$  членов (эта формула подписана Крафтом). Там же опубликовано предположение И. А. Эйлера к гипотезе Э. Уоринга (Варинг, E. Waring) о том, что для представления любого положительного целого числа в виде суммы положительных  $n$ -х степеней, необходимо по крайней мере  $T = \nu + 2^n - 2$  слагаемых, где  $\nu$  есть наибольшее целое, меньшее  $(3/2)^n$ . Привожу здесь комментарий Н.А. Вавилова: “Эйлер-мл. сформулировал экспериментальную гипотезу для небольших значений – подразумевая очевидное обобщение – а Крафт записал ее как точную формулу, т.е. вклад Эйлера чуть больше. Что здесь действительно новое, это формулировка гипотезы для *высших* размерностей. Обычно считается, что даже для размерности 3 эти гипотезы сформулированы только в 1850 году Ф. Поллоком. А здесь явно утверждается не только что каждое число есть сумма не более чем пяти тетраэдральных – а даже с этим до совсем недавнего времени были серьезные проблемы – но и что каждое число есть сумма не более чем 7 чисел, соответствующих *четырёхмерным* симплексам, и т.д. – пирамидки с многоугольными основаниями. Т.е. обобщение гипотезы Ферма, совпадающее в простейшем случае с Поллоком, но идущее в другую сторону. Это *теснейшим* образом связано с проблемой Варинга. Поэтому тут же рядом и формулируется. Это то, что называется “проблемой Камке” – представление чисел суммами значений *многочлена*. Но в теореме Камке целочисленные многочлены, а здесь целозначные. На *возможность* представления ограниченным количеством это не влияет. А вот на конкретные значения – более чем! И открытые вопросы, разумеется, относятся именно к вычислению точных значений для конкретных многочленов<sup>11</sup>”.

После 1773 г. И. А. Эйлер опубликовал только одну работу математического содержания, но продолжал публиковать регулярные метеорологические сообщения. И если в работах И. А. Эйлера в области чистой математики, механики и теоретической физики можно видеть определяющую роль его отца, то в области метеорологии его работы самостоятельны.

В 1786 г. И. А. Эйлер был пожалован орденом Св. Владимира IV степени, став одним из первых российских учёных, отмеченных государственной наградой.

Иоганн Альбрехт Эйлер скончался в возрасте 65 лет 6 сентября 1800 года от истощения сил, переболев почти девять месяцев.

В Архиве Академии наук в фонде Эйлера среди рукописей И. А. Эйлера нашлась неопубликованная работа по истории геометрии.

<sup>11</sup>Выражаю свою признательность профессору СПбГУ Н.А. Вавилу за это личное сообщение.

## 2. О рукописи И. А. Эйлера “История геометрии”

Найденная нами в Архиве Академии наук неопубликованная и не датированная рукопись И. А. Эйлера на немецком языке по истории геометрии<sup>12</sup>, возможно, предназначалась для учебника по геометрии, который И. А. Эйлер писал для Сухопутного Шляхетского корпуса. С другой стороны, в изданиях Академии наук, в том числе “Примечаниях в ведомостях”, “Ежемесячных сочинениях”, “Академических известиях”, “Новых ежемесячных сочинениях” публиковалось большое количество статей научно-популярного и историко-научного характера. Интерес публики к чтению такого рода был значителен, академиков часто обязывали читать популярные лекции и писать научно-популярные статьи. Возможно, что неопубликованная рукопись И. А. Эйлера предназначалась в качестве основы статьи в одно из этих изданий. Она так и не была доработана и представляет собой 31 тезис, видимо, оставленный для дальнейшего развития. Основываясь на фактах биографии И. А. Эйлера и его ссылкам на некоторые издания, мы с осторожностью предполагаем, что рукопись была написана после 1778 г.

Первая часть рукописи содержит обзор античной истории геометрии, показывающий хорошее знакомство И. А. Эйлера с историко-математической литературой, кроме одного момента: разделение личностей Евклида Мегарского и Евклида Александрийского произошло в 1620 г. в работе Генри Сэвила [20], (см. комментарий 22), но И. А. Эйлер не знал этого, и приписал честь этого разделения своему современнику Деланде (Delandes, см. комментарии 26 и 27). Эйлер хорошо (хотя не совсем полно) знаком с изданиями и различными переводами античных авторов.

Ко второй половине XVIII в. уже были достаточно известны издания греческих классиков и монографии по истории математики.

“Элементы” (или “Начала”) Евклида, состоявшие из 15 книг, 13 из которых достоверно написаны Евклидом, были впервые переведены на арабский в VIII в., с арабского на латынь в XII в. (Аделард из Бата, Герардо из Кремоны) и в XIII в. (Джованни Кампано); с греческого на латынь на рубеже XV-XVI вв. (Бартоломео Дзамберти, а также Симоном Гринеусом).

Труды Архимеда в переводе на латынь были известны с 1503 г. (Вильгельм из Мербеке), затем в 1544 г., более полное в 1558 г. (Федерико Командино), и после многократно заново переводились и переиздавались.

“Конические сечения” Аполлония издавались на латыни в 1537 (первые четыре книги), 1631 г. (три следующих книги). Полное латинское издание семи первых книг “Конических сечений” было издано в 1631 г. Эдмундом Галлеем и включало его реконструкцию восьмой книги.

“Математическое собрание” – книги Паппа Александрийского, содержавшие подробный обзор основных достижений античной геометрии, были впервые изданы в латинском переводе в 1588 г. (Федерико Командино).

“Комментарии к Евклиду” Прокла были впервые изданы на греческом С. Гринеусом (1533) и в латинском переводе Ф. Бароцци (1560).

Трактат Диогена Лаэртского “О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов” был известен в латинском переводе с XII в. (Henricus Aristippus), многократно цитировался и пересказывался. Наиболее полное издание вышло в XV в. (Ambrogio Traversari).

Перечисленные издания, либо более поздние переиздания этих книг были известны И. А. Эйлеру и цитируются им.

Основные трактаты по истории математики, вышедшие к моменту работы Эйлера над рукописью, большей частью не были известны И. А. Эйлеру. Это труды Иоганна Бутео (1559), Пьера де ла Раме (1567), Бернардино Бальди (посм. изд. 1707), Иосифа Бланкануса (1615),

<sup>12</sup>СПбФАРАН. Ф. 136. Оп. 1-а, Д. 33. 8 л.

Гергарда Иоганна Фосса<sup>13</sup> (1650), Эдварда Бернарда (1704) [4].

Достоверно обращение И. А. Эйлера к сочинению Клода-Франсуа Де-Шалья (1674) “Трактат о прогрессе математики и об известных математиках”, который вошёл как составная часть в первый том его трёхтомника “Курс или мир математики” – автор упомянут И. А. Эйлером в 26 тезисе как исследователь и издатель Евклида.

“Трактат об алгебре как исторический, так и практический. Показывающий происхождение, прогресс и постепенные достижения оной; и сообразно этому развитию как достигла она тех высот, на которых сейчас находится. С некоторыми дополнительными исследованиями, Дж. Валлиса» (1685) – не упомянут у Эйлера, хотя известно<sup>14</sup>, что эта книга была в собрании его отца.

“Математический лексикон” (1716) и V том “Краткое рассмотрение знаменитейших математических сочинений” трактата “Начальные основания математических наук” (1741) Х. Вольфа явно были известны И. А. Эйлеру. Христиан фон Вольф (1679–1754), ученик и последователь Г.В. Лейбница, известный немецкий философ и естествоиспытатель, учитель М.В. Ломоносова, многое сделал для подбора молодых учёных для Санкт-Петербургской академии наук. Именно он рекомендовал молодого Леонарда Эйлера. После краткой встречи в Марбурге Л. Эйлера, направлявшегося в Россию, и Х. фон Вольфа, последний 20 мая 1727 г. написал ему письмо, назвав Россию раем для учёных: “Я очень сожалею, что вы так торопились и я не имел счастья побеседовать с Вами о разных предметах и особенно высказать мое глубокое уважение к Императорской академии наук и проявить должную учтивость, отвечающую дружбе господина Бернулли. Вы едете теперь в рай для ученых, и я желаю Вам только, чтобы Всевышний сохранил в путешествии Ваше здоровье и позволил Вам долгие годы находить в Петербурге свое удовольствие. Прошу передать мой низжайший поклон его превосходительству господину президенту, а также мой привет господам Бильфингеру, Герману, Бернулли, Мартини, Лейтману, и прошу всегда хранить обо мне добрую память.” [14]. Именно с Вольфом полемизировал Л. Эйлер относительно его работ “*Ontologia*” и “*Cosmologia*”, что нашло своё отражение в “Письмах к немецкой принцессе”<sup>15</sup>. Открытое выступление Эйлера против школы Лейбница-Вольфа в дискуссии о монадах вызвало досаду Вольфа, выразившуюся в его письмах к другим учёным. Известно одно письмо Л. Эйлера от 16 октября 1741 г. примирительного содержания ([5], с. 74-76). Заметим, что сам Вольф в своих сочинениях излагает историю математики до работ молодого Леонарда Эйлера включительно. Начало рукописи И. А. Эйлера “История геометрии” изложено согласно соответствующей статье из “Математического лексикона” Х. Вольфа (1716), либо согласно V тому “Краткое рассмотрение знаменитейших математических сочинений” трактата Вольфа “Начальные основания математических наук” (1741).

“История математики во всём её объёме от сотворения мира до XVI века после Рождества Христова, с жизнеописанием знаменитых математиков, их учений, трудов и рукописей; кроме того, обзор основных математических сборников и трудов, а также история арифметики до нашего времени” (1742), Иоганна Хайльброннера, вероятно была знакома И. А. Эйлеру.

В 1758 г. вышла “История математики” Ж.Э. Монтюкла (1-й и 2-й тома). Посмертно, в 1799 году её дополнил до четырёх томов и издал астроном Жозеф Жером Лефрансуа де Лаланд (de Lalande, De La Lande, 1799), познакомившийся в 1752 г. с семьёй Эйлеров во время пребывания их в Берлине. Лаланд был учеником Ж.-Н. Делиля, проработавшего первым академиком астрономии в Петербургской академии наук с 1725 по 1747 г. Во Франции Лаланд сотрудничал с А. Клеро. Крепкие связи с Петербургской академией способствовали тому, что

<sup>13</sup>В книге Фосса «О природе и строении всех математических наук с добавлением хронологии математиков» уже разделяются личности Евклида Мегарского и Евклида Александрийского, хотя впервые это разделение сделано в 1620 г. Генри Сэвилем.

<sup>14</sup>Каталог СПбФРАН

<sup>15</sup>Письмо 76, “О вольфианской системе монад”.

“Астрономия” де Лаланда была издана в Русском переводе в 1789 г. “История математик” Монтюкла также издавалась в русском переводе П.И. Богдановича в “Академических известиях” в 1779–1781. Все эти переводы курировались И. А. Эйлером как конференц-секретарём Академии. Разумеется, он был знаком с книгой Монтюкла, а также был в курсе исследований Лаланда и его коллег, в том числе А. Клеро. В частности, описание эпизода о задаче удвоения куба соответствует изложению Монтюкла. Заметим также, что Монтюкла обращает внимание читателя на различие личностей Евклида Мегарского и Евклида Александрийского (с. 217), но не указывает источник, определивший это различие. Разумеется, у Хайльброннера и у Монтюкла есть обзор предшествующей литературы по истории математики. Во многом И. А. Эйлер следует изложению Монтюкла, хотя заметим, что сам Монтюкла во многом пересказывал предшествующих авторов.

Помимо традиционных вех истории античной геометрии Эйлер обращает внимание на открытие новых методов решения поставленных задач, и, в частности, на возникновение вопроса о разрешимости и неразрешимости геометрических проблем (12-й тезис рукописи).

Вторая часть рукописи представляет собой великолепный обзор современного на тот момент развития геометрии, включая её прикладные аспекты в астрономии, картографии, геодезии, маркшейдерском деле и фортификации, развитие подсобных математических инструментов, и показывает основательное знакомство И. А. Эйлера с литературой. Он выделяет авторов по педагогическому мастерству в области высшей геометрии, по развитию прикладных методов и по созданию руководств в новых прикладных областях. Мы попытаемся определить, какими источниками пользовался И. А. Эйлер и дать характеристику их авторам. Приводим здесь текст рукописи в переводе с немецкого Г.М. Шушкевича с нашими комментариями.

### 3. И. А. Эйлер. История геометрии или топографии

1. Геометрия или наука о взаимосвязях предметов в пространстве, занимающаяся измерением и сравнением пространственных структур включает в себя четыре основных раздела: элементарная и высшая, а также теоретическая и практическая геометрия<sup>1</sup>.

2. Создание первых основ современной дисциплины – собственно геометрии (немецкое название которой: мерное или землемерное искусство) бесспорно принадлежит египтянам. Поскольку воды Нила ежегодно затопляют поля Египта, то остающийся после разлива ил стирал границы наделов, покрывая межевые метки так, что распознать их становилось невозможно, что, конечно, вызывало многочисленные беспорядки и споры между жителями, для устранения которых не оставалось ничего другого, кроме как проведение осмотра полей и угодий, измерение их величины и составление плана, короче – изобретение начальных основ топографии<sup>2</sup>.

3. Богословы, однако же, считают, что египтяне изобрели геометрию не самостоятельно, а научились ей у Авраама. Изобрел ли ее сам патриарх или также у кого-то обучился? Об этом богословам также известно не больше, чем мне<sup>3</sup>.

4. Доподлинно известно, однако, что геометрию из Египта в Грецию принес Фалес Милетский, который в свою очередь изучал ее у мемфисских священников. Вероятнее всего, это, собственно, была только элементарная и практическая геометрия или землемерное искусство. Похоже, что после проделанного пути Фалес двинулся дальше, досконально изучил основы геометрии и изобрел различные теоремы, которые в записанном виде можно найти у Евклида, а именно как 5-ое<sup>4</sup>, 15-ое<sup>5</sup> и 25-ое<sup>6</sup> положение I книги и 31-ое<sup>7</sup> положение III книги евклидовой геометрии.

Прокл утверждает также, что Фалес вычислял высоту разных египетских пирамид с помощью длины отбрасываемой ими тени, этот метод послужил впоследствии основой 4-го<sup>8</sup> положения VI книги Евклида (см. Критическая история философии (Histoire Critique de la



Philosophie<sup>9</sup>), том II).

5. Позже один из родственников Пифагора посылает его к Фалесу, который в то время пребывал в Малой Азии. Однако вскоре Пифагор превосходит в мастерстве своего учителя Фалеса, который в расстройстве советует ему ехать к священникам в Мемфис, потому что считает их непревзойденными знатоками<sup>10</sup>.

6. Итак, Пифагор отправляется в Египет, но не находит там того, что ищет, а именно потому, что знания самого просвещенного среди мемфисских священников жреца существенно уступают его собственным именно в той области, которую он хотел бы изучать. Поэтому Пифагор принимает решение совершенствоваться самостоятельно и открывает две важные теоремы, положенные в основу 32-го<sup>11</sup> и 47-го<sup>12</sup> положений I-ой книги Евклида, в честь последней в дар богам было пожертвовано 100 быков.

Эта последняя из теорем, отмеченная столь щедрым жертвоприношением, учениками Пифагора была названа гекатомба<sup>13</sup>; в Новой истории она [эта теорема] именовалась *magister matheseos*<sup>14</sup> по следующей причине: некоторое время каждый претендент на получение звания *магистр математики* должен был представить новое доказательство этой теоремы.

Впоследствии Пифагор открыл первую в истории геометрическую школу, в которой он, однако, помимо геометрии преподавал также теорию чисел, звукообразования и другие входящие в программу натурфилософии дисциплины. Все же геометрия Пифагора остается основным предметом обучения, о чем свидетельствуют различные медали. В частности, на оборотной стороне медали, отчеканенной в честь Коммоди<sup>15</sup>, изображен Пифагор с палочкой в руке, которой математики древности рисовали на песке свои чертежи.

7. О таком способе черчения свидетельствуют истории подобные той, в которой философ Аристипп, потерпевший кораблекрушение, был выброшен на незнакомый остров и обнаружил на песке или на земле знакомые рисунки, после чего радостно прокричал своим товарищам: успокойтесь, здесь я узнаю следы человека (*vestigia hominum agnosco*)<sup>16</sup>.

8. Геометрия уже получила широкое признание, но до тех пор обучение было возможно только в устной форме. Гиппократ Хиосский<sup>17</sup> занимался проблемой так называемой квадратуры круга и решал задачу удвоения куба путем нахождения двух средних пропорциональных между заданным отрезком и другим, вдвое большим его (*duo media continue proportionalia inter duas lineas datas*) и стал первым ученым, изложившим начальные основы геометрии в письменной форме.

9. После этого Демокрит, пифагореец и друг Гиппократа, написал трактаты: *О соприкосновении круга и шара*, *Об иррациональных линиях*, *Твердые тела*<sup>18</sup>, *Численная геометрия* (*De tangentibus Circulorum et Sphaerae; de lineis irrationalibus; de Solidis; et de numeris geometricis*).

10. Геометрия достигает своего расцвета только во времена Гиппократа. И Платон, основатель и создатель академии и в прошлом ученик Гиппократа, не брал учеников, не прошедших курс обучения геометрии; об этом свидетельствует надпись, выполненная по его (Платона) указанию над дверями его лекционного зала: «Да не войдёт сюда тот, кто не знает геометрии». В этой аудитории Платон ежедневно доказывает новые теоремы и разбирает предложенные ему сложные задачи.

11. Наконец сюда же относится необычная и хорошо известная история об удвоении освященного в честь Аполлона алтаря на острове Делос<sup>19</sup>, жители этого острова направили к Платону [несколько делегатов, которые должны были задать вопрос – *примечание И. А. Эйлера*] своих представителей с просьбой решить задачу, каким образом можно вдвое увеличить алтарь Аполлона (имевший форму куба). Когда же Платон не смог сразу найти решение, то направил посланников к Евклиду<sup>20</sup>, о котором еще пойдет речь после того, как мы расскажем об открытиях, сделанных еще до него. Тем временем, сам Платон продолжил заниматься решением Дельфийской задачи и как решение предложил поиск двух средних пропорциональных между одним отрезком и другим, вдвое большим его. Но постольку это открытие до Платона уже было сделано Гиппократом<sup>21</sup>, то Платон пальмы первенства был лишен.

12. Похоже, что после Платона некий Леон<sup>22</sup>, ученик геометра Неоклиса (его имя стало известно нам только благодаря его ученику) изобрел способ различать разрешимую проблему (*Problema solubile*) и неразрешимую (*insolubile*); этот Леон якобы также письменно изложил азы всей геометрии, которые должны быть значительно методичнее, чем *Начала* Гиппократата.

13. После этого Архит Тарентский<sup>23</sup> изобрел метод нахождения двух средних геометрических между двумя заданными величинами.

14. Далее Аристей (Старший)<sup>24</sup>, изучавший конические сечения, пишет трактат *О телесных местах*.

15. Гемин<sup>25</sup> занимался исследованием основ геометрии, обогатил и укрепил их; он различал только три типа линий – прямые, циркульные и улиткообразные линии; позднее он написал работу о построении плоских кривых (*conchois cissois*); нашел решение V положения I книги Евклида<sup>16</sup>, гораздо более простое, чем у Фалеса и написал 6 книг *Геометрическая мудрость* (*narrationum Geometricarum*), которые, к сожалению, были утрачены.

16. Наконец появляется Евклид из Мегары<sup>26</sup>, или, согласно Деланде (*Delandes*)<sup>27</sup>, из Александрии; вслед за пятью написанными им книгами по геометрии, по словам Паппа, появляются *Свойства параллелограммов*, две книги *Поверхностные места*, четыре книги *Конические сечения* и три книги *Поризмы*, которые, к сожалению, не сохранились. Всего до наших дней дошло 15 книг Евклида. В первых шести книгах речь идет о линиях и поверхностях, а в одиннадцатой и двенадцатой – о телах.

17. Теофраст<sup>28</sup>, ученик Аристотеля, написал четыре книги по истории геометрии *Historiarum Geometriae* и книгу о неделимых линиях *Lineis individuis*; (см. Диогена Лаэртского).

18. Эратофен изобретает прибор, названный им самим мезолябия, с помощью которого делийская задача по удвоению куба очень легко решается.

19. Архимед написал трактат о шаре, исследование о цилиндрах, работу о квадратуре параболы и две книги о равновесии. Между прочим, он же является открывателем знаменитого соотношения диаметра и длины окружности, составляющего 7 к 22, причем настолько точно, что увеличение чисел не отражается на точности результата.

20. Аполлоний (Пергский), по прозванию Великий геометр, написал монографию из восьми книг о конусах и их свойствах и сечениях *Определённое сечение* (*de Sectione Determinata*), *Пропорциональные сечения* (*de Sectione Proportionis*), *Сечение протяжений* (*de Sectione Spatii*), *Наклонения* (*de Inclinationibus*), *Касания* (*de Tangentibus*)<sup>29</sup> и еще два трактата *Исчисление двойных винтовых линий* (*ratione duplicata Cochleæ*)<sup>30</sup>.

21. После Аполлония ничего значительного, заслуживающего упоминания, написано не было.

22. Адриан Метиус<sup>31</sup> доказал, что отношение диаметров окружностей к их длине составляет с большой точностью 113 к 355.

23. Людольф ван Кёлен<sup>32</sup> (*Ludolph von Cölln*) довел точность до следующего соотношения 100 000 000 000 000 000 к 314 159 264 358 979 323 846, а Шарп<sup>33</sup> получил 73 точных десятичных знака.

24. Декарт пошел дальше и первым применил в геометрии достижения алгебры.

25. Наконец Ньютон и Лейбниц как в геометрии, так и вообще во всех математических науках превзошли всех предшественников. Последний открыл закономерность, что если диаметр окружности принять равным 1, то четвертая часть окружности есть  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$  и т.д. Этот ряд в честь его открывателя назван рядом Лейбница<sup>34</sup>.

26. Самыми известными исследователями и издателями книг Евклида являются:

Оронций Финеус (*Orontius Finæus*) 1530 г.<sup>35</sup>

<sup>16</sup>У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

Якоб Пелетье (Jacob Peletier) 1557 г.<sup>36</sup>

Никколо Тарталья (Nicolaus Tartaglia) 1560 г.<sup>37</sup>

Франциск Флузатес Кандалла (Frantziscus Flussates Candalla) 1578 г.<sup>38</sup>

Клавиус (Clavius) 1578 г.<sup>39</sup>

Дешаль (Dechales)<sup>40</sup>, Эригон (Herigonius)<sup>41</sup>, Ро (Rohault)<sup>42</sup> и т.д.

Лучшим изданием Евклида считаются сочинения Евклида, подготовленные и изданные Исааком Барроу<sup>43</sup>.

27. Из числа других книг, посвященных геометрии, в качестве самых известных я могу назвать следующие:

Андре Таке<sup>44</sup>. *Элементы плоской и телесной геометрии* (Elementa Geometriæ planæ et Solidæ) – предназначена, собственно говоря, для ученых.

Дешаль *Элементы* Евклида, исправленные Озанамом<sup>45</sup> – в отличие от вышеуказанной предназначена для начинающих, очень подробное описание.

Геометрия Арно<sup>46</sup> написана в схоластической манере.

Отец Парди (Père Pardies)<sup>47</sup>; отец Бернар Лами (Père Bern: Lamÿ)<sup>48</sup>; Малезье (Malezieu)<sup>49</sup>; Нодэ (Naudé)<sup>50</sup>; etc.

Геометрия Клеро<sup>51</sup> самая простая и заслуживает внимания читателей.

28. Издания из области высшей геометрии

Аполлоний Пергский был первым автором трудов по коническим сечениям (de Sectionibus Coni).

Серенус<sup>52</sup> – *О сечении цилиндра*.

Феодосий<sup>53</sup> написал *Сферическую* (Spherica), а Архимед написал *О коноидах и сфероидах* (de Conoidibus, de Spheroidibus) и *Квадратура параболы* (de quadratura parabolæ).

Среди новых авторов внимания заслуживают:

Грегюар де Сен-Венсан (Grégoire de St. Vincent)<sup>54</sup>, Вивиани (Viviani)<sup>55</sup>, Фермор (Fermor), Исаак Барроу (Isaac Barrow), де ла Гир (de la Hire)<sup>56</sup>, маркиз де Лопиталь (le Marquis de l'Hopital) и др.

29. Авторы написанных книг по практической геометрии или о землемерном искусстве: P. Mallèt<sup>57</sup>; Clermont<sup>58</sup>; Ozanam<sup>59</sup>; Daudet<sup>60</sup>; Schwenter<sup>61</sup>; Lambert<sup>62</sup> и др.

30. Маркшейдерское дело и подземная геодезия до 1574 года были секретными науками.

Впоследствии в 1615 году Эразм Рейнгольд<sup>63</sup>, врач из Зальфельда и сын одноименного известного математика из Виттенберга, впервые написал работу *Подземная геометрия* (Geometria subterranea).

После этого в 1688 году Николаус Фойгтель<sup>64</sup> также пишет книгу о маркшейдерском деле, которая издается повторно в 1713 году в Айслбене.

И, наконец, в 1726 г. вышли *Institutiones Geometriæ subterraneæ methodo mathematica demonstratæ* Вайдлера<sup>65</sup>, которые считаются лучшими.

31. Пропорциональный циркуль был изобретен Йостом Бюрги<sup>66</sup> и описан Левино Хульсио (Levino Hulsio)<sup>67</sup>, Гольдманом (Goldmann)<sup>68</sup>, Шеффельтом (Scheffelt)<sup>69</sup> и другими.

#### 4. Комментарии Г. И. Синкевич к рукописи И. А. Эйлера “История геометрии”

##### 1-й тезис

<sup>1</sup>Соответствует Лексикону Вольфа, статья “Геометрия”, с. 294, столбец 538, <https://archive.org/details/vollstndigesmat00wolfgoog/page/n293/mode/2up>, но не совпадает с трактовкой Jean-Étienne Montucla из его Histoire des mathématiques.

##### 2-й тезис

<sup>2</sup>Соответствует изложению Jean-Étienne Montucla из его “Histoire des mathématiques” (Изд. 1779 г., ч. 1. С. 320–327).

### 3-й тезис

<sup>3</sup>У Монтюкла об Аврааме (с. 47): “Что касается истории Иосифа, который называет Авраама старейшим арифметиком и заставляет его обучать египтян первым элементам арифметики, то легко увидеть, что этот историк хотел украсить первого отца своего народа некоторыми знаниями, которые он уважал у иностранцев. Это одна из тех черт, которую может приветствовать только какой-нибудь компилятор, лишенный критики и аргументации”.

### 4-й тезис

<sup>4</sup>У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

<sup>5</sup>Если две прямые пересекаются, то образуют равные между собой углы через вершину.

<sup>6</sup>Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>.

<sup>7</sup>В круге угол, <заключённый> в полукруге, – прямой, в большем сегменте – меньше прямого, в меньшем же – больше прямого; и кроме того, угол большего сегмента больше прямого, меньшего же – меньше.

<sup>8</sup>В равноугольных треугольниках стороны при равных углах пропорциональны и соответственными будут стягивающие равные углы.

<sup>9</sup>Deslandes, A.F. Histoire Critique de la Philosophie, TOME 2. 1737 (André-François Boureau-Deslandes, 1689–1757, французский учёный, философ и писатель). Цитируется у Монтюкла.

### 5-й тезис

<sup>10</sup>Из книги Ямвлих “О Пифагоровой жизни” ([7], с. 29), а также из “Истории математики” Монтюкла, т.1., с. 112, который, в свою очередь, ссылается на Ямвлиха. Сочинение Ямвлиха было известно в греческом списке, а также в 1607 г. переведено на латынь, издано в Женеве.

### 6-й тезис

<sup>11</sup>Во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противоположным, и внутренние три угла треугольника <вместе> равны двум прямым.

<sup>12</sup>В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен <вместе взятым> квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

<sup>13</sup>Гекатомба (от греческого “сто быков”) – торжественное жертвоприношение в Древней Греции, описываемое ещё в Илиаде. Эпизод с Пифагором описан у Диогена Лаэртского.

<sup>14</sup>В средние века теорема Пифагора, *magister matheseos*, определяла границу профессиональных математических знаний. В 1336 г. в Парижском университете было введено правило: ни один студент не может получить ученую степень, если не посещал лекции по математике. Из комментария к первым шести книгам Евклида 1536 г. следует, что кандидаты на степень Artium Magister должны были дать клятву, что посещали лекции по этим книгам. Экзамены, если вообще проводились, вероятно, не выходили за рамки первой книги, о чем свидетельствует наименование “magister matheseos”, примененное к теореме Пифагора, последней в первой книге.

<sup>15</sup>Луций Элий Аврелий Коммод (Commodus) – римский император II века. Во время его правления чеканилось много различных монет, медалей и медальонов с его изображением. При Коммодe искусство изготовления бронзовых медальонов достигло своей вершины по качеству и разнообразию исполнения, особенно за последние семь лет его правления. Нам не удалось найти информации о римских медалях или монетах с Пифагором на реверсе. Возможно, И. А. Эйлер видел такой медальон в мюнц-кабинете Петербургской или Берлинской Академии наук. Но на греческих античных монетах Пифагор изображался в основном в сидячем положении с жезлом в руке по подобию Зевса.

*7-й тезис*

<sup>16</sup>Эта история отсутствует у Диогена Лаэртского, но есть у Витрувия.

*8-й тезис*

<sup>17</sup>Гиппократ Хиосский (вторая половина V в. до н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Составил первый свод геометрических знаний “Начала”. По мнению Ван-дер-Вардена, в его сочинении изложен материал, соответствующий первым четырём книгам “Начал” Евклида. Гиппократ занимался знаменитой задачей античности – удвоением куба, и решил её, сведя к задаче на нахождение между двумя данными отрезками двух средних в непрерывной пропорции.

*9-й тезис*

<sup>18</sup>Ни одно из сочинений Демокрита не сохранилось. Диоген Лаэртский перечисляет следующие труды Демокрита по математике: “О познании разницы, или О соприкосновении круга и шара”, “О геометрии”, “Геометрия”, “Числа”, “Об иррациональных линиях и телах” 2 книги, “Проекция”, “Большой год, или Астрономия” (расписание), “Состязание часов [с небосводом]”, “Описание неба”, “Описание земли”, “Описание полюсов”, “Описание лучей”. Таковы сочинения по математике. В исследуемой нами рукописи И. А. Эйлера пунктуация поставлена так: Об иррациональных линиях; о твёрдых телах. Подлинное название трактата Демокрита, названного у Диогена Лаэртского “Об иррациональных линиях и телах” 2 книги. Название “*de Solidis*” отсутствует не только у Диогена Лаэртского, но и у других исследователей Демокрита. Известно, что Демокрит представлял тела и геометрические объекты состоящими из неделимых атомов. В силу этого длина отрезка равна количеству атомов в нём, площадь равна длине всех содержащихся в ней отрезков, объём равен сумме площадей сечений. Демокрит первым установил, что объём пирамиды и конуса равен соответственно одной трети объёма призмы и цилиндра с той же высотой и с той же площадью основания. Заметим, что Л. Эйлер в 1772 г. опубликовал работу по дифференциальной геометрии “Твердые тела, поверхность которых может быть развернута на плоскость” [15]. Л. Эйлер начинает эту статью с того, что некоторые тела, например, цилиндр и конус, могут быть развёрнуты на плоскость. Возможно, что отец и сын Эйлера обсуждали в связи с учением Демокрита развитие метода неделимых.

*11-й тезис*

<sup>19</sup>Из большого количества святилищ Аполлона, святилища в Дельфах и на Делосе считаются всегреческими святилищами, они почитаются и за пределами Греции. Небольшой остров *Делос*, в центре Кикладских островов, был местом рождения Аполлона. Город *Дельфы* расположен в самом сердце Центральной Греции. По преданию, здесь родился сын Аполлона – Дельф. По другой легенде, Аполлон принял образ дельфина, чтобы привести моряков к своему святилищу. *Дельфийский оракул* – один из важнейших оракулов Древней Греции. Предсказания выдавались Пифией, почитаемой жрицей Аполлона, которая, выпив воды из источника, впадала в экстаз, вдыхая аромат листьев лавра, который исходил из проема святилища храма. *Делийская, или дельфийская задача* – одна из классических задач античной математики (наряду с задачами квадратуры круга и деления угла на три равные части). Согласно античному преданию, жители острова Делос обратились к дельфийскому оракулу с просьбой о прекращении эпидемии. В ответ они получили задание удвоить объём кубического алтаря Аполлона, сохранив при этом его форму, что в современной постановке означает  $x^3 = 2a^3$ . Гиппократ из Хиоса свёл задачу к нахождению двух средних пропорциональных  $a : x = x : y = y : 2a$ . Эратосфен из Кирены, Аполлоний из Перги, Архит и Герон из Александрии применяли кривые высших порядков и геометрию движения. Задачу также пытались решить с помощью циркуля и линейки, но это невозможно. Вот что пишет Плутарх в своей восьмой книге “За Стольных бесед”: “Сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям, ибо они думали получить две средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии, и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вме-

сто того, чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов” ([1], с. 224).

<sup>20</sup>Это изложение совпадает с изложенным в «Истории математики» Монтюкла, 1758, с. 187.

<sup>21</sup>См. Монтюкла, там же.

#### 12-й тезис

<sup>22</sup>Леонт (вторая половина IV в. до н.э.), математик, известный только по “каталогу геометров” Прокла. Учился у Неоклида, ученика Платона. Прокл сообщает, что Леонт составил *Начала*, весьма тщательные как по количеству, так и по полезности доказываемого; обобщил многие теоремы и изобрёл метод исследования границ разрешимости задач. Возможно, сочинение Леонта было использовано Евклидом.

#### 13-й тезис

<sup>23</sup>Архит Тарентский (между 435 и 410 годами до н. э. – между 360 и 350 годами до н. э.), философ-пифагореец, математик и механик, теоретик музыки, государственный деятель и полководец. В историю науки вошёл как основоположник оптики и механики, один из первых теоретиков музыки, автор классического довода в пользу бесконечности Вселенной. Задачу об удвоении куба он решил весьма оригинальным стереометрическим построением, основанным на рассмотрении пересечения нескольких поверхностей вращения.

#### 14-й тезис

<sup>24</sup>Аристей Старший (около 300 года до н. э.), древнегреческий математик, современник Евклида. Папп Александрийский сообщает, что Аристей был автором трактата “О пространственных местах” в пяти книгах. Гипсикл в принадлежащей ему дополнительной XIV книге *Начал* Евклида сообщает, что Аристее принадлежала книга “О сравнении пяти правильных тел”.

#### 15-й тезис

<sup>25</sup>Гемин (I век до н. э.), древнегреческий математик и астроном. Единственное сохранившееся сочинение Гемина называется “Введение в небесные явления”. Гемин составил обширный трактат о математике. Эта работа не сохранилась, но её цитируют Прокл, Евтокий, ан-Найризи и другие авторы. Прокл сообщает, что Гемин в “Добротолубии” делил математику на мыслимую и чувственную, иначе говоря, на чистую и прикладную. К первой он относил геометрию и арифметику, ко второй – механику, астрономию, оптику, геодезию, канонику (теорию музыкальной гармонии) и логику (искусство вычислений).

#### 16-й тезис

<sup>26</sup>В XIII–XVI веках историки не различали философа Евклида из Мегары и математика Евклида из Александрии, т.к. Диоген Лаэртский (нач. III века) не знал Евклида-математика, а относительно Евклида из Мегары сообщил, что оспаривая доказательства, он оспаривал в них не исходные положения, а выведение следствий. *Евклид из Мегары*, или Эвклид – греческий философ, ученик Сократа, основатель мегарской школы; жил около 400 г. до н. э. В XIII–XVI веках Евклид из Мегары считался автором математических “Начал” (ок. 300 г. до н. э.).

Впервые в Европе “Начала”, или “Элементы” Евклида опубликовали на латыни в 1482 году и на греческом в 1533 году.

Попробуем определить, когда начали различать Евклида-философа и Евклида-математика.

В 1570 г. Джон Ди, собравший одну из лучших научных библиотек Европы своего времени, читал лекции по “Началам” Евклида в Париже, и написал предисловие к английскому переводу издания Евклида, которого он называет Евклидом из Мегары [13].

В 1572 г. вышел латинский перевод “Начал” Евклида с греческого, сделанный Федерико Коммандино, но в нём не содержится никакой биографической информации о Евклиде [11].

В 1615 г. Джозеппе (Иосиф) Бланканус в своей “Диссертации о природе математики. С хронологией известных математиков” не указывает место рождения Евклида и его отличие

от Евклида из Мегары ([8], с. 6).

В 1620 г. профессор Генри Сэвил (Savile) основал в Оксфорде кафедру геометрии и прочитал цикл из тринадцати вводных лекций по “Началам” Евклида. Заметим, что именно Сэвил первым назвал Теона Александрийского комментатором Евклида, в то время как начиная с работ Б. Замберти (1473 – после 1543), первого переводчика Евклида, господствовало мнение, что автором доказательств в элементах Евклида был Теон Александрийский. В первой же своей лекции Сэвил опровергает ошибку, что Евклид из Мегары был геометром [28]. Лекции Г. Сэвила были изданы в 1621 г. [20].

В 1650 г. Гергард Иоганн Фосс, филолог и историк, обогативший историю математики методами источниковедения, написал вышедшие посмертно сочинения 1650 г. “О природе и строении всех математических наук с добавлением хронологии математиков” [24] и переизданном как часть этой книги в 1660 г. “О четырёх основных искусствах, о филологии и математических науках, с добавлением хронологии математиков, в трёх книгах” [25]. Он различает Евклида-философа из Мегары и Евклида-математика из Александрии. В первом параграфе 15 главы “Евклид и его геометрия” книги ([26], с. 52-53, раздельная пагинация) Фосс пишет, что греческие математики работали не только в Греции, но и в Египте, что подтверждено письменными документами. Он ссылается на письма Сидония Аполлинария, упоминаемые у Диогена Лаэртского, сочинения Клеанфа, Хрисиппа. Указывает, что Евклид Мегарский был учеником Сократа и основателем философской школы эвристики. Чтобы послушать Сократа, Евклид Мегарский приходил из Мегар в Афины по ночам (мегарцам было запрещено посещать Афины). Евклид Мегарский упомянут у Платона в его диалоге “Теэтет”.

Евклид-геометр, по словам Фосса, согласно свидетельству Прокла Диадоха, жил в Египте, был математиком и учителем, как ранее Теофраст, во время правления Птолемея, сына Лага. Между обоими Евклидами пролегло около 90 лет. Фосс рекомендует читать Евклида в переводах замечательного Федерико Коммандино, а о самом Евклиде читать у Генри Сэвила.

Ж.Э. Монтюкла был знаком с работами Бальди, Коммандино, Бланкануса и Фосса, Хейльброннера. В 1758 г., в I ч., кн. IV Истории Математики (с. 216-217) Монтюкла пишет: «On ne confond plus l'Euclide, dont nous parlons ici, avec celui de Mégare, le Fondateur d'une Secte plus renommée par son acharnement à la dispute, & l'insoumission de divers sophismes, que par ses progrès dans la recherche de la vérité... Euclide de Mégare fut un des premiers Auditeurs de Socrate... Il falloit ignorer entièrement ces faits pour confondre deux hommes aussi différens. (Мы больше не путаем Евклида, о котором мы здесь говорим, с Евклидом Мегарским, основателем школы, более известной своими неустанными спорами и навязчивостью различных софизмов, чем своими успехами в поисках истины. Евклид из Мегары был одним из первых слушателей Сократа. Наш Геометр, напротив, был современником первого Птолемея и, следовательно, жил почти столетием позже. Эти факты нужно было полностью игнорировать, чтобы спутать двух столь разных людей). Но Монтюкла не ссылается в этом на Deslandes, как указывает И. А. Эйлер.

<sup>27</sup>Возможно, И. А. Эйлер имеет в виду André-François Boureau-Deslandes, 1689–1757, французского учёного, философа и писателя. Его “Критическая история философии” [9] цитируется у Монтюкла. Возможно, это Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande (1775–1800), французский астроном, работавший в Берлине в годы пребывания там семьи Эйлера. Лаланд переиздал “Историю математики” Жана Этьена Монтюкла, причём последние два тома составил сам, в течение 25 лет (1775–1800). В сокращённом виде в 1789 г. его “Астрономия” была издана в Санкт-Петербурге в русском переводе [2].

#### 17-й тезис

<sup>28</sup>Теофраст (Теофраст, IV-III вв. до н.э.), древнегреческий философ, естествоиспытатель, теоретик музыки, основатель ботаники и географии растений. Наряду с Аристотелем основателем ботаники и географии растений. Вероятно, И. А. Эйлер имеет в виду упоминаемые у Диогена Лаэртского сочинения Теофраста “Геометрические разыскания” в 4-х книгах и “О

неделимых линиях”. Благодаря исторической части своего учения о природе выступает как родоначальник истории философии (особенно психологии и теории познания).

20-й тезис

<sup>29</sup>De Tactionibus (“Tangencies”).

<sup>30</sup>“On the Cylindrical Helix”(упоминается у Прокла). О втором трактате информацию найти не удалось.

22-й тезис

<sup>31</sup>Adriaan Metius (Adriaan Adriaanszoon по прозвищу Метиус (измеритель), 1571–1635), голландский геометр, астроном и военный инженер. Учился у Рудольфа Снеллиуса, некоторое время работал у Тихо Браге, затем вернулся на родину, где преподавал математику топографам. Профессор математики, навигации, геодезии, военной инженерии и астрономии в университете Франекера (Нидерланды). Изготавливал оптические измерительные инструменты. Опубликовал трактаты об астролябии и геодезии. В 1585 году его отец, математик и картограф Adriaan Anthonisz с помощью непрерывных дробей вычислил приближение числа  $\pi$  как  $355/113$ . Позже Метиус опубликовал результаты своего отца. Значение  $355/113$  традиционно называют числом Метиуса.

23-й тезис

<sup>32</sup>Людольф ван Кёлен (Ludolph von Cölln, также van Keulen, van Collen, van Cuelen, ван Цейлен, 1540–1610), нидерландский математик. В 1596 г., в работе “Van den Circkel Daer iu gheleerdт werdt te vinden de naeste Proportie des Circkels-diameter legen synen Omloop” (Delf., 1596, в латинском переводе Виллеброрда Снеллиуса “De Circulo et adscriptis Liber”, Лейден, 1619) вычислил 35 десятичных знаков числа  $\pi$ . В течение последующих веков это число называлось числом Людольфа. Постепенно его вытеснило употребляемое Эйлером более удобное обозначение  $\pi$  по начальной букве греческих слов *периферия* (окружность) и *периметрос* (периметр).

<sup>33</sup>Абрахам Шарп (Abraham Sharp, 1653–1742), английский астроном и математик. работал ассистентом у королевского астронома Д. Флемстида в Гринвичской обсерватории. Составил таблицы движений спутников Юпитера, занимался изготовлением астрономических инструментов, прославившись как искусный их градуировщик. Изготовил стенной квадрант радиусом 6 футов 9 дюймов, на котором Флемстид вёл наблюдения более 30 лет. Рассчитал число  $\pi$  с точностью до 72 знака после запятой. Опубликовал учебник “Geometry Improved “ (Усовершенствованная геометрия) и логарифмические таблицы.

25-й тезис

<sup>34</sup>Лейбниц опубликовал этот результат в 1682 г. в работе [17].

26-й тезис

<sup>35</sup>Французский математик и картограф Оронций (Оронций Финеус, Orontius Finnæus или Finæus, фр. Oronce Finé; 1494–1555) был учителем Бутео. Финеус в 1532 г. издал в Париже книгу “Protomathesis” (Введение в математику), в которой объясняются основные понятия, используемые в “Элементах” Евклида и вычисление площадей плоских фигур по Архимеду. Введение к “Protomathesis” в виде письма к Франциску I датируется 1530 г. В “Protomathesis” Финеус приводит свой метод решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки, подвергнутый позже критике его учеником Иоганном Бутео.

<sup>36</sup>Жак Пелетье (Jacques Pelletier du Mans, Jacobus Peletarius, 1517–1582), французский поэт и математик. Издал комментированный латинский перевод первых шести книг “Начал” Евклида *Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex*. Lyon 1557. (Переиздание: 1610, французский перевод: 1611).

<sup>37</sup>Никколо Тарталья (Niccolò Tartaglia, 1499–1557), итальянский математик-самоучка, инженер фортификационных сооружений. Известен тем, что в 1534 году выиграл картель (диспут), решив уравнения третьей степени. Его результаты были обобщены и опубликованы Дж.



Кардано в *Ars magna* (Великое искусство, 1545). Занимался переводами Архимеда и Евклида на итальянский язык. 1543, *Euclide megarense philosopho: solo introduttore delle scienze mathematiche* (Евклид - философ из Мегары) – первый перевод пятнадцати книг Евклида на итальянский язык. Если предшествующие латинские переводы были сделаны с арабского, и содержали ошибки в Пятой книге (теории пропорций Евдокса), издание Тартальи было основано на латинском переводе Замберти неповрежденного греческого текста, в нём содержание Книги V передавалось без искажений. Переводы Тартальи продолжали публиковаться после его смерти. Известно венецианское издание Евклида перевода Тартальи 1565 г. В 1560 эта книга не издавалась.

<sup>38</sup>*Euclidis Megarensis Mathematici* [12], издания 1566 и 1578 гг.

Франсуа де Фуа (François de Foix, 1512–1594), из ветви семьи графов Фуа, по имени Фуа-Кандаль. Епископ и настоятель двух монастырей. Основал кафедру математики в Университете Бордо-II (1591) и выделил ей 2000 экю в качестве годовой пенсии. Претендент на эту кафедру выбирался в результате открытого конкурса, в ходе которого ему нужно было выявить и решить две геометрические гипотезы. Франсуа де Фуа также приобрел дом для бесплатного проживания и питания нуждающихся студентов. Перевёл Евклида на основе перевода Замберти. К пятнадцати книгам Евклида добавил от себя шестнадцатую, о вписанных многогранниках. В издании 1578 г. он добавил ещё две дополнительные книги о многогранниках. Знаменитая английская версия *Элементов* 1570 года включала 16-ю книгу Фуа-Кандаля. Она была переведена на латынь Кристофом Клавиеусом, чей адаптированный для обучения перевод *Элементов* 1574 г. был, вероятно, самой читаемой версией текста в семнадцатом веке. Был еще и голландский перевод. Кеплер ссылаясь на вложенные многоугольники Фуа-Кандаля в своих астрономических сочинениях. Фуа-Кандаль был альпинистом, руководил первым восхождением на вершину Миди-д’Осо в Пиренеях.

<sup>39</sup>Христофор Клавий (Клавий, Christophorus Clavius, 1538–1612, Рим), немецкий математик и астроном, иезуит. Главный разработчик окончательной версии современного григорианского календаря, один из самых уважаемых астрономов в Европе. В 1574 году Клавий опубликовал снабжённый комментариями перевод “Начал” Евклида (неточный) *Euclidis elementorum libri XVI cum scholiis* (Элементы Евклида для школ). Этот перевод многократно переиздавался, вплоть до 1717 года. Он поместил в перевод собственное “доказательство” пятого постулата Евклида, основанное на положении: “Эквидистанта прямой есть прямая”; позднее выяснилось, что это утверждение равносильно пятому постулату.

<sup>40</sup>Клод Франсуа Миллие Дешаль (Claude François Milliet Dechales, Claude Dechales, de Chales, de Challes, 1621–1678), французский священник-иезуит, математик. Опубликовал перевод работ Евклида *Huict livres des Elemens d’Euclide rendus plus faciles par le RP Claude François Milliet Dechales, de la Compagnie de Jésus* (Восемь упрощённых книг Элементов Евклида, 1672). Второе издание вышло в 1674 на латыни в восьми книгах: *Une deuxième édition d’Euclide, Elementorum Euclidis libri octo, ad faciliorem captum accommodati* (Элементы Евклида в восьми книгах, облегчённые для употребления). В 1685 г. вышло английское издание *Euclide traduit en anglais sous le titre Les éléments d’Euclid expliqués, dans une méthode nouvelle, mais très simple: avec l’utilisation de chaque proposition à travers toutes les parties des mathématiques* Claude Dechales («Элементы Евклида» объясненные новым, но очень простым методом: с использованием каждого предложения во всех разделах математики Клода Дешаля). Есть также французское издание 1778 г. [10], которым, вероятно, пользовался И. А. Эйлер. Переводы Дешаля были популярны во Франции, но уступали переводу Роберваля. Д. Смит пишет, что хотя Дешаль издал Евклида, но вклад его самого в предмет был более чем скромным ([21], с. 386).

<sup>41</sup>Пьер Эригон (Pierre Hérigone, Petrus Herigonius, 1580?–1643), французский математик и астроном, был преподавателем математики в Париже. О его жизни известно очень мало. Среди исследователей существует гипотеза, что под этим именем скрывались математики Дени

Анрион (de Denis Henrion) и/или Клеман Сириаке де Манжен (de Clément Cyriaque de Mangin). Состоял в переписке с Мерсенном. Развивая символическую алгебру Ф. Виета (1591), был сторонником создания формального универсального языка математики, в чём предшествовал Дж. Пеллю, Г. Лейбницу и Дж. Пеано. Предложил несколько удачных математических обозначений (знак угла, знак перпендикулярности). Издал фундаментальный свод математических знаний того периода в шести томах, под названием “Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus, per notas reales et universales, citra usum cujuscunque idiomatis intellectu faciles” (Курс математики, новый, короткий и яркий метод доказательства через обозначения, реальные и универсально применимые без использования любого разговорного языка). Первые четыре тома опубликованы в 1632 году, пятый – в 1637 году, последний – в 1642. Второе издание 1644 г. Текст был расположен тремя параллельными столбцами: латинский, французский и язык формальных обозначений (третий столбец – только для доказательств). Его цитировали выдающиеся математики следующего поколения, в частности, Паскаль и Лейбниц. Создание новых символов и желание перевести Евклида на чисто символический язык также можно найти также у Уильяма Оутреда. Разделение доказательств на три столбца с риторическим, синтетическим и символическим изложением, встречается также у Дж. Пелла.

В 1639 году Пьер Эригон издает небольшой словарь, содержащий этимологию и значение имен неясных математических терминов.

Среди сведений, изложенных в сочинении “Cursus mathematicus”, есть география, краткое изложение работ Симона Стевина, символическая алгебра Виета, метод касательных Ферма, и популярное изложение проблемы определения долготы, и собственный метод, возникший на основе работ Галилея. В пятом томе находится краткое изложение знаний того времени в области оптики. Курс замечателен новизной обозначений и поставленной цели. В изложении *Элементов* Евклида Эригон использовал фрагменты перевода Клавиеуса. Эригон предлагает изложить рассуждения *Элементов* Евклида с помощью собственной логической символики. Его цель заключается в том, чтобы выявить стадии рассуждения и “механизировать” его. В его сознании алгебра неразрывно связана с геометрией, доказательства по существу основаны на аксиомах Евклида, что придает связность и прочную основу его представлению. Эригон утверждал, что он изобрёл новый метод построения доказательств, кратких и понятных, без использования какого-либо языка, в чём ему позже следовал Лейбниц. Н. Бурбаки квалифицирует попытку Эригона создания символического письма, предназначенного для представления логических операций, как очень поверхностную и не ведущую к прогрессу в анализе математических рассуждений. Эригон применял свой формализм также к таким областям, как география, космография, навигация и военное искусство. В пятом томе своего курса Эригон пытается преодолеть недостатки метода Морена для определения долготы в море и развивает метод, использующий в качестве часов затмения спутников Юпитера. Этот метод Эригона будет снова использован тридцатью годами позже астрономом-геометром Кассини. В этой же книге Эригон излагает точки зрения Коперника, Ландбергиса и Кеплера. Он исключает промежуточную систему Тихо Браге, который, как и в модели Виета, утверждает, что светила (Солнце и Луна) вращаются вокруг Земли, в то время как планеты (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн) вращаются вокруг Солнца. Это система называется *геогелиоцентризмом*. Эригон утверждал, что мнение тех, кто помещает солнце в центр, более вероятно. Исаак Ньютон знал об исследованиях Ферма о касательных по изложению Пьера Эригона. С 1672 по 1680 год Готфрид Вильгельм Лейбниц интересовался попытками изложить доказательства Евклида новыми методами, включая метод Эригоны. Он изучал Эригона в надежде найти истинную аксиоматику рассуждения, а также с целью создать универсальный язык математики. Попытки Эригона создать символический язык математики высоко ценил Монтюкла.

<sup>42</sup>Жак Ро (Jacques Rohault, 1618–1672), французский философ, физик, математик, последователь картезианства. Популяризатор и талантливый преподаватель картезианской физи-

ки. Читал в Париже научно-популярные лекции с демонстрацией экспериментов для широкой публики. Автор многократно переизданных трактатов по физике и механике. Занимал должность профессора математики и философии дофина и преподавал математику принцам Конти (Conti). Тематика этих курсов была следующей: первые шесть книг Евклида, арифметика, тригонометрия и сферические треугольники, практическая математика (геодезия, картография, измерения), фортификация, простые машины (лебедка, рычаг, клин), перспектива в рисунке. Большая популярность публичных лекций привела Ро к идее проводить еженедельные занятия дома (“среды Ро”) с показом экспериментов по капиллярности, магнетизму, гидростатике, оптике, деформации твёрдых тел и проч. Это были эмоциональные зрелищные представления: Ро показывал явления таким образом, чтобы вызвать противоречивые объяснения аудитории. Затем, путем контр-экспериментов и рассуждений, он подводил публику к своему собственному выводу: факты предшествуют объяснениям. Эти среды имели огромный успех, у него бывали люди всех возрастов, полов и сословий. Благодаря Ро, картезианская физика вошла в моду в салонах. С 1664 года Ро зарекомендовал себя как лидер картезианской науки. Его работы были отмечены Г. В. Лейбницем как самые оригинальные среди работ учеников и продолжателей Рене Декарта. В 1690 г. посмертно был издан его перевод “Шесть первых книг Элементов Евклида” (Jacques Rohault. Oeuvres posthumes de Mr. Rohault, The Hague. Vol. 1).

Не путать с астрономом Джакомо Ро (Giacomo Rho, 1593–1638), членом иезуитской миссии в Китае, членом астрономического бюро в Пекине, изложившем на китайском языке *Таблицы пяти планет, Теорию Луны и Солнца, Введение в астрономию* (1625–1638).

<sup>43</sup>В Бодлианской библиотеке Оксфордского университета, старейшей в Европе, хранится два византийских манускрипта греческого текста Элементов Евклида. Исаак Барроу (Isaac Barrow, 1630–1677) издал перевод пятнадцати книг Элементов на латыни в 1655 г., и на английском в 1660 г. (*Euclidis elementorum libri XV breviter demonstrati* (Элементы Евклида, кратко доказанные). В 1657 г. он опубликовал перевод сочинения Евклида *Data* (Данные). Переводы Барроу высоко ценил Ж.Э. Монтюкла (т.1, с. 225).

#### *27-й тезис*

<sup>44</sup>Андре Таке (André Tacquet, Andrea Tacquet, 1612–1660), брабандский бельгийский математик, иезуит. Ученик Григория Сен-Винсента (Grégoire de Saint-Vincent, 1584–1667). Профессор математики в иезуитских колледжах Лувена и Антверпена. Основные исследования Андре Таке относятся к геометрии и истории математики. Таке написал много хороших учебников по математике для иезуитских колледжей. Самым популярным из них был *Elementa geometriae planae ac solidae. Quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Auctore Andrea Tacquet, Antwerp, 1654* (Элементы плоской и телесной геометрии. С избранными теоремами из Архимеда. Эта книга была составлена из “Элементов” Евклида с использованием материалов Архимеда, материал в ней был изложен методически ясно и отчётливо. В течение последующего столетия книга многократно переводилась и переиздавалась. Помимо неё были написаны *Cylindricorum et annularium libri IV, Antwerp 1651* (Цилиндрики и кольца, в четырёх книгах); *Arithmeticae theoria et praxis. Louvain, 1656* (Теоретическая и практическая арифметика); *Cylindricorum et annularium liber V. Antwerp, 1659* (Цилиндрики и кольца, книга пятая); *Elementa Euclideae, geometriae. Amsterdam, 1725* (Элементы Евклида, геометрия). Помимо того, что Таке нашёл новые способы некоторых доказательств (в комбинаторике, вычислении объёмов тел вращения), его методы рассуждения сослужили большую службу для зарождающегося *Анализа* (как, например, переход от конечной прогрессии к бесконечному ряду).

<sup>45</sup>Имеется в виду посмертное исправленное издание 1746, или переиздания 1753, 1778 гг. перевода Элементов Дешаля, под редакцией Озанама [10] (Элементы Евклида, Р. П. Дешаль и М. Озанам, Королевская академия наук. Новое и простые доказательства, дополненные большим количеством новых предложений и новых применений; Полный трактат об арифметических пропорциях и геометрических пропорциях М. Одьерна. Новое издание, переработанное,

исправленное и значительно дополненное Автором). В предисловии к изданию 1778 г. сказано: “Об этом новом издании. Впервые эти экземпляры были напечатаны in-12 (формат 12<sup>о</sup> приблизительно 80х51 мм – *примечание Г.С.*) в 1746 году. Второе издание с некоторыми изменениями было выпущено в 1753 году; и именно из этого второго издания они всегда переиздавались. Но Автор, демонстрируя весь опыт, который он приобрел в искусстве преподавания в результате непрерывных упражнений на протяжении более сорока лет, недавно вновь с величайшим вниманием пересмотрел свою работу; исправил те доказательства, которые вызывали сомнения, и могли вызвать затруднения. Теперь все доступно для всех, кто внимательно ее прочитает”. В этом же издании имеется небольшое предисловие Ж.Э. Монтюкла. По всей видимости, И. А. Эйлер имел в виду именно издание 1778 г.

Жак Одьерн (Audierne, Jacques, 1710–1785), французский математик, издатель. Преподавал математику в Париже. В период с 1746 по 1778 г. выпустил 19 изданий переводов “Элементов” Евклида. Помимо различных учебников, писал драмы и комедии; предисловия, послесловия, колофоны к различным книгам; а также переложения книг других авторов. Самая известная изданная им книга – Ж. Озанам “Метод съемки планов и карт суши и моря: содержащий практику геометрии как на бумаге, так и в поле, прямолинейную тригонометрию и манеру съемки, рисования и представления в перспективе всех видов планов Жака Озанам”. Им самим написано несколько книг по плоской и сферической тригонометрии, измерениям, геодезии, картографии.

<sup>46</sup>Вероятно, имеется в виду книга Антуана Арно и Пьера Николя “Логика, или искусство мыслить” (Логика Пор-Рояля, *La logique, ou l'art de penser*), написанная в 1662 г. Благодаря блестящему использованию методологии Р. Декарта и Б. Паскаля, книга на многие столетия стала одним из лучших учебников логики. Четвертая часть Логики – О методе, главы III–XI посвящены логическим основам геометрии.

<sup>47</sup>Игнас-Гастон Парди (Père Pardies, Ignace-Gaston Pardies), отец-иезуит, литератор, математик и физик. Преподавал философию и математику в престижном лицее Lycée Louis-le-Grand в Париже. Написал несколько трактатов по философии, механике, оптике и звёздный атлас. В 1671 издал учебник *Elémens de Géométrie*, который впоследствии был переведён на латынь и английский.

<sup>48</sup>Бернар Лами (Bernard Lamy, Lami, 1640–1715) французский математик, философ и физик. Профессор грамматики, риторики и философии в колледже в Сомюре, а затем в Анжере. Несмотря на то, что факультет Лувена, Сорбонна, Конгрегация Индекса и Папа Александр VII были противниками нововведений картезианства, но, сохраняя приверженность официальному аристотелизму, Лами был сторонником философии Декарта. За свои взгляды и преподавание картезианства Лами был осуждён (1675) и был сослан в Гренобль с запретом преподавать философию. Тем не менее это запрет был вскоре отменён. Два года спустя Лами был отозван в Париж и помещен в семинарию Сен-Маглар. Нарушив один из уставов своей конгрегации, не подчинившись генералу, отцу де Сент-Марту, он был сослан в город Руан (1689). Опубликовал трактаты “La Rhétorique ou l'art de parler” (Искусство речи, 1675), “Traité de Mécanique” (Трактат по механике, 1679), “Traité de la grandeur en général” (Трактат о величии вообще, 1680) и “Les élémens de géométrie, ou de la mesure de l'étendue” (Элементы геометрии, или измерение протяжённости, 1685) и несколько других по педагогике, математике, физике, механике, переизданных в Амстердаме ок. 1734 г. Ввел понятие параллелограмма сил.

<sup>49</sup>Николя де Малезье (Nicolas de Malézieu, Malézieux, Malesieu, 1650–1727), французский писатель, эллинист и математик. Сеньор Шатене, генеральный секретарь швейцарского кантона Граубюнден во Франции. Наставник герцога Мэна, затем герцога Бургундского. Член Парижской академии наук (1699) и Французской академии (1701). Лекции по курсу математики, в течение четырёх лет преподаваемые герцогу Бургундскому, были опубликованы в 1705 г. под названием *Elémens de géométrie de Mgr le duc de Bourgogne* (Элементы геометрии его высочества герцога Бургундского). Второе издание на латыни вышло в 1713 г., третье, по-

смертное издание, дополненное трактатом о логарифмах, с введением в приложение алгебры к геометрии, появилось в 1729 году. Исследования Николя де Малезье бесконечно малых чисел публиковались в *Journal des savants*. Николя де Малезье также является автором перевода “Ифигении в Тавриде” Еврипида, а также стихов, песен, сказок и очерков.

<sup>50</sup>Габриэль Нодэ (Gabriel Naudé, 1600–1653), французский учёный, эзотерик, библиофил и библиотекарь, человек большой энциклопедической культуры, магистр искусств, доктор медицины. Ординарный врач Людовика XIII (1633). Работал библиотекарем в Риме у кардиналов Баньи и Барберини. Состоял в переписке с П. Мерсенном и П. Гассенди. Много путешествуя по Европе, в течение 10 лет собрал первую, уникальную библиотеку для парижского дворца кардинала и министра Жюльа Мазарини. По заказу Мазарини Нодэ приобрёл тысячи редчайших книг и манускриптов. В 1648 году библиотека насчитывала от 35 000 до 40 000 томов и, возможно, была самой большой в Европе в то время. Библиотека сильно пострадала во времена Фронды, но её фонд был положен в основу Национальной библиотеки Франции. Нодэ – автор первой специальной книги по библиотечному делу (*Advis pour dresser une bibliothèque*, 1627). В этой книге содержатся рекомендации по подбору, систематизации и составлению каталогов, включая книги античных классиков математики с аннотацией. Лейбниц следовал наставлениям Нодэ в своей разработке концепции научной библиотеки. По мнению Нодэ, библиотека есть основа новой цивилизации. Нодэ написал большое количество трактатов, но среди них нет специальных трактатов по математике. Написал трактат *Apologie pour tous les grands personages faussement soupçonnez de magie* (Оправдание великих людей, ложно подозреваемых в магии. Издания 1625, 1653, 1669, 1712). Среди персонажей Пифагор, Сократ, Фома Аквинский, Дж. Кардано, Соломон.

<sup>51</sup>Алекси Клод Клеро (Alexis Claude Clairaut, Clairault, 1713–1765), французский математик, механик и астроном. Член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, иностранный член Берлинской академии наук, иностранный почётный член Петербургской академии наук (1753). Сын парижского преподавателя математики, с 14-летнего возраста стал известен своими исследованиями о некоторых кривых четвертого порядка, в 16 лет представил в Академию трактат *Recherches sur les courbes à double courbure* (Исследования о кривых двойкой кривизны, 1729), который открыл путь развития аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной и начертательной геометрии. Слушал в Базеле лекции И. Бернулли, в 18-летнем возрасте стал адъюнктом Парижской академии наук. После двух экспедиций в Лапландию для измерения длины градуса меридиана написал *Théorie de la figure de la terre* (Теория фигуры Земли, извлечённая из принципов гидростатики, 1743), высоко оценённую Л. Эйлером. В математическом анализе Клеро ввёл понятия криволинейного интеграла (1743), полного дифференциала, а также общего и особого решения дифференциальных уравнений 1-го порядка (1736). Подготовил блестящие учебники *Éléments de Géométrie* (Начала геометрии, 1741) и *Éléments d'algebre* (Начала алгебры, 1746), многократно переиздававшиеся в разных странах. Огромны его заслуги в механике и геодезии.

Учебник “Начала геометрии” Клеро явился педагогическим прорывом в преподавании. До того этот предмет был труден для средних учеников, в своей книге Клеро стремится вызвать интерес обучающихся. Он считал, что, если ученика заставлять решать задачу без полного её понимания, это не приведёт его к овладению материалом. Ученикам нужно делать открытия самостоятельно в ходе активного обучения с привлечением математического эксперимента. Клеро начинает книгу со сравнения геометрических форм с размерами Земли, рассматривает темы, связанные с линиями, формами и трёхмерными телами, привлекая сведения из других разделов математики, физики, гидростатики, геодезии и даже астрологии, и связывая их с геометрией. Чертежи к задачам выполнены на высоком художественном уровне и оживлены привлекательными для ученика деталями. Некоторые приёмы изложения Клеро до сих пор используются в преподавании.

<sup>52</sup>Серен Антинойский (Serenus, Serenus of Antinoöpolis), позднеантичный греческий математик IV века. Серен происходил либо из Антинойи, либо из Антиноополиса, города в римском Египте. Из трудов Серена сохранились два: “О сечении цилиндра” и “О сечении конуса”. Одной из целей Серена было доказать, что сечения цилиндра и конуса дают однотипные эллипсы. В предисловии к “Сечению цилиндра” Серен заявляет, что “многие люди, изучающие геометрию, ошибались в том, что наклонное сечение цилиндра отличалось от наклонного сечения конуса, известного как эллипс, тогда как это, конечно, та же самая кривая”. Работа состоит из тридцати трех предложений. Дополнительную ценность трудам Серена придают включённые в них сведения о его предшественниках. Из упоминания Теона Смирнского известно также, что Серен написал обширный комментарий к сочинению “Конические сечения” Аполлония Пергского, но эти комментарии утеряны.

<sup>53</sup>Феодосий Триполитский, греческий геометр и астроном. Жил в I в. или около середины II. По одним свидетельствам он происходил из Вифинии, по другим – из Триполиса, хотя неизвестно, Сирийского или Африканского. Никаких других биографических сведений о Феодосии не сохранилось. Из четырёх его сохранившихся сочинений самым известным является *Сфера* в трех книгах, посвященная геометрии шаровой поверхности. При полном отсутствии в этом сочинении измеряющего или тригонометрического элемента, о содержании составляющих его предложений могут дать понятие следующие: всякое сечение шара плоскостью есть круг и притом большой, если плоскость проходит через центр. Малые круги, параллельные большому и отстоящие от него на равных расстояниях, равны и имеют с ним общие полюсы. Два больших круга делятся взаимно пополам. Если один из них перпендикулярен к другому, то он проходит через оба его полюса; если же он наклонен к нему, то соприкасается с двумя параллельными ему кругами, отстоящими от центра шара на равных расстояниях. Хотя все теоремы сформулированы и доказаны чисто геометрически, без упоминания реальных астрономических объектов, *Сфера* имела служебную роль в астрономии. Учёными Древней Греции *Сфера* Феодосия была включена в цикл обязательно изучения после *Элементов* Евклида и до *Алмагеста* Птолемея. В после-античный период *Сфера* многократно переводилась на арабский (X в.), с арабского на латынь в XII, напечатана в 1518 г. в Венеции; исправленная латинская версия с дополнениями арабских комментаторов была опубликована в переводе Фогелина (J. Voegelinus, Вена, 1529). Другие латинские переводы опубликовал Ф. Мавролик (F. Maurolycus, Мессина, 1558); Х. Клавиус (C. Clavius, Рим, 1586); Барроу под названием, *Theodosii Sphaerica, Methodo Nova Illustrata et Succincte Demonstrata* (Лондон, 1675). Греческий текст с параллельным латинским был впервые опубликован в переводе Ж. Пена (J. Pena, Париж, 1558); последующее издание Дж. Хант (Joseph Hunt, Оксфорд, 1707 г.) основано на издании J. Pena. Вероятно, этим изданием пользовался И. А. Эйлер.

<sup>54</sup>Грегуар де Сен-Венсан (Grégoire de Saint-Vincent, 1584–1667), фламандский иезуит и математик. Учился у иезуитов, получил сан священника, занимался преподаванием математики и богословия. В Риме изучал труды Галилея и Клавиуса. Был профессором в Антверпене (1617–1620) и Лёвене (1621–1625). В 1625 г. Сен-Венсан был послан в Прагу занять кафедру математики в Пражском университете, переданном после изгнания протестантских профессоров в руки иезуитов. В ходе Тридцатилетней войны при сожжении Праги (1631) значительная часть рукописей Сен-Венсана погибла в огне (статика и обширное собрание геометрических задач). Остальная часть рукописей была отправлена в Вену, куда удалился и автор вместе с другими членами своего ордена. Затем он поселился в Генте, где жил в сообществе иезуитов и преподавал математику. В числе его известных учеников – Андре Таке. Главное сочинение де Сен-Венсана: “Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений, содержащийся в десяти книгах” (1629, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii decem libris comprehensum*, опубл. в 1647 г.). В VI книге излагается квадратура гиперболы между асимптотами в виде предложения, что абсцисса возрастает в геометрической прогрессии, если площадь кривой увеличивается в арифметической. Создал полярную систему координат

(независимо от Кавальери), предложил общепринятый теперь термин “метод исчерпывания”. Сен-Венсан дал ясное изложение процессу суммирования рядов. Разрешил парадокс Зенона, показав, что задействованные временные интервалы образуют геометрическую прогрессию и, таким образом, имеют конечную сумму. В трактате *Ductus plani in planum* развивал метод Архимеда, равно как и методы неделимых Кавальери и Роберваля, сделав их более строгими и лёгкими в употреблении. Его труды оказали существенное влияние на Паскаля, Джеймса Грегори и других математиков. Гюйгенс и Лейбниц высоко ценили де Сен-Венсана. Помимо названного выше, написал трактаты *Cometis* (1616), *Theoremata mathematicae. Scientiae staticae* (1624), *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii decem libris comprehensum* (1647), *Opus geometricum ad mesolabum per rationem, proportionalitatumque novas proprietates* (1668).

<sup>55</sup>Винченцо Вивиани (Vincenzo Viviani; 1622–1703), итальянский физик и математик, ученик Галилея и Торричелли, составитель первой биографии Галилея и редактор первого издания его трудов. Учился в иезуитской школе. Познакомившись с Торричелли, учеником Галилея, стал совместно с ним проводить физические опыты, а позже стал учеником и самого Галилея (1639), который под надзором инквизиции проживал в Арчетри, недалеко от Флоренции. Вивиани стал неоценимым помощником слепого учёного. После смерти Галилея (1639) и Торричелли (1642) Вивиани продолжил их исследования под покровительством герцога Фердинанда II Медичи, придворным астрономом которого стал Вивиани, заняв после смерти Галилея, а затем Торричелли место первого придворного математика. Растущая репутация математика привела к тому, что Парижская академия наук и Лондонское королевское общество избрали его своим членом. Вивиани опубликовал книгу по механике, *Discorso intorno al difendersi da' riempimenti e dalle corrosione de' fiumi* (1687). Вивиани и Торричелли (1644) поставили классический опыт по измерению атмосферного давления. Вивиани совместно с Борелли (1660) провели довольно точное измерение скорости звука. Имя Вивиани носит изученная им кривая, образованная пересечением сферы с круговым цилиндром вдвое меньшего радиуса, чья боковая поверхность содержит центр сферы. Изучал циклоиду и показал, как строить касательную к ней. Предложил свою реконструкцию утерянной V книги “Конических сечений” Аполлония (по сохранившимся комментариям к ней). Показал, что трисекция угла может быть выполнена с помощью равносторонней гиперболы. Другие работы касались инженерного дела, оптики, акустики. Посвятил много усилий изучению геометрии Античности, восстанавливал работы Аристия Старшего и Аполлония. После смерти Вивиани осталась почти законченная рукопись по сопротивлению материалов, изданная посмертно.

<sup>56</sup>Филипп де ла Гир (Philippe de La Hire, Lahire, La Hure, Phillipe de La Hire, 1640–1718), французский художник, математик, астроном и архитектор. Согласно Фонтенелю, он был ‘академией для себя’. Родился в Париже в семье художника, изучал живопись в Венеции. По возвращении в Париж изучал геометрическую перспективу у Жерара Дезарга. Изучал математику, физику и риторику у теолога-иезуита Оноре Фабри, стал членом его научного кружка, в который входили Джованни Доменико Кассини, Христиан и Константин Гюйгенсы, Готфрид Лейбниц, Рене Декарт и Марин Мерсенн. Стал членом Парижской академии наук (1678). Как астроном, рассчитывал таблицы движений Солнца, Луны и планет и создавая приспособления для наведения воздушных телескопов. Провёл несколько наблюдений и измерений французской береговой линии, а в 1683 году участвовал в составлении карты Франции. В 1683 году Ла Гир занял кафедру математики в Королевском колледже. С 1687 г. преподавал в Академии архитектуры. Написал несколько трактатов по коническим сечениям (1673, 1679, 1685), гномонике (1682), *Таблицы Солнца и Луны* (1687), геодезии (1689), механике (1695), *Астрономические таблицы* (1702), *Небесная планисфера* (1705), *О Конхоидах в целом* (1708), а также сочинения по зоологии, физиологии дыхания и физиологической оптике.

Один из его сыновей, Gabriel-Philippe de La Hire (1677–1719), также стал математиком. Габриэль Филипп де ля Гир помогал отцу в измерениях. Ассоциированный астроном (1699), астроном (1718) Парижской академии наук, член Королевской академии архитектуры (1706).

В 1718 году он сменил своего отца на посту королевского профессора в Академии архитектуры. В 1701–1703 гг. издавал журнал наблюдений, в 1702 г. издал трактат о плотницком искусстве и необходимых для этого плотницких инструментах.

*29-й тезис*

<sup>57</sup>Ален Манессон Малле (Allain Manesson Mallet, 1630–1706), французский картограф и инженер. Начал свою карьеру солдатом в армии Людовика XIV, стал сержант-майором артиллерии и инспектором укреплений. Служил также при короле Португалии, затем был приближен ко двору Людовика XIV. Его военно-инженерное и математическое образование позволило ему преподавать математику при королевском дворе. Автор *Description de L'Univers* (Описание Вселенной, 1683) в 5 томах. Его “Описание Вселенной” содержит широкий спектр информации, включая звездные карты, карты древнего и современного мира, а также сведения об обычаях, религии и формах правления многих народов. Сам Малле являлся иллюстратором своих книг. Другим известным его трудом был *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre* (Труд Марса или искусство войны, 1684) в 3 томах. Издана в России в июле 1713 года (СПб., перевод со 2-го издания книги “Les travaux de Mars ou l'Art de la guerre divisé en 3 parties”. Paris, 1684–1685. Переводчик – Иван Зотов. Переведен первый том, книги первая и вторая); известна в России как “Книга Марсова” А.-М. Малэ или А.М. Малле. Также Малле написал “Практическую геометрию” (*La géometrie pratique*, 1702) в 4 томах.

<sup>58</sup>Клермон (Sieur de Clermont, XVI в.), французский математик и военный инженер, служил во французской армии комиссаром артиллерии. Его книга по практической геометрии *Geometrie pratique de l'ingenieur, ou L'art de mesure* (Практическая геометрия для инженеров, или искусство измерения, 1693) была справочником, переиздаваемым в течение 60 лет.

<sup>59</sup>Жак Озанам (Jacques Ozanam, 1640–1718), французский математик, профессор Сорбонны, адъюнкт Парижской академии наук с 1701 года. Учитель Абрахама Муавра. Опубликовал несколько трудов по алгебре, геометрии и тригонометрии, сыгравших важную роль в развитии математики, а также “Математический словарь” (1690, переведен на английский Дж. Рафсоном в 1702). Самая популярная из его книг “Математические и физические развлечения в двух томах” (*Récréations mathématiques et physiques*, 1694) выдержала множество изданий. Переработанная и дополненная редакция (в четырёх томах) была впоследствии опубликована Ж. Э. Монтюкла в 1778 году. Был редактором перевода “Элементов” Дешаля (1746, 1753, 1778). Написал также “Метод съёмки планов и карт суши и моря: содержащий практику геометрии как на бумаге, так и в поле, прямолинейную тригонометрию и манеру съёмки, рисования и представления в перспективе всех видов плоскостей и возвышенностей” (1693); “Практическая геометрия” (1684, ); “Курс математики в пяти томах” (1693); “Новая тригонометрия” (1698, ); “Новые начала алгебры” (1702); “Перспектива, теория и практика” (1711).

<sup>60</sup>Луи-Пьер Додэ (le chevalier Louis-Pierre Daudet, 1692–?), французский картограф. Родился в Ниме в семье гравёра, стал придворным картографом и гравёром, в его обязанности также входило украшение триумфальных арок и создание эмблем для придворных торжеств [22]. Пользовался покровительством королевы Франции Марии Лещинской, был посвящён в рыцари Ордена Святого Михаила (1726). Сопровождал двор Людовика XV в его перемещениях по Франции, создал около 20 карт (рукописных, раскрашенных, гравированных) городов и провинций и дорог Франции, а также хранящейся в Национальном архиве Франции цветной гравированной карты Европы, озаглавленной “Историко-географический и хронологический театр времен правления Людовика XV, известного как Возлюбленный, посвященная и преподнесённая королю его очень скромным, очень покорным и очень верным слугой и подданным 15 мая 1749 г.”. В соответствии с печатью на карте, она предназначена студентам колледжа Людовика Великого.

Луи-Пьер Додэ предположительно является автором проектов каналов (canal de Bourbon, 1726 ; canal de l'Oise à la Seine ; de l'Isle-Adam à Paris, dit canal de Conti, 1733 ; canal de la Saône à la Loire, 1736).



Издан несколько журналов с описаниями путешествий короля (1725, 1728, 1729). Ему принадлежат следующие труды. “Новый путеводитель по дорогам Королевства Франции, содержащий все дороги, как общие, так и частные, посвященный королю, написанный господином Доде” (*Nouveau guide des chemins du Royaume de France, contenant toutes les routes, tant générales que particulières dédié au Roy, par le sieur Daudet*, 1724). “Новое введение в практическую геометрию, составленное лучшими авторами, разделенное на две части ... для инструктирования военных кадетов, посвященное монсеньеру д’Анжевиллье ... Инженер и ординарный королевский географ шевалье Доде” (*Nouvelle introduction a la geometrie pratique, tiree des meilleurs auteurs divisee en deux parties... dediee a Monseigneur d’Angevilliers... par le chevalier Daudet*, 1730).

<sup>61</sup>Даниэль Швентер (Daniel Schwenter, Schwender, 1585–1636), немецкий востоковед, математик, изобретатель, поэт и библиотекарь. Был профессором восточных языков и математики в Альтдорфском университете. Написал *Delicia Physico-Mathematicae*’ (Физико-математические забавы, 1636) и *Geometriae Practicae novae et auctae tractatus I-IV* (Практическая геометрия в новой улучшенной редакции, трактаты I-IV, посмерт. изд. 1641), включающее т.н. бакулометрию – измерение расстояний до недоступных предметов с помощью посохов (Посох Иакова, *baculus Jacobi*, – один из первых инструментов для астрономических наблюдений, служащий для измерения углов. Используется в астрономии, навигации и геодезии. В навигации инструмент называется поперечным жезлом, в астрономии – *radius astronomicus*, “астрономический радиус”). Швентер знал древние языки, был авторитетным специалистом по Евклиду. Является автором некоторых усовершенствований микроскопа и перьевой ручки.

<sup>62</sup>Иоганн Генрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777), немецкий физик, философ, математик и астроном; академик в Мюнхене и Берлине. Ламберт впервые доказал иррациональность чисел  $\pi$  (с использованием обобщенной цепной дроби для функции  $\operatorname{tg} x$ , 1761) и  $e$  (1766). Усилить данное утверждение и доказать трансцендентность этих чисел удалось только спустя сто лет. Первым ввел в тригонометрию гиперболические функции. Высказывал предположения о неевклидовом пространстве. Ламберт разработал формулу отношения между углами и площадью гиперболических треугольников (т.е. треугольников, нарисованных на вогнутой поверхности, как на седле). Ламберт показал, что сумма углов меньше  $180^\circ$ . Составил таблицу простых чисел до 102000 (1770), значительно обогатил тригонометрию, теорию конических сечений и гиперболических функций. Усовершенствовал некоторые геодезические методы, провёл исследование двигателей и трения, внёс значительный вклад в метеорологию. Ламберт был первым математиком, который обратился к общим свойствам картографических проекций (сферической Земли). В частности, он был первым, кто обсудил свойства конформности и сохранения равной площади и указал, что они исключают друг друга.

### 30-й тезис

<sup>63</sup>Эразм Рейнхольд Младший (Erasm Reinhold, 1538–1592), сын известного и влиятельного астронома и математика, профессора Эразма Рейнхольда (1511–1553). Друг семьи Филипп Меланхтон покровительствовал талантливому мальчику и помог ему получить образование. Рейнхольд-мл. начал изучать математику, но затем стал изучать медицину, по которой получил учёную степень доктора. Работал окружным врачом, продолжая заниматься астрономией. Опубликовал так называемые “Практики” или “Альманахи”, календари, в которых использовал последние открытия в области астрономии и астрологии. Тихо Браге, в то время самый известный датский астроном, обратил на него внимание, когда Эразм описал новую звезду, так называемую сверхновую, в своем календаре 1574 года. Он посетил Рейнхольда в Заальфельде. После того, как в середине 1570-х годов Рейнхольд закончил свою работу врачом, он заинтересовался научными исследованиями в области местной добычи полезных ископаемых. Своими трактатами о геодезии и подземной съемке, появившимися в Эрфурте в 1574 году, он приобрел репутацию выдающегося специалиста в области горного дела, так что он был назначен руководителем горного дела в горнодобывающей промышленности и металлургическом

машиностроении в Заальфельде. Участвовал в разработке Закона о Заальфельдских рудниках, в 1585 году изобрел новую технологию плавки для добычи серебра [27]. Рейнхольд-мл. опубликовал *Gruendlicher und warer Bericht vom Feldmessen* (Тщательный отчет о полевых измерениях, как следует измерять и исследовать всякие поля, луга, леса и другие места по истинному геометрическому основанию. Также и о горнопроходческом искусстве, прохождении водных путей, и другие отчёты о полезных изобретениях), Erfurdt, 1574, переизд. в 1615. Имеется его рукопись “Подземная геометрия, подземное пространство, или так называемое искусство маркшейдеров” [19]. Рейнхольд был первым, опубликовавшим учебник маркшейдерского искусства, так как ранее это знание было закрытым для непосвящённых.

<sup>64</sup>Николаус Фойгтель (Nicolaus Voigtel, 1658–1713), немецкий геометр, горный чиновник и писатель. Известны его математически обоснованные учебники по маркшейдерскому делу, в которые впервые была введена тригонометрия. И. А. Эйлер имеет в виду издание 1688 г. его трактата “Подземная геометрия, или маркшейдерское искусство” [23]. Позже Фойгтель издал ещё несколько расширенных и усовершенствованных версий этой книги.

<sup>65</sup>Иоганн Фридрих Вайдлер (Johann Friedrich Weidler, 1691–1755), немецкий математик и юрист. После окончания Виттенбергского университета (1712) стал его профессором. Совершил поездку в Голландию, Англию, Францию и Швейцарию, где в Базеле в 1727 г. получил степень доктора права (Тема диссертации – “Законы математики”, *De juribus mathematicorum*). После этого вернулся в Виттенберг, где стал профессором юридического факультета, не оставляя преподавания математики. Из сборников, которые он написал в качестве основы для своих лекций, назовём учебник “Математические институты” (*Institutiones mathematicae*, 1718). Эти сборники включали астрономию и публиковались пять раз при жизни Вейдлера, а также после его смерти. Также издал труд “Институты подземной геометрии” (*Institutiones Geometriae subterraneae*, 1726) – учебник высокого уровня по маркшейдерскому искусству (это издание имеется в РГБ), и “История астрономии” (*Historia Astronomiae*, 1741). Описал прохождения Меркурия через Солнце в 1736 и 1747 годах и расчет широты и долготы города Виттенберг.

### 31-й тезис

<sup>66</sup>Йост Бюрги (Jost Bürgi, 1552–1632), швейцарский и немецкий математик, астроном, часовщик и мастер астрономических инструментов. Один из первых изобретателей часов с маятником и с секундной стрелкой (1585), известен также как автор таблиц антилогарифмов (1620), которые разработал практически одновременно с Непером. Придворный астроном ландграфа Гессен-Касселя Вильгельма IV (1579–1604), затем состоял на службе у императора Рудольфа II в Праге (1604–1630), где познакомился с Кеплером. Многие астрономические приборы Бюрги делал для Кеплера: создал несколько автоматических небесных глобусов; составил каталог 121 звезды; изготовил секстанты для Кеплера; механическую модель неоднородностей движения Луны вокруг Земли; механизированную армиллярную сферу. Создал несколько итерационных вычислительных алгоритмов. Упоминается у Н.Г. Курганова в “Числовнике” (ч. 2, с. 208).

*Пропорциональный циркуль* (делительный циркуль, редуccionный компас, компас уменьшения, пропорциональный компас, военный компас, сектор) – чертёжный прибор, позволяющий строить отрезок, пропорциональный к данному отрезку в данной пропорции. Ускоряет работу, давая возможность брать размеры по чертежу и непосредственно без подсчётов получать увеличенные или уменьшенные в нужном масштабе. Позволяет решать задачи измерения длины окружности, площадей и углов на круге. Редуccionные круги были известны ещё в древности. Среди бронзовых находок из Помпеи сохранилась примитивная форма с фиксированным углом, допускающим переводы в соотношении 1: 2. Редуccionный круг был развит в пропорциональный круг итальянским математиком Фабрицио Морденте (Fabrizio Mordente, 1532–1608). В 1567 г. Морденте опубликовал в Венеции одностраничный трактат “Способ поиска с помощью астролэбии, или квадранта, или другого момента, по градусам, целым, минутам и секундам, и любой другой частиц”, *Modo di trovare con l'astrolabio, o quadrante,*

*o altro instromento, oltre gradi, intieri, i minuti, et secondi, et ognaltra particella*, Venezia 1567. Трактат содержал иллюстрации “пропорционального компаса с восемью точками”, оборудованного на двух плечах курсорами, предназначенными для решения задачи измерения длины окружности, площади круга и угол дробей. В 1572 году Морденте был в Вене при дворе императора Максимилиана II, а с 1578 года в Праге на службе у Рудольфа II. Весьма вероятно, что Морденте был знаком с Йостом Бюрги. Создание пропорционального циркуля приписывают также Галилео Галилею (улучшил конструкцию сектора), английскому математику Томасу Худу (Thomas Hood, 1556–1620) и Йосту Бюрги (изготавливал и совершенствовал пропорциональные компасы). Сохранилось немало этих инструментов, выполненных Йостом Бюрги. С конца XVI в. использовался также для умножения и деления, решения задач геометрии и тригонометрии, а также для численного выполнения различных алгебраических и тригонометрических операций. Сектор использовался до конца 19 века, пропорциональные компасы использовались до второй половины 20 века, отчасти даже до наших дней. Два этих математических инструмента были распространены весьма широко.

<sup>67</sup>Левин Хулсиус (Levinus Hulsius, Levin Hulsius, Levino Hulsio, van Hülsen, 1546–1606), родом из восточной Фландрии, был нотариусом, автором и издателем. Как кальвинист, бежал из испанских Нидерландов от религиозных преследований (1583) в Баварию, где основал французскую школу, затем переселился в Нюрнберг, где работал учителем языка, нотариусом, писателем, издателем и торговцем математическим и астрономическим оборудованием, таких как астролябия, квадранты, солнечные часы, а также земные и небесные глобусы. Издавал двуязычные (французско-немецкий, немецко-французский, немецко-итальянский и итальяно-немецкий), трёхязычные и четырёх-язычные словари с грамматикой, в т.ч. немецко-французско-итальяно-латинский (*Dittionario italiano, francese, tedesco, latino... con un brieve insegnamento de sudetti quattro linguaggi: prima stampato in due diverse parti, per defunto Levino Hulsio: or in quasta sesta stampa messo in un libro e diviso in quattro parti*). Приобрёл у наследников Тихо Браге (1546–1601) печатные формы *Astronomiae instauratae Mechanica* для второго издания (1602). Написал *Первый, Второй и Третий Трактаты* о механических инструментах (“*Tractatus instrumentorum mechanicorum*”, 1605. В Третьем трактате даётся описание нового оборудования. “Третье геометрическое око механических инструментов Leuini Hulsii. Описание пропорционального компаса Йоста Бюрги, с помощью которого можно рисовать прямые линии, круги на поверхности и географической карте” *Tractatus primus tertius instrumentorum mechanicorum Leuini Hulsii. Ocularis demonstratio noui geometrici instrumenti .. Tractatus tertius instrumentorum mechanicorum Leuini Hulsii. Quo traditur descriptio atque vsus circini proportionalis Iusti Burgi, cuius beneficio linea recta, circularis, omnis superficies, charta geographic*). В этом трактате Хулсиус утверждает, что изобретателем пропорционального (редукционного) круга был мастер инструментов Йост Бюрги, а другие мастера лишь копировали конструкцию его инструмента.

<sup>68</sup>Гольдман, Николаус (Goldmann, Nicolaus, 1611–1665), *Breslauer Schlesier* – “бреславский силезец”, как он сам называл себя, немецкий писатель, юрист, математик, военный архитектор и теоретик архитектуры. Преподавал математику и архитектуру в Лейденском университете. Написал около 40 работ по теории архитектуры. Гольдман писал необычайно хорошо, и, изучая его работы, можно усвоить почти все архитектурные знания середины XVII века в Нидерландах и Германии. Его теория основана на методологических принципах математики. При жизни Гольдманн опубликовал пять книг. Его основная работа “*Vollständige Anweisung zu der Civil Bau-Kunst*” (Полные инструкции для гражданского строительного искусства) была опубликована в 1699 году. В 1643 году его “*Krieges Bau-Kunst*” (Искусство военного строительства) было напечатано на латыни. Его книга *Tractatus De Usu Proportionatorii Sive Circini Proportionalis (Eine Ahnleitung Vom Gebrauch des Ebenpassers, Oder Proportionalcircels*, Трактат по использованию пропорциональности или пропорционального циркуля) была опубликована в 1656 году на латинском и немецком языках в Лейдене. Его теоретические и практиче-

ские строительные учебники по архитектуре оказали влияние на немецкую архитектуру 17 и 18 веков. Вплоть до середины XVIII в. расчёт балок в строительстве производился согласно инструкциям Гольдмана.

<sup>69</sup>Шеффельт, Михаэль (Scheffelt, Michael, 1652–1720), немецкий математик. С 1716 года читал лекции по арифметике и геометрии в Ульме, в 1717 году он был назначен там лектором арифметики. Михаэль Шеффельт был первым крупным изобретателем и изготовителем логарифмических и других научных инструментов в Германии. В основном он писал о изобретенной им мерной линейке, позволяющей при измерении отрезков, дуг и углов считать значения различных функций от них (соответствующих площадей и объёмов; логарифмы и тригонометрические функции). Многократно переиздавалась его первая книга о пропорциональном циркуле “Пропорциональный инструмент Михаэля Шеффельта, или учение о пропорциональном циркуле, с помощью которого могут быть решены как математические, так и механические задачи, связанные с пропорцией ... изложенный заново, вместе с соответствующими фигурами ... и прочими полезными дополнениями” (*Michael Scheffelts Instrumentum proportionum, oder Unterricht vom proportional-circul, durch welchen sowohl mathematische als mechanische, unter die proportion gehörige fragen ... aufzulösen seyn; aufs neue übersehen, nebst den gehörigen figuren ... und andern nützlichen zugaben*). Известен его портрет 1691 г. с пропорциональным циркулем и другими математическими инструментами. В своей второй книге “Механический измеритель” (*Pes mechanicus, Механическая ланка*, 1699) он подробно описал квадратную линейку с множеством шкал, включая логарифмические шкалы чисел, синусы и касательные для использования с парой разделителей. В небольшом сочинении 1702 г. и позже (1718 г.) в своем втором *Pes mechanicus* Шеффельт представил первые скользящие стержни и затем очень сложные двусторонние направляющие скольжения в различных формах. Огромное разнообразие различных научных инструментов его мастерской задокументировано в двух сочинениях-каталогах *Museum mathematicum* (1708, 1720).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука // Москва, ГИФМЛ. 1959.
2. [Лаланд Ж. Ж. Ле Франсе де] Сокращение астрономии или звездозакония г. де Ла Ланда, королевского чтеца в мафематике, члена академий наук, Королевской Парижской, Лондонской, Санктпетербургской, Стокгольмской, Бологнской и проч. и королевского цензора. С французского на российский язык преложил Михайло Головин, надворный советник, Академии наук член и учительской семинарии профессор. - В Санктпетербурге: при Императорской Академии наук, 1789.
3. Мументалер Р. Швейцарские учёные в Санкт-Петербургской академии наук. XVIII век // Санкт-Петербург, Нестор-История, 2009.
4. Синкевич Г. И. Ранний этап развития *historia matheseos*. Историография истории математики // История науки и техники, 2017 г. №1. С. 3–17.
5. Эйлер Л. Письма к учёным // Москва–Ленинград. АН СССР, 1963. С. 74–76.
6. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона // Санкт-Петербург. Общество Брокгауз и Ефрон. 1890–1907. Статьи В. В. Бобынина.
7. Ямвлих. О Пифагоровой жизни / пер. с древнегреческого И. Ю. Мельниковой // Москва, Алетея, 2002.
8. Blancanus J. De mathematicarum Natura dissertatio. Una cum Clarorum mathematicorum chronologia. Bologna: apud Bartholomaeum Cochium. 1615.

9. Deslandes A. F. Histoire Critique de la Philosophie. T. 2. Amsterdam: ches F. Changuion. 1737.
10. Déchalles R.P. Les Elémens d'Euclide, du R.P. Déchalles, et de M. Ozanam, De l'Académie Royale des Sciences. Démontrés d'une maniere nouvelle & facile ; & augmentés d'un grand nombre de nouvelles Propositions & de nouveaux Usages ; & d'un Traité complet des Proportions arithmétiques & des Proportions géométriques, par M. Audierne. Nouvelle Edition, revue, corrigé & considérablement augmentée par l'Auteur. A Paris, rue Dauphine, Chez Cl. Ant. Jomber, fils aîné ; Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.M.DCC.LXXVIII
11. Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus : ex versione latina Federici Commandini; sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve, vitati sunt, et quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutes. 1756, Pisauri: Iacobus Chriegerh German: apud Camillum Francischinum. Glasguae. In aedibus Academicis excudebant R. et. A. Foulis. Academiae Typographi. 1756 <https://archive.org/details/euclidiselemento00eucl>
12. Euclidis Megarensis Mathematici. Elementa libris XV. ad Germanam geometriae intelligentiam e diversis lapsibus temporis injuria contractis restituta... Accessit decimussextus liber, de solidorum regularium sibi invicem inscriptorum collationibus. Novissime collati sunt decimusseptimus et decimusoctavus, priori editione quodammodo polliciti, de componendorum, inscribendorum, et conferendorum compositorum solidorum inventis... Authore Francisco Flussate Candalla. Lutetiae [Paris] : apud Iacobum Du Puys. Издания 1566 и 1578.
13. [Euclid] The elements of geometrie of the most auncient philosopher Evclide of Megara. Imprinted at London : By Iohn Daye (предисловие), 1570. (Billingsley, Henry, Sir, ed. 1606).
14. [Euler, L.] Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Brifwechsel Leonard Eulers. Teil 3. Hrsg. u.eingel. v. A. P. Juschkewic u. E. Winter, zum Druck vorb. v. P. Hoffmann, T. N. Klado, J. Ch. Kopelevic. Berlin, 1976.
15. Euler L. 1772. Твердые тела, поверхность которых может быть развернута на плоскость. (De solidis quorum superficiem in planum explicare licet, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1772, Volume 16, pp. 3–34. E419.
16. Euler L. Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica: anno MDCCCXLIV detecta by Leonhard Euler , Academiae Scientiarum Petropolitanae. Publication date 1862. Volume 1. <https://archive.org/details/leonhardieuleri00petrgoog>
17. Leibniz G. W. De vera proportionem circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa. Acta Eruditorum, Februar 1682. P. 41–46.
18. Poggendorff, J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig : J. A. Barth. 1863. Columns 704–705.
19. Reinhold E. Geometria Subterranea Unter-irdische Erdmāßung ; oder so genannte Marck-Scheide-Kunst. Was nemlich Selbige sey. Und Worinne die eigentlich bestehe. Nebst aufrichtigen Unterricht wie ein Geometra Subterraneus oder Markscheider bey allm fürkommende Fällen richtig agieren und seinem ambte Gänge thun soll. Manuscript 16 c. 3 versions: Freiberg WA XVII 11, Freiberg WA XVII 677, Nachlass Scheidhauer 300m.
20. Savile H. Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis. Oxford: Iohannes Lichfield & Iacobus Short, 1621.
21. Smith D.E. History of Mathematics. Vol. 1. New York: Dover Publications Inc., 1951.

22. Souchon C. Les cartes du Chevalier Lois-Pierre Daudet aux Archives nationales un itinéraire royal Reims-Soissons-Paris, 1722-1728 (?). CFS No 175. Mars 2003. P. 30-35. <https://www.lefc.fr/new/articles/175-article-5.pdf>
23. Voigtel N. Geometria Subterranea oder Marckscheide-Kunst: darinnen gelehret wird Wie auff Bergwercken alle Klüffte und Gänge in Grund und am Tag gebracht/ auch solche voneinander unterschieden werden sollen; so wohl Was bey Durchschlägen in Ersparung Kosten/ Bringung Wetters und Benehmung Wassers denen Zechen oder Gebäuden/ mit zubeoachten; Item/ Wie Streitigkeiten/ so sich unter miteinander schnürenden Gewercken offters zuereignen pflegen/ dem Maaße nach aus einander zusetzen; Sambt noch andern in nechstfolgendem Indice enthaltenen und zu dieser Kunst dienlichen Sachen; Allen Bergwercks-Liebenden zum Unterricht und versicherlichen Nutzen, Dietzel, Eisleben 1686 (Nachauflagen u. a. 1688, 1693).
24. Vossius G. J. De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amsterdam: ex typogr. J. Blaeu, 1650.
25. Vossius G. J. De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis. Cui operi subjungitur Chronologia Mathematicorum. Libri tres. Amsterdam: ex typographeio Ioannis Blaeu, 1660.
26. [Vossius] Gerardi Ioannis Vossii De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis, cui operi subjungitur, chronologia mathematicorum, libri tres. 1650. ex typographeio Ioannis Blaeu. Глава 15. Евклид и его геометрия. С. 52–53 (Раздельная пагинация).
27. Walther H. Erasmus Reinhold. 2021. <https://erasmus-reinhold-gymnasium.de/erasmus-reinhold-2/>
28. Ball W. W. R. History of the Study of Mathematics at Cambridge. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1889. P. 29.

## REFERENCES

1. van der Waerden, B. L. 1959, Science Awakening // Moscow, GIFML.
2. Lalande J. J. 1789, Sokrashchenie astronomii ili zvezdozakoniya g. de La Landa, korolevskago chteca v mafematike, chlena akademij nauk, Korolevskoj Parizhskoj, Londonskoj, Sanktpeterburgskoj, Stokgol'mskoj, Bolognskoj i proch. i korolevskago censora. S francuzskago na rossijskoj yazyk prelozhil Mihajlo Golovin, nadvornyj sovetnik, Akademii nauk chlen i uchitel'skoj seminarii professor. – V Sanktpeterburge: pri Imperatorskoj Akademii nauk.
3. Mumenthaler, R. 2009. Shvejcarskie uchyonnye v Sankt-Peterburgskoj akademii nauk. XVIII vek. Sankt-Peterburg, Nestor-Istoriya.
4. Sinkevich, G. I. 2017. Rannij etap razvitiya historia matheseos. Istoriografiya istorii matematiki // Istoriya nauki i tekhniki. 1: 3–17.
5. Euler, L. 1963. Pis'ma k uchyonym. Moscow–Leningrad. AN SSSR. S. 74–76.
6. Brockhaus and Efron Encyclopedic Dictionary. 1890–1907. Saint-Petersburg. Stat'i V. V. Bobynina.
7. Iamblichus. 2002. O Pifagorovoj zhizni / per. s drevnegrecheskogo I. YU. Mel'nikovoj // Moskva, Aleteja.

8. Blancanus, J. 1615. De mathematicarum Natura dissertatio. Una cum Clarorum mathematicorum chronologia. Bologna: apud Bartholomaeum Cochium.
9. Deslandes A. F. 1737. Histoire Critique de la Philosophie. T. 2. Amsterdam: ches F. Changuion.
10. Déchalles R.P. 1778. Les Elémens d'Euclide, du R.P. Déchalles, et de M. Ozanam, De l'Académie Royale des Sciences. Démontrés d'une maniere nouvelle & facile ; & augmentés d'un grand nombre de nouvelles Propositions & de nouveaux Usages ; & d'un Traité complet des Proportions arithmétiques & des Proportions géométriques, par M. Audierne. Nouvelle Edition, revue, corrigé & considérablement augmentée par l'Auteur. A Paris, rue Dauphine, Chez Cl. Ant. Jomber, fils aîné ; Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.
11. Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus : ex versione latina Federici Commandini; sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve, vitati sunt, et quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutes. 1756. Pisauri: Iacobus Chriegher German: apud Camillum Francischinum. Glasguae. In aedibus Academicis excudebant R. et. A. Foulis. Academiae Typographi. 1756 <https://archive.org/details/euclidiselemento00eucl>
12. Euclidis Megarensis Mathematici. Elementa libris XV. ad Germanam geometriae intelligentiam e diversis lapsibus temporis injuria contractis restituta... Accessit decimussextus liber, de solidorum regularium sibi invicem inscriptorum collationibus. Novissime collati sunt decimusseptimus et decimusoctavus, priori editione quodammodo polliciti, de componendorum, inscribendorum, et conferendorum compositorum solidorum inventis... ed. 1566, 1578. Authore Francisco Flussate Candalla. Lutetiae [Paris] : apud Iacobum Du Puys.
13. [Euclid] 1570, 1606. The elements of geometrie of the most auncient philosopher Evclide of Megara. Imprinted at London : By Iohn Daye (foreword), Billingsley, Henry, Sir, ed.
14. [Euler, L] 1976. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Brifwechsel Leonard Eulers. Teil 3. Hrsg. u. eingel. v. A. P. Juschkewic u. E. Winter, zum Druck vorb. v. P. Hoffmann, T. N. Klado, J. Ch. Kopelevic. Berlin.
15. Euler, L. 1772. De solidis quorum superficiem in planum explicare licet, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. Volume 16. Pp. 3-34. E419.
16. Euler, L. 1862. Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica: anno MDCCCXLIV detecta by Leonhard Euler, Academiae Scientiarum Petropolitanae. Publication date 1862. Volume 1. <https://archive.org/details/leonhardieuleri00petrgoog>
17. Leibniz, G.W. 1682. De vera proportionem circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa. Acta Eruditorum, Februar 1682, P. 41–46.
18. Poggendorff, J. C. 1863. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig : J. A. Barth. Columns 704–705.
19. Reinhold, E. Manuscript 16 c. Geometria Subterranea Unter-irdische Erdmääßung ; oder so genannte Marck-Scheide-Kunst. Was nemlich Selbige sey. Und Worinne die eigentlich bestehe. Nebst aufrichtigen Unterricht wie ein Geometra Subterraneus oder Markscheider bey allm fürkommende Fällen richtig agieren und seinem ampte Gänge thun soll. 3 versions: Freiberg WA XVII 11, Freiberg WA XVII 677, Nachlass Scheidhauer 300m
20. Savile H. 1621. Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis. Oxford: Iohannes Lichfield & Iacobus Short.

21. Smith, D.E. 1951. History of Mathematics. Vol. 1. New York: Dover Publications Inc.
22. Souchon, C. 2003. Les cartes du Chevalier Lois-Pierre Daudet aux Archives nationales un itinéraire royal Reims-Soissons-Paris, 1722-1728 (?). CFS No 175. Mars 2003. P. 30-35. <https://www.lecfc.fr/new/articles/175-article-5.pdf>
23. Voigtel N. 1686 (Nachauflagen u. a. 1688, 1693). Geometria Subterranea oder Marckscheide-Kunst: darinnen gelehret wird Wie auff Bergwercken alle Klüffte und Gänge in Grund und am Tag gebracht/ auch solche voneinander unterschieden werden sollen; so wohl Was bey Durchschlägen in Ersparung Kosten/ Bringung Wetters und Benennung Wassers denen Zechen oder Gebäuden/ mit zubeoachten; Item/ Wie Streitigkeiten/ so sich unter miteinander schnürenden Gewercken offers zuereignen pflegen/ dem Maaße nach aus einander zusetzen; Sambt noch andern in nechstfolgendem Indice enthaltenen und zu dieser Kunst dienlichen Sachen; Allen Bergwercks-Liebenden zum Unterricht und versicherlichen Nutzen, Dietzel, Eisleben.
24. Vossius, G.J. 1650. De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amsterdam: ex typogr. J. Blaeu.
25. Vossius, G.J. 1660. De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis. Cui operi subjungitur Chronologia Mathematicorum. Libri tres. Amsterdam: ex typographeio Ioannis Blaeu.
26. [Vossius] 1650. Gerardi Ioannis Vossii De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis, cui operi subjungitur, chronologia mathematicorum, libri tres. 1650. ex typographeio Ioannis Blaeu. Caput 15. Euclidis. P. 52–53 (Separate pagination).
27. Walther H. Erasmus Reinhold. 2021 <https://erasmus-reinhold-gymnasium.de/erasmus-reinhold-2/>
28. Ball, W.W.R. 1889. History of the Study of Mathematics at Cambridge. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1889. P. 29.

Получено 16.06.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 531

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292

**История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса**

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

**Смирнов Алексей Сергеевич** — Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург).

*e-mail:* — [smirnov.alexei.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexei.1994@gmail.com)

**Смольников Борис Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург).

*e-mail:* — [smolnikovba@yandex.ru](mailto:smolnikovba@yandex.ru)

**Аннотация**

В статье прослеживается исторический процесс развития одного из важнейших понятий теории механических колебаний — резонанса, начиная с XVII в. и до наших дней. Отмечается, что резонанс имеет огромное теоретическое и практическое значение, однако для этого термина отсутствует достаточно строгое и всеобъемлющее определение. Кратко изложена предыстория резонанса и обсуждаются первоначальные исследования, связанные с трудами Г. Галилея, впервые описавшего резонанс на примере обычного маятника, и Х. Гюйгенса, изучившего явление симпатического резонанса на примере двух маятников на общей балочной опоре. Отмечается ведущая роль в XVIII-XIX вв. орбитальных резонансов, свидетельствующих об эволюционной зрелости Солнечной системы, и анализируются внутренние резонансы в земной механике на примере двойного и сферического маятников. Подробно анализируется классический гармонический резонанс, сыгравший значительную роль в технике. На примере катастроф с мостовыми конструкциями продемонстрирована вредная роль резонанса. Помимо этого, дается классификация различных разновидностей резонанса, сформировавшаяся в XIX-XX вв. Последним шагом в этой цепочке стал термин «авторезонанс», связанный с именем А. А. Андропова. Авторезонанс позволяет крайне эффективно осуществлять разгон системы при помощи обратных связей, приспособлявая тем самым вынуждающие силы под свойства самой системы. Приводятся несколько наглядных примеров авторезонанса в маятниковых системах. В заключение отмечается, что авторезонансы постепенно начали занимать серьезное место в робототехнике и биомеханике, и их использование оказалось важнейшей ступенькой в мир оптимальных режимов движения.

**Ключевые слова:** акустический резонанс, симпатический резонанс, внутренний (конструкционный) резонанс, орбитальный (астрономический) резонанс, гармонический (технический) резонанс, антирезонанс, супергармонический (ультрагармонический) резонанс, субгармонический резонанс, комбинационный (субультрагармонический) резонанс, параметрический резонанс, автоколебательный (самовозбуждающийся) резонанс, авторезонанс (управляемый резонанс), биорезонанс, квазирезонанс, истинный резонанс.

**Библиография:** 60 названий.

**Для цитирования:**

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 269–292.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

---

UDC 531

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292

**The history of mechanical resonance – from initial studies to autoresonance**

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov

**Smirnov Alexey Sergeevich** — Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).

*e-mail:* — *smirnov.alexey.1994@gmail.com*

**Smolnikov Boris Aleksandrovich** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).

*e-mail:* — *smolnikovba@yandex.ru*

**Abstract**

The paper traces the historical development process of one of the most important concepts of the mechanical oscillations theory – resonance, starting from the XVII century to the present day. It is noted that resonance is of great theoretical and practical importance, but there is no sufficiently strict and comprehensive definition for this term. The prehistory of resonance is mentioned and the initial studies associated with the works of Galileo Galilei, who first described resonance using the example of an ordinary pendulum, and Christiaan Huygens, who studied the phenomenon of sympathetic resonance using the example of two pendulums on a common beam support, are discussed. The leading role of orbital resonances in the XVIII-XIX centuries, that indicate the evolutionary maturity of the Solar system, is noted, and the internal resonances in terrestrial mechanics are analyzed using the example of double and spherical pendulums. The classical harmonic resonance is analyzed in detail, and it played a significant role in technology. The harmful role of resonance is demonstrated by the example of catastrophes with bridge structures. In addition, a classification of various types of resonance, which was formed in the XIX-XX centuries, is given. The term "autoresonance" associated with the name of A. A. Andronov was the last step in this chain. Autoresonance made it possible to effectively swing the system using feedbacks, thereby adapting the driving forces to the properties of the system itself. Several illustrative examples of autoresonance in pendulum systems are given. In conclusion, it is noted that autoresonances gradually began to take a serious place in robotics and biomechanics, and their use turned out to be the most important step into the world of optimal motion modes.

*Keywords:* acoustic resonance, sympathetic resonance, internal (structural) resonance, orbital (astronomical) resonance, harmonic (technical) resonance, antiresonance, superharmonic (ultraharmonic) resonance, subharmonic resonance, combinational (subultraharmonic) resonance, parametric resonance, self-oscillating (self-excited) resonance, autoresonance (controlled resonance), bioresonance, quasi-resonance, true resonance.

*Bibliography:* 60 titles.

**For citation:**

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov, 2022, "The history of mechanical resonance – from initial studies to autoresonance", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 269–292.

## 1. Введение

Мы все живем в колебательном, а точнее – в непрерывно колеблющемся мире, начиная от младенческой люльки и детских качелей, где впервые замечаем, что получаемое удовольствие зависит от размаха, т. е. от амплитуды раскачивания. В школе мы узнаем, что звук и свет – это тоже колебания, причем здесь возникает и вторая характеристика колебательного процесса – частота, которой определяется высота тона звучания или цвет различных предметов [1]. Наконец, уже в университете, особенно техническом, мы постепенно осознали, что весь окружающий мир и мы сами в том числе колеблемся во всем спектре частот и амплитуд.

Естественно, что и подавляющее большинство профессий направлено на управление колебаниями либо физически, либо умозрительно, либо путем построения их математических моделей. Последний случай представляет для нас наибольший интерес, т. к. мы живем в эпоху машин и механизмов, которые требуют от инженера-исследователя настройки колебательной системы на тот или иной режим функционирования в зависимости от собственных параметров механизма и от условий окружающей среды. Для инженера-механика (и электро-механика) одним из ключевых параметров является собственная частота (или спектр частот) рассматриваемого механизма, ибо именно в ее окрестности может произойти неожиданный рост амплитуд колебаний при действии гармонической вынуждающей силы той же самой частоты. Это явление традиционно и принято называть *резонансом*, и оно характеризуется резким возрастанием амплитуд угловых или пространственных перемещений.

Хорошо известно, что резонанс может выступать как в качестве полезного, так и в качестве вредного явления, и он представляет огромное теоретическое и практическое значение. Тем не менее, вплоть до настоящего времени для него нет даже достаточно строгого и всеобъемлющего определения [1], хотя термин «резонанс» имеет довольно длинную историю. В этой связи значительный интерес представляет исторический анализ различных подходов к понятию резонанса – от основополагающих к современным [1], что и является основной целью настоящей работы.

## 2. Первоначальные исследования явления резонанса

Наименование «резонанс» происходит от латинского слова «*resono*», означающего «отклик», «эхо», т. е. в самом названии подчеркивается реакция системы на какое-либо воздействие. Если мощность вынуждающей силы достаточно велика, то она способна превратить почти незаметную вибрацию в полноценные колебания с нарастающей амплитудой, которые нередко заканчиваются поломками и даже катастрофами. В силу своей высочайшей избирательности и эффективности явление резонанса приобретает поистине вселенское и всемаштабное влияние на динамические процессы во всех областях знаний физического мира.

Предыстория резонанса корнями уходит еще в Древнюю Грецию, когда пифагорейцы, перебирая струны своих лир на берегах Средиземного моря, нередко замечали их дрожание в ответ на громкое звучание другой струны того же тона. Это явление называется *акустическим резонансом*. Однако первый заметный вклад в теорию резонанса внес в первой половине XVII века выдающийся ученый Г. Галилей (1564–1642). Впервые это явление было описано Галилеем в 1602 г. в работах, посвященных исследованиям динамики маятников и музыкальных струн [4, 5]. В своем фундаментальном труде «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», опубликованном в 1638 г., Галилей писал [6]: «... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент» [7]. Таким образом, в своем описании резонанса Га-

лилей обратил внимание на крайне важный момент – на способность маятника накапливать механическую энергию, подводимую от внешнего источника, имеющего конкретную частоту, хотя самого понятия «энергия» в то время еще не было.

Большое внимание к явлению резонанса проявляли и многие последователи Галилея, среди которых особую роль сыграл Х. Гюйгенс (1629–1695). Во время своих исследований с маятниковыми часами в 1665 г. он впервые обнаружил, что когда он поместил двое часов на стене рядом друг с другом и качнул их маятники с разной скоростью, то они спустя некоторое время стали качаться с одинаковым ритмом. Это явление получило название *симпатического резонанса*, и оно может быть определено как синхронизация осцилляторов с внешним ритмом, т. е. тенденция двух колеблющихся тел стремиться к гармонии. Синхронизацию колебаний маятников можно объяснить их влиянием друг на друга через невидимую на глаз вибрацию стены, на которой они висят. Ниже приводится цитата из письма Х. Гюйгенса своему отцу, от 26 февраля 1665 года: «... я заметил удивительный эффект, о котором ранее никто даже и не думал. Двое часов, висящих на стене друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некоторой симпатии: когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются к синхронизму и сохраняют его до тех пор, пока я не нарушу их ход...» [8].

Интересно подчеркнуть, что данное наблюдение Гюйгенс осуществил, будучи больным и потому вынужденным оставаться несколько дней в постели, как раз наблюдая двое маятниковых часов, висящих на стене. Гюйгенс продолжил наблюдения за часами, подвешивая их на общей балочной опоре, размещенной на двух стульях (рис. 1), и всякий раз маятники часов синхронизовались и начинали ходить в унисон друг к другу [9, 10].

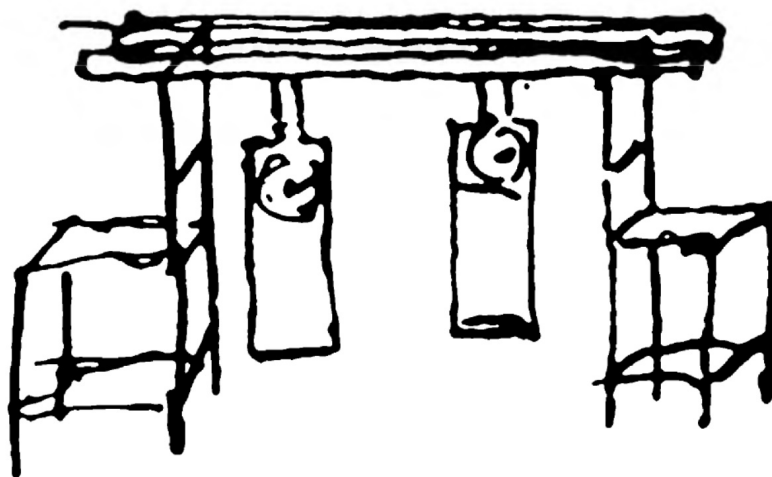


Рис. 1: Оригинальный рисунок Х. Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты

Представляет большой интерес процитировать еще раз Гюйгенса, демонстрируя его собственное исключительно точное описание наблюдения синхронизации: «... Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое таким способом сконструированных часов к одной и той же деревянной балке, оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы

тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой».

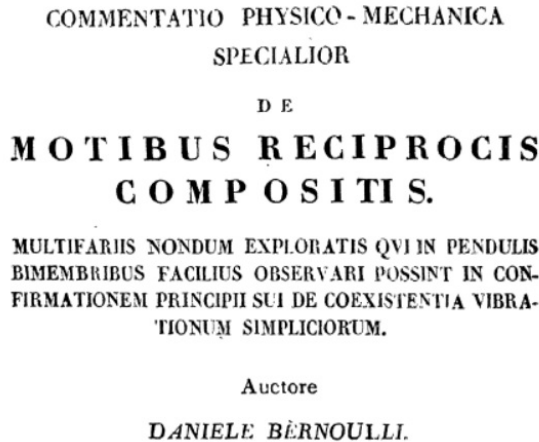
Таким образом, Гюйгенс не только привел точное описание явления, но и дал отличное качественное объяснение эффекта взаимной синхронизации [8]. Он совершенно правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана недоступными восприятию движениями балки. Гюйгенс писал о «симпатии часов», в современной терминологии это означает, что часы синхронизировались в противофазе за счет слабой связи через балку. Подчеркнем, что несмотря на то, что это явление называют самосинхронизацией, в его основе лежит тот же принцип резонанса, т. к. происходит отклик одного маятника на движение другого.

### 3. Внутренние резонансы в небесной и земной механике

Открытие синхронизации в механических системах оказалось провидческим для небесной механики, но несколько замедлило развитие динамики машин и механизмов. Дело в том, что изобретение телескопа, связанное с именем Г. Галилея, и открытие закона всемирного тяготения, связанное с именами Р. Гука (1635–1703) и И. Ньютона (1642–1727), резко усилило интерес к астрономии вообще и к механике движения планет внутри Солнечной системы в частности. И оказалось, что Солнечная система буквально до краев заполнена *внутренними резонансами* или *синхронизмами*. Под внутренним резонансом здесь понимается целочисленное соотношение между периодами обращения  $T_1$  и  $T_2$  некоторых двух небесных тел, т. е.  $T_1/T_2 = n_1/n_2$ , где  $n_1$  и  $n_2$  – целые числа [11]. Начало этим исследованиям положил П.-С. де Лаплас (1749–1827), который на примере анализа периодов обращения Юпитера и Сатурна установил следующее соотношение:  $5T_1 \approx 2T_2$ . Это означает, что продолжительность 5 оборотов Юпитера почти полностью совпадает с продолжительностью 2 оборотов Сатурна, из-за чего возникает резонансное взаимодействие их движений [12]. Так возникла «проблема малых знаменателей» в уравнениях орбитальных движений планет Солнечной системы, которая уже более двух столетий интересует астрономов. В настоящее время установлено 46 пар планет и их спутников, обладающих подобными *орбитальными (или астрономическими) резонансами*, для которых отношение периодов обращения (или отношение средних движений) не превосходит 7. Поэтому подобные соизмеримости встречаются значительно чаще, чем это можно было бы ожидать, считая их случайными совпадениями [13]. Возникающее при этом регулярное гравитационное взаимодействие небесных тел может стабилизировать их орбиты, так что можно утверждать, что резонансная структура стабилизирует Солнечную систему на очень большие периоды времени. В некоторых случаях резонансные явления вызывают неустойчивость отдельных орбит. Таким образом, резонансы являются крайне важными особенностями Солнечной системы [11], что свидетельствует об ее «эволюционной зрелости». Особенность эта объясняется, по-видимому, «принципом Аппеля» [14], который гласит, что изолированная динамическая система стремится избежать на нее воздействия сил внутреннего и внешнего трения, т. е. минимизировать работу этих сил [15]. В свою очередь эти синхронизмы порождают множество вторичных синхронизмов, таких, как времена года (весна, лето, осень, зима), продолжительность суток и т. д., причем, в отличие от астрономических резонансов, обладающих четкой повторяемостью, эти вторичные резонансы имеют, как правило, плавающую частоту (таяние снежного покрова, время уборки урожая и пр.). И эти резонансы уже тесно связаны с трудовой деятельностью человека, обеспечивая ему необходимую концентрацию физических и интеллектуальных усилий. По-видимому, это также оказало влияние на введение термина «авторезонанс», к которому мы обратимся несколько позднее.

Внутренние резонансы получили распространение не только в небесной, но и в земной

механике. Например, в трудах Д. Бернулли (1700–1782) по колебаниям двойного математического маятника имеются рассуждения о том, при каких его параметрах частоты колебаний будут соотноситься как целые числа [16]. Было показано, что если при равных длинах обоих маятников массы верхнего и нижнего грузов соотносятся как 16:9, то будет иметь место резонанс 1:2, а если эти массы соотносятся как 9:16, то будет резонанс 1:3 (рис. 2) [17].



§. 4. Descendamus ad exempla particularia, retinendo hypothesin aequalitatis inter ambo fila, utrumque aequale  $l$ .

(a) Ponatur corpus superius  $m = 16$  et inferius  $\mu = 9$ ; fiet  $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{3}{5}$ ; hinc longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus simplicibus tardioribus  $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{8}{5}l$  ac pro oscillationibus celerioribus  $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{2}{5}l$ ; hinc prius alterius quadruplum est, unde  $T = 2t$  et  $n = 2$ .

(b) Invertantur corpora atque nunc supponatur  $m = 9$  et  $\mu = 16$ ; habebitur  $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}$ ; hinc longitudo penduli isochroni tardioris  $= \frac{9}{5}l$  et celerioris  $= \frac{1}{5}l$ ; unde  $T = 3t$  et  $n = 3$ .

Рис. 2: Заголовок и фрагмент статьи Д. Бернулли [16]

Наиболее же простым примером внутреннего резонанса в земной механике служит сферический маятник, обладающий двумя одинаковыми частотами в рамках линейной модели [18]. Известно, что в этом случае даже при малых колебаниях недостаточно рассмотрения лишь линейной модели, в которой уравнения движения оказываются не связанными друг с другом. Это объясняется тем, что здесь вследствие внутреннего резонанса 1:1 имеет место интенсивный обмен энергией между двумя степенями свободы. Данный эффект можно адекватно описать лишь в рамках слабо-нелинейной модели при удержании кубической нелинейности, связывающей оба уравнения [19]. В. Пуанкаре (1820–1883) в 1842 г. показал, что эллиптическая траектория сферического маятника не является неподвижной, а постепенно прецессирует, т. е. поворачивается [20]. Наглядно это явление было продемонстрировано в 1905 г., когда под руководством А. Н. Крылова (1863–1945) в Опытном бассейне морского ведомства в Санкт-Петербурге был проведен эксперимент со сферическим маятником. Его результатом стала известная фотографическая запись траектории сферического маятника в проекции на горизонтальную плоскость, полученная С. В. Вяхиревым (1875–1946) и подтвердившая все высказанные выше выводы (рис. 3) [21].

Интересно также отметить, что подобный обмен энергией между двумя степенями свободы можно наблюдать и в системах, имеющих не равные, но близкие частоты в рамках линейной модели. Например, если два одинаковых маятника связаны пружиной малой жесткости, то частоты колебаний этой системы будут мало отличаться от друга, и в этом случае мы будем иметь т. н. систему со слабой связью. Тем не менее, эта связь оказывает важную роль, осуществляя взаимодействие двух маятников, которые начинают «чувствовать» друг друга. Отклоняя один маятник при неподвижном другом, можно наблюдать явление биений [22], когда колебания одного маятника убывают, а колебания другого нарастают, после чего они меняются ролями [23]. На рис. 4 представлен процесс изменения углов отклонения каждого из маятников во времени. Биения могут иметь место и в других системах, например, они проявляются при рассмотрении упомянутого ранее двойного математического маятника, когда длины его звеньев равны, а масса нижнего груза много меньше массы верхнего груза.

Таким образом, внутренний резонанс представляет определенный интерес, поскольку при этом имеет место особое взаимодействие движений, вследствие чего происходит перекачка

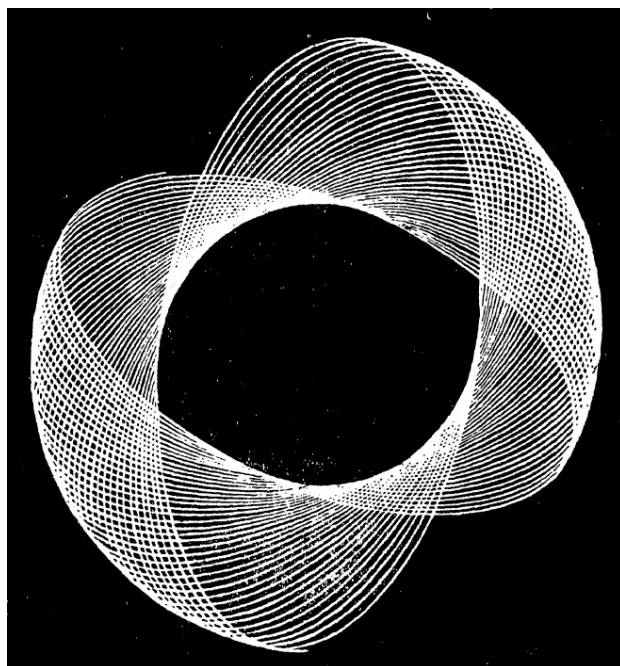


Рис. 3: Фотография траектории сферического маятника

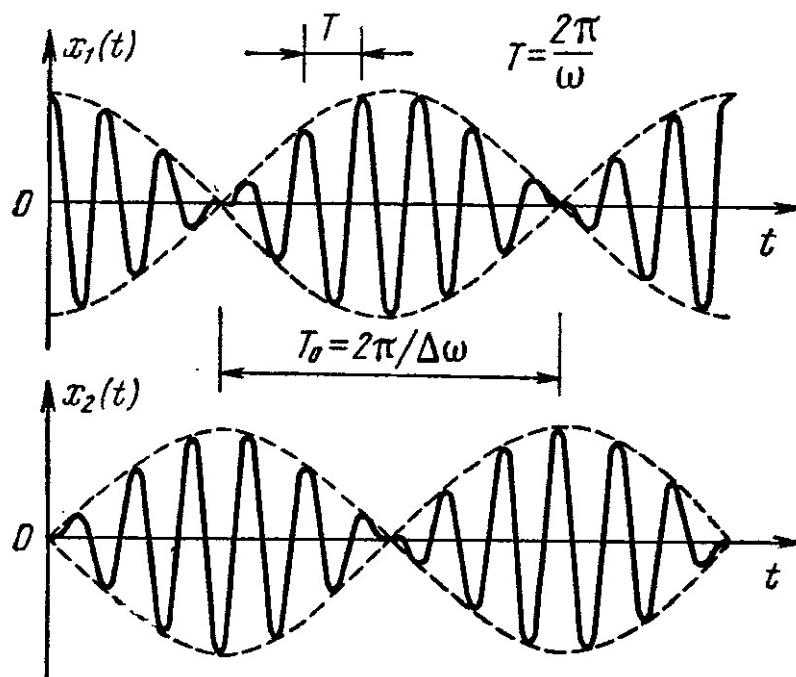


Рис. 4: Биения двух связанных маятников

энергии с одной степени свободы на другую. Следует обратить внимание на то, что подобная перекачка может привести и к неблагоприятным последствиям. Поскольку внутренний резонанс не удастся устранить так легко, как внешний, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то на этапе проектирования конструкции этому фактору необходимо уделять самое серьезное внимание. Именно поэтому внутренний резонанс можно назвать *конструкционным резонансом*, понимая под этим непосредственную роль самой конструкции в возникновении подобного резонанса.

## 4. Гармонический резонанс

Возвращаясь в XVIII век, заметим, что большое внимание к механическим колебаниям проявляли выдающиеся ученые Л. Эйлер (1707–1783) и Ж. Лагранж (1736–1813), которые в своих трудах по теории малых колебаний занимались построением математических моделей многочисленных механических систем. Их исследования и легли в основу *классического понятия резонанса*, которое рассматривается в подавляющем большинстве книг. Оно касается резонанса в линейных системах с одной или несколькими степенями свободы, когда резонансное возбуждение предполагается гармоническим с заданной частотой и амплитудой, вследствие чего подобный резонанс можно назвать *гармоническим резонансом*.

Под резонансом в линейной системе обычно понимается явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к собственной частоте. Именно вынуждающая сила в виде гармонической функции времени (т. е. программное управление) зачастую используется для целенаправленного поиска резонансных режимов, что вполне естественно для линейных систем. В самом деле, внешняя сила при этом действует в унисон с собственными колебаниями системы, также являющимися гармоническими, тем самым усиливая их. Поэтому возникновение интенсивных колебаний в этой ситуации вполне естественно. Таким образом, при указанных условиях даже малое воздействие способно создать весьма большие колебания системы. Тем не менее, данный метод возбуждения резонансных колебаний вряд ли будет пригоден при увеличении амплитуд, когда линейная модель превращается в нелинейную, о чем будет сказано ниже.

Хорошо известно, что при нулевых начальных условиях и совпадении собственной частоты линейного осциллятора с внешней происходит нарастание колебаний во времени по линейному закону (рис. 5, по оси абсцисс откладывается безразмерное время). Интересно отметить, что резонансное движение, приведенное на рис. 5, является устойчивым процессом, что может показаться поначалу неожиданным. Однако здесь следует иметь в виду, что устойчив процесс неограниченного нарастания амплитуд вынужденных колебаний, иначе говоря, небольшие возмущения не могут изменить общий характер рассматриваемого движения [24].

Однако на практике физически невозможно обеспечить точное совпадение указанных частот, а именно это обстоятельство и приводит к получению нарастающих колебаний. Более реальным является случай малой расстройки частот, где уже отсутствует резонансный эффект, вместо которого будут иметь место биения. В результате колебания осциллятора примут вид, представленный на второй иллюстрации с рис. 4. Кроме того, учет демпфирования также не позволяет неограниченно наращивать колебания, вследствие чего происходит ограничение амплитуд колебаний. В этих условиях основной оценкой подобного резонанса служит его амплитудно-частотная характеристика, традиционная иллюстрация которой при наличии вязкого трения с различными коэффициентами демпфирования представлена на рис. 6. Здесь построена зависимость безразмерной амплитуды вынужденных колебаний (отношение истинной амплитуды к т. н. «равновесной» амплитуде, называемое коэффициентом динамичности) от безразмерной внешней частоты (истинной частоты, отнесенной к собственной) [25]. Под резонансом в данном случае следует понимать пик амплитудно-частотной характеристики, который при достаточно небольшом трении достигается вблизи собственной частоты. Отметим, что подобную амплитудно-частотную характеристику можно построить и для слабо-нелинейной системы, и она будет отличаться от рис. 6 в первую очередь тем, что резонансные кривые при малом демпфировании будут «нанизаны» на скелетную кривую, описывающую зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды. Вследствие этого возможны несколько различных режимов при изменении частоты в определенных пределах, причем реализация того или иного режима зависит от его начальных условий, т. е. от того, происходит ли квазистатическое увеличение или уменьшение частоты.

Особенно полезными данные заключения оказались на закате века Просвещения (XVIII в.),



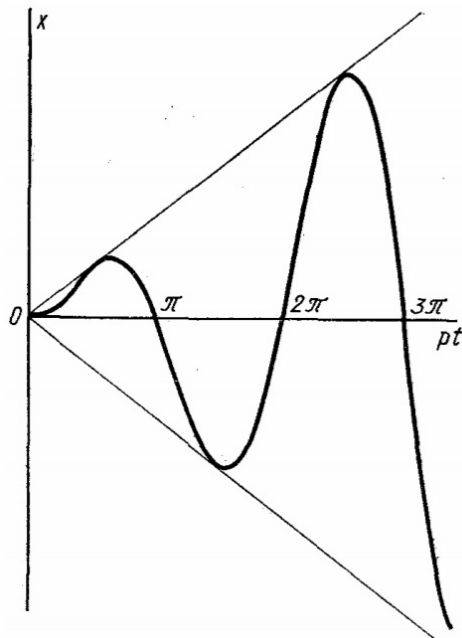


Рис. 5: Классический резонанс

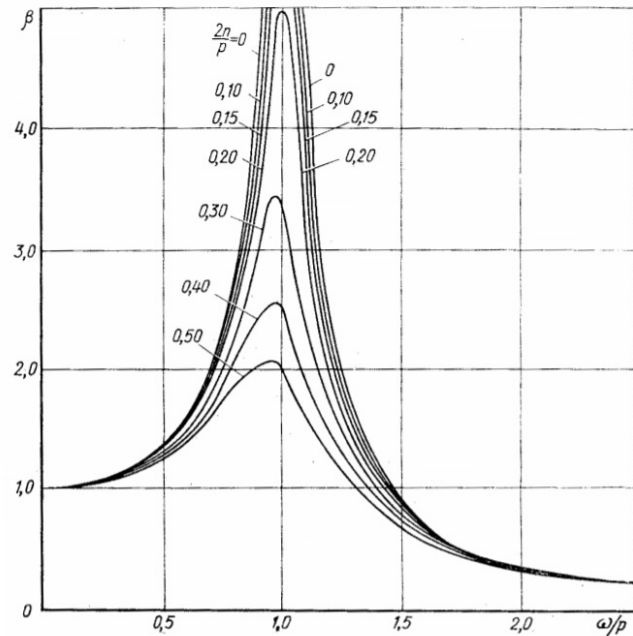


Рис. 6: Амплитудно-частотная характеристика

который ознаменовался приходом другой эпохи – эпохи машин и механизмов. Эта эпоха уже нуждалась в технических специалистах, изобретателях и конструкторах, и наступившая эпоха машиностроения (XIX-XX вв.) поставила множество новых задач – сначала чисто кинематических, а затем и динамических. И если кинематические задачи оказались вполне доступными рядовым инженерам и конструкторам, то динамические нередко оказывались для них «твердым орешком». И эта твердость по большей части объяснялась наличием резонансов. Как правило, современные машины (а многие высотные здания, вышки, мосты и т. д. также можно отнести к машиностроительным сооружениям) работали в широком диапазоне частот, характеризующихся резонансами. Построенная теория резонанса для линейных систем позволила адекватно описать многочисленные резонансные явления в машинах, механизмах и различных сооружениях. В этой связи подобные резонансы могут быть названы *техническими резонансами*.

Здесь уместно упомянуть и про такое весьма интересное динамическое явление, как *антирезонанс*. Это явление широко используется для динамического гашения колебаний механических систем [25]. Его суть заключается в том, что для системы, которая имеет по крайней мере две степени свободы (например, два твердых тела, соединенных пружиной друг с другом и с неподвижной опорой), тело, к которому прикладывается возбуждающая гармоническая сила, при надлежащем подборе параметров остается все время неподвижным [26]. В более общем случае, когда в системе имеет место демпфирование, под антирезонансом по аналогии с резонансом следует понимать ярко выраженный минимум амплитудно-частотной характеристики. Отметим также, что явление антирезонанса встречается и при исследовании систем с распределенными параметрами. Так, если приложить гармоническую силу к правому концу стержня, закрепленного на левом конце, то при надлежащем выборе частоты этой силы можно добиться того, что правый конец стержня, т. е. точка приложения силы, будет неподвижным, тогда как все остальные точки оси стержня, за исключением конечного числа узлов, будут совершать продольные колебания [27]. Аналогичный эффект можно наблюдать и при исследовании изгибных колебаний консольной балки [26].

Кроме наиболее часто встречающегося *обычного (главного) резонанса* (когда собственная

частота колебаний равна частоте вынуждающего воздействия), существуют также и более сложные резонансы при наличии гармонического возбуждения, которые можно уловить при рассмотрении слабо-нелинейных систем [28]. К ним относятся *супергармонический (или ультрагармонический) резонанс* (когда имеется ярко выраженная супергармоника, частота которой кратна частоте вынуждающего воздействия), *субгармонический резонанс* (когда частота колебаний в целое число раз меньше частоты вынуждающего воздействия), *комбинационный (или субультрагармонический) резонанс* (когда отношение частоты колебаний к частоте вынуждающего воздействия является рациональным числом) [29, 30].

Необходимо указать и на то, что резонансные эффекты в линейной системе могут возникать не только при чисто гармоническом возбуждении. Если внешняя сила является периодической, но не гармонической, то ее можно разложить в ряд Фурье, названный по имени Ж.-Б. Фурье (1768–1830), на сумму отдельных гармонических составляющих. Ясно, что каждая из них будет возбуждать решение, аналогичное описанному ранее, так что в силу линейности задачи общее решение будет представлять собой суперпозицию всех этих решений. Поскольку в ряде Фурье гармонические составляющие будут иметь частоты, кратные частоте вынуждающей силы, то можно наблюдать интенсивные колебания системы, если одна из этих гармоник вступит в резонанс со свободными колебаниями. Таким образом, в этой ситуации резонанс наступает, если частота внешнего воздействия равна долям от собственной частоты [25].

Интересно отметить и такое явление, как *прохождение через резонанс*. Оно возникает при разгоне машины, например, под действием внешней синусоидальной нагрузки с линейно изменяющейся частотой [25]. При этом максимальные амплитуды колебаний при проходе через резонанс оказываются меньшими, чем в случае описанных выше установившихся резонансных колебаний, причем различие будет тем большим, чем быстрее осуществляется прохождение через резонанс [31]. Кроме того, особенностью этого явления является и то, что максимальные амплитуды достигаются не в момент совпадения частоты внешней силы с собственной, а несколько позже: в процессе разгона максимум амплитуды смещается в сторону больших частот, в процессе остановки – в сторону меньших частот.

Выше были представлены резонансные эффекты, возникающие вследствие периодического внешнего воздействия на систему. Однако явление резонанса может также возникать и в случае периодического изменения параметров самой системы [32]. В этом случае резонанс называется *параметрическим* [33]. Впервые с резонансом такого типа столкнулся Дж. У. Хилл (1838–1914) в 1877 г. при исследовании движения Луны. Он вывел уравнение осциллятора с переменным коэффициентом жесткости, которое и называется уравнением Хилла, и его подробному исследованию посвящена работа [34], изданная в 1886 г. Наиболее простым и в то же время интересным случаем является изменение жесткости по гармоническому закону вблизи некоторого постоянного значения. Движение такой системы описывается уравнением Матьё, которое является частным случаем уравнения Хилла и было названо по имени его исследователя Э. Л. Матьё (1835 – 1890). Не вдаваясь в подробности, отметим, что это уравнение содержит два безразмерных коэффициента, зависящих от параметров задачи. Данные коэффициенты полностью определяют характер решений уравнения, и на плоскости этих коэффициентов можно выделить области устойчивости (рис. 7). Такая диаграмма называется диаграммой Айнса-Стретта по именам Э. Л. Айнса (1891–1941) и М. Ю. О. Стретта (1903 – 1992) [35], опубликовавших свои работы на эту тему в 1927 г. и 1928 г. соответственно [36, 37]. Незаштрихованные области отвечают неустойчивым движениям, при которых и реализуется параметрический резонанс. В частности, резонансные проявления имеют место при малой амплитуде гармонического изменения жесткости тогда, когда отношение собственной частоты осциллятора без учета гармонического изменения жесткости к частоте ее изменения равно 1:2, 1, 3:2, 2, 5:2 и т. д. Наиболее серьезной является первая зона неустойчивости, когда частота изменения жесткости вдвое больше собственной. Еще одним примером параметрического резонанса служит маятник с периодически изменяющейся длиной по гармоническому закону. Его

движение описывается более сложным уравнением, чем уравнение Матёе, однако оно также имеет переменные коэффициенты. Поэтому и здесь можно возбудить параметрический резонанс, принимая, например, что частота изменения длины вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, вычисленной при неизменной длине [22].

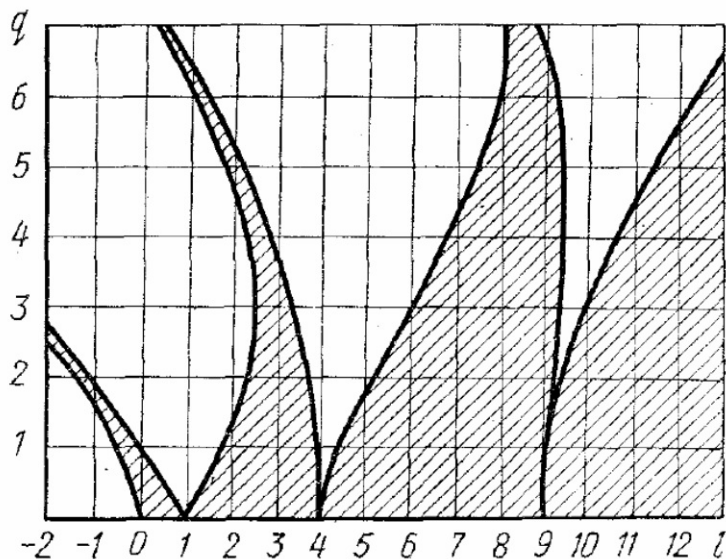


Рис. 7: Диаграмма Айнса-Стретта

## 5. Резонанс как неблагоприятный фактор

Вредная роль резонанса нередко приводила к различным неблагоприятным последствиям и даже катастрофам [38]. Особенно чувствительными к резонансу оказались мостовые конструкции. Истории хорошо известны случаи, когда марширующая войсковая часть во время перехода по подвесному мосту возбуждает настолько большие колебания, что они создают возможность обрушения этого моста [39].

В апреле 1831 г. рухнул Бротонский подвесной мост с железными цепями, переброшенный через реку Ирвелл в Великобритании, что было вызвано проходившим по нему отрядом солдат [40]. Частота шага солдат, шедших в ногу, оказалась близка к одной из собственных частот колебаний моста, что повлекло за собой обрыв цепей и последующее обрушение моста в реку. Интересно отметить, что солдаты, шедшие вчетвером в ряд, почувствовали, что мост вибрирует в такт их шагам, и, находя это весьма забавным, заставили его вибрировать еще больше. К счастью, в этом инциденте никто не погиб, поскольку пролет моста был низким, а глубина воды в этом месте была небольшой, однако порядка 20 человек получили ранения. Это событие вызвало некоторую потерю доверия к подвесным мостам, что, однако, не помешало строительству новых подвесных мостов. Главным следствием обрушения Бротонского моста стал приказ «не шагать в ногу» при пересечении мостов войсками.

Несмотря на то, что французские солдаты также получили аналогичный приказ, в апреле 1850 г. подобный инцидент повторился. На этот раз обрушился мост Бас-Шен через реку Мен во французском городе Анже, имевший два троса, когда по нему проходил батальон французских солдат (рис. 8). К сожалению, здесь уже не обошлось без жертв: погибло более 200 человек [41]. Колебаниям моста способствовала плохая погода, поскольку батальон проходил по мосту во время сильной грозы, когда ветер заставлял мост вибрировать, а солдаты, пытаясь восстановить свое равновесие, еще больше раскачали его. Оставшиеся в живых сообщили,



Рис. 8: Разрушенный мост Бас-Шен

что они шли, как пьяные, и едва могли удержаться от падения. Усилия солдат, направленные на то, чтобы не шагнуть в ногу, вероятно, заставили их непроизвольно маршировать с тем же ритмом, что и мост, а это и привело к возникновению резонансного эффекта.

Не менее трагична и судьба известного однопролетного Египетского моста со сфинксами, подвешенного на тройных нитях металлических цепей и переброшенного через реку Фонтанку в Санкт-Петербурге. В январе 1905 г., когда по мосту проходил кавалерийский эскадрон, цепи разорвались, и пролеты моста полностью обрушились на лед Фонтанки (рис. 9) [42]. Среди



Рис. 9: Разрушенный Египетский мост

эскадрона не было людских жертв, но одна лошадь утонула, а еще две сильно пострадали, поэтому их пришлось пристрелить. Одной из основных версий обрушения служит явление резонанса: предполагается, что лошади, хорошо обученные стройному церемониальному маршу, отлично отбивали шаг, который попал в такт с колебаниями моста [43]. Эта версия подвергалась сомнению, поскольку есть утверждение, что лошади не способны двигаться «в ногу», т. е. не могут отбивать точный ритм. Более того, очевидцы катастрофы единогласно заявля-

ли, что по мосту помимо проходившего эскадрона навстречу ему также ехали извозчики, а по тротуару шли прохожие, так что слаженного хода не было. Поэтому, казалось бы, эффект резонанса в этом случае и не должен был возникнуть. Другой причиной катастрофы высказывалась непрочность конструкции, хотя поначалу и эта версия отрицалась инженерами, ведь с момента постройки в 1826 г. мост периодически ремонтировался, однако после обрушения была обнаружена раковина в металле одного из звеньев несущей цепи [44]. Наиболее вероятным объяснением трагедии служат оба указанных обстоятельства, поскольку раскачка моста кавалерией в той или иной степени имела место быть, что в сочетании с не вполне прочной конструкцией моста и привело к его обрушению.

Разумеется, с ростом парка машиностроительных конструкций, с возрастанием их скоростей и мощностей множились и их аварийные ситуации, обусловленные вредной ролью резонанса. В качестве примеров нежелательного воздействия резонанса в технике можно указать разрушение различных сооружений, обрыв проводов, вибрации в трубопроводах, раскачивание вагона на стыках рельсов, раскачивание груза на подъемном кране и многие другие проявления. Следует особо подчеркнуть, что в число резонансных проявлений также необходимо включить и самовозбуждающиеся разгонные режимы, отличающиеся от выше описанных тем, что они поддерживаются за счет силовых факторов неколебательной природы, и их параметры (амплитуда и частота) определяются внутренними свойствами самой системы. Колебания такого рода принято называть автоколебаниями, так что рассматриваемый режим может быть назван *самовозбуждающимся* или *автоколебательным резонансом*. Его простейшими примерами служат флаттер элементов конструкций летательного аппарата (главным образом, крыла самолета либо несущего винта вертолета) и шимми передних колес транспортного средства [45]. Нужно также отметить, что в отличие от классического гармонического резонанса, при котором амплитуда возрастает во времени линейно, автоколебательный резонанс может повлечь возрастание амплитуд по экспоненциальному закону.

Применительно к мостовым конструкциям здесь следует упомянуть о катастрофе, случившейся в результате аэроупругого флаттера. В ноябре 1940 г. почти сразу после открытия произошло обрушение висячего Такомского моста через пролив Такома-Нэрроуз в штате Вашингтон в США [46, 47] (рис. 10). По счастливому стечению обстоятельств движение на мосту в момент крушения было слабым, и единственный водитель успел покинуть его и спастись, а жертвой трагедии стала лишь собака, оставленная в машине. При этом можно было наблюдать динамические изгибно-крутильные колебания моста, вызванные недоучетом ветровых нагрузок при проектировании сооружения и усиливавшиеся вертикальными колебаниями тросов. В самом деле, при проектировании моста учитывалось действие лишь статических нагрузок, в том числе и ветровой, однако ее аэродинамическое действие не было принято во внимание. Эта авария оставила огромный след в истории науки и техники и способствовала целому пласту новых исследований в области аэродинамики. Более того, она оказала серьезное влияние на подходы к проектированию большепролетных мостов во всем мире. Отметим, что сам Такомский мост был полностью восстановлен с учетом улучшения его конструкции для дополнительной устойчивости и снижения аэродинамических нагрузок и повторно открыт в 1950 г., успешно функционируя и по сей день.

## 6. От гармонического резонанса к авторезонансу

Возвращаясь к вопросам разгона механических систем, отметим, что особенностью всех упомянутых ранее резонансных эффектов является то, что они относятся лишь к линейным или же к слабо-нелинейным системам. Тем не менее, с увеличением амплитуд колебаний все более отчетливо начинают проявляться нелинейные свойства механической системы. В первую очередь, в нелинейной системе имеет место дрейф частот с увеличением амплитуд, и данный



Рис. 10: Разрушенный Такоумский мост

факт приводит к нарушению главного условия возникновения резонансного процесса – действия внешней силы в такт с собственными колебаниями. Поэтому описанные ранее методы резонансного возбуждения колебаний становятся малоэффективными, так что взамен чисто гармонического (т. е. программного) управления, следует синтезировать другое. Необходимо подчеркнуть, что проблема резонанса как метода управления свободными колебаниями в различных динамических системах приобрела достойное внимание со стороны механиков, радиоинженеров, математиков лишь на подходе к середине XX века благодаря развитию радиосвязи и электромашиностроения. Особенно важную роль здесь сыграло то, что с ростом мощностей и скоростей колебания различных машин и механизмов приобретали существенно нелинейные свойства и новые степени свободы, и в соответствии с этим усложнялись и множились различные типы резонансов.

Все это привело к необходимости использования иного режима возбуждения резонансных колебаний, при котором частота возбуждения не предписывается извне, а поступает на привод возбуждения как сигнал контура обратной связи. Именно таким образом целесообразно прикладывать управляющие воздействия в нелинейных системах, поскольку при этом частота и фаза этого сигнала будут точно соответствовать текущей частоте и фазе системы, ввиду чего ей будет передаваться вся поступающая энергия. Это свойство и характерно для настоящего резонансного режима. Возникающий при этом режим нарастающих колебаний получил в литературе название «*авторезонанса*», и впервые он был введен в научный лексикон классиком советской школы теории колебаний А. А. Андроновым (1901–1952) в первом издании энциклопедического труда «Теория колебаний», выпущенного им в 1937 г. совместно с коллегами, известными учеными А. А. Виттом (1902 – 1938) и С. Э. Хайкиным (1901 – 1968). К сожалению, к моменту публикации этой книги А. А. Витт был арестован и вскоре после этого скончался, поэтому было невозможно поставить его фамилию на титульном листе. Второе издание книги вышло только в 1959 г., и на сей раз несправедливость в отношении А. А. Витта была исправлена. Учитывая наличие обратной связи для использования явления авторезонанса, его также можно назвать *управляемым резонансом*.

В книге [48] авторезонанс определяется как «резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы». В ней рассматривается пример линейной системы второго порядка (электрический контур) при наличии реле в обратной связи. Происхождение термина

«авторезонанс», вероятно, было связано с тем, что с учетом обратной связи система фактически становилась замкнутой. Следует обратить внимание на то, что и упомянутый выше термин «автоколебания» также был введен Андроновым в 1928 г. и быстро вошел в практику как в советской литературе, так и за рубежом. Что же касается термина «авторезонанс», то он долгие годы оставался практически незамеченным и использовался лишь применительно к достаточно простым системам с одной степенью свободы, где не требуется определять формы колебаний. Подчеркнем, что главной трудностью при практической реализации авторезонанса является именно необходимость использования контура обратной связи для формирования требуемого закона управления приводом. В этой связи следует отметить, что понятия «автоколебательный резонанс» и «авторезонанс», являясь родственными, имеют между собой важное отличие: автоколебательный резонанс, как правило, проявляется благодаря естественным физическим причинам, как, например, аэроупругий флаттер, и оказывается явлением неблагоприятным, тогда как авторезонанс целенаправленно организуется специальным образом за счет контура обратной связи [49]. Всплеск интереса к понятию авторезонанса стал возрастать в последние десятилетия [50]. Среди наиболее значимых публикаций, в которых изучаются резонансные эффекты при наличии обратной связи, следует отметить статьи [51, 52]. При этом важнейшую роль играет задача синтеза адекватного закона управления движением системы на основе обратной связи. Стоит подчеркнуть, что и приведенное в начале настоящей статьи описание резонанса, данное Галилеем на примере маятника, вовсе не противоречит наличию обратной связи – напротив, из приведенной цитаты становится понятным, как ее использовать для возбуждения резонансного режима: «приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент».

На том же примере маятника можно более детально проиллюстрировать простейшие примеры авторезонанса, которые проясняют суть данного термина. Так, с практической точки зрения большой интерес представляет разгон математического маятника при помощи скачкообразного изменения длины нити в среднем и крайнем положениях, который имитирует раскачивание качелей самим качающимся на них человеком. В самом деле, хорошо известно, что человек стремится раскачать качели при помощи ритмичного сгибания и выпрямления тела, а именно, человек выпрямляется (поднимая свой центр тяжести) при прохождении качелей через вертикальное положение и приседает (опуская свой центр тяжести) при максимальном отклонении. В этом случае длина маятника может быть выражена через переменные состояния, причем анализ показывает, что будет происходить нарастание полной энергии, поэтому имеет место именно авторезонанс [53]. Отметим, что не стоит отождествлять это явление с тем вариантом, когда длина нити скачкообразно меняется через равные интервалы времени, т. е. в виде заданной программы. В такой ситуации мы будем иметь дело с описанным выше параметрическим резонансом, т. к. длина нити здесь меняется периодически с заранее заданной частотой, так что изменения длины будут зависеть не от движения маятника, а происходят согласно конкретному закону во времени. Естественно, при рассмотрении нелинейной задачи это не обязательно приведет к искомой цели – раскачать качели до любого желаемого уровня энергии, ибо при этом не будет по умолчанию выполнено условие нарастания энергии.

Нетрудно осуществить разгон математического маятника постоянной длины и с помощью управляющего момента в шарнире, который строится по принципу обратной связи и пропорционален его угловой скорости (или, что то же самое в данном случае, кинетическому моменту). Мощность этого момента пропорциональна квадрату угловой скорости и потому будет всегда величиной неотрицательной, так что полная механическая энергия начнет увеличиваться, а значит будут нарастать и колебания маятника [54]. Отметим, что при превышении энергией уровня, отвечающего верхнему положению равновесия маятника, движение из колебательного перейдет в вращательное. При этом указанное управление допускает различные модификации. Например, можно сделать коэффициент усиления функцией переменных состояния и постепенно понижать его с увеличением энергии. В этом случае можно добиться выхода

колебаний на некоторый заданный уровень, что зачастую и является целью управления [55]. Конечно, можно использовать и другие виды управления, например, релейное, которое также приводит к неотрицательной мощности, пропорциональной модулю угловой скорости.

В то же время начавшаяся эпоха роботизации поставила множество задач рационального управления колебательными системами со многими степенями свободы, и, соответственно, с несколькими собственными частотами. И вблизи каждой из них может возникать собственный резонансный режим, требующий определения собственной формы колебаний. Казалось бы, построение авторезонансного режима в такой кибернетической системе, когда все механические элементы конструкции движутся с одной частотой, причем осуществляется ее разгон, должна иметь довольно сложное и многоступенчатое решение. Однако выяснилось, что можно без особых трудностей построить такое решение, используя метод *«коллинеарного управления»*. Этот подход к управлению движением многомерных механических систем основан на стремлении в максимальной степени использовать ее собственные динамические свойства, т. е. ее кинетику, учитывающую динамическое взаимодействие различных каналов управления (точнее, различных степеней свободы объекта управления) [56]. Коллинеарное управление имитирует обобщенные силы инерции, возникающие при разгоне системы, а условие коллинеарности математически трактуется как требование пропорциональности столбца управляющих воздействий столбцу обобщенных импульсов системы [57]. Первоначально эта идея была применена к задаче о разгоне свободного твердого тела до определенного уровня угловой скорости посредством внешнего крутящего момента (например, при помощи газореактивных двигателей, укрепленных на корпусе несущего тела), построенного по принципу коллинеарного управления. Учитывая, что для твердого тела обобщенный импульс есть непосредственно вектор кинетического момента, то крутящий момент здесь формируется пропорционально кинетическому моменту [56]. Данный режим оказался крайне полезным, и, кроме того, оптимальным по таким критериям, как расход рабочего вещества или быстродействие. Поэтому впоследствии он был использован для управления движением различных манипуляторов, где также продемонстрировал свою эффективность [57].

Все это побудило использовать данный метод для авторезонансного возбуждения и в многомерных колебательных системах, которые функционируют в различных силовых полях. Именно в таких системах наиболее явно и раскрываются основные свойства авторезонанса. Наиболее простым примером здесь может служить коллинеарный разгон двойного маятника в гравитационном поле. Было показано, что с его помощью можно разогнать двойной маятник по каждой из его форм колебаний вплоть до значительных амплитуд [58]. При этом форма колебаний постепенно дрейфует вместе с частотой при переходе из линейной зоны в нелинейную, однако при усложнении своего качественного характера она сохраняет свою регулярную структуру и характеризуется периодичностью [2]. Сохранение топологической структуры формы нелинейных колебаний приобретает чрезвычайно важное значение для беговых форм движения живых организмов. Поэтому фактически именно коллинеарное управление позволяет построить авторезонансный режим при амплитудах раскачивания конечностей, достигающих вплоть до достаточно больших значений. Это чрезвычайно важно в задачах биомеханики и робототехники, где переход от шаговых к беговым амплитудам возможен только в режиме авторезонанса, причем и при ходьбе, и при беге движение остается одночастотным, хотя частота постепенно изменяется, а вместе с ней происходит и изменение формы колебаний. Это означает, что применительно к биомеханике метод коллинеарного управления можно назвать методом *«биоморфного управления»*, а для самого резонанса вполне уместно ввести также термин *«биорезонанс»*. В результате такой резонансный режим становится управляемым как по амплитуде, так и по частоте. Таким образом, представленные заключения крайне важны для биомеханики и могут найти применение при беге андроидов и звероидов, где построение нелинейного резонансного режима играет первостепенную роль [59].

Учитывая вышесказанное, детальное определение авторезонанса для систем со многими



степенями свободы следовало бы дать так: *авторезонанс* – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда локальные движения по всем ее степеням свободы происходят с одной частотой, которая может дрейфовать при изменении амплитуд колебаний, при этом вынуждающие силы, действующие по всем степеням свободы благодаря контуру обратной связи, постепенно увеличивают уровень механической энергии системы [58]. Подчеркнем еще раз, что главное отличие авторезонанса от гармонического резонанса заключается в том, что он может существовать при гораздо больших амплитудах. Поэтому гармонический резонанс правильнее было бы называть «*квазирезонансом*», а авторезонанс – *истинным резонансом*. Авторезонанс адекватно характеризует режим колебаний не только при малых, но и при больших амплитудах, осуществляя плавный переход от линейной области в нелинейную. Это и означает, что данный термин описывает подлинный резонанс, что обуславливает его важное практическое значение. Именно авторезонанс выявляет важнейшие свойства многочисленных резонансных эффектов в технике [60]. Примеры же, взятые из робототехники и биомеханики, также иллюстрируют суть данного понятия. Таким образом, обобщая понятие «авторезонанс» на системы с несколькими степенями свободы, мы по существу неразрывно связываем его с понятием «коллинеарного управления».

## 7. Заключение

Завершая свое путешествие от первоначальных исследований резонанса до авторезонанса, остается резюмировать отличительные свойства и области существования различных резонансов. Наиболее часто встречающимися являются орбитальные резонансы, которые характерны для различных природно-географических и эволюционных процессов, свойственных неживой природе. Такое же происхождение имеют и гармонические резонансы в машиностроении, мостостроении и т. п. Авторезонансы свойственны именно живой природе и системам автоматического управления, поэтому авторезонансные режимы движения постепенно начинают занимать важное место в робототехнике и биодинамике. Особенно эффективным авторезонансным управлением является коллинеарное управление, основанное на использовании управляющего воздействия пропорционально обобщенному импульсу системы и обладающее оптимальными характеристиками. Остается отметить, что резонанс является настолько многогранным явлением, что охватить все его проявления в рамках одной статьи не представляется возможным, так что внимание было уделено лишь наиболее известным из них, которые чаще всего встречаются в практических приложениях. И, как видно из настоящей статьи, наиболее просто резонансные эффекты можно наблюдать именно при исследовании маятниковых систем.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown E. W. Elements of the theory of resonance. Cambridge: at the University press, 1932. 60 p.
2. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016–2017 гг. 2018. С. 23–39.
3. Смольников Б. А., Смирнов А. С. История резонанса – от простого резонанса до авторезонанса // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. 2021. 9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. С. 457–459.
4. Frova A., Marenzana M. Thus spoke Galileo: the great scientist's ideas and their relevance to the present day. Oxford University Press. 2006. 493 p.

5. Jones M. D., Flaxman L. The Resonance Key New Page Books: Exploring the Links Between Vibration, Consciousness, and the Zero Point Grid. New Page Books, 2009. 256 p.
6. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
7. Галилей Г. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1964. 572 с.
8. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
9. Oeuvres complètes de Christiaan Hugen. Т. 17. Amsterdam: Swets & Zeitlinger N. V., 1967. 552 p.
10. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
11. Альвен Х., Аррениус Г. Эволюция солнечной системы. М.: Мир, 1979. 512 с.
12. Смольников Б. А. Механика в истории науки и общества. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2014. 608 с.
13. Рой А. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
14. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
15. Стояновский С. М., Смирнов А. С. Эволюционная динамика маятниковых систем с несколькими степенями свободы // Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. Лучшие доклады. 2018. С. 224–229.
16. Bernoulli D. Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis. Multifariis nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius observari possint in confirmationem principii sui de coexistentia vibrationum simpliciorum // Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Т. 19. 1774. Рр. 260–284.
17. Смирнов А. С., Смольников Б. А. История исследований двойного маятника // История науки и техники. 2020. № 12. С. 3–12.
18. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика. Ч. 3. Динамика несвободной системы и теория колебаний. М., Л.: ОНТИ, 1934. 625 с.
19. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Механика сферического маятника. СПб.: Политех-пресс, 2019. 266 с.
20. Puiseux V. A. Sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère // Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1842. S. 1. V. 7. P. 517–520.
21. Крылов А. Н. Собрание трудов. В 12 т. Т. 3. Ч. 1. М., Л.: изд-во АН СССР, 1949. 350 с.
22. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
23. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика для поступающих в вузы. М.: Наука, 1982. 608 с.
24. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
25. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

26. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
27. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 3. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
28. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
29. Крупенин В. Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний // Вестник научно-технического развития. № 4 (68), 2013. С. 14–19.
30. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М.: изд-во Московского ун-та, 1974. 569 с.
31. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
32. Чечурин С. Л. Параметрический резонанс – боль и радость. СПб: изд-во СПбГПУ, 2014. 67 с.
33. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
34. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta Mathematica. 1886. Vol. 8. Pp. 1-36.
35. Kovacic I., Rand R., Sah S. M. Mathieu's Equation and its Generalizations: Overview of Stability Charts and their Features // Applied Mechanics Reviews. 2018. Vol. 7. No. 2. 020802.
36. Ince E. Research Into the Characteristic Numbers of Mathieu Equation // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1927. 46. Pp. 20–29.
37. Strutt M. J. O. Zur Wellenmechanik des Atomgitters // Annalen der Physik. 1928. 391 (10). Pp. 319–324.
38. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. 246 с.
39. Раус Дж. Э. Динамика системы твердых тел. В 2 томах. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
40. Taylor R., Phillips R. Fall of the Broughton suspension bridge, near Manchester // The Philosophical Magazine, Or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History, and General Science. 1831. Vol. 9. No. 53. Pp. 384–389.
41. Rapport de la commission d'enquête nommée par arrêté de M. le préfet de Maine-et-Loire, en date du 20 avril 1850, pour rechercher les causes et les circonstances qui ont amené la chute du pont suspendu de la Basse-Chaine. № 237. // Annales des ponts et chaussées. 1850. Tome XX. Pp. 394–411.
42. Бунин М. С. Мосты Ленинграда. Очерки истории и архитектуры мостов Петербурга – Петрограда – Ленинграда. Л.: Стройиздат, 1986. 280 с.
43. Крылов А. Н. Вибрация судов. Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 442 с.
44. Кочедамов В. И. Мосты Ленинграда. Л., М.: Искусство, 1958. 60 с.
45. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

46. Бишоп Р. Колебания. М.: Наука, 1986. 192 с.
47. Billah K. Y., Scanlan R. H. Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks // American Journal of Physics. 1991. 59 (2). Pp. 118–124.
48. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.
49. Динамика машин и управление машинами. Справочник. / Под ред. Г. В. Крейнина. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
50. Асташев В. К. О новых направлениях использования явления резонанса в машинах // Вестник научно-технического развития. № 8 (48), 2011. С. 10–15.
51. Фрадков А. Л. Исследование физических систем при помощи обратных связей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 213–230.
52. Fradkov A. L. Exploring nonlinearity by feedback // Physica D. 1999, V. 128, № 2–4. Pp. 159–168.
53. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
54. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление процессом раскачивания качелей // Неделя науки СПбПУ. Материалы научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики. 2016. С. 106–109.
55. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Коллинеарное управление движением однозвенного манипулятора с переменным усилением // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы IV Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 12-16 апреля 2021 г. Ч. 2. 2021. С. 70-73.
56. Меркин Д. Р., Смольников Б. А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 534 с.
57. Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
58. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19.
59. Усвицкий И. Механика, удобная механизмам // Знание-сила. 1986. №. 6.
60. Долгинов А. И. Резонанс в электрических цепях и системах. М., Л.: Гос. энерг. изд-во, 1957. 328 с.

## REFERENCES

1. Brown, E. W. 1932, *Elements of the theory of resonance*, Cambridge, at the University press, 60 p.
2. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2018, “Resonance oscillations control in the nonlinear mechanical systems”, *Transactions of seminar “Computer Methods in Continuum Mechanics” 2016-2017*, pp. 23-39.

3. Smolnikov, B. A. and Smirnov, A. S. 2021, “The history of resonance – from simple resonance to autoresonance”, *The Ninth Polyakhov’s Reading, Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics, March 9-12, 2021, Saint-Petersburg, Russia*, pp. 457-459.
4. Frova, A. and Marenzana, M. 2006, *Thus spoke Galileo: the great scientist’s ideas and their relevance to the present day*, Oxford University Press, 493 p.
5. Jones, M. D. and Flaxman, L. 2009, *The Resonance Key New Page Books: Exploring the Links Between Vibration, Consciousness, and the Zero Point Grid*, New Page Books, 2009, 256 p.
6. Fradkov, A. L. 2003, *Cybernetical Physics*, St. Petersburg, Nauka, 208 p.
7. Galilei, G. 1964, *Selected Works, V. 2*, Moscow, Nauka, 572 p.
8. Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J. 2001, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge, Cambridge University Press, 411 p.
9. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, T. 17*. 1967, Amsterdam, Swets & Zeitlinger N. V., 552 p.
10. Blekhman, I. I., 1981, *Synchronization in nature and technology*, Moscow, Nauka, 352 p.
11. Alfven, H. and Arrhenius, G. 1976, *Evolution of the solar system*, Washington D. C., Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, 599 p.
12. Smolnikov, B. A. 2014, *Mechanics in the history of science and society*, Moscow, Izhevsk, RCD, 608 p.
13. Roy, A. 1978, *Orbital motion*, New York, Wiley, 489 p.
14. Appel, P. 1960, *Theoretical Mechanics, V. 2, Dynamics of the system, Analytical mechanics*, Moscow, Fizmatlit, 487 p.
15. Stoyanovskiy, S. M. and Smirnov, A. S. 2018, “Evolutionary dynamics of pendulum systems with several degrees of freedom”, *Week of Science SPbPU, The best reports*, pp. 224-229.
16. Bernoulli, D. 1774, “Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis. Multifariis nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius observari possint in confirmationem principii sui de coexistentia vibrationum simpliciorum”, *Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, T. 19, 260-284 pp.
17. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2020, “Double pendulum research history”, *History of Science and Engineering*, no. 12, pp. 3-12.
18. Loytsyansky, L. G. and Lurie, A. I. 1934, *Theoretical mechanics, V. 3, Dynamics of a non-free system and the theory of oscillations*, Moscow, Leningrad, ONTI, 625 p.
19. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2019, *Spherical pendulum mechanics*, St. Petersburg, Polytech-press, 266 p.
20. Puiseux, V. A. 1842, “Sur le mouvement d’un point matériel pesant sur une sphère”, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, s. 1, v. 7, pp. 517–520.
21. Krylov, A. N. 1949, *Collection of works, In 12 vol., Vol. 3, P. 1*, Moscow, Leningrad, publ. house of Academy of Sciences of the USSR, 350 p.

22. Timoshenko, S.P. 1937, *Vibration Problems in Engineering*, New York, D. Van Nostrand Company, 470 p.
23. Butikov, E.I., Bykov, A.A. and Kondratiev, A.S. 1982, *Physics for university applicants*, Moscow, Nauka, 608 p.
24. Merkin, D.R. 1987, *Introduction to the theory of stability of motion*, Moscow, Nauka, 304 p.
25. Biderman, V.L. 1980, *The theory of mechanical oscillations*, Moscow, Vyshaya shkola, 480 p.
26. Panovko, Ya. G. and Gubanova, I.I. 1979, *Stability and oscillations of elastic systems*, Moscow, Nauka, 384 p.
27. *Strength, stability, oscillations. Handbook in three volumes, V. 3*, 1968, ed. by Birger, I. A. and Panovko, Ya. G, Moscow, Mashinostroenie, 567 p.
28. Panovko, Ya. G. 1991, *Introduction to the theory of mechanical oscillations*, Moscow, Nauka, 256 p.
29. Krupenin, V.L. 2013, “On the number of periodic modes of motion of nonlinear vibration systems with periodic polyharmonic oscillations”, *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*, no. 4 (68), pp. 14-19.
30. Olkhovsky, I.I. 1974, *Theoretical mechanics course for physicists*, Moscow, Moscow University, 569 p.
31. Panovko, Ya. G. 1976, *Foundations of the applied theory of oscillations and impact*, Leningrad, Mashinostroenie, 320 p.
32. Chechurin, S.L. 2014, *Parametric resonance – pain and joy*, St. Petersburg, izd-vo SPbGPU, 67 p.
33. Mandelstam, L.I. 1972, *Lectures on the theory of oscillations*, Moscow, Nauka, 470 p.
34. Hill, G.W. 1886, “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon”, *Acta Mathematica*, vol. 8, pp. 1-36.
35. Kovacic, I., Rand, R. and Sah, S.M. 2018. “Mathieu’s Equation and its Generalizations: Overview of Stability Charts and their Features”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 7. no. 2, 020802.
36. Ince, E. 1927, “Research Into the Characteristic Numbers of Mathieu Equation”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 46, pp. 20–29.
37. Strutt, M.J.O. 1928, “Zur Wellenmechanik des Atomgitters”, *Annalen der Physik*, 391 (10), pp. 319–324.
38. Smirnov, A.S. and Degilevich, E.A. 2021, *Oscillations of chain systems*, St. Petersburg, Polytech-press, 246 p.
39. Routh, E.J. 1892, *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, P. 2*, London, New York, Macmillan, 431 p.
40. Taylor, R. and Phillips, R. 1831, “Fall of the Broughton suspension bridge, near Manchester”, *The Philosophical Magazine, Or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History, and General Science*, vol. 9. no. 53, pp. 384–389.

41. “Rapport de la commission d’enquête nommée par arrêté de M. le préfet de Maine-et-Loire, en date du 20 avril 1850, pour rechercher les causes et les circonstances qui ont amené la chute du pont suspendu de la Basse-Chaine”, 1850, *Annales des ponts et chaussées*, no. 237, tome XX, pp. 394–411.
42. Bunin, M.S. 1986, *The Bridges of Leningrad. Essays on the history and architecture of the bridges of St. Petersburg – Petrograd – Leningrad*, Leningrad, Stroyizdat, 280 p.
43. Krylov, A.N. 1936, *Vibration of ships*, Leningrad, Moscow, ONTI NKTP USSR, 442 p.
44. Kochedamov, V.I. 1958, *The Bridges of Leningrad*, Leningrad, Moscow, Iskusstvo, 60 p.
45. Ziegler, H. 1968, *Principles of Structural Stability*, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 150 p.
46. Bishop, R. *Vibration*, Cambridge, at the University press, 1965, 120 p.
47. Billah, K.Y. and Scanlan, R.H. 1991, “Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks”, *American Journal of Physics*, 59 (2), pp. 118–124.
48. Andronov, A.A., Vitt, A.A. and Khaikin, S.E. 1981, *The Theory of Oscillations*, Moscow, Nauka, 918 p.
49. *Machine dynamics and control, Directory*, 1988, ed. by Kreinin, G.V., Moscow, Mashinostroenie, 240 p.
50. Astashev, V.K. 2011, “On new directions of using the resonance phenomenon in machines”, *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*, no. 8 (48), pp. 10–15.
51. Fradkov, A.L. 1999, “Analysis of physical systems by means of feedback”, *Automation and Remote Control*, no. 3, pp. 213–230.
52. Fradkov, A.L. 1999, “Exploring nonlinearity by feedback”, *Physica D.*, vol. 128, no. 2–4, pp. 159–168.
53. Magnus, K. 1982, *Oscillations: an introduction to the study of oscillatory systems*, Moscow, Mir, 304 p.
54. Smirnov, A.S. and Smolnikov, B.A. 2016, “Controlling the sway process of the swing”, *Week of Science SPbPU, Materials of the scientific forum with international participation, Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, pp. 106–109.
55. Smirnov, A.S. and Smolnikov, B.A. 2021, “Collinear control of single-link manipulator motion with variable gain”, *Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research, Materials of the IV All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists, Komsomolsk-on-Amur, April 12–16 2021*, vol. 2, pp. 70–73.
56. Merkin, D.R. and Smolnikov, B.A. 2003, *Applied problems of rigid body dynamics*, St. Petersburg, SPbSU publ., 534 p.
57. Smolnikov, B.A. 1991, *The problems of mechanics and robotoptimization*, Moscow, Nauka, 232 p.
58. Smirnov, A.S. and Smolnikov, B.A. 2017, “Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics”, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, no. 4, pp. 11–19.

- 59. Usvitsky, I. 1986, “Mechanics convenient to Mechanisms”, *Znanie – sila*, no. 6.
- 60. Dolginov, A.I. 1957, *Resonance in electrical circuits and systems*, Moscow, Leningrad, Gos. energ. izd-vo, 328 p.

Получено 19.07.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.



# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-293-311

## Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука<sup>1</sup>

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

**Толконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Ефимов Дмитрий Юрьевич** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

### Аннотация

В статье рассматривается математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение при дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны. Полагается, что упругий цилиндр является однородным и изотропным, материал покрытия является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями, тело помещено в безграничную идеальную жидкость.

Получено аналитическое решение прямой задачи дифракции. Определены рассеянное акустическое поле и волновые поля в цилиндре и его покрытии.

Волновые поля в содержащей среде и однородном изотропном цилиндре описываются разложениями по цилиндрическим волновым функциям, а для нахождения полей смещений в неоднородном анизотропном слое построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое решение обратной задачи дифракции об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте. Построены функционалы, выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения. Минимизация функционалов осуществлена с помощью алгоритма имитации отжига.

Представлены результаты численных расчетов частотных и угловых зависимостей интенсивности рассеянного акустического поля в дальней зоне при оптимальных параболических законах неоднородности.

**Ключевые слова:** дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

**Библиография:** 34 названий.

### Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 293–311.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-293-311

**Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection<sup>2</sup>**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

**Tolokonnikov Lev Alexeevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Efimov Dmitrii Yurevich** — postgraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

**Abstract**

The article deals with the mathematical modeling of an inhomogeneous anisotropic coating of the elastic cylinder, providing the least reflection upon diffraction of a harmonic cylindrical sound wave. It is assumed that the elastic cylinder is homogeneous and isotropic, the coating material is radially inhomogeneous and transversely isotropic, the laws inhomogeneities of the coating material are described by continuous functions, the body is placed in a boundless ideal fluid.

An analytical solution of the direct diffraction problem is obtained. The scattered acoustic field and wave fields in the cylinder and its coating are defined.

Wave fields in a containing medium and a homogeneous isotropic cylinder are described by expansions in cylindrical wave functions. A boundary value problem is constructed for a system of ordinary differential equations of the second order for finding displacement fields in an inhomogeneous anisotropic layer.

An analytical solution of the inverse problem of the diffraction about the determination of the inhomogeneity laws of the coating material, ensuring the minimum sound scattering in the specified frequency range at a fixed angle of observation and also at a given observation sector at a fixed frequency is obtained. The functionals expressing the average intensity of sound scattering in given frequency range and angular sector of observation are built. Minimization of the functionals are implemented with the help of the burnout simulation algorithm.

The results of numerical calculations of frequency and angular dependencies of the intensity of the scatter acoustic field in the far zone at the optimal parabolic inhomogeneity laws are presented.

**Keywords:** diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

**Bibliography:** 34 titles.

**For citation:**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, “Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311.

<sup>2</sup>Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

## 1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. Решены прямая [1] и обратная [2] задачи рассеяния плоской волны на однородном изотропном упругом цилиндре с однородной упругой облицовкой. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [3]. Рассеяние плоской звуковой волны однородным упругим цилиндром, покрытым вязкоупругим слоем и находящимся в вязкой жидкости изучено в [4]. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием решены в [5]. В [6, 7] рассматривается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. В [8, 9] получены решения задач о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [10], а с дискретно-слоистым покрытием — в [11]. Дифракция цилиндрических и сферических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием исследована в [12, 13]. Рассеяние звука на термоупругом цилиндре с радиально-неоднородным термоупругим покрытием изучено в работах [14, 15]. При этом в [15] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении оптимальных законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение. В [16, 17] проведено математическое моделирование радиально-неоднородного изотропного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами. В [18] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное изотропное покрытие, на основе которой рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. Решены прямая [19] и обратная [20] задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным изотропным упругим покрытием, находящемся вблизи поверхности упругого полупространства исследована в [21].

Задачи дифракции звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами решены в [22, 23]. В [24] исследовано рассеяние звука абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, одна граница которого является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой.

В [25] изучено рассеяние звуковых волн, излучаемых линейным источником, абсолютно жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным изотропным покрытием в плоском волноводе, когда одна из границ волновода является идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), а другая сколь угодно мало отличается от идеальной. В [26, 27] решены обратные задачи дифракции звука об определении оптимальных квадратичных и кубических законов неоднородности изотропного покрытия упругого цилиндра в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в заданном сечении волновода.

В настоящей работе рассматривается математическое моделирование радиально-неоднородного трансверсально-изотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий цилиндр бесконечной длины и радиуса  $r_2$ , материал которого характеризуется плотностью  $\rho_0$  и упругими постоянными  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ . Цилиндр покрыт упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотопным слоем с внешним радиусом  $r_1$ . Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  выбрана таким образом, что координатная ось  $z$  совпадает с осью вращения цилиндра и является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия. Полагаем, что модули упругости  $\lambda_{ijkl}$  материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$ , а его плотность  $\rho$  — непрерывной функцией координаты  $r$ :  $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(r)$ ,  $\rho = \rho(r)$ .

Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c$ .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр с покрытием падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси цилиндра. В системе координат  $r, \varphi, z$  ось источника имеет координаты  $(r_0, \varphi_0)$  (рис. 1). Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат  $R, \theta, z$ , связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скоростей гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка  $m$ , может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $k = \omega/c$  — волновое число жидкости;  $\omega$  — круговая частота;  $H_m(x)$  — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $m$ ;  $R$  — расстояние между источником и точкой наблюдения;

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}.$$

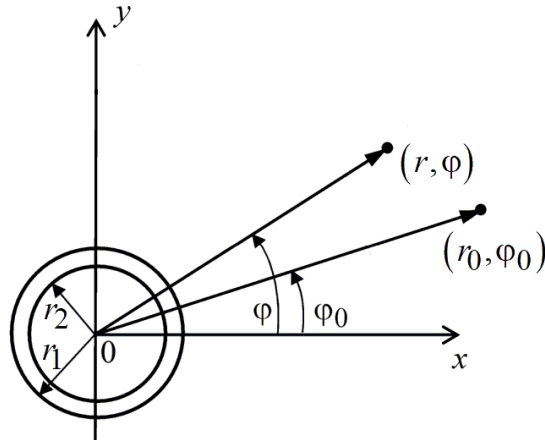


Рис. 1: Геометрия задачи

Структура цилиндрических волн существенно сложнее структуры плоских волн. Простейшая монохроматическая симметричная цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси  $z$ , описывается с помощью цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скоростей такой волны представляется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем временную зависимость  $\exp(-i\omega t)$  опускаем.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном трансверсально-изотропном слое. На основе решения прямой задачи найдем решение обратной задачи дифракции об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте.

### 3. Аналитическое решение прямой задачи

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты  $z$ .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [28]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где  $\Psi$  — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц  $\mathbf{v}$  и акустическое давление  $p$  в жидкости определяется по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал  $\Psi$  представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s,$$

где  $\Psi_s$  — потенциал скорости рассеянной волны.

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим потенциал скорости падающей волны в основной системе координат в виде [29]

$$\begin{aligned} \Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_{m-n}(kr_0) H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $J_n(x)$  — цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ .

Учитывая, что [29]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x),$$

из (3.1) для симметричной цилиндрической волны получаем разложение

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_n(kr_0) H_n(kr), & r > r_0. \end{cases}$$

С учетом условий излучения на бесконечности [28] потенциал скорости рассеянной волны  $\Psi_s$ , являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.2)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре.

Представим вектор смещения частиц в однородном изотропном упругом цилиндре  $\mathbf{u}_0$  в виде

$$u_0 = \text{grad } L + \text{rot } \Phi,$$

где  $L$  и  $\Phi$  — скалярный и векторный потенциалы смещения. В случае установившегося режима колебаний эти потенциалы являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [28]

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0,$$

где  $k_l = \omega/c_l$  и  $k_\tau = \omega/c_\tau$  — волновые числа продольных и поперечных упругих волн;  $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$  — скорости продольных и поперечных волн.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то  $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$ , где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $z$ . Тогда векторный потенциал

$$\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z.$$

В этом случае векторное уравнение относительно  $\Phi$  сводится к одному скалярному уравнению относительно функции  $\Phi(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Функции  $L$  и  $\Phi$  с учетом условия ограниченности будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (3.3)$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.4)$$

Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}_0$  в цилиндрической системе координат записываются через функции  $L$  и  $\Phi$  следующим образом:

$$u_{0r} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{0ij}$  и вектора смещения  $\mathbf{u}_0$  в однородном изотропном цилиндре имеют вид

$$\sigma_{0rr} = \lambda_0 \left[ \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0\varphi\varphi} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r} \left( \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right).$$

Выразим компоненты тензора напряжений  $\sigma_{0rr}$ ,  $\sigma_{0r\varphi}$  через функции  $L$  и  $\Phi$ . Учитывая, что  $\Delta L = -k_l^2 L$ , получим

$$\sigma_{0rr} = -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды [30], которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $u_r$ ,  $u_\varphi$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц неоднородного слоя;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое;  $\rho = \rho(r)$ .

Для трансверсально-изотропного покрытия цилиндра осью упругой симметрии является всякая прямая, проходящая через ось анизотропии и перпендикулярная к ней. При этом поверхностями изотропии являются цилиндрические поверхности, а тензор модулей упругости  $\Lambda$  в соответствии с нотацией Фойгта [31] может быть записан в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_{ik}$  — модули упругости материала покрытия в двухиндексном обозначении, где  $i, k = 1, 2, \dots, 6$ . При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

В соответствии с обобщенным законом Гука [30] компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  связаны с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  соотношениями

$$\sigma_{rr} = \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (3.6)$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (3.7)$$

Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому функции  $u_r$ ,  $u_\varphi$  будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad u_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.8)$$

Подставляя разложения (3.6) в уравнения (3.5) с учетом (3.7) и (3.8), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $U_{1n}(r)$ ,  $U_{2n}(r)$  для каждого  $n$

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$ ;  $\hat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{2 \times 2}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{2 \times 2}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{2 \times 2}$  — матрицы второго порядка с элементами

$$a_{n11} = \lambda_{11}r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \quad a_{n22} = \lambda_{55}r^2,$$

$$\begin{aligned}
b_{n11} &= \lambda'_{11} r^2 + \lambda_{11} r, & b_{n12} &= b_{n21} = in (\lambda_{12} + \lambda_{55}) r, & b_{n22} &= \lambda'_{55} r^2 + \lambda_{55} r, \\
c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{55} + \lambda'_{12} r - \lambda_{22}, & c_{n12} &= in (\lambda'_{22} r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\
c_{n21} &= in (\lambda'_{55} r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), & c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{22} - \lambda'_{55} r - \lambda_{55}.
\end{aligned}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  разложений (3.2) – (3.4) и функции  $U_{1n}$ ,  $U_{2n}$  из разложений (3.8) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения:

$$\text{при } r = r_1 \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0.$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r = r_2 \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при  $r = r_1$  находим коэффициенты  $A_n$ , выраженные через  $U_{1n}(r)$

$$A_n = -\frac{A\alpha_{mn}kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)},$$

где

$$\alpha_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0).$$

В случае симметричной падающей волны ( $m = 0$ ) получаем  $\alpha_{0n} = H_n(kr_0)$  и

$$A_n = -\frac{AH_n(kr_0)kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)}, \quad (3.10)$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при  $r = r_2$  находим неизвестные коэффициенты  $B_n$  и  $C_n$ , выраженные через  $U_{1n}(r_2)$  и  $U_{2n}(r_2)$ :

$$B_n = \gamma_{1n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{2n}U_{2n}(r_2), \quad C_n = \gamma_{3n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{4n}U_{2n}(r_2),$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{1n} &= k_\tau r_2 J'_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, & \gamma_{2n} &= in J_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, \\
\gamma_{3n} &= in J_n(k_l r_2) / \Delta_n, & \gamma_{4n} &= -k_l r_2 J'_n(k_l r_2) / \Delta_n, \\
\Delta_n &= [k_l r_2^2 J'_n(k_l r_2) k_\tau J'_n(k_\tau r_2) - n^2 J_n(k_l r_2) J_n(k_\tau r_2)] / r_2.
\end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (3.10)

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_1} &= \mathbf{G}_n, \\
(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_2} &= 0,
\end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$ ;  $\hat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2 \times 2}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$  – матрицы второго порядка;

$$g_{n1} = 2A\rho_1\omega r_1\alpha_{mn} / (\pi k H'_n(kr_1)), \quad d_{n11} = r\lambda_{12} + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr) / (k H'_n(kr)),$$

$$d_{n12} = inr\lambda_{12}, \quad d_{n21} = inr\lambda_{55}, \quad d_{n22} = -r\lambda_{55},$$

$$f_{n11} = r^2 [\gamma_{1n}e_{1n} + \gamma_{3n}e_{2n} + \lambda_{12}/r], \quad f_{n12} = r^2 [\gamma_{2n}e_{1n} + \gamma_{4n}e_{2n} + in\lambda_{12}/r],$$



$$\begin{aligned}
f_{n21} &= \mu_0 r^2 [\gamma_{1n} e_{3n} + \gamma_{3n} e_{4n} + i n \lambda_{55} / (\mu_0 r)], \quad f_{n22} = \mu_0 r^2 [\gamma_{2n} e_{3n} + \gamma_{4n} e_{4n} - \lambda_{55} / (\mu_0 r)]; \\
e_{1n} &= [\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) J_n''(k_l r) - \lambda_0 k_l r J_n'(k_l r)] / r^2, \\
e_{2n} &= 2\mu_0 i n [J_n(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r)] / r^2, \quad e_{3n} = 2i n [J_n(k_l r) - k_\eta r J_n'(k_l r)] / r^2, \\
e_{4n} &= [k_\tau^2 r^2 J_n''(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)] / r^2.
\end{aligned}$$

Решая краевую задачу (3.9), (3.11) каким-либо методом, определим неизвестные функции  $U_{1n}(r)$ ,  $U_{2n}(r)$ . Затем вычислим коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ . В результате получим аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ( $kr \gg 1$ ). Используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента [32]

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[ i \left( kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (3.12)$$

из (3.2) находим

$$\Psi_s \approx A \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp \left[ i \left( kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\omega, \varphi),$$

где

$$F(\omega, \varphi) = \frac{2}{A \sqrt{\pi k r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n \exp [i n (\varphi - \varphi_0) - i \omega t]$$

Отметим, что из полученного решения прямой задачи дифракции цилиндрических волн на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропном покрытием можно получить решение для случая, когда падающая волна является плоской. Для этого следует заменить в (3.10) функцию  $H_n(kr_0)$  ее асимптотическим выражением согласно (3.12), считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ( $kr_0 \gg 1$ ). В результате получим решение задачи дифракции плоской волны с амплитудой  $A \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp[i(kr_0 - \frac{\pi}{4})]$ , распространяющейся перпендикулярно оси цилиндра в направлении волнового вектора, образующего угол  $\pi - \varphi_0$  с положительным направлением оси  $x$ .

#### 4. Аналитическое решение обратной задачи

На основе решения прямой задачи определим такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  при фиксированном угле наблюдения  $\varphi = \varphi_*$  и в заданном секторе наблюдения  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  при фиксированной частоте  $\omega = \omega_*$ .

Будем считать, что функции  $\rho$ ,  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{55}$  аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной  $r$ , то есть будем рассматривать следующие параболические законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\eta(r) = \eta^* \bar{\eta}(r), \quad (4.1)$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)} r + \eta^{(2)} r^2. \quad (4.2)$$

Здесь и далее под символом  $\eta$  подразумевается каждая из величин  $\rho$ ,  $\lambda_{ij}$ , а под символом  $\eta^*$  — характерные величины для механических свойств материала покрытия. Отметим, что значение модуля упругости  $\lambda_{23}$  не фиксируется, так как он не присутствует ни в уравнениях (3.9), ни в краевых условиях (3.11).

В качестве меры звукового рассеяния введем величину  $I(\omega, \varphi) = |F(\omega, \varphi)|^2$  — интенсивность звукового рассеяния. Построим функционалы вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, \varphi_*) d\omega, \quad (4.3)$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I(\omega_*, \varphi) d\varphi, \quad (4.4)$$

определенные на классе параболических функций (4.2) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов функций (4.2), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (4.2), определенных на отрезке  $[r_2, r_1]$ , введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(r) \leq C_{2\eta}, \quad (4.5)$$

где  $C_{1\eta}, C_{2\eta}$  — некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (4.5) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс  $r$  и осью ординат  $f(r)$  бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(r, f) : r_2 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\}.$$

В области  $\Omega$  каждая функция  $f(r)$  единственным образом определяется тремя точками  $G_{0\eta}(r_2, f_{0\eta}), G_{1\eta}(\bar{r}, f_{1\eta}), G_{2\eta}(r_1, f_{2\eta})$ , где  $\bar{r} = (r_2 + r_1)/2$ ,  $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  ( $q = 0, 1, 2$ ).

Подставляя значения точек  $G_{0\eta}, G_{1\eta}, G_{2\eta}$  в выражение (4.2), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ . Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= [f_{0\eta} r_1 \bar{r} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} r_1 r_2 (r_1 - r_2) + f_{2\eta} \bar{r} r_2 (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(1)} &= [f_{0\eta} (r_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\eta} (r_2^2 - r_1^2) + f_{2\eta} (\bar{r}^2 - r_2^2)] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(2)} &= [f_{0\eta} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} (r_1 - r_2) + f_{2\eta} (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \Delta_\eta &= (r_1 - r_2) (r_1 r_2 - r_1 \bar{r} - r_2 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выбирая из отрезка  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  значения ординат  $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$  и вычисляя с помощью соотношений (4.6) значения коэффициентов  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ , получаем параболические законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$r_2 \leq -\eta^{(1)} / (2\eta^{(2)}) \leq r_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку  $[r_2, r_1]$ . В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ , то есть при выполнении условия

$$C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \eta^{(1)2} / (4\eta^{(2)}) \leq C_{2\eta}. \quad (4.7)$$

Поиск значений коэффициентов  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$  функций (4.2), удовлетворяющих условиям (4.5) и минимизирующих функцию

$$\Phi_m \left( \rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \lambda_{55}^{(0)}, \lambda_{55}^{(1)}, \lambda_{55}^{(2)} \right) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2), \quad (4.8)$$

осуществим с помощью алгоритма имитации отжига [33].

Введем для ординаты  $f_{q\eta}$  ( $q = 0, 1, 2$ ) точки  $G_{q\eta}$  на отрезке  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  равномерную сетку  $f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta}h$ . Здесь  $l_{q\eta}$  — номер узла сетки,  $h = (C_{2\eta} - C_{1\eta})/\tilde{n}$  — шаг сетки,  $\tilde{n}$  — количество равных частей, на которые разбит отрезок  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ .

Нахождение оптимального набора коэффициентов  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$  осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции пятнадцати переменных (4.8). Алгоритм имитации отжига представляет собой метод решения задачи глобальной оптимизации. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов.

На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность пятнадцати значений

$$f^{(0)} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0\lambda_{55}}, f_{1\lambda_{55}}, f_{2\lambda_{55}}).$$

На втором этапе в качестве минимального значения устанавливается текущий уровень энергии  $E_{\min} = \Phi_m(f^{(0)})$ , а также начальное и конечное значения температуры —  $T_{\max} = T(1)$  и  $T_{\min}$ , которые определяют количество выполняемых итераций в вычислительном процессе.

Понижение температуры определяется законом  $T(j) = T_{\max}/j^{(1/w)}$ , где  $w$  — число параметров, оптимизирующих значение функции  $\Phi_m$ .

Итерация  $j$  основного цикла выглядит следующим образом:

1) Сгенерировать новую точку  $f^{(j)}$  по правилу

$$f^{(j)} = f^{(j-1)} + T(j) \cdot X, \quad X \sim C(0, 1),$$

где  $C(0, 1)$  — стандартное распределение Коши размерности  $w$ .

2) Вычислить новое значение энергии  $E_j = \Phi_m(f^{(j)})$ .

3) Сравнить энергию системы  $E_j$  в состоянии  $f^{(j)}$  с найденным к текущему моменту минимальным значением  $E_{\min}$ . Если  $E_j < E_{\min}$ , то необходимо изменить текущее значение минимума  $E_{\min} = E_j$ , понизить значение температуры и перейти к следующей итерации. Если  $E_j \geq E_{\min}$ , то следует перейти к следующему шагу.

4) Сгенерировать случайную величину  $\tilde{\alpha}$ , равномерно распределенную на интервале  $(0, 1)$ .

5) Понизить значение температуры системы. Вычислить вероятность принятия нового состояния системы, которая в соответствии с распределением Гиббса равна

$$P(\Delta E, T(j)) = \exp[(E_{\min} - E_j)/T(j)].$$

Если  $\tilde{\alpha} < P(\Delta E, T(j))$ , то необходимо изменить текущее значение минимума и перейти к следующей итерации.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока выполняется условие  $T(j) > T_{\min}$ .

Так как поставленная задача решается на некотором дискретном множестве значений  $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ , то на первый шаг основного цикла накладываются дополнительные условия. В том случае, если найденное значение  $f^{(j)}$  выходит за пределы области  $\Omega$ , то  $f^{(j)}$  вычисляется заново. Также сгенерированное значение  $f^{(j)}$  может не соответствовать узлам введенной сетки. В таком случае  $f^{(j)}$  округляется до ближайшего узла.

Найденный таким образом локальный минимум функции  $\Phi_m$  и соответствующий ему набор коэффициентов зависит как от выбора начальной точки, так и от значения шага  $h$ , вектора

$X$ , а также значений  $\tilde{\alpha}$ ,  $P(\Delta E, T(j))$ , которые за одну полную процедуру поиска могут вычисляться достаточно большое количество раз. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется  $M$  раз, а в качестве конечного решения выбирается наилучший найденный результат.

## 5. Численные исследования

Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (4.1), обеспечивающих минимальное рассеяние звука. Полагалось, что магнеливый цилиндр ( $\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) радиуса  $r_2 = 0,8$  м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0,2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ( $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с). При расчетах рассматривались два типа характерных модулей упругости неоднородного трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был алюминий с характерной плотностью  $\rho^* = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Характерные значения модулей упругости приведены в таблице.

Характерные величины модулей упругости ( $\times 10^{10}$ ) Н/м<sup>2</sup>

| Материал   | $\lambda_{11}^*$ | $\lambda_{12}^*$ | $\lambda_{22}^*$ | $\lambda_{55}^*$ |
|------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Тип 1      | 5,74             | 3,28             | 16,4             | 2,54             |
| Тип 2      | 16,4             | 0,82             | 5,74             | 2,95             |
| Изотропный | 10,5             | 5,3              | 10,5             | 2,6              |

Предполагалось, что линейный источник излучает симметричную звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами  $r_0 = 4r_1$  и  $\varphi_0 = \pi$ .

Решение краевой задачи (3.9), (3.11) получено методом сплайн-коллокации [34].

В ограничениях (4.7) полагалось  $C_{1\eta} = 0,5$  и  $C_{2\eta} = 1,5$  для всех функций  $\eta = \rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}$ .

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига. Шаг сетки полагался  $h = 0.125$ . Размерность пространства параметров  $w = 15$ , а в качестве минимального и максимального значений температуры были выбраны значения  $T_{\min} = 5$  и  $T_{\max} = 10$ , что обеспечило 32768 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений. Для каждого типа входных данных эксперимент выполнялся  $M = 10$  раз.

Все допустимые законы неоднородности материала покрытия изображены на рис. 2.

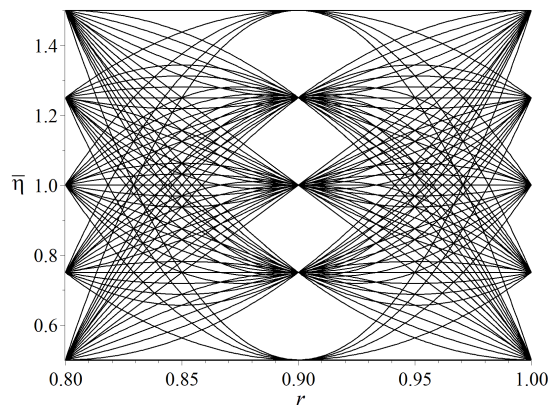


Рис. 2: Допустимые параболические зависимости

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле  $\varphi_* = \pi$  в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке  $6 \leq kr_1 \leq 8$  имеют вид:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (-12,5r^2 + 17,5r - 4,5), \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (-56,25r^2 + 99,375r - 42,625), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 112,5r - 49,5), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-18,75r^2 + 34,375r - 15), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (25r^2 - 45r + 21,5); \end{aligned} \quad (5.1)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{22} &= 5,74 \cdot 10^{10} (12,5r^2 - 27,5r + 15,5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (-43,75r^2 + 81,875r - 37); \end{aligned} \quad (5.2)$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (6,25r^2 - 13,125r + 8), \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (6,25r^2 - 11,875r + 6,75), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} (25r^2 - 50r + 25,5). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для оптимальных законов неоднородности (5.1) — (5.3) значения функционала  $\Phi_1$  равны  $1,26 \cdot 10^{-2}$ ,  $10^{-2}$  и  $1,23 \cdot 10^{-2}$  соответственно. Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала  $\Phi_1$  для упругого цилиндра без покрытия, равное  $1,86 \cdot 10^{-2}$ .

Для случая фиксированной частоты  $\omega_*$ , которой соответствует волновой размер цилиндра  $kr_1 = 6$ , в угловом секторе  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$  получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (-100r^2 + 180r - 79,5), \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-56,25r^2 + 100,625r - 43,875), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-6,25r^2 + 11,875r - 5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5); \end{aligned} \quad (5.4)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (56,25r^2 - 101,875r + 46,875), \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 1,5, \\ \lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (-12,5r^2 + 26,25r - 26), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\lambda_{22} = 5,74 \cdot 10^{10} (87,5r^2 - 157,5r + 71,5),$$

$$\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 113,75r - 50,375);$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (62,5r^2 - 112,5r + 51,5), \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} (25r^2 - 47,5r + 23,5), \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (18,75r^2 - 29,375r + 12,125), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} \cdot 0,5.\end{aligned}\tag{5.6}$$

При этом наименьшие значения функционала  $\Phi_2$  при найденных оптимальных законах (5.4) — (5.5) для анизотропии типов 1 и 2 равны  $\Phi_2 = 0,69 \cdot 10^{-2}$  и  $\Phi_2 = 0,51 \cdot 10^{-2}$ , а для изотропного покрытия  $\Phi_2 = 0,56 \cdot 10^{-2}$ . Для упругого цилиндра без покрытия  $\Phi_2 = 1,15 \cdot 10^{-2}$ .

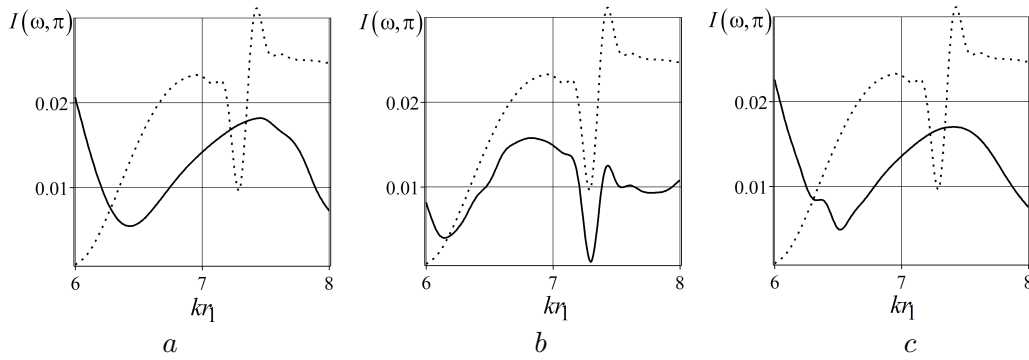


Рис. 3: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния

Для иллюстрации эффективности предложенных покрытий проведены расчеты частотных и угловых зависимостей интенсивности рассеяния звука.

На рис. 3 приведены зависимости интенсивности звукоотражения  $I(\omega, \varphi)$  от волнового размера  $kr_1$  при  $\varphi = \pi$  в диапазоне  $6 \leq kr_1 \leq 8$ . Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (5.1) (рис. 3a), (5.2) (рис. 3b) и (5.3) (рис. 3c).

На рис. 4 приведены угловые зависимости интенсивности звукоотражения  $I(\omega, \varphi)$  при фиксированной частоте  $\omega = 6c/r_1$  в угловом секторе  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ . Сплошными линиями показаны зависимости для цилиндров с оптимальными покрытиями (5.4) (рис. 4a), (5.5) (рис. 4b) и (5.6) (рис. 4c).

Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

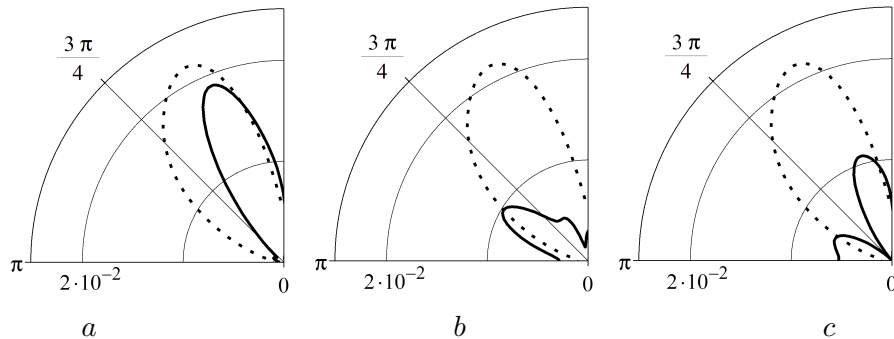


Рис. 4: Угловые зависимости интенсивности звукового рассеяния

## 6. Заключение

В настоящей работе получены аналитические решения прямой и обратной задач дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным покрытием. Осуществлено математическое моделирование покрытия, позволяющего достигать минимальное звукоотражение в определенном направлении и заданном диапазоне частот, а также при фиксированной частоте и в заданном угловом секторе наблюдения.

Проведенные численные исследования показали эффективность неоднородных покрытий, материал которых имеет разные типы анизотропии.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Honarvar F., Sinclair A. Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod. // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. No. 1. P. 41–48.
2. Fathi-Haftshejani P., Honarvar F. Nondestructive evaluation of clad rods by inversion of acoustic scattering data // J. of Nondestructive Evaluation. 2019. Vol. 38. No. 3 (67). P. 1–9.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.
4. Hasheminejad S.M., Safari N. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids // J. of Sound and Vibration. 2005. Vol. 280. No. 1. P. 101–125.
5. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791–798.
6. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
7. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
8. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
9. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.
10. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
11. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
12. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.

13. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
14. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154–173.
15. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395–403.
16. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54–62.
17. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189–199.
18. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67–81.
19. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
20. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2020. Вып. 9. С. 111–118.
21. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
22. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43–53.
23. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 76–83.
24. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.
25. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 97–113.
26. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315–323.



27. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 354–368.
28. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
29. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
30. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
31. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
32. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
33. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133–149. СПб.: Изд-во СПбГУ.
34. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

## REFERENCES

1. Honarvar, F. & Sinclair, A. 1997, “Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, no. 1, pp. 41–48.
2. Fathi-Haftshejani, P. & Honarvar, F. 2019, “Nondestructive evaluation of clad rods by inversion of acoustic scattering data”, *J. of Nondestructive Evaluation*, vol. 38, no. 3 (67), pp. 1–9.
3. Kosarev, O. I. 2012, “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].
4. Hasheminejad, S. M. & Safari, N. 2005, “Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 280, no. 1, pp. 101–125.
5. Ivanov, V. P. 2006, “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683–690.
6. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008, “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758–768.
7. Bobrovnikskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127–131.
8. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
9. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202–208, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274, [in Russian].

11. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164–169.
12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460–472, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform coating" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
14. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154–173, [in Russian].
15. Larin, N. V. 2017, "Influence of the continuously inhomogeneous coating on the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395–403, [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54–62, [in Russian].
17. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733–742.
18. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity, providing minimum sound reflexion", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 67–81, [in Russian].
19. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 276–289, [in Russian].
20. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2020, "About influence of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder on sound scattering in the presense of a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 111–118, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of Sound Waves at an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating in the Vicinity of the Boundary of an Elastic Half-Space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1648.
22. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with acoustic soft boundaries", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 43–53, [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 76–83, [in Russian].
24. Tolokonnikov, L. A. 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 270–281, [in Russian].

25. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, "Scattering by a cylinder with a inhomogeneous coating of sound waves radiated linear source in a flat waveguide ", *Mathematical modelling*, vol. 33, no. 8, pp. 97–113, [in Russian].
26. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2018, "Mathematical modelling of an inhomogeneous coating of an elastic coating in a plane waveguide", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 315–323, [in Russian].
27. Tolokonnikov, L. A. & Belkin A. E. 2020, "Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368, [in Russian].
28. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
29. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
30. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
31. Fedorov, F. I. 1965, "Theory of elastic waves in crystals", Nauka, Moscow, 388 p., [in Russian].
32. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
33. Lopatin, A. S. 2005, "Annealing method", *Stochastic optimization in computer science*, SPtb. Gos. Univ., no. 1, pp. 133–149, [in Russian].
34. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].

Получено 18.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-312-327

**Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны  
через упругую пластину с неоднородным покрытием<sup>1</sup>**

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Нгуен Тхи Шанг** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: nguyensangnb@gmail.com*

**Аннотация**

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении гармонической цилиндрической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием. Полагается, что пластина помещена в безграничную идеальную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями.

Аналитическое решение поставленной задачи получено на основе известного решения задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием и с использованием интегрального представления цилиндрической волны в виде разложения по плоским волнам.

Нахождение поля смещений в неоднородном слое сведено к решению краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов частотных характеристик отраженного и прошедшего акустических полей. Показано сильное отличие частотных зависимостей для разных законов неоднородности материала покрытия.

*Ключевые слова:* отражение и прохождение звука, цилиндрическая звуковая волна, однородная упругая пластина, неоднородное покрытие.

*Библиография:* 30 названий.

**Для цитирования:**

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 312–327.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-312-327

**Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating<sup>2</sup>**

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

**Tolokonnikov Lev Alexeevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Nguyen Thi Sang** — postgraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: nguyensangnb@gmail.com*

**Abstract**

In paper the problem of harmonic cylindrical sound waves reflection and transmission through a homogeneous isotropic elastic plate with a continuously inhomogeneous in thickness elastic coating is considered. It is believed that the plate is placed in an infinite ideal fluid, the laws of heterogeneity of the coating material are described by continuous functions.

An analytical solution of the posed problem is obtained on the basis of the known solution of the problem about the passage of plane sound waves through plate with a continuously inhomogeneous coating and using integral representation of a cylindrical wave in the form of an expansion on flat waves.

Finding the displacement field in an inhomogeneous layer is reduced to solving boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order.

The results of numerical calculations of frequency characteristics are presented for reflected and transmitted acoustic fields. Shown strong difference of frequency dependencies for different laws of inhomogeneity coating material.

*Keywords:* reflection and transmission of sound, cylindrical sound wave, homogeneous elastic plate, inhomogeneous coating.

*Bibliography:* 30 titles.

**For citation:**

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2022, “Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 312–327.

**1. Введение**

Отражение и прохождение звука через плоскую однородную изотропную упругую пластину исследовалось во многих работах (см., например, [1, 2]). Прохождение звука через однородный изотропный термоупругий плоский слой исследовалось в [3, 4]. Отражение звука однородными анизотропными упругими пластинами рассматривалось в [5, 6].

Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем решена для изотропного слоя [7], для трансверсально-изотропного слоя [8, 9], для слоя с анизотропией общего вида [10]. В [11] изучалось прохождение звука через неоднородный

<sup>2</sup>Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

анизотропный плоский слой, граничащий с вязкими жидкостями. Прохождение плоской звуковой волны через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, рассматривалось в [12, 13]. Отражение и прохождение плоской звуковой волны через панели из функционально-градиентных материалов изучено в [14]. В [15] рассматривается задача о прохождении плоской звуковой волны через плоский слой композита конечной толщины. Предполагается, что композит состоит из взаимно чередующихся слоев упругого и вязкоупругого изотропных материалов.

В [16] решена обратная задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. Задача определения вида зависимостей плотности и модулей упругости трансверсально-изотропного неоднородного упругого слоя по коэффициенту прохождения плоской звуковой волны решена в [17].

Ряд работ посвящен исследованию отражения и прохождения звуковых волн на однородных изотропных упругих пластинах с неоднородными покрытиями. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим однородным плоским слоем с неоднородным по толщине покрытием решена в [18]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [19]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием решены в [20]. В [21 - 23] исследовано влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия. В [21] полагалось, что пластина граничит с идеальными жидкостями, а в [22, 23] — с вязкими жидкостями. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [24]. В [25] получено решение задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием.

В работах, упомянутых выше, первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако, как правило, приходится учитывать конечную удаленность источника от рассеивателя. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой, а с математической точки зрения задача в этом случае становится значительно сложнее.

В [26, 27] построено решение задачи о прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении цилиндрической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную упругую пластину толщиной  $H$ , материал которой характеризуется плотностью  $\rho_0$  и упругими постоянными  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной  $h$ . Полагаем, что модули упругости  $\lambda$  и  $\mu$  материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты  $z$ , а плотность  $\rho$  — непрерывной функцией координаты  $z$ :  $\lambda = \lambda(z)$ ,  $\mu = \mu(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ . При этом декартова система прямоугольных координат  $x, y, z$  выбрана таким образом, что ось  $x$  лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось  $z$  направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис.

1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности  $\rho_1, \rho_2$  и скорости звука  $c_1, c_2$  соответственно.

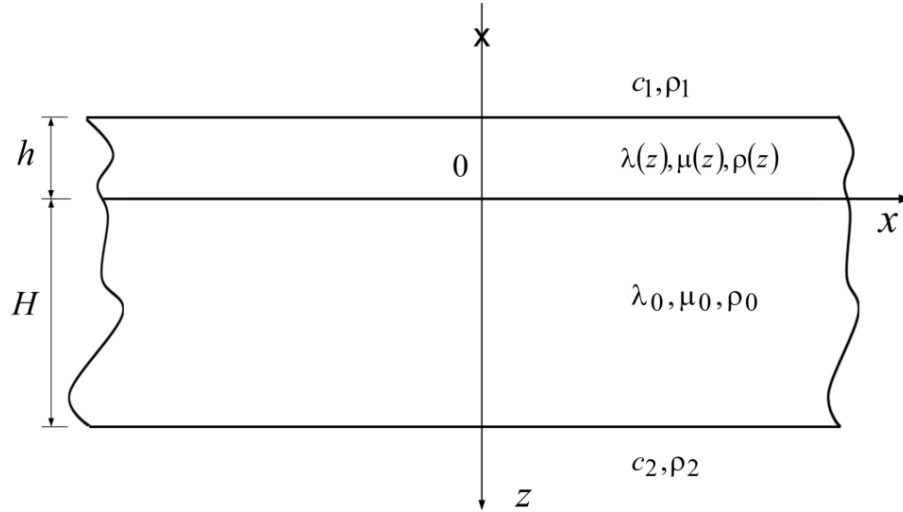


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть из полупространства  $z < -h$  на пластину с покрытием падает монохроматическая симметричная цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси  $y$ . Без ограничения общности полагаем, что положение источника определяется координатами

$$x = x_0 = 0; -\infty < y < \infty; z = -z_0.$$

Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = A H_0(k_1 R) \exp(-i\omega t), \quad (2.1)$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $k_1 = \omega/c_1$  — волновое число в полупространстве  $z < -h$ ;  $\omega$  — круговая частота;  $H_0(x)$  — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка;  $R = |r - r_0|$ ;  $r$  и  $r_0$  — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения  $M(x, 0, z)$  и с точкой  $M_0(0, 0, -z_0)$ , определяющей положение источника, соответственно;  $R = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$ ;  $t$  — время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.

### 3. Математическая модель задачи

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств упругого материала покрытия, рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты  $y$ .

Распространение звуковых волн в полупространствах  $z < -h$  и  $z > H$  в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [2]

$$\Delta \psi_j + k_j^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн;  $k_2 = \omega/c_2$  — волновое число в полупространстве  $z > H$  ( $j = 2$ );  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  — потенциал

скорости полного акустического поля в полупространстве  $z < -h$ . При этом скорость частиц жидкости  $v_j$  и акустическое давление  $p_j$  в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$v_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad v_2 = \text{grad} \psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [2]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad \Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (3.2)$$

где  $\Psi$  и  $\Phi$  — скалярный и векторный потенциалы смещения;  $k_l = \omega/c_l$  и  $k_\tau = \omega/c_\tau$  — волновые числа продольных и поперечных упругих волн;  $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$  — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя  $\mathbf{u}^0 = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi$  ( $\text{div}\Phi = 0$ ).

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то  $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$ , где  $\mathbf{e}_y$  — единичный вектор оси  $y$ . Тогда векторное уравнение относительно  $\Phi$  сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции  $\Phi(x, z)$ .

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [28], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_x, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_z, \quad (3.3)$$

где  $u_x$  и  $u_z$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц неоднородного слоя,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Решения дифференциальных уравнений (3.1) – (3.3) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = -h : \quad -i\omega u_z = v_{1z}, \quad \sigma_{zz} = -p_1, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (3.4)$$

$$z = H : \quad -i\omega u_z^0 = v_{2z}, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2, \quad \sigma_{xz}^0 = 0. \quad (3.5)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$z = 0 : \quad u_x = u_x^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0. \quad (3.6)$$

В (3.5) и (3.6)  $u_x^0$  и  $u_z^0$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}^0$  частиц однородной пластины;  $\sigma_{ij}^0$  — компоненты тензора напряжений в однородной пластине.

#### 4. Аналитическое решение задачи

Найдем решение задачи (3.1) – (3.6), воспользовавшись решением задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, полученным в [18].

Приведем некоторые элементы решения задачи для случая плоской падающей волны и отметим их индексом  $pl$  (*plane*). Согласно [18] потенциал скорости падающей плоской волны выражается формулой

$$\psi_{0pl} = A_0 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h)]\}, \quad (4.1)$$



а потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн, потенциалы смещения в однородной пластине и компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии выражаются формулами

$$\begin{aligned}\psi_{1pl} &= A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + h)]\}, \quad \psi_{2pl} = A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z - H)]\}, \\ \Psi_{pl} &= B_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + B_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \\ \Phi_{pl} &= C_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + C_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)], \\ u_{xpl} &= U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_{zpl} = U_2(z) \exp(ik_{1x}x),\end{aligned}\tag{4.2}$$

где  $A_0$  — амплитуда падающей плоской волны;  $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$ ,  $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2} = k_1 \cos \theta_0$  — проекции волнового вектора  $\mathbf{k}_1$  в полупространстве  $z < -h$  на оси координат  $x$  и  $z$  соответственно;  $\theta_0$  — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту плоской волны с осью  $z$ ;  $k_{2x}$ ,  $k_{2z}$  — проекции волнового вектора прошедшей волны  $\mathbf{k}_2$  на оси координат  $x$  и  $z$ ;  $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$ ;  $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$ ,  $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2}$ . При этом согласно закону Снеллиуса [1]  $k_{2x} = k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}$ .

В выражения для коэффициентов  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) входят величины  $U_2(-h)$ ,  $U_1(0)$  и  $U_2(0)$ . Функции  $U_n(z)$  ( $n = 1, 2$ ) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0,\tag{4.3}$$

с краевыми условиями

$$(\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{E}\mathbf{U})_{z=-h} = \mathbf{G}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{F}\mathbf{U})_{z=0} = 0,\tag{4.4}$$

где  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$ ;  $\mathbf{A} = (A_{mn})$ ,  $\mathbf{B} = (B_{mn})$ ,  $\mathbf{C} = (C_{mn})$ ,  $\mathbf{E} = (E_{mn})$ ,  $\mathbf{F} = (F_{mn})$  — матрицы второго порядка;  $\mathbf{G} = (G_m)_{2 \times 1}$  ( $m, n = 1, 2$ ).

В [29] получено приближенное аналитическое решение краевой задачи (4.3), (4.4) в виде

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 \bar{C}_l U_n^l(z), \quad U_n^l(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2).\tag{4.5}$$

Коэффициенты  $\bar{C}_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ) определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}^{l'} + \mathbf{E}\mathbf{U}^l)_{z=-h} &= D, \\ \sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}_n^{l'} + \mathbf{F}\mathbf{U}^l)_{z=0} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$ .

Коэффициенты  $U_n^{l(s)}$  ( $n = 1, 2$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ ) разложений (4.5) вычисляются по формулам

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{3l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{4l},$$

$$\begin{aligned}U_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\} \\ &\quad (s = 0, 1, \dots),\end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \mu^{(k)}; \quad A_{12}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = 0; \quad A_{22}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}; \\ B_{11}^{(k)} &= (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\ B_{22}^{(k)} &= (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}); \\ C_{11}^{(k)} &= -k_{1x}^2(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) + \omega^2 \rho^{(k)}; \quad C_{12}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}; \\ C_{21}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu^{(k)} + \omega^2 \rho^{(k)}. \end{aligned}$$

Используя интегральное представление функции  $H_0(x)$  [30], запишем цилиндрическую волну (3.1) в виде

$$\psi_0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_0(\xi) d\xi, \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = A \frac{1}{\pi\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\eta_1|z+z_0|}, \quad \eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}. \quad (4.7)$$

При  $|\xi| > k$  величина  $\eta_1$  становится мнимой. Выбор знака корня  $\sqrt{k_1^2 - \xi^2}$  из условия  $\text{Im} \eta_1 \geq 0$  обеспечивает ограниченность поля падающей волны при  $|z| \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$  при  $-k_1 < \xi < k_1$  и  $\eta_1 = i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}$  при  $|\xi| > k_1$ .

Произведение экспонент в подынтегральном выражении (4.7) представляет собой плоскую волну, направление распространения которой задается горизонтальной  $\xi$  и вертикальной  $\eta_1$  компонентами волнового вектора  $\mathbf{k}_1$ .

При  $z > -z_0$  формула (4.7) принимает вид (с учетом того, что  $x_0 = 0$ )

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = I(\xi) e^{i(\xi x + \eta_1 z)}, \quad I(\xi) = A \frac{1}{\pi\eta_1} e^{i\eta_1 z_0}. \quad (4.8)$$

В дальнейшем величины, зависящие от  $\xi$  будем обозначать знаком «тильда».

Сравнивая формулы (4.8) и (4.1) замечаем, что подынтегральное выражение в (4.6), определяемое (4.8), аналогично по форме выражению плоской волны (4.1). При этом  $\xi$  соответствует  $k_{1x}$ , а  $I(\xi) = A_0 e^{ik_{1z}h}$ . Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом  $\tilde{\psi}_0(\xi)$ , потенциалы отраженной  $\tilde{\psi}_1$  и прошедшей  $\tilde{\psi}_2$  волн, потенциалы смещения  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Phi}$  и компоненты вектора смещения  $\tilde{u}_x$ ,  $\tilde{u}_z$  в покрытии определяется формулами, аналогичными (4.2), в которых следует сделать указанные выше замены.

В результате будем иметь

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\{i[\xi x - \eta_1(z+h)]\}, \quad \tilde{\psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\{i[\xi x + \eta_2(z-H)]\}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{B}_1 \exp[i(\xi x + \eta_l z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(\xi x - \eta_l z)], \quad (4.10)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{C}_1 \exp[i(\xi x + \eta_\tau z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(\xi x - \eta_\tau z)], \quad (4.11)$$

$$\tilde{u}_x = \tilde{U}_1(z, \xi) \exp(i\xi x), \quad \tilde{u}_z = \tilde{U}_2(z, \xi) \exp(i\xi x), \quad (4.12)$$

где

$$\tilde{A}_1 = I(\xi) e^{-i\eta_1 h} + \frac{\omega}{\eta_1} \tilde{U}_2(-h, \xi); \quad (4.13)$$

$$\tilde{A}_2 = -\frac{i\omega}{\eta_2} \left[ \eta_l (\tilde{B}_1 \tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2 \tilde{e}_{2l}) + \xi (\tilde{C}_1 \tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2 \tilde{e}_{2\tau}) \right]; \quad (4.14)$$

$$\tilde{B}_j = \tilde{\beta}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\beta}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi); \quad \tilde{C}_j = \tilde{\gamma}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\gamma}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi) \quad (j = 1, 2);$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \quad \eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}; \quad \eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2}; \\
\tilde{e}_{1l} &= e^{i\eta_l H}; \quad \tilde{e}_{2l} = e^{-i\eta_l H}; \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{i\eta_\tau H}; \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{-i\eta_\tau H}; \\
\tilde{\beta}_{11} &= \xi \tilde{t}_2 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{21} = \eta_\tau \tilde{r}_2 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{12} = \xi \tilde{t}_1 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{22} = -\eta_\tau \tilde{r}_1 \tilde{w}_1; \\
\tilde{\gamma}_{11} &= -\eta_l \tilde{q}_2 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{21} = \xi \tilde{g}_2 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{12} = \eta_l \tilde{q}_1 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{22} = -\xi \tilde{g}_1 \tilde{w}_2; \\
\tilde{w}_1 &= \frac{-4i\mu_0 \tilde{s}_3}{\tilde{r}_1 \tilde{t}_2 + \tilde{r}_2 \tilde{t}_1}; \quad \tilde{w}_2 = \frac{4i\tilde{s}_1}{\tilde{g}_1 \tilde{q}_2 - \tilde{g}_2 \tilde{q}_1}; \\
\tilde{g}_j &= (-1)^j 4\tilde{s}_1 \eta_l \eta_\tau - (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} + \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau}; \\
\tilde{q}_j &= 4\tilde{s}_1 \xi^2 + (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} - \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau}; \\
\tilde{t}_j &= 4\mu_0 \tilde{s}_3 \eta_l \eta_\tau + (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} - \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl}; \\
\tilde{r}_j &= 4\mu_0 \xi^2 \tilde{s}_3 + (-1)^j (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} + \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl}; \\
\tilde{s}_1 &= (\lambda_0 + 2\mu_0) k_l^2 - 2\mu_0 \xi^2, \quad \tilde{s}_2 = 2\mu_0 \xi \eta_\tau; \quad \tilde{s}_3 = 2\xi^2 - k_\tau^2; \quad \tilde{s}_4 = \frac{\omega^2 \rho_2}{\eta_2}; \\
\tilde{s}_{4+j} &= \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l - \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2); \\
\tilde{s}_{6+j} &= \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l + \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2), \\
&(j = 1, 2).
\end{aligned}$$

Кроме того, указанные замены  $k_{1x}$  на  $\xi$  и  $A_0$  на  $I(\xi)e^{-i\xi h}$  следует произвести и в элементах матриц **B**, **C**, **E**, **F**, **D** краевой задачи (4.3), (4.4) для нахождения  $\tilde{U}_n(z, \xi)$  ( $n = 1, 2$ ) из преобразованного выражения (4.5).

Получим

$$\tilde{U}_n(z, \xi) = \sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \tilde{U}_n^l(z, \xi), \quad \tilde{U}_n^l(z, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2), \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^{l(0)} &= \delta_{1l}; \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{3l}; \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{4l}; \\
\tilde{U}_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \tilde{B}_{nq}^{(k)}] \tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)} \tilde{U}_q^{l(s-k)} \} \\
&(s = 0, 1, \dots); \\
\tilde{B}_{11}^{(k)} &= B_{11}^{(k)}; \quad \tilde{B}_{22}^{(k)} = B_{22}^{(k)}; \quad \tilde{B}_{12}^{(k)} = \tilde{B}_{21}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\
\tilde{C}_{11}^{(k)} &= -\xi^2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) + \omega^2 \rho^{(k)}; \quad \tilde{C}_{12}^{(k)} = i\xi(k+1)\mu^{(k+1)}; \\
\tilde{C}_{21}^{(k)} &= i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{22}^{(k)} = -\xi^2 \mu^{(k)} + \omega^2 \rho^{(k)}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $\tilde{C}_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left( A\tilde{U}^{l'} + \tilde{E}\tilde{U}^l \right)_{z=-h} &= \tilde{D}, \\
\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left( A\tilde{U}_n^{l'} + \tilde{F}\tilde{U}^l \right)_{z=0} &= 0,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{U}^l(z, \xi) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l)^T$ ;

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & i\xi\mu \\ i\xi\lambda & i\omega^2\rho_1/\eta_1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & i\xi\mu + \tilde{f}_{12} \\ i\xi\lambda + \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{pmatrix}; \quad \tilde{D} = (0; -2i\rho_1\omega I(\xi)e^{-i\xi h})^T;$$

$$\tilde{f}_{1j} = \mu_0[2\xi\sqrt{k_l^2 - \xi^2}(\tilde{\beta}_{j1} - \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_3(\tilde{\gamma}_{j1} + \tilde{\gamma}_{j2})];$$

$$\tilde{f}_{2j} = \tilde{s}_1(\tilde{\beta}_{j1} + \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_2(\tilde{\gamma}_{j1} - \tilde{\gamma}_{j2}) \quad (j = 1, 2).$$

Штрихи означают дифференцирование по  $z$ .

Чтобы обеспечить ограниченность поля прошедшей волны при  $z \rightarrow \infty$ , выбор знака корня

$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$  осуществим из условия  $\text{Im } \eta_2 \geq 0$ , то есть

$$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \text{ при } -k_2 < \xi < k_2, \quad \eta_2 = i\sqrt{\xi^2 - k_2^2} \text{ при } |\xi| > k_2.$$

Величины  $\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}$ ,  $\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2}$  определяются по формулам

$$\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2} \text{ при } -k_l < \xi < k_l, \quad \eta_l = i\sqrt{\xi^2 - k_l^2} \text{ при } |\xi| > k_l;$$

$$\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2} \text{ при } -k_\tau < \xi < k_\tau, \quad \eta_\tau = i\sqrt{\xi^2 - k_\tau^2} \text{ при } |\xi| > k_\tau.$$

При рассеянии цилиндрической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы  $\psi_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\Psi$ ,  $\Phi$  и компоненты вектора смещения  $u_x$ ,  $u_z$  в неоднородном покрытии определяется путем интегрирования

$$\psi_j(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2), \quad (4.16)$$

$$\Psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi, \quad \Phi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (4.17)$$

$$u_x(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x(\xi) d\xi, \quad u_z(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_z(\xi) d\xi. \quad (4.18)$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

## 5. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей  $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$  и  $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$  от волнового размера пластины  $k_1 H$  при расположении источника в точке  $M_0$  с координатами  $(x = 0, z = -z_0)$ . Точки наблюдения  $M_1$  и  $M_2$  в отраженном и прошедшем акустических полях имели координаты  $(x = 0, z = -50H)$  и  $(x = 0, z = 50H)$  соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ( $k_1 = k_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ). Полагалось, что амплитуда падающей волны  $A = 1$ , а отношение толщины покрытия  $h$  к толщине однородной пластины  $H$ , равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной  $H = 0,1$  м ( $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) с покрытием на основе поливинилбутирала, находящаяся в воде ( $\rho_1 = \rho_2 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = c_2 = 1485$  м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью  $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и модулями упругости  $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \tilde{\rho} f(z), \quad \lambda = \tilde{\lambda} f(z), \quad \mu = \tilde{\mu} f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left( -\frac{z}{h} + 0,5 \right) \quad (a_1 = 1), \quad f_2(z) = a_2 \left[ \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 0,5 \right] \quad (a_2 = 1, 2).$$

Множитель  $a_j$  ( $j = 1, 2$ ) выбран так, чтобы среднее значение функции  $f_j(z)$  по толщине слоя было равно единице.

Несобственные интегралы (4.16) – (4.18) являются сходящимися. Они могут быть оценены только численно.

При вычислении интегралов (4.16) (когда  $k_1 = k_2$ ) интервал интегрирования разбивался на участки (с учетом того, что  $k_1 < k_l < k_\tau$ )

$$(-\infty, -k_\tau), (-k_\tau, -k_l), (-k_l, -k_1), (-k_1, k_1), (k_1, k_l), (k_l, k_\tau), (k_\tau, +\infty).$$

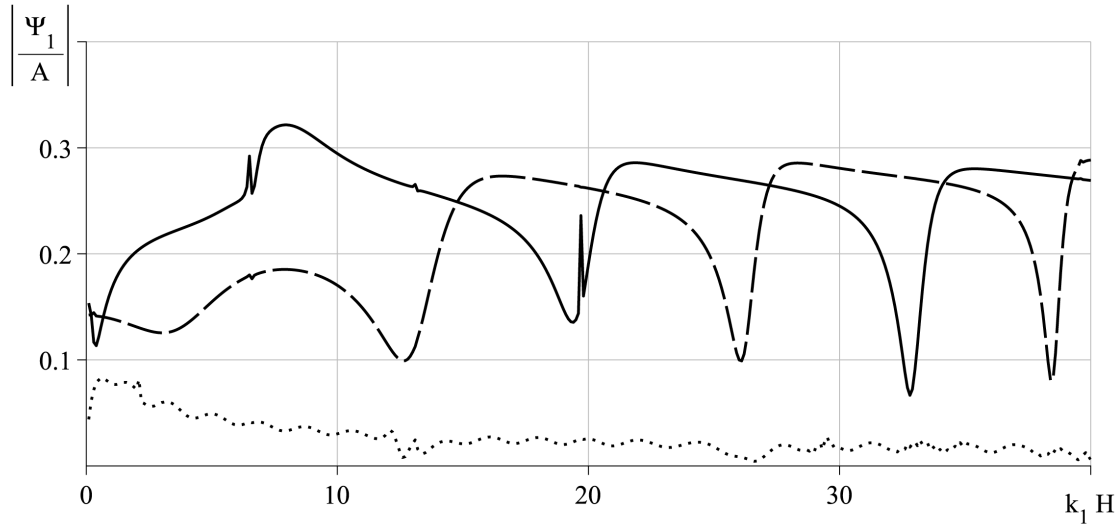


Рис. 2: Зависимость  $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$  от волнового размера пластины  $k_1 H$  при  $z_0 = 10H$

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости  $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$  и  $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$  от волнового размера пластины  $k_1 H$  при  $z_0 = 10H$ . Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия. Расчеты показывают сильное отличие частотных характеристик для разных законов неоднородности материала покрытия.

На рис. 4 приведены частотные характеристики  $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$  для линейного закона неоднородности при разном удалении источника от пластины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям, когда  $z_0 = 5H; 10H;$

$100H$ . При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается существенное изменение частотной зависимости, что проявляется в изменении уровней и сдвиге резонансных частот.

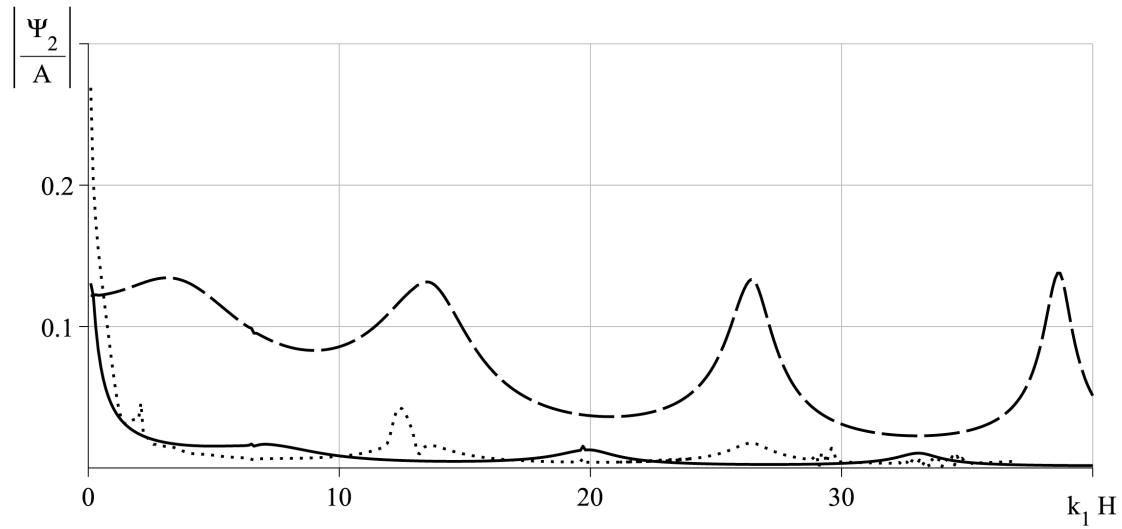


Рис. 3: Зависимость  $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$  от волнового размера пластины  $k_1 H$  при  $z_0 = 10H$

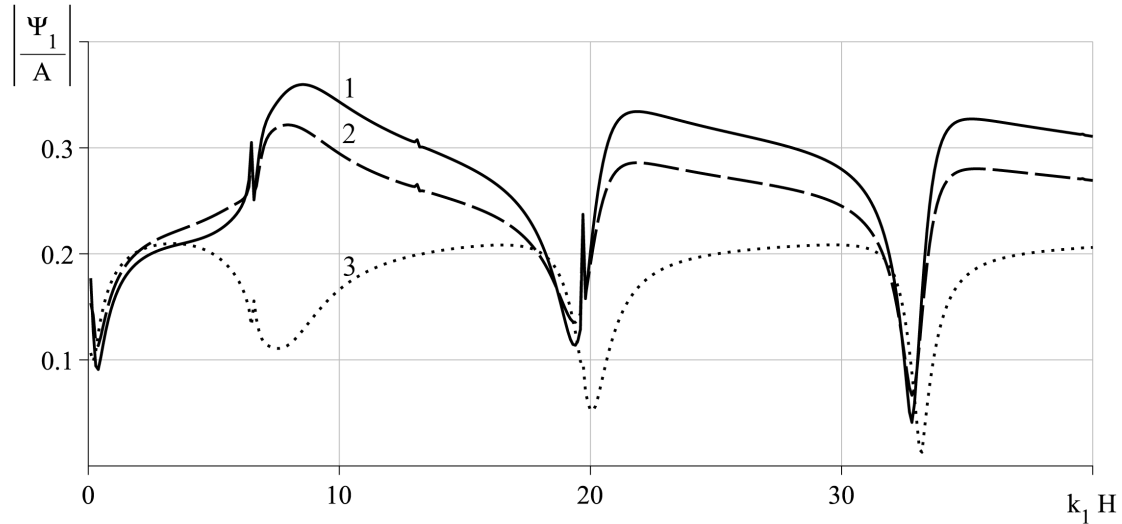


Рис. 4: Зависимость  $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$  от волнового размера пластины  $k_1 H$  для линейного закона неоднородности при

## 6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником, через однородную упругую пластину с покрытием, выполненным из функционально-градиентного материала. При этом упругие свойства покрытия непрерывно изменяются по его толщине.

С помощью неоднородных покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Полученное решение задачи позволяет выявить закономерности изменения характеристик отраженных и преломленных акустических полей, а также упругого поля в пластине для покрытия из материалов с разными видами неоднородности и при различных

значениях волнового размера пластины.

Актуальность таких задач обусловлена потребностью промышленности в конструировании новых композитных материалов с высокими звукоизолирующими свойствами. Развитие методов ультразвуковой дефектоскопии невозможно без теоретического исследования волновых процессов, а именно процессов отражения, преломления, трансформации волн в упругих структурах разной конфигурации, в том числе в пластинах. Необходимость решения подобных волновых задач возникает в гидро- и сейсмоакустике, в физической акустике, в медицинской диагностике.

На основе решения прямой задачи можно рассмотреть обратную задачу об определении законов неоднородности материала покрывающего слоя, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства пластины в заданных диапазонах частот.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
3. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145 – 153.
4. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109 – 123.
5. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85 – 92.
6. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122 – 129.
7. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212 – 218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740 – 744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78 – 83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179 – 184.
11. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029 – 1035.
12. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650 – 659.
13. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.

14. Huang C., Nutt S. An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials // J. of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330. No. 6. P. 1153 – 1165.
15. Шамаев А. С., Шумилова В. В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акустический журн. 2015. Т. 61. Вып. 1. С. 10 – 20.
16. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.
17. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246 – 257.
18. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
19. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
20. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
21. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.
22. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.
23. Нгуен Т. Ш. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.
24. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.
25. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 423 – 437.
26. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
27. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика, 2014. № 2. С. 36 – 47.



28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
29. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Определение поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.
30. Фелсен Л., Маркувиц М. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 557 с.

## REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “*Waves in Layered Media*”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Shenderov, E. L. 1972, “*Wave problems of underwater acoustics*”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
3. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 145 – 153, [in Russian].
4. Larin, N. V. 2017, “Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 4, pp. 109 – 123, [in Russian].
5. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no. 1, pp. 85 – 92, [in Russian].
6. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no. 1, pp. 122 – 129, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, “Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 2, pp. 212 – 218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, “Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 4, pp. 740 – 744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, “Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate”, *Defektoskopiya*, no. 8, pp. 78 – 83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no. 5, pp. 936 – 941.
11. Tolokonnikov, L. A. 1998, “The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 62, no. 6, pp. 953 – 958.
12. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, “The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no. 4, pp. 590 – 598.
13. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, “Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no. 1, pp. 95 – 102.
14. Huang C. & Nutt S. 2011, “An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 6, pp. 1153 – 1165.

15. Shamaev A. S. & Shumilova V. V. 2015, "Passage of a plane acoustic wave through a layered composite with components of elastic and viscoelastic materials", *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 8 – 18.
16. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 5, pp. 504 – 510.
17. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7-2, pp. 246 – 257, [in Russian].
18. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
19. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modeling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no. 4, pp. 339 – 344.
20. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 6, pp. 362 – 372, [in Russian].
22. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
23. Nguyen, T. S. 2021, "About reflection and transmission of a plane sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 5, pp. 404 – 414, [in Russian].
24. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7, pp. 83 – 92, [in Russian].
25. Tolokonnikov, L. A. & Tolokonnikov, L. A. 2021, "Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423 – 437, [in Russian].
26. Piquette J. C. 1988, "Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, No. 4, pp. 1284 – 1294.
27. Shushkevich G. Ch. & Kiselyova N. N. 2014, "Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell", *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].
28. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
29. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2020, "Determination of the displacement field in an inhomogeneous coating of an elastic plate when passing through her plane sound wave", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 310 – 321, [in Russian].

- 
30. Felsen L.B., Marcuvitz N. 1973, *“Radiation and scattering of waves”*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Получено 18.02.2022 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-328-329

**Памяти Вадима Федоровича Кириченко**

11 мая 1947 — 24 марта 2021

24 марта 2021 года на 74-ом году жизни после тяжелой и продолжительной болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор Московского педагогического государственного университета Вадим Федорович Кириченко. Российская наука потеряла одного из ведущих геометров, талантливого ученого, скромного и сердечного человека. В.Ф. Кириченко родился 11 мая 1947 года в поселке Стрелка Среднеканского района Хабаровского края (ныне Магаданская область), где его отец возглавлял по контракту крупное химическое предприятие. Когда Вадиму Федоровичу исполнилось 2 года, трагически погибла его мать и семья вернулась в Москву.

В 1967 году Вадим Федорович поступил на механико-математический факультет МГУ, который окончил с отличием в 1972 году и начал работу над кандидатской диссертацией, обучаясь в аспирантуре у профессора МГУ Васильева Анатолия Михайловича. И в 1976 году успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Новые результаты теории  $K$ -пространств». В ней был получен ряд глубоких результатов, касающихся геометрии одного из самых интересных классов почти эрмитовых многообразий – приближенно келеровых многообразий.

После успешной защиты диссертации Вадим Федорович в 1976 году был принят на кафедру спецкурсов высшей математики Московского энергетического института, где в 1982 году ему было присвоено звание доцента; там он проработал до 1990 года. В этот период без отрыва от преподавательской работы он написал и успешно защитил в 1986 году в МГУ докторскую диссертацию на тему «Дифференциальная геометрия обобщенных почти эрмитовых многообразий». В диссертации он разработал метод присоединенных  $G$ -структур, который позволил впервые с единых позиций исследовать почти эрмитовы, почти контактные, почти кватернионные структуры,  $f$ -структуры Яно и их гиперболические аналоги. В 1989 году ему было

присвоено звание профессора. В 1990 году Вадим Федорович был приглашен в Московский педагогический государственный институт (сейчас университет) им. В.И. Ленина профессором кафедры геометрии. 15 лет – с 1999 по 2014 г., Вадим Федорович заведовал этой кафедрой. В период с 1991 по 2015 год им были подготовлены 36 кандидатов физико-математических наук. Семь человек под его руководством окончили докторантуру и продолжают работу над своими диссертациями. 26 лет – с 1988 по 2014 г. – Вадим Федорович возглавлял научный семинар «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях». В.Ф. Кириченко опубликовал 130 научных статей и 12 учебников и учебных пособий.

Область научных интересов В.Ф. Кириченко – многомерная дифференциальная геометрия и ее приложения. Он изучал почти эрмитовы, почти контактные, почти кватернионные,  $f$ -структуры Яно и их преобразования. В.Ф. Кириченко ввел новый метод исследования – метод присоединенных  $G$ -структур, который позволил с единых позиций исследовать такие, на первый взгляд различные, дифференциально-геометрические структуры, как почти эрмитовы и почти контактные. А именно, он выводит структурные уравнения этих структур в  $A$ -репере. Эти уравнения несут всю информацию о данных многообразиях. Далее вводится понятие структурных тензоров, естественным образом связанных с почти эрмитовыми, почти контактными и  $f$ -многообразиями. Развил алгебраические аспекты разработанного им метода присоединенных  $G$ -структур. Вводит ключевое понятие  $Q$ -алгебры над кольцом  $A$  с инволюцией. С помощью разработанного им аппарата исследования обобщенных почти эрмитовых структур он получил многочисленные результаты, опубликованные во многих авторитетных журналах, как в России, так и за рубежом и были озвучены на целом ряде международных конференций, в том числе на IV Международном Конгрессе математиков в Цюрихе (Швейцария, 1994 г.), где его доклад был удостоен гранта высшей категории, а также на II Европейском Конгрессе в Будапеште (Венгрия, 1996 г.). В.Ф. Кириченко опубликовал более 140 научных работ – статей, учебных пособий и учебников, монографий.

Вадим Федорович дважды был лауреатом премии Международной соросовской программы образования в области точных наук для профессоров. За добросовестный труд В.Ф. Кириченко награжден: Почетной грамотой Министерства образования РФ, 2012; Дипломом I степени конкурса им. П.С.Новикова МПГУ за монографию «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях», 2014; Дипломом III степени конкурса им. П.С. Новикова МПГУ за статью «О геометрии характеристического вектора  $lcQS$ -многообразия», 2013; Дипломом МПГУ за участие в конкурсе учебно-методических работ, 2014. В 2017 году МПГУ номинировал профессора В.Ф.Кириченко на присуждение Медали и премии имени Н.И. Лобачевского "За выдающиеся работы в области геометрии и ее приложений". Творческая биография Вадима Федоровича включена в целый ряд биографических изданий как в России, так и за рубежом.

Вадим Федорович был очень чистым и светлым человеком, необыкновенно отзывчивым, верным и преданным другом, замечательным отцом. Светлая память о нем навсегда останется в наших сердцах.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Вадима Федоровича Кириченко в связи с его кончиной.

А. Р. Рустанов, А. М. Шелехов, О. Е. Арсеньева, Ф. В. Кириченко, М. П. Бурлаков, М. Б. Банару, Н. И. Гусева, С. В. Харитоновна, А. О. Иванов, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский.

# РЕДКОЛЛЕГИЯ

---

Том 23 Выпуск 1

---

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: chubarik2020@mail.ru*

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**Добровольский Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: dobrovol@tspu.ru*

**Михалев Александр Васильевич** — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: mikhalev@shade.msu.ru*

**Нижников Александр Иванович** — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

## ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

**Боровков Алексей Иванович** — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

*e-mail: borovkov@spbstu.ru*

**Быковский Виктор Алексеевич** — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Востоков Сергей Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Георгиевский Дмитрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Горбачёв Владимир Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: vigorby@mail.ru*

**Гриценко Сергей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Демидов Сергей Сергеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

*e-mail: serd42@mail.ru*

**Дурнев Валерий Георгиевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Зубков Андрей Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Иванов Александр Олегович** — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: aoiva@mech.math.msu.su*

**Иванов Валерий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Королёв Максим Александрович** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

*e-mail: korolevma@mi-ras.ru*

**Кузнецов Валентин Николаевич** — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

*e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru*

**Матиясевич Юрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Мищенко Сергей Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Нестеренко Юрий Валентинович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Панин Владимир Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

*e-mail: tgpu@tula.net*

**Пачев Урусби Мухамедович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Семёнов Алексей Львович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Аллаков Исмаил** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Белов Алексей Яковлевич** — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Берник Василий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Лауринчикас Антанас** — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Лю Юнпин** — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

*e-mail: ypliu@bnu.edu.cn*



**Мисир Джумаил оглы Марданов** — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Мусин Олег Рустамович** — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

**Рахмонов Зарулло Хусейнович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

*e-mail: zarullo\_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Салиба Холем Мансур** — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Табари Абдулло Хабибулло** — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Фукшанский Леонид Евгеньевич** — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Шяучюнас Дарюс** — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# THE EDITORIAL BOARD

---

Volume 23 Issue 1

---

## THE MAIN EDITOR

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: chubarik2020@mail.ru*

## THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

**Dobrovolsky Nikolai Mihailovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

**Mihalev Alexander Vasilyevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: mikhalev@shade.msu.ru*

**Nijnikov Alexander Ivanovich** — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

## EXECUTIVE SECRETARIES

**Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich** — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Rebrova Irina Yuryevna** — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

## EDITORIAL BOARD

**Borovkov Aleksey Ivanovich** — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

*e-mail: borovkov@spbstu.ru*

**Bykovsky Victor Alekseevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Vostokov Sergey Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Gvozdev Alexander Evgenievich** — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Georgievsky Dmitry Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Gorbachev Vladimir Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: vigorby@mail.ru*

**Gritsenko Sergey Alexandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Demidov Sergey Sergeyivich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

*e-mail: serd42@mail.ru*

**Durnev Valery Georgievich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Zubkov Andrey Mihailovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Ivanov Aleksandr Olegovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: aoiva@mech.math.msu.su*

**Ivanov Valery Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Korolev Maxim Aleksandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

*e-mail: korolevma@mi-ras.ru*

**Kuznetsov Valentin Nikolaevich** — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

*e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru*

**Matiyasevich Yuri Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Mishchenko Sergey Petrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Nesterenko Yury Valentinovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Panin Vladimir Alexeyevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: tgpu@tula.net*

**Pachev Urusbi Mukhamedovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Semenov Alexey Lvovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Tolokonnikov Lev Alekseevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Fomin Aleksandr Aleksandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

**Chirsky Vladimir Grigoryevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Allakov Ismail** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Belov Alexey Yakovlevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Bernik Vasily Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Laurinchikas Antanas** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Liu Yongping** — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

*e-mail: ypliu@bnu.edu.cn*

**Mardanov Misir Jumayil oglu** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Musin Oleg Rustamovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

---

**Rahmonov Zarullo Huseinovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

*e-mail: zarullo\_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Mansour Saliba Holem** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Habibullo Abdullo** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Fukshansky Leonid** — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Šiaučiūnas Darius** — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# TABLE OF CONTENTS

---

Volume 20 Issue 3

---

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| From the editor .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 5   |
| Yu. V. Nesterenko, V. A. Bykovsky, V. M. Bukhstaber, V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov,<br>A. Laurincikas, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, I. Y. Rebrova, N. V. Budarina,<br>I. V. Gaishun, V. V. Beresnevich, D. V. Vasiliev. Vasily Ivanovich Bernik (to the 75th<br>anniversary) .....                                                                           | 6   |
| A. I. Shafarevich, A. T. Fomenko, V. N. Chubarikov, A. O. Ivanov, V. G. Chirsky, V. I. Bernik,<br>V. A. Bykovskii, A. I. Galochkin, S. S. Demidov, S. B. Gashkov, A. I. Nizhnikov,<br>A. A. Fomin, E. I. Deza, A. Ya. Kanel-Belov, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky,<br>I. Yu. Rebrova, V. Kh. Salikhov. Yuri Valentinovich Nesterenko (to the 75th anniversary) .. | 10  |
| P. A. Andrianov. On construction of multidimensional periodic wavelet frames .....                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 21  |
| O. E. Arsenieva. On the geometry of generalized almost quaternionic manifolds of vertical type                                                                                                                                                                                                                                                                          | 33  |
| V. I. Bernik, I. A. Korlyukova, A. S. Kudin, A.V. Titova. Integer polynomials and Minkowski's<br>theorem on linear forms .....                                                                                                                                                                                                                                          | 45  |
| V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo. Billiard books of low complexity and the implementation<br>of Liouville foliations of integrable systems .....                                                                                                                                                                                                                        | 53  |
| N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii.<br>Generalized Dirichlet problem for a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations.....                                                                                                                                                                        | 83  |
| V. F. Kirichenko, O. E. Arsenyeva, E. V. Surovtseva. Geometry of integral manifolds of the<br>contact distribution .....                                                                                                                                                                                                                                                | 106 |
| A. I. Kozko, L. M. Luzina, A. Y. Popov, V. G. Chirsky. The consumption function in the<br>Ramsey-Kass-Koopmans model of economic growth in the case of stationarity of the savings<br>function .....                                                                                                                                                                    | 118 |
| M. V. Melikyan. A large system of oscillators with ultralocal exposure to random stationary<br>external field .....                                                                                                                                                                                                                                                     | 130 |
| A. R. Rustanov, E. A. Polkina, G. V. Teplyakova. Integral manifolds of the first fundamental<br>distribution $lcAC_S$ - structures .....                                                                                                                                                                                                                                | 142 |
| V. G. Chirskii. Infinite linear independence with constraints on a subset of primes of values of<br>Eulerian-type series with polyadic Liouville parameter .....                                                                                                                                                                                                        | 153 |
| M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov. The root-mean-square approximation of some classes of<br>functions of a complex variable by Fourier series in the weight Bergman space $B_{2,\gamma}$ .....                                                                                                                                                                         | 167 |
| HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
| E. V. Ageeva, E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin. Numerical optimization of the process<br>of obtaining the charge by electrodispersion of T5K10 alloy waste .....                                                                                                                                                                                               | 183 |

---

|                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, V. O. Filed in, A. E. Ageeva. Mathematical dimensional analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U in water .....                                                                | 197 |
| R. R. Mukhin. On the Poincare-Birkhoff theorem as the most important result of the theory of dynamical systems .....                                                                                                                                                              | 209 |
| N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, A. N. Chukanov, D. S. Klementyev. About the possibility of using the NACE method when conducting accelerated tests of rebar rolled products for hydrogen embrittlement and corrosion cracking ..... | 223 |
| G. I. Sinkevich. Johann Albrecht Euler and his unpublished manuscript on history geometry ..                                                                                                                                                                                      | 236 |
| A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov. The history of mechanical resonance – from initial research to autoresonance .....                                                                                                                                                                | 269 |
| L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Yefimov. Modeling of an inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder providing the smallest sound reflection .....                                                                                                                         | 293 |
| L. A. Tolokonnikov, T. Sh. Nguyen. Reflection and passage of a cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating .....                                                                                                                                | 312 |
| MEMORABLE DATES                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
| In memory of Vadim Fedorovich Kirichenko .....                                                                                                                                                                                                                                    | 328 |