

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-80049

ISSN 2226-8383

Том XXII

Выпуск 3 (79)

Тула

2021

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

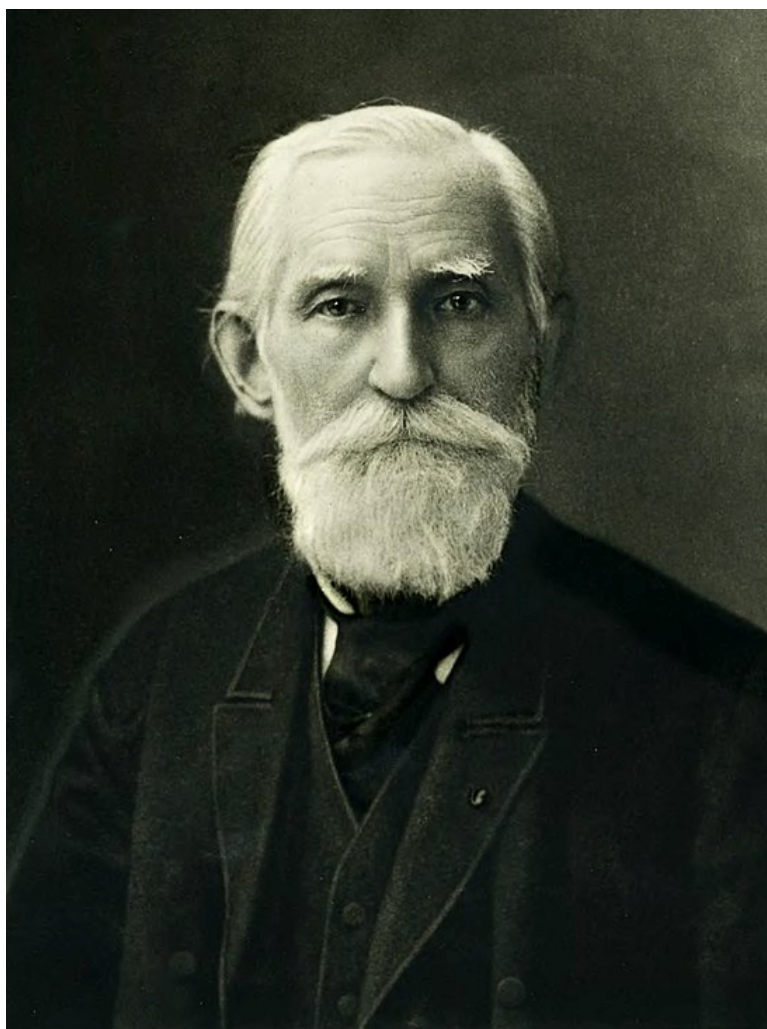
СОДЕРЖАНИЕ

Том 22 Выпуск 3

От редакции	5
С. С. Демидов, П. Л. Чебышев — учёный, учитель и деятель науки	6
Ж. Ш. Абдуллаев. Оценки ядра Бергмана для классических областей Э. Картана	20
К. С. Ворушилов. Инварианты Жордана — Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли	32
Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Формула обращения для рядов Дирихле и ее применение	57
Е. И. Деза, Б. Мханна. Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов	77
Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II ...	100
В. И. Иванов. Неравенства для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами	122
И. Р. Лифлянд, М. А. Скопина. Операторы Хаусдорфа на пространствах типа Харди ...	133
А. В. Луневич, Н. В. Шамукова. Многочлены с малыми значениями в окрестностях нулей в архимедовой и неархимедовой метриках	143
И. А. Мартьянов. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере S^2	154
Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами	166
Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков. О некоторых аддитивных проблемах гольдбахова типа .	179
Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток	196
М. М. Сорокина, А. А. Горепекина. $\bar{\omega}$ -веерные формации конечных групп	232
В. Г. Чирский. Полиадические числа Лиувилля	245
ДОКЛАДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ	
А. В. Родионов. Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных	256
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ	
Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. Численная оптимизация процесса спекания диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95	298

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков	311
В. И. Горбачев, А. А. Рубан. Интегральная формула в задачах устойчивости неоднородных стержней	345
В. И. Горбачев. Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами	353
Н. Н. Добровольский, С. А. Скобелыцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики	368
Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев. От алгебраических методов Диофанта — Ферма — Эйлера к арифметике алгебраических кривых: из истории диофантовых уравнений после Эйлера	383
А. А. Тихонов. Пафнутий Львович Чебышев: человек науки на службе России (к 200-летию со дня рождения)	405
Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием	423
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. О эффективных упругих свойствах слоистого композиционного материала, изготовленного по 3-D технологии	438
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Г. В. Семенова. Оптимальное проектирование демпфирующих свойств пористых металлических композитов	443
Е. Е. Борисенко. Замечание к одной лемме из статьи Филиппова о дифференциальных включениях	448
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. О приближении сферическими полиномами в L^p при $p < 1$	453
Е. В. Зубей. Конечные группы с OS -проперестановочными подгруппами	457
И. Р. Лифлянд. Лемма Болла в качестве упражнения	464
Х. С. Тарамова. О глобальной разрешимости уравнения Кана — Хилларда	467
А. А. Фарвазова. Об одном свойстве преобразования Фенхеля	474
ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ	
В. Н. Чубариков, Г. Л. Абдулгалимов, Е. И. Деза, М. С. Мирзоев, О. А. Косино, Ю. Л. Хотунцев, И. А. Шилин, Р. М. Асланов, О. М. Растопчина, Ю. А. Дробышев, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Александр Иванович Нижников (к 75-летию со дня рождения)	479
РЕДКОЛЛЕГИЯ	493
THE EDITORIAL BOARD	497
TABLE OF CONTENTS	501

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящён
200-летию со дня рождения
великого русского математика
Пафнутия Львовича Чебышева



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-6-19

П. Л. Чебышев — учёный, учитель и деятель науки

С. С. Демидов

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

email: serd42@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена научной и педагогической деятельности Пафнутия Львовича Чебышева (1821 – 1894) – одного из крупнейших математиков XIX века, основоположника теории синтеза механизмов, автора фундаментальных результатов в области теории вероятностей, преобразовавшего эту науку в один из наиболее динамически развивающихся разделов математики и математического естествознания, автора замечательных достижений в теории чисел, теории функций и математическом анализе и в других разделах математики, создателя блистательной Петербургской математической школы, вместе с Ш. Эрмитом, К. Вейерштрассом, Дж. Сильвестром, Г. Миттаг-Леффлером выступившего одним из лидеров только зарождавшегося мирового математического сообщества.

Ключевые слова: Московский университет, теория вероятностей, теория чисел, конструктивная теория функций, теория синтеза механизмов, Петербургская математическая школа.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

С. С. Демидов. П. Л. Чебышев — учёный, учитель и деятель науки, 2021, т. 22, вып. 3, с. 6–19.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-6-19

P. L. Chebyshev — scientist, teacher and scientific figure

S. S. Demidov

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

email: serd42@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the scientific and pedagogical activities of Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821 – 1894) – one of the greatest mathematicians of the 19th century, the founder of the theory of synthesis of mechanisms, the author of fundamental results in the field of probability theory, who transformed this science into one of the most dynamically developing branches of mathematics and mathematical natural science, the author of remarkable achievements in number theory, function theory and mathematical analysis and in other branches of mathematics, the creator of the brilliant Petersburg mathematical school, who, together with Ch. Hermite, K. Weierstrass, J. Sylvester, G. Mittag-Leffler, acted as one of the leaders of the newly emerging world mathematical community.

Keywords: Moscow University, probability theory, number theory, constructive theory of functions, theory of synthesis of mechanisms, Petersburg mathematical school.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

S. S. Demidov, 2021, “P. L. Chebyshev — scientist, teacher and scientific figure”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 6–19.

Имеется в Жүковском¹ районе Калужской области удивительный памятник: глыба серого гранита с выбитой на ней надписью – «Здесь у Л.П. и А.И. Чебышевых родилось пятеро сыновей и четыре дочери». Глыбой этой отмечено место, на котором когда-то стоял вместительный помещичий дом, в котором проживал отставной корнет Тульского 1-го конноказацкого полка, участник сражений под Малоярославцем, Вязьмой и Красным, а также взятия Парижа в 1812 году, Лев Павлович Чебышев со своей супругой Аграфеной Ивановной, урождённой Позняковой. Старшим из их сыновей и был великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев, увидевший свет в российском захолустье – сельце Окатово тогдашнего Боровского уезда Калужской губернии – 4 (16) мая 1821 года. Своё имя он получил в память о преподобном Пафнутии Боровском – святом особо чтимом в этих местах.

Памятник этот, установленный самим П.Л. Чебышевым и его младшими братьями, свидетельствует о чуде – чуде рождения великого учёного из глубин казалось бы вполне заурядной жизни русской провинции. Род Чебышевых, как писал его биограф В.Е. Прудников, «будучи старинным, не принадлежал к числу именитых» [1, с. 13]. То же самое можно сказать и о роде его матушки. Все представители этих двух семейств суть обыкновенные служилые люди ничем особо не примечательные. Сами родители великого математика также никакими

¹Знак ударения мы поставили не случайно – название района происходит от фамилии легендарного маршала Г. К. Жукова, уроженца этих славных мест.

выдающимися талантами отмечены не были. Да, его отец честно послужил Родине на военном поприще, был хорошим хозяином, умевшим рационально поставить дело и превосходно управлять немалым имуществом, успешно преодолевая возникавшие экономические трудности. Особой просвещённостью не отличался, но, что очень важно, умел ценить образование. Поэтому постарался дать его своим детям – прежде всего мальчикам², в которых угадываются отмеченные нами черты папиного характера. Ничто, однако, не объясняет чуда рождения в сельце Окатово великого учёного – «славы русской науки, одного из первых геометров Европы, одного из величайших математиков всех времён»³. Впрочем чудо на то и чудо, что никакому рациональному объяснению не подлежит.

С детства Чебышев обладал физическим недостатком – у него была сведена нога и он немного прихрамывал, опираясь на палку. Поэтому в детских играх участия не принимал, предпочитая читать и заниматься всякого рода механическими устройствами, что положило начало его последующему увлечению конструированием механизмов. Карьера военного (а это было мечтой родителей!) ему была заказана и тем самым открывался прямой путь в университет. Грамоте его обучала матушка, французскому языку и арифметике двоюродная сестра Авдотья Квинтилиановна Сухарева, обладавшая, судя по всему, педагогическим дарованием. Её портрет он сохранял до конца жизни. Важную роль в его воспитании сыграла также учительница музыки, имени которой история нам не сохранила. Именно ей, по воспоминаниям Д.И. Менделеева [2, с. 58], он был обязан привычке к точности и анализу, хотя музыканта из него она так и не воспитала.

Когда в 1832 г. наступила пора готовить старших братьев Пафнутия и Павла к поступлению в университет – а для этого они должны были овладеть знаниями в объёме гимназии – родители перевезли их в Москву, где поселились в собственном доме близ Пречистенки на углу Долгого переулкa, ныне носящего название улицы Бурденко. В гимназию их не отдали, предпочитая выбирать учителей самостоятельно и приглашая их на дом. Так для обучения латыни (а знания по этому предмету для поступающих тогда в университет требовались особенно основательные) был избран студент медицинского факультета Московского университета А.Т. Тарасенков, получивший в городе славу превосходного латиниста⁴. Уроки математики им давал один из лучших педагогов первопрестольной П.Н. Погорельский (1800 – 1852). Магистр Московского университета, он внёс значительный вклад в совершенствование системы обучения в средних учебных заведениях Московского учебного округа, в частности, в преподавание математики и физики [3, с. 385 – 398]. Осуществлённый им перевод «Курса чистой математики» для французских военных школ, переработанный для нужд российских гимназий и изданный в трёх частях – «Арифметика» (1832), «Алгебра» (1833) и «Геометрия» (1834), стал в те времена едва ли не основным учебником в российских гимназиях. П.Л. Чебышев, оказавшись впоследствии членом Учёного комитета Министерства народного просвещения, рекомендовал эти книги Погорельского в качестве учебников для гимназий. Особенно «Алгебру», которую считал лучшим учебником по этому предмету на русском языке. Изложение Погорельского отличалось ясностью, сжатостью и общедоступностью. Самого его современники характеризовали как педагога Божьей милостью, увлечённого своим предметом и умевшего увлечь им своих учеников. Всегда серьёзный, нахмуренный, с отрывистой речью, он отличался исключительной требовательностью и держал учеников в абсолютном повиновении. На юного Чебышева он произвёл неизгладимое впечатление. Именно личность Погорельского и

²От девочек в ту пору много не требовалось – болтать по-французски, играть на фортепиано, поддерживать куртуазную беседу, ...

³Так аттестовал его Ш. Эрмит в письме к нему по случаю награждения командорским крестом ордена Почётного легиона.

⁴Ставшим впоследствии известным московским врачом, директором Шереметьевской больницы (ныне институт им. Н.В. Склифосовского), лечившим Н.В. Гоголя в последние дни его жизни и оставившим об этом воспоминания. В 1852 году Тарасенков женился на старшей сестре П.Л. Чебышева, Елизавете.

его уроки — в этом сходятся все биографы Чебышева — стали определяющими при выборе им будущих занятий — он будет изучать математику.

В июне 1837 года он подал прошение на имя ректора Императорского Московского университета⁵: «... желая усовершенствовать себя в науках, покорнейше прошу, сделав мне в науках испытание, принять в число студентов по 2-му (то есть математическому — С.Д.) отделению философского факультета. К сему дворянин Пафнутий, сын Чебышев, руку приложил». Успешно выдержав вступительные испытания⁶, Чебышев в сентябре был зачислен своекоштным студентом математического отделения.

Математическое отделение переживало в ту пору небывалый подъём, вызванный прежде всего деятельностью двух профессоров — Н.Д. Брашмана и Н.Е. Зернова, занявших в середине 1830-ых годов кафедры, соответственно, прикладной и чистой математики⁷. Брашман — воспитанник Венского университета и Венского политехнического института, преподававший до этого под началом Н.И. Лобачевского в Казанском университете, был талантливым учёным и выдающимся педагогом [4, 5], ориентировавшимся на стандарты парижской Политехнической школы. Зернов, хотя и вырос в Москве, но был широко образованным математиком, внимательно следившим за новыми идеями западноевропейской научной мысли, в частности, за курсами О. Коши по математическому анализу — учебными руководствами, обозначившими реформу в основаниях этого предмета. И если до прихода Брашмана и Зернова в том, что касается математических наук, Московский университет выглядел глухой провинцией, то их усилиями он преобразился в математический центр европейского уровня [4]. Уместным представляется напомнить здесь слова одного из наиболее талантливых учеников Чебышева Е.И. Золотарёва [6, с. 60 – 61]: «Всякий интересующийся историей развития математики в нашем отечестве, не может остановиться без благодарности на этих двух, богатых заслугами, деятелях Московского университета, уже теперь сошедших в могилу. Оба, известные своими учёными трудами, они ещё более обращают на себя внимание своею педагогическою деятельностью. Многочисленные ученики их, сделавшиеся в свою очередь учителями, рассеяны по всей России. Некоторые из них достигли вполне заслуженной славы». Самым успешным из них стал П.Л. Чебышев, на которого сразу обратил своё внимание Брашман, принявший на себя руководство занятиями одарённого студента. Одну из ранних своих работ «Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей», написанную в форме письма Брашману и опубликованную в 1866 г. в первом томе *Математического сборника*, он завершил выражением благодарности учителю: «Сказанного мною достаточно, чтобы видеть, как много интереса представляет предмет, на который я был наведён Вашими лекциями и всегда драгоценными для меня беседами с Вами»⁸.

Свидетельством раскрытия необычайного математического дарования юноши служит его первая же работа «Вычисление корней уравнения», подготовленная для объявленного на 1840/41 учебный год конкурса студенческих работ. Работа эта, в которой рассматривается задача нахождения приближённого решения алгебраического уравнения (см. [4, с. 270]), была опубликована лишь в 1951 году в пятом томе его *Полного собрания сочинений*. Полученная им итерационная формула была переоткрыта известным немецким математиком Э. Шрёдером (1841 – 1902) в 1870 году [7, с. 330]). Основные идеи работы Шрёдера в 1953 году были

⁵Цитирую по [1, с. 34].

⁶Испытания для лиц, не имевших документа о гимназическом образовании, проводились по следующим предметам: закон божий, священная и церковная история, российская грамматика, словесность, логика, латинский, немецкий и французский языки, история, география, статистика и, конечно, математика, физика, астрономия.

⁷Кафедру астрономии в те годы занимал Д.М. Перевощиков (1790 – 1880) — выпускник Казанского университета, автор широко известной в то время «Ручной математической энциклопедии», о которой восторженный отзыв оставил Н.В. Гоголь. С 1855 г. экстраординарный член Петербургской Академии наук (член-корреспондент с 1832 г.).

⁸Математический сборник. Т. 1. 1966. С. 296.

прокомментированы американским специалистом в области численного анализа А.С. Хаусхолдером (1904 – 1993), предложившим [8] для этой формулы иное представление. Разумеется, Хаусхолдер (а тем более Шрёдер) не могли знать о результате Чебышева. Мы же упоминаем здесь об их работах с единственной целью – подчеркнуть необычайную одарённость начинающего студента, первый же результат которого оказался на уровне исследований, занимавших профессионалов середины следующего XX столетия⁹. Несколько нелепо выглядит при этом оценка этого результата университетскими учителями Чебышева – на конкурсе студенческих работ его достижение было оценено лишь серебряной медалью, в то время как золотая досталась некоему Антону Смоляку, о котором никаких сведений, кроме, разумеется, имени, история нам не сохранила¹⁰.

Профессор Брашман оказывал неизменное внимание талантливому ученику и горячо поддерживал его в намерении избрать учёную карьеру, в то время как сделать такой выбор молодому человеку было непросто. Окончание университета (а это случилось в 1841 г.) пришлось на трудное для семейства Чебышевых время: неурожай, поразивший чернозёмную полосу России в 1840 году, поставил многих помещиков (и Чебышевых в том числе) на грань разорения. Родители Чебышева были вынуждены оставить Москву и не могли материально поддерживать сына, который отныне должен был рассчитывать только на себя. Либо он должен был определиться на государственную службу, либо, в случае избрания учёной карьеры, вести очень скромное существование, отказывая себе буквально во всём. Единственное, в чём ему могли помочь родители, это предоставить ему жильё в Долгом переулке. Чебышев сделал выбор в пользу науки и начал готовиться к сдаче магистерских экзаменов, которые успешно преодолел в 1843 году. Он много и упорно работал. В 1843 – 44 гг. в журналах Лиувилля и Крелле появились его первые работы по анализу. Тему же своей магистерской диссертации он избрал из теории вероятностей – предмета, интерес к которому был в значительной степени обусловлен влиянием Брашмана¹¹. При его содействии Чебышев стал известен тогдашнему попечителю Московского учебного округа графу С.Г. Строганову, поручившему «отличнейшему кандидату»¹² написать руководство по теории вероятностей для студентов Демидовского лицея в Ярославле. Это руководство «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», опубликованное в Москве в 1845 г., и стало его магистерской диссертацией, защита которой успешно прошла летом 1846 г. Оппонентами выступили Зернов и Брашман.

Это учебное руководство представляло собой образцовое изложение теории, основывающееся в основном на методах элементарной математики, лишь в минимальной степени использовавшее аппарат математического анализа. Тенденция к использованию в математических построениях по возможности простых и элементарных средств стала одной из отличительных черт творчества Чебышева. Это стремление, воспитывавшееся им в учениках, стало одной из характерных особенностей стиля его школы.

К диссертации в качестве приложения он добавил сочинение «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», в котором дал оригинальное и строгое доказательства закона больших чисел Пуассона. Французский перевод этого приложения опубликован в журнале Крелле в 1846 г. Этими сочинениями открывалось одно из главных направлений исследований Чебышева и его школы – теоретико-вероятностное.

⁹На результаты Э. Шрёдера и А. Хаусхолдера в связи со студенческой работой Чебышева 1838 года указал 5 апреля 2021 года в своём докладе на Научно-исследовательском семинаре по истории математики и механики МГУ П.Н. Антонюк.

¹⁰Чебышев посчитал нужным сохранить эту работу – её обнаружили после его смерти при разборе его архива.

¹¹Ещё в своей речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», произнесённой в июне 1841 г., говоря о необходимости теоретико-вероятностных исследований в России, Брашман сетовал (цит. по [5, с.41], что «до сих пор нет на русском языке ни одного сочинения и перевода не только учёной, но даже элементарной теории вероятностей».

¹²Так он аттестован в университетском дипломе, выданном в 1841 г.

В эти же годы Чебышев, продолжая разработку вопросов, поставленных Абелем, Остроградским и Лиувиллем, приступил к исследованиям по теории интегрирования алгебраических функций, вылившимся в одно из важных направлений исследований его самого и его школы. Первые результаты в этом направлении составили содержание диссертации «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций, которую он защитил в Петербургском университете в 1847 году. Дальнейшее своё развитие эти исследования получили в мемуарах, опубликованных в 1853 – 67 гг., а также в работах его преемников – А.В. Бесселя, И.П. Долбни, И.Л. Пташицкого, Н.Н. Алексеева и др.

Итак, в 1847 году Чебышев переехал в Санкт-Петербург. Причины его отъезда из Москвы доподлинно нам неизвестны. Очевидно, однако, что северная столица открывала перед молодым амбициозным математиком более широкие перспективы. К тому же в это время из Петербургского университета уходил в отставку профессор В.А. Анкундович, оставляя своё место работавшему в университете с 1841 г. старшему товарищу Чебышева по Московскому университету О.А. Сомову, и появлялась свободная вакансия. Её и занял молодой магистр, в июле того же года утверждённый министерством в звании доцента. В осеннем семестре он приступил к преподаванию: начал читать алгебру на 2 курсе и теорию чисел на четвёртом. В следующем году он уже читал сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию, интегральное исчисление. Впоследствии к этому прибавились также теория вероятностей, исчисление конечных разностей, теория эллиптических функций и теория определённых интегралов.

По натуре своей и воспитанию, наконец, по полученному под руководством Брашмана образованию Чебышев питал расположение к той математике, которая оказывалась полезной в практической деятельности. Те же её разделы, которые приложений не имели, не были у него в чести. Отсюда и выбор им темы магистерской диссертации из области теории вероятностей, сулящей разнообразные применения. Разумеется, задачи теории чисел, в те времена никаких значимых приложений не имевшие, вряд ли могли вызвать у него особый интерес. Но здесь судьба преподнесла ему сюрприз. Дело в том, что в 1844 г. правнук Л. Эйлера академик П.Н. Фусс обнаружил в Архиве Академии наук рукописи своего прадеда. Особый интерес вызвали работы по теории чисел, которые было решено издать. Подготовку их к публикации взял на себя академик В.Я. Буняковский, который предложил Чебышеву участвовать в этой работе. Молодому математику, делавшему в большой науке первые шаги, было не с руки отказываться от предложения лица столь влиятельного в тогдашнем математическом сообществе. Он согласился. И это согласие оказалось судьбоносным для него самого и для петербургской математической школы. Он погрузился в теоретико-числовые штудии Эйлера, которые захватили и увлекли его. Совместно с Буняковским он составил аннотированный систематический указатель мемуаров Эйлера по теории чисел, некоторые из которых он восстановил, исправив ошибки, вкравшиеся в рукописи по вине лиц, писавших под эйлеровскую диктовку (сам автор в ту пору был уже слеп)¹³. Это издание рукописей, появившееся в 1849 году в двух томах¹⁴, оказало определённое воздействие на развитие теории чисел в XIX столетии (см. [9, с. 160]), но, что для нас самое главное, сделало теорию чисел одним из центральных направлений математического творчества самого Чебышева и его школы.

К занятиям рукописями Эйлера добавилась необходимость читать курс теории чисел студентам, что стимулировало его самостоятельные занятия этой дисциплиной. Он пишет руководство по своему курсу и в ноябре 1848 года подаёт в Совет университета прошение о принятии этого руководства к защите в качестве диссертации на степень доктора. Её защита

¹³Index systématique et raisonnée des mémoires arithmétiques de L. Euler, contenues dans les deux volumes de cette collection, par V. Bouniakowsky et P. Tchébycheff / Euler L. Commentationes arithmeticae collectae. T. 1. St.-Petersb., 1849. P. LI – LXXX.

¹⁴Euler L. Commentationes arithmeticae collectae. T. 1 – 2. St.-Petersb., 1849. Подготовке издания своими советами и поисками сведений в Берлинской Академии наук способствовал К. Якоби (см. [9, с. 160]).

15 (27) мая 1849 г. (оппоненты В.Я. Буняковский, С.С. Куторга, А.Н. Савич и О.И. Сомов) прошла успешно и принесла ему искомую степень – доктора математики и астрономии. В том же году диссертация вышла отдельной книгой, которая была отмечена Академией наук половинной Демидовской премией. В приложении к диссертации Чебышев опубликовал работу «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», французский перевод которой издал в 1851 году в записках Академии наук¹⁵ и в 1852 в журнале Лиувилля¹⁶. Вслед за этой работой последовал развивавший его идеи мемуар «О простых числах»¹⁷, в котором, в частности, доказывался «постулат Бертрана».

Эти и другие теоретико-числовые результаты Чебышева (в частности, по диофантовым приближениям) произвели сильное впечатление на современников, выдвинув его в число крупнейших аналитиков мира, и породили многочисленные исследования (А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Ш. де ла Валле-Пуссен и др.). Они стали основанием, на котором выросла всемирно известная чебышевская школа теории чисел, представленная такими именами, как А.Н. Коркин, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, традиции которой в XX веке продолжили Я.В. Успенский, И.М. Виноградов и др. (см. [9 – 11]).

На протяжении долгого времени «Теория сравнений»¹⁸, переиздававшаяся в 1849, 1879 и 1901 гг., служила университетским учебником по теории чисел. Профессорская карьера Чебышева успешно развивалась. В 1850 г. он стал экстраординарным, а в 1860 ординарным профессором. Лектором он был превосходным. Целиком вкладываясь в излагаемый предмет, он оставлял у слушателей не только ясное о нём представление, но и ощущение причастности к самому процессу открытия математической теории. Говорил и писал на доске быстро, поэтому записывать его лекции было непросто. Когда он хотел сделать отступление от систематического изложения, например дать историческую справку или рассказать о достижениях современных русских или зарубежных математиков, он сходил с кафедры, садился в кресло, которое непременно ставилось для него у первого стола. Этих “пауз” слушатели ждали с нетерпением. А.М. Ляпунов вспоминал [12, с. 18]: “Курсы его не были обширными, и при изложении их он заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактующихся вопросов. Отличаясь живым и увлекательным изложением, лекции его сопровождались множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или других вопросов или научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-либо конкретного случая, но всегда глубоко западали в умах его слушателей. Вследствие этого лекции его имели высокое развивающее значение, и слушатели его после каждой лекции выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взгляда и новизны точек зрения”.

Мы уже говорили об интересе к механическим устройствам, открывшемся у Чебышева в детстве. Увлечённость машинами и механизмами, их конструированием и их теорией, проходила через всю его творческую жизнь, породив лишь усиливавшийся с годами интерес к вопросам промышленного развития. Его вовлечённость в техническую проблематику с особой отчётливостью выступает в его отчётах о командировке во Францию, Великобританию и Германию в июле – ноябре 1852 года [13, с. 243 – 255], в которых его рассказ о вопросах математики органично соединяется с обсуждением технических проблем, с тщательным описанием увиденного на металлургических заводах, мельницах, в лабораториях и технических музеях. “Из многих предметов исследования, которые представились мне при рассмотрении, и сличения между собой различных механизмов передачи движения, особенно в паровой машине, где и экономия в топливе и прочность машины много зависят от способов передачи работы пара,

¹⁵ *Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Imp. Sci. de St.-Petersbourg*, VI (1848), 1851, p. 1 – 19.

¹⁶ *Journ. de math. pures et appl.* 1 sér. XVII, 1852. P. 341 – 365.

¹⁷ *Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Imp. Sci. de St.-Petersbourg*, VII (1850), 1852, p. 17 – 33; *Journ. de math. pures et appl.* 1 sér. XVII, 1852. P. 365 – 390.

¹⁸ Она была переведена на немецкий (1888) и итальянский (1895) языки.

я, — пишет он в этом отчете [13, с. 248 – 249], — особенно занялся теорией механизмов, известных под названием параллелограммов”. Результатом этих занятий и стал его знаменитый мемуар “Теория механизмов, известных под названием параллелограммов”. Изучение и конструирование последних привело его к математической проблематике теории наилучшего приближения функций¹⁹. Этой работой, с одной стороны, Чебышев заложил фундамент теории синтеза механизмов, став таким образом ее основоположником, с другой, положил начало циклу исследований по общей теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, продолженному работой «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым обращением функций», доложенной физико-математическому отделению Академии наук в 1857 году, и завершённой статьёй «О полиномах, наилучше представляющих значения простейших дробных функций при величинах переменной, заключающихся между двумя заданными пределами», доложенной там же в декабре 1892 года, то есть за пару лет до кончины. Эти исследования, подхваченные его учениками Е.И. Золотарёвым, братьями А.А. и В.А. Марковыми, уже в XX столетии получили новое развитие у С.Н. Бернштейна, назвавшего это направление конструктивной теорией функций — об этих исследованиях см. очерк Н.И. Ахиезера [14].

При всей значимости достигнутых Чебышевым результатов и разработанных им методов, которых нам удалось лишь слегка коснуться, ничуть не меньшее для развития математических наук значение имела его педагогическая деятельность, главным результатом которой стала созданная им школа, ставшая краеугольным камнем в фундаменте Советской математической школы, во многом определившей лицо математики второй половины XX века. К молодым исследователям Чебышев относился чрезвычайно заботливо, всегда внимательно их выслушивая, давая им ценные советы и предлагая темы для исследований, ставя вопросы, ответы на которые, по его мнению, могли бы принести важные для науки результаты. Один раз в неделю двери его дома оказывались открытыми для каждого желающего получить совет. Так именно Чебышев поставил перед Ляпуновым задачу, решение которой составило основу его магистерской диссертации «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884). Людей, почитавших Чебышева как учителя, было множество. К числу его непосредственных учеников принадлежат такие известные математики, как А.Н. Коркин, Ю.В. Сохоцкий, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, И.Л. Птапицкий, И.И. Иванов, К.А. Поссе, Д.А. Граве, Г.Ф. Вороной, А.В. Васильев.

По своим воспитанию и убеждениям Чебышев был человеком всецело преданным Отечеству. Поэтому он с готовностью отдавал свои знания и опыт каждому делу, приносящему пользу стране. Об этом свидетельствует его деятельность в различных ученых комитетах по линии народного образования и военного ведомства. Так, с 1857 по 1873 год он был деятельным сотрудником Ученого комитета Министерства народного просвещения, активно участвуя в реформах школьного образования, в разработке уставов и программ, рецензируя многочисленные учебники. Невозможно переоценить его вклад в совершенствование российской артиллерии. Его работа в Артиллерийском комитете в 1850-е – 1860-е годы имела большое значение для развития артиллерийской науки.

Один из законодателей математической мысли своего времени, Чебышев в сотрудничестве со своими учениками превратил Санкт-Петербург рубежа столетий в одну из столиц математического мира. Заметим, однако, что сам подъем математического Петербурга был подготовлен “старой столицей”, ее в известном смысле неожиданным пробуждением еще в 40-е – 50-е годы, положившим начало формированию в первопрестольной математического центра. Именно в Москве Чебышев сформировался как ученый — здесь он учился, здесь сделал свои первые открытия, здесь следует искать истоки многих его математических идей и тех воззре-

¹⁹Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes // Mémoires présentés à l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Petersbourg pour divers savants. 1854. V. VII. 539 – 568]. Хотя мемуар посвящен теории механизмов, его основное содержание относится к теории функций; поэтому издатели его Полного собрания сочинений поместили его не в 4-й том, посвященный теории механизмов, но 2-й, где собраны его работы по анализу.

ний, которые стали идеологией петербургской математической школы, в итоге обусловившей и конфронтационные взаимоотношения математиков двух столиц в конце XIX – первой трети XX столетия [15, 16].

Для исследований петербуржцев характерны: 1) ярко выраженный прикладной характер: заниматься нужно только той математикой, которая имеет приложения (исключение они делали только для теории чисел – раздела со времен Эйлера для Петербурга традиционно); 2) стремление к строгому и одновременно эффективному решению задач, к построению алгоритмов, позволяющих получать либо точный числовой ответ, либо такое приближенное решение, чтобы оказывалось возможным оценить возникающую погрешность. Такая направленность деятельности рождала известное недоверие к новомодным течениям западной математики (в частности, к математической логике или к новаторским идеям Римана в теории функций комплексного переменного, которые рассматривались как математический декаданс). При этом общее осмысление математики и ее места в мире носило позитивистский характер. Какие-либо обращения к идеалистической (а тем более религиозной!) философии рассматривались как совершенно недопустимые.

При всем глубоком интересе москвичей к прикладной тематике они не ограничивали себя вопросами, имевшими практические приложения. Для их исследований были характерны геометрический дух, приверженность к ясным геометрическим конструкциям (в частности, к построению изящных геометрических по духу контрпримеров) и, наконец, то, что особенно отличало их от петербуржцев, – склонность к философии, стремление осмыслить предмет и методы своих исследований в широком мировоззренческом контексте. Эта особенность и дала москвичам основание для наименования их школы философско-математической [17]. Ясно, что такая идеологическая разнонаправленность не сулила мира во взаимоотношениях.

Однако сам Чебышев, своим творчеством и мировоззрением определивший и содержание, и идеологию своей школы, ставшую главной предпосылкой для конфронтации, в столкновениях участия не принимал, напротив, начинаниям москвичей способствовал и наиболее важные из них находили у него горячую поддержку. Он был одним из создателей и активных членов Московского математического общества, выступив одним из его учредителей. Активно помогал в издании “Математического сборника”, особенно на первом этапе его жизни, печатаясь на его страницах, пропагандируя журнал и находя для него источники финансирования²⁰. Если отношение к московским коллегам наиболее значимых его учеников (и прежде всего всегда воинственно настроенного А.А. Маркова) было отмечено известной долей агрессивности, нетерпимости к их взглядам и даже высокомерия²¹, Чебышев старался поддерживать с ними хорошие отношения, храня сыновью почтительность к своей *alma mater*²². И хотя по взглядам он радикально расходился с лидерами москвичей, например с Н.В. Бугаевым, в своих печатных и устных выступлениях возникавших разногласий избегал, чем кардинально отличался от своих учеников. Свои идеологические установки он хранил про себя, вынуждая нас сегодня буквально реконструировать их, тщательно анализируя дошедшие до нас факты его творческой биографии. Выискивая их, например, в таких источниках, как “Журналы заседания учрежденной 21 апреля 1875 года Комиссии по пересмотру университетского устава” (СПб, 1976). Там мы находим информацию о сделанных им в 1876 году категорических возражениях против предложения А.М. Бутлерова о включении в программу обучения студентов физико-математических факультетов российских университетов факультативных курсов логики, психологии и истории философских систем. Против аналогичного предложения А.Н. Бе-

²⁰Так, именно благодаря Чебышеву “Математический сборник” был включен в список изданий, рекомендованных для приобретения библиотеками российских гимназий, что оказало ощутимую финансовую поддержку журналу в первые годы его существования.

²¹Исключением стал А.Н. Коркин.

²²Москвичи преклонялись перед его математическим гением, причисляя его к основателям Московской философско-математической школы [17].

кетова он выступал еще в 1861 году. В обоих случаях Чебышев резко отрицательно отнесся к инициативе выдающихся естествоиспытателей, которая, безо всякого сомнения, была бы горячо поддержана ведущими московскими математиками [1, с. 90]. Из подобных проявлений и проецируя на него философские настроения, характерные для его ведущих учеников, обыкновенно делают вывод о позитивистских настроениях Чебышева. Для таких выводов имеются известные основания, хотя, как я полагаю, все обстояло не так просто. Великий математик и как мыслитель был вовсе не ровня своим ортодоксальным последователям. Его математический гений не мог оказаться скованным жесткими положениями методологических схем ни в идейном отношении, ни тем более в персональных отношениях. Он, например, не только не оказал им никакой поддержки в развернутой ими кампании против С.В. Ковалевской в связи с обнаруженными А.А. Марковым пробелами в доказательствах в ее знаменитых исследованиях о движении твердого тела вокруг неподвижной точки²³, но вместе с академиками В.Я. Буняковским и В.Г. Имшенецким выдвинул ее в 1889 году в члены-корреспонденты Академии наук, а после состоявшегося избрания приветствовал ее следующей телеграммой: «Наша Академия наук только что избрала Вас членом-корреспондентом, допустив этим нововведение, которому не было до сих пор прецедента. Я очень счастлив видеть исполненным одно из самых пламенных и справедливых желаний» (цит. по: [1, с. 237]). В поддержку Ковалевской выступила и Москва, заняв конструктивную позицию в дискуссии об упомянутых пробелах в ее доказательствах. В своем противостоянии Петербургу москвичи продолжали рассматривать Чебышева в качестве одного из отцов-основателей их собственной школы. И когда в июне 1921 года в медленно приходящем в себя еще голодном Петрограде состоялись организованные по инициативе А.А. Маркова торжества по случаю 100-летия великого мастера, из Москвы нагрянула внушительная делегация: сам Н.Н. Лузин и В.А. Костицын с супругами, А.И. Некрасов, В.В. Степанов, И.И. Привалов, А.Я. Хинчин, В.Н. Вениаминов, П.С. Урысон, Н.К. Бари и «многие-многие другие» (за редкими исключениями, «подданные Лузитании») ²⁴. Этот первый шаг к сближению двух школ, случившийся уже в Советской России, к заметному потеплению в отношениях не привел²⁵. И хотя москвичи постоянно делали попытки к сближению (такой попыткой стала и описываемая нами поездка москвичей 1921 года, другой – включение В.А. Стеклова в редколлегию «Математического сборника») и новое поколение математиков Северной Пальмиры включило тематику москвичей – теорию множеств и теорию функций действительного переменного – в круг своих интересов (А.С. Безикович, Г.М. Фихтенгольц, позднее Л.В. Канторович), конец эпохе противостояния был положен лишь в 30-е годы прошлого века, когда «по велению свыше» президиум Академии наук и академический Математический институт им. В.А. Стеклова были переведены в Москву. Большинство ведущих ленинградских математиков оказались в Москве и были буквально вынуждены начать работать с москвичами. Возник удивительный синтез двух ведущих математических школ, который усилили математики, приехавшие в столицу из других математических центров страны, и который положил начало советской математической школе – одной из ведущих в мире второй половины XX столетия. Конечно, наследие Чебышева послужило в этом синтезе одним из важнейших объединяющих творческих начал.

²³Работа над этими «пробелами», начатая в конце XIX века (Г.Г. Аппельрот, Н.Е. Жуковский, А.М. Ляпунов), породила в XX столетии многочисленные исследования, одним из наиболее значимых итогом которых стали работы В.В. Козлова, предложившего обоснование метода С.В. Ковалевской (см. [18]).

²⁴До нас дошли два описания этого путешествия – Л.А. Люстерника [19] и В.А. Костицына [20], воспроизведенные по памяти уже через много лет после самого исторического визита, а потому содержащие неточности. Так, В.А. Костицын включает в московскую делегацию П.С. Александрова и даже сообщает о том, что тот выступал в Петрограде с докладом, в то время как Люстерник пишет, что Александров «заболел и не приехал».

²⁵Духом соперничества двух школ дышат и воспоминания Люстерника [19] и Костицына [20]. Вот, например, вспоминает Люстерник [19, с. 26]: «Конечно, лузитанцы «болели» за своего шефа, который должен был показать «зазнавшимся петербуржцам» класс математики. Когда Лузин кончил, Павел Урысон подбежал к нему и воскликнул: «Николай Николаевич, Вы их забили своими кругами!».

Однако, вернёмся в XIX век, в 60-е его годы, когда в обстановке реформ Александра II заметно активизировался процесс формирования российского математического сообщества: зародилось Московское математическое общество, вышел в свет первый том «Математического сборника», начались регулярные Всероссийские съезды естествоиспытателей, на которых одной из самых активных выступала секция математики. Во всех этих начинаниях видную роль играл П.Л. Чебышев, одним своим участием чрезвычайно поднимая их научную значимость и статус. Завоевав репутацию одного из крупнейших математиков Европы, Чебышев, много передвигавшийся по континенту и общавшийся практически со всеми ведущими европейскими математиками, а со многими даже находившийся в дружеских отношениях, способствовал укреплению международных связей в области математики и становлению международного математического сообщества. Его переписка с И.-Ж. Бьенэме, Ш. Делоне, Ж. Дюамелем, Л. Кремоной, Ж. Лиувиллем, Г. Миттаг-Леффлером, Дж. Сильвестром, М. Шалем, Ш. Эрмитом и др. даёт широкую панораму математической жизни Европы второй половины XIX века. Свидетельством международного признания его достижений служит список академий избравших его своим членом – Академия наук Франции (член-корреспондент с 1860, член с 1874), Берлинская академия наук (член-корреспондент с 1871), Лондонское королевское общество (член с 1877), Итальянская королевская академия (член с 1883), Шведская академия наук (член с 1893). В 1890 правительство Франции наградило его Командорским крестом ордена Почётного легиона.

Заканчивая настоящую статью, уместно ещё раз напомнить о той роли, которую великий математик сыграл в развитии теории вероятностей, приложения которой обнимают современное естествознание и многочисленные отрасли гуманитарного знания. Те самые приложения, столь ценимые Пафнутием Львовичем, не устававшего повторять своим ученикам (цит. по [14, с. 12]): «Нужно заниматься не тем, что интересно или любопытно, а тем, что важно и необходимо». С работ Чебышева начинается история теории вероятностей как одного из важнейших разделов математики: всё, что было до этого, включая выдающиеся труды П.С. Лапласа и С. Пуассона, следует отнести к ее предыстории. Ее долго рассматривали как одну из прикладных дисциплин, в которой существенную роль играют математические методы. Такой взгляд на теорию вероятностей ещё в 1900 году разделял Д. Гильберт. В произнесённом в 1900 году знаменитым докладом «Математические проблемы», формулируя задачу аксиоматизации теории вероятностей, он рассматривал теорию вероятностей как одну из «тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль» [21, с. 34]. Само название шестой проблемы: «Математическое изложение аксиом физики» !

Одной из главных исторических заслуг Чебышева наряду с его собственными выдающимися теоретико-вероятностными достижениями стало то, что он возбудил интерес к этой теории своих учеников и создал первую в ее истории школу – А.А. Марков, А.М. Ляпунов, nasledовавшие им Я.В. Успенский, С.Н. Бернштейн, традиции которой продолжила советская теоретико-вероятностная школа – А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко и др. (см. [22, 23]).

Земной путь Пафнутия Львовича Чебышева завершился 26 ноября (8 декабря) 1894 года в Санкт-Петербурге. Погребён он неподалёку от Окатово – места, где ему было суждено появиться на свет. Его усыпальница расположена в склепе под колокольной храма Преображения Господня, построенного предками Чебышева, в подклете которого и похоронен Пафнутий Львович с двумя младшими братьями²⁶. У входа в помещения, ведущие в усыпальницу, висит бронзовая доска, на которой прохожий читает:

²⁶Павлом Львовичем (1822 – 1860), коллежским советником, юристом – с тем самым, с которым Пафнутий Львович в 1832 году был отправлен в Москву для подготовки к поступлению в университет; Николаем Львовичем (1830 – 1875), генерал-майором, командиром Кронштадтской артиллерии; совсем рядом на северной стороне церковного двора покоятся родители братьев – Лев Павлович (1789 – 1861) и Аграфена Ивановна (? – 1867).

Здесь погребён Пафнутий Львович Чебышев, член Императорской Российской и Французской академий наук, заслуженный профессор Императорского С.-Петербургского университета, почётный член многих академий, университетов и учёных обществ русских и зарубежных, действительный статский советник и кавалер орденов: благоверного князя Александра Невского и французского ордена Почётного Легиона командорского креста.

Родился 14 мая 1821 г.²⁷ Скончался 26 ноября 1894 г.

Так была поставлена точка в жизни П.Л. Чебышева — одного из крупнейших математиков XIX века, основоположника теории синтеза механизмов, автора фундаментальных результатов в области теории вероятностей, преобразовавшего эту науку в один из наиболее динамически развивающихся разделов математики и математического естествознания, автора замечательных достижений в теории чисел, теории функций, в математическом анализе и в других разделах математики, создателя блистательной Петербургской математической школы, вместе с Ш. Эрмитом, К. Вейерштрассом, Дж. Сильвестром, Г. Миттаг-Леффлером, выступившего одним из лидеров только зарождавшегося европейского (а по тем временам и мирового) математического сообщества.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев (1821 – 1894). Л.: Наука. 1978.
2. Менделеев Д.И. Записки о народном просвещении в России. СПб. 1901.
3. Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII – XIX веков. М.: Учпедгиз. 1956.
4. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука. 1968.
5. Лихолетов И. И., Майстров Л. Е. Николай Дмитриевич Брашман. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1971.
6. Золотарёв Е.И. Полное собрание сочинений. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР. 1932.
7. Schröder E. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // Mathematische Annalen. Bd. 2. 1870. S. 317 – 365.
8. Householder A.S. Principles of Numerical Analysis. New York – London: Mc Graw-Hill. 1953. (Русский перевод: Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. М.: ИЛ. 1956.)
9. Ожигова Е.П. (при участии Юшкевича А.П.) Проблемы теории чисел / Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М.: Наука. 1978. С. 123 – 183.
10. Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел. М.: Изд-во АН СССР. 1947.
11. Ожигова Е.П. Развитие теории чисел в России. Л.: Наука. 1972.
12. Ляпунов А.М. Пафнутий Львович Чебышев // Чебышев П.Л. Избранные математические труды. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 9 – 21
13. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951.

²⁷Как установил В.Е. Прудников, точная дата рождения П.Л. Чебышева не 14, а 4 мая 1821 года (то есть 16 мая 1821 года по новому стилю).

14. Ахиезер Н.И. Чебышевское направление в теории функций // Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. // Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1987. 9 – 79.
15. Демидов С.С. Повесть о двух городах // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2006. 9—21.
16. Demidov S.S. Saint-Pétersbourg et Moscou, deux capitales / Eds. by C. Bartocci, P. Odifreddi. Paris: CNRS Editions, 2009 (La mathématique: Vol.1). 683—703.
17. Некрасов П.А. Московская философско-математическая школа и ее основатели // Матем. сб. 1904. 25, вып. 1. 3 – 249.
18. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.: Институт компьютерных исследований, 2005.
19. Люстерник Л.А. Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества // Успехи матем. наук. 1965. 20. № 3 (123). С. 21 – 30.
20. Костицын В.А. “Моё утраченное счастье...”: Воспоминания, дневники. Т. 1. М.: Новое литературное обозрение, 2017.
21. Проблемы Гильберта: Сб. под ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969.
22. Гнеденко Б. В. Очерк по истории теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.
23. Гнеденко Б.В., Шейнин О.Б. Теория вероятностей // Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1978. 184 – 240.

REFERENCES

1. Prudnikov V.E. Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821 – 1894). Leningrad: Nauka. 1978.
2. Mendelev D.I. Notes on public education in Russia. St. Petersburg. 1901.
3. Prudnikov V.E. Russian mathematic teachers of the 18th – 19th centuries Moscow: Uchpedgiz. 1956.
4. Yushkevich A.P. History of mathematics in Russia before 1917. Moscow: Nauka. 1968.
5. Likholetov I.I., Maistrov L.E. Nikolay Dmitrievich Brashman. Moscow: Publishing House of Moscow University. 1971.
6. Zolotarev E.I. Collected Works. V. 2. Leningrad: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. 1932.
7. Schröder E. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // Mathematische Annalen. Bd. 2. 1870. S. 317 – 365.
8. Householder A.S. Principles of Numerical Analysis. New York – London: Mc Graw-Hill. 1953.

9. Ozhigova E.P. (with the participation of Yushkevich A.P.) Problems of number theory // Mathematics of the XIX century. Mathematical logic. Algebra. Number theory. Probability theory / Ed. A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich. Moscow: Nauka. 1978. P. 123 – 183.
10. Delone B.N. Petersburg School of Number Theory. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. 1947.
11. Ozhigova E.P. Development of number theory in Russia. Leningrad: Nauka. 1972.
12. Lyapunov A.M. Pafnuty Lvovich Chebyshev // Chebyshev P.L. Selected Mathematical Works. Moscow – Leningrad: Gostekhizdat. 1946. P. 9 – 21.
13. Chebyshev P.L. Collected Works. V. 5. Moscow – Leningrad: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. 1951.
14. Akhiezer N.I. Chebyshev direction in function theory // Mathematics of the XIX century. Chebyshev direction in function theory. Ordinary differential equations. Variational calculus. Finite Difference Theory / Ed. A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich. Moscow: Nauka, 1987. P. 9 – 79.
15. Demidov S.S. A Tale of Two Cities // Works of the Fourth Kolmogorov- readings. Yaroslavl, 2006. P. 9–21.
16. Demidov S.S. Saint-Pétersbourg et Moscou, deux capitales / Eds. by C. Bartocci, P. Odifreddi. Paris: CNRS Editions, 2009 (La mathématique: Vol.1). P. 683—703.
17. Nekrasov P.A. Moscow philosophical and mathematical school and its founders // Matem. Sbornik. 1904. V. 25. № 1. P. 3 – 249.
18. Borisov A.V., Mamaev I.S. Solid body dynamics. Moscow: Institute for Computer Research. 2005.
19. Lyusternik L.A. Address at the jubilee session of the Moscow Mathematical Society // Uspekhi Mat. Sciences. 1965. V. 20. No. 3 (123). P. 21 – 30.
20. Kostitsyn V.A. “My Lost Happiness...”: Memories, diaries. V.1. Moscow: New literary review. 2017.
21. Hilbert Problems. Ed. P.S. Aleksandrov. Moscow: Nauka. 1969.
22. Gnedenko B.V. Essay on the history of the probability theory. Moscow: URSS. 2001.
23. Gnedenko B.V., Sheinin O.B. Probability theory // Mathematics of the XIX century. Mathematical logic. Algebra. Number theory. Probability theory / Ed. A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich. Moscow: Nauka. 1978. P. 184 – 240.

Получено 19.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.55

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-20-31

Оценки ядра Бергмана для классических областей Э. Картана

Ж. Ш. Абдуллаев

Абдуллаев Жонибек Шокирович — докторант, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека (г. Ташкент, Узбекистан).

e-mail: jonibek-abdullayev@mail.ru

Аннотация

Целью работы является найти оптимальные оценки ядер Бергмана для классических областей $\Re_I(m, k)$, $\Re_{II}(m)$, $\Re_{III}(m)$ и $\Re_{IV}(n)$, соответственно, через ядра Бергмана в шарах из пространств $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ и $\mathbb{C}^n$. Для этого используются утверждения теоремы Зоммера-Меринга о продолжении ядро Бергмана и некоторые свойства ядра Бергмана.

Ключевые слова: Классические области, ядро Бергмана, однородная область, симметрическая область, ортонормальная система.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Ж. Ш. Абдуллаев. Оценки ядра Бергмана для классических областей Э. Картана // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 20–31.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.55

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-20-31

Estimates the Bergman kernel for classical domains É. Cartan's

J. Sh. Abdullayev

Abdullayev Jonibek Shokirovich — PhD-Student, National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan).

e-mail: jonibek-abdullayev@mail.ru

Abstract

The aim of this work is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains $\Re_I(m, k)$, $\Re_{II}(m)$, $\Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$ through the Bergman kernels of balls in the spaces $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ and $\mathbb{C}^n$, respectively. For this, we use the statements of the Summer-Mehring theorem on the extension of the Bergman kernel and some properties of the Bergman kernel.

Keywords: Classical domains, Bergman's kernel, , homogeneous domain, symmetric domain, orthonormal system.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

J. Sh. Abdullayev, 2021, "Estimates the Bergman kernel for classical domains É. Cartan's", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 20–31.

1. Introduction, preliminaries and problem statement

In the representation of multidimensional data (in some sections of mathematics, technology, economics, etc.) vectors and matrices are especially useful when modeling and studying abstract and real systems, the description of which requires a lot of information. It is convenient to represent this information using matrices. With this approach, the analysis of systems is reduced to the analysis of the properties of matrices. The main mathematical apparatus of algebra is matrices; they are used in the study of systems of linear equations, linear and quadratic forms and linear mappings of vector spaces.

In the works of É Cartan ([1]), C.L. Siegel ([2]), Hua Luogeng ([3]), I.I. Pjateckii-Šapiro ([4]), as well as in [5] the matrix approach of presenting the theory of multivariable complex analysis is widely used. It mainly deals with the classical domains and related questions of function theory and geometry. The importance of studying classical domains is that they are not reducible, i.e. these domains are, in a sense, model domains of multidimensional space.

In recent times, scientists have achieved many significant results in the classical fields, and at the same time, a number of open problems have been formulated. For example, in [6] the regularity and algebraicity of mappings in classical domains are studied, and in [7] harmonic Bergman functions in classical domains are studied from a new point of view. In the paper, [22] holomorphic and pluriharmonic functions are defined for classical domains of the first type, the Laplace and Hua Luogeng operators are studied also. A connection was found between these operators.

In complex analysis, studies of specific classes play an important role domains. The well-known Riemann theorem states that any simply connected domain $D \subset \mathbb{C}$, the boundary of which contains at least two points, is conformally equivalent to the unit disc. This theorem ceases to be true in $\mathbb{C}^n$, when $n > 1$: there is no biholomorphic map of the unit ball

$$\mathbb{B}^n(1) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$$

in a polycircle

$$\mathbb{U}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\},$$

where $|z| = \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$.

For convenience, we present the following definitions (see, for example, [4], [8]):

DEFINITION 1 (HOMOGENEOUS DOMAIN). *The domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called homogeneous if the group $\text{Aut}(D)$ of automorphisms of this domain is transitive, that is, for any pair of points $z_1, z_2 \in D$ there exists an automorphism $\varphi \in \text{Aut}(D)$, such that $\varphi(z_1) = z_2$.*

DEFINITION 2 (SYMMETRIC DOMAIN). *The homogeneous domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called symmetric if for any point $\zeta \in D$ such an automorphism $\varphi \in \text{Aut}(D)$, that:*

- 1) $\varphi(\zeta) = \zeta$ but $\varphi(z) \neq z$, if $z \in D$ is different from ζ ;
- 2) $\varphi \circ \varphi = e$, where $e \in \text{Aut}(D)$ is the identity mapping.

DEFINITION 3 *The domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called an irreducible domain if it is not a direct product of bounded symmetric domains of lower dimension.*

DEFINITION 4 *The bounded domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called classical if the complete group of its holomorphic automorphisms is a classical Lie group and it is transitive on it.*

In homogeneous domains, the automorphism groups ([9], [10]) can be used to find integral formulas. Domains with rich automorphism groups are often implemented as matrix domains ([3], [11]). They turned out to be useful in solving various problems of function theory.

Complex homogeneous bounded domain are of great interest from different points of view. This is due to the fact that they are a relatively wide class of domains in $\mathbb{C}^n$, for which a number of meaningful, essentially multidimensional results have been obtained ([3], [12], [13] and etc.).

E. Cartan (see [1]) in 1935 initiated a systematic study of bounded homogeneous domains, found all homogeneous homogeneous domains in the spaces $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{C}^3$. He gave a classification of

all bounded symmetric regions. These domains are divided into equivalence classes with respect to biholomorphic mappings. Each such class can be specified by specifying one area that belongs to it. Further, it is obvious that it is sufficient to consider only irreducible classes, that is, classes of domains that are not products of bounded symmetric domains of lower dimensions. In general, as E. Cartan established [1], there are six types of classes of irreducible bounded symmetric domains. Domains belonging to four of them are called classical because their automorphism groups are classical semisimple Lie groups. Two of these types are special in the sense that each of them occurs in the space $\mathbb{C}^n$ of only one dimension n , respectively for $n = 16$ and $n = 27$.

Consider the classical domains (see.[3], [1]):

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_I(m, k) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0 \right\}, \\ \mathfrak{R}_{II}(m) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{III}(m) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = -Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{IV}(n) &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |\langle z, z \rangle|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, |\langle z, z \rangle| < 1 \right\},\end{aligned}$$

here $I^{(m)}$ is the identity matrix of order m , $\bar{Z}'$ is the complex conjugate matrix of the transposed matrix Z' ($H > 0$ for a Hermitian matrix H means, as usual, that H is positive definite). All these domains are homogeneous symmetric convex complete circular domains centered at O (O is zero matrix).

If we write the elements of the matrices $Z \in \mathbb{C}[m \times k]$ as a point in the space $\mathbb{C}^{mk}$:

$$z = \{z_{11}, \dots, z_{1k}, z_{21}, \dots, z_{2k}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{mk}\} \in \mathbb{C}^{mk}, \quad (1)$$

then we can assume that Z is an element of the space in $\mathbb{C}^{mk}$, i.e., we arrive to the isomorphism

$$\mathbb{C}[m \times k] \cong \mathbb{C}^{mk}.$$

Therefore, the dimensions of the classical domains above four, are equal, respectively,

$$mk, \frac{m(m+1)}{2}, \frac{m(m-1)}{2}, n.$$

Writing out explicitly the transitive group of automorphisms of four types of classical domains and matrix balls (see, for example, [14], [15]) associated with classical domains, by direct computation one can find the Bergman and Cauchy-Szegő kernels for these domains. And then (using the properties of the Poisson kernel), we find the Carleman formula, which restores the value of a holomorphic function in the domain itself from its values on some boundary sets of uniqueness (see [16], [17], [18], [19]). In this case, the scheme for finding the Bergman and Cauchy-Szegő kernels from [3], [12], [20] is used. In [21] the volumes of a matrix ball of the third type and a generalized Lie ball are calculated. The full volumes of these domains are necessary to find the kernels of integral formulas for these domains (Bergman, Cauchy-Szegő, Poisson kernels, etc.) and is used for the integral representation of functions holomorphic in these domains, in the mean value theorem, and in other important concepts.

The Bergman space on bounded symmetric domains is a fundamental concept in the analysis. It is equipped with a natural projection, i.e. the Bergman projection, determined by the property of the reproducing nucleus. On the other hand, the weighted Bergman spaces are also important in harmonic analysis (see, for example [13]).

DEFINITION 4 ([23]). Let $\{\varphi_\nu(z), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ be a complete orthonormal system of functions in $L^2(D)$. The Bergman kernel (or kernel function¹) $K_D(z, \bar{\zeta})$ is the sum of the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\bar{\zeta})} = K_D(z, \bar{\zeta}), \quad (2)$$

which is holomorphic by z and antiholomorphic by ζ

For example (see [8], [23]), the Bergman kernel for a ball with radius R , $\mathbb{B}^n(R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, has the form

$$K_{\mathbb{B}^n(R)}(z, \bar{\zeta}) = \frac{n!R^2}{\pi^n \left(R^2 - \sum_{k=1}^n z_k \bar{\zeta}_k \right)^{n+1}}.$$

The aim of this work is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$, $\mathfrak{R}_{III}(m)$ and $\mathfrak{R}_{IV}(n)$, respectively, through the Bergman kernels in balls from the spaces $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ and $\mathbb{C}^n$. For this, we use the statements of the Sommer-Mehring theorem (see [24]) on the extension of the Bergman kernel and some properties of the Bergman kernel.

THEOREM 1 (SOMMER-MEHRING). Let $D \subset G$ are domains in $\mathbb{C}^n$, where the domain D is bounded and univalent. If the Bergman kernel (kernel function) $K_D(z, \bar{z})$ can be continued into the domain G as a real analytic function, it follows that :

- a) Every function $f \in L^2(D)$ can be holomorphically continued to the domain G ;
- b) If $\{\varphi_\nu(z), \nu = 1, 2, \dots\}$ – is a closed orthonormal system of functions in the domain D equality

$$K_D(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\bar{\zeta})}$$

takes place in the domain $G_z \times G_\zeta$;

- c) for every function $f \in L^2(D)$ the expansion $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$ remains valid in the whole domain G ;

d) The function $K_D(z, \bar{\zeta})$ holomorphically to the variable z and antiholomorphic by to the variable ζ in the domain $G_z \times G_\zeta$;

- e) (reproducing property Bergman kernel) The integral representation

$$f(z) = \int_{\bar{D}_\zeta} f(\zeta) K_D(z, \bar{\zeta}) d\mu_\zeta$$

is valid at all points $z \in G$;

- f) (extreme property of the Bergman kernel) for functions $f(z) \in L^2(D)$, satisfying the condition $\|f\|_{L^2(D)} \leq 1$, at all points $z \in G$ the equality holds

$$K_D(z, \bar{z}) = \max |f(z)|^2.$$

In other words, the Bergman kernel for any transitive circular region is equal to the ratio of the volume density to the Euclidean volume of the domain (we recall that if the domain $D \subset \mathbb{C}^n$ admits

¹In classical Russian literature, the Bergman kernel is usually called the domain kernel function (see, for example, [23], [8]). At the present time, such a term would not be very apt, since we have three kernels (Bergman, Cauchy-Szegő and Poisson) that could bear this name.

the transformation group $z = e^{i\theta}w$, then we call D a circular domain, if, in addition, with a point, z and the point rz ($0 \leq r \leq 1$) lies in D , then we call D a the complete circular domain). Hua Luogeng in [3] constructed Bergman kernels for four types of classical domains, being guided only by this consideration and without resorting to complete orthonormal systems, and in this book one can also find explicit expressions for the Bergman kernel, groups of automorphisms of the domain $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$, $\mathfrak{R}_{III}(m)$ и $\mathfrak{R}_{IV}(n)$.

2. Estimate for the Bergman Kernel for the Lie Ball

Let $\mathfrak{R}_{IV}(n)$ be a classical domain of the fourth type (this domain is called a Lie ball (see [3])). It is known [3], that the Bergman kernel for the Lie ball $\mathfrak{R}_{IV}(n)$ has the form

$$K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV}(n)) (1 - 2\langle z, \bar{\zeta} \rangle + \langle z, z \rangle \langle \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \rangle)^n},$$

where $V(\mathfrak{R}_{IV}(n)) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}n!}$ – full volume of the Lie ball $\mathfrak{R}_{IV}(n)$.

Let us first prove the following lemma.

LEMMA 1. *The Lie ball $\mathfrak{R}_{IV}(n)$ is contained in the unit ball $\mathbb{B}^n(1)$ from the space $\mathbb{C}^n$.*

PROOF. Let any $z \in \mathfrak{R}_{IV}(n)$. Then we have the following relations

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^2 &= (1 - \langle z, \bar{z} \rangle)^2 = 1 - 2\langle z, \bar{z} \rangle + \langle z, \bar{z} \rangle^2 > \\ &> \langle z, \bar{z} \rangle^2 - |\langle z, z \rangle|^2 > \langle z, \bar{z} \rangle^2 - 1 = |z|^4 - 1. \end{aligned}$$

Hence $|z|^2 - 1 < 0$, i.e. $z \in \mathbb{B}^n(1)$. Hence,

$$\mathfrak{R}_{IV}(n) \subset \mathbb{B}^n(1). \quad (3)$$

Lemma 1 is proved. $\square$

The following is true.

THEOREM 2. *If the Bergman kernel $K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z})$ extends to the domain $\mathbb{B}^n(1)$ as a real analytic function, then at the points $z \in \mathbb{B}^n(1)$ the inequality*

$$K_{\mathbb{B}^n(1)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z}).$$

PROOF. Using (3) we compare the Bergman kernels defined in these balls and by Theorem 1 (property e), due to the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}^n(1)}(z, \bar{z}) &= \int_{\mathfrak{R}_{IV}^n} K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z}) K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta}) d\nu(\zeta) \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} |K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} |K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{B}^n(1)} |K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} |K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Now, using holomorphy in the variable z and antiholomorphism in the variable ζ (i.e., $K(z, \bar{\zeta}) = \overline{K(\zeta, \bar{z})}$ - is the property of conjugate symmetry of the Bergman kernel) from (4) we obtain the equality:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{B}^n(1)} |K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} |K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta})|^2 d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left(\int_{\mathbb{B}^n(1)} K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, z) \overline{K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z})} d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \zeta) \overline{K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta})} d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left(\int_{\mathbb{B}^n(1)} K_{\mathbb{B}^n(1)}(\zeta, \bar{z}) K_{\mathbb{B}^n(1)}(z, \bar{\zeta}) d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathfrak{R}_{IV}(n)} K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{\zeta}) K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(\zeta, \bar{z}) d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = (K_{\mathbb{B}^n(1)}(z, \bar{z}))^{\frac{1}{2}} (K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z}))^{\frac{1}{2}}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Thus, from the relations(4) and (5) the following inequality follows:

$$K_{\mathbb{B}^n(1)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z}).$$

Theorem 2 is proved. □

Note that for $n = 1$

$$K_{\mathbb{B}^1(1)}(z, \bar{z}) = K_{\mathfrak{R}_{IV}(1)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi(1 - |z|^2)}.$$

On the other hand, based on the above, we can estimate from above the Bergman kernel $K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z})$. For points $z \in B^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, takes place

$$|z|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 < \frac{1}{2}.$$

In this way

$$1 + |\langle z, z \rangle|^2 - 2|z|^2 \geq 1 - 2|z|^2 > 0. \tag{6}$$

Considering that $|\langle z, z \rangle| \leq |z|^2$, we have

$$1 - |\langle z, z \rangle|^2 \geq 1 - |z|^4 > \frac{3}{4} > 0. \tag{7}$$

From the inequality(6) and (7) we get $z \in \mathfrak{R}_{IV}(n)$. Hence,

$$\mathbb{B}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \mathfrak{R}_{IV}(n).$$

In the same way, we obtain the following statement.

THEOREM 3. *If the Bergman kernel is $K_{\mathbb{B}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(z, \bar{z})$ continues to the domain $\mathfrak{R}_{IV}(n)$ as a real analytic function, then at the points $z \in \mathfrak{R}_{IV}(n)$ the inequality holds*

$$K_{\mathfrak{R}_{IV}(n)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathbb{B}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(z, \bar{z}).$$

3. Estimates for the Bergman kernel for the classical domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$ and $\mathfrak{R}_{III}(m)$

Now we give estimates for the Bergman kernel for other types of classical domains. For this, we first prove the following lemma, which establishes relations between the classical domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$, $\mathfrak{R}_{III}(m)$ and balls from the space $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$, respectively.

LEMMA 2. *The following relations hold:*

a)

$$B^{mk}(1) \subset \mathfrak{R}_I(m, k);$$

b)

$$\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \mathfrak{R}_{II}(m);$$

c)

$$\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1) \subset \mathfrak{R}_{III}(m).$$

PROOF. a) It is known [25], that for any $Z \in \mathbb{C}[m \times k]$ when $m \leq k$, there exist unitary matrices U of order m and V of order k such that

$$Z = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

for some $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$. Hence it follows that

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = (1 - \lambda_1^2) \dots (1 - \lambda_m^2) = \det(I^{(m)} - \bar{Z}'Z).$$

Therefore, for a given $Z \in \mathbb{C}[m \times k]$ the relation $I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$ is executed if and only if $1 - \lambda_s^2 > 0$ or $\lambda_s < 1$, $s = 1, \dots, m$.

On the other hand, for $Z = \{z_{11}, \dots, z_{1k}, z_{21}, \dots, z_{2k}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{mk}\} \in \mathbb{B}^{mk}(1)$, we have

$$\|Z\|^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^k |z_{sj}|^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^k z_{sj} \bar{z}_{sj} = Sp(Z\bar{Z}') = \sum_{s=1}^m \lambda_s^2 < 1.$$

Whence $\lambda_s < 1$ ($s = 1, \dots, m$) and $Z \in \mathfrak{R}_I(m, k)$. Hence,

$$B^{mk} \subset \mathfrak{R}_I(m, k).$$

b) Let $Z \in \mathfrak{R}_{II}(m)$. It is known [25], that for any symmetric matrix $Z \in \mathbb{C}[m \times m]$, there exists a unitary matrix $U \in U(m)$ and real numbers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$, such that

$$Z = U' \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) U = U' \Lambda U.$$

In this way,

$$\begin{aligned} I^{(m)} - Z\bar{Z} &= I^{(m)} - U' \Lambda^2 \bar{U} = I^{(m)} - U'(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2)^2 \bar{U} = \\ &= U' \text{diag}(1 - \lambda_1^2, \dots, 1 - \lambda_m^2) \bar{U}. \end{aligned}$$

This equality implies that $Z \in \mathfrak{R}_{II}(m)$ if and only if $1 - \lambda_s^2 > 0$ and $\lambda_s < 1$ ($s = 1, \dots, m$). On the other hand, for $Z \in \mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ we have

$$\begin{aligned} \|Z\|^2 &= \sum_{1 \leq s \leq j \leq m} |z_{sj}|^2 = \sum_{1 \leq s \leq j \leq m} z_{sj} \bar{z}_{sj} = \frac{1}{2} Sp(Z\bar{Z}) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m |z_{ss}|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \lambda_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p |z_{ss}|^2 < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

and thus $\sum_{s=1}^m \lambda_s^2 < 1$. Therefore, $\lambda_s < 1$, $s = 1, \dots, m$ and $\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \mathfrak{R}_{II}(m)$.

c) Let $Z \in \mathfrak{R}_{III}(m)$. It is known [25], that for any skew-symmetric matrix $Z \in \mathbb{C}[m \times m]$, there exists a unitary matrix $U \in U(m)$ and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\gamma \geq 0$, $\gamma = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, such that

$$Z = U \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_\gamma \\ -\lambda_\gamma & 0 \end{pmatrix} \right] \bar{U}'$$

when m -is even,

$$Z = U \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_\gamma \\ -\lambda_\gamma & 0 \end{pmatrix} \dot{+} 0 \right] \bar{U}'$$

when m is odd. Here the direct sum of the matrices A and B , i.e., $\ll A \dot{+} B \gg$ is defined as $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Further, when m is even, we have

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} = U \left[\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_1^2 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_\gamma^2 \end{pmatrix} \right] \bar{U}'.$$

Similarly, when m is odd, we have

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} = U \left[\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_1^2 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_\gamma^2 \end{pmatrix} \dot{+} 1 \right] \bar{U}'.$$

It follows that $Z \in \mathfrak{R}_{III}(m)$ if and only if $\lambda_s < 1$ ($s = 1, \dots, \gamma$).

For $Z \in \mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1)$, we have

$$\|Z\|^2 = \sum_{1 \leq s \leq j \leq m} |z_{sj}|^2 = \sum_{1 \leq s \leq j \leq m} z_{sj} \bar{z}_{sj} = \frac{1}{2} Sp(Z\bar{Z}') = \sum_{s=1}^{\gamma} \lambda_s^2 < 1.$$

This means that $\lambda_s < 1$ ($s = 1, \dots, \gamma$), и $Z \in \mathfrak{R}_{III}(m)$. Hence, $\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1) \subset \mathfrak{R}_{III}(m)$.

Lemma 2 is proved. $\square$

It is known [3], that the Bergman kernels for the domains $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$ and $\mathfrak{R}_{III}(m)$ have the form:

$$K_{\mathfrak{R}_I(m, k)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_I(m, k))} \frac{1}{\det^{m+k}(I^{(m)} - Z\bar{Z}')} ,$$

$$K_{\mathfrak{R}_{II}(m)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{II}(m))} \frac{1}{\det^{m+1}(I^{(m)} - Z\bar{Z})} ,$$

$$K_{\mathfrak{R}_{III}(m)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{III}(m))} \frac{1}{\det^{m-1}(I^{(m)} + Z\bar{Z})} ,$$

where

$$V(\mathfrak{R}_I(m, k)) = \frac{1!2!\dots(m-1)!1!2!\dots(k-1)!}{1!2!\dots(m+k-1)!} \pi^{mk},$$

$$V(\mathfrak{R}_{II}(m)) = \pi^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{2!4!\dots(2m-2)!}{m!(m+1)!\dots(2m-1)!},$$

$$V(\mathfrak{R}_{III}(m)) = \pi^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{2!4!\dots(2m-4)!}{(m-1)!m!\dots(2m-3)!},$$

volumes of the domain $\mathfrak{R}_I(m, k)$, $\mathfrak{R}_{II}(m)$ and $\mathfrak{R}_{III}(m)$, respectively.

The following theorem is proved in the same way as Theorem 2.

THEOREM 4. *The following statements are true:*

a) *if the Bergman kernel is $K_{\mathbb{B}^{mk}(1)}(z, \bar{z})$ continues to the domain $\mathfrak{R}_I(m, k)$ as a real analytic function, then at the points $z \in \mathfrak{R}_I(m, k)$ the following inequality holds*

$$K_{\mathfrak{R}_I(m, k)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathbb{B}^{mk}(1)}(z, \bar{z});$$

b) *if the Bergman kernel is $K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})}(z, \bar{z})$ continues to domain $\mathfrak{R}_{II}(m)$ as a real analytic function, then at the points $z \in \mathfrak{R}_{II}(m)$ the inequality holds*

$$K_{\mathfrak{R}_{II}(m)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})}(z, \bar{z});$$

c) *if the Bergman kernel $K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1)}(z, \bar{z})$ extends into the domain $\mathfrak{R}_{III}(m)$ as a real analytic function, then at the points $z \in \mathfrak{R}_{III}(m)$ the inequality holds*

$$K_{\mathfrak{R}_{III}(m)}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1)}(z, \bar{z}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cartan É. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1935), pp. 116-162.
2. Зигель К. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных // *М.: ИЛ*, 1954. 168 с.
3. Хуа Л. К. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях // *М.: ИЛ*, 1959. 163 с.
4. Пятецкий-Шапиро И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций // *М.: Наука*, 1961. 192 с.
5. Henkin G.M., The method of integral representations in complex analysis, Complex analysis-several variables – 1 // *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 7, VINITI, Moscow, 1985, 23–124
6. Xiao Ming. Regularity of mappings into classical domains // *Mathematische Annalen*, 2020, 378(3-4), pp. 1271-1309

7. Xiao M. Bergman-Harmonic Functions on Classical Domains // *International Mathematics Research Notices*, Vol. 00, No. 0, pp. 1–36 (2019).
8. Фукс Б. А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. *Физматгиз*, 1963. 428 с.
9. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе // *Новосибирск: Наука*, 1990. 248 с.
10. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе // *Новосибирск: Наука*, 1979. 366 с.
11. Худайберганов Г., Хидиров Б. Б., Рахмонов У. С. Автоморфизмы матричных шаров // *Вестник НУУз*. 2010. № 3. с.205-210.
12. Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ // *New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag*, (1980) 436 p.
13. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables, *Springer Monographs in Mathematics*, Gewerbestrasse // 11, 6330 Cham, Switzerland (2017), 429 p.
14. Sergeev A. G. On matrix and Reinhardt domains // *Preprint, Inst. Mittag-Leffler, Stockholm*, 7 pp. (1988).
15. Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А. Анализ в матричных областях // *Красноярск: Сибирский федеральный ун-т*, 296 с. (2017).
16. Khudayberganov G., Rakhmonov U. S. Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type // *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. **264** (2017), pp. 101-108, Springer, Cham.
17. Khudayberganov G., Rakhmonov U. The Bergman and Cauchy-Szegő kernels for matrix ball of the second type // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 7:3 (2014), 305-310.
18. Myslivets S. G. Construction of Szegő and Poisson kernels in convex domains // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, Volume 11, Issue 6, 792-795.
19. Khudayberganov G., Abdullayev J. Sh. Relationship between the Bergman and Cauchy-Szegő kernels in the domains $\tau^+(n-1)$ and $\mathbb{R}_V^n$ // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 13:5 (2020), 559-567.
20. Мысливец С. Г. О ядрах Сеге и Пуассона в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$ // *Известия вузов. Математика*. 2019. № 1. С. 42-48.
21. Rakhmonov U. S., Abdullayev J. Sh. On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls // *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 548-557.
22. Khudayberganov G., Khalknazarov A.M., Abdullayev J.Sh., Laplace and Hua Luogeng operators // *Russian Mathematics (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat)* 2020, Vol **64**, no. 3, pp. 66-71. ©Allerton Press, Inc., 2020
23. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. Ч.2. 3-е изд., 1985 г., 464 с.
24. Bremermann H.-J. Die charakterisierung von regularitätsgebieten durch pseudokonvexe funktionen // *Schriftreihe Math. Inst. Munster*, № 5 (1951).

25. Hua Luogeng. On the theory of automorphic functions of a matrix variable I-geometrical basis // *American Journal of Mathematics*, Vol. **66**, No. 3 , pp. 470-488 (1944).

REFERENCES

1. Cartan É. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1935), pp. 116-162.
2. C.L.Siegel, Automorphic functions of several complex variables // *M.: Publishing house of foreign literature*, 1954. p. 168. (In Russian).
3. Hua Luogeng. Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains // *Inostr. Lit., M.*, 1959 (In Russian)
4. Pjateckii-Šapiro I.I. Geometry of classical domains and the theory of automorphic functions // *Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature*, 1961. p. 191. (In Russian).
5. Henkin G.M. The method of integral representations in complex analysis, Complex analysis-several variables – 1 // *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 7, VINITI, Moscow, 1985, 23–124
6. Xiao Ming. Regularity of mappings into classical domains // *Mathematische Annalen*, 2020, 378(3-4), pp. 1271-1309
7. Xiao M. Bergman-Harmonic Functions on Classical Domains // *International Mathematics Research Notices*, Vol. 00, No. 0, pp. 1–36 (2019).
8. Fuks B. A. Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables // *Физматгиз*, 1963.
9. Aizenberg L.A. Carleman Formulas in complex analysis // *Novosibirsk, Science*. 1990. 248 p. (In Russian)
10. Aizenberg, L.A., Yuzhakov, A.P. Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis. *Novosibirsk: Nauka*, 366 pp. (1979):
11. Khudayberganov G., Hidirov B.B., Rakhmonov U.S., Automorphisms of matrix balls *Acta NUUZ*, 2010, no. 3, 205-210 (In Russian)
12. Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ // *New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag*, (1980) 436 p.
13. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables, *Springer Monographs in Mathematics, Gewerbestrasse* // 11, 6330 Cham, Switzerland (2017), 429 p.
14. Sergeev A. G. On matrix and Reinhardt domains // *Preprint, Inst. Mittag-Leffler, Stockholm*, 7 pp. (1988).
15. Khudayberganov G., Kytmanov A.M., Shaimkulov B.A., Analysis in matrix domains // *Monograph. Krasnoyarsk: Siberian Federal University*, 2017. p. 296 (In Russian)
16. Khudayberganov G., Rakhmonov U. S. Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type // *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. **264** (2017), pp. 101-108, Springer, Cham.

17. Khudayberganov G., Rakhmonov U. The Bergman and Cauchy-Szegő kernels for matrix ball of the second type // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 7:3 (2014), 305-310.
18. Myslivets S. G. Construction of Szegő and Poisson kernels in convex domains // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, Volume 11, Issue 6, 792-795.
19. Khudayberganov G., Abdullayev J. Sh. Relationship between the Bergman and Cauchy-Szegő kernels in the domains $\tau^+(n-1)$ and $\mathbb{R}_{IV}^n$ // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 13:5 (2020), 559-567.
20. Myslivets S.G. On the Szegő and Poisson kernels in the convex domains in $\mathbb{C}^n$ // *Russian Mathematics (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat)* 2019, no. 1, pp. 42-48.
21. Rakhmonov U. S., Abdullayev J. Sh. On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls // *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 548-557.
22. Khudayberganov G., Khalknazarov A.M., Abdullayev J.Sh., Laplace and Hua Luogeng operators // *Russian Mathematics (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat)* 2020, Vol **64** , no. 3, pp. 66-71. Allerton Press, Inc., 2020
23. Shabat B.V. , Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables, *Nauka, Fiz. Mat. Lit., M.*, pp. 464. 1985 (in Russian)
24. Bremermann H.-J. Die charakterisierung von regularitätsgebieten durch pseudokonvexe runktionen // *Schriftreihe Math. Inst. Munster*, № 5 (1951).
25. Hua Luogeng. On the theory of automorphic functions of a matrix variable I-geometrical basis // *American Journal of Mathematics*, Vol. **66**, No. 3 , pp. 470-488 (1944).

Получено 05.04.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.81

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-32-56

Инварианты Жордана — Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли¹

К. С. Ворушилов (г. Москва)

Ворушилов Константин Сергеевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ksvorushilov@gmail.com

Аннотация

В теории бигамильтоновых систем известна обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко. В гипотезе говорится о существовании полных наборов полиномиальных функций в инволюции относительно пары естественно возникающих пуассоновых структур на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Данная гипотеза тесно связана с методом сдвига аргумента, предложенным А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [10]. В исследованиях, посвященных данной гипотезе, была обнаружена связь существования полного набора в биинволюции с алгебраическим типом пучка согласованных скобок Пуассона, заданного линейной и постоянной скобкой. Числа, описывающие алгебраический тип пучка скобок общего положения на двойственном пространстве к алгебре Ли, называются инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли. Понятие инвариантов Жордана–Кронекера было введено А. В. Болсиновым и Р. Zhang в [2]. Для некоторых классов алгебр Ли (например, полупростых алгебр Ли и алгебр Ли малой размерности) инварианты Жордана–Кронекера удалось вычислить, но в общем случае вопрос вычисления инвариантов Жордана–Кронекера для произвольной алгебры Ли является открытым. Задача вычисления инвариантов Жордана–Кронекера часто упоминается среди наиболее интересных нерешенных задач теории интегрируемых систем [4, 5, 6, 11].

В статье вычислены инварианты Жордана–Кронекера для серии $Bsp(2n)$ и на каждой алгебре серии построены полные наборы полиномов в биинволюции. Также вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ для любых n . Таким образом, вместе с результатами, полученными в [2] для $Bsl(n)$, данная статья составляет решение задачи вычисления инвариантов Жордана–Кронекера борелевских подалгебр классических алгебр Ли.

Ключевые слова: Алгебры Ли, интегрируемые гамильтоновы системы, метод сдвига аргумента, инварианты Жордана–Кронекера

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

К. С. Ворушилов. Инварианты Жордана — Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 32–56.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-31-90151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 512.81

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-32-56

**Jordan–Kronecker invariants of Borel subalgebras
of semisimple Lie algebras**

K. S. Vorushilov (Moscow)

Vorushilov Konstantin Sergeevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: ksvorushilov@gmail.com***Abstract**

In the theory of bi-Hamiltonian systems, the generalized Mischenko–Fomenko conjecture is known. The conjecture states that there exists a complete set of polynomial functions in involution with respect to a pair of naturally defined Poisson structures on a dual space of a Lie algebra. This conjecture is closely related to the argument shift method proposed by A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko in [10]. In research works devoted to this conjecture, a connection was found between the existence of a complete set in bi-involution and the algebraic type of the pencil of compatible Poisson brackets, defined by a linear and constant bracket. The numbers that describe the algebraic type of the generic pencil of brackets on the dual space to a Lie algebra are called the Jordan–Kronecker invariants of a Lie algebra. The notion of Jordan–Kronecker invariants was introduced by A. V. Bolsinov and P. Zhang in [2]. For some classes of Lie algebras (for example, semisimple Lie algebras and Lie algebras of low dimension), the Jordan–Kronecker invariants have been computed, but in the general case the problem of computation of the Jordan–Kronecker invariants for an arbitrary Lie algebra remains open. The problem of computation of the Jordan–Kronecker invariants is frequently mentioned among the most interesting unsolved problems in the theory of integrable systems [4, 5, 6, 11].

In this paper, we compute the Jordan–Kronecker invariants for the series $Bsp(2n)$ and construct complete sets of polynomials in bi-involution for each algebra of the series. Also, we calculate the Jordan–Kronecker invariants for the Borel subalgebras $Bso(n)$ for any n . Thus, together with the results obtained in [2] for $Bsl(n)$, this paper presents a solution to the problem of computation of Jordan–Kronecker invariants for Borel subalgebras of classical Lie algebras.

Keywords: Lie algebras, integrable Hamiltonian systems, argument shift method, Jordan–Kronecker invariants

Bibliography: 16 titles.

For citation:

K. S. Vorushilov, 2021, "Jordan–Kronecker invariants of Borel subalgebras of semisimple Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 32–56.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная или вещественная конечномерная алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k . Для функций на ее двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ естественным образом определена скобка Пуассона

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Данная пуассонова структура $\mathcal{A}_x$ (называемая также “скобкой Ли–Пуассона”) задается тензором типа $(2,0)$ на $\mathfrak{g}^*$, т.е. семейством билинейных форм на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$ линейно зависят от координат x_i точки $x \in \mathfrak{g}^*$.

Вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли задаются полным набором функций, находящихся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Полным набором считается набор, содержащий в себе n функций, дифференциалы которых линейно независимы почти всюду на $\mathfrak{g}^*$, где n равно сумме половины размерности орбиты общего положения и коразмерности орбиты, т.е. размерности ядра скобки:

$$n = \dim \ker \mathcal{A}_x + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_x = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g}).$$

Наибольший с практической точки зрения интерес представляют гамильтоновы системы, где полный набор в инволюции можно выбрать среди полиномиальных функций.

В 1978 году А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко предложили метод сдвига аргумента для построения полных коммутативных наборов [10]. В данной статье будет полезно использовать следующую переформулировку метода сдвига аргумента [2]. Для множества локально аналитических Ad^* -инвариантов $f_1, \dots, f_s$, $s = \text{ind } \mathfrak{g}$, определенных в окрестности элемента общего положения $a \in \mathfrak{g}^*$ таким образом, что $\{df_i(a)\}_{i=1}^s$ образуют базис $\text{Ann } a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\xi^* a = 0\}$, рассмотрим разложения в ряд Тейлора:

$$f_i(a + \lambda x) = f_i^{(0)} + \lambda f_i^{(1)} + \lambda^2 f_i^{(2)} + \dots$$

Коэффициенты $f_i^{(j)}$ находятся в инволюции относительно сразу двух пуассоновых структур: скобки Ли–Пуассона и скобки “с замороженным аргументом”

$$\{f, g\}_a(x) = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

для которой матрица соответствующей билинейной формы $(c_{ij}^k a_k)$ на $\mathfrak{g}$ постоянна.

С помощью метода сдвига аргумента А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко удалось построить полные наборы полиномов в инволюции для полупростых и некоторых других классов алгебр Ли. На основании этих результатов авторами была выдвинута гипотеза, полностью доказанная С. Т. Садэтовым в 2004 году:

ТЕОРЕМА 1 (С. Т. Садэтов). *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции.*

Доказательство теоремы 1 подробно описано, например, в [7]. В отличие от наборов, построенных методом сдвига аргумента, наборы полиномов, построенные методом Садэтова, не находятся в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Соответственно, был поставлен вопрос о возможности построения полного набора в биинволюции, т.е. в инволюции относительно обеих пуассоновых структур $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ (см. [4, Задача 12], а также [5] и [2]).

ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА МИЩЕНКО–ФОМЕНКО. *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в биинволюции, т.е. в инволюции как относительно скобки Ли–Пуассона $\mathcal{A}_x$, так и относительно скобки с замороженным аргументом $\mathcal{A}_a$, где $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент.*

Для некоторых классов алгебр Ли такие наборы были построены. В частности, для маломерных алгебр ($\dim \mathfrak{g} \leq 5$) а также для некоторых других классов наборы построены в [2]. Тем не менее, в общем случае обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко не доказана.

С методом сдвига аргумента тесно связано понятие инвариантов Жордана–Кронекера.

ТЕОРЕМА 2 (Жордана–Кронекера, см. [12]). Пусть A и B — две произвольные билинейные кососимметрические формы на линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда существует такой базис пространства V , в котором формы A и B одновременно приведены к блочно-диагональному виду $A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_n\}$, $B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_n\}$ с блоками следующих видов:

1. Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i \in \mathbb{K}$:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^T(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица;

2. Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i = \infty$:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J^T(0) & 0 \end{pmatrix};$$

3. Кронекеров блок:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1^T & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ -K_2^T & 0 \end{pmatrix},$$

где K_1 и K_2 — матрицы размера $(k_i - 1) \times k_i$ следующего вида:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из Теоремы 2 видно, что кронекеровы блоки имеют нечетный размер, а жордановы блоки всегда четного размера.

Известно (см. [2]), что для открытого всюду плотного множества пар (x, a) в $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ одинаково в том смысле, что для всех таких пар количество и размеры кронекеровых блоков и жордановых блоков для каждого собственного значения одни и те же. Это означает, что данные числа можно рассматривать как инварианты самой алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются числовые характеристики, описывающие разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения, а именно

- кронекеровы индексы k_i , каждый из которых соответствует кронекерову блоку размера $(2k_i - 1) \times (2k_i - 1)$, и их количество;
- жордановы индексы m_j , каждый из которых соответствует жорданову блоку размера $m_j \times m_j$, и их количество для каждого λ_l .

Для произвольной пары кососимметричных форм A и B значения λ_i , появляющиеся в жордановых блоках, являются корнями многочлена, который мы будем называть характеристическим многочленом пучка $A + \lambda B$. В случае алгебры Ли для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$, где $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x)$ – фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли, который по определению является наибольшим общим делителем пфаффианов всех диагональных миноров матрицы $\mathcal{A}_x$. Фундаментальный полуинвариант содержит существенную информацию об инвариантах Жордана–Кронекера алгебры Ли: сумма жордановых индексов, соответствующих λ_i равна $2l_{\lambda_i}$, где l_{λ_i} – кратность λ_i как корня многочлена $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Оказывается, в некоторых случаях знание инвариантов Жордана–Кронекера позволяет проверить обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко для алгебры Ли. Например, гипотеза справедлива, если алгебра Ли имеет кронекеров тип (то есть, в разложении Жордана–Кронекера пары форм общего положения на алгебре Ли присутствуют только кронекеровы блоки), так как в таком случае инвариантов и функций, полученных из них методом сдвига аргумента хватает для полноты набора.

Понятие инвариантов Жордана–Кронекера было введено А. В. Болсиновым и Р. Zhang в работе [2] (см. также [3]). Там же содержится более подробная информация о связи инвариантов Жордана–Кронекера алгебры Ли и существованием на ней полных наборов в биинволюции, а также приведены полные биинволютивные наборы для некоторых классов алгебр Ли.

Естественным образом возникает задача нахождения инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли. Для некоторых классов алгебр Ли, например, для полупростых, инварианты Жордана–Кронекера известны ([2]), однако в общем случае этот вопрос открыт. В работах специалистов в области конечномерных интегрируемых систем среди наиболее интересных открытых вопросов встречается следующая задача:

ЗАДАЧА (PROBLEM 5.6. [6], см. также [4, 5, 11]). *Вычислить инварианты Жордана–Кронекера для наиболее интересных классов алгебр Ли, в частности, для*

- a) полупрямых сумм $\mathfrak{g} + {}_{\rho}V$, где $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ – представление простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а V – коммутативный идеал;*
- b) борелевских подалгебр простых алгебр Ли;*
- c) параболических подалгебр простых алгебр Ли;*
- d) централизаторов сингулярных элементов простых алгебр Ли;*
- e) алгебр Ли малой размерности.*

Данная задача была решена для полупрямых сумм по стандартному представлению вида $so(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $sp(n) + (\mathbb{R}^n)^k$, а также в случаях $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ при $k \geq n$ и при $n = kl$ [15, 16], борелевских подалгебр $Bsl(n)$ [2], для алгебр Ли размерности не больше 5 (Pumei Zhang, см. версию статьи [2] в ArXiv), и для нильпотентных алгебр Ли размерностей 6 и 7 [8].

В настоящей статье вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр Ли $Bso(n)$ и $Bsp(2n)$. Этот результат, вместе с результатом [2] для $Bsl(n)$, является полным решением Задачи для борелевских подалгебр классических простых алгебр Ли (оставляя пункт *b*) открытым только для исключительных алгебр Ли). В случае $Bsp(n)$ также приведен полный набор полиномиальных функций в биинволюции. Стоит отметить, что возможность построения наборов для $Bsp(n)$ (см. ниже) и для $Bsl(n)$ ([2], см. также [1]) обеспечивается наличием достаточного числа функций, получаемых методом сдвига аргумента в инвариантах и полуинвариантах коприсоединенного представления. Таких сдвигов оказывается недостаточно в случае $Bso(n)$; поэтому вопрос о построении полного набора полиномиальных функций в биинволюции для данной серии остается открытым.

2. Случай $Bsp(2n)$

2.1. Общие сведения о серии

Группа $SP(2n)$ — группа матриц $2n \times 2n$ из $SL(2n)$, удовлетворяющих равенству $G\Omega G^T\Omega^{-1} = E$, где Ω — кососимметрическая форма стандартного вида. Элементы G имеют следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, AB^T = BA^T, CD^T = DC^T, AD^T - BC^T = E.$$

Борелевская подгруппа этой группы состоит из автоморфизмов, сохраняющих полуфлаг изотропных подпространств, или полный флаг попарно дополнительных подпространств (легко проверить, что подойдет стандартный флаг). Отсюда следует, что элемент G лежит в борелевской подгруппе, если $C = 0$, A — верхнетреугольная матрица; условия на B и D теперь выглядят так: $AB^T = BA^T, AD^T = E$.

Алгебра Ли такой группы состоит из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}, X_1 \text{ — верхнетреугольная матрица, } X_2 = X_2^T.$$

Скобка Ли в такой алгебре — стандартный коммутатор матриц. Нетрудно вычислить размерность такой алгебры Ли: $\dim \mathfrak{g} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Будем рассматривать $\mathfrak{g}^*$ как пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^T \end{pmatrix}, Y_1 \text{ — верхнетреугольная матрица, } Y_2 = Y_2^T. \quad (1)$$

Тогда отождествление $\mathfrak{g}$ с двойственным к ней пространством выглядит следующим образом:

$$\langle Y | X \rangle = \text{Tr } YX^T, Y \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}.$$

Данное отождествление не является каноническим. Однако если мы рассмотрим данную алгебру в ортонормированном базисе относительно скалярного произведения $\langle X_1 | X_2 \rangle = \text{Tr } X_1 X_2^T, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ (фактически это значит, что все повторяющиеся переменные в описанном матричном представлении элемента алгебры нужно домножить на $\frac{\sqrt{2}}{2}$), то такое отождествление каноническое. Здесь и далее мы будем опускать данные коэффициенты, подразумевая, что сделали замену вида $x' = \sqrt{2}x$ там, где это необходимо. Такая замена не повлияет на решение уравнений, учитывая, что нам интересны не сами решения, а размерности пространств решений.

Действие $\text{Ad}_G^* Y$ выглядит так:

$$\text{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} (A^{-1})^T Y_1 A^T + (A^{-1})^T Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & -BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где π — проекция на $\mathfrak{g}^*$, заключающаяся в подставлении нулей вместо некоторых элементов, а именно, всех в левом нижнем блоке, строго нижнетреугольных в левом верхнем блоке и строго верхнетреугольных в правом нижнем блоке.

Индекс алгебры $Bsp(2n)$ равен 0 для любых натуральных n . Это означает, что у данной алгебры Ли отсутствуют инварианты коприсоединенного представления, а значит, и кронекеровы блоки в разложении Жордана–Кронекера пучка общего положения. Следовательно, для нахождения инвариантов Жордана–Кронекера достаточно найти характеристический многочлен.

Полуинварианты коприсоединенного представления были найдены В. В. Трофимовым:

ТЕОРЕМА 3 (В.В. Трофимов, [13]). Пусть Δ_i - главный минор порядка i матрицы Y_2 в элементе Y вида (1). Тогда функции $\Delta_i, i = 1, \dots, n$, являются полуинвариантами неприсоединенного представления.

Каждый из Δ_i можно рассматривать как определитель матрицы квадратичной формы, при этом известно, что такой определитель является неприводимым многочленом.

2.2. Характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 4. Фундаментальным полуинвариантом алгебры Ли $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_g(x) = \prod_{i=1}^n \Delta_i$. Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения для $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Доказывать будем по частям.

Рассмотрим множество $\text{Sing} = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \text{Ann } y > \text{ind } \mathfrak{g}\}$. Данное множество может быть объединением компонент разной размерности, но в рассматриваемых нами случаях всегда имеется компонента коразмерности один Sing_0 (такая компонента отсутствует только в случае алгебры Ли кронекерова типа). Нетрудно заметить, что в случае, когда фундаментальный полуинвариант имеет вид $\mathbf{f}_g(x) = p_1^{l_1}(x) \cdot \dots \cdot p_m^{l_m}(x)$, многочлен, определяющий Sing_0 , является произведением тех же самых неприводимых компонент p_i , взятых с кратностью один: $\mathbf{f}_{\text{Sing}_0}(x) = p_1(x) \cdot \dots \cdot p_m(x)$. Чтобы понять, что полуинварианты Δ_i (и только они) являются компонентами p_i , докажем следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Регулярные элементы задаются уравнением $\mathbf{f}_g(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, как действует Ad^* на $\mathfrak{g}^*$ (2). При таком действии симметричную матрицу Y_2 с последовательными ненулевыми угловыми минорами можно привести к диагональному виду. Доказать это можно индукцией по размеру матрицы. Случай матрицы 1×1 очевидный, а дальше посмотрим на шаг:

$$\begin{pmatrix} Q & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L^T Q L & L^T(Qm + b) \\ m^T Q L + b^T L & b^T m + m^T b + c \end{pmatrix}.$$

Здесь описано действие верхнетреугольной матрицей $\begin{pmatrix} L & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На второй диагонали все можно обратить в ноль, отсюда следует утверждение.

Тогда при $A = E$ блочно-диагональное уравнение в левом верхнем блоке (2) примет вид $Y_1 + Y_2 B$. Выбором матрицы B (в силу ее симметричности и диагональности Y_2) можно добиться того, что все выражение будет равно нулю.

Рассмотрим для такого элемента уравнение $\text{ad}_X^* Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} -Y_2 X_2^T & X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 \\ 0 & X_2^T Y_2 \end{pmatrix} = 0, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}.$$

Под π понимается проекция, действующая таким же образом, что и в (2). Условие $\pi(Y_2 X_2^T) = \pi(Y_2 X_2) = 0$ при Y_2 диагональной эквивалентно условию $X_2 = 0$. Условие $X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0$ также можно интерпретировать как равенство нулю матрицы X_1 , так как слагаемые отличаются друг от друга по сути транспонированием, и одно из слагаемых - верхнетреугольная матрица, а другое - нижнетреугольная с одинаковыми элементами на диагонали.

Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений уравнения $\text{ad}_X^* Y = 0$ равна нулю, то есть, размерность аннулятора Y минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Сингулярные элементы описываются уравнением $\mathbf{f}_g(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно будет проверить два случая: когда равен нулю только определитель матрицы Y_2 (в этом случае матрица диагонализуема), и когда равен нулю любой другой минор (в этом случае матрица диагонализуема только блочно, в разложении будет присутствовать один блок 2×2).

- в первом случае выражение $Y_1 + Y_2 B$ можно сделать равным нулю лишь частично; правый нижний элемент в нуль обратить не получится. Рассмотрим для такого элемента уравнение $\text{ad}_X^* Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T - Y_2 X_2^T & X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 \\ * & X_2^T Y_2 + X_1 Y_1 - Y_1 X_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение в правом верхнем блоке решается аналогично регулярному случаю с тем лишь исключением, что условие на правый нижний элемент X_1 отсутствует. В силу этого $\pi(X_1^T Y - Y_1 X_1^T) = 0$. Уравнение $Y_2 X_2^T = 0$ решается аналогично регулярному случаю с тем же исключением (нет условия на правый нижний элемент матрицы X_2). Размерность пространства решений увеличивается на 2.

- будем считать, что нулю равен предпоследний диагональный минор. Тогда матрица Y_2 имеет диагональный блок $(n-2) \times (n-2)$ и блок 2×2 с элементами только на второй диагонали.

Рассмотрим выражение $Y_1 + Y_2 B$. В правом нижнем блоке произведение $Y_2 B$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg & bh \\ bf & bg \end{pmatrix},$$

откуда видно, что мы снова можем обратить в нуль все элементы, кроме, например, правого нижнего.

Теперь рассмотрим $\text{ad}_X^* Y = 0$. Уравнение $X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0$ вне правого нижнего блока 2×2 решается так же, как и в регулярном случае, а в блоке выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 y_2 + x_3 y_2 \\ x_3 y_2 + x_1 y_2 & 2x_2 y_2 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что $x_2 = 0$, а x_1 можно выразить через x_3 . Тогда X_1 и Y_1 - диагональные матрицы, следовательно, они перестановочны. Остается лишь уравнение $Y_2 X_2^T = 0$, в котором решение вне блока аналогично регулярному случаю, а в блоке аналогично уже рассмотренному - правый нижний элемент не имеет никаких условий.

Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений (то есть, аннулятора выбранного элемента Y) увеличивается на 2. Это означает, что в обоих случаях элемент Y принадлежит сингулярному множеству по поредению.

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В доказанных выше Утверждениях найден вид уравнения $\mathbf{f}_{\text{Sing}_0}(x)$, $x \in \mathfrak{g}^*$, задающего сингулярное множество. Строго говоря, найденный многочлен может не совпадать с фундаментальным полуинвариантом, если неприводимые компоненты (в нашем случае Δ_i) входят в полуинвариант с кратностью, отличной от единицы. Но размерность алгебры Ли $Bsp(2n)$ равна $n(n+1)$, что ровно в два раза больше суммы степеней Δ_i . по определению фундаментального полуинварианта, его степень для фробениусовой алгебры Ли равна половине размерности алгебры Ли. Значит, кратность каждой неприводимой компоненты может быть равна только единице. □

Число различных корней характеристического многочлена равно $\frac{n(n+1)}{2}$; все корни имеют кратность 1. Это означает, что сумма размеров жордановых блоков, отвечающих каждому корню характеристического многочлена λ_i , равна двум, то есть, каждому λ_i соответствует ровно один блок размера 2×2 .

ТЕОРЕМА 5 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bsp(2n)$). *Алгебры Ли серии $Bsp(2n)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $f_g(x + \lambda a) = \prod_{i=1}^n \Delta_i(x + \lambda a) = 0$, $x, a \in \mathfrak{g}^*$, имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ различных корней; каждому из них соответствует один жорданов индекс 2.*

2.3. Полный набор в би-инволюции

Как было показано выше, неприводимые компоненты фундаментального полуинварианта имеют кратность один, то есть, полуинвариант совпадает с уравнением, задающим сингулярное множество. Такая ситуация удовлетворяет условиям теоремы 6 в [2]:

ТЕОРЕМА 6 (Bolsinov–Zhang, [2]). *Пусть $\mathfrak{g}$ – фробениусова алгебра Ли, и пусть геометрическая степень $\text{Sing} \in \mathfrak{g}^*$ равна половине размерности алгебры Ли. Тогда пучок общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ не содержит жордановых блоков размера больше 2, все корни характеристического многочлена различны, и коэффициенты характеристического многочлена образуют полный набор функций в би-инволюции.*

Полный набор в би-инволюции может быть получен из соображений, используемых в теореме 6, то есть, мы можем взять набор симметрических полиномов от корней характеристического многочлена. Однако полный набор, эквивалентный данному, можно получить более наглядно. Возьмем скобку Ли двух элементов

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} AA_1 - A_1A & AB_1 + BC_1 - A_1B - B_1C \\ 0 & CC_1 - C_1C \end{pmatrix}.$$

Если мы возьмем ненулевыми только элементы B и B_1 , то увидим, что они коммутируют. Так как по определению скобка Ли–Пуассона задается матрицей $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$, из вышесказанного следует, что в этой матрице мы будем иметь правый нижний блок нулей размера $n \times n$, что в точности означает, что в качестве функций в би-инволюции мы можем взять линейные функции от элементов матрицы B . Так как алгебра Ли фробениусова, нам нужно найти $\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}$ функций. Именно столько функций мы и нашли, так как размерность B равна половине размерности алгебры.

Стоит отметить, что данный набор был ранее построен А. А. Короткевичем в [9], но рассматривался только как набор в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Однако вид матрицы $\mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k)$ будет таким же, как и $\mathcal{A}_x$, а именно, матрица будет иметь такой же блок нулей, то есть построенные функции действительно находятся в инволюции относительно обеих пуассоновых структур.

3. Случай $Bso(2k)$

3.1. Общие сведения о серии

Элементами группы Ли $BSO(n)$ являются матрицы из $SL(n)$, удовлетворяющие равенству $G\Sigma G^T \Sigma^{-1} = E$, где Σ – симметричная форма стандартного вида, и сохраняющие фиксированный полуфлаг изотропных пространств $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k$ ($n = 2k$ или $n = 2k + 1$).

При $n = 2k$ в качестве такой формы мы выберем следующую:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент G имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1T} \end{pmatrix}, \quad A - \text{верхнетреугольная}, \quad BA^T + AB^T = 0.$$

Элементы $X \in Bso(2k)$ и $Y \in Bso(2k)^*$ в матричном виде запишутся так:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^* \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^* \end{pmatrix},$$

где матрицы X_1 и Y_1 верхнетреугольные, X_2 и Y_2 - кососимметричные, а $*$ обозначает классическое транспонирование матрицы, $R^* = R^T$. В данном случае снова рассматривается отождествление $\langle Y|X \rangle = \text{Tr}(YX^T)$; так же, как и в предыдущем случае оно неканоническое, но как и в предыдущем случае, в рамках данной статьи каноничность несущественна (матрица Грама соответствующего скалярного произведения является скалярной матрицей).

$$\text{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} A^{-1T} Y_1 A^T + A^{-1T} Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоке, отмеченном $*$, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Иногда наряду с вышеописанным представлением (которое будет далее называться стандартным) полезно рассматривать представление, использованное В. В. Трофимовым в [13]. В таком представлении (на примере элемента Y) Y_2 - кососимметричная относительно побочной диагонали, а Y_1^* - матрица, получающаяся из Y_1 транспонированием относительно побочной диагонали; то же самое справедливо и для соответствующих подматриц элемента X . Вся матрица Y в таком представлении кососимметрична относительно побочной диагонали. В таком представлении удобно определять полуинварианты.

Данные представления изоморфны. Изоморфизм задается так:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 S \\ 0 & -SY_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. Очевидно, что $\phi^2 = \text{Id}$. По ходу статьи, используется стандартное представление; в случае необходимости использовать представление, описанное выше, мы будем использовать отображение ϕ .

Размерность $Bso(4s)$ равна $4s^2$; размерность $Bso(4s+2)$ равна $4s^2 + 4s + 1$. Индекс $Bso(4s)$ равен нулю, что означает, что алгебры Ли данной серии фробениусовы, и задача нахождения инвариантов Жордана–Кронекера сводится к задаче нахождения характеристического многочлена; индекс $Bso(4s+2)$ равен единице.

3.2. Полуинварианты $Bso(2k)$

Рассмотрим матрицу $\phi(Y)$, $Y \in Bso(2k)^*$. Функция J_{2i-1} вычисляется следующим образом:

1. Вычеркнем первые $2i - 1$ строк и последние $2i - 1$ столбцов $\phi(Y)$;

2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом $j, j = 2i, \dots, k$;
3. считаем определитель подматрицы, стоящей на пересечении вычеркнутых строк и столбцов;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители.

Аналогичным образом определяются функции J_{2i} .

Рассмотрим также функции Δ_{2i} , которые можно определить как угловые миноры матрицы $Y_2 S$, проходящие через первые $2i$ строк и последние $2i$ столбцов.

ТЕОРЕМА 7 (Трофимов, [13]). *Функции Δ_{2i} при $i \leq s$, и J_{2i-1} при $i \leq s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k)$, $k = 2s$ или $k = 2s + 1$. Функции J_{2s} являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 2)$.*

Многочлены Δ_{2i} приводимы как определители кососимметричных матриц: $\Delta_{2i} = (P_i)^2$; многочлены P_i в свою очередь неприводимы. Многочлены J_{2i-1} , являющиеся суммами более чем одного минора, неприводимы. Для проверки этого факта достаточно рассмотреть матрицу Y такую, что $\phi(Y)$ имеет следующий вид:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2' \\ 0 & -Y_1^t \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & l \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} p & & & & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & & & & & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & \alpha_{2i-2} & 0 & & & \\ & & \beta & 0 & -\alpha_{2i-2} & & 0 & \\ & & 0 & -\beta & 0 & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & \dots & & & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

где t - транспонирование относительно второй диагонали, элемент λ в матрице Y_1 расположен на строке $2i - 1$ и столбце $2i$; в матрице Y_2' на диагонали выше побочной расположено $2i - 1$ ненулевых элементов.

Функция J_{2i-1} от такого элемента равна $\alpha_2^2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{2i-2}^2 lp + \alpha_1^2 \cdot \alpha_3^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{2i-3}^2 \lambda \beta$. Такой многочлен, очевидно, неприводим.

С другой стороны, если J_{2i-1} состоит из одного слагаемого-определителя, то такая функция приводима и представляет собой произведение $P_i \cdot Q_i$, где Q_i неприводим (как корень из определителя кососимметричной матрицы).

J_{2s} разложим похожим образом: $J_{2s} = P_s \cdot Q_{s+1}$, где множитель Q_{s+1} неприводим. В этом несложно убедиться, если заметить, что J_{2s} по сути своей является определителем матрицы $(2s + 1) \times (2s + 1)$ с кососимметричной подматрицей размера $2s \times 2s$ и практически произвольными оставшимися строкой и столбцом.

3.3. Серия $Bso(4s)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 8. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Перед доказательством теоремы следует отметить, что P_s делит J_{2s-1} , соответственно в представлении выше можно заменить J_{2s-1} на $P_s \cdot Q_s$.

Как и в разделе 2.2, нам нужно проверить, что нули указанных многочленов действительно задают сингулярное множество. Однако в данном случае сумма степеней многочленов, взятых с кратностью один, меньше половины размерности алгебры, то есть, нам необходимо понять кратность, с которой каждая неприводимая компонента входит в $\mathbf{f}_g(x)$. Доказательство теоремы заключается в проверке двух утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_g(Y) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было указано выше, любой элемент алгебры $Bso(2k)^*$ задается двумя матрицами размера $k \times k$: верхнетреугольной Y_1 и кососимметричной Y_2 .

Система уравнений, задающая аннулятор Y , выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0; \\ \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где π - проекция на пространство верхнетреугольных матриц.

В случае $Bso(4s)$ элемент общего положения Ad^* -преобразованием может быть приведен к такому виду: матрица Y_2 имеет вид стандартной кососимметричной, а матрица Y_1 имеет вид *проекции стандартной кососимметричной формы на пространство верхнетреугольных матриц* - то есть, блочно-диагональный вид с блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Первое уравнение эквивалентно условию $X_1^T Y_2 = (X_1^T Y_2)^T$. Так как Y_2 блочно-диагональна с блоками 2×2 , а X_1 верхнетреугольная, произведение $X_1^T Y_2$ верхнетреугольно, что означает, что все элементы вне блоков на диагонали равны нулю. В блоках же стоят условия $X_{ii}^T \alpha_i \Omega = -\alpha_i \Omega X_{ii}$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из этого условия следует, что диагональные блоки X_{ii} представляют собой верхнетреугольные матрицы со следом 0.

Рассмотрим второе уравнение (3). Заметим, что X_1 и Y_1 имеют блочно-диагональный вид с одинаковыми блоками, поэтому их коммутатор тоже будет блочно-диагональным с теми же блоками. Удобно сначала рассмотреть все элементы вне этих блоков; все они содержатся в слагаемом $Y_2 X_2$; так как Y_2 блочно-диагональна с невырожденными блоками 2×2 , то условие $Y_2 X_2 = 0$ вне диагональных блоков по сути означает, что все элементы X_2 вне диагональных равны нулю. Рассмотрим уравнения, возникающие в блоках 2×2 .

$$X_{ii}^T \Lambda_i - \Lambda_i X_{ii}^T + \alpha \Omega X_{2,ii} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i x_{i1} \\ 0 & \beta_i x_{i2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_i x_{i2} & -\beta_i x_{i1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_i x_{2,i} & 0 \\ 0 & -\alpha_i x_{2,i} \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, равенство выполняется только при $x_{i1} = x_{i2} = x_{2,i} = 0$. Отсюда получаем, что все элементы X равны нулю, значит, размерность пространства решений (иначе говоря, аннулятора Y) равна нулю, то есть, минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Данная схема рассмотрения будет использоваться во всех случаях $Bso(n)$: мы будем сводить систему уравнений к некоторой блочно-диагональной, и рассматривать получившиеся блоки. Для "стандартных" блоков 2×2 рассмотрение ограничивается приведенным выше. Более того, условие того, что коммутатор двух матриц X и X' с соответствующими подматрицами блочно-диагонального вида равен нулю, сводится к условиям*

на соответствующие блоки на диагоналях; элементы с ненулевыми блоками разной “высоты” (то есть, разного расположения на блочной диагонали) коммутируют. Поэтому почти всегда будет удобно свести решение к рассмотрению одного блока, что аналогично рассмотрению случая алгебры Ли меньшей размерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вид, к которому приводятся элементы, удобен тем, что для элементов такого вида J -полуинварианты содержат всего одно ненулевое слагаемое, причем для любого i J_{2i-1} зависит только от одного элемента Y_1 - от β_i . Причем приведение к данному виду никак не использует условия $J_{2i-1} \neq 0$, соответственно, при равенстве нулю одного из J_{2i-1} элемент все еще может быть приведен к описанному блочно-диагональному виду, но соответствующий β_i будет равен нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_g(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y , соответствующего равенству нулю одного из $(P_i), i = 1, \dots, s-1$, является двумерной коммутативной подалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 2 следует, что при $J_{2i-1} = 0$ достаточно проверить уравнение (4) при $\beta_i = 0$. Очевидно, размерность пространства решений увеличится на 2 за счет неопределенности x_{i1} и x_{i2} .

В случае, если $\Delta_{2s} = 0$, матрицу Y снова можно привести к виду, описанному в Утверждении 3 за исключением последних блоков 2×2 в обеих матрицах: $Y_{2,s}$ будет нулевым, а $Y_{1,s}$ - произвольным верхнетреугольным. Очевидно, что вне нижнего диагонального блока 2×2 все условия аналогичны ранее рассмотренным; поэтому, согласно Замечанию 1 можно рассмотреть случай $Bso(4)$.

Первое уравнение (3) тавтологическое, а второе имеет вид

$$\pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T) = \begin{pmatrix} -x_2 y_2 & x_1 y_2 - x_3 y_2 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

размерность пространства решений данного уравнения равна единице, и еще единица получается из отсутствия условий на X_2 .

В случае, когда равен нулю один из $\Delta_{2i}, i \neq s$, матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду, где все блоки стандартные 2×2 кроме одного блока 4×4 , имеющего вид $W = \begin{pmatrix} 0 & \gamma E \\ -\gamma E & 0 \end{pmatrix}$. Система сводится к блочно-диагональной, поэтому в соответствии с Замечанием 1 рассмотрим случай $Bso(8)$.

Выберем такой Y :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что данный элемент действительно является сингулярным, при этом из определенных полуинвариантов в нуль обращается только Δ_2 . Аннулятор данного элемента имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная подалгебра, очевидно, коммутативна. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Утверждение 4 означает, что если Y является точкой общего положения множества решений уравнения $P_1 \cdot \dots \cdot P_{s-1}(x) = 0$, то $\dim \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g} = 2$ и $\text{ind } \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g} = 2$. В этой ситуации можно воспользоваться следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([2], Proposition 13). Пусть $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ - пара общего положения, λ_i - один из корней характеристического уравнения $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$. Положим $Y = x + \lambda_i a \in \text{Sing}$.

1. Число жордановых блоков, отвечающих корню λ_i , равно

$$\frac{1}{2}(\dim \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g}).$$

2. Число нетривиальных жордановых блоков (то есть, размера 4×4 и больше), отвечающих корню λ_i , равно

$$\frac{1}{2}(\text{ind Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g}).$$

В рассматриваемой ситуации каждому корню характеристического многочлена соответствует один жорданов блок. Из Предложения 1 следует, что каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0$ соответствует один нетривиальный жорданов блок; складывая суммы степеней P_i , получаем, что количество различных корней, возникающих в данных компонентах, равно $\frac{s(s-1)}{2}$. Корням уравнений $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0$ ($s(s+1)$ различных) могут соответствовать и тривиальные блоки. Исходя из этого, можем получить оценку снизу суммы размеров жордановых блоков для всех корней характеристического многочлена: $2 \cdot s(s+1) + 4 \cdot \frac{s(s-1)}{2} = 4s^2$, что равно размерности алгебры Ли, то есть, оценке сверху такой суммы. Следовательно, каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, соответствует один жорданов блок размера 4, то есть, кратность неприводимой компоненты P_i фундаментального полуинварианта равна двум. Аналогично, корням $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s$, соответствуют тривиальные жордановы блоки, следовательно, неприводимые компоненты $J_{2i-1}(x)$ входят в полуинвариант с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального инварианта (соответственно, характеристического многочлена) полностью определен. $\square$

В процессе доказательства Теоремы 8 мы фактически нашли число и размеры жордановых блоков для каждого корня характеристического многочлена, то есть, доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s)$). Алгебры Ли $Bso(4s)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = 0$ пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2; каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.

3.4. Серия $Bso(4s+2)$: кронекеров блок

Алгебры Ли данной серии имеют смешанный тип, то есть, в разложении Жордана–Кронекера пары форм общего положения будут присутствовать кронекеровы блоки. Так как индекс алгебры равен единице, такой блок будет единственным.

ЛЕММА 1. Справедлива оценка кронекерова индекса:

$$k_1 \leq 2s + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ad^* -инвариантом данной алгебры является функция $f(x) = \frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$. Ранее было показано, что $J_{2s} = P_s \cdot Q_{s+1}$, а значит, дробь $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ можно сократить.

Степень Q_{s+1} как многочлена равна $s+1$, степень P_s равна s . Согласно ([2], Section 6, также см. [14]), в случае рационального инварианта индекс k_i может быть оценен сверху суммой степеней числителя и знаменателя: $k_1 \leq \deg P_s + \deg Q_{s+1} = 2s + 1$. $\square$

ЛЕММА 2. Кронекеров индекс равен $2s + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом сдвига аргумента. Рассмотрим такой элемент Y_x (записанный в стандартном представлении):

$$Y_{1,x} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * & y_{11} \\ 0 & * & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{12} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{1s} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{2,x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & y_{22} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_s & 0 & y_{2s} \\ 0 & -y_{21} & 0 & -y_{22} & 0 & -y_{2s} & 0 \end{pmatrix}.$$

На месте символов $*$ могут быть любые элементы, такой элемент может быть выбран регулярным (подробнее об этом в следующем разделе). Инвариант $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ представляет собой частное определителя матрицы, получаемой из $Y_{2,x}$ заменой последней строки на последнюю строку $Y_{1,x}$, и углового минора порядка $2s$ матрицы $Y_{2,x}$. Легко заметить, что он имеет такой вид:

$$\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}} = \sum_{i=1}^s \frac{y_{1i}y_{2i}}{\alpha_i}.$$

Рассмотрим его сдвиг на элемент Y_a : $Y_{1,a}$ и $Y_{2,a}$ имеют такой же вид, что и $Y_{1,x}$ и $Y_{2,x}$; $\alpha_{1,a} = \dots = \alpha_{s,a} = 1, y_{1s,a} = y_{2s,a} = 1$, остальные элементы равны нулю.

Для получения матрицы градиентов сдвигов достаточно взять градиент самой функции, сделать замену $x \rightarrow a + \lambda x$ и дифференцировать компоненты в точке $\lambda = 0$.

В полученной матрице размера $3s$ мы будем рассматривать группы столбцов, соответствующие тройкам $(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{y_{1i}}, \mathbf{v}_{y_{2i}})$, где элементу, например, y_{1i} соответствует столбец с первым элементом - частной производной инварианта по $y_{1i,a}$, и так далее. Тройки, соответствующие $i \neq s$, имеют ранг 2 (легко проверить, что $y_{2i}\mathbf{v}_{y_{1i}} - y_{1i}\mathbf{v}_{y_{2i}} = 0$), и, вообще говоря, представляют собой векторы

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ (-1)^2 \alpha_i^2 \\ \vdots \\ (-1)^2 \alpha_i^{2s+1} \end{pmatrix},$$

где $P = y_{1i}$ или $P = y_{2i}$. Из каждой такой тройки мы можем убрать по одному вектор-столбцу, оставив таким образом $2s+1$ векторов. Теперь для проверки утверждения достаточно доказать, что полученная матрица размера $(2s+1) \times (2s+1)$ невырождена.

Рассмотрим тройку $(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}})$. Все элементы данных вектор-столбцов, начиная с четвертого, представляют собой произведение некоторого многочлена на α_s ; если $\alpha_s = 0$, получаем

$$(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y_{2s} & y_{1s} \\ -y_{1s}y_{2s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Такая матрица имеет ненулевой определитель.

Проверим, что $(2s - 2) \times (2s - 2)$ -подматрица координат оставшихся столбцов, начиная с четвертой, невырождена. Столбцы $\mathbf{v}_{\alpha_i}$ представляют собой векторы

$$(0 \quad 0 \quad (-1)y_{1i}y_{2i} \quad (-1)^2 2\alpha_i y_{1i}y_{2i} \quad \dots \quad (-1)^{2s-2} (2s - 2)\alpha_i^{2s-3} y_{1i}y_{2i})^T,$$

соответственно, можно вынести $y_{1i}y_{2i}$ за знак определителя. Получаем подматрицу такого вида (нас интересуют вектор-столбцы, начиная с четвертой координаты):

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1^2 & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots \\ -3\alpha_1^2 & -\alpha_1^3 & -3\alpha_2^2 & -\alpha_2^3 & \dots \\ 4\alpha_1^3 & \alpha_1^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_2^4 & \dots \\ -5\alpha_1^4 & -\alpha_1^5 & -5\alpha_2^4 & -\alpha_2^5 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Определитель такой матрицы равен $\alpha_1^4 \cdot \dots \cdot \alpha_{s-1}^4 \cdot \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)^4$ и, очевидно, в общей ситуации не равен нулю.

Таким образом мы доказали независимость сдвигов инварианта. Подпространство, натянутое на дифференциалы сдвигов, соответствует правому нижнему нулевому блоку в кронекеровом блоке, поэтому доказанное означает, что размер этого нулевого блока (равный кронекерову индексу) не меньше, чем $2s + 1$. $\square$

3.5. Серия $Bso(4s + 2)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 10. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 2)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения является многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Как и выше, разобьем доказательство теоремы на два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично Утверждению 3.

Если $\Delta_2, \dots, \Delta_{2s-2}$ не равны нулю, то Ad^* -преобразованием мы можем привести $(2s - 2) \times (2s - 2)$ подматрицу матрицы Y_2 к стандартному виду.

При $\Delta_{2s} \neq 0$ возможно получить блочно-диагональное представление с s блоками 2×2 и блоком 1×1 в самом низу диагонали, нулевым в кососимметричной матрице и ненулевым в верхнетреугольной.

В соответствии с замечанием 1 рассмотрим блок 1×1 отдельно. В матрице X_1 соответствующий элемент x_{11} будет свободным: в первом уравнении системы (3) условие на x_{11} не появляется за счет равенства нулю соответствующего блока в матрице Y_2 ; во втором уравнении (3) при вычислении коммутатора в блоке 1×1 получим условие вида $x_{11}\gamma - \gamma x_{11} = 0$, то есть, условие выполняется при любых x_{11} . Отсюда получаем, что аннулятор элемента общего положения такого вида имеет размерность 1.

При $\Delta_{2s} = 0$ получим похожее блочно-диагональное представление с $s - 1$ блоками 2×2 и блоком 3×3 в самом низу диагонали.

Рассмотрим этот блок отдельно, то есть, рассмотрим случай $Bso(6)$ с $\Delta_2 = 0$. Элемент Y в таком случае можно привести к следующему виду:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений (3) для данного элемента, находим аннулятор данного элемента:

$$X_1 = 0, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{21} & 0 \\ -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что размерность аннулятора снова равна единице. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_g(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y , соответствующего равенству нулю одного из $P_i, i = 1, \dots, s-1$, является трехмерной коммутативной подалгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если $J_{2i-1} = 0$, рассуждение полностью повторяет аналогичное из Утверждения 4.
2. Если $\Delta_{2s} \neq 0$, но $\Delta_{2i} = 0, i \neq s$, то нахождение аннулятора проводится по аналогии с $Bso(4s)$: матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду с множеством блоков 2×2 , одним блоком 4×4 , а также одним блоком 1×1 , который был рассмотрен в предыдущем Утверждении. То же самое будет, если мы рассмотрим ситуацию, когда $\Delta_{2s} = 0$, но $\Delta_{2s-2} \neq 0$ (при этом какой-то еще Δ -полуинвариант равен нулю). В таком случае “хорошим” видом будет являться вид с множеством 2×2 блоков, одним 4×4 блоком, и одним 3×3 блоком, ситуация в котором разобрана в предыдущем утверждении. Аннулятор будет коммутативной подалгеброй в соответствии с Замечанием 1 и уже доказанной коммутативностью двумерной подалгебры, отвечающей блоку 4×4 .
3. Ситуация, когда $\Delta_{2s-2} = \Delta_{2s} = 0$ не сводится ни к одной предыдущей, так как в блочно-диагональном разложении появляется блок размера 5×5 .

Рассмотрим последний случай отдельно. Y можно привести к виду (стандартное представление)

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & -b & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим такой элемент:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все полуинварианты, входящие как множители в фундаментальный, кроме Δ_{2s-2} , не равны нулю.

Решая систему уравнений (3) для такого элемента, получаем, что аннулятор состоит из элементов вида

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & -x_3 \\ -x_1 & 0 & x_3 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что такие элементы составляют коммутативную подалгебру размерности 3, что не является минимальной размерностью аннулятора в данном случае; следовательно, элемент Y сингулярен. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Снова воспользуемся Предложением 1, откуда получаем, что каждому корню $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = 0$ соответствует один жорданов блок (так как размерность аннулятора любого сингулярного элемента общего положения больше индекса алгебры Ли на 2); при этом для решений уравнений $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, жордановы блоки имеют размер, больший 2×2 ; остальным корням могут соответствовать тривиальные жордановы блоки. Сумма жордановых индексов равна $\dim \mathfrak{g} - \sum_{i=1}^{\text{ind } \mathfrak{g}} (2k_i - 1) = 4s^2 + 2s$; несложно проверить, что такая сумма достигается только в случае, если корням $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, соответствуют блоки размера 4×4 , а корням $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s$ - блоки размера 2×2 . Значит, неприводимые компоненты P_i входят в фундаментальный инвариант с кратностью 2, а компоненты J_{2i-1} - с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального полуинварианта полностью определен. $\square$

ТЕОРЕМА 11 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$). *Алгебры Ли $Bso(4s+2)$ имеют смешанный тип. Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов блок размера 2, а каждому корню кратности 2 - один жорданов блок размера 4. Также инвариантом Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$ является один кронекеров индекс, равный $2s+1$.*

4. Случай $Bso(2k+1)$

4.1. Общие сведения о серии

Общая конструкция была описана в разделе 3.1. В случае группы $BSO(2k+1)$ форма Σ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где единичные матрицы E имеют размер $k \times k$. Элемент $G \in BSO(2k+1)$ устроен следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} A & -Ae & B \\ 0 & 1 & e^T \\ 0 & 0 & A^{-1T} \end{pmatrix},$$

A - верхнетреугольная матрица $k \times k$, B - матрица размера $k \times k$ такая, что $BA^T + Ae e^T A^T + AB^T = 0$.

Мы снова используем отождествление $\langle Y|X \rangle = \text{Tr}(YX^T)$; $X \in Bso(2k+1)$, $Y \in Bso^*(2k+1)$ имеют одинаковый вид. Например, для Y :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 \\ 0 & 0 & -y^T \\ 0 & 0 & -Y_1^T \end{pmatrix},$$

где Y_1 и Y_2 - матрицы $k \times k$, y - вектор длины k .

Коприсоединенное представление Ad^* задается следующим образом:

$$\pi \begin{pmatrix} A^{-1^T} Y_1 A^T - A^{-1^T} y e^T A^T + & A^{-1^T} y + A^{-1^T} Y_2 e & A^{-1^T} Y_2 A^{-1} \\ + A^{-1^T} Y_2 B^T & * & e^T Y_2 A^{-1} - y^T A^{-1} \\ * & * & \\ * & * & B Y_2 A^{-1} + A e y^T A^{-1} - A Y_1^T A^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоках, отмеченных *, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Так же, как и для случая $Bso(2k)$, полуинварианты проще описать в представлении, используемом В. В. Трофимовым в [13]. Изоморфизм представлений задается следующей формулой:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 S \\ 0 & 0 & -y^T S \\ 0 & 0 & -S Y_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. В таком представлении Y представляет собой верхнетреугольную матрицу, кососимметричную относительно побочной диагонали.

Размерность в случае $Bso(2s+1)$ равна $4s^2+2s$, а в случае $Bso(2s+3) - 4s^2+6s+2$. Индекс для алгебр данной серии равен нулю, то есть, алгебры фробениусовы, и для нахождения инвариантов Жордана–Кронекера достаточно найти характеристический многочлен.

4.2. Полуинварианты $Bso(2k+1)$

В целом конструкция полуинвариантов не отличается от таковой для $Bso(2k)$. Единственное различие появляется в алгоритме получения J -полуинвариантов (для элемента $\phi(Y), Y \in Bso(2k+1)$):

1. Вычеркнем первые $2i-1$ строк и последние $2i-1$ столбцов $\phi(Y)$;
2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом $j, j = 2i, \dots, k+1$;
3. на пересечении вычеркнутых строк и столбцов получилась матрица, считаем ее определитель;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители с коэффициентом 1, кроме определителя, соответствующего $j = k+1$ - его добавляем в общую сумму с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Все рассуждения о независимости и неприводимости, приведенные для полуинвариантов $Bso(2k)$, справедливы и в данном случае.

ТЕОРЕМА 12 (Трофимов, [13]). *Функции Δ_{2i} при $i \leq s$, и J_{2i-1} при $i \leq s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k+1), k = 2s$ или $k = 2s+1$. Функция $J_{2s+1} = \Delta_{2s+2}$ является полуинвариантом коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+3)$.*

4.3. Серия $Bso(4s + 1)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 13. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 1)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot P_s \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $\Delta_{2s} \neq 0$, то Ad^* -преобразованием можем привести элемент Y к такому виду, чтобы матрица Y_2 имела блочно-диагональный вид с блоками размера 2 (если остальные $\Delta_{2i} \neq 0$), либо с одним блоком размера 4 (если один из $\Delta_{2i}, i \neq s$, равен нулю), а вектор-столбец y был нулевым.

Система уравнений на аннулятор будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2 - y x^T) = 0; \\ X_1^T y + Y_2 x = 0; \\ X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, из условия $y = 0$ и второго уравнения следует, что $x = 0$. После этого оставшиеся уравнения в точности повторяют таковые для случая $Bso(4s)$, соответственно, все рассуждения, описанные выше для характеристического многочлена $Bso(4s)$, верны и для данного случая.

Единственная ситуация, отличающая данный случай от $Bso(4s)$ - ситуация, когда $\Delta_{2s} = 0$. Нужно проверить, что в этом случае ранг падает. В данном случае Ad^* -преобразованием матрицу Y_2 возможно диагонализировать с несколькими блоками 2×2 стандартного вида и одним нулевым блоком 2×2 ; вектор-столбец y можно сделать нулевым везде, кроме последних двух элементов. Достаточно будет рассмотреть случай $Bso(5)$, решив систему (5) для такого элемента Y :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 & y_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 & -y_5 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 & -y_3 \end{pmatrix}.$$

Легко устанавливается, что ранг системы (5) будет равен четырем, размерность аннулятора, следовательно, равна двум. Элемент Y сингулярен.

Аналогично рассмотренным выше случаям, воспользуемся Предложением 1, что позволит найти размеры жордановых блоков, а вместе с этим и кратности корней и соответствующих им неприводимых компонент. $\square$

ТЕОРЕМА 14 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s + 1)$). *Алгебры Ли $Bso(4s + 1)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка общего положения имеет $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2 и $s(s+2)$ корней кратности 1. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

4.4. Серия $Bso(4s + 3)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 15. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 3)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_s)^2 \cdot P_{s+1} \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Для данной серии J_{2s+1} также является полуинвариантом, но (формально) в разложении $\mathbf{f}_g(x)$ на множители не участвует, так как $\Delta_{2s+2} = J_{2s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. При $\Delta_{2i} \neq 0, i = 1, \dots, s$, Y_2 приводится к стандартному виду: стандартные кососимметричные блоки размера 2, и один (последний, как в $Bso(4s+2)$) нулевой блок размера 1; у вектор-столбца y первые $2s$ элементов нулевые, а последний произвольный; Y_1 блочно-диагональна с блоками 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и одним нулевым одномерным.
2. При $\Delta_{2s+2} = 0$ можно сделать почти то же самое, но последний элемент вектора y при таком условии должен быть равен нулю; тогда матрица Y_1 будет иметь уже ненулевой блок размера 1. Ранг в таком случае упадет на 2.
3. Все остальные случаи, когда ранг падает на 2 за счет обращения в нуль J -полуинварианта, эквивалентны описанным для предыдущих серий, то есть, в блоке размера 2 (уравнение (4)) за счет равенства нулю Λ образуются две свободные переменные.
4. В случае, если равен нулю любой блок Δ_{2i} , кроме Δ_{2s} , задача сводится к известной: все блоки размера 2, блок размера 4, и последний блок размера 1. Ранг падает на 2 за счет блока 4×4 , соответствующий аннулятор является коммутативной подалгеброй.
5. Если $\Delta_{2s} = 0$, то ситуация сводится к ситуации с блоком размера 3, однако за счет вектора y (и того, что размерности пространства решений должны быть разные) не получится просто свести все к случаю $Bso(4s+2)$.

Все описанные случаи достаточно рассмотреть для маленькой алгебры Ли $Bso(7)$. Действительно, посмотрим на систему (5): если y имеет первые k координат равными нулю, то $X_1^T y$ будет иметь те же координаты равными нулю, и (если их четное число) эти же k координат будут равными нулю в векторе x (это следует из уравнения $X_1^T y + Y_2 x = 0$); тогда “добавка” $-yx^T$ в первом уравнении будет влиять только на последний блок (размера 1 или 3, как описано выше), а вне этого блока это уравнение ничем не будет отличаться от второго уравнения системы (3).

Итак, рассмотрим сначала регулярный случай:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Случай отличается от аналогичного $Bso(6)$ наличием векторов x и y и условием на них.

Решая систему (5), легко убедиться, что при $y_0 \neq 0$, размерность пространства ее решений равна нулю; если же $y_0 = 0$, то размерность равна двум.

В случае $\Delta_2 = 0$ нам нужно найти аннулятор следующего элемента:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{11} & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & y_{12} & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{11} & -y_{12} & -y_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аннулятор двумерен, базисные элементы такие:

$$X_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & \frac{y_0}{y_2}x_{15} & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & x_{15} & -\frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 & 0 & -\frac{y_{11}}{y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} & \frac{y_{11}}{y_2}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_0}{y_2}x_{15} & \frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & -x_{15} & 0 \end{pmatrix};$$

два этих базисных элемента коммутативны. Таким образом, все возможные ситуации сингулярных элементов общего положения рассмотрены. Для доказательства теоремы осталось лишь воспользоваться Предложением 1 $\square$

ТЕОРЕМА 16 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+3)$). *Алгебры Ли данной серии имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $(s+1)(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s+1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

5. Заключение

Среди направлений дальнейших исследований в данной области большой интерес представляет задача нахождения полных наборов полиномиальных функций в биинволюции для рассмотренной в статье серии $Bso(n)$, которую, как ранее упоминалось, не удалось решить методами, используемыми при решении аналогичной задачи для серий $Bsp(2n)$ и $Bsl(n)$. Также логичным продолжением исследования, представленного в данной статье, является вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для других классов алгебр Ли, упомянутых в Задаче, описанной во введении.

Благодарности

Автор выражает благодарность А. В. Болсинову и А. А. Ошемкову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц // Матем. сб. 1979. Т. 108(150) №1. С.134-142.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transform. Groups. 2016. Vol. 21 №1. P. 51-86.
3. Bolsinov A., Izosimov A., Kozlov I. Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials // accepted by Transform. Groups. 2019. <https://arxiv.org/pdf/1407.1878>
4. Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1012 Т. 28. С.119-191.
5. Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D. Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems // Journal of Geometry and Physics, published online 16 November 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003>
6. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open Problems, Questions and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems // Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. 2018. Vol. 376 №2131.
7. Bolsinov A. V. Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture // Theor. Appl. Mech. 2016. Vol. 43 №2. P. 145-168.
8. Грознова А. Ю. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // выпускная квалификационная работа МГУ. 2018.
9. Короткевич А. А. Полные наборы полиномов на борелевских подалгебрах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2006. №5. С. 20-25.
10. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. 1978. Т. 42 №2. С. 396-415.
11. Rosemann S., Schöbel K. Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields // Journ. Geom. and Phys. 2015. Vol. 87. P. 396-414.
12. Thompson R. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra Appl. 1991. Vol. 147. P. 323-371.
13. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43 №3. С. 714-732.
14. Воронцов А. Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2011. Т. 66 №1. С. 26-30.
15. Vorushilov K. Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38 №6. P. 1121-1130.

16. Ворушилов К. С. Инварианты Жордана—Кронекера для полупрямых сумм вида $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Т. 22 №6. С. 3-18.

REFERENCES

1. Arkhangel'skii, A. A. 1980, "Completely integrable Hamiltonian systems on a group of triangular matrices" *Math. USSR-Sb.*, vol. 36, no. 1, pp. 127-134.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, "Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras", *Transform. Groups* vol. 21, no. 1, pp. 51-86.
3. Bolsinov A., Izosimov A., Kozlov I. 2019, "Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials", accepted by *Transform. Groups*, <https://arxiv.org/pdf/1407.1878>
4. Bolsinov A. V., Izosimov A. M., Konyaev A. Yu., Oshemkov A. A. 2012, "Algebra and topology of integrable systems. Research problems", *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analysis*, vol. 28, pp. 119-191.
5. Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D., 2016 "Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems", *Journal of Geometry and Physics*, published online, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003>
6. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S., 2018, "Open Problems, Questions and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems", *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 376, no. 2131
7. Bolsinov A. V., 2016, "Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture", *Theor. Appl. Mech.* vol. 43, no. 2, pp. 145-168.
8. Groznova A. Yu., 2018 "Computation of Jordan–Kronecker invariants for low-dimensional Lie algebras" *Graduate Thesis, Lomonosov Moscow State University*
9. Korotkevich A. A., 2006, "Complete sets of polynomials on Borel subalgebras", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 5, pp. 20–25.
10. Mischenko A. S., Fomenko A. T., 1978, "Euler equations on finite-dimensional Lie groups", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 12, no. 2, pp. 396-415.
11. Rosemann S., Schöbel K., 2015, "Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields", *Journ. Geom. and Phys.*, vol. 87, pp. 396-414.
12. Thompson R., 1991, "Pencils of complex and real symmetric and skew matrices", *Linear Algebra Appl.*, vol. 147, pp. 323-371.
13. Trofimov V. V., 1980, "Euler equations on Borel subalgebras of semisimple Lie algebras", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 14, no. 3, pp. 714-732.
14. Vorontsov A., 2011, "Kronecker indices of Lie algebras and invariants degrees estimate", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 66, no. 1, pp. 26-30.
15. Vorushilov K., 2017, "Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 6, pp. 1121-1130.

16. Vorushilov K. S., 2019, “Jordan–Kronecker invariants of semidirect sums of the form $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ and $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ ”, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 22, no. 6, pp. 3-18.

Получено 01.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-57-76

Формула обращения для рядов Дирихле и ее применение

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков

Громаковская Лариса Александровна — старший преподаватель, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск)

e-mail: gromac_la@mail.ru

Широков Борис Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент (г. Петрозаводск).

e-mail: bmshir@mail.ru

Аннотация

Метод контурного интегрирования, применяемый для изучения асимптотики сумм коэффициентов рядов Дирихле, основан на формуле обращения. Она позволяет выразить сумму коэффициентов через сумму ряда. Такой подход дает эффективные оценки при условии, что абсцисса абсолютной сходимости ряда $\sigma_a \geq 1$. В некоторых случаях при изучении арифметических функций у производящих рядов Дирихле эта величина меньше 1. Например, такая ситуация возникает при изучении распределения значений функции $d(n)$, числа делителей n , в классах вычетов по некоторому модулю. Как правило, в этом случае применяется тауберова теорема Деланжа, которая дает только главный член асимптотики для частоты попаданий значений $d(n)$ в классы вычетов. Но производящие ряды обладают лучшими свойствами, чем необходимо для применения этой теоремы. Используя метод контурного интегрирования можно получить более точные результаты. Но для этого необходима формула обращения, которая была бы эффективна для рядов с $\sigma_a < 1$.

В настоящей работе доказывается такая формула обращения, которая применяется для изучения распределения значений функции $d(n)$ в классах вычетов, взаимно простых с модулем. В. Наркевич с помощью теоремы Деланжа получил главный член асимптотики для частоты попаданий значений $d(n)$ в классы вычетов. Применение формулы обращения, доказанной в этой работе, позволило получить более точный результат.

Ключевые слова: Число делителей целого числа, ряды Дирихле, формула обращения.

Библиография: 13 названий

Для цитирования:

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Формула обращения для рядов Дирихле и ее применение // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3. С. 57 – 76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-57-76

Inversion formula for Dirichlet series and its application

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov

Gromakovskaya Larisa Aleksandrovna — higher instructor, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).

e-mail: gromac_la@mail.ru

Shirokov Boris Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences (Petrozavodsk).

e-mail: gromac_la@mail.ru

Abstract

A contour integration method, used to study the asymptotic of the sums of coefficients of Dirichlet series, is based on the Inversion formula. It allows you to express the sum of the coefficients in terms of the sum of the series. This approach gives effective estimates if the abscissa of absolute convergence $\sigma_a \geq 1$. In some cases, when studying arithmetical functions in generating Dirichlet series, this value is less than 1. As a rule, in this case, the Tauberian Delange theorem, which gives only the main term of asymptotic, is applied. However, generating Dirichlet series have better analytical properties than we need for the Delange theorem application. The contour integration method allows to count on precise results, but it need the inversion formula which is effective for series with $\sigma_a < 1$.

In this paper the such inversion formula is presented and is proved to be an effective tool on examining the distribution of $d(n)$ function values in the residue classes coprime with a module. W. Narkiewicz used Delange theorem to obtain the main term of the asymptotic for frequency of hits of the values of function $d(n)$ in residue classes. Application of the inversion formula allowed us to obtain more precise results.

Keywords: A number of divisors of integer, Dirichle series, the inversion formula

Bibliography: 13 titles

For citation:

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov, 2021, “Inversion formula for Dirichlet series and its application”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 57 – 76.

1. Введение

Метод комплексного интегрирования в аналитической теории чисел основан на формуле обращения (см. [1, с. 427] или [2, гл. IV]), которая позволяет выразить сумматорную функцию ряда Дирихле через его сумму. Применение этой формулы эффективно лишь для рядов Дирихле, у которых абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_a \geq 1$. Но при изучении распределения некоторых мультипликативных функций в классах вычетов, взаимно простых с модулем, у производящих рядов Дирихле абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_a < 1$. Такая ситуация сложилась в работе В. Наркевича [3] при выводе асимптотики для частоты попадания значений функции $d(n)$, числа делителей n , в классы вычетов по некоторому модулю N .

Простой перенос абсциссы абсолютной сходимости влево от единицы при выводе формулы обращения, как это сделано в работах [4] и [5], не решает проблемы, так как при этом появляются ограничения, которые не позволяют применять эту формулу в задаче, о которой речь шла выше.

Введем **основные обозначения**. Пусть $f(n)$ — арифметическая функция; $\varphi(n)$ — функция Эйлера; p и q — простые числа; j, k, l, n, N и r — натуральные числа; $x > 1$, $S(x, r, f)$ — количество чисел $n \leq x$, для которых $f(n) \equiv r \pmod{N}$, причем если в качестве $f(n)$ берется функция $d(n)$, то эту величину будем обозначать через $S(x, r)$, то есть $S(x, r) = S(x, r, d)$; χ и χ_0 — произвольный и главный характеры Дирихле по модулю N ; m — натуральное число, для которого $m + 1$ — наименьшее простое число, не делящее N ; $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю N , взаимно простых с модулем, с умножением по модулю N ; $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана; $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера; $a = \sigma_a$ — абсцисса абсолютной сходимости ряда, т. е. a — такое число, что ряд из абсолютных величин сходится при $\sigma > a$ и расходится при $\sigma < a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю N , если множество чисел n , для которых $(f(n), N) = 1$, бесконечно и для любых вычетов r_1 и $r_2 \in G(N)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x, r_1, f)}{S(x, r_2, f)} = 1.$$

Нам потребуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА В. НАРКЕВИЧА. Функция $d(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1. $N = 4$;
2. $N = 2 \cdot 3^k$, ($k \geq 1$);
3. $N = q^k$, $q \geq 3$, $k \geq 1$ и 2 — первообразный корень по модулю N ;
4. $N = 2q^k$, $q \geq 5$, $k \geq 1$, и 3 — первообразный корень по модулю N

Во всех случаях

$$S(x, r) \sim Cx^{1/m} \tag{1}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от r .

Если $m > 1$, то для вывода асимптотики (1) нет возможности опереться на известную формулу обращения, так как для соответствующего производящего ряда Дирихле абсцисса абсолютной сходимости $a = \sigma_a = \frac{1}{m} < 1$. Остается только тауберова теорема Деланжа, которая и дает эту асимптотику. Аналогичные результаты приведены в работе [6] для многих арифметических функций. Они также получены с помощью теоремы Деланжа.

Однако, свойства производящих рядов Дирихле, используемых при применении теоремы Деланжа, значительно богаче тех, которые требуются для применения этой теоремы. Путь к их использованию в большинстве случаев отрезает невозможность воспользоваться приближенной формулой Перрона.

В настоящей работе доказывается формула обращения для рядов Дирихле, у которых $a > 0$ (теорема 1), и с ее помощью — теорема о распределении значений $d(n)$, уточняющая формулу В. Наркевича (1).

2. Формула обращения

ТЕОРЕМА 1. Если $a > 0$ и функция $f(n)$ удовлетворяет условиям:

$$a) \sum_n \frac{|f(n)|}{n^a} = O\left(\frac{1}{\sigma - a}\right), \quad \sigma > a; \tag{2}$$

б) существует такое число $\tau > 0$, что для любых x и y , $1 < x < y$,

$$\sum_{x < n \leq y} |f(n)| = O(y^a - x^a) + O(y^{a-\tau}), \quad (3)$$

то при $\sigma_0 > a$ и $T \geq 4$ для ряда

$$F(s) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it; \quad (4)$$

справедливо равенство

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T). \quad (5)$$

(Здесь и далее при обозначении в формуле (4) подразумевается суммирование по всем натуральным числам n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Γ контур, по которому ведется интегрирование в формуле (5). На нем ряд (4) сходится равномерно относительно $t = \text{Im } s$. Умножим обе части равенства (4) на $\frac{x^s}{2\pi i s}$ и проинтегрируем по Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_n \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Пологая $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{T}}$, обозначим $I_\varepsilon = (x - \varepsilon x, x + \varepsilon x]$. Разобьем сумму на три части:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \left(\sum_{n \leq x - \varepsilon x} + \sum_{n \in I_\varepsilon} + \sum_{n > x + \varepsilon x} \right) \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}. \quad (6)$$

В интегралах первой суммы замкнем на расширенной плоскости путь интегрирования добавлением двух контуров (рис. 1):

$$\Gamma_l^+ \{s = \sigma + it \mid -\infty \leq \sigma \leq \sigma_0, t = T\}, \quad \text{и} \quad \Gamma_l^- \{s = \sigma + it \mid -\infty \leq \sigma \leq \sigma_0, t = -T\}.$$

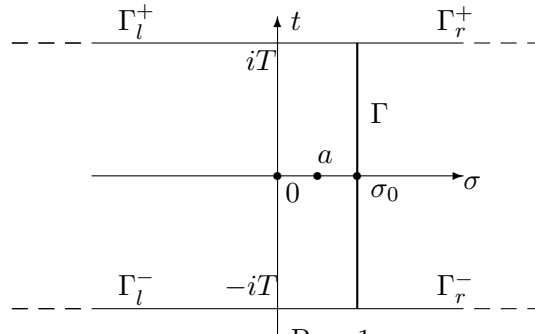


Рис. 1

Внутри образованного замкнутого контура подынтегральная функция мероморфна с единственным простым полюсом $s = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n \leq x - \varepsilon x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n \leq x - \varepsilon x} f(n) + O\left(\sum_{n \leq x - \varepsilon x} |f(n)| \int_{-\infty}^{\sigma_0} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T} \right) \quad (7)$$

Оценим интеграл в остаточном члене, вычислив его:

$$\int_{-\infty}^{\sigma_0} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} d\sigma = \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \frac{1}{\ln \frac{x}{n}}.$$

Для $n \leq (1 - \varepsilon)x$ логарифм оценивается снизу следующим образом:

$$\ln \frac{x}{n} \geq \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} > \ln(1 + \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{T}}$, в силу условия (2), имеем:

$$\sum_{n \leq (1 - \varepsilon)x} |f(n)| \int_{-\infty}^{\sigma_0} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T} = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\varepsilon T} \sum_n \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_0}}\right) = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right)$$

Равенство (7) принимает вид

$$\sum_{n \leq (1 - \varepsilon)x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n \leq (1 - \varepsilon)x} f(n) + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) \quad (8)$$

Третья сумма исследуется аналогично. В ее интегралах также замкнем на расширенной плоскости путь интегрирования контурами (рис. 1):

$$\Gamma_r^+ \{s = \sigma + it \mid \sigma_0 \leq \sigma \leq \infty, t = T\}, \quad \text{и} \quad \Gamma_r^- \{s = \sigma + it \mid \sigma_0 \leq \sigma \leq \infty, t = -T\}.$$

Внутри образованного замкнутого контура подынтегральная функция регулярна. Следовательно,

$$\sum_{n > x + \varepsilon x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = O\left(\sum_{n > x + \varepsilon x} |f(n)| \int_{\sigma_0}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T}\right) \quad (9)$$

Оценим интеграл в остаточном члене:

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} d\sigma = \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \frac{1}{\left|\ln \frac{x}{n}\right|}.$$

Для $n > (1 + \varepsilon)x$ модуль логарифма оцениваем снизу так:

$$\left|\ln \frac{x}{n}\right| = \ln \frac{n}{x} \geq \ln(1 + \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти оценки в равенство (9) для третьей суммы, учитывая, что $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{T}}$, и условие (2), получим:

$$\sum_{n > x + \varepsilon x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\varepsilon T} \sum_n \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_0}}\right) = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) \quad (10)$$

Перейдем к оценке второй суммы:

$$\left|\sum_{n \in I_{\varepsilon}} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}\right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in I_{\varepsilon}} |f(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \int_{-T}^T \frac{dt}{|s|}.$$

В этой сумме n удовлетворяет неравенству $(1 - \varepsilon)x < n \leq (1 + \varepsilon)x$. Поэтому

$$\frac{x}{n} < \frac{1}{1 - \varepsilon} \leq 2,$$

если $T \geq 4$. Для переменной s справедливо классическое неравенство $|s| \geq \frac{|t| + \sigma_0}{2}$. В условии (3) в качестве x возьмем $(1 - \varepsilon)x$, а в качестве y — $(1 + \varepsilon)x$. Тогда для второй суммы с некоторой постоянной $C > 0$ имеем оценку:

$$\left| \sum_{n \in I_\varepsilon} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \ln T \sum_{n \in I_\varepsilon} |f(n)| \leq C \ln T [(1 + \varepsilon)^a - (1 - \varepsilon)^a] x^a + x^{a-\tau}$$

Используя неравенство: $(1 + \varepsilon)^a - (1 - \varepsilon)^a \leq 4a\varepsilon$, приходим к оценке второй суммы:

$$\left| \sum_{n \in I_\varepsilon} \frac{f(n)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| = O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T). \quad (11)$$

Заметим, что, избегая вычисления интегралов во второй сумме, мы потеряли часть сумматорной функции с номерами n , удовлетворяющими неравенству $(1 - \varepsilon)x < n \leq x$. Этот пробел восстанавливается с помощью условия (3):

$$\left| \sum_{(1-\varepsilon)x < n \leq x} f(n) \right| \leq \sum_{x \in I_\varepsilon} |f(n)| = O\left(\frac{x^a}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T).$$

Используя полученное неравенство и формулы (6), (8), (10) и (11), находим, что

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) + O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T).$$

Доказательство теоремы завершено. $\square$

3. Распределение значений $d(n)$ в классах вычетов

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\delta = \frac{1}{\ln x}$; $T = e^{\sqrt{\ln x}}$, для некоторых постоянных величин $0 < c_0 \leq 1/2$ и $a > 0$ определим функцию $\sigma_a(t)$ и область Ω_a :

$$\sigma_a(t) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{c_0}{\ln(2 + |t|)}\right), & |t| > e - 2, \\ a(1 - c_0), & |t| \leq e - 2, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty; \quad \Omega_a = \{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_a(t)\},$$

причем постоянную c_0 выберем так, чтобы функция $\zeta(s/a)$ не имела нулей в области Ω_a , что возможно на основании теоремы Валле — Пуссена ([2, с. 40]); $\tau = \frac{ac_0}{\ln(2 + T)}$; L — кривая, состоящая из двух отрезков $\{s \mid -\tau \ln x \leq \operatorname{Re} s \leq 0, t = \pm 1\}$ и полуокружности $C_1^+(0) = \{s \mid |s| = 1, \operatorname{Re} s \geq 0\}$ и в качестве положительной ориентации выбираем движение против часовой стрелки; $\alpha_m(\chi) = \chi(m + 1)$; $\theta(x) = 1$ для $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ для $x \leq 0$;

$$F(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(d(n))}{n^s}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $d(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N , то для любого вычета $r \in G(N)$ с некоторой постоянной C_N , зависящей только от N , и для любого достаточно большого числа x справедливы следующие утверждения:

а) если модуль N равен 3, 4 или 6, то для некоторого числа β , $0 < \beta < 1/2$,

$$S(x, r) = C_N x^{1/m} + O(x^{1/m} e^{-\beta \sqrt{\ln x}});$$

б) если модуль N не принимает значений 3, 4 или 6, то

$$S(x, r) = C_N x^{1/m} + \frac{x^{1/m}}{\varphi(N)} \sum_{\chi^2 \neq \chi_0} \frac{\bar{\chi}(r)}{(\ln x)^{1-\alpha_m(\chi)}} \Phi(x, \chi) + O(x^{1/m} e^{-\beta \sqrt{\ln x}}).$$

где $\Phi(x, \chi)$ — сумма особого ряда,

$$\Phi(x, \chi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(\chi)}{\ln^j x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{j-z} d\zeta,$$

$a_j(\chi)$ — коэффициенты Тейлора функции $F(s, \chi)(s-1/m)^{\alpha_m(\chi)}$ в точке $s = 1/m$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если N не равно 3, 4 или 6, то для любого натурального числа n при достаточно большом x

$$S(x, r) = C_N x^{1/m} + \frac{x^{1/m}}{\varphi(N)} \sum_{\chi^2 \neq \chi_0} \frac{\bar{\chi}(r)}{(\ln x)^{1-\alpha_m(\chi)}} \left(\sum_{j=0}^n \frac{a_j(\chi)}{(\ln x)^j (\Gamma(\alpha_m(\chi) - j))} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\operatorname{Re} \alpha_m(\chi)}}\right) \right),$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма. Обозначим (рис. 2 и 3)

$$\Gamma_0 = \{s = \sigma + it \mid \sigma = a + 2\delta, \ |t| \leq T\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $G(s)$ — регулярная в области Ω_a функция, $G(a) \neq 0$, и для некоторого комплексного числа z

$$F(s) = \frac{G(s)}{(s-a)^z},$$

причем, для $\ln(s-a)$ выбирается главная ветвь.

Если существует такая постоянная $B > 0$, что для $s \in \Omega_a$ выполняется условие

$$F(s) = O(\ln^B(|t|)), \quad |t| \geq 2, \quad (12)$$

то при достаточно большом x

а) если $z = 1, 0, -1, -2, \dots$, то существует такая постоянная $\beta \in (0, 1)$, что

$$I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \theta(z) \frac{G(a)}{a} x^\alpha + O(x^\alpha e^{-\beta \sqrt{\ln x}});$$

б) если z не является целым рациональным числом и $|z| \leq 1^1$, то $\exists \beta \in (0, 1)$, что

$$I(x) = \frac{x^\alpha}{(\ln x)^{1-z}} \Phi(x) + O(x^\alpha e^{-\beta \sqrt{\ln x}}),$$

¹Лемма справедлива и без ограничений на z по величине в обоих пунктах, но с ними доказательство избавлено от стандартных вычислений, и в полной общности лемма не нужна для наших целей.

где $\Phi(x)$ — сумма особого ряда

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\ln^j x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{j-z} d\zeta,$$

a_j — коэффициенты Тейлора функции $G(s)s^{-1}$ в точке $s = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть z — целое рациональное число, не превосходящее 1, и $T > 2$. Введем следующие обозначения для контуров (рис. 2):

$$\Gamma_1^+(\Gamma_1^-) = \{s \mid \sigma(T) \leq \sigma \leq \sigma_0, t = T(t = -T)\}, \quad \Gamma_2 = \{s \mid \sigma = \sigma(T), -T \leq t \leq T\}$$

и Γ — замкнутый прямоугольник: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1^-$. Если $z < 1$, то подынтегральная функция в интеграле $I(x)$ регулярна внутри Γ . При $z = 1$ она имеет там единственный простой полюс с вычетом, равным $G(a)a^{-1}x^a$. По теореме Коши

$$I(x) = \theta(z)x^a \frac{G(a)}{a} + O\left(\left|\left(\int_{\Gamma_1^+} + \int_{\Gamma_2}\right) F(s) \frac{x^s}{s} ds\right|\right).$$

Интеграл по Γ_1^- в остаточном члене отсутствует потому, что он отличается от интеграла по Γ_1^+ знаком при i .

В виду неравенств (12) и $|s| \geq T$, на Γ_1^+ имеем:

$$\left|\int_{\Gamma_1^+} F(s) \frac{x^s}{s} ds\right| = O\left(\frac{\ln^B T}{T} \int_{\sigma(T)}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma\right) = O\left(\frac{x^a (\ln x)^{(B-2)/2}}{T}\right). \quad (13)$$

Интеграл по Γ_2 оценивается следующим образом. Пусть $x \geq 4$. Тогда $T > e$. Выберем $\lambda \in (\sigma_a(2), \sigma_a(T))$ и положим $M = \max_{|t| \leq 2, \lambda \leq \sigma \leq a} |G(s)|$. Если $|t| \leq 2$, то $|F(s)| \leq M$ при $z \leq 0$

и $|F(s)| \leq \frac{M}{ac_0} \ln(T+2)$ при $z = 1$. Кроме того,

$$|s| \geq a - \frac{ac_0}{\ln(T+2)} \geq a - \frac{ac_0}{\ln T} = a - \frac{ac_0}{\sqrt{\ln x}} \geq \frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\Gamma_2} F(s) \frac{x^s}{s} ds\right| \leq 2x^{\sigma(T)} \int_0^2 |F(s)| dt + 2x^{\sigma(T)} \int_2^T |F(s)| \frac{dt}{t} = O((\ln T)^{B+1} x^{\sigma(T)}).$$

Оценим величину $x^{\sigma(T)} = x^a e^{ac_0 \ln x / \ln(T+2)}$. Показатель степени числа e согласно обозначению на с. 62 равен:

$$\tau \ln x = \frac{ac_0 \ln x}{\ln(T+2)} = \frac{ac_0 \ln x}{\ln T + \ln(1+2/T)} \geq \frac{ac_0 \ln x}{\ln T + \frac{2}{T}} = \frac{ac_0 \sqrt{\ln x}}{1 + \frac{2}{T \ln T}} \geq (1-\varepsilon) ac_0 \sqrt{\ln x}, \quad (14)$$

где ε — любое число, удовлетворяющее неравенству $1 > \varepsilon \geq \frac{2}{T \ln T}$. Таким образом, полагая $c_1 = ac_0(1-\varepsilon)$, получим: $0 < c_1 < 1$ и

$$x^{\sigma(T)} \leq x^a e^{-c_1 \sqrt{\ln x}} = \frac{x^a}{T^{c_1}}.$$

В итоге, для интеграла по контуру Γ_2 справедлива оценка

$$\int_{\Gamma_2} F(s) \frac{x^s}{s} ds = O\left(\frac{x^a (\ln x)^{(B+1)/2}}{T^{c_1}}\right).$$

Используя оценку (13), получаем:

$$I(x) = \theta(z) x^a \frac{G(a)}{a} + O\left(\frac{x^a (\ln x)^{(B+1)/2}}{T^{c_1}}\right).$$

Так как для любого числа $C > 0$ величина $\ln^C x = o(e^{\sqrt{\ln x}})$, то для любого числа β , удовлетворяющего неравенству $0 < \beta < c_1$, получим:

$$I(x) = \theta(z) x^\alpha \frac{G(\alpha)}{\alpha} + O(x^\alpha e^{-\beta \sqrt{\ln x}}).$$

б) Пусть теперь z не является целым рациональным числом. Контур Γ_0 в интеграле дополним контурами Γ_1^+ и Γ_1^- (рис. 3) такими же, как и в случае а); контурами L_δ^+ и L_δ^- , у которых $\sigma = \sigma(T)$, $\delta \leq t \leq T$ и $-T \leq t \leq -\delta$ соответственно; контурами γ^+ и γ^- : $\sigma(T) \leq \sigma \leq a$, $t = \delta$ и $t = -\delta$ соответственно, и замкнем контур полуокружностью $C_\delta^+(a)$, $\sigma \geq a$. Так образованный замкнутый контур обозначим через Γ . Для краткости контур, состоящий из полуокружности $C_\delta^+(a)$ и прилегающих к ней отрезков γ^+ и γ^- , обозначим через L' . При достаточно большом x контур L' лежит в круге аналитичности функции $\frac{G(s)}{s}$ с центром в точке $s = a$. Внутри контура Γ функция $F(s) \frac{x^s}{s}$ регулярна и по теореме Коши интеграл по

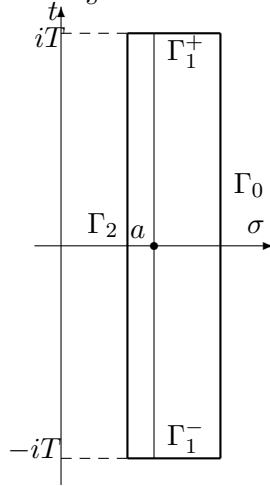


Рис. 2

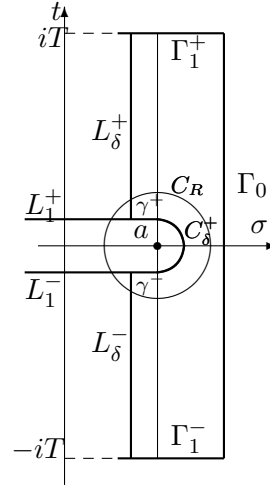


Рис. 3

контур Γ от нее равен 0. Теперь $I(x)$ имеет представление

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\left|\left(\int_{\Gamma_1^+} + \int_{L_\delta^+}\right) F(s) \frac{x^s}{s} ds\right|\right), \quad (15)$$

причем контур L' ориентирован против часовой стрелки. Для интеграла по Γ_1^+ оценка уже дана формулой (13). Интеграл по L_δ^+ оценивается так же, как и интеграл по Γ_2 . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta^+} F(s) \frac{x^s}{s} ds = O(x^a e^{-\beta \sqrt{\ln x}}). \quad (16)$$

Существует замкнутый круг $\overline{K}_R$ радиусом $R > |\sigma(T) + i\delta - a|$ с центром в точке $s = a$, содержащийся в области аналитичности функции $G(s)s^{-1}$, и $L' \subset K_R \subset \Omega_a$. Поэтому для $s \in L'$

$$\frac{G(s)}{s} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s-a)^k, \quad (17)$$

где a_k — коэффициенты Тейлора функции $G(s)s^{-1}$. Ряд в формуле (17) сходится равномерно на контуре L' . Умножим обе части этого равенства на $\frac{x^s(s-a)^{-z}}{2\pi i}$, проинтегрируем его по L' , причем, ряд почленно, и получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_{L'} x^s (s-a)^{k-z} ds.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной интегрирования $s = a + \delta\zeta$. Так как $\delta = \ln^{-1} x$, то $x^s = x^a e^{\zeta}$, и контур L' перейдет в контур L . Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(\ln x)^{k+1-z}} \cdot \frac{x^a}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{k-z} d\zeta = \frac{1}{(\ln x)^{1-z}} \Phi(x). \quad (18)$$

Из формул (13), (15) и (18) получим утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть r — произвольный вычет из $G(N)$ и $\omega(n)$ — индикатор класса $r + lN$, т. е. $\omega(n) = 1$, если $n \equiv r \pmod{N}$, и $\omega(n) = 0$ в противном случае. Тогда

$$S(x, r) = \sum_{n \leq x} \omega(d(n)).$$

Свойства ортогональности характеров Дирихле ([2, с. 94]) позволяют представить $\omega(n)$ в виде

$$\omega(n) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \pmod{N}} \bar{\chi}(r) \chi(n),$$

где суммирование ведется по всем характерам модуля N . Следовательно,

$$S(x, r) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) \sum_{n \leq x} \chi(d(n)). \quad (19)$$

Таким образом, задача сводится к изучению асимптотики суммы

$$\sum_{n \leq x} \chi(d(n)),$$

которая называется сумматорной функцией производящего ряда Дирихле

$$F(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(d(n))}{n^s}. \quad (20)$$

Далее, доказательство проводим в два шага: 1-й шаг — представление сумматорной функции ряда (20) с помощью теоремы 1 через интеграл

$$I(x, \chi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} F(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds.$$

2-й шаг — вывод для $I(x, \chi)$ асимптотики с помощью леммы 1. Завершается доказательство подстановкой полученных в результате двух шагов асимптотик в формулу (19).

Проверим возможность применения теоремы 1. Сначала нам предстоит найти абсциссу a абсолютной сходимости ряда (20). По крайней мере, для $\sigma > 1$ можно применить формулу Эйлера:

$$\sum_n \left| \frac{\chi(d(n))}{n^s} \right| = \sum_n \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} = \prod_p \left(1 + \sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}} \right). \quad (21)$$

Если $k < m$, то $\chi_0(k+1) = 0$. Для ряда под знаком произведения справедливо неравенство

$$\sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}} \leq \sum_{k \geq m} \frac{1}{p^{k\sigma}}.$$

При $\sigma > 1/m$ последний ряд сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} \leq \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{k \geq m} \frac{1}{p^{k\sigma}} \right) \leq \prod_p \left(1 + \sum_{k \geq m} \frac{1}{p^{k\sigma}} \right) < +\infty.$$

Следовательно, $a \leq 1/m$. С другой стороны, при $\sigma \rightarrow 1/m + 0$

$$\sum_n \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} = \prod_p \left(1 + \sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}} \right) \geq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{m\sigma}} \right) \rightarrow +\infty.$$

Значит, $a \geq 1/m$. Итак, абсцисса абсолютной сходимости ряда (20) $a = 1/m$.

Следовательно, для $\sigma > 1/m$ справедливо равенство

$$F(s, \chi) = \prod_p \left(1 + \sum_{k \geq m} \frac{\chi(k+1)}{p^{ks}} \right).$$

Обозначим $p^{-s} = z$, $\chi(m+1) = \alpha$ и произвольный член произведения через $F_p(z)$. Представим его в виде

$$F_p = 1 + \alpha z^m + A_m(z),$$

обозначая

$$A_m(z) = \sum_{k \geq m+1} \chi(k+1) z^k.$$

Если $|z| < 1$, то для этой функции справедливо неравенство

$$|A_m(z)| \leq \frac{|z|^{m+1}}{1 - |z|}. \quad (22)$$

Чтобы уяснить поведение функции $F(s, \chi)$ в окрестности точки $s = a$, умножим и разделим каждый член произведения на функцию $(1 - |z|^m)^\alpha$, предварительно преобразовав ее следующим образом:

$$(1 - |z|^m)^\alpha = 1 - \alpha z^m + B_m(z),$$

где

$$B_m(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} |z|^{km} (-1)^k.$$

Если $|z| < 1$, то

$$|B_m(z)| \leq \frac{|z|^{2m}}{1 - |z|^m}. \quad (23)$$

Член произведения F_p примет вид:

$$F_p = \frac{(1 + \alpha z^m + A_m(z))(1 - \alpha z^m + B_m(z))}{(1 - z^m)^\alpha} = \frac{1 + C_m(z, \chi)}{(1 - z^m)^\alpha}$$

где

$$C_m(z, \chi) = -\alpha^2 z^{2m} + (1 + \alpha z^m)B_m(z) + (1 - \alpha z^m)A_m(z) + A_m B_m.$$

Оценим эту функцию для z , удовлетворяющих неравенству $|z| \leq 1/2$, опираясь на оценки (22) и (23). Так как $|z|^{2m} \leq |z|^{m+1}$, $\frac{|z|}{1 - |z|} \leq 1$ и $|\alpha| \leq 1$,

$$|C_m(z, \chi)| \leq |z|^{m+1} \left(1 + \frac{4}{1 - |z|} + \left(\frac{|z|}{1 - |z|} \right)^2 \right) \leq 10|z|^{m+1}. \quad (24)$$

Обозначим

$$H(s, \chi) = \prod_p \left(1 + C_m\left(\frac{1}{p^s}, \chi\right) \right).$$

Функция $F(s, \chi)$ для $\sigma > 1/m$ принимает вид

$$F(s, \chi) = \zeta^\alpha(ms) H(s, \chi), \quad (25)$$

причем для $\ln \zeta(ms)$ выбираем главную ветвь, т. е. ту, для которой $|\arg \zeta(ms)| \leq \pi$.

Покажем, что функция $H(s, \chi)$ регулярна в области $\sigma > 1/(m+1)$ и ограничена в полуплоскости $\sigma \geq 1/(m+1) + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть на области $G_\tau = \{\sigma > \tau\}$ задана последовательность регулярных в ней функций $u_n(s) \neq -1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел a_n , что для любого n и любого s с условием $\operatorname{Re} s \geq \tau + \varepsilon$ справедливо неравенство $|u_n(s)| \leq a_n$ и числовой ряд с членами a_n сходится. Тогда в области G_τ абсолютно сходится произведение

$$u(s) = \prod_n (1 + u_n(s)),$$

а функция $u(s)$ регулярна в области G_τ и ограничена при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $a_n < 1$. Покажем, что ряд

$$\sum_n \ln(1 + u_n(s)) \quad (26)$$

сходится равномерно при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, если у логарифма закреплена главная ветвь. Пусть выбраны $\varepsilon > 0$ и такая последовательность чисел a_n , что $|u_n(s)| \leq a_n$ при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$. Существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|\ln |1 + u_n(s)|| \leq M a_n.$$

Действительно, если $|1 + u_n(s)| \geq 1$, то $|\ln |1 + u_n(s)|| \leq \ln(1 + |u_n|) \leq |u_n| \leq a_n$. Если $|1 + u_n| < 1$, то

$$|\ln |1 + u_n(s)|| = \ln \frac{1}{|1 + u_n|} \leq \ln \left(1 + \frac{|u_n|}{1 - |u_n|} \right) \leq \frac{|u_n|}{1 - |u_n|} \leq \frac{a_n}{1 - a_n} \leq M a_n,$$

так как величина $(1 - a_n)^{-1}$ ограничена. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_n \ln |1 + u_n(s)|$ равномерно сходится при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$.

В виду того, что выбрана главная ветвь логарифма и $|u_n(s)| < 1$, имеем:

$$|\arg(1 + u_n(s))| \leq \arcsin |u_n(s)| \leq \frac{\pi}{2} |u_n(s)| \leq \frac{\pi}{2} a_n.$$

Из этого неравенства и условий леммы следует, что ряд $\sum_n \arg(1 + u_n(s))$ сходится равномерно при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$. Таким образом, ряд (26) сходится равномерно на этой полуплоскости. Так как для любого компакта $K \subset G_\tau$ существует такое $\varepsilon > 0$, что K , содержится в полуплоскости $\sigma \geq \tau + \varepsilon$, по теореме Вейерштрасса функция $\ln u(s)$ регулярна в области G_τ . Следовательно, регулярна там и функция $u(s)$.

Ограниченность $u(s)$ при $\sigma \geq \tau + \varepsilon$ следует из цепочки неравенств

$$|u(s)| = \prod_n |1 + u_n(s)| \leq \prod_n (1 + |u_n(s)|) \leq \prod_n (1 + a_n).$$

Лемма доказана. $\square$

Из определения функции $C_m(z, \chi)$ видно, что она регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда функция $C_m(p^{-s}, \chi)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$ и ограничена при $\sigma \geq \varepsilon > 0$.

Из неравенства (24) следует, что если $p > 10$, то $C_m(p^{-\sigma}, \chi) \neq -1$ для $\sigma > 1/(m+1)$, а ряд

$$\sum_{p>10} C_m \left(\frac{1}{p^\sigma}, \chi \right)$$

сходится абсолютно для $\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{1+m}$ при любом $\varepsilon > 0$. На основании леммы 2 произведение функций $1 + C_m(p^{-s}, \chi)$ по простым $p > 10$ представляет собой регулярную в области $\sigma > 1/(m+1)$ функцию, ограниченную в полуплоскости $\sigma \geq 1/(m+1) + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Функция $H(s, \chi)$ отличается от этого произведения четырьмя множителями, регулярными в полуплоскости $\sigma > 0$, поэтому обладает перечисленными выше свойствами.

Так как $\zeta(\sigma) = O((\sigma - 1)^{-1})$ для $\sigma > 1$, а функция $H(s, \chi)$ регулярна в точке $s = 1/m$, справедлива оценка

$$\sum_n \left| \frac{\chi(d(n))}{n^s} \right| = F(\sigma, \chi_0) = \zeta(m\sigma) H(\sigma, \chi_0) = O \left(\frac{1}{\sigma - 1/m} \right).$$

Значит, функция $F(s, \chi)$ удовлетворяет условию (2) теоремы 1.

Перейдем к проверке условия (3). Если $m = 1$, то оно очевидно. Действительно,

$$\sum_{x < n \leq y} |\chi(d(n))| \leq \sum_{x < n \leq y} 1 = y - x + O(1).$$

Далее считаем, что $m \geq 2$. Введем дополнительные обозначения: $u(n)$ — мультипликативная функция, равная 0, если n — m -свободное число, т. е. не делящееся на p^m для любого p , и 1 в противном случае; $U(s)$ — сумма ее ряда Дирихле; $g(n)$ — коэффициенты ряда Дирихле с суммой $\zeta(ms)$, т. е. $g(n) = 1$, если $n = l^m$, и $g(n) = 0$, если $n \neq l^m$. Пусть функция $V(s)$ определена равенством

$$V(s) = U(s) \zeta^{-1}(ms) \quad (27)$$

и $v(n)$ — мультипликативная функция, для которой

$$\sum_n \frac{v(n)}{n^s} = V(s). \quad (28)$$

Этот ряд абсолютно сходится при $\sigma > 1/(m+1)$. Действительно, по определению для $\sigma > 1$

$$V(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{ms}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^{ms}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}\right)$$

Преобразуем произвольный член произведения, обозначая $z = p^{-s}$. Так как $|z| < 1$, его можно записать в виде

$$(1 - z^m) \left(1 + z^m + \frac{z^{m+1}}{1 - z}\right) = 1 - z^{2m} + z^{m+1} \frac{1 - z^m}{1 - z} = 1 + \sum_{k=m+1}^{2m} z^k.$$

Итак,

$$V(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{(m+1)s}} + \frac{1}{p^{(m+2)s}} + \cdots + \frac{1}{p^{2ms}}\right).$$

Это произведение абсолютно сходится при $\sigma > 1/(m+1)$, причем, $v(n) \geq 0$ и

$$\sum_{n \leq x} \frac{v(n)}{n^\sigma} \leq \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{p^{k\sigma}}\right) \leq V(\sigma).$$

Из этого неравенства следует сходимость ряда (28) при $\sigma > 1/(m+1)$.

Далее, для $a = 1/m$ и $0 < \tau < \frac{1}{m(m+1)}$ имеем неравенство

$$\sum_{n \leq x} v(n) \leq x^{a-\tau} \sum_{n \leq x} \frac{v(n)}{n^{a-\tau}} \leq V(a-\tau) x^{a-\tau}. \quad (29)$$

Из равенства (27) следует, что $u(n)$ — свертка по делителям функций $v(n)$ и $g(n)$. Поэтому

$$\sum_{n \leq x} u(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} v(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \leq x} v(d) \sum_{k \leq x/d} g(k).$$

Для функции $g(n)$ справедливо равенство

$$\sum_{k \leq y} g(k) = \sum_{l^m \leq y} 1 = y^a + O(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n \leq x} u(n) = x^a \sum_{n \leq x} \frac{v(d)}{d^a} + O\left(\sum_{n \leq x} v(n)\right) = V(a) x^a + O\left(\sum_{n \leq x} v(n) + x^a \sum_{n > x} \frac{v(d)}{d^a}\right).$$

Остаток ряда оценим следующим образом. Так как $a - \tau > 1/(m+1)$,

$$\sum_{n > x} \frac{v(d)}{d^a} \leq \frac{1}{x^\tau} \sum_{d > x} \frac{v(d)}{d^{a-\tau}} < V(a-\tau) x^{-\tau}.$$

Используя неравенство (29), получим

$$\sum_{n \leq x} u(n) = V(a) x^a + O(x^{a-\tau}).$$

Теперь можем убедиться в выполнимости условия (3) теоремы 1:

$$\sum_{x < n \leq y} |\chi(d(n))| \leq \sum_{x < n \leq y} u(n) = V(a)(y^a - x^a) + O(y^{a-\tau}).$$

Применяя теорему 1 к ряду (20) при $a = 1/m$, получим:

$$\sum_{n \leq x} \chi(d(n)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^a \ln x}{\sqrt{T}}\right) = I(x, \chi) + O\left(\frac{x^a \ln x}{\sqrt{T}}\right). \quad (30)$$

К интегралу $I(x, \chi)$ применим лемму 1. Определим функцию $G(s, \chi)$ следующим образом:

$$G(s, \chi) = \left(\zeta(ms)(s - a)\right)^\alpha H(s, \chi), \quad a = \frac{1}{m}. \quad (31)$$

Область Ω_a построена так, что целая функция $\zeta(ms)(s - a)$ не имеет в ней нулей. Поэтому функция $(\zeta(ms)(s - a))^\alpha$ регулярна в Ω_a . Чтобы функция $G(s, \chi)$ была регулярна в этой области, нужно обеспечить регулярность в ней множителя $H(s, \chi)$, регулярного в полуплоскости $\sigma > 1/(m+1)$. Для этого выберем c_0 так, чтобы выполнялось включение $\Omega_a \subset \{\sigma \geq 1/(m+1)\}$, что равносильно неравенству $1 - c_0 \geq \frac{m}{m+1}$, т. е.

$$c_0 \leq \frac{1}{m+1}. \quad (32)$$

Из формул (25) и (31) следует, что для $\sigma > a$

$$F(s, \chi) = \frac{G(s, \chi)}{(s - a)^\alpha}, \quad a = \frac{1}{m}, \quad (33)$$

с показателем $z = \alpha = \chi(m+1)$, причем для $\ln(s - a)$ выбираем главную ветвь.

Для выполнения первого условия леммы нужно еще установить, что $G(1/m, \chi) \neq 0$. Так как

$$\lim_{s \rightarrow 1/m} \zeta(ms) \left(s - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m},$$

нужно доказать, что $H(1/m, \chi) \neq 0$. Достаточно убедиться, что $1 + C_m(p^{1/m}, \chi) \neq 0$ для любого p , так как в этом случае произведение, представляющее $H(1/m, \chi)$, абсолютно сходится. Но равенство $1 + C_m(p^{1/m}, \chi) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда

$$1 + \sum_k \frac{\chi(k+1)}{p^{k/m}} = 0. \quad (34)$$

Чтобы убедиться, что это равенство невозможно при любом p , нам потребуются еще одна лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $a_i = \pm \chi(n_i)$, $i = 1, \dots, n$, для некоторых целых n_i . Тогда для любого натурального числа m число $x_0 = p^{-1/m}$ не является корнем многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

для любого простого числа p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 — корень многочлена $P_n(x)$. Обозначим через r наименьшее общее кратное $\varphi(N)$ и m . Тогда x_0 — целое число над полем $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/r})$ и принадлежит нормальному расширению $K(x_0)$ поля $\mathbb{Q}$, причем является делителем единицы этого поля. Поэтому его норма над полем $\mathbb{Q}$ равна ± 1 . С другой стороны, минимальный многочлен x_0 над $\mathbb{Q}$ есть $x^m - p^{-1}$. Следовательно норма x_0 над $\mathbb{Q}$ равна $(1/p)^{r/m}$ (см. ([10, с. 460], или [11, с. 173], или [12, с. 239])). Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Рассмотрим равенство (34). Любое целое число $k \geq 0$ можно представить в виде $k = r + lN$, $0 \leq r \leq N-1$, $0 \leq l < \infty$. Тогда равенство (34) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(k+1)}{p^{k/m}} = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\chi(r+1+lN)}{p^{(r+lN)/m}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(p^{N/m})^l} \sum_{r=0}^{N-1} \chi(r+1)(p^{-1/m})^r = 0.$$

Это равенство означает, что многочлен

$$P_{N-1}(x) = \sum_{r=0}^{N-1} \chi(r+1)x^r$$

имеет корень $x_0 = p^{-1/m}$. Но лемма 3 утверждает, что это невозможно.

Проверим условие (12). Достаточно считать, что $t \geq 0$. Выше было показано, что если постоянная c_0 удовлетворяет неравенству (32), то область Ω_a лежит в полуплоскости $\sigma \geq 1/(m+1)$. Если $\sigma \geq \sigma_a(t)$ и $t \geq 3$, то

$$\sigma \geq \frac{1}{m} \left(1 - \frac{c_0}{\ln 5}\right) \geq \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{(m+1)\ln 5}\right) = \sigma_1 > \frac{1}{m+1},$$

т. е. часть области Ω_a с $t \geq 3$, содержится в полуплоскости $\{\sigma \geq \sigma_1\}$ с $\sigma_1 > 1/(m+1)$, где функция $H(s, \chi)$ ограничена.

Остается проверить оценку для $\zeta^\alpha(ms)$ при $\alpha = \chi(m+1)$.

Пусть $\alpha = \xi + i\eta$ и $\arg \zeta(ms) = \varphi$, причем $|\varphi| \leq \pi$, так как мы выбираем главную ветвь $\ln \zeta(ms)$. Существуют такие постоянные $A > 0$ и $c_0 > 0$, что справедливо утверждение [1, с. 75 и 83]:

$$\text{если } \sigma \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{c_0}{\ln t} \right\}, \quad t \geq 3, \quad \text{то } \zeta^{\pm 1}(s) = O(\ln^A t). \quad (35)$$

Пусть $s \in \Omega_a$, $a = 1/m$ и $t \geq 3$. Тогда

$$m\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)} \geq 1 - \frac{c_0}{\ln t}, \quad \text{и} \quad 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)} \geq 1 - \frac{c_0}{(m+1)\ln 5} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в силу (35), если $s \in \Omega_a$ и $t \geq 3$, то

$$\zeta^\pm(ms) = O(\ln^A t).$$

Тогда с некоторой постоянной $C > 0$, в виду оценки (35), справедливо неравенство

$$|\zeta^\alpha(ms)| = |\zeta(ms)|^\xi \cdot e^{\eta\varphi} \leq C \ln^A t,$$

так как $|\xi| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$ и $|\varphi| \leq \pi$.

Итак, лемма 1 применима к интегралу $I(x, \chi)$.

Если $\chi^2 = \chi_0$, то $\alpha = \alpha_m(\chi) = \chi(m+1) = \pm 1$ и из леммы 1 следует, что

$$\sum_{n \leq x} \chi(d(n)) = \theta(\alpha) C_N x^{1/m} + O(x^{1/m} e^{-\beta \sqrt{\ln x}}). \quad (36)$$

Если $\chi^2 \neq \chi_0$, то $\alpha_m(\chi) = \lambda + i\mu$ и $\mu \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{n \leq x} \chi(d(n)) = \frac{x^{1/m}}{(\ln x)^{1-\alpha}} \Phi(x, \chi) + O(x^{1/m} e^{-\beta \sqrt{\ln x}}) \quad (37)$$

с особым рядом

$$\Phi(x, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\chi)}{\ln^k x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta, \quad (38)$$

где $a_k(\chi)$ — коэффициенты Тейлора функции $G(s, \chi)s^{-1}$ в точке $s = 1/m$.

Если модуль N равен 3, 4 или 6, то $|G(N)| = 2$. Мы получим только два асимптотических равенства (36), в одном из которых $\theta(\alpha) = 0$, а в другом $\theta(\alpha) = 1$. Подставляя их в равенство (19), получим первое утверждение теоремы.

Если модуль N отличен от 3, 4, и 6, то порядок циклической группы $G(N)$ больше 2 и у нее существуют невестественные характеры. Значит, кроме равенств (36) появятся и равенства (37). Подставляя их в равенство (19), получим второе утверждение теоремы. Доказательство теоремы завершено. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ состоит в приближенном вычислении суммы $\Phi(x, \chi)$ особого ряда для каждого невестественного характера χ .

Из формулы (38) для любого натурального n с $\alpha = \alpha_m(\chi) = \chi(m+1)$ следует равенство

$$\frac{1}{(\ln x)^{1-\alpha}} \Phi(x, \chi) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k(\chi)}{(\ln x)^{k+1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta + \frac{R_n(x, \chi)}{(\ln x)^{1-\alpha}}, \quad (39)$$

где $R_n(x, \chi)$ — остаток особого ряда. Вычислим частную сумму и оценим остаток.

Рассмотрим интеграл. Дополним L до замкнутого на расширенной плоскости контура H двумя лучами $L_1^{\pm} = \{s \mid t = \pm 1, -\infty \leq \sigma \leq -\tau \ln x\}$ (рис. 3). Пусть $\operatorname{Re} \alpha = \lambda$ и $\operatorname{Re} \zeta = u$. Согласно представлению Ханкеля для Γ -функции ([13, гл. V, § 2; гл. VII, § 1])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} + O\left(\left| \int_{L_1^+} e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta \right|\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} + O\left(\int_{-\infty}^{-\tau \ln x} e^u (\sqrt{u^2 + 1})^{k-\lambda} du\right),$$

так как $\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi$. Заменяем в интеграле u на $-u$ и учтем, что если $\lambda > 0$, то $(\sqrt{u^2 + 1})^{-\lambda} \leq \sqrt{2}(u+1)^{-\lambda}$, а если $\lambda \leq 0$, то это неравенство верно без $\sqrt{2}$. Тогда, выбирая произвольно $\gamma \in (0, 1)$, получим:

$$\int_{-\infty}^{-\tau \ln x} e^u (\sqrt{u^2 + 1})^{k-\lambda} du \leq e^{\pi} \sqrt{2} \int_{\tau \ln x}^{\infty} e^{-u} (u+1)^{k-\lambda} du \leq e^{-\gamma \tau \ln x} e^{\pi} \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-(1-\gamma)u} (u+1)^{k-\lambda} du.$$

Если учесть неравенство (14), то можем утверждать: существует такое число $\beta \in (0, 1)$, что

$$\int_{L_1^+} e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta = O(e^{-\beta \sqrt{\ln x}}).$$

Пусть $R > 0$ — число меньше радиуса сходимости ряда Тейлора функции $G(s, \chi)s^{-1}$ в точке $s = 1/m$. Тогда

$$\sum_{k=0}^n \frac{|a_k(\chi)|}{|(\ln x)^{k+1-\alpha}|} \leq \sum_{k=0}^n |a_k(\chi)| R^k \leq \sum_k |a_k(\chi)| R^k < +\infty.$$

Для суммы в формуле (39) получаем:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k(\chi)}{(\ln x)^{k+1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\zeta} \zeta^{k-\alpha} d\zeta = \sum_{k=0}^n \frac{a_k(\chi)}{\Gamma(\alpha-k)(\ln x)^{k+1-\alpha}} + O(e^{-\beta\sqrt{\ln x}}). \quad (40)$$

Оценим остаточный член в формуле (39). В интеграле, стоящем в каждом члене ряда, вернемся к старой переменной $s = a + \delta\zeta$. Остаточный член примет вид:

$$\frac{R_n}{(\ln x)^{1-\alpha}} = \sum_{k>n} \frac{a_k(\chi)}{2\pi i} \int_{L'} x^{s-a} (s-a)^{k-\alpha} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{x^{s-a}}{(s-a)^\alpha} \sum_{k>n} a_k(\chi) (s-a)^k ds.$$

Перестановка суммы и интеграла оправдана, так как при достаточно большом x контур L' находится внутри окружности C_R радиусом R с центром в точке $s = a$ и ряд сходится на L' равнолмерно. Этот ряд представляет собой остаток ряда Тейлора функции $G(s, \chi)s^{-1}$ в окрестности точки $s = a$. Обозначим его через $r_n(s)$ и воспользуемся его интегральным представлением ([13, гл. 1, § 5]):

$$r_n(s) = \frac{(s-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{G(z, \chi) z^{-1} dz}{(z-s)(z-a)^{n+1}}.$$

Оценим его на контуре L' . Обозначим через ρ расстояние между L' и окружностью C_R . Из определения L' видно, что $\rho = R - |\tau + i\delta|$. Так как $|\tau + i\delta| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)$ (см. обозначения на с. 62), то для всех достаточно больших x величина $1/\rho$ ограничена. Пусть $M = \max |G(s, \chi)s^{-1}|$ на окружности C_R . Если $s \in L'$, то

$$|r_n(s)| \leq \frac{M|s-a|^{n+1}}{\rho R^n}.$$

Интеграл по L' разобьем на три части: по γ^+ , γ^- и по правой полуокружности C_δ^+ , причем оценка по γ^- такая же, как по γ^+ . С некоторыми постоянными $C > 0$ и $C_1 > 0$:

$$\left| \int_{\gamma^+} \frac{x^{s-a}}{(s-a)^\alpha} r_n(s) ds \right| \leq C \int_{a-\tau}^a x^{\sigma-a} |s-a|^{n+1-\lambda} d\sigma \leq C_1 \int_0^{\tau \ln x} e^{-u} (\delta u)^{n+1-\lambda} \delta du < C_1 \frac{\Gamma(n+3)}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}.$$

По полуокружности C_δ^+ :

$$\left| \int_{C_\delta^+} \frac{x^{s-a}}{(s-a)^\alpha} r_n(s) ds \right| \leq \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{\cos \varphi} \delta^{n+2-\lambda} d\varphi = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{R_n}{(\ln x)^{1-\alpha}} = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\right).$$

Из этого равенства и формул (37), (39) и (40) следует равенство:

$$\sum_{n \leq x} \chi(d(n)) = \frac{x^{1/m}}{(\ln x)^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^n \frac{a_k(\chi)}{\Gamma(\alpha-k)(\ln x)^k} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\right).$$

Доказываемое утверждение следует из последнего равенства и формулы (19). $\square$

4. Заключение

Лемма 1 играет ключевую роль в методе контурного интегрирования подобно известной «ключевой лемме» дискретно эргодического метода. Она справедлива для рядов Дирихле с любой абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a > 0$. Но на пути ее применения к рядам с $\sigma_a < 1$ стояла приближенная формула Перрона, которая совместима с ней лишь при $\sigma_a \geq 1$. Теорема 1 снимает это препятствие. Пример вывода асимптотической формулы для частоты попадания значений функции $d(n)$ в заданную арифметическую прогрессию, приведенный в работе, показывает эффективность полученного варианта приближенной формулы Перрона.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел (Мир, М., 1967).
2. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел, (Наука, М., 1975).
3. Narckiewicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes, *Acta Arithm.*, **12** (3), 269 – 279 (1967).
4. Чанга М. Е. О числах, количество простых делителей которых принадлежит заданному классу вычетов, *Изв. РАН, Серия матем.*, **83** (1), 192 – 202 (2019).
5. Чанга М. Е. Методы аналитической теории чисел, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика М. — Ижевск, 2013, 228 с.
6. Фоменко О.М. Распределение значений мультипликативных функции по простому модулю, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **93** (6), 218 – 224 (1980).
7. Титчмарш Е. Теория функций (Наука, М., 1980).
8. Delange H. Généralisation du théorème de Ikeara, *Ann. Sci. Ecole norm. super.* **71**, 213 – 242 (1954).
9. Громаковская Л. А., Широков Б. М. Распределение числа бесквадратных делителей в классах вычетов, *Изв. ВУЗов, Математика*, **2020**, № 3, с. 3 – 11
10. Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел (Наука, М., 1972).
11. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра (Наука, М., 1976).
12. Ленг С. Алгебра (Наука, М., 1968).
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. (ФИЗМАТГИЗ, М., 1958).

REFERENCES

1. Prachar, K., 1967, *Raspredelenie prostykh chisel.* (russian) [Distribution of prime numbers] Translated from Deutsch by A. A. Karacuba. Edited by A. I. Vinogradov. With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov, and N. M. Korobov, Mir, M., 512 p.
2. Karatsuba, A. A., 1975, *Bases of the Analytical number theory*, (russian)[*Osnovy analiticheskoi teorii chisel*], Nauka, M., 184 p.

3. Narckiewicz W., 1967) On distribution of values of multiplicative functions in residue classes, *Acta Arithm.*, V. 12, No 3, pp. 269 – 279 .
4. Changa, I. E., 2019, On numbers for which the number of the prime divisors belong to given residue classes, [O chislakh, kolichestvo prostykh deliteley kotorykh prinadlejat zadannomu klassu vychetov], *Izv. RAN, Seriya. Matem.*, V. 83, No 1, pp. 192 –202 .
5. Changa, I. E., 2013, Methodes of the Analytical number theory, [Metody analiticheskoi teorii chisel], НИИ "Regularnaya i chaoticheskaya dinamika Mir, Igevc, 228 p.
6. Fomenko, O. M. 1980, Distribution of values of the multiplicative functions prime modulo [Raspredeleniye znacheniy multiplikativnykh funktsiy po prostomu modulyu], *Zapisky nauch. sem. LOMI*, V. 93, pp. 218 – 224.
7. Titchmarsh, E., 1980, The theory of functions. Trans from Eng. 2nd ed. [Toriya funktsiy. Per. s angl. 2-e izd.], Nauka, Moscow, 464 p.
8. Delange, H., 1954, Généralisation du théorème de Ikeara, *Ann. Sci. Ecole norm. super.* V. 71, pp. 213 – 242 .
9. Gromakovskaya, L. A., Shirokov, B. M., 2020, Distribution of a number of square-free divisors in residue classes, [Raspredeleniye chisla beskvadratnykh delitelei v klassakh vychetov], *Izv. Vuzov, Mathematics*, No 3, c. 3 – 11
10. Borevich Z. I., Shapharevich I. R. 1972, Number Theory, (russian) [Teoriya chisel], Nauka, M., 568 p.
11. Van der Varden B. L. 1976, Algebra, (russian), [Algebra] Translated from Deutsch by A. A. Belskii. Edited by Yu. I. Merzlyakov, Nauka, M., 648 p.
12. Leng, S., 1968, Algebra, (russian), [Algebra] Translated from English by E. S. Golod. Edited by A. I. Kostrikin, Mir, M., 564 p.
13. Lavrentyev M. A., Shabat B. V., 1958, Methodes of the Function Theory of the complex variable, (russian) [Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo], FISMATGIS, M., 680 p.

Получено 20.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-77-99

Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов

Е. И. Деза, Б. Мханна

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы перечисления некоторых графов специального вида. Именно, доказан ряд новых результатов о числе остовных деревьев и остовных лесов графов, играющих важную роль в прикладных задачах теории информации. Во-первых, рассмотрены свойства остовных сходящихся лесов ориентированных графов, участвующих в построении квазиметрики среднего времени первого прохода – обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова. Во-вторых, изучены характеристики остовных корневых лесов и остовных сходящихся лесов неориентированных и ориентированных графов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности – одной из мер близости вершин графовых структур, играющей важную роль при решении прикладных задач. Рассуждения проведены на основе нескольких простейших графовых моделей, в том числе на базе простого цикла, простого пути и их ориентированных аналогов.

В первом разделе (введении) представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы. Рассмотрена роль графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова – последовательностей случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующихся тем, что распределение вероятностей параметров процесса в следующий момент времени зависит только от параметров процесса в предыдущий момент. Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги – переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф (ориентированный граф) может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. Дано определение и раскрыта роль матрицы относительной лесной доступности неориентированных и ориентированных графов для решения прикладных задач теории информации.

Во втором разделе собраны базовые определения теории графов, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов работы. Дано определение графа и ориентированного графа, остовного подграфа, остовного корневого леса (для неориентированных графов) и остовного сходящегося леса (для ориентированных графов). Приведены примеры.

В третьем разделе дано определение чисел Фибоначчи, сформулирован и доказан ряд свойств чисел Фибоначчи, необходимых для получения основных результатов статьи в случае неориентированных пути и цикла.

В четвертом разделе доказаны две теоремы о перечислении графов, связанных с построением матрицы среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи

Маркова. Именно, найдено количество остовных сходящихся деревьев для ориентированного пути и цикла и остовных корневых деревьев для неориентированного пути и цикла; произведен подсчет остовных лесов, состоящих из двух деревьев, для тех же графовых структур. Результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$. Доказательства проведены на базе элементарных методов перечислительной комбинаторики.

В пятом разделе представлены результаты, связанные с перечислением остовных лесов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности неориентированного пути и цикла и их ориентированных аналогов. Найдено общее количество остовных сходящихся лесов для ориентированного пути и цикла и остовных корневых лесов для неориентированного пути и цикла; произведен подсчет остовных сходящихся лесов, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j в ориентированном пути и цикле, и остовных корневых лесов, в которых вершина i принадлежит дереву с корнем j в неориентированном пути и цикле. Как и ранее, результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$.

В шестом разделе (заключении) приведены основные выводы работы, намечены результаты дальнейших исследований.

Ключевые слова: граф, путь, цикл, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, остовной корневой лес неориентированного графа, цепь Маркова, среднее время первого прохода, матрица относительной лесной доступности.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. И. Де́за, Б. Мханна. Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 77 – 99.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-77-99

Questions of enumeration of spanning forests of selected graphs

E. I. Deza, B. Mhanna

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Mhanna Batool — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this article we consider questions of graph enumeration for some graphs of a special form. In fact, a number of new results have been proved on the number of spanning trees and spanning forests of graphs that play an important role in the applied problems of Information Theory. On the one hand, the properties of the spanning converging forests of oriented graphs involved in the construction of the mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains, are considered. On the other hand, the characteristics of spanning rooted forests and spanning converging forests of non-oriented and oriented graphs needed for the construction of a matrix of relative connectivity via forests, one

of the measures of proximity of the vertices of graph structures, which plays an important role in solving of applied problems, have been studied. The consideration is based on several simple graph models, including a simple cycle, a simple path and their oriented analogues.

The first section (introduction) presents the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article. The role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains is considered. In fact, a Markov chain is a mathematical model of some random process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event. The Markov chain can be depicted as an oriented weighted graph of transitions whose vertices correspond to the states of the chain and the arcs correspond to the transitions between them. On the other hand, any connected graph can be used as a basis for building a model of the simplest Markov chain: if a vertex i has degree k , all incident edges are converted into arcs with the weights $\frac{1}{k}$. The matrix of relative connectivity via forests for non-oriented and oriented graphs is defined; its role for solving important applied problems of Information Theory is disclosed.

The second section contains the basic definitions of Graph Theory necessary to formulate and prove the main results of the article. The definitions of a graph and an oriented graph, a spanning subgraph, a spanning rooted forest (for non-oriented graphs) and a spanning converging forest (for oriented graphs) are given. Some examples are represented.

In the third section, the definition of Fibonacci numbers is given, a number of properties of Fibonacci numbers necessary to obtain the main results of the article for undirected paths and cycles are formulated and proved.

In the fourth section, two theorems on the enumeration of graphs related to the construction of the mean first passage time matrix for a homogeneous ergodic Markov chain are proved. In fact, the number of spanning converging trees for the oriented path and the oriented cycle and the number of spanning rooted trees for the non-oriented path and the non-oriented cycle are given; the spanning forests consisting of two trees for the same graph structures are counted. Results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$. The proofs are based on elementary methods of enumerating Combinatorics.

The fifth section presents the results related to enumeration of spanning forests needed for construction of the matrix of relative connectivity via forests for the non-oriented paths and cycles and their oriented analogues. Total number of spanning converging forests (for oriented paths and cycles) and total number of spanning rooted forests (for non-oriented paths and cycles) are found; enumeration of the spanning converging forests, in which a vertex i belongs to a tree converging to a vertex j (for the oriented paths and cycles), and enumeration of the spanning rooted forests, in which a vertex i belongs to a tree with a root j (for the non-oriented paths and cycles) are represented. As before, results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$.

The sixth section (conclusion) presents the main conclusions of the article, outlines the ideas of further studies.

Keywords: graph, path, cycle, spanning converging forest of an oriented graph, spanning rooted forest of an non-oriented graph, Markov chain, mean first passage time, matrix of relative connectivity via forests.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. I. Deza, B. Mhanna, 2021, "Questions of enumeration of spanning forests of selected graphs ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 77 – 99.

1. Введение

Вопросы перечисления тех или иных графовых структур (помеченных, непомеченных, ориентированных, неориентированных и др.) представляют собой значительную и хорошо разра-

ботанную часть классической теории графов. Особое место среди перечислительных проблем занимают утверждения, связанные с подсчетом тех или иных деревьев и, как естественное обобщение, лесов (как “несвязных деревьев”). При этом интерес представляют не только хорошо известные теоремы о числе ребер дерева на n вершинах (у такого дерева имеется ровно $n - 1$ ребро) и о числе деревьев на n вершинах при $n \geq 2$ (на n вершинах можно построить ровно n^{n-2} помеченных дерева), но и менее распространенные, но имеющие большое прикладное значение теоремы о количестве древовидных графовых структур того или иного вида.

Так, важное место в прикладных задачах теории информации занимают вопросы, связанные с исследованием обобщенных метрических структур на цепях Маркова. Напомним, что *цепью Маркова* называется последовательность одинаковых случайных испытаний, в которой вероятность исхода следующего испытания зависит только от исхода испытания, непосредственно предшествующего ему. Другими словами, цепь Маркова представляет собой последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующуюся тем, что “при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого”. [4]

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги - переходам между ними. Вес дуги (i, j) , связывающей вершины s_i и s_j , будет равен вероятности p_{ij} перехода из первого состояния во второе.

Процесс будет *эргодическим*, если построенный взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице.

С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный ориентированный граф по следующему закону: если вершина i имеет степень k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$ является *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j , определяемое как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ - математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geq 1 : X_p = j \mid X_0 = i\}$.

Матрицу M можно получить, пользуясь исследованием ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Именно, имеет место следующий результат ([6], [10], [16], [17], [18], [19]).

Пусть $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$. Пусть Γ - взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T . Тогда среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} - суммарный вес входящих лесов орграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , q_j - суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, исследование количества сходящихся лесов ориентированных графов, используемых для моделирования марковских процессов, является естественной составной частью указанной проблематики. Полученные нами результаты в этой области – доказательство теорем о числе остовных деревьев и остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных путей и циклов – представлены в разделе 4 работы.

Другой пример. Определим матрицу относительной лесной доступности графа G на n вершинах по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f - общее количество остовных корневых лесов графа G . Для ориентированного случая определим матрицу относительной лесной доступности орграфа Γ на n вершинах по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных сходящихся лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному и тому же дереву, сходящемуся к j , а f - общее количество остовных сходящихся лесов орграфа G ([11], [9], [8]). Матрица относительной лесной доступности является одной из известных мер близости между вершинами графов и орграфов; особенно часто она используется в приложениях, связанных с различными аспектами алгебраической теории графов.

Из определения матрицы относительной лесной доступности следует, что информация о количестве тех или иных типов остовных лесов графов и ориентированных графов, использующихся при решении прикладных задач, существенна для проведения соответствующих исследований. Полученные нами результаты в этой области - доказательство теорем о числе остовных лесов ориентированных и неориентированных путей и циклов - представлены в разделе 5 работы.

Разделы 2 и 3 работы носят вспомогательный характер. Раздел 2 содержит базовую информацию о графовых структурах, фигурирующих в исследовании. Раздел 3 посвящен доказательству свойств последовательности чисел Фибоначчи, существенно использующихся при доказательстве теорем в случае неориентированных графовых конструкций.

2. Остовные леса: базовые определения

Для формулировки и доказательства основных результатов статьи вспомним базовые понятия теории неориентированных и ориентированных графов. [5], [6], [10]

Неориентированный граф (граф) G - пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ - множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ - некоторое подмножество множества неупорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством ребер графа G .

Простейшими графами являются *неориентированный путь* $P_n = (V, E)$ (рис. 2.1), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, и *неориентированный цикл* $C_n = (V, E)$ (рис. 2.2), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$.

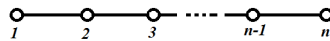


Рис. 2.1. Неориентированный путь P_n , $n \geq 2$.

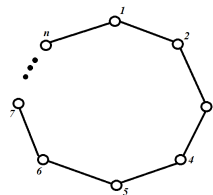


Рис. 2.2. Неориентированный цикл C_n , $n \geq 3$.

Подграфом графа G называется любой граф, множество вершин которого является подмножеством вершин графа G , а множество ребер является подмножеством множества ребер графа G . *Остовный подграф* графа G - подграф, содержащий все вершины графа G .

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющий их путь. Компонентой графа G называется максимальный связный подграф графа G .

Дерево – связный граф, не содержащий циклов. *Корневое дерево* – дерево, в котором выбрана одна вершина, называемая *корнем*. *Корневое остовное дерево* графа G – остовный подграф графа G , являющийся корневым деревом.

Лес – граф, каждая компонента которого является деревом. *Корневой остовной лес* графа G – остовный подграф графа G , все компоненты которого являются корневыми деревьями.

Ориентированный граф (орграф) Γ – пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{\langle i, j \rangle | i, j \in V, i \neq j\}$ – некоторое подмножество множества упорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством дуг орграфа Γ . Другими словами, ориентированный граф – это граф, ребрам которого присвоено направление.

Простейшими орграфами являются *ориентированный путь* $\vec{P}_n = \langle V, E \rangle$ (рис. 2.3), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle\}$ и *ориентированный цикл* $\vec{C}_n = \langle V, E \rangle$ (рис. 2.4), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, n \rangle\}$.

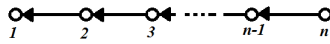


Рис. 2.3. Ориентированный путь $\vec{P}_n$, $n \geq 2$.

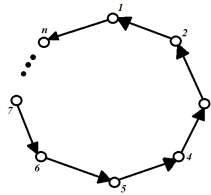


Рис. 2.4. Ориентированный цикл $\vec{C}_n$, $n \geq 3$.

Подорграфом орграфа Γ называется любой орграф, множество вершин которого является подмножеством вершин орграфа Γ , а множество дуг является подмножеством множества дуг орграфа Γ . *Остовной подорграф* графа Γ – подорграф, содержащий все вершины орграфа Γ .

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связан. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для исходящей степени значение 1.

Сходящийся лес орграфа Γ – остовной подорграф орграфа Γ , все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что сходящийся лес *сходится к корням* его сходящихся деревьев.

Как было сказано выше, нас будут интересовать несколько типов остовных лесов неориентированных пути и цикла и их ориентированных аналогов. Для построения матрицы среднего времени первого прохода цепи Маркова нам потребуется информация о числе остовных сходящихся 2-деревьевых лесов ориентированного графа, соответствующего данной марковской цепи. Для построения матрицы относительной лесной доступности нам потребуется информация об общем числе остовных лесов исследуемого графа или орграфа, и поведении остовных лесов, так или иначе связанных с заданной парой вершин указанных графовых конструкций.

3. Числа Фибоначчи: определения и простейшие свойства

Числами Фибоначчи называются элементы рекуррентно задаваемой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$. Таким образом, последовательность Фибоначчи начинается с элементов 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она использовалась значительно раньше, чем стала известна в Европе. На Западе эта последовательность появилась благодаря Леонардо Пизанскому, известному как Фибоначчи, который исследовал ее в своей "Книге абака" при решении так называемой задачи о кроликах.

Числа Фибоначчи обладают рядом интересных свойств, которые можно найти, например, в [1]. В частности, они удовлетворяют многочисленным тождествам, некоторые из которых будут использованы в нашей работе.

Именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1.

Имеют место следующие тождества:

1. $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$;
2. $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
3. $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$;
4. $1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + 2u_{2n} = u_{2(n+1)}$;
5. $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2 \cdot 2} + nu_{2 \cdot 1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$;
6. $u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2 \cdot 2} + (n-2)(n-1)u_{2 \cdot 1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$;
7. $u_{2n} + 2u_{2(n-1)} + 2u_{2(n-2)} + \dots + 2u_4 + 2u_2 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первые три тождества хорошо известны (см., например, [1]). Их можно доказать, пользуясь методом математической индукции.

Так, для доказательства второго свойства убедимся, что оно имеет место для $n = 1$ и $n = 2$: замечая, что $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ и $u_5 = 5$, мы получим, что $u_2 = u_3 - 1$, и $u_2 + u_4 = u_5 - 1$.

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n+1$ предположим, что тождество $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение, докажем соотношение $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} + u_{2(n+1)} = u_{2(n+1)+1} - 1$ для $n+1$.

Действительно,

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} + u_{2(n+1)} = (u_{2n+1} - 1) + u_{2(n+1)} = (u_{2n+1} + u_{2n+2}) - 1 = u_{2n+3} - 1 = u_{2(n+1)+1} - 1.$$

Аналогичным образом можно доказать третье свойство.

Для доказательства четвертого тождества метод математической индукции использовать необязательно. Достаточно заметить, что $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ и воспользоваться свойством 2:

$$\begin{aligned} 1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + 2u_{2n} &= 1 + (u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + u_{2n}) + u_{2n} = \\ &= 1 + (u_{2n+1} - 1) + u_{2n} = u_{2n+2} = u_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Для доказательства пятого тождества вновь воспользуемся методом математической индукции. Прежде всего убедимся, что тождество имеет место для $n = 1$ и $n = 2$. Действительно, для $n = 1$ имеют место соотношения $1 \cdot u_1 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 = u_4$. Для $n = 2$ получаем соотношения $1 \cdot u_4 + 2 \cdot u_2 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 = u_6$.

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n + 1$ предположим, что тождество $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + nu_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение и только что доказанное нами второе тождество, записанное в виде $u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n+1)} + 1 = u_{2(n+1)+1}$, докажем соотношение $1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = u_{2(n+2)}$ для $n+1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = \\ &= (u_{2(n+1)} + u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \\ &+ 1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + n \cdot u_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = \\ &= u_{2(n+1)+1} + u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = u_{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Впрочем, и в этом случае можно обойтись без применения индукции. Последовательно пользуясь свойством 2 и свойством 3, получим:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = \\ &= (u_{2(n+1)} + u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \\ &+ (u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + n \cdot u_{2,1} + 1) + \\ &+ (u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \dots + 1 = \\ &= u_{2(n+1)+1} + u_{2n+1} + u_{2(n-1)+1} + \dots + 1 = u_{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Для доказательства шестого тождества

$$u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$$

также воспользуемся методом математической индукции.

Прежде всего убедимся, что тождество имеет место для $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Действительно, для $n = 1$ имеют место соотношения $u_2 = u_1 + u_3 - 2$. Для $n = 2$ получаем соотношения $u_4 + 2 = u_3 + u_5 - 2$. Для $n = 3$ имеет место первая "полноценная" проверка:

$$u_6 + 2u_2 + 2 \cdot 3 = 8 + 2 \cdot 1 + 6 = 16 = 5 + 8 - 2 = u_5 + u_7 - 2.$$

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n + 1$ предположим, что тождество $u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение и только что доказанное нами четвертое тождество, записанное в виде $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + 3 \cdot u_{2(n-2)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + nu_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$, докажем соотношение $u_{2(n+1)} + 2u_{2(n-1)} + 2 \cdot 3u_{2(n-2)} + 3 \cdot 4u_{2(n-3)} + \dots + (n-2)(n-1)u_{2,2} + (n-1)nu_{2,1} + n(n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)-1} + u_{2(n+1)+1} - 2$ для $n+1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} & u_{2(n+1)} + 2u_{2(n-1)} + 2 \cdot 3u_{2(n-2)} + 3 \cdot 4u_{2(n-3)} + \dots + (n-2)(n-1)u_{2,2} + (n-1)nu_{2,1} + n(n+1) \cdot 1 = \\ & u_{2(n+1)} + (2 \cdot 1u_{2(n-1)} + 2 \cdot 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 2 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + 2(n-2)u_{2,2} + 2(n-1)u_{2,1} + 2n \cdot 1) + \\ & + (2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1) = \\ & u_{2(n+1)} + 2(1u_{2(n-1)} + 2u_{2(n-2)} + 3u_{2(n-3)} + 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1) + \\ & (u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1) - u_{2n} = \end{aligned}$$

$$u_{2(n+1)} + 2u_{2n} + (u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2) - u_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n} + u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = u_{2n+1} + u_{2n+3} - 2.$$

Для доказательства последнего свойства заметим, что

$$u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = (u_{2n-1} - 1) + (u_{2n+1} - 1)$$

и, пользуясь свойством $u_{2n+1} - 1 = u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$ (свойство 2), получим:

$$u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = (u_{2n-1} - 1) + (u_{2n+1} - 1) = 2u_2 + 2u_4 + \dots + 2u_{2(n-1)} + u_{2n}.$$

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

В следующих параграфах мы используем доказанные свойства чисел Фибоначчи при получении результатов, связанных с перечислением корневых остовных лесов неориентированного пути и неориентированного цикла.

4. Перечисление остовных лесов пути и цикла, связанных с квазисимметрикой среднего времени первого прохода

Напомним, что если Γ – взвешенный оргграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны вероятностям перехода некоторой однородной эргодической цепи Маркова, то среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в данной цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес входящих лесов оргграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j ; q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, для построения матрицы среднего времени первого прохода нам нужна информация о количестве корневых (сходящихся) остовных деревьев и корневых (сходящихся) остовных 2-деревьев лесов ориентированных и неориентированных графов. В этом разделе представлены доказательства полученных нами результатов для неориентированных и ориентированных путей и циклов.

ТЕОРЕМА 4.1.

Для числа корневых остовных деревьев имеют место следующие утверждения:

- число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно 1;
- число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно n ;
- число остовных корневых деревьев неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно n ;
- число остовных корневых деревьев неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного пути $\vec{P}_n$ существует ровно одно остовное корневое дерево: выбирая в качестве корня вершину 1, мы получаем остовное дерево, сходящееся к 1, которое совпадает с самим графом $\vec{P}_n$; выбирая в качестве корня любую вершину $i \neq 1$, мы убеждаемся, что в графе $\vec{P}_n$ не существует остовного дерева, сходящегося к i .

В. Для ориентированного цикла $\vec{C}_n$ существует ровно одно остовное дерево, сходящееся к фиксированной вершине i : для его построения достаточно уничтожить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Выбирая

вершину i из n возможных вершин оргграфа $\vec{C}_n$, мы получаем n остовных деревьев оргграфа $\vec{C}_n$; каждое из них представляет собой ориентированный путь на $n - 1$ вершине.

С. Для неориентированного пути P_n существует ровно одно остовное дерево с фиксированным корнем i : оно совпадает с P_n . Выбирая вершину i из n вершин графа P_n , мы получаем n остовных корневых деревьев графа P_n ; каждое из них совпадает с P_n .

Д. Для неориентированного цикла C_n существует ровно n остовных деревьев с фиксированным корнем i : для построения одного из таких деревьев достаточно уничтожить любое ребро $(j, j + 1)$ из n ребер графа C_n . Выбирая вершину i из n возможных вершин графа C_n , мы получаем n^2 остовных деревьев графа C_n ; каждое из них представляет собой неориентированный путь на $n - 1$ вершине. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2.

Для числа 2-деревьевых остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно $n - 1$;
- число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно $\frac{n(n-1)}{2}$;
- число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно $\frac{n(n^2-1)}{6}$;
- число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов оргграфа $\vec{P}_n$ рассмотрим две возможности. Сначала предположим, что одно из двух деревьев нашего леса сходится к вершине 1, а другое - к произвольной вершине $j \neq 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае два дерева, образующие лес, определены однозначно; искомым 2-деревьевым сходящимся лесом получается уничтожением дуги $\langle j, j - 1 \rangle$. При этом $n - 1$ возможных выборов j обеспечивает $n - 1$ лес. Предположив, что ни одно из двух деревьев 2-деревьевого леса не сходится к 1, то есть попытавшись найти два дерева с корнями $i \neq 1, j \neq 1$, мы убеждаемся, что такая ситуация невозможна.

В. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов оргграфа $\vec{C}_n$ выберем две вершины i, j , делегировав им звание корня одного из двух сходящихся деревьев. Для фиксированных корней i, j искомым 2-деревьевым сходящимся лесом определен однозначно: он получается уничтожением дуг $\langle j, j - 1 \rangle$ и $\langle i, i - 1 \rangle$ (индексы вершин цикла рассматриваем по модулю n). При этом число $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ сочетаний из n по 2, соответствующее возможным выборам пары i, j корней двух сходящихся деревьев обеспечивает $\frac{n(n-1)}{2}$ лесов.

С. Для подсчета остовных 2-деревьевых корневых лесов графа P_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев и заметим, что при фиксированных i, j , $1 \leq i < j \leq n$, мы получаем ровно $j - i$ остовных 2-деревьевых корневых лесов графа P_n . Каждый из этих лесов может быть получен уничтожением одного из $j - i$ ребер $(i, i + 1), (i + 1, i + 2), \dots, (j - 1, j)$ графа P_n .

Так, существует ровно 1 остовной 2-деревьевый лес, в котором деревья имеют корни 1 и 2: одно дерево представляет собой изолированную вершину 1, второе - путь на $n - 1$ вершине 2, 3, ..., n с выделенной вершиной-корнем 2. Существует ровно 2 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 1 и 3: в первом случае одно дерево представляет собой изолированную вершину 1, второе - путь на $n - 1$ вершине 2, 3, ..., n с выделенной вершиной-корнем 3; во втором случае мы получаем путь на двух вершинах 1, 2 с выделенной вершиной-корнем 1 и

путь на $n-3$ вершинах $3, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем 3. Существует ровно 3 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 1 и 4: в первом случае одно дерево представляет собой изолированную вершину 1, второе - путь на $n-1$ вершине $2, 3, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем 4; во втором случае мы получаем путь на двух вершинах $1, 2$ с выделенной вершиной-корнем 1 и путь на $n-3$ вершинах $3, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем 4; в третьем случае мы получаем путь на трех вершинах $1, 2, 3$ с выделенной вершиной-корнем 1 и путь на $n-4$ вершинах $4, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем 4. Рассуждения легко продолжить, рассмотрев любую пару вершин i, j , $1 \leq i < j \leq n$. Существует ровно $j-i$ остовных 2-деревьевых лесов, в которых деревья имеют корни i и j : в первом случае одно дерево представляет собой путь на вершинах $1, 2, \dots, i$ с выделенной вершиной-корнем i , в то время как второе дерево является путем на вершинах $i+1, i+2, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j ; во втором случае мы получаем путь на вершинах $1, 2, \dots, i, i+1$ с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $i+2, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j ; ...; в последнем случае мы получаем путь на вершинах $1, 2, \dots, j-1$ с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $j, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j .

Таким образом, фиксируя вершину $i = 1$ и меняя вершину j от 2 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n-1)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 2$ и меняя вершину j от 3 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n-2)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 3$ и меняя вершину j от 4 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n-3)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; ...; наконец, фиксируя вершину $i = n-1$ и вершину $j = n$, мы получим ровно один остовный 2-деревьевый корневой лес. Непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых лесов графа P_n красивую формулу $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots + (n-1) \cdot 1$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-3) & + & (n-2) & + & (n-1) & + \\
 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-3) & + & (n-2) & + & & \\
 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-3) & + & & & & \\
 & & & & & & \dots & & & & & + \\
 & & & & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

$$= 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots + (n-1) \cdot 1.$$

Для получения явной формулы произведем формальное суммирование:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j-i) = \\
 & = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+(n-1)) = \\
 & = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i = \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
 \end{aligned}$$

D. Для подсчета 2-деревьевых корневых остовных лесов графа C_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев и заметим, что при фиксированных i, j , $1 \leq i < j \leq n$, мы получаем ровно $(j-i)(n-(j-i))$ 2-деревьевых корневых остовных лесов графа P_n . Каждый из этих лесов может быть получен одновременным уничтожением одного из $j-i$ ребер $(i, i+1), (i+1, i+2), \dots, (j-1, j)$ и одного из $n-(j-i)$ ребер $(j, j+1), (j+1, j+2), \dots, (i-1, i)$ графа C_n . Нетрудно убедиться в том, что существует $n-1$ возможность выбора корней i, j , $j-i=1$: выбираем j из множества $2, 3, \dots, n$, при этом i определяется однозначно;

для каждого из таких выборов имеем $(j-i)(n-(j-i)) = 1 \cdot (n-1)$ 2-деревьевых лесов. Нетрудно убедиться в том, что существует $n-2$ возможности выбора корней i, j , $j-i=2$: выбираем j из множества $3, \dots, n$, при этом i определяется однозначно; для каждого из таких выборов имеем $(j-i)(n-(j-i)) = 2 \cdot (n-2)$ 2-деревьевых лесов. Продолжая рассуждения, наконец убедимся в том, что существует 1 возможность выбора корней i, j , $j-i=n-1$: выбираем j равным n , при этом i определяется однозначно как 1; для такого выбора имеем $(j-i)(n-(j-i)) = (n-1) \cdot (n-(n-1)) = (n-1) \cdot 1$ 2-деревьевых лесов.

Таким образом, непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых остовных лесов графа C_n красивую формулу $1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \dots + (n-1) \cdot 1^2$. Для получения явной формулы произведем формальное суммирование:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (j-i)(n-(j-i)) &= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)^2 = \\ &= n^2 \sum_{i=1}^{n-1} i - 2n \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \\ &= n^2 \frac{(n-1)n}{2} - 2n \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

5. Перечисление лесов, связанных с матрицей относительной лесной доступности

Напомним, что матрица относительной лесной доступности графа G (орграфа Γ) на n вершинах определяется по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f - общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ). В этом разделе приведены доказательства теорем, дающих формулы для числа соответствующих остовных конструкций в ориентированных и неориентированных путях и циклах.

ТЕОРЕМА 5.1.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно 2^{n-1} ;
- число остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно $2^n - 1$;
- число остовных корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно числу Фибоначчи u_{2n} ;
- число остовных корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно сумме $u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ всех $n-1$ дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из $n-1$ элемента равно 2^{n-1} , мы получим ровно 2^{n-1} остовных корневых сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$.

В. Для ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое непустое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle\}$ всех n дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из n элементов равно 2^n , при этом из них одно - пустое (соответствующий орграф $\vec{C}_n$ не является корневым сходящимся лесом), мы получим ровно $2^n - 1$ остовных корневых сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$.

С. Для неориентированного пути P_n , $n \geq 1$, при получении остовного корневого леса воспользуемся соображениями индукции и доказанными выше свойствами чисел Фибоначчи.

Для $n = 1$ мы имеем ровно один (то есть $u_2 = 1$) корневой лес графа P_n . Для $n = 2$ мы имеем ровно три (то есть $u_4 = 3$) корневых леса графа P_n . Они получаются так: изолированная вершина-корень 2 "расширяет" предыдущий случай $n = 1$; вершина 2, связанная с корнем 1, еще раз "расширяет" предыдущий случай $n = 1$; наконец, вершина 2, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 1, дает еще один дополнительный случай, то есть мы получаем для подсчета остовных корневых лесов графа P_2 формулу $2u_2 + 1$. Нетрудно убедиться в том, что $2u_2 + 1 = 3 = u_4$.

Для доказательства общего случая заметим (свойство 4 чисел Фибоначчи, доказанное выше), что

$$u_{2n} = 2u_{2n-2} + u_{2n-4} + \dots + u_2 + 1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф P_{n+1} добавлением к пути P_n новой вершины $n+1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

I. Если $n+1$ - изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для P_n , другими словами, u_{2n} .

II. Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то мы вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для P_n , другими словами, u_{2n} .

III. Если $n+1$ связана с n ребром и является корнем, то мы получаем следующие случаи.

1. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-1$ вершине $n-1, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-1}), всего $u_{2(n-1)}$ возможностей.

2. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-2$ вершинах $n-2, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-2}), всего $u_{2(n-2)}$ возможностей.

3. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, n-2$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-3$ вершинах $n-3, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-3}), всего $u_{2(n-3)}$ возможностей.

...

$n-2$. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 3$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на 2 вершинах $2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_2), всего $u_{2 \cdot 2}$ возможностей.

$n-1$. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 3, 2$ с корнем $n+1$ и единственный корневой лес на одной вершине 1 ((то есть единственный корневой лес графа P_1), всего $u_{2 \cdot 1}$ возможностей.

n . Наконец, дерево на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 2, 1$ (то есть сам путь P_{n+1}) с корнем $n+1$, всего одна возможность.

Данный пересчет дает число $u_{2(n+1)}$ корневых остовных лесов графа P_{n+1} :

$$2u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_4 + u_2 + 1 = u_{2(n+1)}.$$

Д. Для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, рассмотрим несколько случаев.

I. Если в графе C_n уничтожено ребро $(1, n)$, то пересчет соответствующих корневых остовных лесов сводится к пересчету корневых остовных лесов пути P_n на n вершинах; мы доказали, что имеется ровно u_{2n} таких лесов.

II. Если в остовном корневом лесе графа C_n ребро $(1, n)$ присутствует, пересчет несколько усложняется. Рассмотрим все возможные ситуации.

1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$ и нет ребра $(n, n - 1)$.

1.1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$ и нет ребра $(1, 2)$. В этом случае на двух вершинах $1, n$ можно задать два корневых дерева (выберите корень 1 или корень n), в то время как на вершинах $2, 3, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-2}) на $n - 2$ вершинах, всего $u_{2(n-2)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $2 \cdot u_{2(n-2)}$ возможностей для случая 1.1.

1.2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(1, 2)$ и нет ребра $(2, 3)$. В этом случае на трех вершинах $2, 1, n$ можно задать три корневых дерева (выберите корень $1, 2$ или n), в то время как на вершинах $3, 4, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-3}) на $n - 3$ вершинах, всего $u_{2(n-3)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $3 \cdot u_{2(n-3)}$ возможностей для случая 1.2.

1.3. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(1, 2)$, есть ребро $(2, 3)$ и нет ребра $(3, 4)$. В этом случае на четырех вершинах $3, 2, 1, n$ можно задать четыре корневых дерева (выберите корень $1, 2, 3$ или n), в то время как на вершинах $4, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-4}) на $n - 4$ вершинах, всего $u_{2(n-4)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $4 \cdot u_{2(n-4)}$ возможностей для случая 1.3.

...

1. $n - 3$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 4, n - 3)$, и нет ребра $(n - 3, n - 2)$. В этом случае на $n - 2$ вершинах $n - 3, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать $n - 2$ корневых дерева (выберите корень $1, 2, \dots, n - 3$ или n), в то время как на вершинах $n - 2, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_2) на 2 вершинах, всего $u_{2,2}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 2) \cdot u_{2,2}$ возможностей для случая 1. $n - 3$.

1. $n - 2$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае на $n - 1$ вершине $n - 2, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать $n - 1$ корневое дерево (выберите корень $1, 2, \dots, n - 2$ или n), в то время как на вершине $n - 1$ можно построить один корневой лес (пути P_1), формально, $u_{2,1}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 1) \cdot u_{2,1}$ возможностей для случая 1. $n - 2$.

1. $n - 1$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 3, n - 2), (n - 2, n - 1)$. В этом случае на $n - 1$ вершинах $n - 1, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать n корневых деревьев (выберите корень $1, 2, \dots, n - 1$ или n). Поскольку никаких "дополнительных" вершин в этом случае нет (одна возможность), то формально мы получаем $n \cdot 1$ возможностей для случая 1. $n - 1$.

Суммируя, получаем для случая 1 величину $2u_{2(n-2)} + 3u_{2(n-3)} + \dots + (n - 1)u_{2,1} + n \cdot 1$.

2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$ и нет ребра $(n - 1, n - 2)$.

2.1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$ и нет ребра $(1, 2)$. В этом случае на трех вершинах $1, n, n - 1$ можно задать три корневых дерева (выберите корень $1, n$ или $n - 1$), в то время как на $n - 3$ вершинах $2, 3, \dots, n - 2$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-3}), всего $u_{2(n-3)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $3 \cdot u_{2(n-3)}$ возможностей для случая 2.1.

2.2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$, есть ребро $(1, 2)$ и нет ребра $(2, 3)$. В этом случае на четырех вершинах $2, 1, n, n - 1$ можно задать четыре корневых дерева (выберите корень $2, 1, n$ или $n - 1$), в то время как на $n - 4$ вершинах $3, \dots, n - 2$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-4}), всего $u_{2(n-4)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $4 \cdot u_{2(n-4)}$ возможностей для случая 2.2.

2.3. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$, есть ребро $(1, 2)$, есть ребро $(2, 3)$ и нет ребра $(3, 4)$. В этом случае на пяти вершинах $3, 2, 1, n, n - 1$ можно задать пять корневых деревьев (выберите корень $3, 2, 1, n$ или $n - 1$), в то время как на $n - 5$ вершинах $4, \dots, n - 2$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-5}), всего $u_{2(n-5)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $5 \cdot u_{2(n-5)}$ возможностей для случая 2.3.

...

2.n - 3. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 4, n - 3)$, и нет ребра $(n - 3, n - 2)$. В этом случае на $n - 2$ вершинах $n - 3, \dots, 3, 2, 1, n, n - 1$ можно задать $n - 2$ корневых дерева (выберите корень $n - 3, \dots, 3, 2, 1, n$ или $n - 1$), а на вершине $n - 2$ можно построить один корневой лес (пути P_1), формально, $u_{2,1}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 1) \cdot u_{2,1}$ возможностей для случая 1.n - 3.

2.n - 2. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 4, n - 3), (n - 3, n - 2)$. В этом случае на n вершинах $n - 2, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать n корневых деревьев (выберите корень $n - 2, \dots, 3, 2, 1$ или n). Поскольку никаких "дополнительных" вершин в этом случае нет (одна возможность), то формально мы получаем $n \cdot 1$ возможностей для случая 2.n - 2.

Суммируя, получаем для случая 2 величину $3u_{2(n-3)} + 4u_{2(n-4)} + \dots + (n - 1)u_{2,1} + n \cdot 1$.

...

n - 2. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, ..., имеется ребро $(4, 3)$ и нет ребра $(3, 2)$.

n - 2.1. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, ..., имеется ребро $(4, 3)$, нет ребра $(3, 2)$ и нет ребра $(1, 2)$. В этом случае на $n - 1$ вершинах $1, n, n - 1, \dots, 3$ можно задать $n - 1$ корневое дерево (выберите корень), а на вершине 2 один корневой лес, формально $u_{2,1}$ возможностей, . Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 1) \cdot u_{2,1}$ возможностей для случая n - 2.1.

n - 2.2. В корневом лесу имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, ..., имеется ребро $(4, 3)$, нет ребра $(3, 2)$ и есть ребро $(1, 2)$. В этом случае на n вершинах $2, 1, n, \dots, 3$ можно задать n корневых деревьев (выберите корень $2, 1, n, \dots, 3$). Поскольку никаких "дополнительных" вершин в этом случае нет (одна возможность), то формально мы получаем $n \cdot 1$ возможностей для случая n - 2.2.

Суммируя, получаем для случая n - 2 величину $(n - 1)u_{2,1} + n \cdot 1$.

n - 1. В корневом лесу имеются все ребра, кроме ребра $(2, 1)$. В этом случае на n вершинах $2, 1, n, \dots, 3$ можно задать n корневых деревьев (выберите корень $2, 1, n, \dots, 3$). Поскольку никаких "дополнительных" вершин в этом случае нет (одна возможность), то формально мы получаем $n \cdot 1$ возможностей для случая n - 1.

Завершив рассмотрение единственной возможности случая I и всех $n - 1$ возможностей случая II, просуммируем полученные в ходе наших рассуждений величины:

$$\begin{array}{rcl}
 u_{2n} & + & \\
 2u_{2(n-2)} & + & 3u_{2(n-3)} + 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1 + \\
 & & 3u_{2(n-3)} + 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1 + \\
 & & 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1 + \\
 & & \dots \\
 & & (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1 + \\
 & & (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1 + \\
 & & n \cdot 1 =
 \end{array}$$

$$= u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1.$$

Поскольку (свойство 6 чисел Фибоначчи, доказанное выше)

$$u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2,$$

то можно утверждать, что количество корневых лесов неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, равно $u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

ТЕОРЕМА 5.2.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно:

$$f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n \end{cases}; \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1, \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n, \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

- число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n, n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно

$$f_{ii} = 2^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{(j-i)-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n-(i-j)-1}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n \end{cases};$$

- число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2\min(i,j)-1} \cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i, j = 1, \dots, n$;
- число остовных корневых лесов неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2|j-i|} + u_{2(n-|j-i|)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$.

И. Рассматривая величину f_{11} , нетрудно убедиться в том, что в любом сходящемся остовном лесе ориентированного пути вершина 1 всегда принадлежит дереву, сходящемуся к вершине 1. Таким образом, f_{11} равно общему числу остовных сходящихся лесов орграфа $\vec{P}_n$, то есть 2^{n-1} .

II. Рассмотрим величину $f_{ii}, i \neq 1$. Чтобы получить дерево, сходящееся к i , нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i , необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i-1, i-2 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ оставшихся $n-2$ дуг ориентированного пути $\vec{P}_n$; Это можно сделать 2^{n-2} способами.

III. Рассмотрим величину $f_{i1}, i \neq 1$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между 1 и i . Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина $i \neq 1$ принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle$ оставшихся $n-i$ дуг ориентированного пути $\vec{P}_n$; Это можно сделать 2^{n-i} способами.

IV. Рассмотрим величину f_{ij} , $2 \leq j < i \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j \rangle$, $\langle j+2, j+1 \rangle$, ..., $\langle i, i-1 \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $2 \leq j < i \leq n$, необходимо, сохранив дуги $\langle j+1, j \rangle$, $\langle j+2, j+1 \rangle$, ..., $\langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \dots, \langle j-2, j-1 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ оставшихся $n - (i-j) - 2$ дуг ориентированного пути $\vec{P}_n$; Это можно сделать $2^{n-(i-j)-2}$ способами.

V. Рассматривая величину f_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, нетрудно убедиться в том, что она равна нулю: деревьев, содержащих i и сходящихся к j , в данном случае не существует.

B. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$.

I. Рассматривая величину f_{ii} , $1 \leq i \leq n$, убедимся, что для получения дерева, сходящегося к i , нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i , необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i-1, i-2 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle$ оставшихся $n-1$ дуг ориентированного цикла $\vec{C}_n$; это можно сделать 2^{n-1} способами.

II. Рассмотрим величину f_{i1} , $i \neq 1$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между 1 и i . Кроме того, выбор корня 1 требует уничтожения дуги $\langle 1, n \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина $i \neq 1$ принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle 1, n \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle$, оставшихся $n-i$ дуг ориентированного цикла $\vec{C}_n$; это можно сделать $2^{n-i} = 2^{n-(i-1)-1}$ способами.

III. Рассмотрим величину f_{ij} , $2 \leq j < i \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $2 \leq j < i \leq n$, необходимо, сохранив $i-j$ дуг $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j-1, j-2 \rangle$ оставшихся $n - (i-j) - 1$ дуг ориентированного цикла $\vec{C}_n$; это можно сделать $2^{n-(i-j)-1}$ способами.

IV. Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle i, i-1 \rangle, \langle i-1, i-2 \rangle, \dots, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j+1, j \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $1 \leq i < j \leq n$, необходимо, сохранив $n - (j-i)$ дуг $\langle i, i-1 \rangle, \langle i-1, i-2 \rangle, \dots, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j+1, j \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle j-1, j-2 \rangle$ оставшихся $j-i-1$ дуг ориентированного цикла $\vec{C}_n$; Это можно сделать 2^{j-i-1} способами.

Доказательство теоремы для ориентированного цикла $\vec{C}_n$ можно сократить, заметив, что орграф $\vec{C}_n$ изоморфен орграфу, полученному из $\vec{C}_n$ сдвигом $i \rightarrow i+1$, $1 \leq i \leq n$, индексов всех вершин на единицу (на самом деле, на любую фиксированную константу). Как обычно, работа с индексами проводится по модулю n . В этом случае достаточно доказать утверждение

для f_{11} и f_{i1} , $i \neq 1$. Остальные результаты получатся автоматически после элементарных преобразований.

С. Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного пути P_n , $n \geq 2$.

Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j , нужно обязательно сохранить все $j - i$ ребер между j и i . Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

I. Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "справа" от вершины j .

1. Если справа от вершины j мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j – путь на вершинах $i, i + 1, \dots, j, \dots, n$ с корнем j ; единственная возможность, 1.

2. Если справа мы уберем ребро $(n - 1, n)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1), (j + 1, j + 2), \dots, (n - 2, n - 1)$, мы получим справа единственное дерево на одной вершине n с корнем n ; единственная возможность, $1 = u_2$.

3. Если справа мы уберем ребро $(n - 2, n - 1)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1), (j + 1, j + 2), \dots, (n - 2, n - 1)$, мы получим справа две вершины $n - 1, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на двух вершинах равно $u_{2,2}$; таким образом, имеем $3 = u_4$ возможностей.

...

$n - j + 1$. Если справа мы уберем ребро $(j, j + 1)$, мы получим справа $n - j$ вершин $j + 1, \dots, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на $n - j$ вершинах равно $u_{2, (n-j)}$; таким образом, имеем $u_{2, (n-j)}$ возможностей.

Таким образом, число "правых" преобразований равно $u_{2, (n-j)+1}$:

$$1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2, (n-j)} = u_{2, (n-j)+1}.$$

II. Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "слева" от вершины i .

1. Если слева от вершины i мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j – путь на вершинах $1, 2, \dots, i, \dots, j$ с корнем j ; единственная возможность, 1.

2. Если слева мы уберем ребро $(1, 2)$ и сохраним все ребра $(2, 3), (3, 4), \dots, (i - 1, i)$, мы получим слева единственное дерево на одной вершине 1 с корнем 1; единственная возможность, $1 = u_2$.

3. Если слева мы уберем ребро $(2, 3)$ и сохраним все ребра $(3, 4), (4, 5), \dots, (i - 1, i)$, мы получим слева две вершины 1, 2; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на двух вершинах равно $u_{2,2}$; таким образом, имеем $3 = u_4$ возможностей.

...

i . Если слева мы уберем ребро $(i - 1, i)$, мы получим слева $i - 1$ вершину 1, 2, ..., $i - 1$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на $i - 1$ вершине равно $u_{2, (i-1)}$; таким образом, имеем $u_{2, (i-1)}$ возможностей.

Таким образом, число "левых" преобразований равно $u_{2, i-1}$:

$$1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2, (i-1)} = u_{2, (i-1)+1} = u_{2, i-1}.$$

III. Поскольку "правые" и "левые" операции осуществляются независимо друг от друга, то для получения общего числа остовных деревьев неориентированного пути числа таких операций необходимо перемножить, что и даст искомый результат.

D. Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$.

Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i \leq j \neq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j , нужно обязательно сохранить все $j - i$ ребер между j и i "справа" или все $n - (j - i)$ ребер между i и j "слева", и в полученном пути, соединяющем i и j , так или иначе выбрать корень. Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Проведем детальный пересчет. В силу изоморфизма между циклом C_n и циклом, полученным из C_n сдвигом всех вершин на произвольную фиксированную константу, можно, не ограничивая общности, считать, что $i = 1$.

Первая часть рассуждений будет касаться случая, когда дерево, соединяющее вершины j и 1, расположено "справа", то есть содержит $j - 1$ ребро $(1, 2), (2, 3), \dots, (j - 1, j)$.

I. Проведем пересчет для случая, когда в построенном остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$.

1. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$ и нет ребра $(j + 1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j$ вершинах $n, n - 1, \dots, j + 1$; всего $u_{2(n-j)}$ возможностей.

2. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$ и нет ребра $(j + 2, j + 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 1$ вершинах $n, n - 1, \dots, j + 2$; всего $u_{2(n-j-1)}$ возможностей.

...

$n - j - 1$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 2 вершинах $n, n - 1$; всего $u_{2,2}$ возможностей.

$n - j$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 2, n - 1)$, и нет ребра $(n - 1, n)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса (на самом деле, один лес) пути на 1 вершине n , всего $u_{2,1} = 1$ возможностей.

$n - j + 1$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., и есть ребро $(n - 1, n)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Таким образом, мы получили для случая **I** ровно $u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} + \dots + u_4 + u_2 + 1$ возможностей.

II. Проведем пересчет для случая, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$.

1. Рассмотрим случай, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$ и нет ребра $(n, n - 1)$.

1.1. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$ и нет ребра $(j + 1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 1$ вершинах $n - 1, \dots, j + 1$; всего $u_{2(n-j-1)}$ возможностей.

1.2. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$ и нет ребра $(j + 2, j + 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 2$ вершинах $n - 1, \dots, j + 2$; всего $u_{2(n-j-2)}$ возможностей.

...

$1.n - j - 2$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 4, n - 3)$, и нет ребра $(n - 3, n - 2)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 2 вершинах $n - 1, n - 2$; всего $u_{2,2}$ возможностей.

$1.n - j - 1$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 1 вершине $n - 1$; всего $u_{2,1} = 1$ возможностей.

$1.n - j$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 2, n - 1)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Производя аналогичные рассуждения в ситуации, когда между 1 и j мы оставляем не $j - 1$ ребер "справа", а $n - j + 1$ ребер "слева", мы получим, следуя тому же алгоритму, результат $u_{2(j-1)}$.

Поскольку пересчет в случае неориентированного цикла проводится при фиксации либо правого, либо левого дерева между вершинами 1 и j , то окончательный результат для величины f_{1j} принимает вид $u_{2(j-1)} + u_{2(n-j+1)}$.

Поскольку выбор 1 в качестве вершины i был сделан исключительно для удобства оформления результатов подсчета, то окончательный результат для величины f_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, принимает вид $u_{2(j-i)} + u_{2(n-j+i)}$, в то время как для случая f_{ij} , $1 \leq j \leq i \leq n$, получаем, в силу симметричности рассматриваемого графа, величину $u_{2(i-j)} + u_{2(n-i+j)}$. В общем случае результат может быть записан в виде $u_{2|i-j|} + u_{2(n-|i-j|)}$.

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

Заметим, что результаты для неориентированного случая были получены в работе Чеботарева П.Ю. [7]. Однако соображения, положенные в основу доказательства, имели значительно более общую природу. Наши результаты получены с использованием простейших методов перечислительной комбинаторики и доказанных нами свойств рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи.

6. Заключение

В статье представлены материалы, связанные с перечислением некоторых типов остовных лесов в ориентированных и неориентированных путях и циклах. Выбор перечисляемых объектов обусловлен их значимостью для построения обобщенных метрических конструкций, используемых при анализе стохастических дискретных процессов. Представленные в статье материалы являются естественным продолжением исследований авторов в этой области; их описание можно найти, например, в работе [3].

В качестве перспективного направления дальнейших исследований можно отметить вопросы изучения структуры и количества остовных лесов для более общих типов ориентированных и неориентированных графов, например, дерева общего вида, колеса, графа Петерсона и др. Представляет интерес и задача построения конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных метрических структур, заданных на малом числе точек; ее можно реализовать в рамках классической схемы (см., например, [2], [12], [13], [14], [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978.
2. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 – 92.
3. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
4. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников. - Новосибирск: НГУ, 1999.
5. Харари Ф. Теория графов. - М.: УРСС, 2003.
6. Chebotarev P. A graph theoretic interpretation of the mean first passage times // arXivpreprint arXiv:math.PR/0701359. 2007.

7. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
8. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013) // Lecture Notes in Computer Science. 2013. LNCS 8085. P. 207–214.
9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. Vol. 356. P. 253–274.
10. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
11. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. Vol. 59. P. 1443–1459.
12. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić Generalizations of Finite Metrics and Cuts. - World Scientific, 2016.
13. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // Contributions to Discrete Mathematics. 2011. Vol. 6. P. 26–47.
14. Deza M. M., Deza E. Encyclopedia of Distances. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.
15. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010 // Advances in Algebraic Structures. 2012. P. 177–197.
16. Kirkland S.J., Neumann M. Group inverses of M-matrices and their applications. - CRC Press, 2012.
17. Leighton T., Rivest R.L. The Markov chain tree theorem // Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.
18. Meyer Jr., C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // SIAM Review. 1975. Vol. 17. P. 443–464.
19. Wilson W. On quasi-metric spaces // American Journal of Mathematics. 1931. Vol. 53. P. 675–684.

REFERENCES

1. Vorobev, N.N. 1978, "Fibonacci numbers", *M.: Nauka*.
2. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79 – 92.
3. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.
4. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center*.
5. Harari, F. 2003, "Graph Theory", *M.: URSS*.
6. Chebotarev, P. 2007, "A graph theoretic interpretation of the mean first passage times", *arXiv preprint arXiv:math.PR/0701359*.

7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forest and the Golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, P. 813 – 821.
8. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 8085, P. 207–214.
9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253–274.
10. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
11. Chebotarev, P. Y., Shamis E. V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443–1459.
12. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts", *World Scientific*.
13. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26–47.
14. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances", *Springer, Berlin - Heidelberg*.
15. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177–197.
16. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications", *CRC Press*.
17. Leighton, T., Rivest, R. L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*
18. Meyer, Jr., C. D. 1975, "The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains", *SIAM Review*, Vol. 17, P. 443–464.
19. Wilson, W. 1931, "On quasi-metric spaces", *American Journal of Mathematics*, Vol. 53, P. 675–684.

Получено 15.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-100-121

О трёхмерных сетках Смоляка II¹

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dv@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это вторая статья из серии, посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

В настоящей работе было показано, что для произвольной сетки Смоляка тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{0}) = 1$. Отсюда следует, что норма линейного функционала приближенного интегрирования на классе E_s^α равна значению гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка. Показано, что гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка является рядом Дирихле. Отсюда возникает вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка как функции произвольного комплексного $\alpha = \sigma + it$. Так как сетка Смоляка относится к числу рациональных сеток, то у неё, оказывается, существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс порядка s .

Из работы следует, что остаются открытыми следующие вопросы:

1. является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geq 3$?
2. каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1, \dots, m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geq 3$?

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 42 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 100–121.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-100-121

About three-dimensional nets of Smolyak II²

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

This is the second article in a series dedicated to Smolyak grids. The paper relates to analytical number theory and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

In this paper, it was shown that for an arbitrary Smolyak grid, the trigonometric sum of the Smolyak grid is $S_q(\vec{0}) = 1$. It follows that the norm of the linear functional of approximate integration on the class E_s^α is equal to the value of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ of the resin grid. It is shown that the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ of the Smolyak grid is a Dirichlet series. This raises the question of the analytic continuation of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ of the Smolyak grid as a function of an arbitrary complex $\alpha = \sigma + it$. Since the Smolyak grid belongs to the number of rational grids, it turns out that it has an analytical continuation of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ of the Smolyak grid on the entire complex plane except for the point $\alpha = 1$, in which it has a pole of order s .

It follows from the work that the following questions remain open:

1. is the linear operator A_q of weighted grid averages over the Smolyak grid at dimension $s \geq 3$ normal?
2. what are the true values of the trigonometric sums $S_q(m_1, \dots, m_s)$ Smolyak grids with dimension $s \geq 3$?

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 42 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2021, "About three-dimensional nets of Smolyak II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 100–121.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

1. Введение

Рассмотрим s -мерные сетки Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geq s$, которые определяются как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1, \dots, \nu_s)$ с $\max(s, q - s + 1) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q$, таким образом

$$Sm(q, s) = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq k_1 \leq 2^{\nu_1} - 1, \dots, 0 \leq k_s \leq 2^{\nu_s} - 1, \\ \nu_1, \dots, \nu_s \geq 1, \quad \max(s, q - s + 1) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Как известно (см. [31], стр. 170, формула (226)), при $q \geq s$ квадратурные формулы с сетками Смоляка имеют вид:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) - R_{N(q)}[f], \quad (2)$$

где $C_s(q) = \{\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \nu_1 + \dots + \nu_s = q, \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s)\}$, $k(q, s) = \min(q - s, s - 1)$, $N(q) = O(q^{s-1} 2^q)$ — количество точек сетки Смоляка, и $R_{N(q)}[f]$ — линейный функционал погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка.

Обозначим через $S_q(m_1, \dots, m_s)$ тригонометрическую сумму сетки Смоляка, определенную равенством:

$$S_q(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{2^{\nu_1}} + \dots + \frac{m_s k_s}{2^{\nu_s}} \right)}.$$

Суммируя по $k_1, \dots, k_s$, получим

$$S_q(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_s}}(m_s), \quad (3)$$

где

$$\delta_a(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod{a}, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod{a} \end{cases}$$

— символ Коробова. Если $m = \prod_p p^{\nu_p(m)}$ — каноническое разложение на простые множители, то $\delta_{2^\nu}(m) = 1$ только при $\nu \leq \nu_2(m)$. Отсюда видно, что все значения тригонометрических сумм сеток Смоляка целые числа.

Для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка на классе E_s^α справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{E_s^\alpha} = \left| S_q(\vec{0}) - 1 \right| + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \left| S_q(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha | Sm(q, s)), \quad (4)$$

где гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha | Sm(q, s))$ сетки Смоляка задается равенством

$$\zeta(\alpha | Sm(q, s)) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

ЛЕММА 1. Справедливо равенство $S_q(\vec{0}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения тригонометрической суммы $S_q(\vec{0})$ и элементарной комбинаторики следует, что

$$S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} 1 = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

При $s \leq q \leq 2s-1$ имеем:

$$k(q,s) = q-s, \quad S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

При $q = s$ имеем

$$S_s(\vec{0}) = \sum_{k=0}^0 (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^{s-1} = 1$$

и утверждение верно.

При $s \leq q < 2s-1$ имеем:

$$S_{q+1}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1} = \sum_{k=0}^{q-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1} + \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2}$$

и утверждение верно, если показать, что при $s \leq q \leq 2s-2$ справедливо равенство $S_q^{(1)}(\vec{0}) = 0$, где

$$S_q^{(1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2}.$$

Положим при $s \leq q \leq 2s-1-\nu$, $1 \leq \nu \leq s-1$

$$S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu}.$$

При $q = s$, $\nu = s-1$ имеем:

$$S_s^{(s-1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^0 = (1-1)^{s-1} = 0.$$

При $q = s$, $1 \leq \nu \leq s-1$ имеем:

$$S_s^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^{s-1-\nu} = C_{s-1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{\nu}^k = C_{s-1}^{\nu} (1-1)^{\nu} = 0.$$

Далее при $s \leq q \leq 2s-2-\nu$, $1 \leq \nu \leq s-2$ получим:

$$\begin{aligned} S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{0}) &= \sum_{k=0}^{q+1+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1-\nu} = \sum_{k=0}^{q+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu} + \sum_{k=0}^{q+1+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2-\nu} = \\ &= S_q^{(\nu)}(\vec{0}) + S_q^{(\nu+1)}(\vec{0}). \end{aligned}$$

Из последнего рекуррентного равенства, двигаясь от $\nu = s-1$ к $\nu = 1$ и при каждом ν от $q = s$ к $q = 2s-1-\nu$, получим $S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$. Отсюда следует, что $S_q(\vec{0}) = 1$ и лемма доказана при $s \leq q \leq 2s-1$.

Перейдём к случаю $q \geq 2s$, тогда

$$k(q, s) = s - 1, \quad S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

Имеем рекуррентное соотношение

$$S_{q+1}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1} + \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2} = S_q(\vec{0}) + S_q^{(1)}(\vec{0}),$$

где при $1 \leq \nu \leq s-1$ и $q \geq 2s-1-\nu$ полагаем

$$S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu}.$$

При $\nu = s-1$, $q \geq s$ получаем

$$S_q^{(s-1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^0 = (1-1)^{s-1} = 0.$$

Так как ранее доказано равенство $S_{2s-1-\nu}^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$ для $1 \leq \nu \leq s-2$ и справедливо рекуррентное равенство

$$\begin{aligned} S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{0}) &= \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1-\nu} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu} + \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2-\nu} = \\ &= S_q^{(\nu)}(\vec{0}) + S_q^{(\nu+1)}(\vec{0}), \end{aligned}$$

то проводя индукцию по q , получим $S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$ при $1 \leq \nu \leq s-2$, $q \geq 2s-1-\nu$. Отсюда следует, что $S_q(\vec{0}) = 1$ для любого $q \geq s$ и лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка на классе E_s^α справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{E_s^\alpha} = \zeta(\alpha | Sm(q, s)). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из доказанной леммы следует, что первое слагаемое в формуле (4) равно 0, что доказывает утверждение теоремы. $\square$

Определим для любого натурального n величину $S_q(n)$ равенством

$$S_q(n) = \sum_{\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s = n} |S_q(\vec{m})|,$$

тогда справедливо равенство

$$\zeta(\alpha | Sm(q, s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_q(n)}{n^\alpha},$$

из которого видно, что гиперболическая дзета-функция сетки Смоляка задается рядом Дирихле, который абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$.

Естественно возникает вопрос, а можно ли этот ряд Дирихле продолжить на всю комплексную α -плоскость?

Цель данной статьи — доказать, что такое аналитическое продолжение существует.

2. Гиперболическая дзета-функция Гурвица

В этом разделе мы приведём без доказательства необходимые сведения о гиперболической дзета-функции Гурвица из работы [12].

2.1. Периодизированная по вещественному параметру дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода

В дальнейшем будет использоваться периодизированная по вещественному параметру b дзета-функция Гурвица

$$\zeta^*(\alpha; b) = \sum_{0 < n+b} (n+b)^{-\alpha} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n + \{b\})^{-\alpha}, & \text{при } \{b\} > 0 \end{cases}, \quad (\sigma > 1). \quad (6)$$

Кроме того, определим дзета-функцию Гурвица второго рода $\zeta^{**}(\alpha; b)$ равенством

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}' \frac{e^{2\pi i nb}}{\bar{n}^{\alpha}}, \quad (\sigma > 1). \quad (7)$$

По теореме Абеля (см. [37] стр. 106) получаем интегральное представление для периодизированной дзета-функции Гурвица ($\sigma > 1$):

$$\zeta^*(\alpha; b) = \begin{cases} \alpha \int_1^{\infty} \frac{[x] dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \alpha \int_0^{\infty} \frac{([x] + 1) dx}{(x + \{b\})^{\alpha+1}} = \alpha \int_{\{b\}}^{\infty} \frac{[x + 1 - \{b\}] dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

и интегральное представление для дзета-функции Гурвица второго рода ($\sigma > 1$):

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \begin{cases} \alpha \int_1^{\infty} \frac{[x] dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \alpha \int_1^{\infty} \frac{(\sin(\pi(2[x] + 1)b) - \sin(\pi b)) dx}{2 \sin(\pi b) x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} \neq 0, \end{cases} \quad (9)$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\} > 0$

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb) = \frac{1}{\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb) \sin(\pi b) = \\ &= \frac{1}{2 \sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} (\sin(\pi(2n + 1)b) - \sin(\pi(2n - 1)b)) = \frac{\sin(\pi(2[x] + 1)b) - \sin(\pi b)}{2 \sin(\pi b)}. \end{aligned}$$

2.2. Аналитическое продолжение периодизированной по вещественному параметру дзета-функции Гурвица

Нетрудно выписать различные явные формулы для аналитического продолжения на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, периодизированной дзета-функции Гурвица. В этой точке при всех вещественных значениях b периодизированная дзета-функции Гурвица имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1.

Приведенные ниже формулы покрывают всю комплексную плоскость, задавая явный вид аналитического продолжения $\zeta^*(\alpha; b)$.

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$\zeta^*(\alpha; b) = \begin{cases} \sum_{0 < n+b} (n+b)^{-\alpha}, & \sigma > 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} - I_2(\alpha; 0, 1), & \begin{matrix} \{b\}=0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ \frac{1}{\{b\}^\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} + (1-\{b\}) \left(1 - \frac{\alpha\{b\}}{2}\right) - I_2(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}), & \begin{matrix} \{b\} \neq 0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ 2(2\pi)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \left(\sin \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} + \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} \right), & \sigma < 0. \end{cases} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

2.3. Множитель Римана

Через

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \quad (11)$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [34], стр. 19)

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha).$$

Легко проверить, что

$$M(\alpha) \cdot M(1-\alpha) = 1. \quad (12)$$

Множитель $M(\alpha)$ называется *множителем Римана*, а формулу (12) — *формулой дополнения для множителя Римана*.

Из свойств гамма-функции, определения (11) и формулы дополнения (12) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α , кроме точек $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin \frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$\sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{при } n = 1 + 2m, m = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{при } n = 2m, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

$$\operatorname{Res}_{\alpha=1+2n} M(\alpha) = \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{-2n}} \operatorname{Res}_{\alpha=-2n} \Gamma(\alpha) = \frac{2(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!}. \quad (13)$$

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, ($n \in \mathbb{N}$) имеем:

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha \rightarrow 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n)) \cdot \\ &\cdot \lim_{\alpha \rightarrow 2n} \frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha \rightarrow 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n-1)!}. \end{aligned}$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (14)$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin \frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (14) исчерпываются все нули множителя Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \dots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin \frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Следующая лемма является своеобразным функциональным уравнением для периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица и дзета-функции Гурвица второго рода.

ЛЕММА 3. Для $0 < b < 1$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) &= 2M(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha) \zeta^{**}(1-\alpha; b) = \\ &= M(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i nb}}{\bar{n}^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

Эта лемма наводит на мысль, что удобно ввести две новые функции:

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha; b) = \zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n+b|^\alpha},$$

которые называются дзета-функцией Гурвица первого рода, и

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha; b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i nb}}{|n|^\alpha},$$

которая называется симметризованной дзета-функцией Гурвица второго рода.

В новых обозначениях равенство (15) приобретет более элегантный вид:

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha; b) = M(\alpha) \tilde{\zeta}^{**}(1-\alpha; b). \quad (16)$$

2.4. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода

Теперь нетрудно доказать аналог леммы 2 (стр. 106) для дзета-функции Гурвица второго рода.

ЛЕММА 4. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n b}{n^{\alpha}}, & \sigma > 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha - 1} - I_2(\alpha; 0, 1), & \begin{matrix} \{b\}=0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ \alpha(\alpha + 1) \int_1^{\infty} \frac{\left(\sin(\pi(2[x] + 1)b)\{x\} + \frac{\cos(2\pi b) - \cos(2\pi[x]b)}{2 \sin(\pi b)} \right) dx}{2 \sin(\pi b) x^{\alpha+2}} - \frac{1}{2}, & \begin{matrix} \{b\} \neq 0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ \frac{M(\alpha)}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + b}^{1-\alpha} = \frac{M(\alpha)}{2} (\zeta^*(1 - \alpha; b) + \zeta^*(1 - \alpha; 1 - b)), & \begin{matrix} \{b\} \neq 0, \\ \sigma < 0 \end{matrix}, \\ M(\alpha) \zeta(1 - \alpha), & \begin{matrix} \{b\}=0, \\ \sigma < 0 \end{matrix}. \end{cases} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из лемм 3 и 4 следует, что для любых $\alpha \neq 1$ справедливы равенства

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \begin{cases} \zeta(\alpha), & \text{при } \{b\} = 0; \\ \frac{M(\alpha)}{2} (\zeta^*(1 - \alpha; b) + \zeta^*(1 - \alpha; 1 - b)), & \text{при } \{b\} > 0. \end{cases}$$

Используя обозначения на стр. 107, можно эти равенства переписать как одно

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha; b) = M(\alpha) \tilde{\zeta}^*(1 - \alpha; b).$$

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha} \left(\zeta^* \left(\alpha; \frac{l}{q} \right) + \zeta^* \left(\alpha; 1 - \frac{l}{q} \right) \right) = 2 \zeta(\alpha) (1 - q^{-\alpha}). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя обозначения на стр. 107, можно формулировку доказанной леммы переписать в более элегантном виде:

$$\sum_{l=0}^{q-1} q^{-\alpha} \tilde{\zeta}^* \left(\alpha; \frac{l}{q} \right) = \tilde{\zeta}^*(\alpha), \quad (19)$$

где

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha) = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1-\alpha}}.$$

3. Определение и свойства гиперболической дзета-функции Гурвица

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гиперболической дзета-функцией Гурвица при $d \neq 0$, $d, b \in \mathbb{R}$ называется функция $\zeta_H(\alpha; d, b)$, заданная в правой α -полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) равенством³

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\overline{dm + b})^{-\alpha}. \quad (20)$$

Если мы рассмотрим сдвинутую одномерную решетку $\Lambda(d, b) = d\mathbb{Z} + b$, то для гиперболической дзета-функции этой сдвинутой решетки мы получим

$$\zeta_H(\Lambda(d, b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta_H(\alpha; d, b), & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\} \neq 0, \\ \zeta_H(\alpha; d, b) - 1, & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Кроме этого нам потребуется дзета-функция сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d, b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta(\Lambda(d, b)|\alpha) = \sum'_{m \in \mathbb{Z}} |dm + b|^{-\alpha}, \quad \sigma > 1, \quad (22)$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка m , для которой $dm + b = 0$, и аналитическая функция $f_1(\alpha; d, b)$, задаваемая равенством

$$f_1(\alpha; d, b) = \sum'_{-1 < dm + b < 1} (1 - |dm + b|^{-\alpha}). \quad (23)$$

Ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(d, b)|\alpha) = \zeta(\Lambda(d, b)|\alpha) + f_1(\alpha; d, b). \quad (24)$$

Будем, как обычно, через $\|b\| = \min(\{b\}, 1 - \{b\})$ обозначать расстояние до ближайшего целого. Как хорошо известно, функция $\|b\|$ — чётная: $\|b\| = \|-b\|$.

В работе [13] рассматривалась аналитическая по α функция $f(\alpha, d)$, заданная равенством

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geq 1, \\ \sum_{1 \leq |m| \leq [\frac{1}{d}]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < d < 1. \end{cases} \quad (25)$$

Ясно, что

$$f_1(\alpha; d, 0) = f(\alpha, d). \quad (26)$$

Положим

$$f_1^*(\alpha; d, b) = \begin{cases} f_1(\alpha; |d|, |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0; \\ f_1(\alpha; |d|, |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|) + 1, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0. \end{cases} \quad (27)$$

ЛЕММА 6. Для гиперболической дзета-функции Гурвица $\zeta_H(\alpha; d, b)$ в правой α -полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \zeta_H(\alpha; d, b) &= \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = \\ &= \zeta\left(\Lambda\left(|d|, |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) \middle| \alpha\right) + f_1^*\left(\alpha; |d|, |d| \left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \end{aligned} \quad (28)$$

³Здесь и далее для вещественных m используем обозначение $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

ЛЕММА 7. *Справедливо равенство*

$$f_1 \left(\alpha; |d|, |d| \left\| \frac{b}{d} \right\| \right) = \begin{cases} 0, & \text{при } |d| \geq 1, \left\| \frac{b}{d} \right\| = 0; \\ \sum_{1 \leq |m| \leq \left\lceil \frac{1}{|d|} \right\rceil} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha} \right), & \text{при } 0 < |d| < 1, \left\| \frac{b}{d} \right\| = 0; \\ 0, & \text{при } |d| \geq 2, \left\| \frac{b}{d} \right\| \geq \frac{1}{|d|}; \\ 1 - \left(|d| \left\| \frac{b}{d} \right\| \right)^{-\alpha}, & \text{при } |d| \geq 2, 0 < \left\| \frac{b}{d} \right\| < \frac{1}{|d|}; \\ 2 - \left(|d| \left\| \frac{b}{d} \right\| \right)^{-\alpha} - \left(|d| - |d| \left\| \frac{b}{d} \right\| \right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1 \leq |d| < 2, \\ \left\| \frac{b}{d} \right\| > \left\| \frac{1}{|d|} \right\|; \end{cases} \\ 1 - \left(|d| \left\| \frac{b}{d} \right\| \right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1 \leq |d| < 2, \\ 0 < \left\| \frac{b}{d} \right\| \leq \left\| \frac{1}{|d|} \right\|; \end{cases} \\ \sum_{m = -\left\lceil \frac{1}{|d|} + \left\| \frac{b}{d} \right\| \right\rceil}^{\left\lceil \frac{1}{|d|} - \left\| \frac{b}{d} \right\| \right\rceil} \left(1 - \left(|d| \left| m + \left\| \frac{b}{d} \right\| \right| \right)^{-\alpha} \right), & \text{при } 0 < |d| < 1, 0 < \left\| \frac{b}{d} \right\|. \end{cases} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *В полуплоскости $\sigma < 0$ справедливы тождества:*

$$\begin{aligned} \zeta_H(\alpha; d, b) &= f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m \frac{b}{d})}{m^{1-\alpha}} = \\ &= f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \zeta^{**} \left(1 - \alpha, \frac{b}{d} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

4. Рациональные сетки

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p , то есть в s -мерном кубе $G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_i < 1 \ (i = 1, \dots, s)\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \dots, \frac{x_s^{(k)}}{p} \right) \quad k = 1, \dots, N, \quad (31)$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leq x_i^{(k)} \leq p - 1$, p — натуральное.

Нетрудно видеть, что сетка Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geq s$ является рациональной сеткой со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$.

Рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_q f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{m} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + x_1, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + x_s \right). \quad (32)$$

Обозначим через $A_q C(\vec{m})$ действие линейного оператора A_q на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 8. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (33)$$

справедливо равенство

$$A_q C(\vec{m}) = S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (34)$$

где $S_q(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки Смоляка.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_q f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= A_q f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{v} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + x_1, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + x_s\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{v} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(m_1(x_1 + \frac{k_1}{2^{\nu_1}}) + \dots + m_s(x_s + \frac{k_s}{2^{\nu_s}}))} = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \|A_q f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} &= \sup_{\vec{m}} |S_q(\vec{m}) C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha \leq \\ &\leq \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \sup_{\vec{m}} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}, \end{aligned} \quad (37)$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка нормальным, если он не увеличивает норму любой функции из класса E_s^α .

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех тригонометрических сумм сетки Смоляка: $|S_q(\vec{m})| \leq 1$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$). Как показано в работе [18], тригонометрические суммы двумерной сетки Смоляка принимают только три значения: 1, 0, -1. Поэтому оператор взвешенных сеточных средних для двумерных сеток Смоляка — нормальный.

Из доказанной леммы следует, что собственными функциями линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних для сеток Смоляка является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$) за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие тригонометрические суммы сеток Смоляка $S_q(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы A_q взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу.

5. Тригонометрические суммы сетки Смоляка

Из равенства (3) непосредственно следует, что тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{m})$ равна 0, если хоть одно значение m_j — нечетное число, поэтому далее будем предполагать, что все координаты целого вектора $\vec{m}$ — четные числа.

По аналогии с леммой 1 (см. стр. 102) нам потребуются следующие суммы:

$$S_q^{(\nu)}(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s-\nu)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu}(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}(m_{s-\nu}), \quad q \geq s - \nu, \quad 1 \leq \nu \leq s - 1.$$

Напомним, что $k(q, s - \nu) = \min(q - s + \nu, s - \nu - 1)$.

ЛЕММА 9. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{m}) = S_q^{(\nu)}\left(\left(m_1, \dots, m_{s-\nu-1}, \frac{m_{s-\nu}}{2}\right)\right) + S_q^{(\nu+1)}((m_1, \dots, m_{s-\nu-1})). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьём множество

$$C_{s-\nu}(q-k) = \{\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu}) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \mid \nu_1 + \dots + \nu_{s-\nu} = q - k, \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s - \nu)\}$$

на два подмножества $C_{s-\nu}^{(1)}(q-k)$ и $C_{s-\nu}^{(2)}(q-k)$, заданные равенствами

$$C_{s-\nu}^{(1)}(q-k) = \left\{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}, \nu_{s-\nu} + 1) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \mid \begin{array}{l} \nu_1 + \dots + \nu_{s-\nu} = q - k - 1, \\ \nu_j \geq 1, \quad (j = 1, \dots, s - \nu) \end{array} \right\},$$

$$C_{s-\nu}^{(2)}(q-k) = \left\{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}, 1) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \mid \begin{array}{l} \nu_1 + \dots + \nu_{s-\nu-1} = q - k - 1, \\ \nu_j \geq 1, \quad (j = 1, \dots, s - \nu - 1) \end{array} \right\}.$$

Имеются следующие взаимно однозначные отображения:

$$C_{s-\nu}^{(1)}(q-k) \leftrightarrow C_{s-\nu}(q-k-1): \quad \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}, \nu_{s-\nu} + 1) \leftrightarrow \nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}, \nu_{s-\nu}),$$

$$C_{s-\nu}^{(2)}(q-k) \leftrightarrow C_{s-\nu-1}(q-k-1): \quad \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}, 1) \leftrightarrow \nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{s-\nu-1}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu}(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}(m_{s-\nu}) &= \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1}) \delta_{2^{\nu_{s-\nu}+1}}(m_{s-\nu}) + \\ &+ \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu-1}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1}) \delta_2(m_{s-\nu}) = \\ &= \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1}) \delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}\left(\frac{m_{s-\nu}}{2}\right) + \\ &+ \delta_2(m_{s-\nu}) \sum_{\vec{\nu} \in C_{s-\nu-1}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1}). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 10. *Для сетки Смоляка $Sm(q, s)$ со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$ тригонометрические суммы $S_q(\vec{m})$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \dots, \frac{x_s^{(k)}}{p} \right),$$

то $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ для любого $\vec{m} \in p \cdot \mathbb{Z}^s$, поэтому $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ и

$$S_q(\vec{m}) = S_q(\vec{0}) = 1,$$

согласно лемме 1 (см. стр. 102).

Аналогично получаем, что

$$S_q(\vec{m}) = S_q(\vec{m} + p \cdot \vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S_q(\vec{m})$ содержатся среди значений для $\vec{m} \in [-p_1, p_2]^s$, где $p_1 = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil$ и $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$. $\square$

Пусть $N_s(q, \vec{n})$ — число решений в натуральных числах системы

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_s = q \\ 1 \leq x_j \leq n_j, 1 \leq j \leq s. \end{cases}$$

Из элементарной комбинаторики известно, что $N_s(q, \vec{n}) \leq C_q^{s-1} < q^{s-1}$. Отсюда следует, что утверждение леммы 10 можно существенно уточнить, но мы этого делать не будем так как в последующих статьях предполагаем найти конечное выражение для значений этих сумм.

Положим $\vec{n}(\vec{m}) = (\nu_2(m_1), \dots, \nu_2(m_s))$, тогда

$$\sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \delta_{2\nu_1}(m_1) \dots \delta_{2\nu_s}(m_s) = N_s(q-k, \vec{n}(\vec{m})).$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}(\vec{m})).$$

Ясно, что $N_s(q, \vec{n}) = 0$, если хоть одно $n_j \leq 0$ или $q \leq 0$, или даже $q < s$. Таким образом, мы допускаем любые целые значения для q и $n_1, \dots, n_s$, кроме того, для $n_1, \dots, n_s$ допускается значение $+\infty$, которое означает, что отсутствует ограничение для соответствующей неизвестной.

Нетрудно видеть, что $N_s(q, \vec{n}) > 0$ только при $q \geq s$ и $q \leq n_1 + \dots + n_s$, когда все $n_1, \dots, n_s$ — натуральные или $+\infty$.

Заметим, что $S_q(\vec{m})$ и $N_s(q, \vec{n})$ не меняются при любой перестановке координат $m_1, \dots, m_s$ или, соответственно, $n_1, \dots, n_s$.

Для произвольного вектора $\vec{n}$ через $\vec{n}^*$ обозначим вектор $(n_1^*, \dots, n_s^*)$, координаты которого образуют перестановку координат $(n_1, \dots, n_s)$ с условием $n_1^* \geq n_2^* \geq \dots \geq n_s^*$.

Обозначим через $S_{q,s,l}^*(\vec{n})$, где при $1 \leq l \leq s$ вектор $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l)$ — произвольный упорядоченный целочисленный вектор $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l$, сумму

$$S_{q,s,l}^*(\vec{n}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k N_l(q-k, \vec{n}).$$

ЛЕММА 11. *Справедливо равенство*

$$S_q(\vec{m}) = S_{q,s,s}^*(\vec{n}^*(\vec{m})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из равенства

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}(\vec{m}))$$

следует, что

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})).$$

Нетрудно видеть, что

$$S_{q,s,s}^*(\vec{n}^*(\vec{m})) - S_q(\vec{m}) = \sum_{k=k(q,s)+1}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})) = 0,$$

так как либо сумма по k пустая, если $k(q,s) = s-1$, либо все слагаемые равны нулю, если $k(q,s) = q-s$, так как в этом случае $q-k < s$ и $N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})) = 0$. $\square$

ЛЕММА 12. При $n_l \geq 1$ справедливо равенство

$$S_{q,s,l}^*(\vec{n}) = S_{q-1,s,l}^*((n_1, \dots, n_{l-1}, n_l-1)) + S_{q-1,s,l-1}^*((n_1, \dots, n_{l-1})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_l = q-k \\ 1 \leq x_j \leq n_j, 1 \leq j \leq l \end{cases}$$

разобьём на два подмножества

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_{l-1} + (x_l + 1) = q-k \\ 1 \leq x_j \leq n_j, 1 \leq j \leq l-1, 1 \leq x_l \leq n_l-1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_{l-1} + 1 = q-k \\ 1 \leq x_j \leq n_j, 1 \leq j \leq l-1. \end{cases}$$

Число решений в первом подмножестве равно $N_l(q-k-1, (n_1, \dots, n_{l-1}, n_l-1))$, а во втором равно $N_{l-1}(q-k-1, (n_1, \dots, n_{l-1}))$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 13. При $n_l \geq 1$ справедливо равенство

$$S_{q,s,l}^*(\vec{n}) = \sum_{\nu=0}^{l-2} S_{q-1-\nu,s,l-\nu}^*((n_1, \dots, n_{l-1-\nu}, n_{l-\nu}-1)) + S_{q-l+1,s,1}^*((n_1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя последовательно лемму 12 $l-2$ раза ко второму слагаемому, получим утверждение леммы. $\square$

6. Аналитическое продолжение

Рассмотрим сетку Смоляка $Sm(q,s)$, которая является рациональной сеткой M вида (31) (см. стр. 110) со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$, и соответствующую гиперболическую дзета-функцию сетки

$$\zeta(\alpha | Sm(q,s)) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Согласно лемме 10 (см. стр. 112) имеется не более p^s различных значений тригонометрических сумм $S_q(\vec{m})$. Отсюда следует, что гиперболическую дзета-функцию сетки Смоляка $\zeta(\alpha | Sm(q,s))$ можно выразить через гиперболическую дзета-функцию Гурвица.

ЛЕММА 14. Для $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ справедливо равенство

$$\zeta(\alpha|Sm(q, s)) = -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \prod_{\nu=1}^s \zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m_\nu). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно определению гиперболической дзета-функции сетки Смоляка имеем:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha|Sm(q, s)) &= \sum'_{m_1, \dots, m_s=-\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1, \dots, m_s=-\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ &= -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \sum_{k_1, \dots, k_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\bar{m}_1 + 2^{q-s+1}k_1 \dots \bar{m}_s + 2^{q-s+1}k_s)^\alpha} = \\ &= -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})|^p \prod_{\nu=1}^s \zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m_\nu). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 3. Гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка является аналитической функцией для любого $\alpha \neq 1$, и в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ справедливо равенство

$$\zeta(\alpha|Sm(q, s)) = -|S_q^*(\vec{0})| + \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \prod_{\nu=1}^s \left(\varepsilon(m_\nu) + \frac{M(\alpha)}{n^\alpha} \sum'_{k_\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{k_\nu m_\nu}{n}}}{|k_\nu|^\alpha} \right). \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, все функции, входящие в правую часть равенства (39) являются аналитическими функциями при $\alpha \neq 1$. Поэтому по принципу аналитического продолжения и гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ является аналитической функцией для любого $\alpha \neq 1$.

Далее заметим, что в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ согласно равенству (30) (см. стр. 110) и равенству (16) (см. стр. 107) имеем:

$$\zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m) = f_1^*(\alpha; 2^{q-s+1}, m) + \frac{M(\alpha)}{|2^{q-s+1}|^\alpha} \cdot \tilde{\zeta}^{**} \left(1 - \alpha, \frac{m}{2^{q-s+1}} \right).$$

Так как $2^{q-s+1} > 1$, то $f_1^*(\alpha; 2^{q-s+1}, m) = \varepsilon(m)$, где

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0, \\ 0, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

□

7. Заключение

Из работ [1]–[42] можно составить представление о круге проблем, возникающих в теоретико-числовом методе в приближенном анализе. В настоящей работе было показано, что для произвольной сетки Смоляка тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{0}) = 1$. Отсюда следует, что норма линейного функционала приближенного интегрирования на классе E_s^α равна значению гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка. Показано, что гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка является рядом Дирихле.

Отсюда возникает вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка как функции произвольного комплексного $\alpha = \sigma + it$. Так как сетка Смоляка относится к числу рациональных сеток, то у неё оказывается существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q, s))$ сетки Смоляка на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс порядка s .

Из работы следует, что остаются открытыми следующие вопросы:

1. является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geq 3$?
2. каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1, \dots, m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geq 3$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.
2. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 193 с.
3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 284 с.
4. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.
6. Добровольская Л. П., М. Н. Добровольский, Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47–52.
7. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185–223.
8. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.
9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6090–84.
10. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6089–84.

11. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
12. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72–105.
13. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 100–149.
14. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 18–20.
15. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
16. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.
17. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leq t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 91–95.
18. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.
19. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.
20. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.
21. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.
22. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.
23. Киселёва О. В. О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.
24. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062–1065.
25. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
26. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

27. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.
28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
29. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.
30. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе (второе издание). М.: МЦНМО, 2004.
31. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
32. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.
33. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
34. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
35. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
36. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1979.
37. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Изд-во "МИР" 1974.
38. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23–62.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2
39. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimension s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.
40. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960), 84–90, Bd 2 № 2.
41. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for solving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.
42. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984).

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.
2. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

3. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koefffitsientov* [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia. 284 p.
4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", *Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya"* Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications" scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.
6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", *Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.
7. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.
8. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", *Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol.9, no. 1, pp. 82-90.
9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", *Dep. v VINITI*, no. 6090–84.
10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.
11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ", *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.
12. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.
13. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva, V.N., Sobolev, D.K. & Yushina, E.I. 2015, "Hyperbolic dzeta-function of lattices of quadratic fields", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 16, no. 4, pp. 100–149.
14. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A.", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii*, Tula, Russia, pp. 18–20.
15. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

16. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 2001, "On the continuity of the Zeta function of a grid with weights", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1., pp. 82–86.
17. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leq t < 21$ ", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.
18. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.
19. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki"* [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.
20. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 2. P. 1. P. 6–18.
21. Dobrovol'skii, N. N., 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.
22. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.
23. Kiseleva O. V., 2007, "On the Korobov problem for modified resin grids", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 4(24), pp. 50–104.
24. Korobov, N. M., 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.
25. Korobov, N. M., 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
26. Korobov, N. M., 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
27. Korobov, N. M., 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
28. Korobov, N. M., 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
29. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", *Matematicheskie zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.
30. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
31. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 118–176.
32. Smolyak, S. A., 1963, "Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

33. Sobol', I. M., 1969, *Mnogomernye kvadrurnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.
34. Titchmarsh E. K. 1952, "The Theory of the Riemann Zeta Function", M.: IL, 407 p.
35. Frolov, K. K., 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 231, no.4, pp. 818–821.
36. Frolov, K. K., 1979, *Quadrature formulas on classes of functions*, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.
37. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
38. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2
39. Faure, H., 1982, "Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimension s)", *Acta Arith*, vol. 41, pp. 337–351.
40. Halton, J. H., 1960, "On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals", *Numerische Math*, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.
41. Hammersley, J. M., 1960, "Monte-Carlo methods for solving multivariable problems", *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 86, 844–874.
42. Weyl H., 1916, "On the uniform distribution of Numbers mod. one", *Math. Ann.*, vol. 77, pp. 313–352.

Получено 04.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-122-132

Неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами¹

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля построен красивый и содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на $\mathbb{R}^d$ соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют потенциал Данкля–Рисса и преобразования Данкля–Рисса. В частности, весовые неравенства для них позволяют доказывать весовые неравенства типа Соболева для градиента Данкля. Ранее нами для потенциала Данкля–Рисса были доказаны (L^q, L^p) -неравенства с двумя радиальными кусочно-степенными весами. Для преобразований Данкля–Рисса было доказано L^p -неравенство с одним радиальным степенным весом и как следствие для градиента Данкля были получены (L^q, L^p) -неравенства с двумя радиальными степенными весами. В настоящей работе эти результаты для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля с радиальными степенными весами обобщаются на случай радиальных кусочно-степенных весов.

Ключевые слова: потенциал Данкля–Рисса, преобразования Данкля–Рисса, градиент Данкля, неравенство Соболева.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 122–132.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-122-132

Inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient with radial piecewise power weights²

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).*e-mail: ivaleryi@mail.ru***Abstract**

A beautiful and meaningful harmonic analysis has been constructed on the Euclidean space $\mathbb{R}^d$ with Dunkl weight. The classical Fourier analysis on $\mathbb{R}^d$ corresponds to the weightless case. The Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms play an important role in the Dunkl harmonic analysis. In particular, they allow one to prove the Sobolev type inequalities for the Dunkl gradient. Earlier we proved (L^q, L^p) -inequalities for the Dunkl–Riesz potential with two radial piecewise power weights. For the Dunkl–Riesz transforms, we proved L^p -inequality with one radial power weight and, as a consequence, we obtained (L^q, L^p) -inequalities for the Dunkl gradient with two radial power weights. In this paper, these results for the Dunkl–Riesz transforms and the Dunkl gradient for radial power weights are generalized to the case of radial piecewise power weights.

Keywords: Dunkl–Riesz potential, Dunkl–Riesz transforms, Dunkl gradient, Sobolev inequality.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

V. I. Ivanov, 2021, "Inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient with radial piecewise power weights", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 122–132.

1. Введение

В гармоническом анализе в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля важную роль играют потенциал Данкля–Рисса и преобразования Данкля–Рисса. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля. Нами ранее были получены (L^q, L^p) -неравенства для потенциала Данкля–Рисса и L^p -неравенства для преобразований Данкля–Рисса с радиальными степенными весами, позволившие доказать (L^q, L^p) -неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами. Настоящая работа посвящена обобщению этих неравенств для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля на случай радиальных кусочно-степенных весов. Для потенциала Данкля–Рисса они были установлены в [1].

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$, нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и стандартным ортонормированным базисом $\{e_1, \dots, e_d\}$. Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

²Acknowledgments: The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, $R_+ \subset R$ — положительная подсистема, $G \subset O(d)$ — конечная группа отражений, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha: \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $\langle \alpha, x \rangle = 0$, $k: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно G , $v_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha, x \rangle|^{k(\alpha)}$ — вес Данкля, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$ — мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$ — нормировочная константа Макдональда–Мета–Сельберга, $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_k \right)^{1/p},$$

$\langle k \rangle = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$, $\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k \rangle$, $d_k = 2\lambda_k + 2$ — обобщенная размерность евклидова пространства с весом Данкля.

Пусть V_k — оператор сплетения Данкля, $e_k(x, y) = V_k(e^{i\langle \cdot, y \rangle})(x)$ — ядро Данкля,

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x)$$

— преобразование Данкля,

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a) \langle a, e_j \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x \rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\nabla_k = (T_1, \dots, T_d)$ — градиент Данкля, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций,

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(x, z) e_k(y, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z)$$

— оператор сдвига на функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [2].

На пространстве Шварца потенциал Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$ [3] определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha - d_k} d\mu_k(y),$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha - d_k/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d_k - \alpha)/2)$.

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)(y).$$

На пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k f$, $j=1, \dots, d$, [3] определяются как интегральные операторы

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_j^k \int_{|y| \geq \varepsilon} \tau^{-y} f(x) \frac{y_j}{|y|^{d_k+1}} d\mu_k(y),$$

где нормировочные постоянные c_j^k выбраны так, чтобы

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j^k f)(y) = -i \frac{y_j}{|y|} \mathcal{F}(f)(y).$$

Для потенциала Данкля–Рисса доказаны (L^q, L^p) -неравенства с радиальными степенными весами [4]. Для преобразований Данкля–Рисса установлена L^p -ограниченность [5] и доказано L^p -неравенство с радиальным степенным весом [6]. С помощью равенства

$$f(x) = I_1^k \left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f) \right)(x) \quad (1)$$

отсюда выведены неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами [6] (частные случаи см. в [7, 8, 9, 10]).

Пусть p' — сопряженный показатель для p , определяемый соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

ТЕОРЕМА А [4]. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \alpha$, $0 < \alpha < d_k$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

ТЕОРЕМА В [5, 6]. Преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k$, $j = 1, \dots, d$, являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то для $j = 1, \dots, d$,

$$\| |x|^\beta \mathcal{R}_j^k f(x) \|_{p, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

ТЕОРЕМА С [6]. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то

$$\| |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta \nabla_k f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2} \chi_{B_1^c}(x)$$

— радиальные кусочно-степенные весовые функции.

Нас интересует неравенство Соболева для градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами. Согласно (1) необходимо установить аналогичные неравенства для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса. Неравенства для потенциала Данкля–Рисса с радиальными кусочно-степенными весами доказаны в [1].

ТЕОРЕМА D [1]. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma_1 < \frac{d_k}{q}$, $\beta_1 < \frac{d_k}{p'}$, $\alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}$, $\alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \alpha$, $0 < \alpha < d_k$, и $\gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \gamma_2 + \beta_2$, то

$$\| u_{-\gamma}(x) I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (2)$$

В настоящей работе мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta_1, \beta_2 < \frac{d_k}{p'}$, то для $j = 1, \dots, d$,

$$\| u_\beta(x) \mathcal{R}_j^k f(x) \|_{p, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $\gamma_1 < \frac{d_k}{q}$, $1 - \frac{d_k}{q'} < \gamma_2$, $-\frac{d_k}{p} < \beta_1 < \frac{d_k}{p'}$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta_2 < \frac{d_k}{p'}$ и $\gamma_1 + \beta_1 \leq 1 - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \gamma_2 + \beta_2$, то

$$\| u_{-\gamma}(x) f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) \nabla_k f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (4)$$

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ неравенство (3) верно для функций, для которых $f \in L^p(\mathbb{R}^d, u_\beta^p d\mu_k)$, а неравенство (4) верно, если $\Delta_k f \in L^p(\mathbb{R}^d, u_\beta^p d\mu_k)$.

При доказательстве теоремы 1 нам понадобятся положительные интегральные операторы Харди

$$Hf(x) = \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_k(y)$$

и Беллмана

$$Bf(x) = \int_{|y| \geq |x|} f(y) d\mu_k(y).$$

Для них в [1] доказаны (L^q, L^p) -неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля и радиальными кусочно-степенными весами. Нам понадобятся эти неравенства только для $q = p$. Функции в них предполагаются неотрицательными.

ТЕОРЕМА Е [1]. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Hf(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta}(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (5)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_2 > \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \leq \gamma_2 + \beta_2. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА F [1]. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Bf(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta}(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (7)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_2 > \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \leq \gamma_2 + \beta_2. \quad (8)$$

2. Доказательство теоремы 1

Доказательству теоремы 1 предположим две леммы.

ЛЕММА 1. Если $1 < p < \infty$, $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$, то для некоторого $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$ и всех $0 \leq r \leq 1$, $1 \leq t \leq 2$,

$$\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_2}} \right| \lesssim \left| 1 - \frac{r^{\gamma}}{t^{\gamma}} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать $\beta_1 \neq \beta_2$.

Если $\beta_1 \neq 0$, то положим $\gamma = \beta_1$. Отношение

$$\frac{\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_2}} \right|}{\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_1}} \right|} = t^{\beta_1 - \beta_2} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|}$$

может быть неограниченным, если только верхний предел

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|} = \infty.$$

Полагая $r = 1 - \varepsilon_1$, $t = 1 + \varepsilon_2$, $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$, получим

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|} = \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|(1 + \varepsilon_2)^{\beta_2} - (1 - \varepsilon_1)^{\beta_1}|}{|(1 + \varepsilon_2)^{\beta_1} - (1 - \varepsilon_1)^{\beta_1}|}$$

$$= \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|\beta_2 \varepsilon_2 + \beta_1 \varepsilon_1|}{|\beta_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)|} \leq \frac{|\beta_2| + |\beta_1|}{|\beta_1|}.$$

Утверждение леммы 1 при $\beta_1 \neq 0$ доказано.

Если $\beta_1 = 0$, то положим $\gamma = \beta_2 \neq 0$. В этом случае

$$\frac{\left|1 - \frac{1}{t^{\beta_2}}\right|}{\left|1 - \frac{r^{\beta_2}}{t^{\beta_2}}\right|} = \frac{|t^{\beta_2} - 1|}{|t^{\beta_2} - r^{\beta_2}|}$$

и

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - 1|}{|t^{\beta_2} - r^{\beta_2}|} = \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|\beta_2 \varepsilon_2|}{|\beta_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)|} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается и следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если $1 < p < \infty$, $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$, то для некоторого $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$ и всех $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\left|1 - \frac{r^{\beta_2}}{t^{\beta_1}}\right| \lesssim \left|1 - \frac{r^\gamma}{t^\gamma}\right|.$$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$, η принадлежит выпуклой оболочке орбиты x ($\eta \in \text{Co}(G.x)$),

$$A(x, y, \eta) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle y, \eta \rangle} = \sqrt{|y - \eta|^2 + |x|^2 - |\eta|^2}.$$

В частности,

$$|\eta| \leq |x|, \quad ||x| - |y|| \leq A(x, y, \eta) \leq |x| + |y|. \quad (9)$$

В [5] для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получено интегральное представление преобразования $\mathcal{R}_j^k$ в виде

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j(x, y) f(y) d\mu_k(y),$$

где ядро $\mathcal{K}_j(x, y)$ является конечной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами ядер

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y_j - \eta_j}{A^{d_k+1}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta), \\ \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) &= \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right) d\mu_x^k(\eta), \quad \alpha \in R_+. \end{aligned}$$

Здесь $d\mu_x^k$ — вероятностная мера с носителем в $\text{Co}(G.x)$, участвующая в интегральном представлении оператора сплетения V_k .

Интегральные операторы с этими ядрами являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$. Теорему 1 докажем для каждого из этих операторов. При этом будем следовать подходу, предложенному в работе Стейна [11]. Рассмотрим случай оператора с ядром $\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)$.

Пусть

$$L_j^{(1)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) f(y) d\mu_k(y).$$

Пусть $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$, $\mathbf{d}_k = \{d_k, d_k\}$. По теореме В для единичного веса

$$\|L_j^{(1)}(u_\beta f)(x)\|_{p, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_k}.$$

Нужно доказать, что

$$\|L_j^{(1)}(u_\beta f)(x) - u_\beta(x)L_j^{(1)}f(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x)f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как $|y_j - \eta_j| \leq A(x, y, \eta)$, то

$$\begin{aligned} |L_j^{(1)}(u_\beta f)(x) - u_\beta(x)L_j^{(1)}f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)| |u_\beta(y) - u_\beta(x)| |f(y)| d\mu_k(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |u_\beta(y)f(y)| d\mu_k(y). \end{aligned}$$

Остается доказать L^p -ограниченность оператора

$$Mf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right|. \quad (10)$$

Мы можем в дальнейшем считать $f(x) \geq 0$.

Для оператора

$$M_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{|x|^\gamma}{|y|^\gamma}\right| d\mu_k(y)$$

в [6] доказана L^p -ограниченность

$$\|M_\gamma f\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}, \quad (11)$$

если $1 < p < \infty$ и $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$.

Разобьем $\mathbb{R}^d$ на три области

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| \leq 1\}, \quad E_2 = \{x \in \mathbb{R}^d: 1 < |x| \leq 2\}, \quad E_3 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| > 2\}.$$

Если $x, y \in E_1$, то

$$\left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \left|1 - \frac{|x|^{\beta_1}}{|y|^{\beta_1}}\right|, \quad \beta_1 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_1} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_1$, $y \in E_2$, то по лемме 1

$$\left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \left|1 - \frac{|x|^{\beta_1}}{|y|^{\beta_2}}\right| \lesssim \left|1 - \frac{|x|^\gamma}{|y|^\gamma}\right|, \quad \gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_2$, $y \in E_1$, то по лемме 2

$$\left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| = \left| 1 - \frac{|x|^{\beta_2}}{|y|^{\beta_1}} \right| \lesssim \left| 1 - \frac{|x|^{\gamma}}{|y|^{\gamma}} \right|, \quad \gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_2 \cup E_3$, $y \in E_2 \cup E_3$, то

$$\left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| = \left| 1 - \frac{|x|^{\beta_2}}{|y|^{\beta_2}} \right|, \quad \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_2 \cup E_3} \left(\int_{E_2 \cup E_3} \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_1$, $y \in E_3$, то $|y| \geq 2|x|$ и в силу (9) $A(x, y, \eta) \asymp |y|^{-d_k}$. Следовательно, для ядра $\Phi(x, y)$ (10) справедлива оценка

$$\Phi(x, y) \lesssim |y|^{-d_k} \left(1 + \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right) = \frac{1}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} + \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)}.$$

и

$$\begin{aligned} \int_{E_1} \left(\int_{E_3} \Phi(x, y) f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x). \end{aligned}$$

Неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \end{aligned} \quad (12)$$

эквивалентно двум неравенствам

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_{\mathbf{d}_k}(x) f(x))^p d\mu_k(x) \quad (13)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta+\mathbf{d}_k}(x) f(x))^p d\mu_k(x). \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что, если $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right)$, то условия (8) в теореме F выполнены для обоих неравенств (13), (14), поэтому неравенство (12) верно. Мы также учли слабую однородность радиального кусочно-степенного веса

$$c_1(\lambda) u_{\beta}(x) \leq u_{\beta}(\lambda x) \leq c_2(\lambda) u_{\beta}(x), \quad \lambda > 0.$$

Если $x \in E_3$, $y \in E_1$, то $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$ и в силу (9) $A(x, y, \eta) \asymp |x|^{-d_k}$. Следовательно, для ядра $\Phi(x, y)$ (10) справедлива оценка

$$\Phi(x, y) \lesssim |x|^{-d_k} \left(1 + \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)} \right) = u_{-\mathbf{d}_k}(x) + \frac{u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x)}{u_\beta(y)}.$$

и

$$\begin{aligned} \int_{E_3} \left(\int_{E_1} \Phi(x, y) f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} \frac{f(y)}{u_\beta(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x). \end{aligned}$$

Неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} \frac{f(y)}{u_\beta(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \end{aligned} \quad (15)$$

эквивалентно двум неравенствам

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \quad (16)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_\beta(x) f(x))^p d\mu_k(x). \quad (17)$$

Проверяя выполнение условий (6) в теореме Е убеждаемся в справедливости неравенств (16), (17), а, значит, и неравенства (15).

Таким образом, L^p -ограниченность оператора M доказана.

Рассмотрим оператор

$$L_j^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y), \quad \alpha \in R_+.$$

Рассуждая как и в предыдущем случае, приходим к необходимости доказать L^p -ограниченность оператора

$$M^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi^{(\alpha)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right) \right| d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)} \right|.$$

Для ядра $\Phi^{(\alpha)}(x, y)$ справедлива оценка

$$|\Phi^{(\alpha)}(x, y)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} + \frac{1}{A^{d_k}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right\} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)} \right|$$

(см. [6]). Так как $|\sigma_\alpha y| = |y|$, то L^p -ограниченность оператора M^α вытекает из L^p -ограниченности оператора M . Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнены все условия теоремы 2. Применяя равенство (1), теорему D и теорему 1, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x)f(x)\|_{q,d\mu_k} &= \|u_{-\gamma}(x)I_1^k\left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)\right)(x)\|_{q,d\mu_k} \\ &\lesssim \|u_{\beta}(x)\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \sum_{j=1}^d \|u_{\beta}(x)(T_j f)(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|u_{\beta}(x)\nabla_k f(x)\|_{p,d\mu_k}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

4. Заключение

Для потенциала Данкля–Рисса и градиента Данкля (L^q, L^p) -неравенства доказаны для двух радиальных кусочно-степенных весов. Для преобразований Данкля–Рисса доказано L^p -неравенство с одним радиальным кусочно-степенным весом. Следующий шаг будет состоять в доказательстве (L^q, L^p) -неравенств для потенциала Данкля–Рисса и градиента Данкля, а также L^p -неравенства для преобразований Данкля–Рисса с одним произвольным весом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1. С. 131–147.
2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
3. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2020. Published online 22 July 2020. <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
5. Amri B., Sifi M. Riesz transforms for Dunkl transform // Annales mathématiques Blaise Pascal. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 147–162.
6. Иванов В. И. Весовые неравенства для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 97–106.
7. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // Ricerche di Matematica. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 195–215.
8. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // J. Lie Theory. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 725–734.
9. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators. Preprint arXiv: 1901.08866.v2, 2019.
10. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities // Communications in Contemporary Mathematics. 2021. Vol. 23. no. 6. 2050024. <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
11. Stein E. M. Note on Singular Integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 8, no. 2. P. 250–254.

REFERENCES

1. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147>
2. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
3. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
4. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2020, "Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform", *Potential Analysis*, Published online 22 July 2020, <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
5. Amri B., Sifi M., 2012, "Riesz transforms for Dunkl transform", *Annales mathématiques Blaise Pascal*, vol. 19, no. 1, pp. 147–162.
6. Ivanov V.I., 2020, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 97–106. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106>
7. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, "Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis", *Ricerche di Matematica*, vol. 64, no. 1, pp. 195–215.
8. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, "Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform", *J. Lie Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 725–734.
9. Velicu A., 2019, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators", *Preprint arXiv: 1901.08866.v2*, 20 p.
10. Velicu A., 2021, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities", *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 23, no. 6, 2050024, <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
11. Stein E.M., 1957, "Note on Singular Integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, no. 2, pp. 250–254.

Получено 30.06.2021

Получено 28.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.98

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-133-142

Операторы Хаусдорфа на пространствах типа Харди¹

И. Р. Лифлянд, М. А. Скопина

Лифлянд Илья Рафаилович — факультет математики, Университет Бар-Илан (г. Рамат-Ган, Израиль).

e-mail: liflyand@math.biu.ac.il

Скопина Мария Александровна — доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург); Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону).

e-mail: skopina@ms1167.spb.edu

Аннотация

Значительная часть теории операторов Хаусдорфа в последние 20 лет сосредоточена на оценках их ограниченности на пространстве Харди $H^1(\mathbb{R}^d)$. Естественными расширениями этого пространства во многих отношениях являются пространства, введённые Суизи. Они заполняют всю шкалу между $H^1(\mathbb{R}^d)$ и $L_0^1(\mathbb{R}^d)$. В отличие от $H^1(\mathbb{R}^d)$, для них известна только атомная характеристика. Для оценок операторов Хаусдорфа на $H^1(\mathbb{R}^d)$ всегда применялись и другие характеристики. Поскольку эта возможность исключена для пространств Суизи, в настоящей статье разработан подход к оценкам операторов Хаусдорфа, использующий только атомные разложения. Если на $H^1(\mathbb{R}^d)$ этот подход применим для однотипных атомов, то на пространствах Суизи он не менее эффективно работает на бесконечных суммах разнородных атомов. Для одного и того же оператора Хаусдорфа условие ограниченности не зависит от пространства, а только от параметров самого оператора. Пространство же, на котором оператор действует, характеризуется выбором атомов. Приведён пример (для простоты двумерный) с матрицей растяжения аргумента только по одной переменной.

Ключевые слова: Оператор Хаусдорфа; действительное пространство Харди; атомарное разложение.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

И. Р. Лифлянд, М. А. Скопина. Операторы Хаусдорфа на пространствах типа Харди // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 133–142.

¹Второй автор был поддержан Российским научным фондом в рамках гранта № 18-11-00055 (разделы 3 и 5 принадлежат этому автору).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.98

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-133-142

Hausdorff operators on Hardy type spaces²

E. Lifyand, M. Skopina

Lifyand Elijah Rafailovich — department of mathematics, Bar-Ilan University (Ramat-Gan, Israel).

e-mail: liflyand@math.biu.ac.il

Skopina Maria — doctor of physical and mathematical sciences, St. Petersburg State University, (Saint Petersburg), Regional Mathematical Center of Southern Federal University.

e-mail: skopina@ms1167.spb.edu

Abstract

During last 20 years, an essential part of the theory of Hausdorff operators is concentrated on their boundedness on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R}^d)$. The spaces introduced by Sweezy are, in many respects, natural extensions of this space. They are nested in full between $H^1(\mathbb{R}^d)$ and $L_0^1(\mathbb{R}^d)$. Contrary to $H^1(\mathbb{R}^d)$, they are subject only to atomic characterization. For the estimates of Hausdorff operators on $H^1(\mathbb{R}^d)$, other characterizations have always been applied. Since this option is excluded in the case of Sweezy spaces, in this paper an approach to the estimates of Hausdorff operators is elaborated, where only atomic decompositions are used. While on $H^1(\mathbb{R}^d)$ this approach is applicable to the atoms of the same type, on the Sweezy spaces the same approach is not less effective for the sums of atoms of various types. For a single Hausdorff operator, the boundedness condition does not depend on the space but only on the parameters of the operator itself. The space on which this operator acts is characterized by the choice of atoms. An example is given (two-dimensional, for simplicity), where a matrix dilates the argument only in one variable.

Keywords: Hausdorff operator; real Hardy space; atomic decomposition.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

E. Lifyand, M. Skopina, 2021, "Hausdorff operators on Hardy type spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 133–142.

1. Introduction

In the last two decades, the study of various aspects of the theory of Hausdorff operators has constantly been developed. The paper [15] plays a special role in this topic not because such operators were introduced there or studied for the first time. In fact, in the one-dimensional case, Hausdorff operators on the real line were introduced in [9] (in a sense, they can be found in a dual form in [10]). The main feature of [15] is that such operators in a more or less full generality were studied on the real Hardy space. This showed the prospects of such a theory on more sophisticated spaces than the Lebesgue ones, on which Hausdorff summability had been started earlier. The progress of such studies can partially be seen in the survey papers [5] and [14]. However, the

²The second author was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 18-11-00055 (Sections 3 and 5 is due to this author).

approach elaborated in [15] did not allow to solve a similar problem of the boundedness of the operator on $H^1(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$. First attempts [16] and [20] had not solved the problem nor even led to the needed space $H^1(\mathbb{R}^d)$. A sort of a solution was given in [2] but for very exotic Hausdorff type operators, more precisely, for those with one-dimensional averaging. Finally, in [12] a “genuine” multidimensional Hausdorff type operator

$$(\mathcal{H}f)(x) = (\mathcal{H}_\Phi f)(x) = (\mathcal{H}_{\Phi,A}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) f(xA(u)) du, \quad (1)$$

where $A = A(u) = (a_{ij})_{i,j=1}^d = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^d$ is the $d \times d$ matrix with the entries $a_{ij}(u)$ being Borel measurable functions of u , was introduced (similar to that independently introduced in [3] for the study on the Lebesgue spaces). This matrix $A(u)$ may be singular at most on a set of measure zero; $xA(u)$ is the row d -vector obtained by multiplying the row d -vector x by the matrix A . Of course, xA can be written as $A^T x^T$, where both the matrix and the vector are transposed, the latter to the column vector. Applying the duality approach, the authors of [12] obtained a condition for the boundedness of the Hausdorff operator (1) on $H^1(\mathbb{R}^d)$ in terms of a matrix norm of A^{-1} . A very similar but slightly different condition appeared in [13] by means of the atomic characterization of $H^1(\mathbb{R}^d)$. In fact, all the conditions in question are given in the form $\Phi \in L_w^1$, where $w \geq 0$ is a weight (a non-negative and locally integrable function) and the norm of Φ in the weighted space L_w^1 is defined as

$$\|\Phi\|_{L_w^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(u)| w(u) du.$$

The weight is always given in terms of the matrix $A(u)$. For example, the weight in [13] is assigned as follows. For a $d \times d$ matrix M , let $\|M\| = \max_{|x|=1} |Mx^T|$, where $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm. It is known (see, e.g., [11, Ch.5, 5.6.35]) that this norm does not exceed any other matrix norm. Now, a bit of history of the H^1 results for $\mathcal{H}_{\Phi,A}$. We start not from the first one in [12] but with that in [13]. The H^1 boundedness is proved there provided $\Phi \in L_W^1$, where the weight

$$W(u) = \|A^{-1}(u)\|^d.$$

In fact, the result in [12] looks similarly, just the matrix norm (weight) differs a little. It is worth to compare these assumptions on Φ and A with the condition $\Phi \in L_V^1$, with

$$V(u) = |\det A^{-1}(u)|.$$

The former ensures the boundedness of the Hausdorff operator in $H^1(\mathbb{R}^d)$, while the latter provides the boundedness on $L^1(\mathbb{R}^d)$. Since we are going to deal with the real Hardy type spaces, subspaces of $L^1(\mathbb{R}^d)$, the integrability of the Hausdorff operator must be always guaranteed. For this, the condition $\Phi \in L_V^1$, with $V(u) = |\det A^{-1}(u)|$, will be a priori implied into our consideration. It was proved in [17] that the same condition $\Phi \in L_V^1$ ensures the boundedness of Hausdorff type operators on $H^1(\mathbb{R}^d)$ but for a very special diagonal matrices A with all diagonal entries equal to one another. This by no means can be true in the general case. One can see the difference between the two conditions from the well-known inequality

$$\|M\|^d \geq |\det M|. \quad (2)$$

By this, the two conditions are like the two poles. Any improvement means to take a step closer to the condition $\Phi \in L_V^1$. One step towards this was taken in [4], where the condition in [13] was relaxed to

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(u)| \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q})} |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} du < \infty. \quad (3)$$

Shortly after, the next step had been taken. In [6], the following condition came into play:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(u) \det A^{-1}(u)| \ln \left(1 + \frac{\|A^{-1}(u)\|^d}{|\det A^{-1}(u)|} \right) du < \infty; \quad (4)$$

it is also proven in [6] that the result is sharp in the sense that for every better estimate, there is a corresponding Hausdorff operator not bounded in $H^1(\mathbb{R}^d)$.

The following natural continuation of the above work is in order. In [19], a scale of Hardy type spaces H_r , $1 \leq r < \infty$, was studied (for further study of this scale, see [1]). These spaces are nested between H^1 and L^1 (in fact, even L_0^1 , where L_0^1 is a space of Lebesgue integrable functions with cancelation property) so that their duals are similarly nested between L^∞ and BMO (the former is known to be dual of L^1 , while the latter is dual of H^1). Thus, our goal is to give boundedness conditions for Hausdorff operators on the H_r spaces. The main problem here is as follows. In each of the aforementioned results for H^1 , the bound was achieved by making use of two different characterizations of the real Hardy space: atomic and Riesz transforms in [13] and [6]; atomic and maximal function in [4]. The obstacle is that the spaces H_r can be treated by means of atomic representations only, but even in the atomic expansion of one function a variety of atoms is used. None of the additional characterizations helpful in the earlier works exists in this case. In order to overcome this obstacle, we have found a way to use only atomic characterizations.

In the aforementioned H^1 results, the crucial role is played by estimates of the $H^1(\mathbb{R}^d)$ norms of all possible automorphisms $f_A(x) := f(xA(u))$ of the H^1 function f . The better is the constant C_A in the estimate

$$\|f(\cdot A(u))\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_A \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

the stronger is the result. We continue this line; of course, for the H_r spaces the corresponding norms of $f_A(x) := f(xA(u))$ are evaluated.

The structure of the paper is as follows. In the next section, we give certain preliminaries of the theory of the real Hardy space and of H_r spaces. In Section 3, we describe the mentioned above atomic approach. In Section 4, we apply the obtained estimates for atoms to their sequences in order to establish the boundedness of Hausdorff operators on the H_r spaces. In the last section, we present an example.

In what follows $a \ll b$ means that $a \leq Cb$ for some absolute constant C but we are not interested in explicit indication of this constant.

2. Preliminaries on the Hardy type spaces

We start with some basics of the atomic characterization of $H^1(\mathbb{R}^d)$. Let $a(x)$ denote an atom (an $(1, q)$ -atom), $1 < q \leq \infty$, a function that is of compact support:

$$\text{supp } a \subset B(t_0, R), \quad (5)$$

where $B(t_0, R)$ is the ball in $\mathbb{R}^d$ with center t^0 and radius R ; and satisfies the following size condition (L^q normalization)

$$\|a\|_q \leq \frac{1}{|B(t_0, R)|^{1-\frac{1}{q}}}, \quad (6)$$

where $|B|$ denotes the Lebesgue measure of B (we believe that no confusion will appear with the same notation $|\cdot|$ for the Euclidean norm, where $\cdot$ means a vector in $\mathbb{R}^d$), and the cancelation condition

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx = 0. \quad (7)$$

These conditions make each atom integrable, with the L^1 norm bounded by 1. Indeed, by (5), Hölder's inequality and (6), we get, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |a(x)| dx = \int_{B(t_0, R)} |a(x)| dx \leq \left(\int_{B(t_0, R)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(t_0, R)} |a(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq 1. \quad (8)$$

It is well known that (see, e.g., [7] or [18])

$$\|f\|_{H^1} \sim \inf \left\{ \sum_k |c_k| : f(x) = \sum_k c_k a_k(x) \right\}, \quad (9)$$

where a_k are the above described $(1, q)$ -atoms. In fact, the atoms may be even of different q , but $q > 1 + \delta$ should hold for all q , for some fixed $\delta > 0$. In addition, to compare the “genuine” norm of an H^1 function (say, by means of the maximal function or by means of the Riesz transforms) with that for the $(1, q)$ -atomic decomposition, one should take into account that the factor $\frac{1}{q-1}$, in addition to an absolute constant, appears in the latter (for discussion on this, see, for example, [19]). This means that a more precise form of (3) should include this factor before the integral in question; this, for instance, shows that the case $q = 1$ in (3) is excluded.

The scale of H_r spaces is constructed by an additional parameter r coming into play. More precisely, a sequence of the above defined atoms is used so that the corresponding q -s approach to 1. The parameter r appears in a different size condition used in place of (6):

$$\|a\|_q \leq \frac{1}{p^{\frac{1}{r}} |B(t_0, R)|^{1-\frac{1}{q}}}. \quad (10)$$

The atoms defined by (5), (10) and (7) will be called $(1, q, r)$ -atoms. The H_r spaces are defined as

$$\|f\|_{H_r} \sim \inf \left\{ \sum_k |c_k| : f(x) = \sum_k c_k a_k(x) \right\}, \quad (11)$$

where a_k are the $(1, q_k, r)$ -atoms, with $1 < q_k \leq 2$ and $q_k \rightarrow 1$ as $k \rightarrow \infty$. In each of the cases, the convergence can be understood in the distributional sense or in the L^1 norm. What mainly makes the H_r spaces different is the influence of different r on p_k which tends to infinity as $q_k \rightarrow 1$; recall that $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$. It is proven in the afore-mentioned papers that

$$H^1 \subset H_{r_1} \subset H_{r_2} \subset L_0^1,$$

for any $1 < r_1 < r_2 < \infty$.

We add, just for completeness, that the parameter 1 in the notation of atoms means that some exponential p smaller than 1 may appear instead, for the study of H^p spaces, with $0 < p < 1$. However, we are not going to use such an opportunity in this work.

3. Hausdorff operators on the real Hardy space

In order to show how one can estimate Hausdorff operators using only atomic decompositions, we first restrict ourselves to the case of $H^1(\mathbb{R}^d)$. We shall deal with $(1, q)$ -atoms rather than with $(1, \infty)$ -atoms, exactly as in [4]. Thus, we begin with decomposing f in (1).

Let $f = \sum_k c_k a_k$, where a_k are $(1, q)$ -atoms and $\sum_k |c_k| < \infty$. First of all, we note that

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(xA(u)) dx = |\det A^{-1}| \int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx = 0. \quad (12)$$

By changing the order of integration and summation, we arrive at

$$(\mathcal{H}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) \sum_k c_k a_k(xA(u)) du = \sum_k c_k \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) a_k(xA(u)) du, \quad (13)$$

To justify the change of the order, we observe that both the right-hand side and the intermediate integral are Lebesgue integrable in x . This follows from (12) because the function $\Phi |\det A^{-1}(\cdot)|$ is integrable on $\mathbb{R}^d$, the series $\sum_k c_k$ is absolutely convergent, and, by (8), the atoms a_k are uniformly integrable. Thus, due to the du Bois-Reymond lemma (see, e.g., [8]), it suffices to verify that the last equality in (13) holds true in the distributional sense. But this follows immediately if one uses again the above arguments.

Let us analyze the properties of the distorted atoms $a(xA(u))$, where a satisfies (5). First, it has mean zero because of (12). Obviously, its support is contained in a ball of radius $R\|A^{-1}(u)\|$. To make atoms from $a(xA(u))$, we scale them as follows:

$$\tilde{a}(x, u) := \frac{1}{|\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \|A^{-1}(u)\|^{\frac{d}{p}}} a(xA(u)).$$

Since

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |a(xA(u))|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

using (6), we obtain

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}(x, u)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{|B(A^{-1}(u)t_0, R\|A^{-1}(u)\|)|^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{1}{|B(t_0, 1)|^{\frac{1}{p}} (R\|A^{-1}(u)\|)^{\frac{d}{p}}}, \end{aligned} \quad (14)$$

which yields that $\tilde{a}(x, u)$ is an $(1, q)$ -atom.

With this in hand, let us consider

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) a(xA(u)) du,$$

with a continuing to be an $(1, q)$ -atom. Taking into account (3), let us denote

$$A_m(x) := \frac{1}{\alpha_m} \int_{2^m \leq R\|A^{-1}(u)\| < 2^{m+1}} |\Phi(u)| |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \|A^{-1}(u)\|^{\frac{d}{p}} \tilde{a}(x, u) du.$$

and

$$\alpha_m = \int_{2^m \leq R\|A^{-1}(u)\| < 2^{m+1}} |\Phi(u)| |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \|A^{-1}(u)\|^{\frac{d}{p}} du,$$

for $m \in \mathbb{Z}$. If a_k is taken rather than a , we shall denote the corresponding values by $A_{m,k}$ and $\alpha_{m,k}$. We thus have

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_m(x) dx = 0.$$

As above, the support of $A_m(x)$ is related to the support of $\tilde{a}(x, u)$. Since the latter is within a ball of radius $R\|A^{-1}(u)\|$, we have that the support of $A_m(x)$ is within a ball of radius 2^{m+1} . Now, by Jensen's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |A_m(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{\alpha_m} \int_{2^m \leq R\|A^{-1}(u)\| < 2^{m+1}} |\Phi(u)| |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \|A^{-1}(u)\|^{\frac{d}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}(x, u)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} du \ll \frac{1}{2^{(m+1)\frac{d}{p}}}. \end{aligned}$$

By these, $A_m(x)$ (and each of the $A_{m,k}(x)$) is an atom. Subsequently, we get

$$(\mathcal{H}f)(x) = \sum_k c_k \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) a_k(xA(u)) du = \sum_k c_k \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{m,k} A_{m,k}(x),$$

which is an atomic decomposition, up to an absolute constant multiple. Indeed, since $\sum_m \alpha_{m,k}$ is dominated by the left-hand side of (3) and $A_{m,k}(x)$ are atoms, we have a series of atoms with the sequence of coefficients summable.

We thus have obtained an atomic decomposition for the Hausdorff operator, with the H^1 norm dominated by that of f times

$$\|A^{-1}\|^{d(1-\frac{1}{q})} |\det A^{-1}|^{\frac{1}{q}} = W^{1-\frac{1}{q}} V^{\frac{1}{q}}.$$

It is worth noting that minimizing the decomposition, if needed, we can prove the result in [4] (condition (3)).

4. Hausdorff operators on the Hardy type spaces

We will now demonstrate how to adjust the estimates of the previous section for obtaining

THEOREM 1. *For any $q > 1$ and any $1 \leq r < \infty$, the Hausdorff operator $\mathcal{H}f$ is bounded on the Hardy type space $H_r(\mathbb{R}^d)$ provided condition (3) holds.*

PROOF. The proof goes along the same lines as that in the previous section. Indeed, in that proof the treatment of an individual atom was the main technicality. After that, since the atoms were of the same type, the condition concerned just that type of atom. Here, various $(1, q_k, r)$ -atoms are involved in the decomposition. We take into account that in any atomic decomposition all the sums, where only $(1, q_k, r)$ -atoms are involved with $q_k \geq q$, give a function in H^1 . In other words, every function f in H_r can be represented as $f = f_1 + f_2$, where $f_1 \in H^1$ and $f_2 \in H_r$ with atomic

expansions by means $(1, q_k, r)$ -atoms, $q_k < q$. Obviously, we may consider $f_1 \in H^1$ be characterized by $(1, q)$ -atoms. Thus, we apply the obtained estimates separately to each of them. Therefore, the norms to be estimated by $\sum_k |c_k|$ appear first as

$$(\mathcal{H}f)(x) = \sum_k c_k \sum_{m \in \mathcal{Z}} \alpha_{m,k} A_{m,q_k,r}(x).^3$$

Here $A_{m,q_k,r}(x)$ is an $(1, q_k, r)$ -atom, $q_k < q$, and

$$\alpha_{m,k} = \int_{2^m \leq R_k \|A^{-1}(u)\| < 2^{m+1}} |\Phi(u)| |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q_k}} \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q_k})} du.$$

Subsequently, we get

$$\sum_k |c_k| \sum_m |\alpha_{k,m}| = \sum_k |c_k| p^{-\frac{1}{q_k}} \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(u)| \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q_k})} |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q_k}} du.$$

Since $|\det A^{-1}(u)| \leq \|A^{-1}(u)\|^d$, we have

$$\begin{aligned} & \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q_k})} |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q_k}} \\ & \leq \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q_k})} \|A^{-1}(u)\|^{d(\frac{1}{q_k}-\frac{1}{q})} |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}} \\ & = \|A^{-1}(u)\|^{d(1-\frac{1}{q})} |\det A^{-1}(u)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

and taking the upper bound (3), we obtain

$$\sum_k |c_k| \sum_m |\alpha_{k,m}| < \infty,$$

which completes the proof of Theorem 1. $\square$

REMARK 1. One can see that condition (3) is the same for any r and the same as for H^1 in [4]. The parameter r appears only in the atoms, that is, the family of considered functions may be different. It is an open problem whether this result for the H_r spaces can be improved or not.

5. Example

We give an example which illustrates the main result. It is two-dimensional, $d = 2$, for the sake of convenience and transparency.

Let

$$f(x) = \begin{cases} p_k^{-\frac{1}{r}}, & 1 + \dots + \frac{1}{(k-1)^2} \leq x_1 < 1 + \dots + \frac{1}{k^2}, 0 < x_2 < 1, \\ k = 3, 4, \dots, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

³Next we set

$$A_{k,r,m}(x) := \frac{1}{\alpha_{k,r,m}} \sum_{2^m \leq \sqrt{1 + \frac{N^2}{k^4}} < 2^{m+1}} \frac{1}{k^{\frac{2}{q_k}}} N^{\frac{1}{q_k}} \left(1 + \frac{N^2}{k^4}\right)^{1-\frac{1}{q_k}} \tilde{a}_{k,r}(x) du.$$

where

$$\alpha_{k,r,m} = \sum_{2^m \leq \sqrt{1 + \frac{N^2}{k^4}} < 2^{m+1}} p^{-\frac{1}{q_k}} \frac{1}{k^{\frac{2}{q_k}}} N^{\frac{1}{q_k}} \left(1 + \frac{N^2}{k^4}\right)^{1-\frac{1}{q_k}},$$

The matrix A is

$$A(u) \equiv A = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Set

$$a_{k,r}(x) = \begin{cases} \frac{k^{\frac{2}{q_k}}}{p_k^{\frac{1}{r}}}, & 1 + \dots + \frac{1}{(k-1)^2} \leq x_1 < 1 + \dots + \frac{1}{k^2}, 0 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

and check that $a_{k,r}$ is an $(1, q_k, r)$ -atom, up to a constant multiple. Indeed, its support is in the ball of radius $\sqrt{1 + \frac{1}{k^4}}$, and its L^{q_k} norm is dominated by $p_k^{-\frac{1}{r}}$.

By this,

$$f(x) = \sum_k \frac{1}{k^{q_k}} a_{k,r}(x),$$

and we have

$$f(xA) = \sum_k \frac{1}{k^{q_k}} a_{k,r}(xA) = \sum_k \frac{1}{k^{q_k}} N^{\frac{1}{q_k}} \left(1 + \frac{N^2}{k^4}\right)^{1-\frac{1}{q_k}} \tilde{a}_{k,r}(x),$$

where $\tilde{a}_{k,r}$ is an $(1, q_k, r)$ -atom (up to a constant multiple), with the support in the ball of radius $\sqrt{1 + \frac{N^2}{k^4}}$.

Hence, the corresponding Hausdorff operator is subject to the decomposition

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(u) du \sum_k k^{-\frac{2}{q_k}} a_{k,r}(xA) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(u) \sum_k k^{-\frac{2}{q_k}} N^{\frac{1}{q_k}} \left(1 + \frac{N^2}{k^4}\right)^{1-\frac{1}{q_k}} \tilde{a}_{k,r}(x) \\ &:= \sum_k c_k \tilde{a}_{k,r}(x). \end{aligned}$$

Since the function $g(t) = \lambda^t(1 + \lambda^2)^{1-t}$ decreases on $(0, +\infty)$ for every $\lambda > 0$, we have

$$\|f\|_{H_r} \leq \sum_k |c_k| \leq \|\Phi\|_{L^1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N}{k^2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{N^2}{k^4}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

The final condition follows from the bound for the latter series. Majorizing it by taking all $q_k = q$ and splitting the sum into two, over $1 \leq k \leq \sqrt{N}$ and over $\sqrt{N} < k < \infty$, we see that for the first sum the estimate is exactly $N^{2-\frac{1}{q}}$, while the bound for the second one is better.

REFERENCES

1. W. Abu-Shammala and A. Torchinsky, 2208, "Spaces between H^1 and L^1 ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 1743–1748.
2. K.F. Andersen, 2003, "Boundedness of Hausdorff operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$, and $BMO(\mathbb{R}^n)$ ", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 69, 409–418.
3. G. Brown and F. Móricz, 2002 "Multivariate Hausdorff operators on the spaces $L^p(\mathcal{R}^n)$ ", *J. Math. Anal. Appl.*, 271, 443–454.

4. J. Chen, D. Fan and J. Li, 2012, "Hausdorff operators on function spaces", *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 33, 537–556.
5. J. Chen, D. Fan and S. Wang, 2014, "Hausdorff Operators on Euclidean Spaces", *Appl. Math. J. Chinese Univ. (Ser. B)* (4) 28, 548–564.
6. J. Chen and X. Zhu, 2014, "Boundedness of multidimensional Hausdorff operators on $H^1(\mathbb{R}^n)$ ", *J. Math. Anal. Appl.*, 409, 428–434.
7. R.R. Coifman and G. Weiss, 1977, "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83, 569–645.
8. I. M. Gelfand and S. V. Fomin, 1963, *Calculus of variations*, Prentice-Hall.
9. C. Georgakis, 1992, "The Hausdorff mean of a Fourier-Stieltjes transform", *Proc. Am. Math. Soc.* 116, 465–471.
10. G.H. Hardy, 1949 *Divergent series*, Clarendon Press, Oxford.
11. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, 1985, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
12. A. Lerner and E. Liflyand, 2007, "Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space", *J. Austr. Math. Soc.*, 83, 79–86.
13. E. Liflyand, 2008, "Boundedness of multidimensional Hausdorff operators on $H^1(\mathbb{R}^n)$ ", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 74, 845–851.
14. E. Liflyand, 2013, "Hausdorff Operators on Hardy Spaces", *Eurasian Math. J.*, 4, no. 4, 101–141.
15. E. Liflyand and F. Móricz, 2000, "The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$ ", *Proc. Am. Math. Soc.*, 128, 1391–1396.
16. E. Liflyand and F. Móricz, 2001, "The multi-parameter Hausdorff operator is bounded on the product Hardy space $H^{11}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ", *Analysis* 21, 107–118.
17. F. Móricz, 2005, "Multivariate Hausdorff operators on the spaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ and $BMO(\mathbb{R}^n)$ ", *Analysis Math.*, 31, 31–41.
18. E. M. Stein, 1970, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
19. C. Sweeney, 2004, "Subspaces of $L^1(\mathbb{R}^d)$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132, 3599–3606.
20. F. Weisz, 2004, "The boundedness of the Hausdorff operator on multi-dimensional Hardy spaces", *Analysis*, 24, 183–195.

Получено 10.09.20 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-143-153

**Многочлены с малыми значениями в окрестностях корней
в архимедовой и неархимедовой метриках¹**

А. В. Луневич, Н. В. Шамукова

Луневич Артём Вадимович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: lunevichav@gmail.com

Шамукова Наталья Валентиновна — кандидат физико-математических наук, доцент, Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь (г. Минск)

*e-mail: shatukova_n@mail.ru***Аннотация**

Для натурального $Q > 1$ обозначим I — интервал $I \subset \mathbb{R}$ длины $\mu_1 I = Q^{-v_1}$, $v_1 > 0$ (μ_1 — мера Лебега) и $\mu_2 K = Q^{-v_2}$, $v_2 > 0$ (μ_2 — мера Хаара измеримого цилиндра $K \subset \mathbb{Q}_p$). Введем множество полиномов степени $\leq n$ и высоты $H(P) \leq Q$

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Для таких многочленов обозначим $\mathcal{A}(n, Q)$ множество действительных корней, и p -адических корней $P(x)$, лежащих в пространстве $V = I \times K$. В работе доказано, что подходящем $c_1 = c_1(n)$ и $0 \leq v_1, v_2 \leq \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{A}(n, Q) \geq c_1 Q^{n+1-v_1-v_2}.$$

Доказательство проводится методами метрической теории диофантовых приближений, разработанных В. Г. Спринджуком при доказательстве гипотезы Малера и В. И. Берника при доказательстве гипотезы А. Бейкера.

Ключевые слова: Мера Лебега, мера Хаара, алгебраические числа, диофантовы приближения, неприводимые многочлены

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. В. Луневич, Н. В. Шамукова. Многочлены с малыми значениями в окрестностях нулей в архимедовой и неархимедовой метриках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 143–153.

¹Исследование выполнено при содействии гранта БРФФИ (проект Ф19М-088).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-143-153

**Polynomials with small values in the neighborhoods of zeros
in Archimedean and non-Archimedean metrics**

A. V. Lunevich, N. V. Shamukova

Lunevich Artyom Vadimovich — candidate of physical and mathematical sciences, researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk).

e-mail: lunevichav@gmail.com

Shamukova Natalya Valentinovna — candidate of physical and mathematical sciences, University of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Belarus (Minsk).

e-mail: shamukova_n@mail.ru

Abstract

For a positive integer $Q > 0$, let $I \subset \mathbb{R}$ denote an interval of length $\mu_1 I = Q^{-\gamma_1}$ (where μ_1 is the Lebesgue measure) and $\mu_2 K = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 0$ (where μ_2 is the Haar measure of a measurable cylinder $K \subset \mathbb{Q}_p$). Let us denote the set of polynomials of degree $\leq n$ and height $H(P) \leq Q$ as

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Let $\mathcal{A}(n, Q)$ denote the set of real and p -adic roots of such polynomials $P(x)$ lying in the space $V = I \times K$. In this paper it is proved that the following inequality holds for a suitable constant $c_1 = c_1(n)$ and $0 \leq v_1, v_2 \leq \frac{1}{2}$:

$$\#\mathcal{A}(n, Q) \geq c_1 Q^{n+1-\gamma_1-\gamma_2}.$$

The proof relies on methods of metric theory of Diophantine approximation developed by V.G. Sprindzuk to prove Mahler's conjecture and by V.I. Bernik to prove A. Baker's conjecture.

Keywords: Lebesgue measure, Haar measure, algebraic numbers, Diophantine approximation, irreducible polynomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. V. Lunevich, N. V. Shamukova, 2021, "Polynomials with small values in the neighborhoods of zeros in Archimedean and non-Archimedean metrics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 143–153.

1. Введение

Около ста лет тому назад А. Я. Хинчин [13] доказал теорему о точном порядке приближения почти всех действительных чисел рациональными числами. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ интервал, μB — мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, ψ — монотонно убывающая функция при $x > 0$.

Пусть $\mathcal{L}_1(\psi)$ — множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| < \psi(q) \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в натуральных числах q и целых числах p . Тогда согласно теореме Хинчина [13] верно равенство

$$\mu\mathcal{L}_1(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) < \infty; \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) = \infty. \end{cases} \quad (2)$$

В неравенстве (1) в левой части стоит многочлен первой степени $qx - p$. Обобщение неравенства (1) на многочлены произвольной степени

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (3)$$

является актуальной задачей, которой скоро исполняется семьдесят лет. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \psi(H) \quad (4)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах (1) высоты $H = H(P) = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$. Равенство $\mu\mathcal{L}_n(H^{-1-\epsilon}) = 0$, $\epsilon > 0$ — длительное время было проблемой Малера [14] которую решил В. Г. Спринджук [4,5]. При произвольной функции $\psi(x)$ аналогичное утверждение было известно как гипотеза А. Бейкера [7] и имело вид

$$\mu\mathcal{L}_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty; \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (5)$$

В случае сходимости ряда в (5) гипотезу доказал В. И. Берник [9], а в случае расходимости В. В. Бересневич [8].

В монографии [5] Спринджук доказал гипотезу Малера в поле комплексных чисел и p -адических чисел и в поле формальных степенных рядов. Еще более общие теоремы в случае совместных приближений в трех полях $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, доказали Н. В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник [11,12].

В настоящей работе мы покажем, как указанные выше идеи позволяют находить точки $\bar{\beta} = (\alpha, \gamma)$, которые лежат в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ с алгебраическими числами $\alpha \in I$ и алгебраическим p -адическими числами из p -адического цилиндра K .

С помощью принципа ящиков Дирихле [6,10] нетрудно доказать, что для любого натурального числа $Q > 1$ и любой точки $(x, \omega) \in I \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ можно найти полином $P(t) \in \mathbb{Z}$ из класса полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \geq n, H(P) \leq Q\},$$

удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{aligned} |P(x)| &< c_1(n) Q^{-v_1}, \\ |P(\omega)|_p &< c_1(n) Q^{-v_2}, \quad v_1 \geq -1, \quad v_2 \geq 0, \quad v_1 + v_2 = n. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) и далее $c_1, c_2, \dots$ — величины, зависят от n и не зависящие от H и Q .

Из работ [5,10] можно получить, что для большей части (x, ω) (в смысле меры $\mu = \mu_1 \mu_2$, μ_1 — мера Лебега в $\mathbb{R}$ и μ_2 — мера Хаара в $\mathbb{Q}_p$) ни одно из неравенств в (6) нельзя заменить на $Q^{-v_i - \epsilon}$, $i = 1, 2$, $\epsilon > 0$.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — корни полинома $P(x)$ из $\mathbb{C}$, а через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — корни $P(\omega)$ в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{Q}_p$. Для $\epsilon_1 > 0$ и натурального $T > T_0(\epsilon_1, n)$ упорядочим корни следующим образом

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_2| &\leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p &\leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_j| &\leq Q^{-\rho_j}, \quad (l_j - 1)T^{-1} < \rho_j \leq l_j T^{-1}, \quad j = 2, \dots, n \\ |\gamma_1 - \gamma_i|_p &\leq Q^{-\sigma_i}, \quad (m_i - 1)T^{-1} < \sigma_i \leq m_i T^{-1}, \quad i = 2, \dots, n \\ p_j &= T^{-1} \sum_{s=j+1}^n l_s, \quad q_i = T^{-1} \sum_{s=1}^n m_s. \end{aligned}$$

В монографии В. Г. Спринджук [5] показано, как метрические задачи с многочленами сводятся к многочленам с дополнительными условиями

$$|a_n| > dH, \quad 0 < d = d(n) < 1, \quad |a_n|_p > p^{-d_1(n)}. \quad (7)$$

Эти оценки предполагаются выполненными в теореме Условия (7) приводят к неравенствам (Леммы 5, 6)

$$|\alpha_j| < c_3, \quad |\gamma_j|_p < c_4, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

2. Основной текст статьи

Пусть $I_1 \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал длины Q^{-v_1} , $0 \leq v_1 < \frac{1}{2}$, $K_1 \subset \mathbb{Q}_p$ — цилиндр из $\mathbb{Q}_p$ с мерой Хаара $\mu_2 K_1 = Q^{-v_2}$, $0 \leq v_2 < \frac{1}{2}$. Обозначим через $\bar{M} = (\alpha_1, \gamma_1)$ вектор, координаты которого алгебраические числа $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ и $\gamma_1 \in K_1 \subset \mathbb{Q}_p$, являются корнями $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Множество таких корней обозначим $\mathcal{P}_n(Q, I_1, K_1)$.

ТЕОРЕМА 1. *При некотором c_5 справедливо равенство*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, I_1, K_1) > c_5 Q^{n+1} \mu_1 I \times \mu_2 K_1.$$

Теорема 1 доказана только в действительном случае в работе [3] и основана на метрической теореме, являющейся эффективной версией теоремы Спринджук. Доказательство теоремы 1 несложно следует из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Обозначим через B множество решений системы неравенств*

$$|P(x)| < Q^{-v_1}, \quad |P(\omega)|_p < Q^{-v_2}. \quad (9)$$

И пусть дополнительно выполняется одно из неравенств

$$|P'(x)| < \delta_0 Q, \quad (10)$$

$$|P'(\omega)|_p < \delta_0. \quad (11)$$

Тогда $\mu B_1 < \frac{1}{4} \mu(I_1 \times K_1)$.

При доказательстве будем пользоваться леммами, нечетные из которых верны в поле действительных чисел, а четные в поле $\mathbb{Q}_p$.

ЛЕММА 1 ([5]). *Если α_1 — ближайший к x корень многочлена $P(x)$, то*

$$|x - \alpha_1| < \begin{cases} n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \\ 2^n |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ 2^n \left(|P(x)| |\alpha_1 - \alpha_2| |P'(\alpha_1)|^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

ЛЕММА 2 ([5,10]). *Если γ_1 — ближайший к ω корень многочлена $P(\omega)$, то*

$$|\omega - \gamma_1|_p < \begin{cases} |P(\omega)|_p |P'(\omega)|_p^{-1}, \\ |P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \\ \left(|P(\omega)|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. При $|P'(x)| > 2n^2 Q^{-\frac{v_1-1}{2}}$ верно равенство

$$\frac{1}{2} |P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2 |P'(x)|.$$

ЛЕММА 4. При $|P'(\omega)| > 2n^2 Q^{-\frac{v_2-1}{2}}$ верно равенство

$$\frac{1}{2} |P'(\omega)| < |P'(\gamma_1)| < 2 |P'(\omega)|.$$

Леммы 3,4 доказываются с использованием разложения $P'(x)$ и $P'(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности α_1 и γ_1 .

ЛЕММА 5. Если у многочлена $P(s)$ старший коэффициент a_n удовлетворяет условию $|a_n| > dH$, то

$$|\alpha_j| < c, \quad 1 \leq j \leq n.$$

ЛЕММА 6. Если у многочлена $P(s)$ старший коэффициент a_n удовлетворяет условию $|a_n|_p > p^{-S_n}$, то

$$|\gamma_j|_p < c, \quad 1 \leq j \leq n.$$

ЛЕММА 7. Пусть полиномы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ степени n и высоты $\leq Q$ без общих корней на отрезке I_1 , $\mu_1 I_1 = Q^{-\tau_1}$, $\gamma_1 > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{x \in I_1} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau_1 + 1 + 2 \max(\tau_1 + 1 - \gamma_1, 0) < 2n + \delta.$$

ЛЕММА 8. Пусть полиномы $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ степени n и высоты $\leq Q$ без общих корней в алгебраическом замыкании Q_p и в цилиндре K_1 , $\mu_2 K_1 = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{\omega \in K_1} (|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 > 0.$$

Тогда при любом $\delta_1 > 0$ и $Q > Q_0(\delta_1)$ верно неравенство

$$\tau_2 + 2 \max(\tau_2 - \gamma_2, 0) < 2n + \delta_1.$$

ЛЕММА 9 ([5]). При подходящих c_7, c_8 , $R(x) = t_1(x) \dots t_k(x)$ справедливы неравенства

$$c_7 \prod_{j=1}^k H(t_j) < H(R) < c_8 \prod_{j=1}^k H(t_j).$$

ЛЕММА 10 ([10]). Пусть неравенство

$$|R(x)| <^H -\tau, \quad \tau > 0$$

выполняется для всех $x \in B_4$, $\mu B_4 > \frac{1}{2} \mu I$. Тогда для всех $x \in I$, при подходящем c_9 , верно неравенство

$$|R(x)| < c_9 H^{-\tau}.$$

Покажем, как из теоремы 2 можно получить теорему 1. Введем множество

$$B_2 = (I_1 \times K_1) \setminus B_1$$

Из теоремы 2 следует, что $\mu B_2 \geq \frac{3}{4} \mu(I_1 \times K_1)$. Возьмем точку $u_1 = (x_1, \omega_1) \in B_2$. В этой точке верна система неравенств

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll Q^{-v_1}, \quad |P(\omega)|_p \ll Q^{-v_2}, \\ |P'(x)| &> \delta_0 Q, \quad |P'(\omega)|_p > \delta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись леммами 3 и 4 систему неравенств (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} |P(x_1)| &\ll Q^{-v_1}, \quad |P(\omega_1)|_p \ll Q^{-v_2}, \\ |P'(\alpha_1)| &> \delta_0/2Q, \quad |P'(\gamma_1)|_p > \delta_0/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Применим к первому неравенству в (13) лемму 1. Получим

$$|x_1 - \alpha_1| \ll 2\delta_0^{-1} Q^{-v_1-1}. \quad (14)$$

Из второго неравенства (13) и леммы 2 имеем

$$|\omega_1 - \gamma_1| \ll 2\delta_0^{-1} Q^{-v_2}. \quad (15)$$

Нетрудно доказать, что корень α_1 в (14) действительный. Воспользуемся леммой Гензеля [10] и покажем, что корень γ_1 лежит в $\mathbb{Q}_p$. Мы получим в окрестности $\sigma(P)$ точки $u_1 \in B_2$ точку $v_1 = (\alpha_1, \gamma_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ с алгебраическими действительными и алгебраическими p -адическими координатами, причем

$$\mu\sigma_1(P) \ll 4\delta_0^{-2} Q^{-v_1-v_2-1}.$$

Исключим $\sigma(P_1)$ из B_2 и рассмотрим точку $u_2 = (x_2, \omega_2)$ из множества

$$B_3 = B_2 \setminus \sigma_1(P_1).$$

В этой точке также выполняется система неравенств (13) для некоторого полинома P_2 и вновь можно получить неравенства (14) и (15) с алгебраической действительной точкой α_{12} и алгебраической p -адической точкой γ_{12} , так, что вектор $v_2 = (\alpha_{12}, \gamma_{12}) \in B_3 \subset I_1 \times K_1$. Исключим $\sigma_1(P_2)$ из множества B_3 и рассмотрим точку

$$u_3 = (x_3, \omega_3) \in B_4 = B_3 \setminus (\sigma_1(P_1) \cup \sigma_1(P_2)).$$

Опять построим третий вектор $v_3 = (\alpha_{13}, \gamma_{13})$ с алгебраическими координатами. Построение новых векторов v_j , $j = 1, 2, \dots, T$ можно проводить до тех пор, пока их окрестностями не исчерпаем множество B_j . Для числа T справедливо неравенство

$$T \gg \frac{\mu B_2}{4\delta_0^{-2} Q^{-v_1-v_2-1}} \gg \frac{3}{4} \mu(I_1 \times K_1) \cdot 4^{-1} \delta_0^2 Q^{v_1+v_2+1} \gg 2^{-3} \delta_0^2 Q^{v_1+v_2+1} \mu(I_1 \times K_1).$$

Доказательство теоремы 2. При применении лемм 1 и 2 мы видим, что оценки мер покрытия решения системы неравенств

$$|P(x)| \ll Q^{-v_1}, \quad |P(\omega)|_p \ll Q^{-v_2} \quad (16)$$

зависит от величин $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\gamma_1)|_p$ в ближайших к x и ω корнях $P(x)$ и $P(\omega)$. Значения $P_1(\alpha)$ и $|P'(\gamma_1)|_p$ поделим на не пересекающиеся промежутки. Начнем с тривиальных неравенств $|P'(\alpha_1)| \ll Q$, $|P'(\gamma_1)|_p \ll 1$. Проанализируем случаи усиления этих неравенств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

$$Q^{v_1} < |P'(\alpha_1)| < \delta_0 Q, \quad |P'(\gamma_1)|_p \ll 1, \quad v_1 = \frac{5}{8} \quad (17)$$

Покажем, что мера покрытия решений системы неравенств в этом случае не превосходит $1/32\mu(I_1 \times K_1)$. Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n, \dots, a_1)$, координаты которого — коэффициенты многочлена $P(x)$. Множество полиномов с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим через $V(\bar{b})$. Ясно, что $\#V(\bar{b}) < 2^{n+1}\delta_0 Q^n$. При фиксированных $P_1(x), P_2(x) \in \#V(\bar{b}) \cap \mathcal{P}_n(Q)$ множество решений σP_j неравенств не пересекаются. Для доказательства разложим многочлен $P_1(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки α_1 на отрезке I_1 .

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \sum_{j=3}^n (j!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j \quad (18)$$

По лемме 1 верно неравенство

$$|x - \alpha_1| \ll Q^{-v_1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (19)$$

поэтому $|P'(\alpha_1)| |x - \alpha_1| \ll Q^{-v_1}$. учитывая тривиальные оценки $|P^{(j)}(\alpha_1)| \ll Q$ и (19) остальные члены разложения в (18) имеют лучшие оценки и поэтому

$$|P(x)| \ll Q^{-v_1} < \frac{1}{2} \quad (20)$$

при достаточно большом Q . Оценка (20) справедлива и для многочлена $P_2(x)$. Если $\sigma(P_1) \cap \sigma(P_2) \neq \emptyset$, то на пересечении $\sigma(P_1) \cap \sigma(P_2)$ для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ верны неравенства

$$1 \leq |a_{01} - a_{02}| = |R(x)| < |P_1(x)| + |P_2(x)| < 1,$$

что противоречиво.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

$$Q^{-\delta_2} < |P'(\gamma_1)|_p < \delta_0, \quad |P'(\alpha_1)| \ll Q, \quad \delta_2 = -\frac{5}{8}.$$

Опять зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n, \dots, a_1)$ и подмножество $P(x) \subset \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим $V(\bar{b})$. Разложим многочлены $P_i(w)$, $i = 1, 2$ в точке γ_1 на цилиндре V_1 в ряд Тейлора

$$P(w) = P(\gamma_1) + P'(\gamma_1)(w - \gamma_1) + \frac{1}{2}P''(\gamma_1)^2 + \sum_{j=3}^n (j!)^{-1} P^{(j)}(\gamma_1)(w - \gamma_1)^j \quad (21)$$

Из леммы 2 из неравенства $|P_1(w)|_p \ll Q^{-v_2}$ имеем

$$|P'(\gamma_1)|_p^{-1} |w - \gamma_1|_p \ll Q^{-\frac{5}{2}}$$

Остальные слагаемые в (21) оцениваются лучше и поэтому $|P_1(w)|_p \ll Q^{-v_2}$. Многочлен $P_2(w)$ также допускает на V_1 оценку $|P_2(w)|_p \ll Q^{-v_2}$. Многочлен $R(w) = P_2(w) - P_1(w)$ есть целое число b , $|b| \leq 2Q$ и поэтому $|b|_p > \frac{1}{2}Q^{-1}$.

Введем два „прямоугольника“

$$\begin{aligned} \sigma(P) &: |x - \alpha_1| < 2^n Q^{-v_1} |P'(\alpha_1)|, \quad |w - \gamma_1|_p < Q^{-v_2} |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \\ \sigma_2(P) &: |x - \alpha_1| < c_{11} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad |w - \gamma_1|_p < Q^{-\delta_2} |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \end{aligned}$$

Справедливо неравенство

$$\mu\sigma(P) < 2^n c_1 \mu\sigma_1(P) Q^{-v_1-v_2}$$

поскольку прямоугольники $\sigma_1(P)$ и $\sigma_2(P)$ не пересекаются, то при подходящем выборе δ_0 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{P \in V(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) &< \mu(I_1 \times K_1), \\ \sum_{P \in V(\bar{b})} \mu\sigma(P) &< \delta_0 2^{2n+1} c_{11} Q^{-v_1-v_2+n} \mu(I_1 \times K_1) < \frac{1}{32} \mu(I_1 \times K_1). \end{aligned}$$

Зафиксируем p_1, q_1 и предположим, что количество полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с такими величинами не превосходит

$$\#\mathcal{P}_n(Q, p_1, q_1) \ll Q^{n+1-p_1-q_1}. \quad (22)$$

Тогда воспользуемся леммами 1 и 2 и (22) и получим оценку меры покрытия множества решений системы неравенств $\frac{1}{32} \mu(I_1 \times K_1)$. Если верно противоположное () неравенство, то существуют интервалы L_1 , $\mu_1 L_1 = Q^{-l_2 T^{-1}}$ и цилиндры M_1 , $\mu_2 M_1 = Q^{-k_2 T^{-1}}$, такие, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, p_1 + l_2 T^{-1}, q_1 + k_2 T^{-1}) \gg Q^{n+1-(p_1+l_2 T^{-1}+q_1+k_2 T^{-1})}. \quad (23)$$

Обозначим $m = p_1 + l_2 T^{-1} + q_1 + k_2 T^{-1}$ и предположим, что $n+1-m > 0$ и

$$\{m\} \ll \epsilon. \quad (24)$$

Зафиксируем вектор $b_1 = (a_n, \dots, a_{[m]+1})$ и разложим все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие системе неравенств (16) в ряды, в точках α_{1i}, γ_{1i} на интервалах L_1 и в цилиндрах M_1 . Получим оценки

$$\max_{x \in L_1} |P(x)| < Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}}, \quad \max_{\omega \in M_1} |P(\omega)|_p \ll Q^{-q_1-k_2 T^{-1}} \quad (25)$$

Применим к $c_{11} Q^{n+1-(p_1+l_2 T^{-1}+q_1+k_2 T^{-1})}$ многочленам принцип ящиков Дирихле. Тогда получим, что неравенства (24) выполняются для многочленов у которых $n-m$ первых коэффициентов совпадают. Это означает, что для разности многочленов $R_j(x) = P_j(x) - P_1(x)$, $j = 2, \dots$ выполняются неравенства

$$|R_j(x)| \ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}}, \quad |R_j(x)|_p \ll Q^{-q_1-k_2 T^{-1}}, \quad \deg R_j \leq [m]. \quad (26)$$

Если среди многочленов $|R_j(x)|$ найдутся хотя бы два многочлена без общих корней ни в $\mathbb{C}$ ни в алгебраическом замыкании $\mathbb{Q}_p$, то применением к ним леммы 7 и 8. В данном случае

$$\begin{aligned} \tau_1 + 1 &= p_1 + l_2 T^{-1}, & 2(\tau_1 + 1 - l_2 T^{-1}) &= 2p_1 \\ \tau_2 &= q_1 + k_2 T^{-1}, & 2(\tau_2 - k_2 T^{-1}) &= 2q_1 \end{aligned}$$

Неравенство

$$3p_1 + l_2 T^{-1} + 3q_1 + k_2 T^{-1} < 2[m] + \delta = 2m + \delta - (2p_1 + 2l_2 T^{-1} + 2q_1 + 2k_2 T^{-1} + \delta)$$

противоречиво, что завершает доказательство. Если неравенство (24) не выполняется, то величину $l_2 T$ в определении меры L_1 надо заменить на $l_2 T + \frac{1}{2}$ и вновь получить противоречивость неравенства (25).

Если среди $R_x(x)$ нет полиномов без общих корней, то полиномы $R_j(x)$ приводимы. Запишем их в виде

$$R_j(x) = t_{1j}(x) t_{2j}(x).$$

Обозначим

$$s = [m] = l_2 T^{-1} + p_1 + k_2 T^{-1} + q_1 - 1 + \theta\epsilon, \quad |\theta| \leq 1$$

где s степень $t_1(x) = n_1, (1 \leq n_1 \leq s-1)$ — степень $t_{12}(x) = s - n_1$ ($1 \leq s - n_1 \leq s-1$), $H(t_{1j}) = Q^\lambda$, $H(t_{2j}) = Q^{1-\lambda}$ — высоты многочленов t_{1j} , t_{2j} соответственно. Неравенство

$$|R_j(x)| \ll Q^{-m+\theta\epsilon}$$

выполняется для всех $(x, \omega) \in I_1 \times K_1$. Множество решений системы

$$|t_{1j}| < Q^{-a_1}, \quad |t_{1j}(\omega)|_p < Q^{-a_2} \quad (27)$$

обозначим $\sigma(t_{1j})$, где a_1 и a_2 такие действительные числа, при которых неравенства (27) верны для $(x, \omega) \in E_1 \subset I_1 \times K_1$ с мерой $\mu E_1 > \frac{1}{2}\mu\sigma(t_{1j})$, а множество решений системы неравенств

$$|t_{1j}| < Q^{-a_1-\epsilon}, \quad |t_{1j}(\omega)|_p < Q^{-a_2-\epsilon}$$

верна для $(x, \omega) \in E_2 \subset I_1 \times K_1$, $\mu E_2 < \frac{1}{2}\mu\sigma(t_{1j})$.

Применим к системе неравенств (27) лемму (9). Получим, что система неравенств

$$|t_{1j}(x)| < c_{12}Q^{-a_1}, \quad |t_{1j}(\omega)|_p < c_{12}Q^{-a_2}$$

выполняется для всех $(x, \omega) \in \sigma(t_{1j})$ как и система неравенств

$$|t_{2j}(x)| \ll Q^{-m+a_1+2\epsilon}, \quad |t_{2j}|_p \ll Q^{-m+a_2+2\epsilon_1}. \quad (28)$$

Многочлены $t_{1j}(x)$ и $t_{2j}(x)$ имеют степень $< n$ и поэтому по индукции множество решений систем (27) и (28) можно покрыть прямоугольниками F_1 и F_2 суммарной мерой, не превосходящей

$$\mu F_1 \ll Q^{-a_1-a_2+n_1}, \quad \mu F_2 \ll Q^{-m+a_1+l_2+m-n_1+2\epsilon}$$

соответственно. Если справедливо хотя бы одно из неравенств

$$a_1 + a_2 > \lambda n_1, \quad m - a_1 - a_2 > (1 - \lambda)(m - n_1) + 2\epsilon_1, \quad (29)$$

то $\mu < \frac{1}{32}\mu(I_1 \times K_1)$ и теоремы 2 доказана. Покажем, что система неравенств

$$a_1 + a_2 \leq \lambda n_1, \quad m - a_1 - a_2 \leq (1 - \lambda)(m - n_1) + 2\epsilon_1,$$

несовместна на множестве

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 1, \leq n_1 \leq m-1 \end{array} \right\}$$

На координатной плоскости (λ, n_1) неравенства (29) представляют собой области лежащие над гиперболами $\lambda n_1 = a_1 + a_2$ и под гиперболой $m - a_1 - a_2 \leq (1 - \lambda)(m - n_1) + 2\epsilon$. покажем, что эти гиперболы не пересекаются. Запишем равенство

$$\lambda n_1 = m - (m - n_1) - 2\epsilon$$

и исследуем функцию $f(\lambda, n_1) = \lambda n_1 + (m - n_1) + 2\epsilon$ в области D на максимум. получим, что максимум достигается в точках $(0, m-1)$, $(1, 1)$ и равен $m-1+2\epsilon < m$ при $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$.

Приведенный метод действует при условии

$$l_2 T^{-1} + p_1 + k_2 T^{-1} + q_1 \leq n+1.$$

Если же

$$l_2 T^{-1} + p_1 + k_2 T^{-1} + q_1 > n+1.$$

то можно использовать метод Фолькмана [15] и завершить доказательство.

3. Заключение

Таким образом, было показано, как количество элементов множества $\mathcal{A}(n, Q)$ зависит от параметров v_1 и v_2 , определяющих меру множества V . Установлено, что при $0 \leq v_1, v_2 \leq \frac{1}{2}$ и подходящей константе c_1 множество $\mathcal{A}(n, Q)$ не пусто и количество его элементов не менее, чем $c_1 Q^{n+1-v_1-v_2}$. Данный результат может быть использован для дальнейших исследований оценок количества алгебраических точек из множеств малой меры и неархимедовой метрикой, в частности, для получения аналогичного результата с другими ограничениями на v_1 и v_2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. I. Bernik, An application of Haudorff dimension in the theory of Diophantine approximation // Acta. Arith. 1983. Vol. 42, P. 219-253.
2. V. I. Bernik. N. Kalosha. Approximation of zero by values of integral polynomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Vesti NAN of Belarus Ser. fiz-mat nauk. 2004. Vol. 1. P. 121-123.
3. Bernik, V. I., Gotze, F., Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. Vol. 79, №. 1. P. 18-39.
4. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1965. — Т. 29, №2. — С. 379-436.
5. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук // Минск: Наука и техника. — 1967. — 181 с.
6. Schmidt, W. M., Diophantine Approximation // Springer. 1980. P. 312.
7. Baker, A., Linear Forms in the Logarithms of Algebraic Numbers // I, Mathematika. 1966. Vol.12. P.204–216.
8. Beresnevich, V. V., On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. Vol. 90. P. 97-112.
9. Bernik, V. I., The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. Vol. 53, №. 1. P. 17-28.
10. Bernik, V. I., Dodson, M. M., Metric Diophantine Approximation on Manifolds // Cambridge University Press. 1999.
11. Bernik, V. Budarina, N., Dickinson, H., A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p-adic fields // Lith. Math. J. 2008. Vol. 48. № 2., P. 158-173.
12. Bernik, V., Budarina, N., Dickinson, H., Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149. № 2. P. 193-216.
13. Khintchine, A. Ya., Einige Satze uber Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. 1924. Vol. 92. P. 115-125.
14. Mahler, K., Über das Maß der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. 1932. Vol. 106. P. 131-139.
15. Volkmann, B., Zur metrischen Theorie der S-Zahlen // J. reine und angew. Math. 1963. Vol. 213, № 1-2. P. 58-65.

REFERENCES

1. V. I. Bernik. 1983, “An application of Haudorff dimension in the theory of Diophantine approximation“, *Acta. Arith.*, Vol. 42, P. 219-253.
2. V. I. Bernik. N. Kalosha. 2004, “Approximation of zero by values of integral polynomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ “, *Vesti NAN of Belarus Ser. fiz-mat nauk*, Vol. 1. P. 121-123.
3. Bernik, V. I., Gotze, F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izvestiya: Mathematics.*, Vol. 79, №. 1. P. 18-39.
4. Sprindzuk, V. G. 1965, “Dokazatelstvo gipotezi malera o mere mnozhestva S-chisel“, *Izv. AN SSSR, ser. mat.*, Vol. 29, № 2. P. 379-436.
5. Sprindzuk, V. G. 1967, “Problema malera v metricheskoj teorii chisel“, *Minsk: Nauka i tehnika*, P. 181.
6. Schmidt, W. M. 1980, “Diophantine Approximation“, *Springer*, P. 312.
7. Baker, A. 1996, “Linear Forms in the Logarithms of Algebraic Numbers“, *I, Mathematika*, Vol. 12. P.204–216.
8. Beresnevich, V. V. 1999, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers“, *Acta Arith.*, Vol. 90. P. 97-112.
9. Bernik, V. I. 1989, “The exact order of approximating zero by values of integral polynomials“, *Acta Arith.*, Vol. 53, №. 1. P. 17-28.
10. Bernik, V. I., Dodson, M. M. 1999, “Metric Diophantine Approximation on Manifolds“, *Cambridge University Press*.
11. Bernik, V. Budarina, N. & Dickinson, H. 2008, “A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p-adic fields“, *Lith. Math. J.*, Vol. 48. № 2., P. 158-173.
12. Bernik, V., Budarina, N. & Dickinson, H. 2010, “Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields“, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 149. № 2. P. 193-216.
13. Khintchine, A. Ya. 1924, “Einige Satze uber Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen“, *Math. Ann.*, Vol. 92. P. 115-125.
14. Mahler, K. 1932, “Über das Maß der Menge aller S-Zahlen“, *Math. Ann.* Vol. 106. P. 131-139.
15. Volkmann, B. 1963, “Zur metrischen Theorie der S-Zahlen“, *J. reine und angew. Math.*, Vol. 213, №. 1-2. P. 58-65.

Получено 20.12.20 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-154-165

Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере $\mathbb{S}^2$ ¹

И. А. Мартьянов

Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Важной проблемой дискретной геометрии и вычислительной математики является оценка минимального числа узлов $N(s)$ квадратурной формулы (взвешенного s -дизайна) вида $\frac{1}{|\mathbb{S}^2|} \int_{\mathbb{S}^2} f(x) dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_{\nu} f(x_{\nu})$ с положительными весами, точной для всех сферических полиномов степени не выше s . Р. Delsarte, J.M. Goethals и J.J. Seidel (1977) для оценки снизу $N(s)$ сформулировали экстремальную задачу A_s для неотрицательных на $[-1, 1]$ разложений по ортогональным полиномам Гегенбауэра (Лежандра для $\mathbb{S}^2$) с ограничениями на знак коэффициентов Фурье–Гегенбауэра. С помощью варианта данной задачи $A_{s,n}$ на полиномах степени $n = s$, они доказали классическую оценку плотных дизайнов. Эта оценка точная и дает решение A_s только в исключительных случаях ($s = 0, 1, 2, 3, 5$ для $\mathbb{S}^2$). Для общих размерностей известны случаи, когда $A_{s,n} > A_{s,s}$ при $n > s$, что приводит к лучшим оценкам $N(s)$. В частности, Н.Н. Андреев (2000) таким способом доказал минимальность 11-дизайна на сфере $\mathbb{S}^3$. Родственные задачи Дельсарта также сформулированы для оценки мощности сферических кодов. В этом направлении В.В. Арестов и А.Г. Бабенко (1997), базируясь на методах бесконечномерного линейного программирования, решили аналог задачи A_s для случая сферических 0.5-кодов на сфере $\mathbb{S}^3$ (проблема контактного числа). Затем этот метод получил развитие в работах Д.В. Штрома, Н.А. Куклина.

А.В. Бондаренко и Д.В. Горбачев (2012) показали, что $N(4) = 10$. Данный факт вытекает из оценки $A_{4,7} > 9$, ранее полученной Р. Boyvalenkov и S. Nikova (1998), и существования взвешенных 4-дизайнов из 10 узлов. Тем не менее, представляет интерес решить задачу A_4 точно, нацеливаясь перенести методику вычисления A_s на общие размерности и порядки дизайнов. В данной работе доказывается, что

$$A_4 = A_{4,22} = 9.31033\dots$$

Для этого адаптируется метод Арестова–Бабенко–Куклина и проблема сводится к построению специальной квадратурной формулы на $[-1, 1]$, согласованной с видом предполагаемой экстремальной функции (полиномом). Предлагаемый метод базируется на применении нелинейного программирования, в частности, полуопределенного программирования, и решении полиномиальной системы уравнений, возникающей из квадратурной формулы. Для доказательства существования аналитического решения такой системы в окрестности численного решения применяется интервальный метод Кравчука из HomotopyContinuation.jl.

Ключевые слова: единичная сфера, сферический дизайн, квадратурная формула, задача Дельсарта.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

И. А. Мартьянов. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере $\mathbb{S}^2$ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 154–165.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-154-165

Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere $\mathbb{S}^2$ ²

I. A. Martyanov

Martyanov Ivan Anatol'evich — graduate student, Tula State University (Tula).*e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru***Abstract**

An important problem in discrete geometry and computational mathematics is the estimation of the minimum number of nodes $N(s)$ of a quadrature formula (weighted s -design) of the form $\frac{1}{|\mathbb{S}^2|} \int_{\mathbb{S}^2} f(x) dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_{\nu} f(x_{\nu})$ with positive weights, exact for all spherical polynomials of degree at most s . P. Delsarte, J.M Goethals, and J.J. Seidel (1977) to estimate $N(s)$ from below formulated an extremal problem A_s for expansions in terms of orthogonal Gegenbauer (Legendre for $\mathbb{S}^2$) polynomials with restrictions on the sign of the Fourier–Gegenbauer coefficients. Using a version of this problem $A_{s,n}$ on polynomials of degree $n = s$, they proved the classical estimate for tight designs. This estimate is sharp and gives a solution to A_s only in exceptional cases ($s = 0, 1, 2, 3, 5$ for $\mathbb{S}^2$). For general dimensions, there are cases when $A_{s,n} > A_{s,s}$ for $n > s$, which leads to better estimates for $N(s)$. In particular, N.N. Andreev (2000) proved in this way the minimality of an 11-design on the sphere $\mathbb{S}^3$. Related Delsarte problems are also formulated for estimating the cardinality of spherical codes. In this direction, V.V. Arestov and A.G. Babenko (1997), based on the methods of infinite-dimensional linear programming, solved an analog of the A_s problem for the case of spherical 0.5-codes on the sphere $\mathbb{S}^3$ (the kissing number problem). Then this method was developed in the works of D.V. Shtrom, N.A. Kuklin.

A.V. Bondarenko and D.V. Gorbachev (2012) showed that $N(4) = 10$. This fact follows from the estimate $A_{4,7} > 9$, previously obtained by P. Boyvalenkov and S. Nikova (1998), and the existence of weighted 4-designs of 10 nodes. Nevertheless, it is of interest to solve the problem A_4 exactly, aiming to transfer the method of calculating A_s to the general dimensions and orders of designs. In this paper, it is proved that

$$A_4 = A_{4,22} = 9.31033 \dots$$

For this, the Arestov–Babenko–Kuklin method is adapted and the problem is reduced to the construction of a special quadrature formula for $[-1, 1]$, consistent with the form of the assumed extremal function (polynomial). The proposed method is based on the use of nonlinear programming, in particular, semidefinite programming, and the solution of a polynomial system of equations arising from a quadrature formula. To prove the existence of an analytical solution of such a system in the neighborhood of the numerical solution, interval Krawczyk's method from HomotopyContinuation.jl is used.

Keywords: unit sphere, spherical design, quadrature formula, Delsarte problem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

I. A. Martyanov, 2021, "Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere $\mathbb{S}^2$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 154–165.

²The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-90152.

1. Введение

В аннотации приведена основная мотивация изучения экстремальных проблем Дельсарта для сферических кодов и дизайнов. Решим методом Арестова–Бабенко для кодов экстремальную задачу Дельсарта для сферических 4-дизайнов на сфере

$$\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

(см. [2, 15, 11]). Через $\{P_k(t)\}_{k=0}^\infty$ обозначим систему ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ полиномов Лежандра [9], для которых

$$|P_k(t)| \leq P_k(1) = 1, \quad t \in [-1, 1], \quad \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k P_l dt = \delta_{kl},$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \quad \dots$$

Пусть $s, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq s$. Введем класс функций

$$F_s = \left\{ f(t) = \sum_{k=0}^\infty f_k P_k(t) \in C[-1, 1] : f(t) \geq 0, \quad t \in [-1, 1], \quad f(1) > 0, \quad f_0 = 1, \quad f_k \leq 0, \quad k \geq s+1 \right\}$$

и подкласс полиномов степени не выше n

$$F_{s,n} = \{f \in F_s : f_k = 0, \quad k \geq n+1\}.$$

Экстремальные задачи Дельсарта для функций и полиномов заключаются соответственно в нахождении величин

$$A_s = \sup_{f \in F_s} f(1), \quad A_{s,n} = \max_{f \in F_{s,n}} f(1).$$

Так как $|P_k| \leq 1$ на $[-1, 1]$, то полиномы $1 - \varepsilon(P_{s+1} + \dots + P_n) \in F_{s,n}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, поэтому области определения задач непусты. Из соображений компактности максимум в задаче $A_{s,n}$ достигается на некотором экстремальном полиноме. Ясно, что для любого $n \geq s$ имеем $A_{s,n} \leq A_s$. При этом $A_s \leq (s+1)^2$ в силу

$$f_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \leq \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 2k+1,$$

$$f(1) = 1 + f_1 + \dots + f_s - |f_{s+1}| - \dots - |f_n| - \dots \leq \sum_{k=0}^s (2k+1) = (s+1)^2.$$

В разделе 5 доказывается, что

$$A_s = \sup_{n \geq s} A_{s,n}. \quad (1)$$

Другими словами, множество полиномов $F_{s,n}$ образует плотное множество в задаче Дельсарта A_s . Отметим, что в [2, 6] для исследованных задач Дельсарта для сферических кодов доказано, что экстремальными функциями будут полиномы.

При помощи оператора обобщенного сдвига Лежандра можно доказать, что

$$A_{s,n} = \sup_{f \in F_{s,n} \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1}, \quad \|f\|_p = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f|^p dt \right)^{1/p},$$

что относит данную задачу к проблематике точных констант Никольского с ограничениями (см., например, [7]).

Однако основное приложение задач Дельсарта связано с оценкой мощности сферических дизайнов — узлов кубатурных формул на сфере [15, 8]. Пусть $X = \{x_\nu\}_{\nu=1}^N \subset \mathbb{S}^2$, $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^N \subset \mathbb{R}_{>0}$. Множество X называется взвешенным дизайном порядка s (или s -дизайном), если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^2|} \int_{\mathbb{S}^2} f(x) dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu f(x_\nu)$$

справедлива для любого алгебраического полинома

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{0 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq s} c_{k_1 k_2 k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$

степени не выше s . Пусть $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, тогда любое множество X будет 0-дизайном.

В дискретной математике, метрической геометрии и их приложениях особое внимание уделяется невзвешенному случаю равных весов $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = \frac{1}{N}$. Такие квадратуры часто называют чебышевскими, так как П.Л. Чебышёв изучал их на отрезке.

Фундаментальной проблемой в теории дизайнов является нахождение оптимальных дизайнов порядка s с наименьшим числом узлов:

$$N(s) = \min \{N = |X| : X \text{ — } s\text{-дизайн на } \mathbb{S}^2\}.$$

Рассматривают два варианта этой проблемы — взвешенный $N_{wt}(s)$ и невзвешенный $N_{eq}(s)$. Ясно, что во взвешенном случае есть дополнительная вариативность за счет выбора весов, поэтому $N_{wt}(s) \leq N_{eq}(s)$.

В настоящее время доказано, что s -дизайны с числом узлов по порядку $N \asymp s^2$ при $s \rightarrow \infty$ существуют для любого s . В особо сложном случае равных весов это установлено в работе [12], причем неизвестно никакой оценки верхней константы эквивалентности. Есть гипотеза Слоэна (см. <http://neilsloane.com/sphdesigns/>), что $N_{eq}(s) \leq \frac{1}{2}s^2(1 + o(1))$ при $s \rightarrow \infty$.

Во взвешенном случае по общей теореме Чакалова [8] имеем $N_{wt}(s) \leq (s+1)^2$ (отсюда вновь получаем $A_s \leq (s+1)^2$). Однако с помощью перехода к сферическим координатам и применению произведения одномерных гауссовских квадратурных формул получаем $N_{wt}(s) \leq \frac{1}{2}s^2(1 + o(1))$ (см., например, [5]). Есть гипотеза, вытекающая из анализа лебедевских квадратур, что на самом деле $N_{wt}(s) \leq \frac{1}{3}s^2(1 + o(1))$.

Далее сконцентрируемся на оценке $N(s)$ снизу. Во взвешенном и невзвешенном случаях для любого $s \geq 0$ справедливо неравенство (см. [15, 11, 1])

$$A_s \leq N(s).$$

В работах [15] (оценка снизу) и [16] решена частная задача $A_{s,s}$. Однако это влечет знаменитую оценку Дельсарта–Гёталса–Зейделя для плотных дизайнов на сфере $\mathbb{S}^2$, согласно которой

$$N(s) \geq \begin{cases} (q+1)^2, & s = 2q, \\ (q+1)(q+2), & s = 2q+1. \end{cases} \quad (2)$$

По ней $N(s) \geq 0.25s^2(1 + o(1))$ при $s \rightarrow \infty$. Эта асимптотическая оценка была улучшена в работе [11]: $N(s) \geq 0.27244 \dots s^2(1 + o(1))$, а затем в [4]: $N(s) > 0.275s^2(1 + o(1))$.

Оценка плотных дизайнов (2) является точной при $s = 0, 1, 2, 3, 5$ и достигается на дизайнах с равными весами. В частности, $N(1) = 2$ (узлы — два полюса сферы), $N(2) = 4$ (вершины правильного тетраэдра), $N(3) = 6$ (октаэдр), $N(5) = 12$ (икосаэдр). При $s \geq 6$ величина $N(s)$, насколько нам известно, неизвестна ни для взвешенных, ни для чебышевских квадратур.

Остановимся на случае $s = 4$. Из (2) следует, что $N(4) \geq 9$. Однако в работе [13] показано, что для некоторого $n > 4$ имеем $A_{4,n} > 9$ (см. также [3]). Отсюда и из существования взвешенных 4-дизайнов из 10 точек следует, что $N_{wt}(4) = 10$ (см. [3]).

Случай $s = 4$ и результаты для сферы большей размерности (см., например, [1]) показывают важность решения задач Дельсарта A_s и $A_{s,n}$ при $n > s$.

Точное решение задачи A_4 было неизвестно. Получим его из решения системы полиномиальных уравнений, адаптировав для этого метод Бабенко–Арестова–Куклина решения задачи Дельсарта для кодов, который основан на бесконечномерном линейном программировании и вопросах существования и нахождения аналитического решения систем полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами (см. [2, 6]).

Основное утверждение работы формулируется следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере $\mathbb{S}^2$ имеем*

$$A_4 = A_{4,22} = 9.31033 \dots$$

Вид экстремального полинома 22-й степени приведен в разделе 4.

Структура работы следующая. В разделе 2 полиномиальная задача Дельсарта сводится к эквивалентным конечномерным проблемам нелинейной оптимизации. В разделе 3 доказывается основное утверждение, имеющее вид специальной квадратурной формулы, согласованной с видом экстремального полинома. В разделе 4 предложенным методом доказывается предложение 1. Наконец, в разделе 5 доказывается равенство (1) о плотности подмножества полиномов.

2. Сведение полиномиальной задачи Дельсарта к проблемам нелинейной оптимизации

Воспользуемся идеями из [6]. По теореме Люкача [9] неотрицательный на $[-1, 1]$ алгебраический полином степени n имеет представление

$$f(t) = \alpha(t)a^2(t) + \beta(t)b^2(t), \quad (3)$$

где $(\alpha, \beta) = (1, 1 - t^2)$ для четного n , $(\alpha, \beta) = (1 + t, 1 - t)$ для нечетного n , a, b — полиномы соответствующих степеней не выше $n/2$.

Неотрицательный на $\mathbb{R}$ полином $a^2(t)$ можно представить двояко. С одной стороны, если $a = \sum_{i=0}^d a_i P_i$, то $a^2 = \sum_{i,j=0}^d a_i a_j P_i P_j$.

С другой стороны, пусть $A = (a_{ij})_{i,j=0}^d \succcurlyeq 0$ — симметричная неотрицательно определенная матрица и $f = \sum_{i,j=0}^d a_{ij} P_i P_j$. Тогда f неотрицательный на все оси, а, значит, его можно представить в виде квадрата $f = a^2$. Действительно, как известно, матрицу A можно факторизовать в виде $A = QQ^T$. Отсюда

$$\sum_{i,j=0}^d a_{ij} P_i P_j = \sum_{i,j=0}^d \sum_{k=0}^d q_{ik} q_{jk} P_i P_j = \sum_{k=0}^d \left(\sum_{i=0}^d q_{ik} P_i \right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, в представлении (3) можно считать, что $a^2 = \sum_{i,j=0}^d a_{ij} P_i P_j$, где либо $a_{ij} = a_i a_j$, либо a_{ij} — элементы матрицы $A \succcurlyeq 0$, аналогично для b^2 . Таким образом, имеем

$$f_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f P_k dt = \sum_{i,j=0}^{d_a} \alpha_{ijk} a_{ij} + \sum_{i,j=0}^{d_b} \beta_{ijk} b_{ij},$$

где $\alpha_{ijk} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \alpha P_i P_j P_k dt$, аналогично для β_{ijk} . Эти коэффициенты выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана.

Имеем $f(1) = \alpha(1)a^2(1)$, где $a^2(1) = \sum_{i,j=0}^{d_a} a_{ij}$. В итоге, задача $A_{s,n}$ сводится к следующей эквивалентной задаче блочного полуопределенного программирования (SDP — Semidefinite Programming):

$$A_{s,n}^{SDP} = \max_X \langle C, X \rangle, \quad \langle D_0, X \rangle = 1, \quad \langle D_k, X \rangle \leq 0, \quad s+1 \leq k \leq n, \quad (4)$$

где $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ — блочная симметричная неотрицательно определенная матрица,

$$\langle C, X \rangle = \alpha(1) \sum_{i,j=0}^{d_a} a_{ij}, \quad \langle D_k, X \rangle = \sum_{i,j=0}^{d_a} \alpha_{ijk} a_{ij} + \sum_{i,j=0}^{d_b} \beta_{ijk} b_{ij}.$$

Другой вариант будет, если считать, что $a_{ij} = a_i a_j$, аналогично для b_{ij} . Тогда

$$\langle C, X \rangle = \alpha(1) \left(\sum_{i=0}^{d_a} a_i \right)^2, \quad \langle D_k, X \rangle = \sum_{i,j=0}^{d_a} \alpha_{ijk} a_i a_j + \sum_{i,j=0}^{d_b} \beta_{ijk} b_i b_j$$

и $A_{s,n}$ сводится к эквивалентной QCLP-проблеме (Quadratically Constrained Linear Program).

Для решения задач нелинейной оптимизации (программирования) типа SDP, QCLP разработаны эффективные алгоритмы решения на основе метода внутренней точки, сравнимые по эффективности с алгоритмами решения задачи линейного программирования. Доступны эффективные солверы, в том числе с расширенной арифметикой. Это важно для больших степеней полиномов, когда они начинают сильно осциллировать.

Задача $A_{s,n}^{SDP}$ выпуклая и для нее развита теория двойственности. Ее свойства можно извлечь из свойств исходной полиномиальной задачи $A_{s,n}$ и наоборот. В частности, имеем $A_{s,n} \leq (s+1)^2$, поэтому также будет ограничена целевая функция в $A_{s,n}^{SDP}$. Для полиномов $f = 1 - \varepsilon(P_{s+1} + \dots + P_n)$ коэффициенты $f_k < 0$ для $k \geq s+1$, поэтому в (4) будут существовать X , для которых все неравенства строгие. Следовательно, для $A_{s,n}^{SDP}$ выполнено условие Слейтера. В итоге, заключаем, что для $A_{s,n}^{SDP}$ справедливы утверждения строгой двойственности. Отсюда будет следовать, что для решения задачи (4) часть неравенств будет строгими, а часть обратится в нуль. Следовательно, тоже самое будет для коэффициентов f_k экстремального полинома при $k \geq s+1$.

Отметим также, что для получения приближенного решения задачи $A_{s,n}$ применяется линейное программирование (см. [17]). Для этого непрерывное условие $f(t) \geq 0$, $t \in [-1, 1]$, заменить дискретным $f(\tau_i) \geq 0$ на густой сетке $\{\tau_i\}_{i=1}^N \subset [-1, 1]$ с достаточно большим N :

$$f_1 + \dots + f_n \rightarrow \max, \quad f_k \leq 0, \quad s+1 \leq k \leq n, \quad f(\tau_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Если f_* — приближенный полином, получаемый из решения этой задачи, $-\varepsilon_* \leq 0$ — его минимум на $[-1, 1]$, то полином $\frac{f_*(t) + \varepsilon_*}{1 + \varepsilon_*} \in F_{s,n}$, следовательно, $A_{s,n} \geq \frac{f_*(1) + \varepsilon_*}{1 + \varepsilon_*}$. Полином f_* можно использовать в задачах нелинейного программирования в качестве начального приближения. Однако задача (5) не эквивалентна $A_{s,n}$.

Одно из основных назначений результатов данного пункта состоит в том, чтобы показать, как найти приближенно экстремальный полином в полиномиальной задаче Дельсарта $A_{s,n}$. Распределение приближенных корней этого полинома на $[-1, 1]$ и ненулевых коэффициентов f_k при $k \geq s+1$ позволяет применить для решения общей задачи A_s метод, излагаемый в следующем пункте.

3. Основное предложение и специальная квадратура

Если не дискретизировать условие неотрицательности в задаче Дельсарта A_s и не ограничиваться полиномами фиксированной степени, то A_s будет задачей бесконечномерного линейного программирования. Для решения похожей задачи для кодов в работе [2] были применены выводы теории бесконечномерного линейного программирования, включая двойственность. Затем серия результатов была получена в работе [10]. Особенно отметим результаты Н.А. Куклина [6], который привлек выпуклое программирование, методы базисов Грёбнера и интервальной арифметики для обоснования существования аналитического решения. Адаптируя метод Арестова–Бабенко–Куклина для задачи A_s , приведем в компактном виде основное утверждение, достаточное для ее решения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть существуют узлы $-1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_u < r_{u+1} = 1$, веса $\rho_1 > 0, \dots, \rho_{u+1} > 0$, целые числа $s+1 \leq k_1 < \dots < k_v$ и полином $f^* \in F_{s,k_v}$, такие что

$$Q(P_0) = 1, \quad Q(P_k) = 0, \quad k \in \{1, \dots, s, k_1, \dots, k_v\},$$

$$Q(P_k) > 0, \quad k \in \{s+1, s+2, \dots\} \setminus \{k_1, \dots, k_v\},$$

$$f^*(r_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad f^* = 1 + \sum_{k=1}^s f_k^* P_k + \sum_{i=1}^v f_{k_i}^* P_{k_i},$$

где

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{u+1} \rho_i f(r_i).$$

Тогда

$$A_s = A_{s,k_v} = \frac{1}{\rho_{u+1}}$$

и f^* — экстремальный полином (функция) в этих задачах.

Заметим, что из условий предложения 2 вытекает, что выражение $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f dt = Q(f)$ будет квадратурной формулой, точной на классе полиномов вида $f = \sum_{k=0}^s f_k P_k + \sum_{i=1}^v f_{k_i} P_{k_i}$. Такого типа квадратуры возникли в методе Арестова–Бабенко–Куклина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k \in F_s$ — произвольная функция. В силу неотрицательности f , неположительности f_k при $k \geq s+1$ и условий предложения получаем

$$\rho_{u+1} f(1) \leq \sum_{i=1}^{u+1} \rho_i f(r_i) = Q(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k Q(P_k) = 1 + \sum_{k \in \{s+1, s+2, \dots\} \setminus \{k_1, \dots, k_v\}} f_k Q(P_k) \leq 1.$$

Следовательно, $A_s \leq \rho_{u+1}^{-1}$. При этом на полиноме f^* все неравенства становятся равенствами. Предложение доказано.

4. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов

Пусть $s = 4$. Для серии $n \geq 4$ были приближенно решены задачи $A_{4,n}$ предложенными выше методами математического программирования. Установлено, что для разных $n \geq 22$ решением оказывается полином f^* степени 22, у которого $f_k^* > 0$ для $k \leq 4$, $f_k^* < 0$ для $k \in \{7, 12, 17, 22\}$ и $f_k^* = 0$ для всех остальных k . Он имеет 4 двойных нуля на $(-1, 1)$.

Таким образом, можно сделать предположение, что $u = 4$, $-1 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < 1$, $\rho_1 > 0, \dots, \rho_5 > 0$, $v = 4$, $k_1 = 7$, $k_2 = 12$, $k_3 = 17$, $k_4 = 22$.

Чтобы определить 9 неизвестных $r_1, r_2, r_3, r_4, \rho_1, \dots, \rho_5$ имеем систему из 9 полиномиальных уравнений

$$Q(P_0) = 1, \quad Q(P_k) = 0, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 7, 12, 17, 22\}. \quad (6)$$

Из свойств полиномов Лежандра следует, что она имеет рациональные коэффициенты.

Система (6) эффективно решается с большой точностью в Maple. Заметим, что только при выбранных k наблюдается сходимость. С 5-ю знаками здесь и далее имеем

i	r_i	ρ_i
1	-0.73556	0.27847
2	-0.53513	0.06132
3	-0.34809	0.06932
4	0.31931	0.48346
5	1	0.10740

Для проверки условия $Q(P_k) > 0$, $k \in \{5, 6, \dots\} \setminus \{7, 12, 17, 22\}$, действуем аналогично [2, 6]. Для небольших $k \leq 53$ это условие проверяется непосредственно. Для всех остальных применяем равномерную оценку Стилтеса–Бернштейна [6]

$$|P_k(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi k}} (1 - t^2)^{-1/4}, \quad t \in (-1, 1), \quad k \geq 1,$$

из которой следует, что для $k > 53$

$$Q(P_k) = \sum_{i=1}^4 \rho_i P_k(r_i) + \rho_5 \geq \rho_5 - \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{i=1}^4 \rho_i (1 - r_i^2)^{-1/4} = 0.10740 \dots - \frac{0.77657 \dots}{\sqrt{k}} > 0.$$

Для расчета полинома f^* представляем его в виде $f^*(t) = g(t) \prod_{i=1}^4 (t - r_i)^2$, где $g(t) = \sum_{i=0}^{14} a_i t^i$. Для нахождения 15 неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_{14}$ выражаем через них коэффициенты f_k^* и составляем систему из 15 линейных уравнений $f_0^* = 1$, $f_k^* = 0$, $k \in \{5, \dots, 22\} \setminus \{7, 12, 17, 22\}$. Получаем

k	f_k^*
0–4	1, 2.20749, 3.07499, 1.96464, 1.53352
5–9	0, 0, -0.38200, 0, 0
10–14	0, 0, -0.06246, 0, 0
15–19	0, 0, -0.02420, 0, 0
20–22	0, 0, -0.00165

При этом полином g имеет только 2 действительных корня $-1.15948, 1.09252$, поэтому $g(t) > 0$ при $t \in [-1, 1]$, следовательно, полином f^* неотрицательный на $[-1, 1]$.

Таким образом, на основании предложения 1 приближенно имеем

$$A_4 \approx A_{4,22} \approx \frac{1}{\rho_5} = 9.31033 \dots$$

Чтобы написать здесь точные равенства, необходимо доказать существование решения полиномиальной системы уравнений (6). В работе [2] похожая система сводилась к алгебраическому уравнению, а в [6] для получения алгебраического уравнения предложены метод на основе цепного базиса Грёбнера, вычисляемого с помощью Maple, а также одномерная интервальная теорема Штурма.

Нам не удалось вычислить нужный базис Грёбнера системы (6) в Maple за приемлемое время. Также затруднительным оказывается применение интервального метода

Штурма, так он требует построение интервального экстремального полинома. Кроме того, не доступен использованный в [6] код для расчетов. Поэтому для доказательства существования нужного решения (6) мы воспользовались решением HomotopyContinuation.jl (<https://www.juliahomotopycontinuation.org/>, [14]). В нем реализован интервальный метод Кравчука, который позволяет проверить, что в окрестности найденного численного решения существует аналитическое решение системы. В нашем случае за короткое время проверка прошла успешно, что завершает доказательство предложения 1.

5. Доказательство плотности множества полиномов

Достаточно доказать оценку сверху $A_s \leq \sup_{n \geq s} A_{s,n}$. Пусть f — произвольная функция из класса F_s . Ряд

$$f(1) = 1 + f_1 + \dots + f_s - |f_{s+1}| - \dots - |f_n| - \dots$$

сходится, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большое $N_\varepsilon \geq s$ такое, что

$$\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |f_k| < \varepsilon.$$

В силу $|P_k| \leq 1$ на $[-1, 1]$ получаем, что

$$\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |f_k P_k(t)| < \varepsilon, \quad t \in [-1, 1].$$

Тогда полином

$$g(t) = \frac{\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} f_k P_k(t) + \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

неотрицательный на $[-1, 1]$, $g_0 = 1$, $g_k = \frac{f_k}{1+\varepsilon} \leq 0$ при $k \geq s+1$ поэтому $g \in F_{s, N_\varepsilon}$. Следовательно,

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \leq \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} f_k + \varepsilon = (1 + \varepsilon)g(1) \leq (1 + \varepsilon)A_{s, N_\varepsilon} \leq (1 + \varepsilon) \sup_{n \geq s} A_{s, n},$$

откуда $A_s \leq (1 + \varepsilon) \sup_{n \geq s} A_{s, n}$ и можно устремить ε к нулю.

Заключение

В данной работе предложен метод решения экстремальной задачи Дельсарта для s -дизайнов на единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Он базируется на построении специальной квадратурной формулы, согласованной с экстремальным полиномом. Вначале полином находится численно при помощи одной из конечномерных задач оптимизации. Это дает информацию о параметрах квадратуры и сводит задачу к нахождению решения системы полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами. Вначале она решается численно с большой точностью, что позволяет с запасом убедиться в нужных свойствах. Также применяется оценка Стилтеса–Бернштейна для полиномов Лежандра. Из существования численного решения с большой точностью еще не следует существование соответствующего аналитического решения. Для доказательства этого факта применяется интервальный метод Кравчука из HomotopyContinuation.jl. Данный подход является адаптацией метода Арестова–Бабенко–Куклина для задачи Дельсарта для оценки сферических τ -кодов. Новым моментом здесь является привлечение метода Кравчука.

Основное приложение задачи Дельсарта связано с оценкой снизу мощности взвешенных сферических s -дизайнов. Также имеется связь с точными L^1 -неравенствами Никольского с ограничениями.

Планируется применить разработанный подход для других размерностей и порядков дизайнов. Есть надежда, что решение задачи Дельсарта позволит улучшить известные нижние оценки сферических дизайнов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Д.В. Горбачеву за помощь при подготовке работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н. Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере // Матем. заметки. 2000. Том 67, № 4. С. 489–497.
2. Арестов В.В., Бабенко А.Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИАН. 1997. Том 219. С. 44–73.
3. Бондаренко А.В., Горбачев Д.В. Минимальные взвешенные 4-дизайны на сфере S^2 // Матем. заметки. 2012. Том 91, № 5. С. 787–790.
4. Горбачев Д.В. Нижние асимптотические оценки мощности дизайнов на сфере S^2 и шаре B^2 // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 11–25.
5. Горбачев Д.В., Свистунов С.С. Моделирование интерактивного освещения в 3D-графике и сферические дизайны. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014.
6. Куклин Н.А. Аналитические методы в экстремальных геометрических задачах на евклидовой сфере. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, ИММ Уро РАН, 2014.
7. Мартыянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.
8. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
9. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
10. Штром Д.В. Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Том 8, № 2. С. 162–189.
11. Юдин В.А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Том 61, № 3. С. 213–223.
12. Bondarenko A., Radchenko D., Viazovska M. Optimal asymptotic bounds for spherical designs // Ann. Math. 2013. Vol. 178, no. 2. P. 443–452.
13. Boyvalenkov P., Nikova S. Improvements of the lower bounds on the size of some spherical designs // Mathematica Balkanica. 1998. Vol. 12. P. 151–160.
14. Breiding P., Rose K., Timme S. Certifying zeros of polynomial systems using interval arithmetic // arXiv:2011.05000. 2020.
15. Delsarte P., Goethals J.M., Seidel J.J. Spherical codes and design // Geom. Dedicata. 1977. Vol. 6, no. 3. P. 363–388.

16. Levenshtein V.I. Universal bounds for codes and designs // In Handbook of Coding Theory, V.S. Pless and W.C. Huffman Eds. Amsterdam: Elsevier, 1998.
17. Odlyzko A.M., Sloane N.J.A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. Combin. Theory Ser. A. 1979. Vol. 26, no. 2. P. 210–214.

REFERENCES

1. Andreev, N.N. 2000. “A minimal design of order 11 on the 3-sphere”, *Math. Notes*, vol. 67, no. 4, pp. 417–424.
2. Arestov, V.V. & Babenko, A.G. 1997. “On Delsarte scheme of estimating the contact numbers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 36–65.
3. Bondarenko, A.V. & Gorbachev, D.V. 2012. “Minimal weighted 4-designs on the sphere S^2 ”, *Math. Notes*, vol. 91, no. 5, pp. 738–741.
4. Gorbachev, D.V. 2014. “Asymptotic lower bounds for the cardinality of designs on the sphere S^2 and the ball B^2 ”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, iss. 4, pp. 11–25. (In Russ.)
5. Gorbachev, D.V. & Svistunov, S.S. 2014. “Modeling of interactive lighting in 3D graphics and spherical designs”, Tula: Publishing house of Tula State University. (In Russ.)
6. Kuklin, N.A. 2014. “Analytical methods in extremal geometric problems on the Euclidean sphere”, Diss. ... cand. physical-mat. sciences. Yekaterinburg, IMM Uro RAN. (In Russ.)
7. Martyanov, I.A. 2020. “Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258. (In Russ.)
8. Mysovskikh, I.P. 1981. “Interpolation cubature formulas”, M.: Nauka. (In Russ.)
9. Szegő, G. 1974. “Orthogonal polynomials”, Third Edition, American Mathematical Society.
10. Shtrom, D.V. 2002. “The Delsarte method in the problem of the contact numbers of Euclidean spaces of high dimensions”, *Proc. Steklov Inst. Math. Algebra. Topology. Mathematical Analysis*, suppl. 2, pp. S162–S189.
11. Yudin, V.A. 1997. “Lower bounds for spherical designs”, *Izv. Math.*, vol. 61, no. 3, pp. 673–683.
12. Bondarenko, A., Radchenko, D. & Viazovska, M. 2013. “Optimal asymptotic bounds for spherical designs”, *Ann. Math.*, vol. 178, no. 2, pp. 443–452.
13. Boyvalenkov, P. & Nikova, S. 1998. “Improvements of the lower bounds on the size of some spherical designs”, *Mathematica Balkanica*, vol. 12, pp. 151–160.
14. Breiding, P., Rose, K. & Timme, S. 2020. “Certifying zeros of polynomial systems using interval arithmetic”, *arXiv:2011.05000*.
15. Delsarte, P., Goethals, J.M. & Seidel, J.J. 1977. “Spherical codes and design”, *Geom. Dedicata*, vol. 6, no. 3, pp. 363–388.
16. Levenshtein, V.I. 1998. “Universal bounds for codes and designs//”, In Handbook of Coding Theory, V.S. Pless and W.C. Huffman Eds. Amsterdam: Elsevier.
17. Odlyzko, A.M. & Sloane, N.J.A. 1979. “New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 26, no. 2, pp. 210–214.

Получено 10.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами¹

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Рарова Елена Михайловна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rarova82@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования авторов по оценке тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами. Рассмотрен случай произвольной весовой функции бесконечного порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то для любого натурального r справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Для любого натурального r доказана асимптотическая оценка

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| \leq B(r, \infty) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004_p_a

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights²

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Rarova Elena Mikhailovna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: rarova82@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Abstract**

The paper continues the authors' research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic grid with weights. The case of an arbitrary weight function of infinite order is considered.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then for any natural r the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| \leq B(r, \infty) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions..

Bibliography: 15 titles.

For citation:

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 166–178.

²The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

1. Введение

Роль тригонометрических сумм сеток в теоретико-числовом методе в приближенном анализе подробно освещена в монографии Н. М. Коробова [5]. Задача нахождения асимптотических формул для тригонометрических сумм алгебраических сеток поставлена в работе [3].

В данной работе используются обозначения и определения из работ [6]–[10].

Рассматриваются единичные s -мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu \leq 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \mid \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решетки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1]^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой Π рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \quad \text{при } \vec{x} \in G_s, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (2)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (3)$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \dots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Для неё выполняется следующая лемма:

ЛЕММА 1. Для любого действительного σ выполняется неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq (\bar{\sigma})^{-2}, \quad (4)$$

где $\bar{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12]. $\square$

Кроме этого, в работах [1]–[2] была определена бесконечно дифференцируемая функция

$$\rho_\infty(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{1+x}}, & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Использование бесконечно дифференцируемых весовых функций позволяет в методе Фролова [14, 15] избавиться от зависимости квадратурной формулы от класса E_s^α .

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (6)$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_ν ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (6) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Нетрудно видеть, что для натурального t имеем: $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t \cdot (m, \dots, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f(M_k) - R_N[f].$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1, \dots, N$) называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

В работах [6]–[10] использовалась весовая функция $\rho_r(x)$, определенная равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geq 1, \\ 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \frac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

при этом для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^1 \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leq \frac{B(r)}{\sigma^{r+1}} \quad (9)$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с некоторой константой $B(r)$.

Для произвольных целых $m_1, \dots, m_s$ суммы $S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (10)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ ($k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T))$) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство³*

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \quad (11)$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9]. $\square$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

ТЕОРЕМА 2. При $t \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9]. $\square$

ТЕОРЕМА 3. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9]. $\square$

В работе [11] с помощью функции $\rho_r(x)$ эти теоремы были усилены:

ТЕОРЕМА 4. Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right). \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 5. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leq B(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \quad (15)$$

Цель данной работы — перенести теоремы 4 и 5 на случай бесконечно дифференцируемой весовой функции $\rho_\infty(x)$.

2. Разложение бесконечно дифференцируемой весовой функции в ряд Фурье

Начнём с вывода асимптотических оценок для коэффициентов Фурье.

ЛЕММА 2. Справедливо разложение на отрезке $[-1, 1]$ в ряд Фурье:

$$\rho_\infty(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_\infty(m) e^{\pi i m x},$$

где $c_\infty(0) = \frac{1}{2}$ и $c_\infty(m) = \begin{cases} 0, & \text{при } m = 2n, \\ O\left(\frac{1}{m^r}\right), & \text{при } m = 2n + 1 \end{cases}$ при $m \neq 0$ и произвольном натуральном $r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$c_\infty(m) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho_\infty(x) e^{-\pi i m x} dx, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

При $m = 0$ имеем:

$$c_\infty(0) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \left(1 - e^{\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{1+x}}}\right) dx + \int_0^1 e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left(1 - e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} \right) dx + \int_0^1 e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} dx \right) = \frac{1}{2}.$$

При $m \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} c_\infty(m) &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \left(1 - e^{\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{1+x}}} \right) e^{-\pi i m x} dx + \int_0^1 e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\pi i m x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left(1 - e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} \right) (-1)^m e^{-\pi i m x} dx + \int_0^1 e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\pi i m x} dx \right) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^m e^{-\pi i m x}}{-\pi i m} \Big|_0^1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} (1 - (-1)^m) e^{-\pi i m x}}{-\pi i m} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} (1 - (-1)^m) e^{-\pi i m x} e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi i m} \left(-\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (-1)^m}{-\pi i m} - \frac{(-1)^m - 1}{-2\pi i m} + \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} (1 - (-1)^m) e^{-\pi i m x} e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi i m} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} (1 - (-1)^m) e^{-\pi i m x} e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi i m} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right) dx = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } m = 2n, \\ \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\pi i m x} e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi i m} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right) dx, & \text{при } m = 2n + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл I , заданный равенством

$$I = \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\pi i m x} e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi i m} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^{-\pi i m x}}{-\pi i m} f_1(x),$$

где $f_1(x) = e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} \right)$. Нетрудно видеть, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f_1(x) = 0$, поэтому, интегрируя по частям, получим

$$I = - \int_0^1 \frac{e^{-\pi i m x}}{(-\pi i m)^2} f_1'(x).$$

Вычисления показывают, что $f_2(x) = f_1'(x) =$

$$= e^{\frac{1}{x-1} e^{-\frac{1}{x}}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{-2x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 5x + 1 + e^{-\frac{1}{x}} (-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1)}{x^4(x-1)^4}.$$

Из вида функции $f_2(x)$ следует, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f_2(x) = 0$, поэтому, интегрируя по частям, получим

$$I = (-1)^2 \int_0^1 \frac{e^{-\pi i m x}}{(-\pi i m)^3} f_2'(x).$$

По индукции покажем, что справедливо равенство

$$I = (-1)^r \int_0^1 \frac{e^{-\pi i m x}}{(-\pi i m)^{r+1}} f_r'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f_r'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f_r'(x) = 0,$$

где $f_r(x) = \left(e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2} \right) \right)^{(r-1)}$, $r \geq 1$. Для этого установим, что

$$f_r(x) = e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r,\nu}(x)}{x^{2r}(x-1)^{2r}},$$

где $p_{r,\nu}(x)$ — некоторые многочлены от x . Действительно, для $r = 1$ это выполнено с $p_{1,0}(x) = x^2 - x + 1$. Пусть утверждение справедливо для $r \geq 1$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} f_{r+1}(x) &= f_r'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{-x^2 + x - 1}{x^2(x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r,\nu}(x)}{x^{2r}(x-1)^{2r}} - e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r,\nu}(x)}{x^{2r+2}(x-1)^{2r}} + \\ &+ e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{\left(\sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r,\nu}(x) \right)' x^2(x-1)^2 - 2r \sum_{\nu=0}^{r-1} e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r,\nu}(x) (x(x-1)^2 + x^2(x-1))}{x^{2r+2}(x-1)^{2r+2}} = \\ &= e^{\frac{1}{x-1}} e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} \frac{\sum_{\nu=0}^r e^{-\frac{\nu}{x}} p_{r+1,\nu}(x)}{x^{2r+2}(x-1)^{2r+2}} \end{aligned}$$

и утверждение справедливо для любого $r \geq 1$.

Положим

$$B(r, \infty) = \int_0^1 |f_{r+1}(x)| dx,$$

тогда

$$|I| \leq \frac{B(r, \infty)}{\pi m^{r+1}}, \quad r \geq 0,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть функция $\rho_\infty(x)$ определена равенствами (5). Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_\infty(\sigma) = \int_{-1}^1 \rho_\infty(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_\infty(\sigma)| \leq \begin{cases} (\bar{\sigma})^{-r}, & \text{при } |\sigma| \leq 1, \\ \frac{B(r, \infty) 2\pi \|\sigma\|}{2\pi \sigma^{r+1}}, & \text{при } |\sigma| > 1 \end{cases} \quad (16)$$

и функция $\rho_\infty(x)$ — весовая функция бесконечного порядка с константами $B(r, \infty)$ ($r \in \mathbb{N}$), где

$$B(r, \infty) = \int_0^1 |f_{r+1}(x)| dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого σ выполняется неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 \rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq \int_{-1}^1 \rho_{\infty}(x) dx = \|\rho_{\infty}(x)\|_1 = 1,$$

поэтому при $|\sigma| \leq 1$ и для любого натурального r выполняется соотношение

$$\left| \int_{-1}^1 \rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq (\bar{\sigma})^{-r}.$$

Пусть $|\sigma| > 1$, тогда для интеграла $I_{\infty}(\sigma)$ справедливы преобразования

$$\begin{aligned} I_{\infty}(\sigma) &= \int_0^1 \rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx + \int_0^1 \rho_{\infty}(x-1) e^{2\pi i \sigma(x-1)} dx = \\ &= \int_0^1 \rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx + \int_0^1 (1 - \rho_{\infty}(x)) e^{2\pi i \sigma(x-1)} dx = \\ &= e^{-2\pi i \sigma} \int_0^1 e^{2\pi i \sigma x} dx + (1 - e^{-2\pi i \sigma}) \int_0^1 \rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx = \\ &= e^{-2\pi i \sigma} \frac{e^{2\pi i \sigma} - 1}{2\pi i \sigma} + (1 - e^{-2\pi i \sigma}) \left(\frac{\rho_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x}}{2\pi i \sigma} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\rho'_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x}}{2\pi i \sigma} dx \right) = \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi i \sigma}}{2\pi i \sigma} - \frac{1 - e^{-2\pi i \sigma}}{2\pi i \sigma} - (1 - e^{-2\pi i \sigma}) \int_0^1 \frac{\rho'_{\infty}(x) e^{2\pi i \sigma x}}{2\pi i \sigma} dx = (1 - e^{-2\pi i \sigma}) \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \sigma x}}{2\pi i \sigma} f_1(x) dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 2, получим

$$I_{\infty}(\sigma) = (1 - e^{-2\pi i \sigma}) (-1)^r \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \sigma x}}{(2\pi i \sigma)^{r+1}} f'_r(x) dx. \tag{18}$$

Переходя в равенстве (18) к модулям, получим

$$|I_{\infty}(\sigma)| \leq \frac{|1 - e^{-2\pi i \sigma}| B(r, \infty)}{2\pi \sigma^{r+1}}.$$

Так как $4\|\sigma\| \leq |1 - e^{-2\pi i \sigma}| \leq 2\pi\|\sigma\|$, то получаем утверждение леммы. $\square$

3. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теперь перейдём к переносу теорем 4 и 5 на случай бесконечно дифференцируемой весовой функции $\rho_{\infty}(x)$.

ТЕОРЕМА 6. Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\vec{m} = t(m, \dots, m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_\infty(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y},$$

где $\{t(m, \dots, m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m, \dots, m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_\infty(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) = 1 + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_\infty(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y}.$$

Поэтому по лемме 3 получим

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(t(m, \dots, m)) - 1| \leq B(r, \infty) \zeta_H(\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) |r + 1) = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m, \dots, m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ определим два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geq 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leq C(\Lambda)$.

ЛЕММА 4. Для любого действительного x справедливы неравенства

$$\frac{1}{\overline{n-x}} \leq \begin{cases} \frac{1}{2\overline{x}}, & \text{при } \overline{n-x} \geq 2\overline{x}, \\ \frac{1}{\overline{x}}, & \text{при } 2\overline{x} > \overline{n-x} \geq \overline{x}, \\ \frac{\overline{x}}{2}, & \text{при } \frac{\overline{x}}{2} \leq \overline{n-x} < \overline{x}, \\ \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, & \text{при } \overline{n-x} < \frac{\overline{x}}{2}. \end{cases} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11]. $\square$

ТЕОРЕМА 7. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m}) \leq B(r, \infty) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 3 имеем:

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| \leq B(r, \infty) \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \frac{1}{(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Для простоты изложения воспользуемся неравенством (20) в наиболее слабой форме $\frac{1}{n-x} \leq \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}$, получим

$$\begin{aligned} |S_{M(t), \vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| &\leq B(r, \infty) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{2^{s(r+1)}(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^{r+1}} \right) = \\ &= B(r, \infty) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + 2^{s(r+1)}(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1} \zeta(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))|r+1) \right). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 6, получим доказываемое утверждение. $\square$

4. Заключение

По-видимому, вместо оценки из теорем 6 и 7 со степенной правой частью и показателем $r+1$ имеет место оценка с экспоненциальной правой частью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6091–84.
2. Добровольский Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 1984.
3. Н. М. Добровольский. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.
4. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 22, вып. 3, С. 109–134.
5. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.
6. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
7. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

8. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.
9. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.
10. Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.
11. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.
12. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.
13. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — Ч. I. — 232 с.
14. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.
15. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes E_s^α and H_s^α ", Dep. v VINITI, no. 6091–84.
2. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.
3. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.
4. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 109–134.
5. Korobov, N. M. 2004, *Teoretiko-chislovyye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
6. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.
7. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.

8. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets", *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.
9. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.
10. E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.
11. E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2020, "Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.
12. Rebrov E. D. 2012, "Quadrature formulas with modified algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53 — 90.
13. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. — Part I. — 232 p.
14. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 231, no.4, pp. 818–821.
15. Frolov, K. K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

Получено 09.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-179-195

О некоторых аддитивных проблемах гольдбахова типа

Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков

Салиба Ходем Мансур — кандидат физико-математических наук, университет Нотр-Дам-Луэз (Ливан, Бейрут).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В данной работе найдена асимптотическая формула для числа решений нелинейной тернарной проблемы с простыми числами, остаток в которой имеет степенное понижение. Вывод ее использует “явную формулу” для числа простых, не превосходящих любой наперед заданной границы, через нули дзета-функции Римана. По существу решается тернарная задача на “каждом нуле”.

Исследование подобных задач стало возможным после решения в 1937 г. И. М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха [1], [2]. В 1938 г. он нашел оценку среднего значения модуля тригонометрической суммы по простым со степенным понижением относительно длины промежутка суммирования ([2], теорема 3, с.82; теоремы 6 и 7, с.86).

Начиная с 1996 г. Г. И. Архипов, К.Буриев и автор [6]-[9], используя еще соображения из теории диофантовых приближений и “явную формулу” для числа простых чисел в теории дзета-функции Римана, получили несколько результатов для исключительного множества в бинарных проблемах гольдбахова типа. В работах Г. Л. Ватсона, Д. Брюдерна, Р. Д. Кука и А. Перелли [10]-[12] дополнительно к этому развивается подход, связанный с теорией меры, для уточнения оценок линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Ключевые слова: a ternary problem with primes, explicit formulas for the P.L.Chebyshev function, a “dense” theorem for zeros of the Riemann zeta-function.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков. О некоторых аддитивных проблемах гольдбахова типа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 179–195.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-179-195

On some additive problems of Goldbach's type

H. M. Saliba, V. N. Chubarikov

Saliba Holem Mansour — Ph.D. in physics and mathematics, Notre Dame University-Louaize (Lebanon, Beirut).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

In this paper, we find an asymptotic formula with power-saving remainder term for the number of solutions of one non-linear ternary problem with primes. The proof is based on the "precise formula" for Chebyshev's function involving the zeros of Riemann zeta function. In fact, a ternary problem "at each zero" is solved. I. M. Vinogradov's solution of the ternary Goldbach problem (1937, see [1], [2]) opened the way of solving a wide class of problems of the above type. In 1938, he found a power-saving estimate (with respect to the length of the summation interval) for the mean value of the modulus of the exponential sum with primes (see [2], theorem 3, p.82; theorems 6 and 7, p.86). Starting at 1996, G.I. Arkhipov, K. Buriev and the author have obtained several results concerning the exceptional sets in some binary problems of Goldbach's type. These results used both the tools of the theory of Diophantine approximations and the "precise formulas" from Riemann's zeta function theory. At the same time, the method of estimating of linear sums with primes based on the measure theory was derived in the papers of G. L. Watson, D. Brüdern, R. D. Cook and A. Perelli.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

H. M. Saliba, V. N. Chubarikov, 2021, "On some additive problems of Goldbach's type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 179–195.

1. Введение

Настоящая работа посвящена выводу асимптотики для числа представлений натурального числа суммой трех слагаемых, каждое из которых является целой частью от произведения заданного вещественного числа на простые числа, причем они пробегают всю последовательность простых в натуральном ряду чисел. Соответствующие три вещественных числа являются алгебраическими числами и линейно независимы над полем рациональных чисел. Остаток в найденной асимптотике имеет степенное понижение по отношению к представляемому числу, которое является достаточно большим.

Исследование подобных задач стало возможным после решения в 1937 г. И. М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха [1], [2]. В 1938 г. он нашел оценку среднего значения

модуля тригонометрической суммы по простым со степенным понижением относительно длины промежутка суммирования ([2], теорема 3, с.82; теоремы 6 и 7, с.86).

Начиная с 1996 г. Г.И.Архипов, К.Буриев и автор [6]-[9], используя еще соображения из теории диофантовых приближений и “явную формулу” для числа простых чисел в теории дзета-функции Римана, получили несколько результатов для исключительного множества в бинарных проблемах гольдбахова типа. В работах Г.Л.Ватсона, Д.Брюдерна, Р.Д.Кука и А.Перелли [10]-[12] дополнительно к этому развивается подход, связанный с теорией меры, для уточнения оценок линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Здесь мы существенно используем эти идеи и методы.

Сформулируем и докажем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. При $N \rightarrow +\infty$ для числа $J = J(N)$ решений уравнения

$$[\beta_1 p_1] + [\beta_2 p_2] + [\beta_3 p_3] = N$$

справедлива асимптотическая формула вида

$$J(N) = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3 \ln^3 N} + \Delta_1,$$

где $\Delta_1 = N^{\frac{19}{10}+\varepsilon}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ — алгебраические числа, линейно-независимые над полем рациональных чисел, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Докажем здесь только следующую теорему 2. Утверждение теоремы 1 выводится из нее преобразованием Абеля.

Пусть

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. При $N \rightarrow +\infty$ для числа $I = I(N)$

$$I = \sum_{\substack{n_1 \leq N\beta_1^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_2 \leq N\beta_2^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_3 \leq N\beta_3^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)$$

справедлива асимптотическая формула вида

$$I(N) = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3} + \Delta,$$

где $\Delta = N^{19/10}(\ln N)^{3,5}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 1$ — квадратичные иррациональности, линейно-независимые над полем рациональных чисел.

В случае, если $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ — алгебраические числа, линейно-независимые над полем рациональных чисел, то $\Delta = N^{\frac{19}{10}+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

2. Предварительные преобразования

Пусть

$$S_\beta(\alpha) = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [\beta n]}.$$

Тогда имеем

$$I = \sum_{\substack{n_1 \leq N\beta_1^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_2 \leq N/\beta_2^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_3 \leq N\beta^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3) =$$

$$= \int_0^1 S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Положим $\kappa = N^{-3/4}$. Обозначим $E_1 = [-\kappa, \kappa)$, $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$. Поскольку $S_\beta(\alpha)$ — периодическая функция по α с периодом единица, получим

$$I = \int_0^1 S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \int_{-\kappa}^{1-\kappa} \dots = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\kappa}^{\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

$$I_2 = \int_{\kappa}^{1-\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. (П.Л.Г.Дирихле). Пусть $\tau \geq 1$. Тогда любое вещественное число α можно представить в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, [3], вопрос 4.в, с.21.

ЛЕММА 2. (И.М.Виноградов). Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1,$$

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$S(\alpha, x) \ll x \ln^{3,5} x (q^{0,5} x^{-0,5} + q^{-0,5} + x^{-0,2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [16], теорема 5.12, с. 74.

ЛЕММА 3. (О.В. Попов). Пусть α — вещественное число, $0 < |\alpha| \leq 1/2$, $P < P_1 \leq 2P$ — натуральные числа, $f(x)$ — вещественнозначная функция натурального аргумента,

$$V_0(\alpha) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [f(n)]}.$$

Тогда при любом натуральном $K \geq 2$, $M = [(2K + 1)\pi/2] + 1$, $M_0 = [M \ln M]$ справедлива оценка

$$|V_0(\alpha)| \leq \sum_{|m| \leq M} \left| \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha + m} V(\alpha + m) \right| + 36 \sum_{0 < |m| \leq M_0} |V(m)| \cdot |\sin \pi \alpha| \frac{\ln M}{M} +$$

$$+ 136 |\sin \pi \alpha| \frac{P \ln M}{M},$$

где

$$V(\alpha) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha f(n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [22], лемма 3, с. 28.

ЛЕММА 4. (Д.Касселс). Пусть q_n и q_{n+1} — знаменатели последовательных подходящих дробей любого вещественного иррационального числа μ . Тогда справедливо неравенство

$$\|q_n \mu\| > \frac{1}{2q_{n+1}},$$

где $\|t\|$ обозначает расстояние от числа t до ближайшего к нему целого числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [19], неравенство (16), с.16.

Рассмотрим функцию П.Л.Чебышёва

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольда

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ обозначает нуль дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, лежащий в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

ЛЕММА 5. При $T \geq 2$ и $x \geq 2$ справедливо соотношение

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T),$$

где

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T} \ln^2(xT) + \ln x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [20], теорема 4.5, с.264.

ЛЕММА 6. (Формула Абеля суммирования значений гладкой функции в интегральной форме). Пусть функция $g(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, x]$, пусть, также, заданы неубывающая последовательность $\{\lambda_n\}$ и произвольная последовательность $\{a_n\}$, и пусть

$$A(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} a_n.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n g(\lambda_n) - A(x)g(x) = - \int_{\lambda_1}^x A(t)g'(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [21], гл. VIII, теорема 6, с. 208.

ЛЕММА 7. (Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений гладкой функции). Пусть функция $f(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, x]$ и $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a < n \leq x} f(n) - \rho(x)f(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f'(t)\rho(t) dt - \rho(a)f(a).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [21], гл. VIII, теорема 4, с.206.

ЛЕММА 8. (Ван дер Корпут). Пусть функция $f(t)$ имеет монотонную и знакопостоянную производную на отрезке $[a, x]$, причем на этом отрезке $|f'(t)| \leq \delta$ при некотором постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$. Тогда имеем

$$\sum_{a < n \leq x} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^x e^{2\pi i f(t)} dt + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right),$$

где θ — абсолютная постоянная с условием $|\theta| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [1], гл. II, лемма 3, с.25.

ЛЕММА 9. Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ — нули дзета-функции Римана. Тогда при $y \rightarrow +\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{|\gamma| < y^{0,4}} y^{\beta-1} \ll e^{-c(\ln y)^{0,2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма — частный случай леммы 11.20 из [18], с. 210.

ЛЕММА 10. Пусть в промежутке $q < x \leq r$ функция $f''(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{A} \ll |f''(x)| \ll \frac{1}{A}.$$

Кроме того, пусть $\varphi(x)$ монотонна и $\varphi(x) \ll H$.

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{q < x \leq r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H \left(\frac{r-q}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U \right),$$

где $U = \max\{r-q, A\}$.

Если же имеет место неравенство

$$\delta \leq |f'(x)| \leq 0,5,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{q < x \leq r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H \left(\frac{1}{\delta} + \ln(r-q) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма — прямое следствие лемм 1 и 1а из [2], с. 14-16.

ЛЕММА 11. Имеем

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, [17], лемма 4, с. 188-190 (вычисление особого интеграла в проблеме Варинга). Положим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha x} d\alpha.$$

Поскольку справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right| = \frac{|\sin \pi \alpha|}{\pi |\alpha|} \leq \min(1, (\pi |\alpha|)^{-1}),$$

интеграл, представляющий функцию $f(x)$, абсолютно сходится.

Более того, функция $f(x)$ является непрерывной на промежутке $0 \leq x \leq 2$. В самом деле, находим

$$\begin{aligned} |f(x + \Delta x) - f(x)| &\leq 4 \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right|^3 |\sin \pi \alpha \Delta x| d\alpha \leq \\ &\leq 4\pi |\Delta x| \int_0^{|\Delta x|^{-1/3}} \alpha d\alpha + 4\pi^2 \int_{|\Delta x|^{-1/3}}^{+\infty} \alpha^{-3} d\alpha \ll |\Delta x|^{1/3}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ будет дифференцируемой функцией на интервале $0 < y < 2$.

Пользуясь теоремой о равенстве повторных интегралов (см., например, [14], гл. 17, §7, с.421, теорема 16), имеем

$$F(y) = \int_0^y f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 \int_0^y e^{-2\pi i \alpha x} dx d\alpha.$$

Выполняя интегрирование по переменной x и вновь пользуясь той же теоремой о равенстве повторных интегралов, находим

$$F(y) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha (u_1 + u_2 + u_3)} - e^{2\pi i \alpha (u_1 + u_2 + u_3 - y)}}{2\pi i \alpha} d\alpha.$$

Для краткости положим $\lambda = u_1 + u_2 + u_3$. Тогда предыдущее выражение примет вид

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\pi \alpha \lambda - \sin 2\pi \alpha (\lambda - y)}{\alpha} d\alpha.$$

Воспользуемся известным тождеством $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$. Получим

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn}(\lambda - y)) du_1 du_2 du_3 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

$0 \leq \lambda \leq y$

После замены переменных интегрирования $u_1 = v_1 y, u_2 = v_2 y, u_3 = v_3 y$ приходим к интегралу Дирихле (см., например, [17], гл. III, теорема 6, с.58)

$$F(y) = y^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dv_1 dv_2 dv_3 = y^3 \frac{1}{\Gamma(4)} = \frac{y^3}{6}.$$

$0 \leq v_1 + v_2 + v_3 \leq 1$

Следовательно,

$$f(y) = F'(y) = \frac{y^2}{2}, \theta = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

4. Асимптотика $S_\beta(\alpha)$ на E_1

Напомним, что $E_1 = [-\kappa, \kappa], \kappa = N^{-3/4}$. Преобразуем сумму $S_\beta(\alpha)$ при $\alpha \in E_1$. Если $|\alpha| \leq N^{-1} \ln^7 N$, то воспользуемся тривиальной оценкой $|S_\beta(\alpha)| \ll N/\beta$. Пусть $\tau^{-1} = N^{-\omega}$ и $|\alpha| > N^{-1} \ln^7 N$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_\beta(\alpha) &= \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [\beta n]} = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} e^{-2\pi i \alpha \{\beta n\}} = \\ &= \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} (1 + O(|\alpha|)) = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} + R_2, \end{aligned}$$

где

$$R_2 \ll |\alpha| N \ll N \tau^{-1} \ll N^{1/4}.$$

Поскольку β — постоянная, справедливы оценки $N^{-1} \ll \alpha \beta \ll N^{-3/4}$. По лемме 1 находим следующее представление числа в виде

$$\alpha \beta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, q \geq 1, |\theta| < 1.$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{[1/(\alpha \beta)]}, \quad \text{если} \quad \left\{ \frac{1}{\alpha \beta} \right\} < \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{[1/(\alpha \beta)] + 1}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2} \leq \left\{ \frac{1}{\alpha \beta} \right\}.$$

Поэтому, используя лемму 2, находим

$$S_\beta(\alpha) \ll N q^{1/2} N^{-1/2} (\ln N)^{3,5} \ll N^{1/2} \alpha^{-1/2} (\ln N)^{3,5}.$$

Заметим, что эта оценка нетривиальна, если $|\alpha| \gg N^{-1} (\ln N)^7$. Далее, применяя преобразование Абеля, получим

$$S_\beta(\alpha) = \sum_{n \leq N\beta^{-1}} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} + O(N^{1-\omega}) = -2\pi i \alpha \int_2^N \psi(t) e^{2\pi i \alpha t} dt + \psi(N) e^{2\pi i \alpha N}.$$

Положим $T = N^{0,4}$. Воспользуемся при $v \rightarrow \infty$ асимптотикой (лемма 6)

$$\psi(v) = v - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{v^\rho}{\rho} + R(v),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль дзета-функции Римана,

$$R(v) \ll \frac{v \ln^2 v}{T}.$$

Затем выполним интегрирование по частям. Находим

$$S(\alpha) = S_0(\alpha) - \int_2^N e^{2\pi i \alpha t} \left(\sum_{|\gamma| \leq T} t^{\rho-1} \right) dt + R_1,$$

где

$$\begin{aligned} S_0(\alpha) &= \int_0^N e^{2\pi i \alpha t} dt, \\ R_1 &= R(N)e^{2\pi i \alpha N} + 2\pi i \alpha \int_2^N R(t)e^{2\pi i \alpha t} dt \ll \\ &\ll \frac{|\alpha| N^2 \ln^2 N}{T} + \frac{N \ln^2 N}{T} \ll \frac{N^{5/4} \ln^2 N}{T}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл “на нуле” дзета-функции Римана $\rho = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 \leq 1 - c(\ln T)^{-2/3}$, $|\gamma_0| \leq T$.
Имеем

$$\int_0^N t^{\rho-1} e^{2\pi i \alpha t} dt = \int_0^N t^{\beta_0-1} t^{i\gamma_0} e^{2\pi i \alpha t} dt = \sum_{s=0}^l J_s,$$

где

$$J_s = \int_{n_{s+1}}^{n_s} t^{\beta_0-1} t^{i\gamma_0} e^{2\pi i \alpha t} dt, \quad n_s = N e^{-s}, \quad 0 \leq s \leq l, \quad l = [\ln N] + 1.$$

По второй теореме о среднем, примененной отдельно к вещественной и мнимой частям интеграла, при некотором $n_{s+1} \leq \xi \leq n_s$ находим

$$|J_s| \ll n_{s+1}^{\beta_0-1} \left| \int_{n_{s+1}}^{\xi} e^{2\pi i \alpha t + i\gamma_0 \ln t} dt \right|.$$

Воспользуемся при $v \rightarrow \infty$ асимптотикой

$$\psi(v) = v - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{v^\rho}{\rho} + R(v), \quad R(v) = O\left(\frac{v \ln^2 v}{T}\right)$$

К сумме

$$U(\alpha\beta) = \sum_{0 < n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n}$$

при $\alpha \in E_1$ применим формулу Абеля суммирования значений функции по целым точкам в интегральной форме (лемма 6). Получим

$$U(\alpha\beta) = \psi(N/\beta) e^{2\pi i \alpha N} - \int_0^{N/\beta} \psi(t) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}) =$$

$$= \left(\frac{N}{\beta} - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(N/\beta)^\rho}{\rho} \right) e^{2\pi i \alpha N} - \int_0^{N/\beta} \left(t - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{t^\rho}{\rho} \right) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}) + R_1(N),$$

$$R_1(N) = R(N/\beta) e^{2\pi i \alpha N} - \int_1^{N/\beta} R(t) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}).$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$U(\alpha\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^N e^{2\pi i \alpha t} dt - \int_1^{N/\beta} \left(\sum_{|\gamma| \leq T} t^{\rho-1} \right) e^{2\pi i \alpha \beta t} dt + R_1(N).$$

Оценим $R_1(N)$. Имеем

$$|R_1(N)| \ll |R(N)| + |\alpha|N + |\alpha| \int_{\sqrt{N}}^N |R(t)| dt \ll N^{7/8}.$$

§4. АСИМПТОТИКА I_1 .

Перейдем к выводу асимптотики при $N \rightarrow \infty$ величины I_1 . Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\kappa}^{\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\kappa}^{\kappa} \left(\int_0^N e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + R_0. \end{aligned}$$

После замены переменных $\alpha_0 = \alpha N$, $u_0 = u/N$ находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{N^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\kappa N}^{\kappa N} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha_0 u_0} du_0 \right)^3 e^{-2\pi i \alpha_0} d\alpha_0 + R_0 = \\ &= \frac{N^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha + R_0 + R_1 = \end{aligned}$$

По лемме 11 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{N^2}{2\beta_1 \beta_2 \beta_3} + R_{11}, R_{11} \ll |R_0| + |R_1| \ll N^{5/4}.$$

5. Оценка $S_\beta(\alpha)$ на E_2

Пусть $F(\alpha)$ обозначает величину

$$F(\alpha) = \min(|S_{\beta_1}(\alpha)|, |S_{\beta_2}(\alpha)|, |S_{\beta_3}(\alpha)|).$$

Тогда при любом α находим

$$|S_{\beta_1}(\alpha)S_{\beta_2}(\alpha)S_{\beta_3}(\alpha)| \leq F(\alpha)(|S_{\beta_1}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_2}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_3}(\alpha)|^2).$$

Как и раньше, обозначим $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$, $\kappa = N^{-3/4}$.

При $\alpha \in E_2$ по лемме 1 представим всякое α в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau},$$

где $1 \leq q \leq \tau$, $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$ и $\tau = N^{3/4}$.

Оценим $F(\alpha)$ при $\alpha \in E_2$. Рассмотрим два возможных случая:

1) $N^{1/4} \leq q \leq N^{3/4}$;

2) $1 \leq q < N^{1/4}$.

В случае 1) воспользуемся леммой 2. При $N^{1/4} \leq q \leq N^{3/4}$, для некоторого $\beta = \beta_s$, $1 \leq s \leq 3$, находим

$$F(\alpha) \leq |S_\beta(\alpha)| \ll N(\ln)^{3,5}(q^{0,5}N^{-0,5} + q^{-0,5} + N^{-0,2}) \ll N^{7/8}(\ln N)^{3,5}.$$

Оценим теперь $F(\alpha)$ в случае 2). Воспользуемся неравенством леммы 3 для оценки суммы $S_\beta(\alpha)$ для некоторого $\beta = \beta_s$, $s = 1, 2, 3$.

Положим в ней $K = N^{1/10}$, $f(n) = \beta n$, $P = 1$, $P_1 = N$. Тогда $M \ll K$, $M_0 \ll N^{1/10} \ln N$. Имеем

$$T(\gamma) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma n},$$

где $1 \leq P \leq N/\beta$, $P_1 \leq 2P$, причем $\gamma = (\alpha + m)\beta$, $m \ll M$ и $\gamma = m\beta$, $m \ll M_0$.

Неполные частные q_k квадратичных иррациональностей β ограничены. Следовательно, для любого натурального k справедливы неравенства $q_k \ll q_{k+1} \ll q_k$. Поскольку подходящие дроби являются дробями наилучшего приближения, для любого m с условием $q_k \leq m < q_{k+1}$ имеем

$$\|m\gamma\| \geq \|q_k\gamma\| > \|q_{k+1}\gamma\|.$$

Для алгебраических иррациональностей β воспользуемся теоремой Рота (см. замечание к лемме 4).

Дальнейшее рассмотрение случая 2) разобьем на три подслучая:

21) $\gamma = m\beta$, $m \ll N^{1/10} \ln N$;

22) $\gamma = \alpha\beta$;

23) $\gamma = (m + \alpha)\beta$, $m \ll N^{1/10}$.

Начнем рассмотрение с условия 21). При фиксированном m по лемме 1 имеем

$$m\beta = \frac{a_1}{r_1} + \frac{\theta_1}{r_1\tau_1},$$

где $a_1 \geq 1$, $(a_1, r_1) = 1$, $|\theta_1| < 1$, $r_1 \leq \tau_1 = N^{1/2}$.

Отсюда находим $r_1 m\beta - a_1 = \theta_1 \tau_1^{-1}$. Используя свойство подходящих дробей как дробей наилучшего приближения, при некотором k находим

$$\tau_1^{-1} \geq \|r_1 m\beta\| \geq \|q_k \beta\| > \frac{1}{2q_{k+1}},$$

т.е. $q_{k+1} > \tau_1/2$, причем для знаменателей q_k, q_{k+1} подходящих дробей β справедливы неравенства $q_k \leq r_1 m < q_{k+1}$. В силу ограниченности неполных частных имеем

$$q_{k+1} \leq q_k \ll r_1 m.$$

Стало быть,

$$r_1 m \gg \tau_1 = N^{3/8}, r_1 \ll N^{1/2}.$$

Используя неравенства $r_1 \leq \tau_1, m \leq N^{1/8} \ln N$, получим

$$\frac{N^{3/8}}{\ln N} \ll r_1 \leq N^{1/2}.$$

Применяя лемму 2, находим

$$T(m\beta) \ll N^{0,8}(\ln N)^{3,5}.$$

Случай 21) рассмотрен.

Перейдем к случаю 22). Имеем $\gamma = \alpha\beta$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, (a, q) = 1, |\theta| < 1, q < N^{1/8}, \tau = N^{3/4}.$$

По лемме 1 при $\tau = N^{3/4}$ представим $\gamma = \alpha\beta$ в виде

$$\gamma = \frac{a_2}{r_2} + \frac{\theta_2}{r_2\tau},$$

где $a_2 \geq 1, (a_2, r_2) = 1, |\theta_2| < 1, r_2 \leq \tau$.

Отсюда находим

$$\alpha\beta = \left(\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}\right)\beta = \frac{a_2}{r_2} + \frac{\theta_2}{r_2\tau}, \frac{a\beta}{q} - \frac{a_2}{r_2} \ll \frac{1}{q\tau} + \frac{1}{r_2\tau}.$$

Следовательно,

$$\|ar_2\beta\| \ll ar_2\beta - a_2q \ll \frac{r_2 + q}{\tau}.$$

Пусть k таково, что знаменатели подходящих дробей удовлетворяют условиям $q_k \leq ar_2 < q_{k+1}$. Тогда из условий наилучших приближений, рассмотренных выше, получим

$$q_{k+1} \gg \frac{\tau}{q + r_2}, q_k \leq ar_2 < q_{k+1}.$$

Откуда

$$ar_2 \gg \frac{\tau}{q + r_2}, r_2(r_2 + q) \gg \frac{\tau}{a} \ll N^{1/2}.$$

При $r_2 \gg q$ имеем

$$r_2 \gg r_2 + q, r_2^2 \gg (r_2 + q)r_2 \gg N^{1/2}, r_2 \gg N^{1/4},$$

а при $r_2 \ll q \ll N^{1/4}$ имеем

$$r_2q \gg (r_2 + q)r_2 \gg N^{1/2}, r_2 \gg N^{1/2}q^{-1} \gg N^{1/4}.$$

Поскольку $\tau = N^{3/4} \geq r_2 \gg N^{1/4}$, по лемме 2 находим

$$T(\alpha\beta) \ll N^{7/8}(\ln N)^{3,5}.$$

Случай 22) рассмотрен.

Осталось рассмотреть случай 23): $\gamma = (\alpha + m)\beta$, $m \ll N^{1/10}$, $q < N^{1/4}$.

Вновь воспользуемся леммой 1 Дирихле. Положим $\tau_3 = N^{3/4}m^{1/2}$. Имеем

$$\gamma = (\alpha + m)\beta = \frac{a_3}{r_3} + \frac{\theta_3}{r_3\tau_3}, (a_3, q_3) = 1, |\theta_3| < 1, r_3 \leq \tau_3.$$

Используя разложение для $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, находим

$$\gamma = \frac{a + mq}{q}\beta + \frac{\theta\beta}{q\tau} = \frac{a_3}{r_3} + \frac{\theta_3}{r_3\tau_3},$$

что приводит к оценке

$$r_3(a + mq)\beta - a_3q \ll \frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}.$$

Вновь, пользуясь соображениями о наилучших приближениях подходящими дробями, получим

$$\|r_3(a + mq)\beta\| \ll \frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}, r_3(a + mq) \gg \left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1}.$$

При $r_3/\tau \geq q/\tau_3$ имеем

$$\left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1} \gg \frac{\tau}{r_3},$$

что приводит к неравенствам

$$r_3(a + mq) \gg \frac{\tau}{q_3}, r_3^2 \gg \frac{\tau}{mq} \geq \frac{N^{1/2}}{m}, r_3 \gg N^{1/4}m^{-1/2}.$$

При $r_3/\tau \leq q/\tau_3$ имеем

$$\left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1} \gg \frac{\tau_3}{q}, r_3(a + mq) \gg \frac{\tau_3}{q},$$

$$r_3 \gg \frac{\tau_3}{q^2m} \geq \frac{N^{3/4}m^{1/2}}{N^{1/4}m} = N^{1/2}m^{-1/2}.$$

Поскольку $r_3 \leq \tau_3$, всегда справедливы неравенства

$$N^{1/4}m^{-1/2} \ll r_3 \ll N^{3/4}m^{1/2}.$$

Далее, пользуясь леммой 2, получим

$$T((\alpha + m)\beta) \ll N^{7/8}m^{1/4}(\ln N)^{3,5}.$$

Наконец, используя оценки сумм $T(\gamma\beta)$ для случаев 2.1)-2.3), получим оценку величины $F(\alpha)$.

Имеем

$$\begin{aligned} |F(\alpha)| &\ll \sum_{|m| \leq M} \left| \frac{V_0((\alpha + m)\beta)}{\alpha + m} \right| + \sum_{0 < |m| \leq M_0} |V_0(m\beta)| \frac{\ln M}{M} + \frac{N \ln M}{M} \ll \\ &\ll N^{9/10}(\ln N)^{3,5}. \end{aligned}$$

6. Оценка I_2

Отсюда имеем, обозначая $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$, $\kappa = N^{-3/4}$,

$$I_2 \leq \max_{\alpha \in E_2} |F(\alpha)| I_{21},$$

$$I_{21} = \int_0^1 (|S_{\beta_1}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_2}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_3}(\alpha)|^2) d\alpha.$$

Отсюда получим

$$I_{21} \ll N.$$

Это завершает оценку I_2 .

7. Завершение вывода асимптотики I

Имеем

$$I = I(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = I_1 + I_2 = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3} + O(N^{19/10} \ln^{3,5} N).$$

Теорема 2 доказана.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2 получается с помощью формулы Абеля суммирования значений гладкой функции по целым числам (лемма 6).

8. Заключение

Асимптотическая формула при $N \rightarrow \infty$ для числа решений уравнения $[\beta_1 p_1] + [\beta_2 p_2] + [\beta_3 p_3] = N$, p_1, p_2, p_3 — простые числа, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 1$ — квадратичная иррациональность, отличается от асимптотики для числа решений уравнения $p_1 + p_2 + p_3 = N$ более точным остаточным членом, имеющим степенное понижение по отношению к главному члену. Это связано с тем, что “стирается арифметика” при распределении простых чисел в арифметических прогрессиях при иррациональных числах $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 144 с.
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Физматлит. 1983
4. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.
5. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P.68-80.
6. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
7. Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности исключительного множества в бинарной аддитивной проблеме гольдбахова типа // Тр. МИАН, 1997, т.218, с. 28-57.

8. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. РАН, 2002, т.387, №3, с. 295-296.
9. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О мере “больших дуг” в разбиении Фарея // Чебышевский сборник, 2011, т.12, вып. 4, с. 39-42.
10. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // In book: Sieve Methods, Exponential Sums and their Applications in Number Theory. Greaves G. R. H., Harman G., Huxley M. N., Eds. Cambridge University Press, 1996, p. 87-100.
11. Brüdern J. Some additive problems of Goldbach’s type // Functiones et Approximatio. 2000, V. XXVIII, p. 45-73.
12. Watson G. L. On indefinite quadratic forms in five variables // Proc. London Math. Soc., 1953, 3(3), p. 170-181.
13. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.
15. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set of Goldbach’s problem // Acta arithm. 1975. V. 27. P. 353–370.
16. Cheng Jing-run, Liu Jian Min. The exceptional set of Goldbach-numbers (III) // Chinese Quart. J. Math. 1989. V.4. No. 1. P. 1–15.
17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 240 с.
18. Pan Chengdong, Pan Chenbiao. Goldbach conjecture. — Beijing (China), Science Press, 1992. pp.240.
19. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит. 1961. pp.213.
20. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир. 1967. pp.512.
21. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.
22. Попов О. В. Арифметические приложения оценок сумм Г.Вейля от многочленов растущей степени. Канд. дис. — М.: МГУ. 1995.
23. Тырина О. В. Средние значения тригонометрических сумм. Канд. дис. — М.: МГУ. 1989.
24. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, 278, No. 2, 302–304.
25. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, 49, No. 5, 1031–1067.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct. and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.
2. Vinogradov I. M. 1976. Special variants of the trigonometrical sums method. — M.: Fizmatlit, pp. 144.
3. Vinogradov I. M. 1983. Elements of the number theory. — M.: Fizmatlit, pp. 160.
4. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp. 888.
5. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory. Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P. 68-80.
6. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ. House of the Orjol University, pp. 464.
7. Arkhipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N., 1997. On a cardinality of an exceptional set in the binary additive problem of Goldbach's type. Proc. of Steklov institute, v. 218, p. 28-57.
8. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., 2002. On the exceptional set in the binary problem of the Goldbach's type. Dokl. RAS, v. 387, №3, p. 295-296.
9. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., 2011. On the measure of "large arcs" in the Farey tiling. Chebyshev sbornik, v. 12, issue. 4, p. 39-42.
10. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. 1996. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. In book: Sieve Methods, Exponential Sums and their Applications in Number Theory. Greaves G. R. H., Harman G., Huxley M. N., Eds. Cambridge University Press, p. 87-100.
11. Brüdern J. 2000. Some additive problems of Goldbach's type. Functiones et Approximatio. V. XXVIII, p. 45-73.
12. Watson G. L. 1953. On indefinite quadratic forms in five variables. Proc. London Math. Soc., 3(3), p. 170-181.
13. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. The theory of multiple trigonometric sums. — Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 c.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.
15. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975. The exceptional set of Goldbach's problem. Acta arithm. V. 27. P. 353-370.
16. Cheng Jing-run, Liu Jian Min. 1989. The exceptional set of Goldbach-numbers (III). Chinese Quart. J. Math. V.4. No. 1. P. 1-15.
17. Karatsuba A. A. 1983. Foundations of analytic number theory. 2nd Ed. — M.: Nauka. Gl. red. phis. -math. literature, pp. 240 (in Russian).
18. Pan Chengdong, Pan Chenbiao. 1992. Goldbach conjecture. — Beijing (China), Science Press, pp. 240.
19. Cassels J. B. C. 1961. An introduction to Diophantine approximation. — M.: Izd-vo inostr. lit., pp. 213.

-
20. Prahar K. 1967. Distribution of prime numbers. — М.: Mir, pp.512.
 21. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — М.: Drofa. pp. 640.
 22. Popov O. V. 1995. Arithmetical applications of the H.Weyl's sums estimates from polynomials of a rising degree. Candidate thesis. — М.: MSU.
 23. Tyrina O. V. 1989. Mean-values of trigonometric sums. Candidate thesis. — М.: MSU.
 24. Chubarikov V. N. 1984. Multiple trigonometric sums with primes. Doklady AN SSSR, 278, № 2, 302–304.
 25. Chubarikov V. N. 1985. Estimates of multiple trigonometric sums with primes. Izvestija. AN SSSR, Ser. Matem., 49, № 5, 1031–1067.

Получено 11.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-196-231

Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток¹

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов,
Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: helenash@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

В данной статье рассмотрен случай одномерных сдвинутых решёток. Прежде всего рассмотрено построение метрического пространства сдвинутых решёток с помощью отображения одномерных сдвинутых решёток в пространство двумерных решёток.

В работе определено гомеоморфное отображение пространства одномерных сдвинутых решёток на бесконечный двумерный цилиндр. Тем самым установлено, что пространство одномерных сдвинутых решёток CPR_2 локально евклидово пространство размерности 2.

Так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", то получаются в одномерном случае неожиданные результаты о производных от основных функций, таких как детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция сдвинутой решётки и гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток и сдвинутых многомерных решёток гораздо сложнее чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток и многомерных

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a

сдвинутых решёток, а так же в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получения теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследованием может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах решёток и многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Е. Н. Смирнова, О. А. Пиктилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-196-231

Smooth manifold of one-dimensional lattices and shifted lattices²

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: helenash@mail.ru

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

²The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

Abstract

In the previous work, the authors laid the foundations of the theory of smooth varieties of number-theoretic lattices. The simplest case of one-dimensional lattices is considered.

This article considers the case of one-dimensional shifted lattices. First of all, we consider the construction of a metric space of shifted lattices by mapping one-dimensional shifted lattices to the space of two-dimensional lattices.

In this paper, we define a homeomorphic mapping of the space of one-dimensional shifted lattices to an infinite two-dimensional cylinder. Thus, it is established that the space of one-dimensional shifted lattices CPR_2 is locally a Euclidean space of dimension 2.

Since the metric on these spaces is not Euclidean, but is "logarithmic", unexpected results are obtained in the one-dimensional case about derivatives of basic functions, such as the determinant of the lattice, the hyperbolic lattice parameter, the norm at least, the Zeta function and lattice hyperbolic Zeta function of lattices.

The paper considers the relationship of these functions with the issues of studying the error of approximate integration over parallelepipedal grids as the determinant of the lattice, the hyperbolic lattice parameter, the norm at least, the Zeta function and lattice hyperbolic Zeta function of lattices.

Note that the geometry of metric spaces of multidimensional lattices and shifted multidimensional lattices is much more complex than the geometry of an ordinary Euclidean space. This can be seen from the paradox of nonadditivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox, it follows that there is an open problem of describing geodesic lines in the spaces of multidimensional lattices and multidimensional shifted lattices, as well as in finding a formula for the length of the arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research may be the study of the analytical continuation of the hyperbolic zeta function on the spaces of lattices and multidimensional lattices. As is known, an analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices is constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytic continuations in the left half-plane on the lattice space has not been studied. All these, in our opinion, are relevant areas for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Smooth manifold of one-dimensional lattices and shifted lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 196–231.

1. Введение

В предыдущей работе авторов [19] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

Приведём основные факты из этой работы.

Рассмотрим пространство PR_1 всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}, a_{11} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом (λ) , $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{11}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{11}|\lambda)$. Для любой одномерной решётки M её группа автоморфизмов конечна $\text{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток Λ является *открытой μ -окрестностью* решётки M , если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \quad (1)$$

для которых невырожденная матрица A удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \quad (2)$$

Заметим, что в одномерном случае $I = (1)$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = |a_{11}|$.³

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы $A = (a_{11})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{11} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом (λ) имеем

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} | (1 - \mu)\lambda < \lambda_1 < (1 + \mu)\lambda\}.$$

ЛЕММА 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu) - \lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1 + \mu) > \lambda_1(1 - \nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

ЛЕММА 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) | \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой μ -окрестностью решётки M при $M = M\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.*

Имеется следующее гомеоморфное отображение $\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$ при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$, а числу $\theta \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M)$.

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \quad (3)$$

Таким образом, на PR_1 задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где τ_1 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_1 всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

ЛЕММА 3. *Топология τ_1 инвариантна относительно любого линейного невырожденно-го преобразования A пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

³Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\| - A \| = \| A \|$, $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, $\| A \cdot B \| = \| A \| \cdot \| B \|$.

Как известно (см. [13], стр. 165), множество всех s -мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (4)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=B \cdot \Gamma} \|B - I\|.$$

Применительно к PR_1 имеем, если $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma = A \cdot \Lambda$, $A = (\gamma\lambda^{-1})$, $\Lambda = B \cdot \Gamma$, $B = (\gamma^{-1}\lambda)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \gamma$, тогда $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$, $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$ и $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta = \gamma\lambda^{-1}$, тогда $0 < \theta < 1$ и $2 - \theta < \theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda)$.

Теперь можно записать, как выглядит "симметричный отрезок" решёток длиной 2ρ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда h пробегает числовой отрезок $[-\rho; \rho]$, то $\Lambda(e^h\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Как известно, для любой решётки Λ её взаимная решётка Λ^* определяется из условия

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$.

ЛЕММА 4. Для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}). \quad (5)$$

Топологическое пространство PR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух решёток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ -окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток PR_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1$. Отсюда следует, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [20], стр. 13) пара (U, φ) , где $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ -окрестность, решётка $M = M(\lambda)$, а φ — гомеоморфное отображение U на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ называется системой координат, φ — координатным отображением. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ является картой открытой μ -окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$.

ЛЕММА 5. Для любых двух открытых пересекающихся μ -окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ ($\nu = 1, 2$) гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на интервалы $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$ для любого θ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \cap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2))$.

ЛЕММА 6. Гомеоморфное отображение $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1$ переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ в открытое множество

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} (\ln((1-\mu_x)\lambda_x); \ln((1+\mu_x)\lambda_x)). \quad (6)$$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{M} = PR_1$ следующим образом.

Пусть $M = M(\lambda) \in PR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ -окрестность, координатная функция φ для произвольной решетки $\Lambda = \lambda_1 \mathbb{Z} \in U$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1 \lambda^{-1})$. Так как $\varphi(M) = 0$, то решетка M является началом данной системы координат. Для любого $\theta \in (\ln(1 - \mu); \ln(1 + \mu))$ имеем: $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$. Касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке M будем обозначать через $\mathcal{M}_M$, оно имеет размерность один.

Касательный вектор $\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \in \mathcal{M}_M$ зададим равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \right) (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi(M)} \quad (7)$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности решетки $M \in \mathcal{M}$. Также будет использоваться обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \Big|_M = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \right) (f). \quad (8)$$

Целью данной работы является рассмотрение простейшего случая гладкого многообразия одномерных сдвинутых решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geq 1$. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Лемма о расстояниях до ближайшего целого

Как обычно, для любого действительного числа x расстояние до ближайшего целого обозначается через $\|x\|$. Эта величина выражается через дробную часть x по формуле

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\}).$$

Рассмотрим полуоткрытый интервал $J = [0, 1)$ и зададим на нём две различные метрики: $\rho(x, y) = |x - y|$, $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$. Для метрического пространства с метрикой $\rho(x, y)$ оставим обозначение J , а для метрического пространства с метрикой $\rho_1(x, y)$ будем использовать обозначение J_1 .

Для полноты изложения приведем необходимые факты относительно указанных метрик.

ЛЕММА 7. *Функция $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$ задает метрику на пространстве J_1 , относительно которого J_1 — полное метрическое пространство диаметра $d(J_1) = \frac{1}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, свойства $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$, $\rho_1(x, y) \geq 0$ и $\rho_1(x, y) = 0 \implies x = y$ очевидны.

Докажем неравенство треугольника: $\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y)$.

Первый вариант доказательства. Без ограничения общности, можно считать, что $0 \leq x < y < 1$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1) $0 \leq x < y \leq \frac{1}{2}$ тогда $\rho_1(x, y) = y - x$,

$$\rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) = \begin{cases} x - z + y - z \geq y - x, & \text{при } 0 \leq z \leq x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leq y, \\ z - x + z - y \geq y - x, & \text{при } y < z \leq x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + z - y = 1 + x - y > y - x, & \text{при } x + \frac{1}{2} \leq z \leq y + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + 1 + y - z > y - x, & \text{при } y + \frac{1}{2} \leq z < 1. \end{cases}$$

2) $0 \leq x \leq \frac{1}{2} < y \leq x + \frac{1}{2}$ тогда $\rho_1(x, y) = y - x$,

$$\rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) = \begin{cases} x - z + 1 - y + z \geq y - x, & \text{при } 0 \leq z \leq y - \frac{1}{2}, \\ x - z + y - z \geq y - x, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leq x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leq y, \\ z - x + z - y > y - x, & \text{при } y < z \leq x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + z - y > y - x, & \text{при } x + \frac{1}{2} < z < 1. \end{cases}$$

3) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} < y < 1$ тогда $\rho_1(x, y) = 1 + x - y$,

$$\rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) = \begin{cases} x - z + 1 - y + z = 1 + x - y, & \text{при } 0 \leq z \leq x, \\ z - x + 1 - y + z \geq 1 + x - y, & \text{при } x < z \leq y - \frac{1}{2}, \\ z - x + y - z = y - x > 1 + x - y, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leq x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + y - z > 1 + x - y, & \text{при } x + \frac{1}{2} < z \leq y, \\ 1 + x - z + z - y = 1 + x - y, & \text{при } y < z < 1. \end{cases}$$

4) $\frac{1}{2} \leq x < y < 1$ тогда $\rho_1(x, y) = y - x$,

$$\rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) = \begin{cases} 1 + z - x + 1 + z - y \geq y - x, & \text{при } 0 \leq z \leq x - \frac{1}{2}, \\ x - z + 1 - y + z \geq y - x, & \text{при } x - \frac{1}{2} < z \leq y - \frac{1}{2}, \\ x - z + y - z \geq y - x, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leq x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leq y, \\ z - x + z - y > y - x, & \text{при } y < z < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует неравенство треугольника.

Второй вариант доказательства. Отобразим полуинтервал $[0, 1]$ на окружность единичной длины: $x^2 + y^2 = (2\pi)^{-2}$ с помощью параметризации $x = \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}$, $y = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$, $0 \leq t < 1$. При такой параметризации при движении параметра от 0 до 1 точка по окружности движется против часовой стрелки. Обозначим через $l(t_1, t_2)$ длину дуги окружности между точками с параметрами t_1 и t_2 , соответственно. При этом точку с меньшим значением параметра будем называть правым концом, с большим — левым. Согласно известным формулам имеем:

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin(2\pi t))^2 + (\cos(2\pi t))^2} dt = t_2 - t_1 \quad (t_1 \leq t_2).$$

Так как длина окружности равна 1, то длина дополнительной дуги $l(t_2, t_1) = 1 - t_2 + t_1$.

Расстояние $\rho_1(t_1, t_2)$ индуцирует расстояние между точками на окружности и задается формулой $\rho_1(t_1, t_2) = \min(l(t_1, t_2), l(t_2, t_1))$.

Без ограничения общности будем считать, что длина дуги $l(t_1, t_2)$ меньше длины дуги $l(t_2, t_1)$. Если точка t между точками t_1 и t_2 , то $l(t_1, t_2) = l(t_1, t) + l(t, t_2)$, $\rho_1(t_1, t_2) = \rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2)$ и неравенство треугольника выполнено.

Если точка t задает точку окружности, лежащую на длинной дуге, то есть $0 \leq t < t_1$ либо $t_2 < t < 1$, то возможно два случая. Если и длина дуги $l(t_1, t)$, и длина дуги $l(t, t_2)$ обе меньше $\frac{1}{2}$, то $\rho_1(t_2, t_1) = \rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) = 1 - l(t_1, t_2) > \rho_1(t_1, t_2)$, и неравенство треугольника выполнено.

Пусть теперь длина дуги $l(t_1, t) < \frac{1}{2}$, а длина дуги $l(t, t_2) > \frac{1}{2}$, тогда

$$\rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) = l(t_1, t) + 1 - l(t, t_2) = 2l(t_1, t) + 1 - l(t_2, t_1) = 2l(t_1, t) + l(t_1, t_2)$$

и $\rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) \geq \rho_1(t_1, t_2)$, и неравенство треугольника доказано.

Для доказательства полноты метрического пространства J_1 достаточно показать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(u_n, 0) = 0$, но это очевидно, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$. $\square$

ЛЕММА 8. Метрики $\rho(x, y) = |x - y|$ и $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$ не эквивалентны на $[0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогда $\rho(0, u_n) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а $\rho_1(0, u_n) = \frac{1}{n}$ при $n > 1$ и $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым неэквивалентность метрик доказана. $\square$

Для дальнейшего нам потребуются леммы о множествах решений систем неравенств относительно расстояний точек на $[0, 1)$. Пусть $0 < \nu, \mu < 1$, $0 \leq x, z < 1$. Обозначим через $R(\nu, \mu, x, z)$ множество вещественных y с $0 \leq y < 1$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |x - y| < \frac{\nu}{2}, \\ |z - y| < \frac{\mu}{2}, \end{cases}, \quad (9)$$

через $R^*(\nu, \mu, x, z)$ множество вещественных y , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |x - y| < \frac{\nu}{2}, \\ |z - y| < \frac{\mu}{2}, \end{cases}, \quad (10)$$

и через $R_1(\nu, \mu, x, z)$ множество вещественных y с $0 \leq y < 1$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \|x - y\| < \frac{\nu}{2}, \\ \|z - y\| < \frac{\mu}{2}. \end{cases}. \quad (11)$$

Прежде чем переходить к решению задач о решении систем (9) и (11), опишем множества $R(\nu, x)$, $R^*(\nu, x)$ и $R_1(\nu, x)$, заданные условиями $R(\nu, x) = \{y | 0 \leq y < 1, |x - y| < \frac{\nu}{2}\}$, $R^*(\nu, x) = \{y | |x - y| < \frac{\nu}{2}\}$, $R_1(\nu, x) = \{y | 0 \leq y < 1, \|x - y\| < \frac{\nu}{2}\}$. Легко видеть, что всегда $R^*(\nu, x) = (x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2})$.

Заметим, что при $\nu > 1$ имеем равенство $R_1(\nu, x) = J$ и

$$R_1(1, x) = \begin{cases} [0, x + \frac{1}{2}) \cup (x - \frac{1}{2}, 1), & \text{при } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ [0, x - \frac{1}{2}) \cup (x - \frac{1}{2}, 1), & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1, \\ (0, 1), & \text{при } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Будем через $l(R)$ обозначать длину множества R , составленного из нескольких промежутков.

ЛЕММА 9. Справедливы равенства

$$R(\nu, x) = \begin{cases} [0, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } 0 \leq x < \frac{\nu}{2}, \\ (x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{\nu}{2} \leq x \leq 1 - \frac{\nu}{2}, \\ (x - \frac{\nu}{2}, 1), & \text{при } 1 - \frac{\nu}{2} \leq x < 1, \end{cases} \quad l(R(\nu, x)) = \begin{cases} x + \frac{\nu}{2}, & \text{при } 0 \leq x < \frac{\nu}{2}, \\ \nu, & \text{при } \frac{\nu}{2} \leq x \leq 1 - \frac{\nu}{2}, \\ 1 - x + \frac{\nu}{2}, & \text{при } 1 - \frac{\nu}{2} \leq x < 1. \end{cases} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим сначала случай $0 \leq x < \frac{\nu}{2}$. Имеем:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y < \frac{\nu}{2}, & \text{при } 0 \leq y \leq x, \\ y - x < \frac{\nu}{2}, & \text{при } x < y < x + \frac{\nu}{2}, \\ y - x \geq \frac{\nu}{2}, & \text{при } x + \frac{\nu}{2} \leq y < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует первое равенство из (12).

Теперь перейдём к случаю $\frac{\nu}{2} \leq x \leq 1 - \frac{\nu}{2}$. Получим:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y \geq \frac{\nu}{2}, & \text{при } 0 \leq y \leq x - \frac{\nu}{2}, \\ x - y < \frac{\nu}{2}, & \text{при } x - \frac{\nu}{2} < y \leq x, \\ y - x < \frac{\nu}{2}, & \text{при } x < y < x + \frac{\nu}{2}, \\ y - x \geq \frac{\nu}{2}, & \text{при } x + \frac{\nu}{2} \leq y < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует второе равенство из (12).

Наконец, рассмотрим случай $1 - \frac{\nu}{2} \leq x < 1$. Получим:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y \geq \frac{\nu}{2}, & \text{при } 0 \leq y \leq x - \frac{\nu}{2}, \\ x - y < \frac{\nu}{2}, & \text{при } x - \frac{\nu}{2} < y \leq x, \\ y - x < \frac{\nu}{2}, & \text{при } x < y < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует третье равенство из (12).

Соотношения для длины множества $R(\nu, x)$ очевидны. $\square$

ЛЕММА 10. *Справедливы равенства*

$$R_1(\nu, x) = \begin{cases} [0, x + \frac{\nu}{2}) \cup (1 + x - \frac{\nu}{2}, 1), & \text{при } 0 \leq x < \frac{\nu}{2}, \\ (x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{\nu}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{\nu}{2}, \\ [0, x + \frac{\nu}{2} - 1) \cup (x - \frac{\nu}{2}, 1), & \text{при } 1 - \frac{\nu}{2} < x < 1, \end{cases} \quad l(R_1(\nu, x)) = \nu. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим сначала случай $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Имеем:

$$\|x - y\| = \begin{cases} x - y, & \text{при } 0 \leq y \leq x, \\ y - x, & \text{при } x < y \leq x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - y, & \text{при } x + \frac{1}{2} < y < 1. \end{cases}$$

Отсюда следуют первые два равенства из (13).

Теперь перейдём к случаю $\frac{1}{2} < x < 1$. Получим:

$$\|x - y\| = \begin{cases} 1 - x + y, & \text{при } 0 \leq y \leq x - \frac{1}{2}, \\ x - y, & \text{при } x - \frac{1}{2} < y \leq x, \\ y - x, & \text{при } x < y < 1. \end{cases}$$

Отсюда следуют последние два равенства из (13).

Соотношение для длины множества $R_1(\nu, x)$ очевидно. $\square$

Будем через $\text{arc}(t_1, t_2)$ обозначать дугу окружности $x^2 + y^2 = (2\pi)^{-2}$ от точки с параметром t_1 до точки с параметром t_2 . Если $f(t) = \left(\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}, \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right)$, то для образа множества $R_1(\nu, x)$ всегда имеем дугу длины ν с центром в точке $f(x)$:

$$f(R_1(\nu, x)) = \begin{cases} \text{arc}(1 + x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } 0 \leq x < \frac{\nu}{2}, \\ \text{arc}(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{\nu}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \text{arc}(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{\nu}{2}, \\ \text{arc}(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2} - 1), & \text{при } 1 - \frac{\nu}{2} < x < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим движение по окружности m_x , которое точке с параметром t ставит в соответствие точку с параметрами $\{t - x\}$. В результате этого движения все дуги из (14) перейдут в дугу $\text{arc}(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ длины ν с центром в точке $f(0)$. Через M^* будем обозначать множество движений по окружности m_x и соответствующее преобразование полуинтервала J в себя.

Кроме этого, рассмотрим движение m^- , которое точке с параметром t ставит в соответствие точку с параметром $\{-t\}$. В результате этого движения дуга $\text{arc}(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ переходит в себя, но меняется направление движения по дуге.

При $0 < x < \frac{\nu}{2}$ дуга $\text{arc}(1 + x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}) = f(R_1(\nu, x))$ с центром в точке $f(x)$ переходит в дугу $\text{arc}(1 - x - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} - x) = f(R_1(\nu, 1 - x))$ той же длины, но с центром в точке $f(1 - x)$.

При $\frac{\nu}{2} < x < 1 - \frac{\nu}{2}$ дуга $\text{arc}(1 - x - \frac{\nu}{2}, 1 - x + \frac{\nu}{2}) = f(R_1(\nu, 1 - x))$ с центром в точке $f(1 - x)$ переходит в дугу $\text{arc}(x - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + x) = f(R_1(\nu, x))$ той же длины, но с центром в точке $f(x)$.

При $1 - \frac{\nu}{2} < x < 1$ дуга $\text{arc}(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2} - 1) = f(R_1(\nu, x))$ с центром в точке $f(x)$ переходит в дугу $\text{arc}(2 - x - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2} - x) = f(R_1(\nu, 1 - x))$ той же длины, но с центром в точке $f(1 - x)$.

ЛЕММА 11. Множество движений M^* образует коммутативную группу, сохраняющую метрику $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$ на пространстве J_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\rho_1(m_t(x), m_t(y)) = \|\{x - t\} - \{y - t\}\| = \|x - y\| = \rho_1(x, y)$ и, следовательно, m_t — движение.

Очевидно, что нейтральный элемент $e = m_0$, $m_t \circ m_u = m_{\{t+u\}}$, $m_t \circ m_{\{1-t\}} = m_0$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 12. Для образов множества $R_1(\nu, x)$ справедливы равенства.

$$m_t(R_1(\nu, x)) = \begin{cases} R_1(\nu, x - t), & \text{при } 0 \leq t \leq x, \\ R_1(\nu, 1 + x - t), & \text{при } x < t < 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$m^-(R_1(\nu, x)) = \begin{cases} R_1(\nu, 0), & \text{при } x = 0, \\ R_1(\nu, 1 - x), & \text{при } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $0 \leq y < 1$, $z = \{y - t\}$, то $y = \{z + t\}$ и

$$m_t(R_1(\nu, x)) = \left\{ z = \{y - t\} \mid \|y - x\| < \frac{\nu}{2} \right\} = \left\{ z \mid \|z - \{x - t\}\| < \frac{\nu}{2} \right\} = R_1(\nu, \{x - t\}).$$

Так как

$$\{x - t\} = \begin{cases} x - t, & \text{при } 0 \leq t \leq x, \\ 1 + x - t, & \text{при } x < t < 1, \end{cases}$$

то равенство (15) доказано.

Далее имеем:

$$m^-(R_1(\nu, x)) = \left\{ z = \{-y\} \mid \|y - x\| < \frac{\nu}{2} \right\} = \left\{ z \mid \|z - \{-x\}\| < \frac{\nu}{2} \right\} = R_1(\nu, \{-x\}).$$

Так как

$$\{-x\} = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x < 1, \end{cases}$$

то равенство (16) доказано и утверждение леммы установлено полностью. $\square$

Заметим, что группа преобразований M^* не является группой движений на пространстве J . Действительно, пусть $0 < x < 1$, тогда $m_x(x) = 0$, $m_x(0) = 1 - x$ и при $x \neq \frac{1}{2}$ $\rho(0, x) = |0 - x| = x \neq 1 - x = \rho(m_x(0), m_x(x))$. Таким образом, для любого преобразования m_x ($x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$) найдётся пара точек, для которой расстояние между ними и расстояние между образами не равны.

Заметим, что из лемм 9 и 10 следует, что всегда $R(\nu, x) \subset R_1(\nu, x)$.

ЛЕММА 13. Справедливы соотношения

$$R(\nu, \mu, x, z) \begin{cases} = \emptyset & \text{при } |x - z| \geq \frac{\nu + \mu}{2}, \\ \supset R\left(\min(\nu, \mu) \left(\frac{1}{2} - \left|\frac{x - z}{\mu + \nu}\right|\right), \frac{\mu x + \nu z}{\mu + \nu}\right) & \text{при } |x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $R(\nu, \mu, x, z) = R(\nu, x) \cap R(\mu, z)$. Пусть $y \in R(\nu, \mu, x, z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $|x - z| \geq \frac{\nu + \mu}{2}$, то $R(\nu, \mu, x, z) = \emptyset$ и первое равенство в (17) доказано.

Пусть теперь $|x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}$. Положим $w = \frac{\mu x + \nu z}{\mu + \nu}$, тогда

$$|x - w| = \left| \frac{\nu(x - z)}{\mu + \nu} \right| < \frac{\nu}{2}, \quad |z - w| = \left| \frac{\mu(x - z)}{\mu + \nu} \right| < \frac{\mu}{2}.$$

Следовательно, $R(\nu, \mu, x, z) \neq \emptyset$ и $w \in R(\nu, \mu, x, z)$. Далее имеем:

$$|x - y| \leq |x - w| + |y - w| = \left| \frac{\nu(x - z)}{\mu + \nu} \right| + |y - w|, \quad |z - y| \leq |z - w| + |w - y| = \left| \frac{\mu(x - z)}{\mu + \nu} \right| + |y - w|.$$

Поэтому, если $|y - w| < \min(\nu, \mu) \left(\frac{1}{2} - \left| \frac{x - z}{\mu + \nu} \right| \right)$, то $y \in R(\nu, \mu, x, z)$ и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 14. *Справедливы соотношения*

$$R^*(\nu, \mu, x, z) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } |x - z| \geq \frac{\nu + \mu}{2}, \\ R^*(\lambda, y) & \text{при } |x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}, \end{cases} \quad (18)$$

где $\lambda = \min\left(\nu, \mu, \frac{\nu + \mu}{2} - |x - z|\right)$, $y = \frac{\max(x - \frac{\nu}{2}, z - \frac{\mu}{2}) + \min(x + \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2})}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $R^*(\nu, \mu, x, z) = R^*(\nu, x) \cap R^*(\mu, z)$.

Пусть $y \in R^*(\nu, \mu, x, z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $|x - z| \geq \frac{\nu + \mu}{2}$, то $R^*(\nu, \mu, x, z) = \emptyset$ и первое равенство в (17) доказано.

Пусть теперь $|x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}$. Нетрудно видеть, что

$$R^*(\nu, \mu, x, z) = \left(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}\right) \cap \left(z - \frac{\mu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right) = \left(\max\left(x - \frac{\nu}{2}, z - \frac{\mu}{2}\right), \min\left(x + \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & R^*(\nu, \mu, x, z) = \\ & = R^*\left(\min\left(x + \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right) - \max\left(x - \frac{\nu}{2}, z - \frac{\mu}{2}\right), \frac{\max\left(x - \frac{\nu}{2}, z - \frac{\mu}{2}\right) + \min\left(x + \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right)}{2}\right) = \\ & = R^*\left(\min\left(\nu, \mu, \frac{\nu + \mu}{2} - |x - z|\right), \frac{\max\left(x - \frac{\nu}{2}, z - \frac{\mu}{2}\right) + \min\left(x + \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right)}{2}\right) = R^*(\lambda, y) \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

Покажем, что все значения для λ и y из доказанной леммы достижимы. Рассмотрим для этого четыре возможных случая.

Пусть $(x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2}) \subset (z - \frac{\mu}{2}, z + \frac{\mu}{2})$, тогда $\nu \leq \mu$ и $|x - z| < \frac{\mu - \nu}{2}$. В этом случае получаем $\lambda = \nu$, $y = x$.

Аналогично, если $(z - \frac{\mu}{2}, z + \frac{\mu}{2}) \subset (x - \frac{\nu}{2}, x + \frac{\nu}{2})$, то $\mu \leq \nu$, $|x - z| < \frac{\nu - \mu}{2}$ и $\lambda = \mu$, $y = z$.

Пусть теперь $R^*(\nu, \mu, x, z) = (x - \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2})$, тогда $\frac{|\nu - \mu|}{2} \leq |x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}$ и $\lambda = \frac{\nu + \mu}{2} - |x - z|$, $y = \frac{2(x+z) + \mu - \nu}{4}$.

Наконец, если $R^*(\nu, \mu, x, z) = (z - \frac{\mu}{2}, x + \frac{\nu}{2})$, тогда $\frac{|\nu - \mu|}{2} \leq |x - z| < \frac{\nu + \mu}{2}$ и $\lambda = \frac{\nu + \mu}{2} - |x - z|$, $y = \frac{2(x+z) + \nu - \mu}{4}$.

ЛЕММА 15. *Справедливы соотношения*

$$m_x(R_1(\nu, \mu, x, z)) = R_1(\nu, \mu, 0, \{z - x\}), \quad (19)$$

$$m^-(R_1(\nu, \mu, 0, z)) = R_1(\nu, \mu, 0, \{-z\}). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 12. $\square$

ЛЕММА 16. *Справедливы соотношения*

$$R_1(\nu, \mu, x, z) = \emptyset \quad \text{при } \|x - z\| \geq \frac{\nu + \mu}{2}, \quad (21)$$

а при $\|x - z\| < \frac{\nu + \mu}{2}$ множество $R_1(\nu, \mu, x, z)$ является открытой окрестностью вида $R_1(\lambda, y)$, либо объединением двух окрестностей такого вида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $R_1(\nu, \mu, x, z) = R_1(\nu, x) \cap R_1(\mu, z)$. Пусть $y \in R_1(\nu, \mu, x, z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $\|x - z\| \geq \frac{\nu + \mu}{2}$, то $R_1(\nu, \mu, x, z) = \emptyset$ и равенство (21) доказано.

Согласно лемме 15 без ограничения общности можно считать $\nu \leq \mu$, $x = 0$, $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\|z\| < \frac{\nu + \mu}{2}$. Рассмотрим дуги, которые являются образами открытых окрестностей $R_1(\nu, 0)$ и $R_1(\mu, z)$ точек 0 и z , соответственно, $f(R_1(\nu, 0)) = \text{arc}(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$,

$$f(R_1(\mu, z)) = \begin{cases} \text{arc}(1 + z - \frac{\mu}{2}, z + \frac{\mu}{2}), & \text{при } 0 \leq z < \frac{\mu}{2}, \\ \text{arc}(z - \frac{\mu}{2}, z + \frac{\mu}{2}), & \text{при } \frac{\mu}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что правая точка дуги $f(R_1(\mu, z))$ всегда лежит правее левой точки дуги $f(R_1(\nu, 0))$. Действительно, если $0 \leq z < \frac{\mu}{2}$, то $1 + z - \frac{\mu}{2} < 1$ и образ правой точки дуги $f(R_1(\mu, z))$ лежит правее образа $f(0)$, который правее образа $f(\frac{\nu}{2})$. Если $\frac{\mu}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$, то в силу условия $z - \frac{\mu}{2} < \frac{\nu}{2}$, правая точка $f(z - \frac{\mu}{2})$ правее точки $f(\frac{\nu}{2})$ и соотношение между точками дуг установлено.

Теперь установим соотношение между точками $f(1 + z - \frac{\mu}{2})$ и $f(1 - \frac{\nu}{2})$ при $0 \leq z < \frac{\mu}{2}$.

Точка $f(1 + z - \frac{\mu}{2})$ будет правее точки $f(1 - \frac{\nu}{2})$ при $z < \frac{\mu - \nu}{2}$, и левее при $z \geq \frac{\mu - \nu}{2}$. Поэтому при $z < \frac{\mu - \nu}{2}$ будем иметь $R_1(\nu, 0) \subset R_1(\mu, z)$, а при $\frac{\mu}{2} > z \geq \frac{\mu - \nu}{2}$ выполняется равенство

$$R_1(\nu, \mu, 0, z) = \left(1 + z - \frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = R_1\left(\frac{\nu + \mu}{2} - z, \frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{\mu - \nu}{4}\right).$$

Перейдём к рассмотрению случая $z \geq \frac{\mu}{2}$. Точка $f(z + \frac{\mu}{2})$ будет правее точки $f(1 - \frac{\nu}{2})$ при $z < 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$, и левее при $z \geq 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$. Поэтому при $z < 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$ будем иметь $(z, z + \frac{\mu}{2}) \cap (1 - \frac{\nu}{2}, 1) = \emptyset$, а при $z \geq 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$ выполняется равенство

$$(z, z + \frac{\mu}{2}) \cap (1 - \frac{\nu}{2}, 1) = \left(1 - \frac{\nu}{2}, z + \frac{\mu}{2}\right) = R_1\left(z + \frac{\mu + \nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu - \nu}{4}\right).$$

Так как $z \leq \frac{1}{2}$, то необходимо различать случай $\nu + \mu < 1$, в этом случае $1 - \frac{\mu + \nu}{2} > \frac{1}{2}$, и случай $\nu + \mu \geq 1$, когда $1 - \frac{\mu + \nu}{2} \leq \frac{1}{2}$. Заметим, что при $1 - \nu \leq \mu \leq 1 - \frac{\nu}{2}$ выполняется неравенство $\frac{\mu}{2} \leq 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$, а при $1 - \frac{\nu}{2} < \mu < 1$ получаем неравенство $\frac{\mu}{2} > 1 - \frac{\mu + \nu}{2}$.

Из предыдущего следует, что возможны только восемь случаев:

1. $0 \leq z < \frac{\mu - \nu}{2}$, $0 \leq \nu \leq \mu < 1$, тогда $R_1(\nu, 0) \subset R_1(\mu, z)$, $R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1(\nu, 0)$;
2. $\frac{\mu - \nu}{2} \leq z < \frac{\mu}{2}$, $\nu \leq \mu < 1 - \nu$, тогда $R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu + \mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu - \nu}{4}\right)$;

3. $\frac{\mu}{2} \leq z < \frac{\nu+\mu}{2}$, $\nu \leq \mu < 1 - \nu$, тогда $R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;
4. $\frac{\mu-\nu}{2} \leq z < \frac{\mu}{2}$, $1 - \nu \leq \mu \leq 1 - \frac{\nu}{2}$, тогда $R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;
5. $\frac{\mu}{2} \leq z < 1 - \frac{\mu+\nu}{2}$, $1 - \nu \leq \mu \leq 1 - \frac{\nu}{2}$, тогда $R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;
6. $1 - \frac{\mu+\nu}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$, $1 - \nu \leq \mu \leq 1 - \frac{\nu}{2}$, тогда

$$R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \cup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right);$$

7. $1 - \frac{\mu+\nu}{2} \leq z \leq \frac{\mu}{2}$, $1 - \frac{\nu}{2} < \mu < 1$, тогда

$$R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \cup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right);$$

8. $\frac{\mu}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$, $1 - \frac{\nu}{2} < \mu < 1$, тогда

$$R_1(\nu, \mu, 0, z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \cup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right).$$

Из перечисленных равенств следует утверждение леммы. $\square$

3. Метрики на пространстве сдвинутых решёток

Обозначим через CPR_s множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_s$ — произвольная s -мерная вещественная решётка и $\vec{x} \in R^s$ — произвольный вектор.

Мы далее будем рассматривать только случай $s = 1$, что позволит существенно упростить многие доказательства и сделать изложение более наглядным.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda + (x + y) = \Lambda + x$ для любого $y \in \Lambda$.

ЛЕММА 17. Если

$$\Lambda_1 + x_1 = \Lambda_2 + x_2, \quad (22)$$

то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $x_1 - x_2 \in \Lambda_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (22) вытекает $\Lambda_1 + x_1 - x_2 = \Lambda_2$. Так как $0 \in \Lambda_1$ и $0 \in \Lambda_2$, то $x_1 - x_2 \in \Lambda_2$, $x_2 - x_1 \in \Lambda_1$. Но последнее означает, что $\Lambda_1 + x_1 - x_2 = \Lambda_1$. Следовательно, $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $x_1 - x_2 \in \Lambda_1$. Что и требовалось доказать. $\square$

Доказанная лемма наводит на мысль дать следующее определение канонического представления сдвинутой решётки $\Lambda + x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ её каноническим представлением называется пара $\varphi(\Lambda + x) = (\ln \lambda, \{\frac{x}{\lambda}\})$.

Обозначим через $Cy_\infty = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta_2 < 1\}$ — бесконечный цилиндр (здесь нижняя и верхняя границы бесконечной горизонтальной полосы склеиваются). Таким образом, $Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ определена единственная сдвинутая решётка

$$\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим каноническим представлением.

Другой естественной интерпретацией бесконечного цилиндра Cy_∞ является его представление как декартового произведения: $Cy_\infty = \mathbb{R} \times J_1$ (см. 201).

Нетрудно видеть, что бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфен другому бесконечному открытому цилиндру $C_\infty^+ = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 > 0, 0 \leq \theta_2 < 1\}$. Гомеоморфизм $\psi : Cy_\infty \rightarrow C_\infty^+$ задается равенством $\psi(\theta_1, \theta_2) = (e^{\theta_1}, \theta_2)$, $\psi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\ln \theta_1, \theta_2)$.

Наряду с цилиндром Cy_∞ рассмотрим сдвинутый цилиндр

$$C_\infty^* = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \left| \theta_1 \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq \theta_2 < \frac{1}{2} \right. \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ её абсолютно наименьшим каноническим представлением называется пара

$$\varphi^*(\Lambda + x) = (\ln \lambda, \theta), \quad \text{где} \quad \theta = \begin{cases} \left\{ \frac{x}{\lambda} \right\}, & \text{при } 0 \leq \left\{ \frac{x}{\lambda} \right\} < \frac{1}{2}, \\ \left\{ \frac{x}{\lambda} \right\} - 1, & \text{при } \frac{1}{2} \leq \left\{ \frac{x}{\lambda} \right\} < 1. \end{cases}$$

Таким образом, $C_\infty^* = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in C_\infty^*$ определена единственная сдвинутая решётка

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим абсолютно наименьшим каноническим представлением.

Мы видим, что функции φ^{-1} и $(\varphi^*)^{-1}$ отличаются только областью определения и для них выполнено соотношение

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) & \text{при } 0 \leq \theta_2 < \frac{1}{2}, \\ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2 + 1), & \text{при } -\frac{1}{2} \leq \theta_2 < 0. \end{cases}$$

С помощью обыкновенного сдвига на $\mathbb{R}$ и движения m_x на J_1 (см. 204) определим представление произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leq y < 1$ с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leq y < 1$ её представлением с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$ называется пара $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln \lambda - \ln a, \{y - x\})$.

Нетрудно видеть, что эти два представления связаны равенством

$$\varphi(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1, \theta_2), \quad \varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1^*, \theta_2^*), \quad \theta_1^* = \theta_1 - \ln a, \quad \theta_2^* = \{\theta_2 - x\}. \quad (23)$$

Для задания структуры метрического пространства на множестве CPR_1 определим для произвольного $a \neq 0$ вложение $\varphi_a : CPR_1 \rightarrow PR_2$ следующим образом.

Пусть $\Lambda \in PR_1$, $\vec{\lambda} = (\lambda)$ — её базис и $\vec{x} = (x) \in R^1$ — произвольный вектор. Решётку $\varphi_a(\Lambda + x)$ зададим базисом $\vec{\lambda}'_j$ ($j = 1, 2$), где $\vec{\lambda}'_1 = (\lambda, 0)$, $\vec{\lambda}'_2 = (x, a)$.

ЛЕММА 18. Решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}$ или замены вектора x на $x + y$, где $y \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma)$ — другой базис решётки Λ и вектор $(y) = n \cdot \vec{\lambda} \in \Lambda$, где n — произвольное целое число, (y) — произвольный вектор из Λ . Тогда по свойству базисов для унимодулярной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}$, $\det A = -1$ выполняется $\begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \end{pmatrix}$. Но тогда для целочисленной унимодулярной матрицы B

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ x+y & a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базисы $\vec{\lambda}'_1, \vec{\lambda}'_2$ и $\vec{\gamma}'_1, \vec{\gamma}'_2$ задают одну и ту же решётку и лемма полностью доказана. $\square$

Теперь для любого $a \neq 0$ на пространстве CPR_1 можно задать метрику $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ с помощью вложения φ_a и метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на пространстве PR_2 равенством

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \rho(\varphi_a(\Lambda + x), \varphi_a(\Gamma + y)). \quad (24)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функция $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ задает метрику на пространстве CPR_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность функции $\rho_a(\cdot, \cdot)$ и неравенство треугольника следуют из свойств метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на PR_2 . Таким образом, требуется доказать, что $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda + x = \Gamma + y$. Для этого достаточно доказать, что из $\varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(\Gamma + y)$ вытекает $\Lambda + x = \Gamma + y$.

Пусть $\vec{\lambda} = (\lambda)$ — базис решётки Λ и $\vec{\gamma} = (\gamma)$ — базис решётки Γ . Тогда из свойств базисов решётки и равенства $\varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(\Gamma + y)$ вытекает, что найдется целочисленная унимодулярная матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ y & a \end{pmatrix}.$$

Из этого матричного равенства, рассматривая соотношение для последнего столбца матрицы произведения, в силу $a \neq 0$, получим

$$c_{12} = 0, \quad c_{22} = 1.$$

Но отсюда вытекает, что целочисленная матрица $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ является унимодулярной, то есть $c_{11} = \pm 1$, и для нее выполнены соотношения $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ y \end{pmatrix}$. Следовательно, $\Lambda = \Gamma$, $y = x + c_{21} \cdot \lambda$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

После введения метрики на пространстве сдвинутых решёток сразу возникает вопрос о вычислении расстояния между двумя сдвигами одной и той же решётки. Второй естественный вопрос: как согласована метрика в пространстве сдвинутых решёток с уже имеющейся метрикой на подпространстве решёток. Перейдем к решению этих вопросов.

ЛЕММА 19. *Если решётка $\Lambda \in PR_1$ задана одномерной невырожденной матрицей $A = (a_1) : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, то решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Lambda + y)$ линейным преобразованием с матрицей*

$$B(x, y, k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y-x+ka_1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любого целого $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению решётки $\varphi_a(\Lambda + x)$ она задается произвольной двумерной невырожденной матрицей $A(x, k)$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_a(\Lambda + x) = A(x, k) \cdot \mathbb{Z}^2, \quad A(x, k) = \begin{pmatrix} a_1 & x + ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & x + ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(m + kn) + xn \\ an \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} B(x, y, k) \cdot A(x, l) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{y-x+ka_1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x + la_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & x + y - x + a_1(k + l) \\ 0 & a \end{pmatrix} = A(y, k + l) \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой решётки $\Lambda \in PR_1$, заданной одномерной невырожденной матрицей $A = (a_1)$, $a_1 > 0$: $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, для расстояния между её сдвигами справедливо равенство

$$\rho_a(\Lambda + x, \Lambda + y) = \ln \left(1 + 2 \frac{a_1}{a} \left\| \frac{x - y}{a_1} \right\| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4) и (24) необходимо найти

$$\mu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+x)=B_1 \cdot \varphi_a(\Lambda+y)} \|B_1 - I\|, \quad \nu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+y)=B_2 \cdot \varphi_a(\Lambda+x)} \|B_2 - I\|.$$

Так как, согласно лемме 19 $B_1 = B(x, y, k)$ и $B_2 = B(y, x, k)$, то $\mu = \nu = 2 \frac{a_1}{a} \left\| \frac{x-y}{a_1} \right\|$ и следствие полностью доказано. $\square$

Лемма 19 допускает простое обобщение.

ЛЕММА 20. Если решётки Λ и $\Gamma \in PR_1$ заданы одномерными невырожденными матрицами $A = (a_1)$ и $B = (b)$, соответственно:

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z},$$

то решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma + y)$ линейным преобразованием с матрицей

$$C(A, B, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любых целых $k, l \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению решёток $\varphi_a(\Lambda + x)$ и $\varphi_a(\Gamma + y)$ они задаются двумерными невырожденными матрицами $A(x, k)$ и $B(y, l)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi_a(\Lambda + x) &= A(x, k) \cdot \mathbb{Z}^2, \quad \varphi_a(\Gamma + y) = B(y, l) \cdot \mathbb{Z}^2, \\ A(x, k) &= \begin{pmatrix} a_1 & x + ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B(y, l) = \begin{pmatrix} b & y + lb \\ 0 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} C(A, B, x, y, k, l) \cdot A(x, k) &= \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x + ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b & y + lb \\ 0 & a \end{pmatrix} = B(y, l), \end{aligned}$$

и, значит, лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 21. Если решётки Λ и $\Gamma \in PR_1$ заданы одномерными невырожденными матрицами $A = (a_1)$ и $B = (b)$, соответственно:

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$$

и решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma + y)$ линейным преобразованием с матрицей C , то справедливо равенство

$$C = C(A, B, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $C \cdot A(x, k) = B(y, l)$ и

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix},$$

то

$$C = B(y, l) \cdot A(x, k)^{-1} = \begin{pmatrix} b & y + lb \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{x+ka_1}{a \cdot a_1} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых одномерных решёток Λ и $\Gamma \in PR_1$, заданных одномерными невырожденными матрицами $A = (a_1)$ и $B = (b)$, соответственно: $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, $\Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$, для расстояния между их сдвигами справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \\ = \ln \left(1 + 2 \max \left(\max \left(|ba_1^{-1} - 1|, \frac{b}{a} \left\| \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b} \right\| \right), \max \left(|a_1b^{-1} - 1|, \frac{a_1}{a} \left\| \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b} \right\| \right) \right) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4) и (24) необходимо найти

$$\mu = \inf_{\varphi_a(\Gamma+y)=B_1 \cdot \varphi_a(\Lambda+x)} \|B_1 - I\|, \quad \nu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+x)=B_2 \cdot \varphi_a(\Gamma+y)} \|B_2 - I\|.$$

Так как, согласно леммам 20 и 21 $B_1 = C(A, B, x, y, k, l)$ и $B_2 = C(B, A, y, x, l, k)$, то $\mu = 2 \max \left(|ba_1^{-1} - 1|, \frac{b}{a} \left\| \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b} \right\| \right)$, $\nu = 2 \max \left(|a_1b^{-1} - 1|, \frac{a_1}{a} \left\| \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b} \right\| \right)$ и следствие полностью доказано. $\square$

Нетрудно видеть, что формулу для расстояния можно переписать в более компактном виде:

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln \left(1 + 2 \max \left(\frac{|b - a_1|}{\min(b, a_1)}, \frac{\max(b, a_1)}{a} \left\| \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b} \right\| \right) \right).$$

Так как пространство одномерных сдвинутых решёток CPR_1 и бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфны, то задание метрики на CPR_1 индуцирует метрику на Cy_∞ . Согласно лемме 19 для двух сдвигов решётки Λ , заданных каноническими представлениями $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_3) \in Cy_\infty$ матрицы $B_1(\varepsilon)$ и $B_2(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{Z}$:

$$B_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1(\theta_3-\theta_2+\varepsilon)}}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1(\theta_2-\theta_3+\varepsilon)}}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразуют решётки

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2)), \quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \varphi_a(\Lambda + y) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_3)),$$

друг в друга:

$$B_1(\varepsilon) \cdot \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)), \quad B_2(\varepsilon) \cdot \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)).$$

Действительно, для решёток имеем:

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^2, \quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^2,$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_3 - \theta_2 + \varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_3 + \varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_2 - \theta_3 + \varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_2 + \varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\rho_a((\theta_1, \theta_2), (\theta_3, \theta_4)) = \ln \left(1 + 2 \max \left(\frac{|e^{\theta_3} - e^{\theta_1}|}{\min(e^{\theta_3}, e^{\theta_1})}, \frac{\max(e^{\theta_3}, e^{\theta_1})}{a} \|\theta_2 - \theta_4\| \right) \right)$$

В случае PR_1 для $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$ метрика задается простой формулой $\rho(\Lambda, \Gamma) = |\ln(\gamma^{-1}\lambda)|$.

Из следствия 2 следует, что $\rho_a(\Lambda, \Gamma) = \ln \left(1 + 2 \frac{|\gamma - \lambda|}{\min(\gamma, \lambda)} \right)$.

Без ограничения общности предположим, что $\gamma = t\lambda$, $t \geq 1$. Тогда $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln t$, $\rho_a(\Lambda, \Gamma) = \ln(2t - 1)$. Нетрудно видеть, что функция $\frac{\ln(2t-1)}{\ln t}$ монотонно убывает при $t > 1$ и выполняются неравенства $2 \geq \frac{\ln(2t-1)}{\ln t} > 1$. Отсюда следует, что метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$ и $\rho_a(\Lambda, \Gamma)$ — эквивалентны на пространстве одномерных решёток.

Аналогично, рассмотрим вопрос об эквивалентности различных метрик $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ и $\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$. Положим $b = ta_1$, $x = \theta_1 a_1$, $y = \theta_2 b$ и без ограничения общности будем считать, что $t \geq 1$. Тогда

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln \left(1 + 2 \max \left(t - 1, \frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\| \right) \right),$$

$$\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln(1 + 2 \max(t - 1, ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|)).$$

В зависимости от величины a имеем соотношения:

при $0 < a < 1$

$$\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y) \leq \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y),$$

при $a > 1$

$$\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y) \geq \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y).$$

ЛЕММА 22. Для любого $a > 0$ метрика $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ эквивалентна метрике $\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\|\theta_1 - \theta_2\| = 0$ величины расстояний совпадают и в этом случае утверждение леммы выполнено.

Пусть теперь $\|\theta_1 - \theta_2\| > 0$, тогда оба расстояния отличны от нуля.

Рассмотрим сначала случай $0 < a < 1$.

Если $a_1 \|\theta_1 - \theta_2\| \geq 1$, то

$$\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln(1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|), \quad \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln \left(1 + 2 \frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\| \right)$$

и

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln(1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|) + \ln\left(\frac{1 + 2\frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|}{1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|}\right).$$

Так как функция

$$\frac{1 + 2\frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|}{1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|} = \frac{1}{a} - \frac{1 - a}{a(1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|)}$$

монотонно возрастает при возрастании t , то её наибольшее значение не превосходит величины $\frac{1}{a}$. Отсюда следует, что найдутся положительные константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, такие, что

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) \leq c_1 \rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y), \quad \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) \geq c_2 \rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$$

и утверждение леммы при $a_1 \|\theta_1 - \theta_2\| \geq 1$ установлено.

Если $a_1 \|\theta_1 - \theta_2\| < 1$, то

$$\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y) = \begin{cases} \ln(1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|), & \text{при } 1 \leq t \leq \frac{1}{1 - a_1 \|\theta_1 - \theta_2\|}, \\ \ln(2t - 1), & \text{при } t > \frac{1}{1 - a_1 \|\theta_1 - \theta_2\|}. \end{cases}$$

Аналогично, имеем:

$$\begin{aligned} &\text{если } \frac{a_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\| \geq 1, \text{ то } \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln\left(1 + 2\frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|\right); \\ &\text{если } \frac{a_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\| < 1, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \begin{cases} \ln\left(1 + 2t\frac{a_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|\right), & \text{при } 1 \leq t \leq \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|}, \\ \ln(2t - 1), & \text{при } t > \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|}. \end{cases}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что найдутся положительные константы $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, такие, что

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) \leq c_3 \rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y), \quad \rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) \geq c_4 \rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$$

и утверждение леммы при $a_1 \|\theta_1 - \theta_2\| < 1$ установлено.

Теперь перейдём к случаю $a > 1$. Этот случай рассматривается аналогично, но с учетом, что функция

$$\frac{1 + 2\frac{ta_1}{a} \|\theta_1 - \theta_2\|}{1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|} = \frac{1}{a} - \frac{1 - a}{a(1 + 2ta_1 \|\theta_1 - \theta_2\|)}$$

монотонно убывает при возрастании t и её наибольшее значение достигается при $t = 1$. $\square$

Доказанная лемма позволяет ограничиться случаем $a = 1$. В этом случае для

$$\Lambda + xa = a\mathbb{Z} + xa, \quad \Gamma + yb = b\mathbb{Z} + yb, \quad 0 \leq x, y < 1$$

имеем:

$$\rho_1(\Lambda + xa, \Gamma + yb) = \ln\left(1 + 2 \max\left(\frac{|b - a|}{\min(b, a)}, \max(b, a) \|x - y\|\right)\right). \quad (25)$$

В частности, расстояние от произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + xa = a\mathbb{Z} + xa$, $0 \leq x < 1$ до фундаментальной решётки $\mathbb{Z}$ вычисляется по формуле

$$\rho_1(\Lambda + xa, \mathbb{Z}) = \ln\left(1 + 2 \max\left(\frac{|1 - a|}{\min(1, a)}, \max(1, a) \|x\|\right)\right). \quad (26)$$

Как обычно, через $B_\nu(M + ax)$ обозначим шар радиуса ν , т. е. множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + by$ таких, что расстояние $\rho_1(M + ax, \Lambda + by) < \nu$:

$$B_\nu(M + ax) = \{\Lambda + by | \rho_1(M + ax, \Lambda + by) < \nu\}.$$

Таким образом, сдвинутая решётка $\Lambda + by$ принадлежит шару $B_\nu(M + ax)$, если найдутся матрицы C и D такие, что

$$\begin{aligned}\varphi_1(M + ax) &= A(x, k) \cdot \mathbb{Z}^2, \quad \varphi_1(\Lambda + by) = B(y, l) \cdot \mathbb{Z}^2, \\ A(x, k) &= \begin{pmatrix} a & a(x+k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(y, l) = \begin{pmatrix} b & b(y+l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k, l \in \mathbb{Z}; \\ A(x, k) &= C \cdot B(y, l), \quad B(y, l) = D \cdot A(x, k), \quad \|C - I\| < e^\nu - 1, \quad \|D - I\| < e^\nu - 1.\end{aligned}$$

Согласно лемме 21 имеем:

$$\begin{aligned}C &= C(a, b, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & -b(x - y + k - l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D &= D(a, b, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ab^{-1} & -a(y - x + l - k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Поэтому сдвинутая решётка $\Lambda + by$ принадлежит шару $B_\nu(M + ax)$ при $0 < \nu < \ln 2$ тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3-e^\nu}{2}a < b < \frac{1+e^\nu}{2}a \\ \frac{3-e^\nu}{2}b < a < \frac{1+e^\nu}{2}b \\ b\|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2} \\ a\|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \max\left(\frac{3-e^\nu}{2}, \frac{2}{1+e^\nu}\right)a < b < \min\left(\frac{1+e^\nu}{2}, \frac{2}{3-e^\nu}\right)a \\ \|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2\max(b,a)} \end{array} \right\}. \quad (27)$$

4. Гладкое многообразие сдвинутых одномерных решёток

На пространстве CPR_1 всех одномерных сдвинутых решёток, следуя за Касселсом (см. [13] стр. 165), зададим структуру топологического пространства, определив систему открытых окрестностей, согласованную с метрикой $\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$.

Пусть далее решётка M задана матрицей $A = (a)$, $a > 0$ и сдвинутая решётка имеет вид $M + ax$, $0 \leq x < 1$. Аналогично, решётка Λ задана матрицей $B = (b)$, $b > 0$ и сдвинутая решётка имеет вид $\Lambda + by$, $0 \leq y < 1$, решётка N задана матрицей $C = (c)$, $c > 0$, сдвинутая решётка имеет вид $N + cz$, $0 \leq z < 1$, решётка K задана матрицей $d = (d)$, $d > 0$, сдвинутая решётка имеет вид $K + dw$, $0 \leq w < 1$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$ сдвинутых решёток $\Lambda + by$ является *открытой μ -окрестностью* сдвинутой решётки $M + ax$, если оно состоит из всех сдвинутых решёток $\Lambda + by$ таких, что

$$\varphi_1(\Lambda + by) = C \cdot \varphi_1(M + ax), \quad \Lambda + by = \varphi_1^{-1}(C \cdot \varphi_1(M + ax)), \quad (28)$$

для которых невырожденная матрица C удовлетворяет соотношению

$$\|C - I\| < \mu. \quad (29)$$

Согласно лемме 21 матрица C имеет вид

$$C = C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & b(y - x + \varepsilon) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что в случае одномерных сдвинутых решёток $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = 2 \max_{1 \leq i, j \leq 2} |a_{ij}|$.⁴

⁴Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\| - A \| = \|A\|$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы C с $\|C - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \frac{\mu}{2} < ba^{-1} < 1 + \frac{\mu}{2}$ и являются невырожденными.

Нетрудно записать окрестность $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$ для произвольной сдвинутой решётки $M + ax = M(a) + ax = a\mathbb{Z} + ax$ с базисом (a) :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\mu(M + ax) &= \left\{ \Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \mid \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a < b < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)a, b\|x - y\| < \frac{\mu}{2} \right\} = \\ &= \left\{ \Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \mid b \in R^*(a\mu, a), y \in R_1\left(\frac{\mu}{b}, x\right) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Остановимся на вопросе о каноническом представлении открытой μ -окрестности сдвинутой решётки $M + ax$.

ЛЕММА 23. *Каноническое представление открытой μ -окрестности сдвинутой решётки $M + ax$ является открытым множеством в бесконечном цилиндре $S\mathbb{U}_\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 1 для канонического представления сдвинутой решётки $M + ax$ имеем $\varphi(M + ax) = (\ln a, x)$ (здесь предполагается, что $a > 0$, $0 \leq x < 1$). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax)) &= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a < e^{\theta_1} < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)a, e^{\theta_1}\|x - \theta_2\| < \frac{\mu}{2} \right\} = \\ &= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \ln a + \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\right), \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, x\right) \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 24. *Для любой сдвинутой решётки $M + ax$ её открытая μ -окрестностью содержит открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M + ax)$ и при $\mu < \frac{1}{2}$ содержится в открытом шаре $B_{\ln(1+\mu_1)}(M + ax)$, где $\mu_1 = \frac{3\mu}{2-\mu}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно (27), открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M + ax)$ задается неравенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3-e^{\ln(1+\mu)}}{2}a < b < \frac{1+e^{\ln(1+\mu)}}{2}a \\ \frac{3-e^{\ln(1+\mu)}}{2}b < a < \frac{1+e^{\ln(1+\mu)}}{2}b \\ b\|x - y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu)}-1}{2} \\ a\|x - y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu)}-1}{2} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-\mu}{2}a < b < \frac{2+\mu}{2}a \\ \frac{2-\mu}{2}b < a < \frac{2+\mu}{2}b \\ b\|x - y\| < \frac{\mu}{2} \\ a\|x - y\| < \frac{\mu}{2} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a < b < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)a \\ b\|x - y\| < \frac{\mu}{2} \end{array} \right\}.$$

Отсюда следует, что открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M + ax)$ содержится в открытой μ -окрестности $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$.

Аналогично, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3-e^{\ln(1+\mu_1)}}{2}a < b < \frac{1+e^{\ln(1+\mu_1)}}{2}a \\ \frac{3-e^{\ln(1+\mu_1)}}{2}b < a < \frac{1+e^{\ln(1+\mu_1)}}{2}b \\ b\|x - y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu_1)}-1}{2} \\ a\|x - y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu_1)}-1}{2} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-\mu_1}{2}a < b < \frac{2+\mu_1}{2}a \\ \frac{2-\mu_1}{2+\mu_1}a < b < \frac{2+\mu_1}{2-\mu_1}a \\ b\|x - y\| < \frac{\mu_1}{2} \\ b\|x - y\| < \frac{\mu_1}{2}ba^{-1} \end{array} \right\}.$$

Отсюда следует, что открытая μ -окрестность $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$ содержится в открытом шаре $B_{\ln(1+\mu_1)}(M + ax)$, если выполнены условия:

$$\mu \leq \mu_1, \quad \frac{2}{2+\mu_1} \leq \frac{2-\mu}{2}, \quad \frac{2}{2-\mu_1} \geq 1 + \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\mu_1}{2}ba^{-1} \geq \frac{\mu}{2}.$$

Последние неравенства выполнены, если выполнены неравенства

$$\mu \leq \mu_1, \quad \frac{2\mu}{2-\mu} \leq \mu_1, \quad \mu_1 \geq \frac{2\mu}{2+\mu}, \quad \frac{\mu_1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{2}\right) \geq \frac{\mu}{2}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ и $\mu_1 = \frac{3\mu}{2-\mu}$ эти неравенства выполняются, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x), \quad 0 \leq y_x < 1, a_x > 0, \quad M_x = a_x \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Естественно, что прежде всего надо установить, что пересечение двух окрестностей $\mathbb{L}_{\mu}(M + ax)$ снова является открытым множеством.

ЛЕММА 25. *Для любой сдвинутой решетки $N + cz$ из открытой окрестности $\mathbb{L}_{\mu}(M + ax)$ найдется открытая окрестность $\mathbb{L}_{\nu}(N + cz)$ такая, что $\mathbb{L}_{\nu}(N + cz) \subset \mathbb{L}_{\mu}(M + ax)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть

$$\rho = \inf_{N+cz \in \mathbb{L}_{\mu_1}(M+ax)} \mu_1$$

и $\nu = \frac{\mu-\rho}{1+\rho}$, тогда $\varphi_1(N + cz) = C_1 \cdot \varphi_1(M + ax)$, $\|C_1 - I\| = \rho$.

Если $K + dw$ произвольная сдвинутая решётка из открытой окрестности $\mathbb{L}_{\nu}(N + cz)$, то $\varphi_1(K + dw) = D_1 \varphi_1(N + cz)$, $\|D_1 - I\| < \nu$. Отсюда следует, что $\varphi_1(K + dw) = D_1 C_1 \cdot \varphi_1(M + ax)$, $\|D_1 C_1 - I\| = \|(D_1 - I)(C_1 - I) + C_1 - I + D_1 - I\| \leq \nu \rho + \nu + \rho = \mu$. Тем самым доказано, что сдвинутая решётка $K + dw$ принадлежит открытой окрестности $\mathbb{L}_{\mu}(M + ax)$ и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 26. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_{\mu}(M + ax)$ и $\mathbb{L}_{\nu}(N + cz)$ снова является открытым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два возможных случая. Если пересечение пустое множество, то утверждение леммы выполнено, так как пустое множество есть объединение пустого множества открытых окрестностей и, следовательно, открытое множество.

Рассмотрим второй случай, когда пересечение непустое множество. Обозначим его через $\mathbb{L}$. Пусть $K + dw$ произвольная сдвинутая решётка из $\mathbb{L}$. В силу леммы 25 найдется открытая окрестность $\mathbb{L}_{\lambda}(K + dw)$ с $\lambda = \lambda(K + dw)$, такая, что $\mathbb{L}_{\lambda}(K + dw) \subset \mathbb{L}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{L} = \bigcup_{K+dw \in \mathbb{L}} \mathbb{L}_{\lambda(K+dw)}(K + dw),$$

что и доказывает открытость множества $\mathbb{L}$. $\square$

Из леммы 23 следует, что каноническое представление сдвинутых решёток задает гомеоморфное отображение пространства сдвинутых одномерных решёток на бесконечный цилиндр Cy_{∞} :

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_{\infty},$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + \lambda x = \lambda \mathbb{Z} + \lambda x$ ($\lambda > 0$, $0 \leq x < 1$) ставится в соответствие точка (θ_1, θ_2) :

$$\varphi(\Lambda + \lambda x) = (\ln \lambda, x) \in Cy_{\infty}, \quad (\theta_1, \theta_2) = (\ln \lambda, x),$$

а точке $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ ставится в соответствие сдвинутая решётка

$$\Lambda + \lambda x = \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \mathbb{Z} + e^{\theta_1} \theta_2 \in CPR_1, \quad x = \theta_2, \lambda = e^{\theta_1}.$$

Нетрудно видеть, что таким образом на CPR_1 задана структура топологического пространства $T_2 = (CPR_1, \tau_2)$, где τ_2 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_2 = (CPR_1, \tau_2)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}_1$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных сдвинутых решёток $M + \lambda x$ с рациональными λ, x, μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество CPQ_1 всех рациональных сдвинутых решёток, т.е. решёток $M + \lambda x = M(\lambda) + \lambda x$ с $\lambda, x \in \mathbb{Q}, \lambda > 0, 0 \leq x < 1$.

Введем группы треугольных матриц $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R}), \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q})$, заданные равенствами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0, b, a, x \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q}) &= \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0, b, a \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & -ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, множества треугольных матриц $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R}), \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q})$ являются некоммутативными группами. Очевидно, что множество диагональных матриц $\mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$, также, образуют коммутативную группу.

Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$ определим действие матрицы A на произвольную сдвинутую решётку $\Lambda + \lambda x$ с помощью равенства

$$A(\Lambda + \lambda x) = \varphi_1^{-1}(A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x))).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} ba^{-1} & by \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda + \lambda x = \lambda \mathbb{Z} + \lambda x,$$

тогда

$$\varphi_1(\Lambda + \lambda x) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2, \quad A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x)) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & by \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x)) &= \begin{pmatrix} \lambda ba^{-1} & by + \frac{b\lambda x}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 = \begin{pmatrix} \lambda ba^{-1} & \lambda ba^{-1} \left\{ \frac{ay}{\lambda} + x \right\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2, \\ A(\Lambda + \lambda x) &= \varphi_1^{-1}(A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x))) = \lambda ba^{-1} \mathbb{Z} + \lambda ba^{-1} \left\{ \frac{ay}{\lambda} + x \right\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 27. *Топология τ_2 инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования пространства $\mathbb{R}^2$, заданного матрицей $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$. Счетная база $\mathbb{B}_1$ инвариантна только относительно рациональных преобразований, заданных матрицами $D \in \mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как под действием линейного невырожденного преобразования пространства $\mathbb{R}^2$, заданного матрицей $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, образ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + \lambda x$ переходит в образ сдвинутой решётки $\lambda b a^{-1} \mathbb{Z} + \lambda b a^{-1} \left\{ \frac{ay}{\lambda} + x \right\}$, то из равенства

$$A \cdot \mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)$$

следует, для инвариантности топологии достаточно доказать, что $A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)$ — открытое множество для любого $x \in X$.

Действительно, пусть $M(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — мера обусловленности матрицы A (всегда $M(A) \geq 2$ для матриц второго порядка) и

$$A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x) = \{ \Lambda + \lambda y = \lambda \mathbb{Z} + \lambda y \mid \varphi_1(\Lambda + \lambda x) = A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x), \|B - I\| < \mu_x \}.$$

Пусть

$$\|B - I\| < \mu_x, \quad \delta = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|A\|} = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\| \cdot M(A)},$$

$$\varphi_1(\Lambda + \lambda y) = A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x), \quad \varphi_1(\Lambda_1 + \lambda_1 y_1) = C \cdot A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x) \in \mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y).$$

Таким образом, $\|C - I\| < \delta$ и $\delta < 1$ так как $\mu_x < 1 < \|I - B\| + \|B\| \leq \|I - B\| + \|B\| \cdot M(A)$.

Тогда

$$\varphi_1(\Lambda_1 + \lambda_1 y_1) = C \cdot A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x) = A \cdot B_1 \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x), \quad B_1 = A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B$$

и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|A^{-1} \cdot C \cdot A - I\| &= \|A^{-1} \cdot C \cdot A - A^{-1} \cdot A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|C - I\| \cdot \|A\| = M(A) \cdot \|C - I\|, \\ \|B_1 - I\| &= \|A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B - I\| \leq \|A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B - B\| + \|B - I\| \leq \\ &\leq \|B\| \cdot \|A^{-1} \cdot C \cdot A - I\| + \|B - I\| \leq \|B\| \cdot \delta \cdot M(A) + \|B - I\| < \mu_x. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y) \subset A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x), \quad A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x) = \bigcup_{\Lambda + \lambda y \in A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)} \mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y)$$

и инвариантность топологии τ_2 относительно невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^2$, заданных матрицами $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, доказана.

Перейдём к доказательству инвариантности счётной базы $\mathbb{B}_1$ относительно рациональных преобразований, заданных матрицами $D \in \mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$. Действительно, если

$$D = \begin{pmatrix} bd^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d, b \in \mathbb{Q}, \quad \mathbb{L}_\mu(M + ax) \in \mathbb{B}_1, \quad a > 0, \quad a, \mu, x \in \mathbb{Q},$$

то

$$\begin{aligned} D(\Lambda + y\lambda) &= \lambda bd^{-1} \mathbb{Z} + \lambda bd^{-1} y, \quad D(M + ax) = abd^{-1} \mathbb{Z} + abd^{-1} x, \\ D\mathbb{L}_\mu(M + ax) &= \{ D(\Lambda + y\lambda) \mid \varphi_1(\Lambda + y\lambda) = C \cdot \varphi_1(M + ax), \|C - I\| < \mu \} = \\ &= \{ \varphi_1^{-1}(D\varphi_1(\varphi_1^{-1}(C\varphi_1(M + ax)))) \mid \|C - I\| < \mu \} = \{ \varphi_1^{-1}(DC\varphi_1(M + ax)) \mid \|C - I\| < \mu \} = \\ &= \{ \varphi_1^{-1}(C_1\varphi_1(M + ax)) \mid \|C_1 - I\| < \mu_1 \} = \mathbb{L}_{\mu_1}(M + ax), \end{aligned}$$

где $\mu_1 = \max \left(\left| bd^{-1} - 1 + \frac{\mu_1 bd^{-1}}{2} \right|, \left| bd^{-1} - 1 - \frac{\mu_1 bd^{-1}}{2} \right|, \frac{\mu_1 bd^{-1}}{2} \right)$, что и доказывает последнее утверждение леммы. $\square$

Пусть $M + ax = a\mathbb{Z} + ax$ и $N + cz = c\mathbb{Z} + cz$ — две произвольные сдвинутые решётки. Определим отрезок сдвинутых решёток $[M + ax; N + cz]$ с помощью равенства

$$[M + ax; N + cz] = \left\{ \Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \left| b = c \cdot t + (1 - t) \cdot a, y = \frac{ax \cdot (1 - t) + czt}{a \cdot (1 - t) + t \cdot c} \right. \right\}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(\Lambda + \lambda y) &= \begin{pmatrix} a \cdot (1 - t) + t \cdot c & ax \cdot (1 - t) + czt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^2 = \\ &= \left((1 - t) \cdot \begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c & cz \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbb{Z}^2 = (1 - t) \cdot \varphi_1(M + ax) + t \cdot \varphi_1(N + cz). \end{aligned} \quad (33)$$

Длина отрезка $l([M + ax; N + cz]) = \rho_1(M + ax, N + cz)$. Положим $c = ua$ и без ограничения общности будем считать, что $u \geq 1$. Тогда

$$\rho_1(M + ax, N + cz) = \ln(1 + 2 \max(u - 1, ua \|x - z\|)). \quad (34)$$

Далее имеем: $b = a \cdot (1 - t) + t \cdot c = (1 - t + tu)a$, $y = \frac{x \cdot (1 - t) + uzt}{(1 - t) + t \cdot u}$,

$$\begin{aligned} \rho_1(M + ax, \Lambda + by) &= \ln \left(1 + 2 \max \left(t(u - 1), (1 - t + tu)a \left\| x - \frac{x \cdot (1 - t) + uzt}{(1 - t) + t \cdot u} \right\| \right) \right) = \\ &= \ln \left(1 + 2 \max \left(t(u - 1), (1 - t + tu)a \left\| \frac{tu(x - z)}{(1 - t) + t \cdot u} \right\| \right) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично, имеем: $b = \left(\frac{1 - t}{u} + t \right) c$,

$$\begin{aligned} \rho_1(\Lambda + by, N + cz) &= \ln \left(1 + 2 \max \left(\frac{1 - \frac{1 - t}{u} - t}{\frac{1 - t}{u} + t}, ua \left\| z - \frac{x \cdot (1 - t) + uzt}{(1 - t) + t \cdot u} \right\| \right) \right) = \\ &= \ln \left(1 + 2 \max \left(\frac{u - 1 + t - ut}{1 - t + ut}, ua \left\| \frac{(1 - t)(x - z)}{(1 - t) + t \cdot u} \right\| \right) \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Из формул (34)–(36) видно, что длина отрезка определенная через метрику $\rho_1(\cdot, \cdot)$ не обладает свойством аддитивности, а отрезок в этой метрике не является геодезической кривой.

Топологическое пространство CPR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух сдвинутых решеток $\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1$, $\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ -окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1)$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2)$ не пересекаются.

Действительно, пусть $\Lambda(\lambda) + z\lambda \in \mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1) \cap \mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2))$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1(\Lambda(\lambda) + z\lambda) &= C \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1), \quad \varphi_1(\Lambda(\lambda) + z\lambda) = D \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2), \\ C = C(\varepsilon_1) &= \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1^{-1} & \lambda(z - x + \varepsilon_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = D(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_2^{-1} & \lambda(z - y + \varepsilon_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 &\in \mathbb{Z}, \quad \|C - I\| < \mu, \quad \|D - I\| < \mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2) = D^{-1}C \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1), \quad D^{-1}C = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_1^{-1} & \lambda_2(y - x + \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее имеем:

$$(1 - \mu)\lambda_1 < \lambda < (1 + \mu)\lambda_1, \quad (1 - \mu)\lambda_2 < \lambda < (1 + \mu)\lambda_2,$$

поэтому

$$\lambda_2 \lambda_1^{-1} < \frac{\lambda(1-\mu)^{-1}}{\lambda(1+\mu)^{-1}} = \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}{1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

что доказывает отсутствие непустого пересечения.

Всё пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 гомеоморфно $Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z},$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + \lambda x = \lambda\mathbb{Z} + \lambda x$, $0 \leq x < 1$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda + \lambda x) = (\ln(\lambda), x) \in Cy_\infty,$$

а паре чисел $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ ставится в соответствие сдвинутая решётка

$$\Lambda + x\lambda = \varphi^{-1}((\theta_1, \theta_2)) = e^{\theta_1}\mathbb{Z} + e^{\theta_1}\theta_2 \in CPR_1.$$

Отсюда следует, что пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 локально евклидово пространство размерности 2.

Согласно Уорнеру (см. [20], стр. 13) пара (U, φ) , где $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ — открытая μ -окрестность сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$, а φ — гомеоморфное отображение U на открытое множество $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$ (31) из Cy_∞ , называется системой координат, φ — координатным отображением. На самом деле, гомеоморфное отображение φ отображает всё пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 на весь бесконечный цилиндр Cy_∞ . Так как $\varphi(\mathbb{Z}) = (0, 0)$, то фундаментальная одномерная решётка $\mathbb{Z}$ с нулевым сдвигом является началом данной системы координат.

Чтобы произвольная сдвинутая решётка $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ была бы началом координат надо использовать гомеоморфное отображение $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln \lambda - \ln a, \{y - x\})$.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) открытое множество $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$ (31) из Cy_∞ является картой открытой μ -окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ и $\varphi(\Lambda + y\lambda_1)$ изображением сдвинутой решётки $\Lambda + y\lambda_1 \in \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ на карте $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$.

ЛЕММА 28. *Открытая μ -окрестность сдвинутой решётки $M + ax$ при гомеоморфное отображение $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln \lambda - \ln a, \{y - x\})$ отображается в открытое множество в бесконечном цилиндре $Cy_\infty = \mathbb{R} \times J_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3 для представления сдвинутой решётки $M + ax$ имеем $\varphi_{M+ax}(M + ax) = (0, 0)$ (здесь предполагается, что $a > 0$, $0 \leq x < 1$). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_{M+ax}(\mathbb{L}_\mu(M + ax)) &= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \ln \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) < \theta_1 < \ln \left(1 + \frac{\mu}{2}\right), e^{\theta_1} \|\theta_2\| < \frac{\mu}{2} \right\} = \\ &= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \left(\ln \left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\right), \theta_2 \in R_1 \left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, 0\right) \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Будем через φ_ν обозначать ограничение на окрестность $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu \lambda_\nu)$ ($\nu = 1, 2$) гомеоморфного отображения φ пространства сдвинутых одномерных решёток CPR_1 на весь бесконечный цилиндр Cy_∞ : $\varphi_\nu = \varphi|_{\mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu \lambda_\nu)}$ ($\nu = 1, 2$).

ЛЕММА 29. *Для любых двух открытых пересекающихся μ -окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu \lambda_\nu)$ сдвинутых решёток $M_\nu + x_\nu \lambda_\nu = M_\nu(\lambda_\nu) + x_\nu \lambda_\nu$ ($\nu = 1, 2$) гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на образы $\varphi_\nu(U_\nu)$ связаны соотношениями*

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2)$$

для любой точки (θ_1, θ_2) из пересечения образов $\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть

$$U = U_1 \cap U_2 = \mathbb{L}_{\mu_1}(M_1 + x_1 \lambda_1) \cap \mathbb{L}_{\mu_2}(M_2 + x_2 \lambda_2)$$

и

$$U^* = \varphi_1(\mathbb{L}_{\mu_1}(M_1 + x_1 \lambda_1)) \cap \varphi_2(\mathbb{L}_{\mu_2}(M_2 + x_2 \lambda_2)),$$

тогда $\varphi(U) = U^*$, так как $\varphi_\nu(U_\nu) = \varphi(U_\nu)$ ($\nu = 1, 2$).

Так как для $(\theta_1, \theta_2) \in U^*$ имеем:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2), \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2),$$

то это и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 30. Гомеоморфное отображение

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_\infty$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + x\lambda = \lambda\mathbb{Z} + x\lambda$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda + x\lambda) = (\ln(\lambda), x) \in Cy_\infty,$$

а точке $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ ставится в соответствие сдвинутая решётка

$$\Lambda + x\lambda = \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1}\mathbb{Z} + e^{\theta_1}\theta_2 \in CPR_1,$$

переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + y_x \lambda_x)$ в открытое множество

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \ln \lambda_x + \left(\ln \left(1 - \frac{\mu}{2} \right), \ln \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \right), \theta_2 \in R_1 \left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, y_x \right) \right\}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно (31) имеем:

$$\varphi(\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + y_x \lambda_x)) = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \ln \lambda_x + \left(\ln \left(1 - \frac{\mu}{2} \right), \ln \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \right), \theta_2 \in R_1 \left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, y_x \right) \right\},$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda + x\lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{CM} = CPR_1$ следующим образом.

Пусть $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda \in CPR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ — открытая μ -окрестность, координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}$ для произвольной сдвинутой решетки $\Lambda + y\lambda_1 = \lambda_1\mathbb{Z} + y\lambda_1 \in U$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1) = (\ln \lambda_1 - \ln \lambda, \{y - x\})$. Так как $\varphi_{M+x\lambda}(M + x\lambda) = (0, 0)$, то сдвинутая решётка $M + x\lambda$ является началом данной системы координат. Для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \left(\ln \left(1 - \frac{\mu}{2} \right), \ln \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \right), \theta_2 \in R_1 \left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, 0 \right) \right\}$ имеем:

$$\varphi_{M+x\lambda}^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1} \lambda \{x + \theta_2\}.$$

Касательное пространство многообразия $\mathcal{CM}$ в точке $M + x\lambda$ будем обозначать через $\mathcal{CM}_{M+x\lambda}$, оно имеет размерность два.

Касательный вектор $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \Big|_{M+x\lambda} \in \mathcal{CM}_{M+x\lambda}$ ($i = 1, 2$) зададим равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \Big|_{M+x\lambda} \right) (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \theta_i} \Big|_{\varphi(M+x\lambda)} \quad (39)$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности сдвинутой решётки $M + x\lambda \in \mathcal{CM}$. Также будет использоваться обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i} \Big|_{M+x\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \Big|_{M+x\lambda} \right) (f). \quad (40)$$

5. Функции на пространстве сдвинутых решёток

В теоретико-числовом методе в приближенном анализе следующие функции на пространстве сдвинутых решёток представляют особый интерес, это — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки и сдвинутой решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки. Рассмотрим эти понятия последовательно в случае пространства CPR_1 одномерных сдвинутых решёток.

Детерминант решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ задается равенством $\det \Lambda = \lambda$ и остается неизменным для всех сдвинутых решёток $\Lambda(\lambda) + x\lambda$. Ясно, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$, $\det \mathbb{Z} = 1$. Для вычисления $\left. \frac{\partial \det \Lambda}{\partial \theta_i} \right|_{M+x\lambda}$ заметим следующее: для сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1)$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1) = (\ln(\lambda_1) - \ln(\lambda), \{y - x\}) = (\theta_1, \theta_2)$, где $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$. Далее имеем $\varphi_{M+x\lambda}^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1} \lambda \{x + \theta_2\}$ и $\det \Lambda \circ \varphi^{-1} = \det(e^{\theta_1} \cdot M) = e^{\theta_1} \lambda$. Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial \det \Lambda}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} = \left. \frac{\partial e^{\theta_1} \lambda}{\partial \theta_1} \right|_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \lambda - \lambda}{h} = \lambda = \det M, \quad \left. \frac{\partial \det \Lambda}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} = 0.$$

В одномерном случае для решёток с детерминантом более 1 все три величины — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум — совпадают. Начиная с размерности $s = 2$ справедливы неравенства $N(\Lambda) \leq q(\Lambda) \leq \det \Lambda$, где

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} |x_1 \cdot \dots \cdot x_s| - \text{норменный минимум,}$$

$$q(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_s} - \text{гиперболический параметр решетки.}$$

Гиперболический параметр одномерной решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$ тождественно равен 1, поэтому гиперболический параметр одномерной решётки непрерывная, кусочно дифференцируемая функция. Разрыв производной в точке $\lambda = 1$.

Для сдвинутой одномерной решётки $\Lambda(\lambda) + x\lambda$ $0 < x < 1$ функции норменного минимума и гиперболического параметра существенно различаются:

$$N(\Lambda(\lambda) + x\lambda) = \inf_{y \in \Lambda(\lambda) + x\lambda, y \neq 0} |y| = \lambda \|x\| = (\det \Lambda) \|x\| - \text{норменный минимум сдвинутой решётки,}$$

$$q(\Lambda(\lambda) + x\lambda) = \inf_{y \in \Lambda(\lambda) + x\lambda, y \neq 0} \overline{y} = \overline{\lambda \|x\|} - \text{гиперболический параметр сдвинутой решетки.}$$

Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial N(\Lambda(\lambda) + x\lambda)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} = (\det M) \|x\|,$$

$$\left. \frac{\partial N(\Lambda(\lambda) + x\lambda)}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} = \lim_{h \rightarrow 0} (\det M) \frac{\|x + h\| - \|x\|}{h} = \begin{cases} \det M, & \text{при } 0 < \{x\} < \frac{1}{2}, \\ -\det M, & \text{при } \frac{1}{2} < \{x\} < 1. \end{cases}$$

При $\{x\} = 0$ и $\{x\} = \frac{1}{2}$ производная $\|x\|'$ не определена.

Дзета-функция сдвинутой решётки в одномерном случае всегда определена и мы для сдвинутой решётки $\Lambda(\lambda) + x\lambda$ при $\lambda > 0$ и $0 \leq x \leq 1$ имеем:

$$\zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda | \alpha) = \sum'_{y \in \Lambda(\lambda) + x\lambda} |y|^{-\alpha} = \frac{\zeta(\alpha; x) + \zeta(\alpha; 1 - x)}{\lambda^\alpha},$$

где $\zeta(\alpha; x)$ — периодизированная дзета-функция Гурвица (см. [7], стр. 78). Напомним, что $\zeta(\alpha; x) = \sum_{n+x>0} (n+x)^{-\alpha}$ и при этом $\lim_{x \rightarrow m+0} \zeta(\alpha; x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m-0} \zeta(\alpha; x) = \zeta(\alpha)$ для

любой целой точки m . Таким образом, периодическая функция $\zeta(\alpha; x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых.

Отсюда следует, что для $\Lambda(\lambda_1) + y\lambda_1 = \varphi_{M+x\lambda}^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\}$ имеем:

$$\begin{aligned}\zeta(\Lambda(\lambda_1) + y\lambda_1|\alpha) &= \frac{\zeta(\alpha; \{x + \theta_2\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x + \theta_2\})}{(e^{\theta_1}\lambda)^\alpha}, \\ \frac{\partial \zeta(\Lambda(\lambda_1) + y\lambda_1|\alpha)}{\partial \theta_1} \Big|_{M+x\lambda} &= \frac{\partial \frac{\zeta(\alpha; \{x\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x\})}{(e^{\theta_1}\lambda)^\alpha}}{\partial \theta_1} \Big|_0 = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\zeta(\alpha; \{x+h\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x+h\})}{(e^h\lambda)^\alpha} - \frac{\zeta(\alpha; \{x\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x\})}{(\lambda)^\alpha}}{h} = -\alpha \zeta(M + x\lambda|\alpha).\end{aligned}$$

Для вычисления частной производной по θ_2 рассмотрим производную периодической функции $g(x) = \zeta(\alpha; \{x\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x\})$.

Будем для простоты считать, что $0 < x < 1$. Имеем:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^\alpha} + \frac{1}{(n+1-x)^\alpha} \right)' = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(n+1-x)^{\alpha+1}} \right) = \\ &= \alpha(\zeta(\alpha+1; 1-x) - \zeta(\alpha+1; x)).\end{aligned}$$

Заметим, что периодическая функция $g(x) = \zeta(\alpha; \{x\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x\})$ разрывна во всех целых точках x .

Из предыдущего следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta(\Lambda(\lambda_1) + y\lambda_1|\alpha)}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} &= \frac{\partial \frac{\zeta(\alpha; \{x+\theta_2\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x+\theta_2\})}{\lambda^\alpha}}{\partial \theta_2} \Big|_0 = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\zeta(\alpha; \{x+h\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x+h\})}{\lambda^\alpha} - \frac{\zeta(\alpha; \{x\}) + \zeta(\alpha; 1 - \{x\})}{\lambda^\alpha}}{h} = \frac{\alpha(\zeta(\alpha+1; 1-x) - \zeta(\alpha+1; x))}{\lambda^\alpha}.\end{aligned}$$

Относительно дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки необходимо сказать следующее в случае размерности $s \geq 2$. Дзета-функция решётки определена для произвольной декартовой решётки, но неопределена для произвольной алгебраической решётки. Поэтому её как функцию на всём пространстве многомерных решёток рассматривать нельзя, так как множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве всех решёток (см. [18]).

Гиперболической дзета-функции сдвинутых решёток посвящены следующие два раздела.

5.1. Гиперболическая дзета-функция сдвинутых решёток

Гиперболическая дзета-функция произвольной решётки $\Lambda \in PR_s$ имеет важное значение в теоретико-числовом методе в приближенном анализе, так как она равна норме линейного функционала приближенного интегрирования с помощью квадратурной формулы с обобщённой параллелепипедальной сетки на классе E_s^α , если решётка Λ — целочисленная, или дает оценку сверху в противном случае. Гиперболическая дзета-функция произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ является естественным обобщением гиперболической дзета-функции аналогичное обобщению дзета-функции Римана через дзета-функцию Гурвица.

В одномерном случае гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки $\Lambda + x\lambda = \Lambda(\lambda) + x\lambda$ имеет наиболее простой вид

$$\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \sum_{y \in \Lambda(\lambda) + x, y \neq 0} \frac{1}{y^\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq -x} \frac{1}{\lambda(n+x)^\alpha}.$$

Заметим, что

$$\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \zeta_H(\Lambda(\lambda) + \|x\|\lambda|\alpha). \quad (41)$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) + f_1(\alpha, \lambda, x)$, где

$$f_1(\alpha, \lambda, x) = \sum'_{-\frac{1}{\lambda} < n+x < \frac{1}{\lambda}} (1 - |\lambda n + x\lambda|^{-\alpha}).$$

Так как при $0 < \lambda < 1$ имеем $\lim_{x \rightarrow m+0} f_1(\alpha, \lambda, x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m-0} f_1(\alpha, \lambda, x) = +\infty$ для любой целой точки m , то периодическая функция $f_1(\alpha, \lambda, x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых. Аналогично, при $\lambda \geq 1$ имеем $\lim_{x \rightarrow m+0} f_1(\alpha, \lambda, x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m-0} f_1(\alpha, \lambda, x) = +\infty$ и периодическая функция $f_1(\alpha, \lambda, x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых и в этом случае.

Для исследования свойств гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки нам потребуется другое представление для неё. Прежде всего введём следующие обозначения $K(\lambda, x) = \left\lceil \frac{1}{\lambda} - x \right\rceil$, где для $y > 0$ $[y] = k$ при $k-1 < y \leq k$, $k \in \mathbb{N}$. Положим при $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$

$$\zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|k, \alpha) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{\alpha}}.$$

Нетрудно видеть, что $K(\lambda, 1 - \|x\|) \leq K(\lambda, \|x\|)$ и $0 \leq K(\lambda, \|x\|) - K(\lambda, 1 - \|x\|) \leq 1$, так как $0 \leq 1 - 2\|x\| \leq 1$.

При $k = 0$ и $0 < x < 1$ имеем $\zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \frac{\zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|0, \alpha) + \zeta(\Lambda(\lambda) + (1-x)\lambda|0, \alpha)}{\lambda^{\alpha}}$.

Используя сделанные обозначения, можно записать следующее простое выражение для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки $\Lambda(\lambda) + x\lambda$

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda + x\lambda|\alpha) = \\ = \begin{cases} \frac{\zeta(\alpha; \|x\|) + \zeta(\alpha; 1 - \|x\|)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } \lambda\|x\| \geq 1, \\ K(\lambda, \|x\|) - 1 + \frac{\zeta(\Lambda(\lambda) + \|x\|\lambda|K(\lambda, \|x\|), \alpha) + \zeta(\alpha; 1 - \|x\|)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } \lambda\|x\| < 1 \leq \lambda(1 - \|x\|), \\ K(\lambda, \|x\|) + K(\lambda, 1 - \|x\|) - 2 + \\ + \frac{\zeta(\Lambda(\lambda) + 1 - \|x\|\lambda|K(\lambda, 1 - \|x\|), \alpha) + \zeta(\Lambda(\lambda) + \|x\|\lambda|K(\lambda, \|x\|), \alpha)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } \lambda(1 - \|x\|) < 1, 0 < \lambda. \end{cases} \quad (42) \end{aligned}$$

Непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки $\Lambda + x\lambda = \Lambda(\lambda) + x\lambda$ очевидна для всех $\lambda \neq \frac{1}{k+x}, \frac{1}{k+1-x}$, где k — любое натуральное число. Непрерывность слева в точке $\lambda = \frac{1}{k+\|x\|}$ также очевидна, так как при $\frac{1}{k+\|x\|} < \lambda < \frac{1}{k-1+\|x\|}$ имеем $K(\lambda, \|x\|) = k$, а при $\frac{1}{k+1-\|x\|} < \lambda < \frac{1}{k-\|x\|}$ имеем $K(\lambda, 1 - \|x\|) = k$, поэтому указанные точки разбивают положительную полуось $\lambda > 0$ а интервалы знакопостоянства величин $K(\lambda, \|x\|)$ и $K(\lambda, 1 - \|x\|)$, при этом на каждом из интервалов эти величины непрерывны справа в своих левых границах.

Рассмотрим $\lim_{\lambda \rightarrow \left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^-} \zeta_H(\Lambda + \|x\|\lambda|\alpha)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^-} \zeta_H(\Lambda + \|x\|\lambda|\alpha) &= k-1 + \frac{\zeta\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) + \|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) \middle| k, \alpha\right) + \zeta(\alpha; 1 - \|x\|)}{\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{\alpha}} = \\ &= (k-1) - 1 + \frac{\zeta\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) + \|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) \middle| k-1, \alpha\right) + \zeta(\alpha; 1 - \|x\|)}{\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{\alpha}} = \\ &= \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) + \|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right) \middle| \alpha\right) \end{aligned}$$

и непрерывность слева также установлена.

Предыдущие рассуждения доказывают непрерывность гиперболической дзета-функции по одному параметру λ . Для доказательства непрерывности по двум параметрам λ и x воспользуемся следующими соображениями. Во-первых, без ограничения общности согласно (41) можно считать, что $\lambda > 0$ и $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Во-вторых, разобьём множество всех точек (λ, x) на подмножества: множество A_k состоит из всех точек (λ, x) , для которых $K(\lambda, x) = k$ ($k \in \mathbb{N}$); множество B_k состоит из всех точек (λ, x) , для которых $K(\lambda, 1 - x) = k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Если точка (λ, x) — внутренняя точка и множества A_k и множества B_m , то гиперболическая дзета-функции сдвинутой решётки $\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) + f_1(\alpha, \lambda, x)$ непрерывна в этой точке, так как в некоторой окрестности этой точки величины $K(\lambda, x) = k$ и $K(\lambda, 1 - x) = m$ постоянные, а соответствующие ряды Дирихле равномерно сходятся и задают непрерывные функции.

Если точка (λ, x) — граничная точка или множества A_k , или множества B_m , то гиперболическая дзета-функции сдвинутой решётки $\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) + f_1(\alpha, \lambda, x)$ непрерывна в этой точке, так как в некоторой окрестности этой точки величины $K(\lambda, x) = k$ и $K(\lambda, 1 - x) = m$ величины либо увеличиваются на единицу, либо уменьшаются, а соответствующие ряды Дирихле равномерно сходятся и задают непрерывные функции при этом либо добавляется, либо удаляется одно слагаемое, сходящиеся к единице.

Таким образом, установлена непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки на пространстве CPR_1 , что согласуется с общей теоремой из работы [17].

5.2. Производная от гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

Определим множества $C_{k,m}$ как пересечение множеств A_k и B_m . Для большинства пар индексов (k, m) множество $C_{k,m}$ является пустым. Непустыми могут быть только множества $C_{k,k}$ и $C_{k,k-1}$.

Для любого непустого множества $C_{k,m}$ для всех внутренних точек сохраняется один и тот же вид из формулы (42). Поэтому во внутренних точках можно дифференцировать.

Итак, пусть $M + x\lambda$ — внутренняя точка непустого множества $C_{k,m}$. Тогда для сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1)$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1) = (\ln(\lambda_1) - \ln(\lambda), \{y - x\}) = (\theta_1, \theta_2)$, где $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$. Далее имеем $\varphi_{M+x\lambda}^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\}$.

Рассмотрим три случая.

Пусть, во-первых, $e^{\theta_1}\lambda\|x + \theta_2\| \geq 1$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\zeta_H(e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\})|\alpha = \frac{\zeta(\alpha; \|x + \theta_2\|) + \zeta(\alpha; 1 - \|x + \theta_2\|)}{(\theta_1\lambda)^\alpha}.$$

Отсюда следует справедливость следующих равенств в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial \theta_1} \Big|_{M+x\lambda} &= -\alpha \zeta_H(M + x\lambda|\alpha), \\ \frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} &= \frac{\alpha(\zeta(\alpha + 1; 1 - x) - \zeta(\alpha + 1; x))}{\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Пусть, во-вторых, $e^{\theta_1}\lambda\|x + \theta_2\| < 1 \leq e^{\theta_1}\lambda(1 - \|x + \theta_2\|)$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\zeta_H(e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\})|\alpha =$$

$$= K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|) - 1 + \frac{\zeta(e^{\theta_1} M + \|x + \theta_2\| e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha) + \zeta(\alpha; 1 - \|x + \theta_2\|)}{(e^{\theta_1} \lambda)^\alpha}.$$

Так как величина $K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|)$ — постоянная на множестве $C_{k,m}$ и при $k = K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \zeta(e^{\theta_1} M + \|x + \theta_2\| e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_1} \Big|_{M+x\lambda} = 0, \\ \left. \frac{\partial \zeta(M + \|x + \theta_2\| \lambda \mid K(\lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} = \\ &= -\alpha \varepsilon(x) \zeta(M + \|x\| \lambda \mid K(\lambda, \|x\|), \alpha + 1), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(x) = 1$ при $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon(x) = -1$ при $\frac{1}{2} < \{x\} < 1$, то

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1 | \alpha)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} &= -\alpha \frac{\zeta(M + \|x\| \lambda \mid K(\lambda, \|x\|), \alpha) + \zeta(\alpha; 1 - \|x\|)}{\lambda^\alpha}, \\ \left. \frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1 | \alpha)}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} &= \frac{-\alpha \varepsilon(x) \zeta(M + \|x\| \lambda \mid K(\lambda, \|x\|), \alpha + 1) - \alpha \varepsilon(x) \zeta(\alpha + 1; 1 - \|x\|)}{\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Пусть, в-третьих, $e^{\theta_1} \lambda(1 - \|x + \theta_2\|) < 1$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\begin{aligned} \zeta_H(e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1} \lambda \{x + \theta_2\} | \alpha) &= \\ &= K(e^{\theta_1} \cdot \lambda, \|x + \theta_2\|) + K(e^{\theta_1} \cdot \lambda, 1 - \|x + \theta_2\|) - 2 + \\ &+ \frac{\zeta(e^{\theta_1} M + (1 - \|x + \theta_2\|) e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, 1 - \|x + \theta_2\|), \alpha)}{(e^{\theta_1} \lambda)^\alpha} + \\ &+ \frac{\zeta(e^{\theta_1} \Lambda(\lambda) + \|x + \theta_2\| e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha)}{(e^{\theta_1} \lambda)^\alpha}. \end{aligned}$$

Так как величины $K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|)$ и $K(e^{\theta_1} \cdot \lambda, 1 - \|x + \theta_2\|)$ — постоянные на множестве $C_{k,k'}$ и при $k = K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|)$, $k' = K(e^{\theta_1} \lambda, 1 - \|x + \theta_2\|)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \zeta(e^{\theta_1} M + \|x + \theta_2\| e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_1} \Big|_{M+x\lambda} = 0, \\ \left. \frac{\partial \zeta(e^{\theta_1} M + (1 - \|x + \theta_2\|) e^{\theta_1} \lambda \mid K(e^{\theta_1} \lambda, 1 - \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k'}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+1-\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_1} \Big|_{M+x\lambda} = 0, \\ \left. \frac{\partial \zeta(M + \|x + \theta_2\| \lambda \mid K(\lambda, \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} = \\ &= -\alpha \varepsilon(x) \zeta(M + \|x\| \lambda \mid K(\lambda, \|x\|), \alpha + 1), \\ \left. \frac{\partial \zeta(M + 1 - \|x + \theta_2\| \lambda \mid K(\lambda, 1 - \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\partial \theta_2} \right|_{M+x\lambda} &= \sum_{n=k'}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+1-\|x+\theta_2\|)^\alpha}}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} = \\ &= \alpha \varepsilon(x) \zeta(M + (1 - \|x\|) \lambda \mid K(\lambda, 1 - \|x\|), \alpha + 1), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(x) = 1$ при $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon(x) = -1$ при $\frac{1}{2} < \{x\} < 1$, то

$$\left. \frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1 | \alpha)}{\partial \theta_1} \right|_{M+x\lambda} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha \frac{\zeta(M + \|x\|\lambda | K(\lambda, \|x\|), \alpha) + \zeta(M + (1 - \|x + \theta_2\|)\lambda | K(\lambda, 1 - \|x + \theta_2\|), \alpha)}{\lambda^\alpha}, \\
&\frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1 | \alpha)}{\partial \theta_2} \Big|_{M+x\lambda} = \\
&= \frac{-\alpha \varepsilon(x) \zeta(M + \|x\|\lambda | K(\lambda, \|x\|), \alpha + 1) + \alpha \varepsilon(x) \zeta(M + (1 - \|x\|)\lambda | K(\lambda, 1 - \|x\|), \alpha + 1)}{\lambda^\alpha}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в граничных точках множеств $C_{k,m}$.

6. Заключение

В работе [19] были построены основы теории гладких многообразий только для простейшего случая пространства одномерных теоретико-числовых решёток. Он более простой, так как любая одномерная решётка имеет только два базиса, отличающихся знаком. Как было указано в этой статье, уже рассмотрение сдвинутых решёток осложнено тем, что для задания метрики на пространстве таких решёток необходимо рассмотреть их погружение в пространство решёток большой размерности. А как известно, уже для любой двумерной решётки количество базисов решётки счётно. Поэтому возникли определенные трудности для построения теории гладких многообразий сдвинутых одномерных решёток, но они были успешно преодолены в настоящей работе.

В работе были выделены множества $C_{k,m}$, во внутренних точках которых гиперболическая дзета-функция сдвинутых решёток дифференцируемая функция на гладком многообразии сдвинутых одномерных решёток, а в граничных точках этих множеств дифференцируемость нарушается.

Решению возникающих проблем при построении теории гладких многообразий решёток в общем случае многомерных решёток и многомерных сдвинутых решёток будут посвящены следующие статьи по этой тематике.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток и сдвинутых многомерных решёток гораздо сложнее, чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток (см. стр. 220). Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток и многомерных сдвинутых решёток, а также в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получение теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследований может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах решёток и многомерных решёток. Как известно (см. [2], [21]), аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6089–84.
4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54–80.
7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72–105.
8. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
9. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.
10. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.
11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.
12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.
13. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
14. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
15. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
17. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

18. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.
19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.
20. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.
21. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, M.: Science, 240 p.
2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.
4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ”, *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.
5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. *Dep. in VINITI* 08.24.84, no. 6090–84.
6. Dobrovolsky N. M. “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis”, *Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54–80.*
7. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, "ON HYPERBOLIC HURWITZ ZETA FUNCTION", *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, P. 72–105.
8. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.
9. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices“, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
10. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross”, *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.
11. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross”, *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.

12. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices", *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University*, p. 77–87.
13. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
14. A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.
15. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
16. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
17. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.
18. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, "Algebraic lattices in the metric space of lattices", *Chebyshev sb.*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.
19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Smooth manifold of one-dimensional lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.
20. Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M.: Mir, 1987. — 304 p.
21. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices". In: *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*. Vol. 211. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 27.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244

 $\bar{\omega}$ -веерные формации конечных групп

М. М. Сорокина, А. А. Горепекина

Сорокина Марина Михайловна — доктор физико-математических наук, Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского (г. Брянск).

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Горепекина Анастасия Андреевна — аспирант, Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского (г. Брянск).

e-mail: nastya3296@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются только конечные группы. Работа посвящена исследованию формаций, т.е. классов групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Для непустого множества ω простых чисел В.А. Ведерниковым с помощью двух видов функций были определены ω -веерные формации конечных групп. Развивая функциональный подход, предложенный В.А. Ведерниковым, в данной работе для произвольного разбиения $\bar{\omega}$ множества ω построены $\bar{\omega}$ -веерные формации. При построении используется σ -концепция А.Н. Скибы исследования конечных групп и их классов, где σ — произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. В работе приведены примеры $\bar{\omega}$ -веерных формаций, установлены их свойства (существование $\bar{\omega}$ -спутников различных видов; достаточные условия принадлежности группы G $\bar{\omega}$ -веерной формации; взаимосвязь с ω -веечными и $\mathbb{P}_\sigma$ -веечными формациями).

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, $\bar{\omega}$ -веерная формация, направление $\bar{\omega}$ -веерной формации.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

М. М. Сорокина, А. А. Горепекина. $\bar{\omega}$ -веерные формации конечных групп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 232–244.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244

 $\bar{\omega}$ -fibered Formations of Finite Groups

М. М. Sorokina, А. А. Gorepekina

Sorokina Marina Mikhailovna — doctor of physical and mathematical sciences, Bryansk State University named after I. G. Petrovsky (Bryansk)

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Gorepekina Anastasia Andreevna — postgraduate student, Bryansk State University named after I. G. Petrovsky (Bryansk)

e-mail: nastya3296@mail.ru

Abstract

Only finite groups are considered. The work is devoted to the study of formations which are classes of groups that are closed with respect to homomorphic images and subdirect products. For a non-empty set ω of primes V.A. Vedernikov, using two types of functions, defined ω -fibered formations of finite groups. Developing this functional approach, in the paper for an arbitrary partition $\bar{\omega}$ of the set ω we constructed $\bar{\omega}$ -fibered formations. The construction uses the σ -concept of A.N. Skiba for the study of finite groups and their classes, where σ is an arbitrary partition of the set $\mathbb{P}$ of all primes. We gave examples of $\bar{\omega}$ -fibered formations, established their properties (existence of $\bar{\omega}$ -satellites of different types; sufficient conditions for a group G to belong to an $\bar{\omega}$ -fibered formation; relationship with ω -fibered and $\mathbb{P}_\sigma$ -fibered formations).

Keywords: finite group, class of groups, formation, $\bar{\omega}$ -fibered formation, direction of an $\bar{\omega}$ -fibered formation.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

M. M. Sorokina, A. A. Gorepekina, 2021, " $\bar{\omega}$ -fibered Formations of Finite Groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 232–244.

1. Введение

В теории конечных групп многие исследования связаны с использованием понятия разбиения множества на классы. Так, фундаментальный π -метод, разработанный С.А. Чунихиным для изучения подгруппового строения конечных групп (см., например, [1]), определяет двухэлементное разбиение $\{\pi, \pi'\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. В работе [2] Л.А. Шеметков ввел в рассмотрение произвольное разбиение σ множества $\mathbb{P}$ и определил $\tilde{C}_\sigma$ -системы в группах, с помощью которых установил ряд свойств $\mathfrak{F}$ -подгрупп конечных групп для локальной формации $\mathfrak{F}$ (см. также [3], глава V). В 2013 году А.Н. Скиба для разбиения σ множества $\mathbb{P}$ сформулировал определения σ -примарной группы, σ -группы, σ -разрешимой, σ -нильпотентной групп и установил их ключевые свойства [4]. В дальнейшем в серии статей (см., например, [5] – [8]) им была разработана σ -теория конечных групп, позволяющая не только получать новые результаты в данном направлении, но и оценивать с иной точки зрения многие известные факты в теории групп. В работе [9] (см. также [10]) А.Н. Скиба построил σ -локальные формации — обобщение локальных формаций, хорошо изученных и нашедших многочисленные применения (см. [3], [11], [12]). В настоящее время σ -теория А.Н. Скибы интенсивно развивается в направлении исследования различных классов групп (см., например, [13] – [15]).

Другим известным обобщением понятия локальной формации является понятие ω -локальной формации, где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ [16]. В настоящее время ω -локальные формации также хорошо изучены и находят применение как в теории групп, так и в теории классов групп (см., например, [17]). В 1999 году В.А. Ведерников разработал концепцию ω -веерности для классов конечных групп, позволившую построить серию новых видов формаций [18]. При этом ω -локальные формации составили один из видов данной серии. В настоящей работе авторы применяют σ -концепцию А.Н. Скибы к построению $\bar{\omega}$ -веерных формаций конечных групп, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω .

2. Предварительные сведения

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [12]). Символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $N \triangleleft G$ означает, что N — нормальная подгруппа группы G . *Классом групп* называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой своей группой все группы

ей изоморфные. *Формацией* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно гомоморфных образов (т.е. $G \in \mathfrak{F}$, $N \triangleleft G \Rightarrow G/N \in \mathfrak{F}$) и подпрямых произведений (т.е. $G/A \in \mathfrak{F}$, $G/B \in \mathfrak{F} \Rightarrow G/A \cap B \in \mathfrak{F}$). *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп (т.е. $G \in \mathfrak{F}$, $N \triangleleft G \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$) и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих данному классу (т.е. $G = AB$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$). *Формация Фиттинга* — класс групп, являющийся формацией и классом Фиттинга. Для непустого множества групп $\mathfrak{X}$ через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный множеством $\mathfrak{X}$, т.е. $(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$; $form\mathfrak{X}$ ($formfit\mathfrak{X}$) — формация (формация Фиттинга), порожденная множеством $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех формаций (всех формаций Фиттинга), содержащих $\mathfrak{X}$. Для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая $\mathfrak{F}$; для формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем, $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп; $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\emptyset \subset \pi \subseteq \mathbb{P}$, $p \in \mathbb{P}$; $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$; $\mathfrak{G}_{\pi}$ — класс всех π -групп; $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{G}_{\{p\}}$ — класс всех p -групп; $\mathfrak{G}_{p'}$:= $\mathfrak{G}_{\{p\}'}$ — класс всех p' -групп; $\mathfrak{S}_{c\pi}$ — класс всех групп, у которых каждый главный π -фактор централен; $\mathfrak{S}_{c\pi} := \mathfrak{S}_{c\{p\}}$; $O_{\pi}(G) := G_{\mathfrak{G}_{\pi}}$ — $\mathfrak{G}_{\pi}$ -радикал группы G ; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G .

Для классов групп $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ через $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ обозначается их произведение, т.е. $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 := \{G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G \text{ такая, что } N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2\}$. Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2\}$ — *радикальное произведение* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$; если $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$ — *корадикальное произведение* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. При доказательстве утверждений используются следующие известные результаты.

ЛЕММА 1. (1) Пусть $\mathfrak{F}_1$ — класс групп, $\mathfrak{F}_2$ — формация Фиттинга. Если $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$, G — группа, $N \triangleleft G$ и $N \in \mathfrak{F}_1$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}/N$ ([18], Лемма 1 (8)).

(2) Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{F}_2$ — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ([12], IX, 1.11).

(3) Если $\mathfrak{F}_1$ — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп, $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ([12], IV, 1.7).

(4) Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — формации, то класс $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ является формацией ([12], IV, 1.8).

3. Основные результаты

3.1. Построение $\bar{\omega}$ -формаций и их простейшие свойства

В дальнейшем ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\bar{\omega}$ обозначает разбиение множества ω , т.е. $\bar{\omega} := \{\omega_i \mid i \in I\}$, $\omega_i \neq \emptyset$ для любого $i \in I$, $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ и $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Пусть G — группа, $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда

$$\bar{\omega} \cap \pi(G) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}; \quad \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{F}) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\bar{\omega}FR$ -функцией (иначе, формационно-радикальной $\bar{\omega}$ -функцией) назовем функцию вида $\gamma : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$, удовлетворяющую условию $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. $\bar{\omega}F$ -функцией (или, следуя [15], обобщенно формационной $\bar{\omega}$ -функцией) назовем функцию вида $f : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(0) \neq \emptyset$.

Для $\bar{\omega}F$ -функции f , следуя [16], введем в рассмотрение следующее подмножество множества $\bar{\omega}$: $Supp_{\bar{\omega}}(f) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid f(\omega_i) \neq \emptyset\}$.

ЛЕММА 2. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно, $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$. Тогда класс $\mathfrak{F}$ имеет следующее строение:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)} \mathfrak{G}_{\omega_i'}), \text{ если } \emptyset \neq Supp_{\bar{\omega}}(f) \neq \bar{\omega}; \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega}} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)), \text{ если } Supp_{\bar{\omega}}(f) = \bar{\omega}; \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega}} \mathfrak{G}_{\omega_i'}), \text{ если } Supp_{\bar{\omega}}(f) = \emptyset. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\emptyset \neq Supp_{\bar{\omega}}(f) \neq \bar{\omega}$, $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{H}_1 := \mathfrak{G}_{\omega}f(0)$, $\mathfrak{H}_2 := \cap_{\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$, $\mathfrak{H}_3 := \cap_{\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)} \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Установим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

I. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_{\omega}(G) \in f(0)$ (а) и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (б). Проверим, что $G \in \mathfrak{H}$.

1. Из (а) следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\omega}f(0) = \mathfrak{H}_1$.

2. Установим, что $G \in \mathfrak{H}_2$. Пусть $\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Если $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то из (б) получаем $G \in \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Если $\omega_i \notin \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то $\omega_i \cap \pi(G) = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Ввиду определения 1, $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$. Поскольку $\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$, то $f(\omega_i) \neq \emptyset$ и, следовательно, $\gamma(\omega_i) \subseteq \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Таким образом, $G \in \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Тем самым установлено, что $G \in \mathfrak{H}_2$.

3. Проверим, что $G \in \mathfrak{H}_3$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Тогда $f(\omega_i) = \emptyset$ и, ввиду (б), $\omega_i \notin \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Это означает, что $\omega_i \cap \pi(G) = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}_3$.

Из 1 – 3 получаем, что $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

II. Установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\omega}$ — класс Фиттинга и $f(0)$ — формация, а значит, класс, замкнутый относительно гомоморфных образов, то по лемме 1 (2) $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_{\omega} \diamond f(0)$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}_1$ следует, что $H/O_{\omega}(H) \in f(0)$ (с). Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Покажем, что $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Если $\omega_j \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)$, то из $H \in \mathfrak{H}_3$ получаем $H \in \mathfrak{G}_{\omega_j'}$, что невозможно. Следовательно, $\omega_j \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}_2$ имеем $H \in \gamma(\omega_j)f(\omega_j)$. Поскольку, согласно лемме 1 (2), $\gamma(\omega_j)f(\omega_j) = \gamma(\omega_j) \diamond f(\omega_j)$, то $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. С учетом (с) получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из I и II заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Доказательство равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ в случае $Supp_{\bar{\omega}}(f) = \bar{\omega}$ и доказательство равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_3$ в случае $Supp_{\bar{\omega}}(f) = \emptyset$ проводятся аналогично. $\square$

Поскольку пересечение любой совокупности формаций является формацией, то из леммы 2, в силу леммы 1 (3, 4), получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно. Тогда класс $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ является формацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно. Формацию

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$$

назовем $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником f , и обозначим $\mathfrak{F} := \bar{\omega}F(f, \gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всякая $\bar{\omega}$ -веерная формация $\mathfrak{F}$ является непустой, поскольку $\pi(1) = \emptyset$ и, следовательно, по определению 2 $G = 1 \in \mathfrak{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следуя [11], для $\bar{\omega}F$ -функций f_1 и f_2 полагаем $f_1 \leq f_2$, если $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$; для совокупности $\bar{\omega}F$ -функций $\{f_j \mid j \in J\}$ через $\cap_{j \in J} f_j$ обозначим $\bar{\omega}F$ -функцию f , удовлетворяющую условию $f(x) = \cap_{j \in J} f_j(x)$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$; $\bar{\omega}$ -спутник f $\bar{\omega}$ -веерной формации $\mathfrak{F}$ назовем внутренним, если $f(x) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$. Следуя [19], через $\bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ обозначим пересечение всех $\bar{\omega}$ -веерных формаций с направлением γ , содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 3. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ обладает таким внутренним $\bar{\omega}$ -спутником h , что $h(0) = f(0) \cap \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = f(\omega_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

(2) Формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ обладает таким $\bar{\omega}$ -спутником b , что $b(0) = \mathfrak{F}$ и $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

(3) Пусть $\mathfrak{F}_j = \bar{\omega}F(f_j, \gamma)$, где $j \in J$. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$, где $f = \bigcap_{j \in J} f_j$. В частности, пересечение любой совокупности $\bar{\omega}$ -всерных формаций с направлением γ является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с направлением γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$, где h — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $h(x) = f(x) \cap \mathfrak{F}$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$. Тогда $h \leq f$ и, согласно определению 2, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in \mathfrak{F}$. Тогда, согласно определению 2, $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \cap \mathfrak{F} = h(\omega_i)$ (а). Далее, из $G \in \mathfrak{F}$, ввиду определения 2, получаем $G/O_{\omega}(G) \in f(0) \cap \mathfrak{F} = h(0)$ (б). Из (а) и (б) следует, что $G \in \mathfrak{H}$, и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ и, значит, h — внутренний $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{B} := \bar{\omega}F(b, \gamma)$, где b — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $b(0) = \mathfrak{F}$ и $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\omega}(G) \in \mathfrak{F} = b(0)$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) = b(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B обладает единственной минимальной нормальной подгруппой P , причем $P = B^{\mathfrak{F}}$. Так как $B \in \mathfrak{B}$, то $B/O_{\omega}(B) \in b(0) = \mathfrak{F}$ и, следовательно, по определению $\mathfrak{F}$ -корадикала группы справедливо включение $P \subseteq O_{\omega}(B)$. Отсюда получаем, что $B/O_{\omega}(B) \cong (B/P)/(O_{\omega}(B)/P) = (B/P)/O_{\omega}(B/P)$. Так как $B/P \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(B/P)/O_{\omega}(B/P) \in f(0)$ и поэтому $B/O_{\omega}(B) \in f(0)$ (с). Поскольку $B \in \mathfrak{B}$, то для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(B)$ выполняется $B/B_{\gamma(\omega_i)} \in b(\omega_i) = f(\omega_i)$ (d). Таким образом, из (с) и (d) получаем, что $B \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ и $\mathfrak{M} := \bar{\omega}F(f, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}_j$ и, значит, $G/O_{\omega}(G) \in f_j(0)$ и для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ справедливо $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f_j(\omega_k)$, $j \in J$. Поэтому $G/O_{\omega}(G) \in \bigcap_{j \in J} f_j(0) = f(0)$ и $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in \bigcap_{j \in J} f_j(\omega_k) = f(\omega_k)$. Согласно определению 2, $G \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Тогда $M/O_{\omega}(M) \in f(0) = \bigcap_{j \in J} f_j(0)$ и $M/M_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k) = \bigcap_{j \in J} f_j(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$, $j \in J$. Отсюда следует, что $M/O_{\omega}(M) \in f_j(0)$ и $M/M_{\gamma(\omega_k)} \in f_j(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$, $j \in J$. Поэтому $M \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J$, и, значит, $M \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Утверждение (3) доказано. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Простейшим примером $\bar{\omega}$ -всерной формации является класс $\mathfrak{G}$ всех конечных групп. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathfrak{G} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$, где γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, f — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f(0) = \mathfrak{G} = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ обладает единственным минимальным $\bar{\omega}$ -спутником f таким, что $f(0) = \text{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(\omega_i) = \text{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(\omega_i) = \emptyset$, если $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3, формация $\mathfrak{G}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ и поэтому формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ существует. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность всех $\bar{\omega}$ -спутников формации $\mathfrak{F}$ и $m = \bigcap_{j \in J} f_j$. Ввиду леммы 3 (3), $m \in \{f_j \mid j \in J\}$. Так как m — наименьший элемент множества $\{f_j \mid j \in J\}$, то m — единственный минимальный $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — $\bar{\omega}F$ -функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $m = f$. Пусть $\bar{\omega}F(f, \gamma) := \mathfrak{H}$. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если $X \in \mathfrak{X}$, то, с учетом строения функции f , имеем $X/O_\omega(X) \in f(0)$ и $X/X_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(X)$. Это означает, что $X \in \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma) \subseteq \mathfrak{H}$.

Проверим, что $f \leq m$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $Y \in \mathfrak{X}$, что $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(Y)$. Из $Y \in \mathfrak{F}$ по определению 2 имеем $Y/Y_{\gamma(\omega_i)} \in m(\omega_i)$ и, значит, $m(\omega_i) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in m(\omega_i)$. Если $\omega_i \in (\bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})) \setminus (\bar{\omega} \cap \pi(G))$, то, с учетом определения 1, справедливо $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ и поэтому $G/G_{\gamma(\omega_i)} = 1 \in m(\omega_i)$. Следовательно, $f(\omega_i) = \text{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq m(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$. Далее, для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \pi(\mathfrak{X})$ справедливо $f(\omega_i) = \emptyset \subseteq m(\omega_i)$, и из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(0) = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq m(0)$. Таким образом, $f \leq m$. Это, согласно определению 2, означает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, и поэтому $f \in \{f_j \mid j \in J\}$. Поскольку m — минимальный $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$ и $f \leq m$, то $m = f$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Направление γ $\bar{\omega}$ -веерной формации назовем p -направлением (иначе, главным направлением, от англ. «principal»), если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть γ — p -направление $\bar{\omega}$ -веерной формации $\mathfrak{F}$ с $\bar{\omega}$ -спутником f , G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Если $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для некоторого $\omega_i \in \bar{\omega}$, то $G \in \mathfrak{F}$.
- (2) Если $G/O_\omega(G) \in f(0)$, $N \triangleleft G$, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(N)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\omega_i \in \bar{\omega}$, $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$. Установим, что $G \in \mathfrak{F}$.

Проверим, что $G/O_\omega(G) \in f(0)$. Пусть $O_\omega(G/O_{\omega_i}(G)) := K/O_{\omega_i}(G)$. Так как по условию $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(G/O_{\omega_i}(G))/O_\omega(G/O_{\omega_i}(G)) \in f(0)$ и, значит, $G/K \in f(0)$. Поскольку $K/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{G}_\omega$, то $K \in \mathfrak{G}_{\omega_i}\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{G}_\omega$. Следовательно, $K \subseteq O_\omega(G)$. Так как класс $f(0)$ является формацией и $G/K \in f(0)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/K)/(O_\omega(G)/K) \in f(0)$. Таким образом, $G/O_\omega(G) \in f(0)$ (a).

Пусть $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Покажем, что $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Если $\omega_k = \omega_i$, то по условию $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Пусть $\omega_k \in (\bar{\omega} \cap \pi(G)) \setminus \{\omega_i\}$. Тогда $\omega_i \cap \omega_k = \emptyset$ и поэтому $O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega_k'}$. Так как γ является p -направлением $\bar{\omega}$ -веерной формации, то по определению 3 $\gamma(\omega_k) = \mathfrak{G}_{\omega_k'}\gamma(\omega_k)$. Тогда, согласно лемме 1 (1), $(G/O_{\omega_i}(G))_{\gamma(\omega_k)} = G_{\gamma(\omega_k)}/O_{\omega_i}(G)$. По условию $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда, по определению 2, получаем $(G/O_{\omega_i}(G))/(G/O_{\omega_i}(G))_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Следовательно, $(G/O_{\omega_i}(G))/(G_{\gamma(\omega_k)}/O_{\omega_i}(G)) \in f(\omega_k)$ и, значит, $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (b).

Из (a) и (b) по определению 2 заключаем, что $G \in \bar{\omega}F(f, \gamma) = \mathfrak{F}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $G/O_\omega(G) \in f(0)$ (c), $N \triangleleft G$, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(N)$. Установим, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\omega_j \in (\bar{\omega} \cap \pi(G)) \setminus (\bar{\omega} \cap \pi(N))$. Ввиду определения 2 и условия, достаточно проверить, что $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Действительно, поскольку $\omega_j \notin \bar{\omega} \cap \pi(N)$, то $\omega_j \cap \pi(N) = \emptyset$. Следовательно, $N \in \mathfrak{G}_{\omega_j'}$ и, согласно лемме 1 (1), $(G/N)_{\gamma(\omega_j)} = G_{\gamma(\omega_j)}/N$. Так как по условию $G/N \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(G/N)/(G/N)_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Отсюда следует, что $G/G_{\gamma(\omega_j)} \cong (G/N)/(G_{\gamma(\omega_j)}/N) \in f(\omega_j)$. Таким образом, $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (d). Из (c) и (d) по определению 2 заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Утверждение (2) доказано. $\square$

3.2. Примеры $\bar{\omega}$ -веерных формаций

ЛЕММА 4. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi(\mathfrak{F}) \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником h таким, что $h(0) = \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = \emptyset$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = \emptyset$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(0)$. Поскольку $\pi(\mathfrak{F}) \cap \bar{\omega} = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Следовательно, по определению 2 $G \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $K = H^\mathfrak{F}$. Из $H \in \mathfrak{H}$ следует, что $H/O_\omega(H) \in h(0) = \mathfrak{F}$, и поэтому $K \subseteq O_\omega(H)$. Так как $\pi(K) \subseteq \omega$, то существует $\omega_j \in \bar{\omega}$ такое, что $\pi(K) \cap \omega_j \neq \emptyset$ (а). Поскольку $\pi(K) \subseteq \pi(H)$, то $\pi(K) \cap \omega_j \subseteq \pi(H) \cap \omega_j$ и, в силу (а), получаем $\pi(H) \cap \omega_j \neq \emptyset$. Это означает, что $\omega_j \in \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in h(\omega_j)$ и поэтому $h(\omega_j) \neq \emptyset$. С другой стороны, согласно условию, $h(\omega_j) = \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Формация $\mathfrak{E}$ всех единичных групп является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с любым направлением γ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с любым направлением γ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, π — такое непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, что для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ либо $\omega_i \cap \pi = \emptyset$, либо $\omega_i \subseteq \pi$, f — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $f(0) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$, и для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо: если $\omega_i \cap \pi = \emptyset$, то $f(\omega_i) = \emptyset$; если $\omega_i \subseteq \pi$, то $f(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Тогда $\bar{\omega}F(f, \gamma) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\omega}F(f, \gamma) := \mathfrak{F}$.

1. Покажем, что $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Так как класс $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ является замкнутым относительно гомоморфных образов, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} = f(0)$. Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Тогда $\omega_j \cap \pi(G) \neq \emptyset$ (а). Поскольку $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$, то $\pi(G) \subseteq \pi$. Это означает, что $\omega_j \cap \pi(G) \subseteq \omega_j \cap \pi$ и, ввиду (а), $\omega_j \cap \pi \neq \emptyset$. Тогда, согласно условию, $\omega_j \subseteq \pi$ и, в силу задания f , справедливо равенство $f(\omega_j) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ (б). Из $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ получаем $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Следовательно, с учетом (б), $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} \subseteq \mathfrak{F}$.

2. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда по определению 2 $H/O_\omega(H) \in f(0) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ (с). Проверим, что $O_\omega(H) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Из $H \in \mathfrak{F}$ по определению 2 справедливо $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Это означает, что $f(\omega_j) \neq \emptyset$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Отсюда, в силу задания функции f , получаем включение $\omega_j \subseteq \pi$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$ (d).

Пусть $\pi(O_\omega(H)) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Покажем, что $p_s \in \pi$ для любого $s \in \{1, \dots, k\}$. Действительно, так как $p_1 \in \omega$, то существует $\omega_{i_1} \in \bar{\omega}$ такое, что $p_1 \in \omega_{i_1}$ (е). Поскольку $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \pi(H)$, то $p_1 \in \omega_{i_1} \cap \pi(H)$. Это означает, что $\omega_{i_1} \cap \pi(H) \neq \emptyset$ и, следовательно, $\omega_{i_1} \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. С учетом (d) получаем, что $\omega_{i_1} \subseteq \pi$. Тогда, ввиду (е), заключаем, что $p_1 \in \pi$. Аналогично получаем, что $p_2 \in \pi, \dots, p_k \in \pi$. Поэтому $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \pi$. Так как $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \omega$, то $O_\omega(H) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ и, с учетом (с), заключаем, что $H \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда класс $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, $p \in \mathbb{P}$ и $\bar{\omega}$ — такое разбиение множества ω , что $\omega_i = \{p\}$ для некоторого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Тогда класс $\mathfrak{N}_p$ всех p -групп является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть γ — p -направление $\bar{\omega}$ -веерной формации. Тогда для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ формация $\gamma(\omega_i)$ является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega}$ и $\mathfrak{F} := \gamma(\omega_i)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -векрной формацией с направлением γ . Согласно определению 1, класс $\mathfrak{F}$ является формацией. Пусть $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$, где h — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = \mathfrak{F}$, $h(\omega_i) = \mathfrak{E}$, $h(\omega_j) = \mathfrak{G}$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \setminus \{\omega_i\}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(0)$. Пусть $\omega_t \in \pi(G) \cap \bar{\omega}$. Докажем, что $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t)$. Рассмотрим случай, когда $\omega_t = \omega_i$. Поскольку $h(\omega_t) = \mathfrak{E}$, то достаточно проверить, что $G/G_{\gamma(\omega_t)} = 1$. Действительно, $G \in \mathfrak{F} = \gamma(\omega_i) = \gamma(\omega_t)$. Согласно определению $\mathfrak{H}$ -радикала группы, имеем $G = G_{\gamma(\omega_t)}$ и поэтому $G/G_{\gamma(\omega_t)} = 1 \in \mathfrak{E} = h(\omega_t)$. В случае, когда $\omega_t \neq \omega_i$, справедливо $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in \mathfrak{G} = h(\omega_t)$. Следовательно, $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t)$ для любого $\omega_t \in \pi(G) \cap \bar{\omega}$. Тогда по определению 2 $G \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Докажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим случай, когда $\omega_i \in \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Согласно определению 2, $H/H_{\gamma(\omega_i)} \in h(\omega_i) = \mathfrak{E}$. Поэтому $H = H_{\gamma(\omega_i)} \in \gamma(\omega_i) = \mathfrak{F}$. Пусть теперь $\omega_i \notin \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Тогда из $\omega_i \in \bar{\omega}$ следует, что $\omega_i \cap \pi(H) = \emptyset$. Это означает, что H является ω_i' -группой. Так как γ — p -направление $\bar{\omega}$ -векрной формации, то $H \in \mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i) = \gamma(\omega_i) = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{F} = \gamma(\omega_i)$ — $\bar{\omega}$ -векрная формация с направлением γ , для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Следуя [18], $\bar{\omega}$ -векрную формацию с направлением γ назовем:

- $\bar{\omega}$ -полной, если $\gamma = \gamma_0$, где $\gamma_0(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;
- $\bar{\omega}$ -локальной, если $\gamma = \gamma_1$, где $\gamma_1(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\mathfrak{G}_{\omega_i}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;
- $\bar{\omega}$ -центральной, если $\gamma = \gamma_2$, где $\gamma_2(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i'}$ является $\bar{\omega}$ -полной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i'}\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -локальной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -центральной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

3.3. Связь $\bar{\omega}$ -векрных формаций с ω -векрными формациями

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [19] введены в рассмотрение $\mathbb{P}FR$ -функция и ωF -функция. Пусть δ — $\mathbb{P}FR$ -функция (иначе, формационно-радикальная функция), т.е. функция вида

$$\delta : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}, \text{ где } \mathfrak{G}_{p'} \subseteq \delta(p) \text{ для любого } p \in \mathbb{P};$$

f — ωF -функция (будем также называть f обобщенно формационной ω -функцией), т.е. функция вида

$$f : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}, \text{ где } f(0) \neq \emptyset.$$

Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω -векрной формацией с направлением δ и ω -спутником f , и обозначается $\mathfrak{F} := \omega F(f, \delta)$ [19].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -векрная формация с произвольным направлением δ . Тогда для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω найдутся $\bar{\omega}$ -векрные формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ такие, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{F}$ — ω -векрная формация с направлением δ , то $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где f — некоторый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω .

I. Рассмотрим $\bar{\omega}FR$ -функцию $\gamma' : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ такую, что $\gamma'(\omega_i) = \cap_{p \in \omega_i} \delta(p)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 := \bar{\omega}F(f_1, \gamma')$, где $f_1 : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f_1(0) = f(0)$ и $f_1(\omega_i) = \cap_{p \in \omega_i} f(p)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f_1(0) = f(0)$ (а).

Пусть $q \in \omega \cap \pi(G)$. Тогда существует $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ такое, что $q \in \omega_i$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G/G_{\gamma'(\omega_i)} \in f_1(\omega_i) \subseteq f(q)$. Так как $\gamma'(\omega_i) \subseteq \delta(q)$, то $G_{\gamma'(\omega_i)} \subseteq G_{\delta(q)}$ и поэтому $G/G_{\delta(q)} \cong (G/G_{\gamma'(\omega_i)})/(G_{\delta(q)}/G_{\gamma'(\omega_i)}) \in f(q)$ (б).

Из (а) и (б) следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

II. Рассмотрим $\bar{\omega}FR$ -функцию $\gamma'' : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ такую, что $\gamma''(\omega_i) = \text{formfit}(\cup_{p \in \omega_i} \delta(p))$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Пусть $\mathfrak{F}_2 := \bar{\omega}F(f_2, \gamma'')$, где $f_2 : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f_2(0) = f(0)$ и $f_2(\omega_i) = \text{form}(\cup_{p \in \omega_i} f(p))$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f(0) = f_2(0)$ (с).

Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Тогда $\omega_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$ и, значит, существует $r \in \omega_i$ такое, что $r \in \pi(G)$. Следовательно, $r \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\delta(r)} \in f(r) \subseteq f_2(\omega_i)$. Так как $\delta(r) \subseteq \gamma''(\omega_i)$, то $G_{\delta(r)} \subseteq G_{\gamma''(\omega_i)}$ и поэтому $G/G_{\gamma''(\omega_i)} \cong (G/G_{\delta(r)})/(G_{\gamma''(\omega_i)}/G_{\delta(r)}) \in f_2(\omega_i)$ (д).

Из (с) и (д) следует, что $G \in \mathfrak{F}_2$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$. $\square$

Следуя [5], разбиение $\bar{\omega}$ множества ω назовем *наименьшим*, если ω_i — одноэлементное множество для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , $\mathfrak{F}$ — непустая формация, γ и δ — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\mathbb{P}FR$ -функция соответственно такие, что $\gamma(\{p\}) = \delta(p)$ для любого $\{p\} \in \bar{\omega}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -всерная формация с направлением γ . Тогда $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(t, \gamma) = (G \in \mathfrak{F} \mid G/O_\omega(G) \in t(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in t(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ (1), где $t : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — некоторый $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть $m : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — такая ωF -функция, что $m(0) = t(0)$ (2) и $m(p) = t(\{p\})$ (3) для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{M} := \omega F(m, \delta) = (G \in \mathfrak{F} \mid G/O_\omega(G) \in m(0) \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in m(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G))$ (4). Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

1. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $T \in \mathfrak{F}$. Ввиду (1) и (2), имеем $T/O_\omega(T) \in t(0) = m(0)$. Пусть $p_i \in \omega \cap \pi(T)$. Покажем, что $T/T_{\delta(p_i)} \in m(p_i)$. Так как $p_i \in \omega$, то $\{p_i\} = \omega_i \in \bar{\omega}$. Поскольку $p_i \in \pi(T)$, то $\{p_i\} \cap \pi(T) \neq \emptyset$ и, значит, $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(T)$. Из $T \in \mathfrak{F}$, с учетом (1), имеем $T/T_{\gamma(\omega_i)} \in t(\omega_i)$. Так как по условию $\gamma(\omega_i) = \delta(p_i)$ и, в силу (3), $t(\omega_i) = m(p_i)$, то $T/T_{\delta(p_i)} \in m(p_i)$. Согласно (4), заключаем, что $T \in \omega F(m, \delta) = \mathfrak{M}$, и поэтому справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Ввиду (4) и (2), справедливо $M/O_\omega(M) \in m(0) = t(0)$. Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$. Тогда $\omega_j \cap \pi(M) \neq \emptyset$. Так как $\omega_j \in \bar{\omega}$ и $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , то существует $p_j \in \omega$ такое, что $\omega_j = \{p_j\}$. Поскольку $M \in \mathfrak{M}$ и $p_j \in \omega \cap \pi(M)$, то из (4) следует $M/M_{\delta(p_j)} \in m(p_j)$. Тогда, с учетом равенств $\gamma(\omega_j) = \delta(p_j)$ и $m(p_j) = t(\omega_j)$, получаем $M/M_{\gamma(\omega_j)} \in t(\omega_j)$. Согласно (1), имеем $M \in \bar{\omega}F(t, \gamma) = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ .

II. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ . Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где $f : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — некоторый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ . Пусть $h : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = f(0)$, $h(\{p\}) = f(p)$ для любого $\{p\} \in \bar{\omega}$, и $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

1. Пусть $F \in \mathfrak{F}$. Тогда $F/O_\omega(F) \in f(0) = h(0)$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(F)$. Тогда $\omega_i \cap \pi(F) \neq \emptyset$. Так как $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , то $\omega_i = \{p_i\}$ для некоторого $p_i \in \omega$. Из $\{p_i\} \cap \pi(F) \neq \emptyset$ имеем $\{p_i\} \cap \pi(F) = \{p_i\}$. Следовательно, $p_i \in \pi(F)$. Так как $p_i \in \omega \cap \pi(F)$,

то, ввиду $F \in \mathfrak{F}$, получаем $F/F_{\delta(p_i)} \in f(p_i)$. Поскольку $\delta(p_i) = \gamma(\{p_i\}) = \gamma(\omega_i)$ и $f(p_i) = h(\omega_i)$, то $F/F_{\gamma(\omega_i)} \in h(\omega_i)$. Тем самым установлено, что $F \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in h(0) = f(0)$. Пусть $p_j \in \omega \cap \pi(H)$. Тогда $p_j \in \omega$ и, значит, $\{p_j\} = \omega_j \in \bar{\omega}$. Поскольку $\omega_j \cap \pi(H) \neq \emptyset$, то $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in h(\omega_j)$. Так как $\gamma(\omega_j) = \delta(p_j)$ и $h(\omega_j) = f(p_j)$, то $H/H_{\delta(p_j)} \in f(p_j)$. Таким образом, заключаем, что $H \in \omega F(f, \delta) = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Последнее, в силу выбора $\mathfrak{H}$, означает, что $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. ω -Веерная формация с направлением δ называется: ω -полной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; ω -локальной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; ω -центральной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [18].

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω . Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -полной ($\bar{\omega}$ -локальной, $\bar{\omega}$ -центральной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω -полная (соответственно ω -локальная, ω -центральная) формация.

3.4. $\mathbb{P}_\sigma$ -веерные и $\bar{\omega}$ -веерные формации

Следуя [5], через σ обозначим произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$. В работе [9] (см. также [10]) введена в рассмотрение формационная σ -функция, т.е. функция вида $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$. Для краткости формационную σ -функцию будем называть $\mathbb{P}_\sigma F$ -функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\gamma : \sigma \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ — σFR -функция (в смысле определения 1 при $\omega = \mathbb{P}$), $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция. Следуя [19], формацию

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma(\sigma_i)} \in f(\sigma_i) \text{ для любого } \sigma_i \in \sigma \cap \pi(G))$$

назовем $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формацией с направлением γ и $\mathbb{P}_\sigma$ -спутником f , и обозначим $\mathfrak{F} := \mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Группа G называется $\{\sigma_i\}$ -нильпотентной [15], где $\sigma_i \in \sigma$, если каждый главный $\sigma_i d$ -фактор H/K группы G σ -централен в G , т.е. $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ — σ -примарная группа (т.е. σ_j -группа для некоторого $\sigma_j \in \sigma$). Пусть γ_i — такая σFR -функция, что для любого $\sigma_i \in \sigma$ класс $\gamma_i(\sigma_i)$ совпадает с классом всех $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных групп. Тогда $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация $\mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma_i)$ совпадает с σ -локальной формацией из [10].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\bar{\omega}$ и σ — такие разбиения множества ω и $\mathbb{P}$ соответственно, что $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, γ и γ_σ — $\bar{\omega} FR$ -функция и σFR -функция соответственно, удовлетворяющие условию $\gamma(\omega_i) = \gamma_\sigma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ . Тогда $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$. Пусть $h : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция такая, что $h(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $h(\sigma_j) = \emptyset$ для любого $\sigma_j \in \sigma \setminus \bar{\omega}$, и $\mathfrak{H} := \mathbb{P}_\sigma F(h, \gamma_\sigma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in h(\sigma_k) \text{ для любого } \sigma_k \in \sigma \cap \pi(G))$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_k \in \sigma \cap \pi(G)$. Установим, что $G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in h(\sigma_k)$. Для этого, ввиду $G \in \mathfrak{F}$, достаточно проверить, что $\sigma_k \in \bar{\omega}$. Действительно, так как $\sigma_k \in \sigma \cap \pi(G)$, то $\sigma_k \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и, ввиду $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, получаем, что $\pi(G) \subseteq \omega$ и $\sigma_k \cap \pi(G) \subseteq$

$\sigma_k \cap \omega$. Следовательно, $\sigma_k \cap \omega \neq \emptyset$ и, в силу $\sigma_k \in \sigma$, имеем $\sigma_k \in \bar{\omega}$. Так как $\sigma_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то, с учетом $G \in \mathfrak{F}$, имеем $G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in f(\sigma_k) = h(\sigma_k)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $M = H^{\mathfrak{F}}$. Согласно лемме 3 (2), можем считать, что $f(0) = \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда существует $\sigma_i \in \sigma \cap \pi(M)$ такое, что $p \in \sigma_i$. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\gamma_\sigma(\sigma_i)} \in h(\sigma_i)$ и, значит, $h(\sigma_i) \neq \emptyset$. В силу задания h , получаем, что $\sigma_i \in \bar{\omega}$. Поэтому $\sigma_i \subseteq \omega$ и $p \in \omega$. Следовательно, $\pi(M) \subseteq \omega$ и $M \subseteq O_\omega(H)$. Так как по определению $\mathfrak{F}$ -корадикала группы $H/M \in \mathfrak{F}$, то $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) \in \mathfrak{F} = f(0)$.

Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Так как $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\omega_j \in \sigma \cap \pi(H)$. Ввиду $H \in \mathfrak{H}$, имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} = H/H_{\gamma_\sigma(\omega_j)} \in h(\omega_j) = f(\omega_j)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Таким образом, заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ .

II. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ . Тогда найдется такая $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, что $\mathfrak{F} = \mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma_\sigma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_i)} \in f(\sigma_i) \text{ для любого } \sigma_i \in \sigma \cap \pi(G))$. Пусть $\mathfrak{B} := \bar{\omega} F(b, \gamma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in b(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in b(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$, где $b : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega} F$ -функция такая, что для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо равенство $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ и $b(0) = \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = b(0)$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Так как $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\omega_i \in \sigma \cap \pi(G)$ и, ввиду $G \in \mathfrak{F}$, получаем $G/G_{\gamma(\omega_i)} = G/G_{\gamma_\sigma(\omega_i)} \in f(\omega_i) = b(\omega_i)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $M = B^{\mathfrak{F}}$. Так как $B \in \mathfrak{B}$, то $B/O_\omega(B) \in b(0) = \mathfrak{F}$ и, значит, $M \subseteq O_\omega(B)$. Поскольку $B/M \in \mathfrak{F}$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то $\pi(B/M) \subseteq \omega$. Поэтому $\pi(B) \subseteq \omega$. Пусть $\sigma_j \in \sigma \cap \pi(B)$. Тогда $\sigma_j \cap \pi(B) \neq \emptyset$. Из $\pi(B) \subseteq \omega$ следует, что $\sigma_j \cap \pi(B) \subseteq \sigma_j \cap \omega$ и, значит, $\sigma_j \cap \omega \neq \emptyset$. Поскольку $\sigma_j \in \sigma$ и $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\sigma_j \in \bar{\omega}$. Ввиду $\sigma_j \cap \pi(B) \neq \emptyset$, имеем $\sigma_j \in \bar{\omega} \cap \pi(B)$. Из $B \in \mathfrak{B}$ получаем $B/B_{\gamma_\sigma(\sigma_j)} = B/B_{\gamma(\sigma_j)} \in b(\sigma_j) = f(\sigma_j)$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. $\square$

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 6 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\bar{\omega} = \sigma$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ .

4. Заключение

В заключение сформулируем следующие выводы:

1. Понятие $\bar{\omega}$ -веерной формации обобщает понятие ω -веерной формации, введенное в рассмотрение в работе [18]. В частности, в случае, когда $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , $\bar{\omega}$ -веерная формация совпадает с ω -веерной формацией.

2. Понятие $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формации является обобщением понятия веерной формации (см. [19], определение 2). В частности, рассуждая, как и при доказательстве утверждения 1, нетрудно проверить, что если σ — наименьшее разбиение множества $\mathbb{P}$, то $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация совпадает с веерной формацией.

3. Пусть $\bar{\omega}$ и σ — разбиения множеств ω и $\mathbb{P}$ соответственно. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ и $\bar{\omega} = \sigma$, т.е. в случае, когда речь идет об одном разбиении множества $\mathbb{P}$, согласно следствию 10, $\bar{\omega}$ -веерная формация совпадает с $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формацией.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. По мнению авторов, интерес представляют задача описания строения максимальных внутренних $\bar{\omega}$ -спутников $\bar{\omega}$ -веерной формации, вопросы изучения произведений $\bar{\omega}$ -веерных формаций, решеточных свойств $\bar{\omega}$ -веерных формаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964, 158 с.
2. Шеметков Л. А. Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 684-715.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978, 272 с.
4. Скиба А. Н. О σ -свойствах конечных групп. Препринт: изд-во Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013.
5. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. № 4 (21). P. 89-96.
6. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups II // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2015. № 3 (24). P. 70-83.
7. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups III // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2016. № 1 (26). P. 52-62.
8. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // Journal of Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1-16.
9. Скиба А. Н. О σ -локальных формациях конечных групп. Препринт: изд-во Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017.
10. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. № 1 (34). P. 79-82.
11. Скиба А. Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997, 240 с.
12. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992, 891 p.
13. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. № 2 (35). P. 85-88.
14. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, № 3. P. 1-10.
15. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. On one generalization of σ -local and Baer-local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2019. № 4 (41). P. 65-69.
16. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 114-147.
17. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012, 322 с.
18. Ведерников В. А. О новых типах ω -векрных формаций конечных групп // Український математичний конгрес – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. С. 36-45.
19. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -векрные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 43-60.

REFERENCES

1. Chunikhin, C. A. 1964, *Subgroups of Finite Groups*, Science and Technology, Minsk, 158 p.
2. Shemetkov, L. A. 1976, "Factorizations of non-simple finite groups", *Algebra and Logic*, vol. 15, no. 6, pp. 684-715.
3. Shemetkov, L. A. 1978, *Formations of finite groups*, Nauka, Moscow, 272 p.
4. Skiba, A. N. 2013, *On σ -properties of finite groups*, Gomel State University named after F. Skorina, Gomel.
5. Skiba, A. N. 2014, "On σ -properties of finite groups I", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 4 (21), pp. 89-96.
6. Skiba, A. N. 2015, "On σ -properties of finite groups II", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 3 (24), pp. 70-83.
7. Skiba A. N. 2016, "On σ -properties of finite groups III", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (26), pp. 52-62.
8. Skiba A. N. 2015, "On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups", *Journal of Algebra*, vol. 436, pp. 1-16.
9. Skiba, A. N. 2017, *On σ -local formations of finite groups*, Gomel State University named after F. Skorina, Gomel.
10. Skiba A. N. 2018, "On one generalization of the local formations", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (34), pp. 79-82.
11. Skiba, A. N. 1997, *Algebra of formations*, Belaruskaya Nauka, Minsk, 240 p.
12. Doerk, K., Hawkes, T. 1992, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 891 p.
13. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. 2018, "On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 2 (35), pp. 85-88.
14. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. 2019, "On n -multiply σ -local formations of finite groups", *Comm. Algebra*, vol. 47, no. 3, pp. 1-10.
15. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. 2019, "On one generalization of σ -local and Baer-local formations" *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 4 (41), pp. 65-69.
16. Skiba, A. N., Shemetkov, L. A. 1999, "Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Works*, vol. 2, no. 2, pp. 114-147.
17. Vorobyov, N. N. 2012, *Algebra of classes of finite groups*, Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, 322 p.
18. Vedernikov, V. A. 2002, "On new types of ω -fibered formations of finite groups", *Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Part 1. Kiev*, pp. 36-45.
19. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M. 2002, " ω -fibered formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 43-60.

Получено 15.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-245-255

Полиадические числа Лиувилля¹

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую часть работ автора о бесконечной линейной независимости полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число. Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Параметром рассматриваемых рядов типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля и значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля.

Отметим работы Е.С. Крупицына, где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля и работы Е.Ю. Юденковой, в которых значения F -рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля.

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

В статье доказывается простое утверждение о том, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля — глобально трансцендентное число. Устанавливается теорема о свойствах приближений совокупности p -адических чисел и ее следствие — достаточное условие алгебраической независимости совокупности p -адических чисел. Также получена теорема о глобальной алгебраической независимости совокупности полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадическое число, полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 245–255.

¹Работа выполнена при поддержке проекта Ведущие научные школы МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-245-255

Polyadic Liouville numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, RANEPa (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study here polyadic Liouville numbers, which are involved in a series of recent papers. The author considered the series

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field $\mathbb{Q}_p$. Here $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$. The values of these series were also calculated at polyadic Liouville number. The canonic expansion of a polyadic number λ is of the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of p -adic numbers $\mathbb{Q}_p$.

We call a polyadic number λ a polyadic Liouville number, if for any n and P there exists a positive integer A such that for all primes p , satisfying $p \leq P$ the inequality

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}$$

holds.

The paper gives a simple proof that the Liouville polyadic number is transcendental in any field $\mathbb{Q}_p$. In other words, the Liouville polyadic number is globally transcendental. We prove here a theorem on approximations of a set of p -adic numbers and its corollary — a sufficient condition of the algebraic independence of a set of p -adic numbers. We also present a theorem on global algebraic independence of polyadic numbers.

Keywords: polyadic number, polyadic Liouville number,

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2021, "Polyadic Liouville numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 245–255.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Теория трансцендентных чисел достаточно подробно освещена в [1]. Лиувиллевы числа, с изучения которых фактически и началась теория трансцендентных чисел, изучались во многих работах. Отметим две из них, [2], [3], наиболее близких по содержанию к настоящей работе. Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую работ автора [4], где параметром рассматриваемого ряда типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля и [5], где значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля. В работах [6]–[9] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отметим работы Е.Ю. Юденковой [10], [11], в которых значения F -рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля, работы В.Ю. Матвеева [12], [13] работу Е.С. Крупицына [14], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля. Интересные результаты о трансцендентности есть в работе А.С. Самсонова [15]. Отметим оценки многочленов из работы А.Х. Муньоса Васкеса [16].

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathbb{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\frac{n - S_n}{p-1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр p -ичного разложения числа n . Разумеется, ряд, члены которого — целые числа, сходящийся во всех полях p -адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p . Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых по соответствующему кольцу целых p -адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$|\lambda^{(p)} - A|_p < A^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля p -адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$ этого ряда.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля — глобально трансцендентное число.*

Для доказательства этой теоремы предположим, что отличный от тождественного нуля многочлен $P(x)$ степени d имеет целые коэффициенты. Предположим, что в некотором поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется равенство $P(\lambda) = 0$. Пусть A — произвольное натуральное число. Тогда либо $P(A) = 0$, либо с некоторой постоянной C_1 имеет место неравенство

$$|\lambda - A|_p > C_1 A^{-d}.$$

Действительно, рассматривая разложение многочлена $P(x)$ по степеням переменной $x - A$, получаем

$$P(x) = P(A) + P'(A)(x - A) + \dots + \frac{P^{(d)}(A)}{d!}(x - A)^d.$$

Все числа $P'(A), \dots, \frac{P^{(d)}(A)}{d!}$ — целые, поэтому их p -адические нормы не превосходят 1. По предположению, при подстановке λ вместо x получаем равенство

$$P(A) + P'(A)(\lambda - A) + \dots + \frac{P^{(d)}(A)}{d!}(\lambda - A)^d = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$P(A) = D(\lambda - A) \tag{1}$$

где D — некоторое целое p -адическое число. Если выполняется неравенство $P(A) \neq 0$, то очевидно, что с некоторой постоянной C_0 выполняются неравенства

$$0 < |P(A)| < C_0 A^d.$$

Для отличного от нуля рационального числа B справедлива оценка $|B|_p \geq B^{-1}$, поэтому

$$|P(A)|_p > \frac{1}{C_0 A^d} = C_1 A^{-d}.$$

Согласно (1),

$$|P(A)|_p \leq |\lambda - A|_p.$$

Таким образом,

$$|\lambda - A|_p > C_1 A^{-d},$$

что и утверждалось. По условию, λ — полиадическое число Лиувилля и для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Ввиду произвольности чисел n и P для любого рассматриваемого простого числа p существует бесконечное множество пар чисел $n, A, n > d$, для которых выполняется это неравенство. Увеличивая число n получаем, что существует бесконечное множество чисел A таких, что

$$|\lambda - A|_p < C_1 A^{-d},$$

следовательно, существует такое натуральное число A , что одновременно с этим неравенством выполняется неравенство $P(A) \neq 0$. Согласно доказанному выше, это означает, что в поле $\mathbb{Q}_p$

выполняется неравенство $P(\lambda) \neq 0$. Ввиду произвольности многочлена $P(x)$ это означает трансцендентность суммы ряда λ в поле $\mathbb{Q}_p$. Напомним, что число p — произвольное простое число. Глобальная трансцендентность полиадического числа Лиувилля доказана.

Сформулируем и докажем обобщение этой теоремы, аналог которого в работе [7] снабжен лишь очень краткой схемой доказательства.

ТЕОРЕМА 2. Пусть p — простое число. Пусть

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}_p, A_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m.$$

Пусть $P(x_1, \dots, x_m)$ ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, \dots, m$ равны d_i . Тогда если

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0, \quad (2)$$

то либо для некоторой постоянной C_2 выполняется неравенство

$$\max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - A_i|_p > C_2 |A_1|^{-d_1} \dots |A_m|^{-d_m}, \quad (3)$$

либо выполняется равенство

$$P(A_1, \dots, A_m) = 0. \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ. Если для любого ненулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, \dots, m$ равны d_i и любой постоянной C_2 существуют $A_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m$ такие, что

$$|\alpha_i - A_i|_p < C_2 |A_1|^{-d_1} \dots |A_m|^{-d_m}, i = 1, \dots, m \quad (5)$$

и

$$P(A_1, \dots, A_m) \neq 0, \quad (6)$$

то $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — алгебраически независимые элементы $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство теоремы 2.

Из (2) следует, что многочлен $P(x_1, \dots, x_m)$ можно представить в виде

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum B_{l_1, \dots, l_m} (x_1 - \alpha_1)^{l_1} \dots (x_m - \alpha_m)^{l_m}, \quad (7)$$

где суммирование в правой части равенства (7) производится по всем наборам неотрицательных целых чисел $l_1, \dots, l_m$, удовлетворяющих условиям $l_i \leq d_i, i = 1, \dots, m$, коэффициенты $B_{l_1, \dots, l_m} \in \mathbb{Z}_p$, причем $B_{0, \dots, 0} = 0$. Равенство (7) при $x_i = A_i, i = 1, \dots, m$ дает

$$P(A_1, \dots, A_m) = \sum B_{l_1, \dots, l_m} (A_1 - \alpha_1)^{l_1} \dots (A_m - \alpha_m)^{l_m},$$

откуда, ввиду равенства $B_{0, \dots, 0} = 0$, получаем

$$P(A_1, \dots, A_m) = \sum_{i=1}^m D_i (A_i - \alpha_i), \quad (8)$$

где $D_i \in \mathbb{Z}_p, i = 1, \dots, m$. Из (8) следует, что

$$|P(A_1, \dots, A_m)|_p \leq \max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - A_i|_p \max_{i=1, \dots, m} |D_i|_p \leq \max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - A_i|_p. \quad (9)$$

С другой стороны, если $P(A_1, \dots, A_m) \neq 0$, то выполнено неравенство

$$|P(A_1, \dots, A_m)| \leq C_3 |A_1|^{d_1} \dots |A_m|^{d_m}. \quad (10)$$

По свойству p -адической нормы, если целое число M отлично от нуля, то $|M|_p \geq M^{-1}$, поэтому (9), (10) дают (3). Теорема 2 доказана.

Докажем следствие. Неравенства (5), (6), справедливые для любого ненулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами означают, что не выполнены соотношения (3) и (4), следовательно, ни для какого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами не выполнено равенство (2). Это и доказывает следствие теоремы 2.

Для всех $i = 1, \dots, m$ обозначим

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}, a_{i,n} \in \mathbb{N} \quad (11)$$

$$A_{i,N} = \sum_{n=0}^N a_{i,n} \quad (12)$$

$$r_{i,N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{i,n} \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть для простого числа p при $N \geq N_p$, где N_p — натуральное число, зависящее от p , выполнены неравенства

$$|r_{i,N}|_p < (\max_{i=1, \dots, m} A_{i,N})^{-\gamma_p(N)}, i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

где $\gamma_p(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Кроме того, пусть

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln |r_{i,N}|_p}{\ln |r_{i+1,N}|_p} = 0, i = 1, \dots, m-1. \quad (15)$$

Тогда ряды (11) сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$.

СЛЕДСТВИЕ. Если условия теоремы 3 выполнены для любого простого числа p то ряды (11) — глобально алгебраически независимые полиадические числа.

Доказательство теоремы 3. Пусть p — простое число. При $N \geq N_p$ рассмотрим числа $A_{i,N}, i = 1, \dots, m$. Из (12), (13), (14) следует, что ряды (11) сходятся и для любой постоянной C_2 и любых неотрицательных целых чисел $d_i, i = 1, \dots, m$ выполнется неравенство

$$|\alpha_i - A_{i,N}|_p < C_2 |A_{1,N}|^{-d_1} \dots |A_{m,N}|^{-d_m}, i = 1, \dots, m.$$

Если при некотором N выполнено неравенство

$$P(A_{1,N}, \dots, A_{m,N}) \neq 0,$$

то по следствию теоремы 2 ряды (11) сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$. В противном случае, если для всех $N \geq N_p$ имеем равенство

$$P(A_{1,N}, \dots, A_{m,N}) = 0, \quad (16)$$

то при переходе в равенстве (16) к пределу при $N \rightarrow +\infty$ получаем

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0. \quad (17)$$

Как и в (7) имеем равенство, справедливое при всех $N \geq N_p$:

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum B_{l_1, \dots, l_m} (x_1 - \alpha_1)^{l_1} \dots (x_m - \alpha_m)^{l_m},$$

из которого с учетом (16) и (17) при подстановке $x_i = A_{i,N}$ вытекает:

$$0 = \sum B_{l_1, \dots, l_m} (A_{1,N} - \alpha_1)^{l_1} \dots (A_{m,N} - \alpha_m)^{l_m}, \quad (18)$$

где суммирование в правой части равенства (18) производится по всем наборам неотрицательных целых чисел $l_1, \dots, l_m$, удовлетворяющих условиям $l_i \leq d_i, i = 1, \dots, m$, коэффициенты $B_{l_1, \dots, l_m} \in \mathbb{Z}_p$, причем $B_{0, \dots, 0} = 0$. Кроме того, так как рассматриваемый многочлен ненулевой, среди коэффициентов $B_{l_1, \dots, l_m}$ есть отличные от нуля. Равенство (18) перепишем в виде

$$0 = \sum B_{l_1, \dots, l_m} (-r_{1,N})^{l_1} \dots (-r_{m,N})^{l_m}. \quad (19)$$

Рассмотрим любые два отличных от нуля слагаемых в правой части равенства (19), пусть это

$$B_{l_1, \dots, l_m} (-r_{1,N})^{l_1} \dots (-r_{m,N})^{l_m} \quad (20)$$

и

$$B_{k_1, \dots, k_m} (-r_{1,N})^{k_1} \dots (-r_{m,N})^{k_m}, \quad (21)$$

причем наборы чисел $(l_1, \dots, l_m)$ и $(k_1, \dots, k_m)$ различные. Тогда из (20) и (21) следует

$$\ln \frac{|B_{l_1, \dots, l_m} (-r_{1,N})^{l_1} \dots (-r_{m,N})^{l_m}|_p}{|B_{k_1, \dots, k_m} (-r_{1,N})^{k_1} \dots (-r_{m,N})^{k_m}|_p} = \ln \frac{|B_{l_1, \dots, l_m}|_p}{|B_{k_1, \dots, k_m}|_p} + \sum_{i=1}^m (l_i - k_i) \ln |r_{i,N}|_p. \quad (22)$$

Среди чисел $l_i - k_i$ есть отличные от нуля. Пусть s — наибольшее из чисел i удовлетворяющих такому условию, т.е. пусть $l_s - k_s \neq 0$, но эти разности с большими, чем s номерами (если такие есть) равны нулю. Из условия (14) следует, что

$$|r_{i,N}|_p \rightarrow 0, \ln |r_{i,N}|_p \rightarrow -\infty, N \rightarrow +\infty, i = 1, \dots, m.$$

Из равенства (22) и условия (15) получаем, что главным членом правой части формулы (22) является $(l_s - k_s) \ln |r_{s,N}|_p$. Тогда, в зависимости от знака числа $l_s - k_s \neq 0$, правая часть формулы (22) стремится либо к $+\infty$ либо к $-\infty$. Это означает, что отношение p -адических норм величин (20), (21) стремится либо к бесконечности, либо к нулю при стремлении $N \rightarrow +\infty$. Поскольку отличных от нуля коэффициентов $B_{l_1, \dots, l_m}$ конечное число, при достаточно большом N одно из соответствующих слагаемых в правой части равенства (19) имеет p -адическую норму большую, чем остальные слагаемые и p -адическая норма правой части этого равенства при рассматриваемом N равна p -адической норме этого слагаемого и отлична от 0, что противоречит равенству (19). Теорема 3 доказана.

Следствие теоремы 3 не требует отдельного доказательства.

В следующей теореме приведен пример применения теоремы 3 к явно заданной совокупности полиадических чисел. Выберем произвольным образом натуральные числа

$$n_{1,0} < n_{2,0} < \dots < n_{m,0}. \quad (23)$$

Пусть для некоторого неотрицательного целого числа N определены натуральные числа

$$n_{1,N} < n_{2,N} < \dots < n_{m,N}. \quad (24)$$

Положим

$$M_{N+1} = \min \frac{\ln p}{p-1}, \quad (25)$$

где минимум в правой части равенства (23) взят по всем простым числам, удовлетворяющим неравенству

$$p \leq n_{m,N}.$$

Пусть $\gamma(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Потребуем, чтобы число $n_{1,N+1}$ удовлетворяло неравенству

$$n_{1,N+1} M_{N+1} - \ln n_{1,N+1} > \gamma(N) \ln(2(n_{m,N}!)) \quad (26)$$

и чтобы натуральные числа $n_{i+1,N+1}, i = 1, \dots, m-1$ удовлетворяли условиям

$$n_{i,N+1} < \varphi_i(N) n_{i+1,N+1}, \quad (27)$$

где

$$\varphi_i(N) \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty, i = 1, \dots, m-1. \quad (28)$$

Пусть

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} (n_{i,k})! \quad (29)$$

$$A_{i,N} = \sum_{k=0}^N (n_{i,k})! \quad (30)$$

$$r_{i,N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} (n_{i,k})! \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть натуральные числа $n_{i,k}, i = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям (23) - (28). Тогда для любого простого числа p ряды (29) сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$. Иными словами, полиадические числа (29) глобально алгебраически независимы.

Доказательство теоремы 4.

Из (24), (29) - (31) вытекают равенства

$$|r_{i,N}|_p = |(n_{i,N+1})!|_p, i = 1, \dots, m. \quad (32)$$

Из условия (27) следует, что

$$\max_{i=1, \dots, m} |r_{i,N}|_p = |(n_{1,N+1})!|_p \quad (33)$$

и мы используем формулу для вычисления p -адической нормы факториала

$$|(n_{1,N+1})!|_p = \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1}(n_{1,N+1} - S_{n_{1,N+1}})\right), \quad (34)$$

где $S_{n_{1,N+1}}$ обозначает сумму цифр p -ичного разложения числа $n_{1,N+1}$. Очевидно неравенство

$$S_{n_{1,N+1}} \leq (p-1) \log_p n_{1,N+1} = (p-1) \frac{\ln n_{1,N+1}}{\ln p}. \quad (35)$$

Ввиду (34) и (35)

$$\ln |(n_{1,N+1})!|_p \leq -\frac{\ln p}{p-1} n_{1,N+1} + \ln n_{1,N+1}. \quad (36)$$

Для простого числа p выберем число N_p наименьшим натуральным числом N , для которого выполняется неравенство $n_{m,N} \geq p$. Тогда из равенства (25) следует, что при $N \geq N_p$

$$M_{N+1} \leq \frac{\ln p}{p-1}. \quad (37)$$

Из неравенств (26) и (37) следует

$$-\frac{\ln p}{p-1}n_{1,N+1} + \ln n_{1,N+1} \leq -M_{N+1}n_{1,N+1} + \ln n_{1,N+1} < -\gamma(N) \ln(2(n_{m,N}!)). \quad (38)$$

Согласно (36), (38)

$$|(n_{1,N+1}!)|_p \leq \exp(-\gamma(N) \ln(2(n_{m,N}!))). \quad (39)$$

Для всех $i = 1, \dots, m-1$, согласно (30)

$$\begin{aligned} A_{i,N} \leq A_{m,N} &= \sum_{k=0}^N (n_{m,k})! = (n_{m,N})! \left(1 + \frac{(n_{m,0})!}{(n_{m,N})!} + \dots + \frac{(n_{m,N-1})!}{(n_{m,N})!}\right) < \\ &< (n_{m,N})! (1 + (N-1) \frac{(n_{m,N-1})!}{(n_{m,N})!}) < 2(n_{m,N})!. \end{aligned} \quad (40)$$

Из (32), (39), (40) следует, что при $N \geq N_p$ выполнены неравенства (14). Соотношения (15) сразу следуют из условий (27) и равенств (32), (33). Применение теоремы 3 завершает доказательство теоремы 4.

3. Заключение

Полученные результаты будут полезны при исследовании арифметических свойств полиадических рядов, коэффициенты которых связаны с полиадическими числами Лиувилля. Это относится как к развитию метода Зигеля-Шидловского, так и к применениям аппроксимаций Эрмита-Паде первого и второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с. (Английский перевод: Andrei B. Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467 pp.).
2. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers. // J. Pure and Appl. Algebra.-1978.-13.-pp.41-47.
3. Waldschmidt M. Independance algebrique de nombres de Liouville. // Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494, с. 69-70. (Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312
6. Чирский В. Г. Обобщение понятия глобального соотношения. // Труды по теории чисел. Зап.научн.сем.ПОМИ.-322.-ПОМИ,Спб.-2005.-220-232.
7. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем.,мех.-1994.-№3.-с.93-95.

8. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // *Russ. J. Math. Phys.* 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
9. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series. // *Russ. J. Math. Phys.* 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
10. Юденкова Е.Ю. Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадической лиувиллевой точке. // *Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 536 – 542*
11. Юденкова Е.Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках. // *Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346*
12. Матвеев В. Ю., Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // *Чебышевский сборник.-2018.-т.17.- вып. 3.-с. 156 – 167*
13. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей // *Чебышевский сборник. 2019.-т.20.- вып. 2.-с. 383 – 390*
14. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов. // *Чебышевский сборник. 2019.-т. 20.- вып. 2.-с. 374 – 382*
15. Самсонов А. С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p -адических полей, II. // *Чебышевский сборник. 2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346*
16. Муньос Васкес А. Х. Арифметические свойства некоторых гипергеометрических F -рядов.. // *Чебышевский сборник. 2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 519 – 527*

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1989.“Transcendental Numbers“, *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp.
2. Adams. W. 1990.“On the algebraic independence of certain Liouville numbers”,*J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol, 13, pp. 41-47.
3. Waldschmidt. M. 1990.“Independance algebrigue de nombres de Liouville.”,*Lect.Notes Math.*, Vol, 1415, pp. 225-235.
4. Chirskii V. G., 2020. “Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter”, *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp. 412-413.
5. Chirskii V. G., 2021.“Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 304-312.
6. Chirskii V. G., 2006. “Generalization of the Notion of a Global Relation”, (*J. Math. Sci(N.Y)*), Vol. 137, no. 2,pp. 4744-4754.
7. Chirskii V. G. 1994. “ Q_n series which are algebraically independent in all local fields”, (*Vestn. Mosc. univ. Ser. 1.,Math., mech.*), no. 3, pp. 93-95
8. Chirskii V. G. 2019. “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp. 286-305.
9. Chirskii V. G. 2020. “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp. 175-184.

10. Yudenkova E. Yu. 2021 “Arithmetic properties of series of certain classes at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 536-542
11. Yudenkova E. Yu. 2021. “Infinite linear and algebraic independence of values of F-series at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 334-346.
12. Matveev V. Yu. 2016. “Algebraic independence of certain almost polyadic series”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp. 156-167.
13. Matveev V. Yu. 2019. “Properties of elements of direct products of fields”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp. 383-390.
14. Krupitsin E. S. 2019. “Arithmetic properties of series of certain classes”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp. 374-382.
15. Samsonov A. S. 2021. “Arithmetic properties of elements of direct products of p-adic fields. II”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 236-256.
16. Munjos Vaskes A. H. 2021. “Arithmetic properties of certain hypergeometric F-series”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 519-527.

Получено 11.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297

**Некоторые теоретико-числовые методы решения
дифференциальных уравнений в частных производных¹**

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В данной работе построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Также найдена погрешность данного метода. В случае использования бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость.

Кроме того предложен вариант построения оптимальных сеток в двумерном случае. Он основан на приближении алгебраических решеток целочисленными. В двумерном случае построенные таким образом решетки всегда будут давать обобщенные параллелепипедальные сетки. При этом имеются простые способы оценки качества полученных сеток. Один такой способ, основанный на использовании гиперболического параметра, рассмотрен в данной работе.

Ключевые слова: конечные поля, квадраты, суммы.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. В. Родионов. Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 256–297.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297

Some number-theoretic methods for solving partial derivatives

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: rodionovalexandr@mail.ru***Abstract**

In this paper, a new method is constructed for solving partial differential equations using a sequence of nested generalized parallelepiped grids.

This method is a generalization and development of the V. S. Ryaben'kii and N. M. Korobov method for the approximate solution of partial differential equations for the case of using arbitrary generalized parallelepiped grids for integer lattices. The error of this method was also found. In the case of using an infinite sequence of nested generalized parallelepiped grids, a fairly fast convergence will take place.

In addition, a variant of constructing optimal grids in the two-dimensional case is proposed. It is based on the integer approximation of algebraic lattices. In the two-dimensional case, the grids constructed in this way will always give generalized parallelepiped grids. Moreover, there are simple ways to assess the quality of the resulting meshes. One such method, based on the use of a hyperbolic parameter, is considered in this paper.

Keywords: finite fields, squares, sums.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2021, "Some number-theoretic methods for solving partial derivatives", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 256–297.

1. Введение**1.1. Актуальность темы исследования и степень ее разработанности**

Данная работа посвящена применению теоретико-числового метода к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

Сам метод берёт своё начало в 1956 году, когда в Математическом институте АН СССР под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова начал работать семинар, целью которого была разработка новых многомерных квадратурных формул вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \sum_{k=1}^N \rho_k f(M_k) - R_N[f], \quad (1)$$

где $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — сетка, с помощью которой производится численное интегрирование, ρ_k — веса, а $R_N[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Необходимость новых методов была обусловлена тем, что в случае больших размерностей использование равномерных сеток затруднено, а метод Монте-Карло не может обеспечить достаточную точность.

В результате работы семинара были получены многомерные квадратурные формулы с ретико-числовыми сетками.

Для оценки погрешности квадратурных формул Н. М. Коробовым был введён класс функций $E_s^\alpha(C)$ ($\alpha > 1$). Функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит этому классу, если она имеет период равный единице по каждой из переменных и для коэффициентов Фурье этой функции $C(m_1, \dots, m_s)$ выполняется оценка

$$C(m_1, \dots, m_s) \leq \frac{|C|}{(\overline{m}_1 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s)^\alpha},$$

где $\overline{m} = \max(|x|, 1)$. В случае, если значение константы C не имеет значения, класс обозначается E_s^α .

Первыми сетками, полученными в ходе работы семинара были неравномерные сетки. Такая сетка имеет вид

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N.$$

В случае использования неравномерных сеток с N равном квадрату простого числа для погрешности квадратурной формулы (1) справедлива оценка $|R_N[f]| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Заметим, что метод Монте-Карло также обеспечивает эту оценку с вероятностью, близкой к единице, однако неравномерные сетки эту оценку гарантируют. При этом у неравномерных сеток обнаруживается недостаток по сравнению с равномерными. Дело в том, что для погрешности квадратурных формул с равномерной сеткой выполняется оценка $|R_N[f]| = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right)$, и их точность тем выше, чем больше значение α , то есть чем больше гладкость интегрируемой функции. В то время как точность квадратурных формул с неравномерной сеткой от гладкости функции не зависит.

Дальнейшее развитие теоретико-числового метода привело к появлению сеток, обладающих достоинствами неравномерных сеток, но лишённых описанного выше недостатка.

В 1959 году в работе [27] Н. М. Коробов получил квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

где целые $a_1, \dots, a_s$ — специально выбранные числа — оптимальные коэффициенты.

Для погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками с оптимальными коэффициентами выполняется оценка $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от α и s . Точность таких формул значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Отметим, что вопрос построения эффективных алгоритмов нахождения оптимальных коэффициентов меньше чем за $O(N)$ арифметических операций остаётся открытым. Все имеющиеся алгоритмы для размерности не ниже третьей представляют собой полный перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции (см. например, [6]).

В 1976 году в работах [34] и [35] К. К. Фроловым были предложены алгебраические решётки и соответствующие им алгебраические сетки, на которых достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова (см. [26], [36]) и правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток (см. [7], [8]). При этом в предложенном методе выбор сетки зависел от гладкости интегрируемой функции.

В 1984 году Н. М. Добровольский [17], [19] предложил использовать бесконечно дифференцируемые весовые функции, что позволило в методе Фролова избавиться от зависимости квадратурной формулы от класса E_s^α .

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. При оценке погрешности приближенного интегрирования возникают большие величины констант, которые трудно оценить.

В работе [10] Н. М. Добровольский поставил вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой.

В последнее время методы многомерного интегрирования и интерполирования с использованием жадных алгоритмов получили своё развитие в работах В. Н. Темлякова (см., например, [43, 44, 45, 46]).

Применение теоретико-числового метода не ограничивается только численным интегрированием. За последнее время появились новые результаты в теории и практике численного интерполирования и решения интегральных уравнений. При этом теория применения теоретико-числовых методов в приближенном анализе к решению дифференциальных уравнений в частных производных развивалась не так активно.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [33] предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (2)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s),$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \quad (3)$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (4)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$. Метод В. С. Рябенького заключался в использовании произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [26] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \quad (5)$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (6)$$

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_s) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1-x_1) \cdot \dots \cdot x_s(1-x_s) = 0. \quad (7)$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = 0, \quad G_s = [0; 1]^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) (k = 0, \dots, N-1)$ приближенного решения указанной задачи Дирихле

на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$.

В последние годы в работах Н. Темиргалиева [2, 1] были получены оценки приближенного решения дифференциальных уравнений для некоторых частных случаев.

Методы нахождения оптимальных коэффициентов также получили своё развитие в последнее время. В 2011 году В. А. Быковский и С. В. Гассан [3] предложили новый критерий оптимальности, который можно вычислять эффективнее, чем уже имеющиеся — значение функции качества и гиперболический параметр решётки.

Логика научного направления делает актуальным продолжение исследований в указанных направлениях.

1.2. Цель и задачи исследования

Целью данной работы является построение новых методов решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Поэтому в работе были поставлены следующие **задачи**:

- Построить алгоритм решения задачи Коши (2) — (4) с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найти погрешность указанного алгоритма решения задачи Коши в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Построить алгоритм решения задачи Дирихле (5) — (6) с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найти погрешность указанного алгоритма решения задачи Дирихле в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Предложить вариант построения оптимальных теоретико-числовых сеток в двумерном случае с помощью приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными.

1.3. Новизна исследования

Построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Он состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$. Ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \dots \subset M(\Lambda_n) \subset \dots$$

в единичном кубе $G_s = [0; 1]^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν :

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \dots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \dots$$

При соответствующих условиях на последовательность решеток для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из класса E_s^α ($\alpha > 1$) для последовательности интерполяционных многочленов $I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x})$ будет иметь место достаточно быстрая сходимость

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Как будет показано далее, при достаточно естественных ограничениях либо на дифференциальный оператор $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, либо на начальные условия в задаче Коши последовательность решений $u_\nu(t, \vec{x})$, соответствующих начальным условиям $\varphi_\nu(\vec{x}) = I_{\Lambda_\nu} \varphi(\vec{x})$ будет сходиться к решению $u(t, \vec{x})$. Аналогичная картина будет иметь место для задачи Дирихле.

1.4. Теоретическая и практическая значимость работы

Данная работа развивает теорию применения теоретико-числовых методов в приближенном анализе и позволяет применять предложенные алгоритмы для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты работы могут быть использованы для создания программных комплексов по численному решению задачи Коши для уравнений с частными производными, заданными широким классом дифференциальных операторов, и для решения задачи Дирихле с периодической функцией ограничений.

1.5. Методология и методы исследования

В работе используются методы элементарной теории чисел, аналитической теории чисел, математического анализа, функционального анализа и геометрии чисел. Основным методом решения дифференциальных уравнений в частных производных является теоретико-числовой метод в приближенном анализе, основанный на использовании вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

1.6. Положения, выносимые на защиту

- Построен алгоритм решения задачи Коши с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Построен алгоритм решения задачи Дирихле с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найдена погрешность указанных алгоритмов в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Предложен вариант построения оптимальных теоретико-числовых сеток в двумерном случае с помощью приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными.

2. Необходимые сведения из теоретико-числового метода

Изложим сведения из теоретико-числового метода, необходимые при решении задач Коши и Дирихле с помощью обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$a_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + a_s \vec{\lambda}_s,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — базисом этой решетки.

Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что если $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{js})$ ($1 \leq j \leq s$) — произвольный базис решетки Λ , то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{j1}^*, \lambda_{j2}^*, \dots, \lambda_{js}^*)$ ($1 \leq j \leq s$), который определяется равенством

$$(\vec{\lambda}_j, \vec{\lambda}_i^*) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (1 \leq j, i \leq s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Ясно, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Приведем определение обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Пусть целочисленная решетка Λ задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Рассмотрим взаимную решетку Λ^* , которая задается матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{s1}}{\det \Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1s}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{ss}}{\det \Lambda} \end{pmatrix},$$

где величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A .

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ ($\nu = 1, \dots, s$) взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \quad (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина T — его параметром.

r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ называется подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно решетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M . Каждая полная система вычетов решетки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решетки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решетки Λ^* относительно фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^* / \mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решетки определена естественная операция сложения $+_{M(\Lambda)}$, относительно которой она является конечной абелевой группой. Нетрудно видеть, что если $\vec{x}, \vec{y} \in M(\Lambda) = \Lambda^* / \mathbb{Z}^s$, то $\vec{x} +_{M(\Lambda)} \vec{y} = \{\vec{x} + \vec{y}\}$.

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решетка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, где $p_1 = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решетки $\mathbb{Z}$ по подрешетке $p\mathbb{Z}$. Приведем многомерный аналог этому понятию из работы [24].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ называется минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, называется абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такая полная система вычетов обозначается через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае

таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

Приведем без доказательства несколько лемм и теорем из работы [24].

ЛЕММА 1. Для любой целочисленной решетки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (9)$$

Для произвольной целочисленной решетки Λ определяются второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вторым гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Другими словами все целые точки этого креста не сравнимы по модулю Λ .

Через $K_Z(T)$ обозначим множество всех целых точек, принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$. Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geq 3^s$ можно определить функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leq N$, $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (10)$$

Из (10) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из N элементов.

В работе [13] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При $N > e^{s \cdot e}$ справедливы неравенства:

$$\frac{(s-1)!(N-1)}{2^s (\ln N + \frac{3s}{2})^{s-1}} \leq T_s(N) \leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \quad (11)$$

Из определений 4 и 5 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперболическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) \quad (12)$$

Рассмотрим для примера случай решетки $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \quad (14)$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \quad (15)$$

ЛЕММА 2. Для любой целочисленной решетки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ такая, что выполнены соотношения (12).

ЛЕММА 3. Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ удовлетворяет соотношению (12).

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s . Для целого вектора $\vec{m}$ рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\vec{m})$.

ЛЕММА 4. Если для целочисленной решетки Λ вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы ($q(\vec{m}) = q(\Lambda)$), то для третьего гиперболического параметра решетки Λ справедлива оценка сверху:

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m}) - r_2(\vec{m})}}. \quad (16)$$

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_s$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$.

ЛЕММА 5. Пусть для заданного $\vec{j}_s \in J_s$ вектора $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решетки Λ определены из условий:

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \quad (17)$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_\nu} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_\nu}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \quad (18)$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решетки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть числа $N_1(\vec{j}_s), \dots, N_s(\vec{j}_s)$ определены равенствами:

$$N_\nu(\vec{j}_s) = \lambda_{\nu,j_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, s),$$

тогда для любого $\vec{x} \in \Lambda$ имеем $x_{j_1} \equiv 0 \pmod{N_1(\vec{j}_s)}$ и для любого $\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)}$ имеем $x_{j_\nu} \equiv 0 \pmod{N_\nu(\vec{j}_s)}$ ($\nu = 2, \dots, s$). Отсюда следует, что любой $\vec{x} \in \Lambda$ представляется линейной целочисленной комбинацией векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ второй гиперболический параметр решетки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[\frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \dots \left[\frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (19)$$

Следуя работе [11], последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будем называть концентрической.

Пусть даны две целочисленные решетки $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$ и $\det \Lambda_1 < \det \Lambda_2$, тогда для обобщенных параллелепипедальных сеток имеем вложение: $M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2)$.

Действительно, рассмотрим взаимные решетки Λ_1^* и Λ_2^* :

$$\Lambda_1^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda_1 \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}, \quad \Lambda_2^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda_2 \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что $\Lambda_1^* \subset \Lambda_2^*$, а, значит,

$$M(\Lambda_1) = (\Lambda_1^* \cap G_s) \subset M(\Lambda_2) = (\Lambda_2^* \cap G_s).$$

Аналогичное свойство установлено для минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ (см. лемму 1 на стр. 264).

Таким образом, если имеется вложенная последовательность решёток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$, то она задает концентрическую последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

В частности, если $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$, то ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \dots \subset M(\Lambda_n) \subset \dots$$

в единичном кубе $G_s = [0; 1]^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda_\nu)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν :

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \dots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \dots$$

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [15] и [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решетки Λ , целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решетки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_\Lambda^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^* / \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s / \Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 4. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

Как уже отмечалось, класс периодических функций E_s^α состоит из функций $f(\vec{x})$ с рядом Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\vec{m}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x} = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{m}) (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| \quad (21)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — пространству всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (21) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \quad (22)$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Относительно норм (22) и (23) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [16]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_2} &\leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \\ \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \end{aligned} \quad (24)$$

Последнее неравенство (24) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $c(\vec{m}) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работ [13, 14].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (25)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (26)$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \dots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (27)$$

ЛЕММА 6. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (28)$$

ЛЕММА 7. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (29)$$

ЛЕММА 8. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (31)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (33)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (34)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (37)$$

Из теоремы 6 и равенств (35) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Из оценки снизу (37) и равенства (35) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (39)$$

Таким образом, оценка сверху (38) и оценка снизу (39) совпадают по порядку относительно t .

Теорема 4 позволяет доказать, что произвольную функцию $f(\vec{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 8. *Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (40)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (41)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

Тригонометрический полином (40) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ . Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать $M^*(\Lambda)$, чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе E_s^α .

Рассмотрим сначала решетку $N \cdot \mathbb{Z}^s$. Как известно, для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ справедливо включение: $N \cdot \mathbb{Z}^s \subset \Lambda$. В следующей теореме будем использовать обозначения (13) и (14).

ТЕОРЕМА 9. *Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и интерполяционного полинома $S_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{x})$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} & |c(\vec{m}) - c_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{m})| \leq \\ & \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\|f(\vec{x}) - S_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}2^\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}. \quad (43)$$

Формула (40) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α , который каждой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (40). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (44)$$

ЛЕММА 9. *Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство*

$$\|I_\Lambda f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}. \quad (45)$$

ЛЕММА 10. *Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{x})$ вида*

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (46)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (47)$$

Множество тригонометрических полиномов вида (46) обозначим через P_Λ .

ТЕОРЕМА 10. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda \geq 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geq 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}$ для абсолютно минимальной гиперболической полной система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ справедливо равенство (47).

При $t > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином $f(\vec{x}) \in P^{(t)}$ такой, что равенство (47) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap \ker I_\Lambda \neq \emptyset.$$

Для любого $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $E_{s,\vec{m}}^\alpha$ банахово подпространство пространства E_s^α , состоящее из функций вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \quad (48)$$

Ясно, что имеет место разложение E_s^α в прямую сумму $E_{s,\vec{m}}^\alpha$:

$$E_s^\alpha = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus E_{s,\vec{m}}^\alpha.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ представима в виде сумм

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} f_{\vec{m}}(\vec{x}),$$

где

$$f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [16] показано, что для проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

ТЕОРЕМА 11. На пространстве E_s^α операторы $A_{\vec{m}}$ и I_Λ коммутируют:

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(f(\vec{x}))) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (49)$$

ТЕОРЕМА 12. На пространстве E_s^α ядро $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ имеет нормированный базис:

$$f_{\vec{m},\vec{n}}(\vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} \left(e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \quad (50)$$

Пространство E_s^α разлагается в прямую сумму ядра $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов P_Λ :

$$E_s^\alpha = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решетки.

ТЕОРЕМА 13. Для любой целочисленной решетки Λ найдется функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \quad (51)$$

ТЕОРЕМА 14. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (52)$$

3. Теоретико-числовой метод решения задачи Коши

В данном разделе приведём основные результаты из работы [30].

Рассмотрим задачу Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (53)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad (54)$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s),$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (55)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \dots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).²

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (56)$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1, \dots, m_s}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \quad (57)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1, \dots, m_s} |c_{m_1, \dots, m_s} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| < \infty \quad (58)$$

является нормой на пространстве E_s^α , относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Изложим и обобщим метод, применённый В. С. Рябеньким при решении задачи Коши, с нахождением оценок погрешности метода и уточнением отдельных деталей метода.

Прежде всего найдем собственные функции и ядро дифференциального оператора

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right).$$

²Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

Для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ зададим величины $Q(\vec{m})$ равенствами

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s} = \sum_{j=0}^{n(Q)} A_j(\vec{m}) (2\pi i)^j, \quad (59)$$

$$A_j(\vec{m}) = \sum_{j_1 + \dots + j_s = j} a_{j_1, \dots, j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \quad (60)$$

Заметим, что если все коэффициенты $a_{j_1, \dots, j_s}$ — алгебраические числа, то в силу трансцендентности числа π величина $Q(\vec{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A_j(\vec{m}) = 0$, для всех $j = 0, \dots, n(Q)$.

ЛЕММА 11. Для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ функция $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ является собственной функцией оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с собственным числом $Q(\vec{m})$, если $Q(\vec{m}) \neq 0$, или принадлежит ядру Ker_Q оператора, если $Q(\vec{m}) = 0$.

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}(S)$ пространство всех тригонометрических многочленов с переменными коэффициентами, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$\mathbb{T}(S) = \left\{ P(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \left| b_{\vec{m}}(t) \in C^1(0, T), \vec{m} \in S \right. \right\},$$

а через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \left| b_{\vec{m}} \in \mathbb{C}, \vec{m} \in S \right. \right\},$$

ТЕОРЕМА 15. Для пространства $\mathbb{T}(S)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (61)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (62)$$

ТЕОРЕМА 16. Для пространства $\mathbb{T}(S)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (63)$$

с начальным условием

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (64)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (65)$$

является тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (66)$$

Пусть задана целочисленная решетка Λ , которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Коши (53) — (55) свяжем дискретную задачу Коши с решеткой Λ , отличие которой от просто задачи Коши заключается в том, что начальное условие ослабляется и задается не на единичном s -мерном кубе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Дискретной задачей Коши с решеткой Λ называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (67)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad (68)$$

с дискретными начальными условиями

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (69)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).

Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ называется тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами $u(t, \vec{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (67) в области (68) с дискретными начальными условиями (69).

Таким образом, дискретную задачу Коши с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными можно рассматривать как приближение решения задачи Коши (53) — (55). Вопрос о сходимости последовательности решений дискретных задач Коши с последовательностью вложенных решеток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ будет рассмотрен позднее.

ТЕОРЕМА 17. Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (70)$$

где

$$c(\vec{m}) = c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}. \quad (71)$$

В пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}(M^*(\Lambda))$ рассмотрим базис, состоящий из функций

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}, \quad \vec{y} \in M(\Lambda),$$

которые выделяются характеристическим свойством

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{x} = \vec{y}, \\ 0, & \text{при } \vec{x} \neq \vec{y}, \vec{x} \in M(\Lambda). \end{cases}$$

Обозначим через $U_{\vec{y}}(t, \vec{x})$ решение задачи Коши (53) — (55) с начальными условиями $\varphi(\vec{x}) = L_{\vec{y}}(\vec{x})$, тогда по теореме 16

$$U_{\vec{y}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \quad (72)$$

и решение дискретной задачи Коши с решеткой Λ можно записать через базисные функции

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) U_{\vec{y}}(t, \vec{x}).$$

Рассмотрим теперь решение задачи Коши для общего периодического случая.

Введем в рассмотрение два новых класса функций $E_s^\alpha(Q, T)$ и $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \dots + n_s$, а $T > 0$ — произвольное положительное число, определяющее отрезок изменения переменной t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q, T)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q, T)}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)}. \quad (73)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q, T)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty, \quad (74)$$

$$Q(\vec{m}, T) = \max_{q(\vec{n}) \leq q(\vec{m})} Q_1(\vec{n}, T), \quad (75)$$

$$Q_1(\vec{m}, T) = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\left| e^{Q(\vec{m})t} \right|, \left| e^{Q(\vec{m})t} \right| \cdot |Q(\vec{m})| \right), \quad (76)$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \quad (77)$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q, T)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функция $u(t, \vec{x})$ определенная при $0 \leq t \leq T$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, периодическая по $\vec{x}$ с периодом 1 по каждой переменной x_ν ($\nu = 1, \dots, s$), представимая кратным рядом Фурье с переменными коэффициентами Фурье, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b'_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (78)$$

принадлежит классу $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$, если для любого t из отрезка $[0; T]$ выполнены равенства

$$b_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t)e^{Q(\vec{m})t}, \quad b'_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t)Q(\vec{m})e^{Q(\vec{m})t} \quad (79)$$

и периодическая функция

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}}(t)e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

принадлежат классу $E_s^\alpha(Q, T)$.

ТЕОРЕМА 18. Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (80)$$

является периодическая функция

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (82)$$

где коэффициенты $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$C = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty, \quad (83)$$

и ряды в правых частях (81) и (82) абсолютно сходятся.

ТЕОРЕМА 19. Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (84)$$

с начальным условием

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{E}_s^\alpha(Q, T), \quad (85)$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (86)$$

является

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (87)$$

где $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$.

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(t, \vec{x})$ как приближение к решению $u(t, \vec{x})$ задачи Коши (84) — (85). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

ТЕОРЕМА 20. Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения (87) задачи Коши (84) – (85) с функцией $\varphi(\vec{x})$, имеющей ряд Фурье (86), справедливо неравенство

$$|u(t, \vec{x}) - u_\Lambda(t, \vec{x})| \leq \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q, T)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \quad (88)$$

4. Теоретико-числовой метод решения задачи Дирихле

В данном разделе рассмотрим следующую задачу Дирихле

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (89)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = \varphi(\vec{x}), \quad u(\vec{x}), f(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (90)$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}. \quad (91)$$

Приведём без доказательства основные результаты из работы [31].

В предыдущем разделе были найдены собственные функции и ядро дифференциального оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$. Будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$ для самого ядра оператора, а для множества значений $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{K}er_Q$ будем использовать обозначение Ker_Q .

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid b_{\vec{m}} \in \mathbb{C}, \vec{m} \in S \right\}.$$

Очевидно, что если $f(\vec{x}) \in \mathbb{K}er_Q$ и $f(\vec{x}) \neq 0$, то уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (92)$$

не имеет решений. Более того, пространство $\mathbb{T}_0(S)$ можно представить как прямую сумму подпространств

$$\mathbb{T}_0(S) = \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q) \oplus \mathbb{T}_0(S \cap Ker_Q)$$

и уравнение (92) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q).$$

ТЕОРЕМА 21. Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ общим решением дифференциального уравнения

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (93)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S \cap Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (94)$$

где $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа.

Обозначим через $J_{s,t}^*$ множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_{s,t} = (j_1, \dots, j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$ такую, что $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq s$, $1 \leq j_{t+1} < \dots < j_s \leq s$. Таким образом $|J_{s,t}^*| = C_s^t$ и $J_{s,0}^* = J_{s,s}^* = \{(1, 2, \dots, s)\}$. Для дальнейшего потребуется явный вид $J_{s,s-1}^*$:

$$J_{s,s-1}^* = \{(2, \dots, s, 1), (1, 3, \dots, s, 2), \dots, (1, \dots, s-2, s, s-1), (1, \dots, s)\}, \\ |J_{s,s-1}^*| = s.$$

Для произвольного вектора $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ и многочлена $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ определим действие оператора $Pr(\vec{j}_{s,t})$ проектирования на пространство $\mathbb{T}_0(S, \vec{j}_{s,t})$, где

$$\mathbb{T}_0(S, \vec{j}_{s,t}) = \\ = \left\{ P((x_{j_1}, \dots, x_{j_t})) = \sum_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t})} b_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t})} e^{2\pi i(m_{j_1} x_{j_1} + \dots + m_{j_t} x_{j_t})} \right. \\ \left. b_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t})} \in \mathbb{C}, (m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t}) \right\}, \\ S(\vec{j}_{s,t}) = \{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) | (m_1, \dots, m_s) \in S\},$$

следующим образом

$$Pr(\vec{j}_{s,t})\varphi(\vec{x}) = \sum_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t})} e^{2\pi i(m_{j_1} x_{j_1} + \dots + m_{j_t} x_{j_t})} \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_t}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_t})}} b_{\vec{n}}.$$

Таким образом

$$Pr(\vec{j}_{s,0})\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in S} b_{\vec{n}},$$

а

$$Pr(\vec{j}_{s,s})\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}).$$

ЛЕММА 12. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ граничное условие

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}) \quad (95)$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого t с $0 \leq t < s$ и $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ выполняются соотношения

$$Pr(\vec{j}_{s,t})u(\vec{x}) = Pr(\vec{j}_{s,t})\varphi(\vec{x}).$$

ЛЕММА 13. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

граничное условие (95) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$ выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}. \quad (96)$$

ТЕОРЕМА 22. Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \text{Ker } Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus \text{Ker } Q), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (97)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (98)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (99)$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдутся $c_{\vec{m}}$ ($\vec{m} \in S \cap \text{Ker } Q$), для которых для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$ выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S \setminus \text{Ker } Q, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} + \sum_{\substack{\vec{n} \in S \cap \text{Ker } Q, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} =$$

$$= \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \quad (100)$$

и её решением является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \text{Ker } Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S \cap \text{Ker } Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (101)$$

В случае, если $S \cap \text{Ker } Q = \{(0, \dots, 0)\}$, то общим решением уравнения (93) является многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c,$$

где c — произвольная константа.

Рассмотрим, например, задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \quad (102)$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus \{\vec{0}\}), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (103)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (104)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (105)$$

Для оператора Лапласа

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$$

имеем:

$$Q(\vec{m}) = -(2\pi)^2 \cdot (m_1^2 + \dots + m_s^2).$$

Таким образом $Ker_Q = \{\vec{0}\}$. Тогда, согласно теореме 21, общим решением дифференциального уравнения (102) является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c.$$

Согласно теореме 22 задача Дирихле (102) – (105) разрешима тогда и только тогда, когда существует c_0 такое, что для каждого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ выполнены соотношения

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{n_1^2 + \dots + n_s^2} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \quad m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0, \quad (106)$$

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}} + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{\vec{n} \in S \setminus \{\vec{0}\}, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{n_1^2 + \dots + n_s^2} = c_0, \quad m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 = 0. \quad (107)$$

Решением задачи Дирихле (102) – (105) является функция

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_0. \quad (108)$$

Среди всех дифференциальных операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ выделим класс $\mathfrak{Q}$ невырожденных дифференциальных операторов, состоящий из операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, для которых $Ker_Q = \{(0, \dots, 0)\}$. Важность этого класса операторов объясняется тем, что с точностью до константы решение дифференциального уравнения с частными производными для этих

операторов определяется однозначно. Из предыдущего видно, что оператор Лапласа принадлежит классу $\mathfrak{Q}$.

Отметим, что если оператор $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ вида (55) невырожденный, то $a_{0,\dots,0} = 0$.

Пусть теперь задана целочисленная решетка Λ , которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Дирихле (89) — (91) свяжем дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ , отличие которой от просто задачи Дирихле заключается в том, что дифференциальное уравнение с частными производными и граничное условие ослабляются и задаются не на единичном s -мерном кубе и его границе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$ и его проекциях на грани единичного s -мерного куба. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

Введем следующие обозначения:

Для произвольного вектора $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ и обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ определим действие оператора $Pr(\vec{j}_{s,t})$ проектирования на грань $G_s(\vec{j}_{s,t})$, где

$$G_s(\vec{j}_{s,t}) = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) | (x_{j_1}, \dots, x_{j_t}) \in \overline{G_t}, x_{j_{t+1}} = \dots = x_{j_s} = 0\},$$

следующим образом

$$Pr(\vec{j}_{s,t})M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \left| \begin{array}{l} \vec{y} \in M(\Lambda), (x_{j_1}, \dots, x_{j_t}) = (y_{j_1}, \dots, y_{j_t}), \\ x_{j_{t+1}} = \dots = x_{j_s} = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Пространство E_s^α представим в виде прямой суммы $E_s^\alpha = E_s^{\alpha,Q} \oplus \mathbb{K}er_Q$, где

$$E_s^{\alpha,Q} = \left\{ f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \mathbb{K}er_Q} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \left| f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \right. \right\},$$

$$\mathbb{K}er_Q = \left\{ f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{K}er_Q} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \left| f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \right. \right\}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

разрешимо только для функций $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha,Q}$.

Прежде всего рассмотрим дискретную задачу для дифференциального уравнения с частными производными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Дискретной задачей с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными называется уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (109)$$

$$f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha,Q}, \quad (110)$$

Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными называется тригонометрический многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (109) с функцией (110).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Дискретной задачей Дирихле с решеткой Λ называется уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (111)$$

$$f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha, Q}, \quad (112)$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x}) = I_\Lambda \varphi(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad (113)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$), а $I_\Lambda \varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} d(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решеткой Λ называется тригонометрический многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (111) с функцией (112) и с дискретными граничными условиями (113).

Таким образом, дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными можно рассматривать как приближение решения задачи Дирихле (89) — (91). Вопрос о сходимости последовательности решений дискретных задач Дирихле с последовательностью вложенных решеток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ будет рассмотрен в последнем разделе.

Для невырожденных операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}$ имеем $\mathbb{Ker} Q = \mathbb{C}$ как множество функций и $\mathbb{Ker} Q = \{\vec{0}\}$ как множество тех $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{Ker} Q$. В этом случае для краткости будем писать $E_s^{*\alpha} = E_s^{\alpha, Q}$. Другими словами, класс функций $E_s^{*\alpha}$ состоит из всех функций $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, у которых $c(\vec{0}) = 0$.

Отметим одну особенность оператора интерполирования по сетке $M(\Lambda)$. Если $f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}$, то интерполяционный многочлен $I_\Lambda f(\vec{x})$ не обязан принадлежать $E_s^{*\alpha}$. Действительно, для функции $f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}$,³

$$f(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

имеем

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$b(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

и на основании теоремы 3 (см. стр. 267) имеем

$$b(\vec{0}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} =$$

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка $\vec{n} = \vec{0}$.

$$= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \frac{1}{N} s(\vec{m}, \Lambda) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \delta_\Lambda(\vec{m}) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda} c(\vec{m}).$$

Поэтому коэффициент $b(\vec{0})$ не обязан равняться 0.

ТЕОРЕМА 23. Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (114)$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}, \quad (115)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c, \quad (116)$$

где c — произвольное число и

$$b(\vec{m}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 24. Дискретная задача Дирихле с решёткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (117)$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \in \mathfrak{Q}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}, \quad (118)$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x}) = I_\Lambda \varphi(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad (119)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$), а $I_\Lambda \varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} d(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

разрешима тогда и только тогда, когда существует c_Λ такое, что для каждого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ выполнены соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = \sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}),$$

$$m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0, \quad (120)$$

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}) + \sum'_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = c_\Lambda, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 = 0, \quad (121)$$

где

$$b(\vec{n}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{n}, \vec{y})}.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решёткой Λ (117) – (119) является функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_\Lambda, \quad (122)$$

Рассмотрим пространство тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$, состоящее из всех тригонометрических многочленов $P(\vec{x})$ вида

$$P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda) \setminus \{\vec{0}\}} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

В пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ рассмотрим базис, состоящий из функций

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}, \quad \vec{y} \in M(\Lambda),$$

которые выделяются характеристическим свойством

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{N}, & \text{при } \vec{x} = \vec{y}, \\ -e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, & \text{при } \vec{x} \neq \vec{y}, \vec{x} \in M(\Lambda). \end{cases}$$

Обозначим через $U_{\vec{y}}(\vec{x}) \in \mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ решение дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = L_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda). \quad (123)$$

Таким образом,

$$U_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}}{Q(\vec{m})}$$

и общее решение дискретной задачи с решёткой Λ дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda) \quad (124)$$

можно записать через базисные функции следующим образом

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) U_{\vec{y}}(\vec{x}) + c,$$

где c — произвольное число.

Для решения задачи Дирихле в общем периодическом случае введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^\alpha(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \dots + n_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m})}. \quad (125)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\vec{m})}| < \infty, \quad (126)$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \quad (127)$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Положим

$$Q^*(\vec{m}) = \max_{q(\vec{n}) \leq q(\vec{m})} \overline{Q(\vec{n})}^{-1}.$$

Заметим, что для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ справедливо неравенство $Q^*(\vec{m}) \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^{+\alpha}(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q^*(\vec{m})}. \quad (128)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q^*(\vec{m})| < \infty. \quad (129)$$

является нормой на пространстве $E_s^{+\alpha}(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

ТЕОРЕМА 25. Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{+\alpha}(Q) \end{aligned} \quad (130)$$

является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c, \quad u(\vec{x}) \in E_s^\alpha(Q), \quad (131)$$

где c — произвольное число и ряды в правых частях (130) и (131) абсолютно сходятся.

ТЕОРЕМА 26. Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ f(\vec{x}) &= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \end{aligned} \quad (132)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial G_s), \quad \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (133)$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (134)$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдётся c_0 , для которого для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in \mathbb{Z}^s \left(\vec{j}_{s,s-1} \right)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} &= \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 &\neq 0, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}} + \sum'_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} &= c_0, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Решением задачи Дирихле (132) — (134) является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_0, \quad (137)$$

Покажем, как оценивается погрешность найденного решения. Пусть задана целочисленная решетка Λ и $M^*(\Lambda) = M_H^*(\Lambda)$ — абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Согласно теореме 24 (см. стр. 283) решением дискретной задачи Дирихле (117) — (119) с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u_\Lambda(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_\Lambda, \quad (138)$$

где

$$b(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})},$$

$$c_\Lambda = \sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ \vec{n} = (n_1, 0, \dots, 0)}} d(\vec{n}) + \sum'_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ \vec{n} = (n_1, 0, \dots, 0)}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})}.$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(\vec{x})$ как приближение к решению $u(\vec{x})$ задачи Дирихле (132) — (133). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

ТЕОРЕМА 27. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения (137) задачи Дирихле (132) — (133) справедливо неравенство*

$$\|u(\vec{x}) - u_\Lambda(\vec{x})\|_C \leq \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \quad (139)$$

5. Построение оптимальных параллелепипедальных сеток с помощью приближения алгебраических решёток целочисленными

Одной из актуальных проблем теоретико-числового метода является проблема построения оптимальных сеток. Алгебраические сетки Фролова обеспечивают правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова, однако их применение на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. И так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникают вопросы приближения алгебраических решёток целочисленными и оценки оптимальности полученных сеток.

Численные эксперименты, проведённые нами, показывают, что такие сетки часто оказываются оптимальными. При этом в двумерном случае удаётся легко оценить качество полученных сеток. В данном разделе мы будем использовать оценку качества сетки с помощью гиперболического параметра.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (140)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Взаимной решёткой называется решётка $\Lambda^* = \{ \vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z} \}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$, где $G_s = [0; 1]^s$. В случае, если Λ — алгебраическая решётка, то сетка $M(\Lambda)$ называется алгебраической.

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, поэтому возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой. Особенно просто эта проблема решается в двумерном случае.

Далее приведём основные результаты, полученные в работе [32], для квадратичных алгебраических решёток.

Пусть d — произвольное натуральное число, свободное от квадратов. Рассмотрим квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + m\omega \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, если $d = 4t + 1$, и $\omega = \sqrt{d}$, если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$.

Через $\Lambda(F)$ обозначим алгебраическую решётку поля F : $\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \mid \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа. Если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$, то базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega, -\omega)$, детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$. В случае $d = 4t + 1$ базис $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega, 1 - \omega)$, $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Рассмотрим разложение ω в цепную периодическую дробь:

$$\omega = (a_0; a_1, \dots, a_k, \dots) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Через $\frac{P_k}{Q_k}$ будем обозначать k -ую подходящую дробь к ω . Таким образом,

$$\omega = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k \theta_k}{Q_k^2}, \quad 0 < \theta_k < 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (141)$$

Через $\Lambda_k(F)$ обозначается решётка, полученная из $\Lambda(F)$ домножением на Q_k . Она имеет вид

$$\Lambda_k(F) = \{ (Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n\omega)) \mid m, n \in \mathbb{Z} \}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3;$$

или

$$\Lambda_k(F) = \{ (Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n - n\omega)) \mid m, n \in \mathbb{Z} \}, \quad d = 4t + 1.$$

Через $\Lambda_k(d)$ обозначим целочисленную решётку, заданную равенствами

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3; \quad (142)$$

или

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - Q_k n - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1. \quad (143)$$

В первом случае базис решётки имеет вид $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, -P_k)$, а её детерминант $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k$. При этом базис этой решётки ортогонален. Также для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке.

Во втором случае $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, Q_k - P_k)$, $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k - Q_k^2$.

Рассмотрим линейное сравнение

$$ax - y \equiv 0 \pmod{N}.$$

Решётка

$$\Lambda(a, N) = \{(m, ma - nN) | m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (144)$$

является решёткой решений этого сравнения. Её базис имеет вид $\lambda_1 = (1, a)$, $\lambda_2 = (0, -N)$.

Следующая теорема показывает, что решётки (142) и (143) являются решётками решений линейного сравнения.

ТЕОРЕМА 28. Пусть $\frac{P_k}{Q_k}$ — k -ая подходящая дробь к ω . Числа a и N определяются следующими равенствами. При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$: $N = 2P_k Q_k$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k)$. При $d = 4t + 1$: $N = 2Q_k P_k - Q_k^2$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k)$. Тогда $\Lambda_k(d) = \Lambda(a, N)$.

Понятно, что не любая решётка линейного сравнения представима в виде (142) или (143).

Заметим, что решётка (142) задаётся с помощью чисел P_k и Q_k — числителя и знаменателя k -той подходящей дроби к числу ω . При этом теорема 28 устанавливает, что эта решётка является решёткой линейного сравнения (144) с параметрами a и N . Следующая же теорема обнаруживает связь между разложениями в цепную дробь чисел $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{a}{N}$.

ТЕОРЕМА 29. Пусть

$$\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k), \quad P_k > Q_k.$$

Тогда

$$\frac{a}{N} = \frac{P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k}{2P_k Q_k} = (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k). \quad (145)$$

В конце девятнадцатого века Г. Ф. Вороной и независимо Г. Минковский среди узлов s -мерной решетки выделили специальное подмножество узлов $\mathfrak{M}(\Lambda)$. Оно состоит из всех ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, для которых не существует ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ из Λ с $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при всех $i = 1, \dots, s$ и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ хотя бы при одном $i = j$. Элементы множества $\mathfrak{M}(\Lambda)$ называются *относительными минимумами решётки*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Гиперболическим параметром решётки Λ называется число

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

где $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$ — усечённая норма вектора $\vec{x}$, $\bar{x} = \max(|x|, 1)$.

Понятно, что для нахождения гиперболического параметра решётки достаточно вычислить только усечённые нормы её локальных минимумов. Найдём сначала множество локальных минимумов для решётки линейного сравнения (144).

ТЕОРЕМА 30. Пусть $0 < a < N$, $\Lambda(a, N)$ — решётка, заданная равенством (144), $q_{-1} = 0$, $p_{-1} = 1$, а для $i = 0 \dots l$ $\frac{p_i}{q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{a}{N}$ ($\frac{p_l}{q_l} = \frac{a}{N}$). Тогда множество локальных минимумов

$$\mathfrak{M}(\Lambda(a, N)) = \{\pm(q_i, q_i a - p_i N) | i = -1, \dots, l\}.$$

Следующая теорема позволяет непосредственно выписать множество локальных минимумов решётки (142) $\mathfrak{M}(\Lambda)$ с помощью разложения числа $\frac{a}{N}$ в цепную дробь.

ТЕОРЕМА 31. Пусть для $i = 0 \dots k$ $\frac{P_i}{Q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{P_k}{Q_k}$. Тогда множество локальных минимумов решётки (142) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\Lambda_k(d)) = \{ & \pm(Q_k, Q_k), \pm(Q_k P_i + Q_i P_k, Q_k P_i - Q_i P_k), \\ & \pm(Q_k P_i - Q_i P_k, Q_k P_i + Q_i P_k) | i = -1, 0, \dots, k \}. \end{aligned}$$

Установим соответствие между локальными минимумами, выписанными в теоремах 30 и 31 в случае, если $a = P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k$ и $N = 2P_kQ_k$.

ТЕОРЕМА 32. Пусть

$$\beta_i = \begin{cases} -1 + k - i, & \text{при } i = -1, 0, \dots, k-1, \\ -1 - k + i, & \text{при } i = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{cases} \quad (146)$$

Тогда

- $(q_i, q_i a - p_i N) = (-1)^{\beta_i+1} (Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = -1, 0, \dots, k-1$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k, Q_k)$, при $i = k$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = k+1, k+2, \dots, 2k+1$.

Заметим, что приближения алгебраических решёток при $d = 4t + 1$ и при $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ существенно отличаются.

При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ решётка $\Lambda_k(d)$ обладает свойством, что для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке. Это обстоятельство позволяет находить множество локальных минимумов эффективнее. При $d = 4t + 1$ решётка $\Lambda_k(d)$ данным свойством уже не обладает. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Теорема 28 показывает, что решётка $\Lambda_k(d)$ является решёткой линейного сравнения. Как показывают численные эксперименты данное свойство наблюдается не только в квадратичном случае. При больших размерностях приближения алгебраических решёток целочисленными часто также оказываются решётками линейного сравнения.

6. Заключение

В данной работе построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенного — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Также найдена погрешность данного метода. В случае использования бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость.

Кроме того, предложен вариант построения оптимальных сеток в двумерном случае. Он основан на приближении алгебраических решёток целочисленными. В двумерном случае построенные таким образом решётки всегда будут давать обобщённые параллелепипедальные сетки. При этом имеются простые способы оценки качества полученных сеток. Один такой способ, основанный на использовании гиперболического параметра, рассмотрен в данной работе. В случае больших размерностей задача усложняется, однако, как показывают численные эксперименты, и в этом случае часто получаются сетки, близкие к оптимальным.

В последнее время получили развитие методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью глубоких нейронных сетей Deep Ritz Method [48] и Deep Galerkin Method [47]. Эффективность этих методов можно проследить в работах [39, 40, 40, 42].

Метод Deep Ritz заключается в следующем: дифференциальное уравнение сводится к вариационной задаче; решение этой задачи представляется в виде глубокой нейронной сети, коэффициенты которой находятся градиентными методами, а ошибка вычисляется с помощью численного интегрирования. Авторы для вычисления ошибки использовали метод Монте-Карло. В работах [38, 37] предложено в качестве альтернативы этому методу использовать квази-случайные сетки. Применение ЛП_τ-последовательностей Соболя позволяет значительно уменьшить объём набора обучающих данных по сравнению с методом Монте-Карло.

Известно [23], что ЛП_τ-последовательности Соболя не реагируют на гладкость функций, поэтому интересно изучить использование либо сеток Смоляка, либо параллелепипедальных сеток Коробова, которые лишены этого недостатка.

В данной работе рассмотрен метод решения дифференциальных уравнений в частных производных на классах E_s^α . Однако, в последнее время, Н. Н. Добровольским был введён в рассмотрение некоторый подкласс данного класса M_s^α (см., например [9]). Одним из возможных направлений развития метода, применяемого в данной работе, может стать решение дифференциальных уравнений на классе M_s^α .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш. К. Абикинова, А. Утесов, Н. Т. Темиргалиев, О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева, Матем. заметки, 2012, том 91, выпуск 3, 459–463.
2. Е. А. Баилов, Н. Т. Темиргалиев. О дискретизации решений уравнения Пуассона, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006, том 46, номер 9, 1594–1604.
3. В. А. Быковский, С. В. Гассан, О параметре оптимальности параллелепипедальных сеток Коробова для кубатурных формул, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 8, 1363–1369.
4. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов — М.: Наука, 1981.
5. Герцог, А. С. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле / А. С. Герцог // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 23(188). — Вып. 5. — Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. — С. 41–53.
6. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник Том 18 Выпуск 4, 2017 г, с. 6-85.

7. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. <http://elibrary.ru/item.asp?id=20905960>.
8. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012.
9. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–178.
10. Н. М. Добровольский. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2015 Т. 16. Вып. 1). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 176 — 190.
11. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
12. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т. 3 вып. 2(4) С. 43 – 59.
13. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып.1(9), Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 95 — 121.
14. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 82 — 90.
15. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090–84.
16. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
17. Добровольский, Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНТИ 24.08.84. — № 6091–84.
18. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998. С. 90
19. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. М. Добровольский. — Тула, 1984.
20. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. М. Добровольский. — Москва, 1985.
21. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения / Н. М. Добровольский // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 67–70.

22. Добровольский, Н. М. Многомерные теоретико – числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
23. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Численный эксперимент по применению параллелепипедальных сеток // Алгоритмические проблемы теории групп и подгрупп: Сб. Тула, 1990. С. 153–155.
24. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
25. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062 — 1065.
26. Коробов, Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе / Н. М. Коробов. — М.: Физматгиз, 1963.
27. Коробов, Н. М. О приближённом вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
29. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
30. А. В. Родионов. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом В. С. Рябенского // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 120–124.
31. А. В. Родионов. О методе Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле // Чебышевский сборник, 15:3 (2014), 48–85.
32. А. В. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 22, вып. 3, с. 241–249.
33. Рябенский В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.
34. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
35. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
36. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784 — 802.
37. Buchholz, A. et al. “Quasi-Monte Carlo Variational Inference.” ICML (2018).
38. Jingrun Chen, Rui Du, Panchi Li, Liyao Lyu. Quasi-Monte Carlo sampling for machine-learning partial differential equations //

39. Jingrun Chen, Rui Du & Keke Wu. (2020). A Comparison Study of Deep Galerkin Method and Deep Ritz Method for Elliptic Problems with Different Boundary Conditions. *Communications in Mathematical Research* . 36 (3). 354-376.
40. Jiao, Yuling et al. "Error Analysis of Deep Ritz Methods for Elliptic Equations." *ArXiv abs/2107.14478* (2021): n. pag.
41. Liao, Yulei and P. Ming. "Deep Nitsche Method: Deep Ritz Method with Essential Boundary Conditions." *ArXiv abs/1912.01309* (2019): n. pag.
42. Wang, Zhongjian and Zhiwen Zhang. "A mesh-free method for interface problems using the deep learning approach." *J. Comput. Phys.* 400 (2020): n. pag.
43. V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., 32, Cambridge University Press, Cambridge, 2018 , 550 pp.
44. Dinh Dũng, Vladimir Temlyakov, Tino Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Birkhäuser Basel, Basel, 2018 , xi+218 pp.
45. V.N. Temlyakov, Universal discretization, *Journal of Complexity*, Volume 47, 2018, Pages 97-109,
46. V.N. Temlyakov, M. Ullrich, On the fixed volume discrepancy of the Fibonacci sets in the integral norms, *Journal of Complexity*, Volume 61, 2020, 101472.
47. Sirignano, Justin & Spiliopoulos, Konstantinos. (2017). DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 375. 10.1016/j.jcp.2018.08.029.
48. Weinan E, Bing Yu. The Deep Ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems // *Communications in Mathematics and Statistics*, 2018, vol. 6, p. 1–12.

REFERENCES

1. Sh. K. Abikenova, A. Utesov, N. T. Temirgaliyev, 2012, "On the discretization of solutions of the wave equation with initial conditions from the generalized Sobolev classes", *Math. Notes*, vol. 91, iss. 3, pp. 459-463.
2. E. A. Bailov, N. T. Temirgaliyev, 2006, "On the discretization of solutions of the equation Poisson", *J. calculation. matem. and math. phys.*, vol. 46, no. 9, pp. 1594-1604.
3. V. A. Bykovsky, S. V. Gassan, 2011, "On the optimality parameter of Korobov parallelepipedal grids for cubature formulas", *Zh. calculation. matem. and math. phys.*, vol. 51, no. 8, pp. 1363-1369.
4. I. M. Vinogradov. *Fundamentals of number theory* / I. M. Vinogradov — M.: Nauka, 1981.
5. A. S. Herzog, 2011, "Parametrization of a four-dimensional grid of a biquadratic Dirichlet field", *Scientific Vedomosti of the Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, vol. 23(188), iss. 5, pp. 41–53.
6. S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, I. N. Balaba, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, L. P. Dobrovolskaya, A.V. Rodionov, O. A. Pihtilkova, 2017, "A number-theoretic method in approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, iss. 4, pp. 6-85.

7. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients", Tula: Publishing House of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, 283 p.
8. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, "Hyperbolic zeta functions of grids and lattices and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*.
9. N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the number-theoretic method in approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, 2019, vol. 20, iss. 1. pp. 164–178.
10. N. M. Dobrovolsky, 2015, "On modern problems of the theory of the hyperbolic zeta function lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, iss. 1, pp. 176–190.
11. L. P. Dobrovolskaya, N. M. Dobrovolsky, A. S. Simonov, 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 9, iss. 1(25), pp. 185–223.
12. M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, O. V. Kiseleva, 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 3, iss. 2(4), pp. 43–59.
13. M. N. Dobrovolsky, 2004, "On optimal coefficients of combined grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 95–121.
14. M. N. Dobrovolsky, 2003, "Estimates of sums on a hyperbolic cross", *Izv. TulSU. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 9, iss. 1, pp. 82–90.
15. N. M. Dobrovolsky, 1984, "Hyperbolic zeta function of lattices", Dep. in VINITI 24.08.84, N 6090-84.
16. N. M. Dobrovolsky, E. V. Manokhin, 1998, "Banach spaces of periodic functions", *Izv. TulSU. Ser. Mechanics. Mathematics. Informatics*, vol. 4, iss. 3, pp. 56–67.
17. N. M. Dobrovolsky, 1984, "On quadrature formulas on classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ", Dep. in VINITI 24.08.84. № 6091–84.
18. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, I. Yu. Rebrova, 1998, "On a recursive algorithm for lattices" *Approximation theory and harmonic analysis: Tez. dokl. International conf. Tula*, p. 90.
19. N. M. Dobrovolsky, 1984, "Number-theoretic grids and their applications", Dis. ... candidate of physics. – mat. nauk, Tula.
20. N. M. Dobrovolsky, 1985, "Number-theoretic grids and their applications", Abstract of the dissertation ... candidate of Physics.–mat. nauk. Moscow.
21. N. M. Dobrovolsky, 1985, "Number-theoretic grids and their applications", *Number theory and its applications: Tez. dokl. All-Union. conf. Tbilisi*, pp. 67–70.
22. N. M. Dobrovolsky, 2005, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications", Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University.
23. N. M. Dobrovolsky, V. S. Vankova, 1990, "Numerical experiment on the use of parallelepipedal grids", *Algorithmic problems of the theory of groups and subgroups: Tula Collection*, pp. 153–155.

24. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, "Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
25. N. M. Korobov, 1957, "Approximate calculation of multiple integrals using methods of number theory" *DAN USSR*, no. 6, pp. 1062–1065.
26. N. M. Korobov, 1963, "Number-theoretic methods in approximate analysis", Moscow: Fizmatgiz.
27. N. M. Korobov, 1959, "On the approximate calculation of multiple integrals", *DAN SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
28. N. M. Korobov, 2004, *Number-theoretic methods in approximate analysis*, (second edition). Moscow: ICNMO.
29. I. Y. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolsky, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, 2018, "On classical number-theoretic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, iss. 4, pp. 118–176.
30. A. V. Rodionov, 2013, "The solution of partial differential equations by the method of V. S. Ryabenky", *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 13:4(2), pp. 120–124.
31. A.V. Rodionov, 2014, "About N. M. Korobov's method of approximate solution of the Dirichlet problem", vol. *Chebyshevskii sbornik*, vol. 15:3, pp. 48–85.
32. A. V. Rodionov, 2020, "Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices by integers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, iss. 3, pp. 241–249.
33. V. S. Ryabenky, 1961, "On one method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", *Tr. matem. V. A. Steklov Institute*, vol. 60, p. 232–237.
34. K. K. Frolov, 1976, "Upper estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions", *DAN USSR*, vol. 231, no. 4, pp. 818–821.
35. K. K. Frolov, 1979, "Quadrature formulas on classes of functions", *Dis. ... candidate of Physical and Mathematical Sciences*. M.: VC of the USSR Academy of Sciences.
36. Sharygin I. F., 1963, "Lower estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions", *Zhurn. computational math. and checkmate. physics*, 7, no. 4, p. 784–802.
37. A. Buchholz, F. Wenzel, S. Mandt, 2018, "Quasi-Monte Carlo Variational Inference", 35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018, t. 2, pp. 1055–1068.
38. J. Chen, R. Du, P. Li, L. Lyu, 2021, "Quasi-monte carlo sampling for solving partial differential equations by deep neural networks", *Numerical Mathematics*, tom 14, vol. 2, pp. 377–404.
39. Jingrun Chen, Rui Du and Keke Wu, 202, "A comparative study of the Deep Galerkin method and the Deep Ritz method for elliptic problems with different boundary conditions", *Communications in Mathematical Research*, pp. 36(3). 354–376.
40. Jiao, Yulin, 2021, "Error analysis of deep Ritz methods for elliptic equations". *ArXiv abs/2107.14478*.
41. Y. Liao, P. Ming, 2021, "Deep nitsche method: Deep ritz method with essential boundary conditions", *Communications in Computational Physics*, tom 29, vol. 5, pp. 1365–1384.

42. Z. Wang, Z. Zhang, 2020, “A mesh-free method for interface problems using the deep learning approach”, *Journal of Computational Physics*, том 400, no. 108963.
43. V. Temlyakov, 2018, “Multidimensional approximation”, *Cambridge monogr. Application. Calculate. Math.*, 32, Cambridge University Press, Cambridge, 550 p.
44. D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ulrich, 2018, “Hyperbolic cross approximation”, *Advanced courses in Mathematics-CRM Barcelona*, Birkäuser Basel, Basel, 218 p.
45. V. N. Temlyakov, 2018, “Universal sampling”, *Difficulty Log*, vol. 47, pp. 97–109.
46. V. N. Temlyakov, M. Ulrich, 2020, “On the discrepancy of a fixed volume of Fibonacci sets in integral norms”, *Journal of Complexity*, vol. 61, 101472.
47. J. Sirignano, K. Spiliopoulos, 2017, “DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, том 375, pp. 1339–1364.
48. E. Weinan, Bing Yu., 2018, “The Deep Ritz method: a numerical algorithm based on deep learning for solving variational problems”, *Communications in Mathematics and Statistics*, vol. 6, pp. 1–12.

Получено 24.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-298-310

Численная оптимизация процесса спекания диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95¹

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев

Агеева Екатерина Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageeva-ev@yandex.ru

Агеев Евгений Викторович — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

В работе определены оптимальные параметры процесса получения тяжелого вольфрамового сплава искровым плазменным спеканием частиц сплава ВНЖ 95 по микротвердости спеченных образцов путем проведения полного факторного эксперимента типа. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки искрового плазменного спекания: температура, давление и время выдержки, мин. Оптимальные параметры работы установки определяли для электроэрозионного материала ВНЖ 95, ранее полученного в двух рабочих средах: воды дистиллированной и керосина осветительного. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации Y (микротвердость), которые составили: для образцов, полученных из частиц, диспергированных в воде — 3498,6 МПа при температуре $T = 1050^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 10$ мин.; для образцов, полученных из частиц, диспергированных в керосине — 2449,2 МПа при температуре $T = 1200^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 5$ мин. Далее представлены результаты экспериментальных исследований состава, структуры и свойств тяжелых вольфрамовых сплавов из диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95, полученные при оптимальных режимах.

Ключевые слова: электроэрозионный порошок, искровое плазменное спекание, оптимизация процесса.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Численная оптимизация процесса спекания диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95 // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 298–310.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-2564.2020.8).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-298-310

Numerical optimization of the sintering process of dispersed electroerosion particles of the alloy VNZh 95

E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev

Ageeva Ekaterina Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Southwestern state University (Kursk).

e-mail: ageeva-ev@yandex.ru

Ageev Viktorovich Ageev — doctor of technical sciences, professor, Southwestern State University (Kursk).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

In this paper, the optimal parameters of the process of obtaining a heavy tungsten alloy by spark plasma sintering of the particles of the alloy VNZh 95 on the microhardness of the sintered samples are determined by conducting a full factorial experiment of the type. The operating parameters of the spark plasma sintering unit were selected as factors: temperature, pressure, and holding time, min. The optimal parameters of the installation operation were determined for the electroerosive material VZH 95, previously obtained in two working media: distilled water and lighting kerosene. According to a series of experiments to determine the maximum value of the optimization parameter Y (microhardness), which amounted to: for samples obtained from particles dispersed in water — 3498,6 MPa at $T = 1050^\circ\text{C}$, a pressure of $P = 40$ MPa and holding time $t = 10$ min; for samples obtained from particles dispersed in kerosene — 2449,2 MPa at a temperature $T = 1200^\circ\text{C}$, $P = 40$ MPa and holding time $t = 5$ min. The results of experimental studies of the composition, structure, and properties of heavy tungsten alloys made of electroerosion-dispersed particles of the VNJ 95 alloy obtained under optimal conditions are presented below.

Keywords: electroerosive powder, spark plasma sintering, process optimization.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, 2021, "Numerical optimization of the sintering process of dispersed electroerosion particles of the alloy VNZh 95", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 298–310.

1. Введение

Тяжелые сплавы обладают рядом весьма ценных свойств, благодаря которым их эффективно используют во многих областях промышленности. В настоящее время одной из основных проблем использования этих сплавов является наличие в нем значительного количества дорогостоящего вольфрама. Данная проблема может быть решена измельчением их отходов и повторным использованием. Существующие промышленные технологии измельчения отличаются крупнотоннажностью, высокими затратами энергии и экологическими проблемами. Одним из перспективных и промышленно неприменяемых способов измельчения любого электропроводного материала является электроэрозионный способ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения об использовании диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ в качестве шихты для повторного производства из них сплавов [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств спеченных изделий из электроэрозионных порошков тяжелых вольфрамсодержащих сплавов требуется провести оптимизацию режимов спекания методом планирования эксперимента [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

2. Основной текст статьи

Заготовки сплавов получали по технологии горячего прессования путем пропускания высокоамперного тока (искровое плазменное спекание).

В соответствии с данной технологией заготовки получали из диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95 в воде дистиллированной и керосине осветительном методом горячего прессования с пропусканием высокоамперного тока в вакууме согласно расчетным режимам оптимизации. В основе процесса лежит модифицированный метод горячего прессования, при котором электрический ток пропускается непосредственно через пресс-форму и прессуемую заготовку, а не через внешний нагреватель.

Из свойств, лимитирующих ресурс изделий, технологически просто и информативно определяется микротвердость, поэтому оптимизацию процесса получения тяжелого вольфрамового сплава искровым плазменным спеканием частиц сплава ВНЖ 95 проводили по микротвердости спеченных образцов путем проведения полного факторного эксперимента типа 2^3 . Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса получения тяжелого вольфрамового сплава искровым плазменным спеканием частиц сплава ВНЖ 95 использована модель первого порядка вида, представленная уравнением (1), в котором X_1, X_2, X_3 — факторы: температура T , °C; давление P , МПа и t , мин. время выдержки, мин. соответственно, $\hat{y}$ — исследуемая величина (микротвердость).

Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.

3. Результаты и их обсуждение

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса получения электроэрозионных частиц использована модель первого порядка вида:

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + B_{123}X_1X_2X_3, \quad (1)$$

где X_1, X_2, X_3 — факторы;

y — исследуемая величина (средний размер электроэрозионных частиц).

Рассматриваемый пример — полный факторный эксперимент типа 2^3 .

Значения выбранных уровней варьируемых факторов даны в таблице 1.

Таблица 1: Уровни и интервалы варьирования

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодировое	$T, ^\circ\text{C}$		$P, \text{МПа}$		$t, \text{мин}$	
		X_1		X_2		X_3	
		Вода	Керос.	Вода	Керос.	Вода	Керос.
Основной уровень	0	625	700	30	30	6	3,5
Интервал варьирования	Δx_i	400	500	10	10	4	1,5
Верхний уровень	+1	1050	1200	40	40	10	5
Нижний уровень	-1	200	200	20	20	2	2

Каждый опыт проводили трижды. Микротвердость образцов, полученных искровым плазменным спеканием частиц сплава ВНЖ 95 проводили на автоматизированном микротвердометре AFFRI DM-8 (по Виккерсу). Матрица планирования эксперимента и результаты испытаний представлены в таблице 2.

Таблица 2: Матрица планирования эксперимента

№ опы- та	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_i$	$S^2_{\text{воспр}}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	251	253	249	251	4
									173	174	178	175	7
2	+	+	-	-	-	-	+	+	321	324	321	322	3
									226	224	225	225	1
3	+	-	+	-	-	+	-	+	327	322	326	325	7
									226	229	229	228	3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	340	335	336	337	7
									248	243	247	246	7
5	+	-	-	+	+	-	-	+	327	327	321	325	12
									235	230	237	234	13
6	+	+	-	+	-	+	-	-	397	399	398	398	1
									302	301	303	302	1
7	+	-	+	+	-	-	+	-	400	401	405	402	7
									295	298	298	297	3
8	+	+	+	+	+	+	+	+	431	432	427	430	7
									305	304	306	305	1

Среднее значение параметра оптимизации по параллельным опытам определяем, например, для первого опыта (вода и керосин соответственно):

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \frac{251 + 253 + 249}{3} = 251$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \frac{173 + 174 + 178}{3} = 175.$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в таблицу 2. Определяем дисперсию параллельных опытов, например, для первого опыта (вода и керосин соответственно):

$$S^2_{\text{воспр}_i} = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{2} [(251 - 251)^2 + (253 - 251)^2 + (249 - 251)^2] = 4$$

$$S_{\text{воспр}_i}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{2} [(173 - 175)^2 + (174 - 175)^2 + (178 - 175)^2] = 7.$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в таблицу 2. Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех опытов (вода и керосин соответственно):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2 &= 4 + 3 + 7 + 7 + 12 + 1 + 7 + 7 = 48 \\ \sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2 &= 7 + 1 + 3 + 7 + 13 + 1 + 3 + 1 = 36. \end{aligned}$$

Из таблицы видно, что для 5 опыта (вода) и 5 опыта (керосин) величина дисперсии гораздо больше остальных. Поэтому осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ (вода и керосин соответственно):

$$\begin{aligned} G_{\text{расч}} &= \frac{S_{\text{max}}^2}{n \sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2} = \frac{12}{48} = 0,25 \\ G_{\text{расч}} &= \frac{S_{\text{max}}^2}{n \sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2} = \frac{13}{36} = 0,36. \end{aligned}$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{\text{табл}}$ (при $N = 8, f = m - 1 = 3 - 1 = 2$), равно 0,5157. Так как выполняется условие $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ ($0,25 < 0,5157, 0,36 < 0,5157$), то принимаем гипотезу об однородности дисперсий.

Вычисляем дисперсию воспроизводимости для всех экспериментов (вода и керосин соответственно):

$$\begin{aligned} S_{\text{восп}}^2 &= S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\text{воспр}_i}^2 = \frac{48}{8} = 6 \\ S_{\text{восп}}^2 &= S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\text{воспр}_i}^2 = \frac{36}{8} = 4,5. \end{aligned}$$

Вычисляем ошибку всего эксперимента (вода и керосин соответственно):

$$\begin{aligned} S(y) &= \sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{6} \approx 2,45 \\ S(y) &= \sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{4,5} \approx 2,12 \end{aligned}$$

Рассчитываем коэффициенты уравнения (вода и керосин соответственно).

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{N} \sum_1^N X_{in} \bar{y}_i, \quad b_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N \bar{y}_i, \quad b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_1^N X_{in} X_{jn} \bar{y}_i \\ b_1 &= \frac{-251 + 322 - 325 + 337 - 325 + 398 - 402 + 430}{8} = 23 \\ b_1 &= \frac{-175 + 225 - 228 + 246 - 234 + 302 - 297 + 305}{8} = 18. \end{aligned}$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты b_2 и b_3 (вода и керосин соответственно).

$$b_0 = \frac{251 + 322 + 325 + 337 + 325 + 398 + 402 + 430}{8} = 348,75$$

$$b_0 = \frac{175 + 225 + 228 + 246 + 234 + 302 + 297 + 305}{8} = 251,5$$

$$b_{12} = \frac{251 - 322 - 325 + 337 + 325 - 398 - 402 + 430}{8} = -13$$

$$b_{12} = \frac{175 - 225 - 228 + 246 + 234 - 302 - 297 + 305}{8} = -11,5.$$

После расчета всех коэффициентов уравнение (1) принимает вид (вода и керосин соответственно):

$$\hat{y} = 348,75 + 23X_1 + 24,76X_2 + 40X_3 - 13X_1X_2 + 2,15X_1X_3 + 2,5X_2X_3 + 1,73X_1X_2X_3 \quad (2)$$

$$\hat{y} = 251,5 + 18X_1 + 17,51X_2 + 32,97X_3 - 11,5X_1X_2 + 1,1X_1X_3 - 1X_2X_3 - 3,62X_1X_2X_3 \quad (3)$$

Проверяем статистическую значимость коэффициентов. Проверку проводим с помощью t -критерия. Для полного факторного эксперимента ошибки всех коэффициентов равны между собой и определяются следующим образом (вода и керосин соответственно):

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}} = \frac{2,45}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,5$$

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}} = \frac{2,12}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,43.$$

Далее определяем доверительный интервал длиной $2 \Delta b_i$ (вода и керосин соответственно):

$$\Delta b_i = t_{\text{табл}} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,5 = 1,06$$

$$\Delta b_i = t_{\text{табл}} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,43 = 0,91.$$

Табличное значение $t_{\text{табл}}$ выбираем для числа степеней свободы $f = N \times (m - 1) = 8 \times (3 - 1) = 16$ и по принятому уровню значимости 0,05, т.е. $t_{\text{табл}} = 2,12$. Таким образом, все коэффициенты уравнения (2), моделирующего полный факторный эксперимент в дистиллированной воде оказались статистически значимыми. Все коэффициенты уравнения (3), моделирующего полный факторный эксперимент в керосине осветительном, оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимого коэффициента b_3 уравнение регрессии принимает вид (вода и керосин соответственно):

$$\hat{y} = 348,75 + 23X_1 + 24,76X_2 + 40X_3 - 13X_1X_2 + 2,15X_1X_3 + 2,5X_2X_3 + 1,73X_1X_2X_3 \quad (4)$$

$$\hat{y} = 251,5 + 18X_1 + 17,51X_2 + 32,97X_3 - 11,5X_1X_2 + 1,1X_1X_3 - 1X_2X_3 - 3,62X_1X_2X_3 \quad (5)$$

Проверяем уравнения на адекватность.

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии (4 и 5) значений функции оптимизации $\hat{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$.

Для первого опыта уравнение регрессии (4 и 5) будет иметь вид (вода и керосин соответственно) (т.е. вместо значений X_1, X_2, X_3 и т.д. выбираем + или – согласно 1 строке (1 опыту)).

$$\hat{y}_1 = 348,75 - 23 - 24,76 - 40 - 13 + 2,15 + 2,5 - 1,73 = 250,91$$

$$\hat{y}_1 = 251,5 - 18 - 17,51 - 32,97 - 11,5 + 1,1 - 1 + 3,62 = 175,24.$$

Аналогично рассчитываются значения для других опытов. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3: Сводные данные

№ опыта	$\overline{y_i}$		$\overline{y_i}$	
	вода	керосин	вода	керосин
1	251	175	250,91	175,24
2	322	225	322,07	224,80
3	325	228	324,89	228,02
4	337	246	337,13	246,06
5	325	234	325,07	233,74
6	398	302	397,91	302,18
7	402	297	402,13	297,00
8	430	305	429,89	304,96

Для оценки отклонений используют критерий Фишера F -критерий. Находят значения F -критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^1}{S_{\text{восп}}^2} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2(y)},$$

где $S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\overline{y_i} - \hat{y})^2$ — дисперсия адекватности;

m_i — число параллельных опытов в i -й строчке матрицы планирования;

$\overline{y_i}$ — среднее арифметическое функции отклика (из m параллельных опытов) значение функции отклика;

$\hat{y}$ — предсказанное по уравнению (5.3.1 и 5.3.2) в i -м опыте; l — число значимых коэффициентов в уравнении регрессии; N — число независимых опытов.

Величина дисперсии адекватности (вода и керосин соответственно):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\overline{y_i} - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-7} \sum_{i=1}^8 (251 - 250,91)^2 + (322 - 322,07)^2 + (325 - 324,89)^2 + \\ + (337 - 337,13)^2 + (325 - 325,07)^2 + (398 - 397,91)^2 + (402 - 402,13)^2 + (430 - 429,89)^2 = 0,252$$

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\overline{y_i} - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-7} \sum_{i=1}^8 (175 - 175,24)^2 + (225 - 224,8)^2 + (228 - 228,02)^2 + \\ + (246 - 246,06)^2 + (234 - 233,74)^2 + (302 - 302,18)^2 + (297 - 297)^2 + (305 - 304,96) = 0,6096.$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей F -критерия, необходимо определить число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ и $f_{\text{восп}}$: $f_{\text{ад}} = N - l$. $f_{\text{ад}} = 8 - 7 = 1$, $f_{\text{восп}} = N \times (m - 1) = 8(3 - 1) = 16$.

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2(y)} = \frac{0,252}{0,175} = 1,44$$

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2(y)} = \frac{0,6096}{0,175} = 3,483.$$

Исходя из найденных значений $f_{\text{ад}}$, $f_{\text{восп}}$ находим по таблице $F_{\text{табл}} = 4,49$. Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$, то уравнение считают адекватным. В рассматриваемых примерах $1,44 < 4,49$, $3,483 < 4,49$, значит уравнения адекватны.

Полученные уравнения были использованы для крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение шихты, полученной в воде, начинали из нулевой точки (основные уровни): $X_1 = 625^\circ\text{C}$, $X_2 = 30$ МПа, $X_3 = 6$ мин (таблица 4).

Таблица 4: Расчет крутого восхождения (дистиллированная вода)

Наименование	X_1 (Т, °C)	X_2 (P, МПа)	X_3 (t, мин)	Y
Основной уровень	625 30	6	—	
Коэффициент b_i	23	24,76	40	—
Интервал варьирования ξ_i	400	10	4	—
$b_i \cdot \xi_i$	9200	247,6	160	—
Шаг Δi	92	2,47	1,6	—
Округленный шаг	90	2	2	—
Реализованный опыт 1	715	32	8	338,15
Реализованный опыт 2	805	34	10	340,91
Реализованный опыт 3	895	36	10	342,12
Реализованный опыт 4	970	38	10	346,85
Реализованный опыт 5(max)	1050	40	10	349,86

Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации Y (микротвердость), которые составили: для образцов, полученных из частиц, диспергированных в воде — 3498,6 МПа при температуре $T = 1050^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 10$ мин.

Полученные уравнения были использованы для крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение шихты, полученной в керосине, начинали из нулевой точки (основные уровни): $X_1 = 700^\circ\text{C}$, $X_2 = 30$ МПа, $X_3 = 3,5$ мин (таблица 5).

Таблица 5: Расчет крутого восхождения (керосин осветительный)

Наименование	X_1 (T, °C)	X_2 (P, МПа)	X_3 (t, мин)	Y
Основной уровень	700	30	3,5	—
Коэффициент b_i	18	17,51	32,97	—
Интервал варьирования ξ_i	500	10	1,5	—
$b_i \cdot \xi_i$	9000	175,1	49,46	—
Шаг Δi	90	1,751	0,4946	—
Округленный шаг	90	2	0,5	—
Реализованный опыт 1	790	32	4	235,66
Реализованный опыт 2	880	34	4,5	237,07
Реализованный опыт 3	970	36	5	238,79
Реализованный опыт 4	1060	38	5	421,72
Реализованный опыт 5	1150	40	5	243,56
Реализованный опыт 6(max)	1200	40	5	244,92

Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации Y (микротвердость), которые составили: для образцов, полученных из частиц, диспергированных в керосине — 2449,2 МПа при температуре $T = 1200^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 5$ мин. Далее представлены результаты экспериментальных исследований состава, структуры и свойств тяжелых вольфрамовых сплавов из диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95, полученные при оптимальных режимах.

4. Заключение

1. Проведено определение оптимальных параметров процесса получения тяжелого вольфрамового сплава искровым плазменным спеканием частиц сплава ВНЖ 95 по микротвердости спеченных образцов путем проведения полного факторного эксперимента типа. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки искрового плазменного спекания: температура, давление и время выдержки, мин. Оптимальные параметры работы установки определяли для электроэрозионного материала ВНЖ 95, ранее полученного в двух рабочих средах: воды дистиллированной и керосина осветительного.
2. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации Y (микротвердость), которые составили: для образцов, полученных из частиц, диспергированных в воде — 3498,6 МПа при температуре $T = 1050^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 10$ мин.; для образцов, полученных из частиц, диспергированных в керосине — 2449,2 МПа при температуре $T = 1200^\circ\text{C}$, давлении $P = 40$ МПа и времени выдержки $t = 5$ мин. Далее представлены результаты экспериментальных исследований состава, структуры и свойств тяжелых вольфрамовых сплавов из диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ 95, полученные при оптимальных режимах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левинсон Е. М. Электроэрозионная обработка металлов. – Л.: Лениздат, 1961. – 184 с.
2. Бурцев В. А. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках / В. А. Бурцев, Н. В. Калинин, А. В. Лучинский. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.
3. Седой В. С., Валевиц В. В. Получение высокодисперсных металлических порошков методом электрического взрыва в азоте пониженного давления // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25. – Вып. 14. – С. 81–84.
4. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Получение износостойких порошков из отходов твердых сплавов // Заготовительные производства в машиностроении. – 2010. – №12. – С. 39–44.
5. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноструктурный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Заготовительные производства в машиностроении. – 2011. – №2. – С. 42–44.
6. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноспектральный микроанализ частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №2(74). – С. 13–16.
7. Агеев Е. В., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Оценка эффективности применения твердосплавных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов твердых сплавов, при восстановлении и упрочнении деталей композиционными гальваническими покрытиями // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №9(81). – С. 14–16.
8. Агеев Е. В., Латыпов Р. А., Агеева Е. В. Исследование свойств электроэрозионных порошков и твердого сплава, полученного из них изостатическим прессованием и спеканием // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. – 2014. – №6. – С. 51–55.

9. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Морфология и элементный состав медных электроэрозионных порошков, пригодных к спеканию // Вестник машиностроения. – 2014. – №10. – С. 66–68.
10. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Рентгеноспектральный микроанализ порошка, полученного из отходов быстрорежущей стали электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2014. – №11. – С. 71–72.
11. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Рентгеноструктурный анализ порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Вестник машиностроения. – 2014. – №12. – С. 64–65.
12. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование формы и морфологии электроэрозионных медных порошков, полученных из отходов // Вестник машиностроения. – 2014. – №8. – С. 73–75.
13. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование распределения микрочастиц по размерам в порошках, полученных электроэрозионным диспергированием медных отходов // Вестник машиностроения. – 2014. – №9. – С. 63–64.
14. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Воробьев Е. А. Гранулометрический и фазовый составы порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в керосине // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 11–14.
15. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Изучение формы и элементного состава порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 14–17.
16. Хорьякова Н. М., Агеев Е. В., Агеева Е. В. Электроэрозионные медные порошки для гальванических покрытий // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 18–20.
17. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А., Осьминина А. С. Получение износостойких покрытий с использованием электродов из твердосплавных электроэрозионных порошков и их исследование // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 21–23.
18. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Карпенко В. Ю., Осьминина А. С. Получение заготовок твердого сплава из порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамсодержащих отходов // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 24–27.
19. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Хорьякова Н. М. Изготовление заготовок из медных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов электротехнической меди и изучение их свойств // Научные технологии в машиностроении. – 2014. – №10(40). – С. 10–13.
20. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Размерный анализ частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в воде // Вестник машиностроения. – 2015. – №3. – С. 45–46.
21. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Анализ формы и морфологии частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2015. – №7. – С. 72–73.

22. Агеева Е. В., Латыпов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №1. – С. 71–76.
23. Агеева Е. В., Латыпов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Характеристики электроискровых покрытий, полученных электродами из электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №2. – С. 62–65.
24. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Латыпов Р. А. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия
25. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Пикалов С. В., Агеев Е. В. Состав, структура и свойства медного электроэрозионного порошка, полученного в среде керосина // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №4. – С. 4–8.
26. Хольм Р. Электрические контакты. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 464 с.

REFERENCES

1. Levinson E.M. 1961, *Electroerosion treatment of metals*. Leningrad, Lenizdat. 184 p.
2. Burtsev V.A., Kalinin N.V., Luchinsky A.V. 1990, *Electric explosion of conductors and its application in electrophysical installations*. Moscow, Energoatomizdat. 288 p.
3. Gray V.S., Valevich V.V. 1999, «Preparation of highly dispersed metal powders method of electric explosion in the nitrogen of low pressure», *Letters to the ZhTF*, Vol.25, No.14, pp. 81-84.
4. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2010, «Obtaining wear-resistant powders from solid alloy waste», *Procurement in mechanical engineering*, No.12, pp. 39-44.
5. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Structural analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of a hard alloy», *Procurement in mechanical engineering*, No.2, pp. 42-44.
6. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Spectral microanalysis of powder particles obtained by electroerosive dispersion of hard alloy», *Strengthening technologies and coatings*, No.2(74), pp. 13-16.
7. Ageev E.V., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «Evaluation of the effectiveness of the use of hard-alloy powders obtained by electroerosive dispersion of solid-alloy waste in the restoration and strengthening of parts with composite electroplating coatings», *Hardening technologies and coatings*, No.9(81), pp. 14-16.
8. Ageev E.V., Latypov R.A., Ageeva E.V. 2014, «Investigation of properties of electroerosive powders and hard alloy obtained from them by isostatic pressing and sintering», *News of higher educational institutions. Nonferrous metallurgy*, No.6, pp. 51-55.

9. Ageeva E.V., Horakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Morphology and elemental composition of copper electroerosion powders suitable for sintering», *Bulletin of mechanical engineering*, No.10, pp. 66-68.
10. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A. 2014, «X-ray Spectral microanalysis of a powder obtained from high-speed steel waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.11, pp. 71-72.
11. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «X-ray Structural analysis of a powder obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Bulletin of mechanical engineering*, No.12, pp. 64-65.
12. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the form and morphology of electroerosive copper powders obtained from waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.8, pp. 73-75.
13. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the size distribution of microparticles in powders obtained by electroerosive dispersion of copper waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.9, pp. 63-64.
14. Ageev E.V., Ageeva E.V., Vorobiev E.A. 2014, «Granulometric and phase compositions of powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in kerosene», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 11-14.
15. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «Study of the form and elemental composition of a powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 14-17.
16. Horyakova N.M., Ageev E.V., Ageeva E.V. 2014, «Electroerosive copper powders for electroplating coatings», *Strengthening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 18-20.
17. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A., Osminina A.S. 2014, «Obtaining wear-resistant coatings using electrodes from hard-alloy electroerosive powders and their research», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 21-23.
18. Ageev E.V., Ageeva E.V., Karpenko V.Yu., Osminina A.S. 2014, «Obtaining hard alloy billets from powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-containing waste», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 24-27.
19. Ageeva E.V., Ageev E.V., Horyakova N.M. 2014, «Production of blanks from copper powders obtained by electroerosive dispersion of waste electrical copper and study of their properties», *Science-Intensive technologies in mechanical engineering*, No.10(40), pp. 10-13.
20. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2015, «Dimensional analysis of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in water», *Bulletin of mechanical engineering*, No.3, pp. 45-46.
21. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobiev E.A. 2015, «Analysis of the shape and morphology of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.7, pp. 72-73.
22. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Assessment of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive

- powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.1, pp. 71-76.
23. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Characteristics of electric spark coatings obtained by electrodes from high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.2, pp. 62-65.
24. Ageeva E.V., Ageev E.V., Latypov R.A. 2015, «Evaluation of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.3, p. 45.
25. Ageeva E.V., Horakova N.M. Pikalov, S.V., Ageev E.V. 2015, «Composition, structure and properties of copper spark erosion powder obtained in an environment of kerosene», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.4, pp. 4-8.
26. Holm R. 1961, *Electrical contacts*. Moscow, Foreign literature Publishing house. 464 p.

Получено 12.03.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-311-344

О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков¹

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Богатов Егор Михайлович — кандидат физико-математических наук, филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в г. Губкине Белгородской области; Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (г. Старый Оскол).

e-mail: embogатов@inbox.ru

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhin@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрены предпосылки и зарождение теории нелинейных интегральных уравнений. Появление этой теории явилось закономерным следствием развития всей математики XVIII-XIX вв. Вместе с тем сильное мотивирующее воздействие оказало возрастание интереса к нелинейным задачам в конце XIX – начале XX в. Непосредственное исследование конкретных нелинейных интегральных уравнений было вызвано актуальной прикладной задачей о фигурах равновесия вращающихся жидких масс, которая, начиная с Ньютона, привлекала внимание значительного числа крупнейших математиков. В первые десятилетия развития теории нелинейных интегральных уравнений культивировались традиционные подходы, использовавшиеся для исследования дифференциальных и алгебраических уравнений, по схеме уравнение-решение. То есть на первом плане находилось *вычисление* и оценка его точности. Сложность и своеобразие нелинейных задач сразу выявили актуальность вопросов *существования и единственности* их решений, что сделало необходимым привлечение других, только создающихся областей математики. Теория интегральных уравнений вообще явилась одним из истоков функционального анализа. Кроме того, обе теории тесно переплетались и в своей эволюции взаимно стимулировали друг друга. В полной мере это относится и к нелинейным интегральным уравнениям, для которых первостепенное значение приобрели качественные методы. На рассматриваемом в настоящей работе этапе имело место параллельное развитие и смешение традиционных методов исследования уравнений и новых подходов качественного характера. На следующем этапе новые подходы вышли на первый план, объединившись с функциональным анализом и топологией.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, уравнение Клеро, уравнение Радо, уравнение Лиувилля, уравнение Ляпунова-Шмидта, уравнение Урысона, уравнение Некрасова, уравнение Гаммерштейна, А. Пуанкаре, Н.Н. Назаров.

Библиография: 98 названий.

Для цитирования:

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 311–344.

¹Работа является углублением исследований, проведённых в [6]. Основные её результаты были представлены на XVII международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», секция История и методология математики [7].

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-311-344

On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics²

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Bogatov Egor Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, National Research University of Science and Technology “MISIS” in Gubkin town of Belgorod Region; Stary Oskol National Research University of Science and Technology “MISIS” (Stary Oskol).

e-mail: embogatov@inbox.ru

Mukhin Raviľ Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The paper considers the preconditions and the origin of the theory of nonlinear integral equations. The appearance of this theory was a natural consequence of the development of all mathematics of the XVIII-XIX cc. At the same time, the growing interest in nonlinear problems in the late XIX and early XX centuries had a strong motivating effect. The direct investigation of specific nonlinear integral equations was triggered by an urgent applied problem on the equilibrium figures of rotating liquid masses, which has attracted a significant number of major mathematicians since Newton. In the first decades of the development of the theory of nonlinear integral equations, traditional approaches were cultivated, which were used to study differential and algebraic equations, according to the equation-solution scheme. That is, the foreground was the calculation and assessment of its accuracy. The complexity and originality of nonlinear problems immediately revealed the relevance of questions of the existence and uniqueness of their solutions, which made it necessary to involve other, just emerging areas of mathematics. The theory of integral equations in general was one of the origins of functional analysis. Moreover, both theories were closely intertwined and mutually stimulated each other in their evolution. This fully applies to nonlinear integral equations, for which qualitative methods have become of paramount importance. At the stage considered in this work, there was a parallel development and mixing of traditional methods for studying equations and new approaches of a qualitative nature. In the next phase, new approaches came to the fore, merging with functional analysis and topology.

Keywords: nonlinear integral equations, Clairaut equation, Radau equation, Liouville equation, Lyapunov-Schmidt equation, Urysohn equation, Nekrasov equation, Hammerstein equation, A. Poincaré, N.N. Nazarov.

Bibliography: 98 titles.

For citation:

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin, 2021, “On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 311–344.

²This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-011-00402.

1. Введение

Интегральные уравнения составляют обширную и активно разрабатываемую область современной математики. Они сыграли решающую роль в формировании функционального анализа. Самостоятельное место в теории интегральных уравнений занимают нелинейные уравнения. Их значение особенно усилилось во второй половине XX в., когда нелинейные системы стали привлекать пристальное внимание. Нелинейные интегральные уравнения составляют ядро нелинейных операторных уравнений, исследование которых в немалой степени придаёт математике ее современный вид.

Область нелинейных интегральных уравнений столь обширна, богата глубокими результатами и нетривиальными идеями, что в объеме одной статьи невозможно охватить даже основные положения. Поэтому мы ограничимся здесь начальным этапом, охватывающим, с некоторой долей условности, первые три-четыре десятилетия XX в., когда сложилась эта область.

Интегральные уравнения, начиная с XVIII в., неоднократно появлялись в работах разных математиков. Но это были отдельные, несвязанные между собой задачи. Лишь к концу XIX в. стали вызревать убеждения, что интегральные уравнения составляют самостоятельную сущность, для которой следует выработать общий подход, позволяющий охватить целый, как потом выяснилось, очень обширный класс задач. Наиболее отчетливо выразил эту идею в 1888 г. П. Дюбуа-Реймон [24], которому принадлежит и сам термин «интегральное уравнение».

Основы теории линейных интегральных уравнений были сформулированы на рубеже XIX–XX вв. и это связано с именами целого ряда выдающихся математиков: В. Вольтерры [14]–[17], Э.И. Фредгольма [88], Д. Гильберта [19], Э. Шмидта [92, 93]. По этому поводу Г. Вейль отмечал: *«На территории анализа была открыта золотая жила, которая сравнительно легко поддавалась разработке и которая не скоро должна была истощиться ... Самые настойчивые приступили к атаке на нелинейные интегральные уравнения»* [12]. Логика развития науки обычно следует пути от простого к сложному. Так, к середине XIX в. была построена исчерпывающая теория линейных колебаний. Теория нелинейных колебаний, которая до настоящего времени далека от завершения, является детищем XX в. Но обстоятельства могут сложиться так (чаще всего вследствие запросов со стороны прикладных задач) что привычная логика оказывается нарушенной. Это и произошло с теорией интегральных уравнений и связано с восходящей еще к И. Ньютону проблемой фигур равновесия вращающейся жидкой массы.

А. Эддингтон отмечал, что одна из самых глубоких загадок Вселенной заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов [26]. Отсюда становится ясной актуальность указанной проблемы, ставшей предметом интереса большинства крупнейших математиков XVIII–XIX вв. Проблема равновесия вращающихся жидкостей принадлежит к числу труднейших задач и, как, например, другая широко известная проблема трех тел, по-видимому, неисчерпаема и не имеет общего решения.

2. Первые интегральные уравнения. Работы А. Клеро и Р. Радо

Первый шаг в создании теории интегральных уравнений традиционно связывают с известной работой Н. Абея о таутохроне (1823) [1] (Г. Бэйтман [9], Е. Хелингер и О. Тёплиц [91], Й. Лютцен [54] и др.) Такой же позиции придерживались ранее и авторы настоящей статьи [6]. Однако в дальнейшем выяснилось, что интегральное уравнение было положено в основу работы А. Клеро *“Геометрия фигуры Земли, основанная на началах гидростатики”* (1743) на 80 лет раньше [27].

Клеро ставит задачу найти зависимость, связывающую плотность $\rho(r)$ медленно вращаю-

щейся неоднородной жидкой массы в форме сфероида S от сжатия её слоёв $\alpha(r)$ (r — средний радиус S) во второй части главы II своего труда. Предполагая, что наслоения такой массы отличаются от эллипсоидов на величину порядка квадрата её сжатия, и что центробежная сила много меньше силы тяжести, Клеро приходит к уравнению равновесия массы, исходя из равенства нулю равнодействующей силы тяжести и центробежной силы в произвольной точке M поверхности S [28]:

$$\alpha \int_0^r \rho r^2 dr - \frac{1}{5r^2} \int_0^r \rho d(r^5 \alpha) - \frac{r^3}{5} \int_r^1 \rho d\alpha = \frac{\varphi r^3}{2} \int_0^1 \rho r^2 dr \quad (1)$$

где φ — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, $\varphi = \frac{\omega^2 R}{f(R)}$, ω — угловая скорость вращения жидкости; R — экваториальный радиус; $f(R)$ — интенсивность силы притяжения на расстоянии R от центра.

При известной функции сжатия слоёв сфероида $\alpha = \alpha(r)$ получается линейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\rho = \rho(r)$. Если же известна функция плотности $\rho = \rho(r)$, то уравнение (1) становится линейным интегро-дифференциальным уравнением относительно искомой функции $\alpha = \alpha(r)$. Значение полученных результатов становятся ясными из замечания Н.И. Идельсона “.... уравнение (1) содержит в себе, с точностью до первой степени величин α и φ , всю теорию неоднородных жидких планет” [25, с. 325].

Путём дифференцирования и упрощения уравнения (1) Клеро привёл его к виду

$$\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \frac{2\alpha}{r^3} \right) \cdot A(r) = \int_r^1 \rho d\alpha + \frac{5\pi A\varphi}{2}, \quad (2)$$

где $A = A(r) = \int_0^r \rho r^2 dr$.

Второе дифференцирование дало

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\rho r^2}{A(r)} \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \left(\frac{2\pi r}{A(r)} - \frac{6}{r^2} \right) \cdot \alpha = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) по предложению И. Тодхантера [86], стали называть *уравнением Клеро*.

Результат Клеро получил широкую известность и дальнейшее развитие у П. Лапласа [31], А.М. Ляпунова [37], Р. Радо. С помощью подстановки $\eta = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dr}$ Радо свёл уравнение (3) к нелинейному (относительно η) дифференциальному уравнению 1-го порядка (уравнение Радо) [80]:

$$D \left(r \frac{d\eta}{dr} + \eta^2 + 5\eta \right) + 2r \frac{dD}{dr} (1 + \eta) = 0 \quad (4)$$

где $D = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho dr^3$ — средняя плотность сфероида.

Применяя специальный приём, он преобразовал уравнение (4) к виду

$$\frac{d}{dr} [r^5 \sqrt{1 + \eta} \cdot D] = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left[1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10} \right].$$

После интегрирования в пределах от 0 до r , Радо пришёл к нелинейному интегральному уравнению:

$$r^5 \sqrt{1 + \eta} D = \int_0^r \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left(1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10} \right) dr. \quad (5)$$

которое носит его имя и является, по-видимому, *первым нелинейным интегральным уравнением*.

Уравнение Радо было использовано А. Пуанкаре в своих лекциях по фигурам равновесия жидкой массы [76], [78], правда, без ссылок на Радо. Пуанкаре вывел из уравнения (5) теоретический предел сжатия Земли δ (точный до величины порядка первой степени сжатия: $\delta \leq \frac{1}{297,1}$) [25, с. 331].

3. Задачи математической физики

Помимо запросов со стороны прикладных проблем астрономии и геодезии, интерес к интегральным уравнениям был обусловлен краевыми задачами математической физики (Ж. Фурье (1822) [87], Н. Абель (1826) [1], Р. Мёрфи (1833) [56], Ж. Лиувиль (1837) [51]).

Лиувиль, в частности, показал, что краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + p^2 y = \varphi(x)$$

может быть сведена к интегральному уравнению вида

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

которое допускает решение методом «последовательных подстановок» [10].

Суть метода заключалась в том, что решение уравнения

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

ищется в виде

$$u(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \dots + \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) \dots \int_a^b K(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) f(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1} \dots d\xi_1 d\xi;$

$$R_n(x) = \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) \dots \int_a^b K(\xi_{n-1}, \xi_n) u(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_1 d\xi. \quad [10, \text{с.14}]$$

Повышение внимания к интегральным уравнениям произошло после того, как К. Нейману (1861) удалось привлечь теорию потенциала для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [69]

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in D \\ v|_{\partial D} = F(x). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь функция $F(x)$ – однозначна и непрерывна, а область D – ограничена и имеет достаточно гладкую границу ∂D (историко-математические подробности см. в [2]).

Приём Неймана заключался во введении в рассмотрение логарифмического потенциала, что позволило, в случае, когда область D – осесимметрична, свести задачу (6) к интегральному уравнению

$$v(x) = \int_0^{2\pi} v(a) \eta(a, x) d\omega_a,$$

где $x \in D$; $\eta(a, x)$ – известная функция [2, с. 73].

В более поздней своей работе [70] (1878) Нейман решил задачу (6) для выпуклой области D с помощью итерационной процедуры, похожей на процедуру Лиувилля. В основу метода лёг поиск формы потенциала двойного слоя $V(x)$ при неизвестной плотности $\rho(s)$ в виде

$$V(x) = \int_S \rho(s) K(x, s) d\sigma,$$

где $S = \partial D$; $K(x, s) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-s|} \right)$.

Решение задачи (6) было представлено рядом

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n. \quad (7)$$

Его члены находятся рекуррентно:

$$V_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S F(s) K(x, s) d\sigma, \quad (8)$$

$$V_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S V_{n-1}(s) K(x, s) d\sigma. \quad (9)$$

Для указанных выше областей Нейман доказал сходимость ряда (7) при $|\lambda| \leq 1$. Заметим, что соотношение (9) является дискретным аналогом линейного интегрального уравнения

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S V(s) K(x, s) d\sigma.$$

Обратим внимание на то, что в этом интегральном уравнении параметр отсутствует.

По-видимому, первым, кто ввёл параметр в интегральное уравнение, был Г. Шварц. В 1885 г. он опубликовал большую работу по теории минимальных поверхностей [95], в которой была рассмотрена краевая задача

$$\Delta w + \xi g w = 0, \quad (10)$$

$$w|_{\partial D} \equiv 1 \quad (11)$$

где функция $g = g(x)$ положительна и непрерывна в области D .

Осуществляя поиск решения (10)-(11) в виде ряда

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n w_n, \quad (12)$$

где $w_0 \equiv 1$, $w_n|_{\partial D} \equiv 0$, $n \geq 1$, Шварц использовал решение задачи

$$\begin{cases} \Delta w + f = 0 \\ w|_{\partial D} \equiv 0 \end{cases}$$

в интегральной форме

$$w(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_D f(P) G(M, P) dx.$$

Здесь $G(M, P)$ – функция Грина.

Это позволило ему дать явную формулу для нахождения w_n :

$$w_n(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_D g(P) w_{n-1}(P) G(M, P) dx.$$

Доказательство сходимости ряда (12) было дано при малых $|\xi|$. В его основе лежало неравенство, носящее теперь имя Шварца (подробности см., например, в [23, Гл. III, §1].

Задачи с параметром получили распространение после выхода работы А. Пуанкаре (1897) [75]. При изучении колебаний мембраны он ввёл в (10) комплексный параметр и показал, что $u(s)$ является мероморфной функцией этого параметра. Это был очень важный шаг, он явился логическим продолжением бифуркационной тематики Пуанкаре (см., например, [57, Гл. I, § 1]). Как неоднократно было замечено в различных областях математики, с введением параметра, с более общих позиций, задача решения не только интегральных, но и их обобщения — операторных уравнений, упрощается. Меняется и сама постановка задачи, в частности, вопросы существования и единственности решений в зависимости от параметра. Конструктивное значение приобретает и проблема неединственности решений.

Переход от двумерных уравнений математической физики к интегральным уравнениям был осуществлён в работе Э. Пикара (1890) посредством функции Грина. В своей работе [71] он распространил метод последовательных приближений на линейные и нелинейные интегральные уравнения. Скорее всего, интерес Пикара к подобным уравнениям был обусловлен участием в конкурсе Гёттингенского научного общества на интегрирование квазилинейного уравнения Лиувилля:

$$\Delta u = k e^u, \quad (13)$$

где $u = u(x, y); (x, y) \in \Omega \subset R^2, k = 1$ [77, с. 236].

Лиувилль использовал уравнение (13) в работах по дифференциальной геометрии ещё в середине XIX в. В частности, в работе [52] он показал, что на поверхности S постоянной кривизны $\pm \frac{k}{2}$ ($k > 0$) с метрикой

$$ds^2 = \lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

где α и β — это так называемые «изотермальные» координаты поверхности, функция λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial \beta^2} = \mp k \lambda,$$

которое переходит в уравнение

$$u''_{\alpha\alpha} + u''_{\beta\beta} = \mp k e^u \quad (14)$$

Вернёмся к работе Пикара [71], в которой долгое время развиваемый многими математиками метод последовательных приближений обрел относительно завершённую форму (она примечательна ещё тем, что является одной из первых, где проведено аналитическое исследование нелинейного интегрального уравнения).

Используя функцию Грина $G(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, $u = u(x, y)$ в области Ω , Пикар рассмотрел переход от уравнения (13) к интегральному уравнению

$$u(x, y) = -k \iint_{\Omega} \left(e^{u(\xi, \eta)} G(\xi, \eta, x, y) \right) d\xi d\eta, \quad (15)$$

где $k \in R$. Для доказательства его разрешимости, по аналогии с методом Шварца, им была построена рекуррентная последовательность

$$u_n = -k \iint_{\Omega} (e^{u_{n-1}} G(\xi, \eta, x, y)) d\xi d\eta \quad (16)$$

и доказана её сходимость.

4. Нелинейное уравнение фигур равновесия в теории Ляпунова

Исследования фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, были выполнены в магистерской диссертации А. М. Ляпунова (1884) [36] и мемуаре А. Пуанкаре (1885) [37]. Но в них (как и у Клеро) вся теория была также развита не дальше первого приближения. У Пуанкаре фигуры равновесия получались наложением на эллипсоид слоя переменной толщины ζ , которая предполагалась малой по сравнению с размерами эллипсоида, что позволяло пренебрегать высшими степенями ζ . Затем выяснялись условия, при которых деформированная таким образом фигура может быть фигурой равновесия. В теории отсутствовали доказательства существования фигур равновесия, отличных от эллипсоидальных. Замечательно, что вопрос о существовании фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, привёл Пуанкаре к понятию бифуркации, которое является фундаментальным для всей нелинейной проблематики: "Формы равновесия рассматриваемой системы задаются уравнениями:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0,$$

которые будут иметь ряд реальных решений, и когда y [*переменный параметр*, Е.Б., Р.М.] будет меняться непрерывным образом, эти решения сами будут меняться непрерывно, формируя различные линейные ряды равновесных форм. Кроме того, может случиться, что одна и та же форма равновесия принадлежит двум или более линейным рядам. Тогда это форма бифуркации. Действительно, при значении y , бесконечно близком к значению, соответствующему этой форме, можно найти две формы равновесия, которые бесконечно мало отличаются от формы бифуркации. Также может случиться, что при изменении y существуют два линейных ряда действительных форм равновесия, которые начинают смешиваться, а затем исчезают, потому что корни уравнений равновесия становятся мнимыми. Соответствующая форма равновесия будет тогда называться предельной формой" А. Пуанкаре (1888) [74].

Перейдём к характерным особенностям нелинейных интегральных уравнений. Главная из них заключается в неединственности их решений. Например, в различных прикладных задачах известно тривиальное решение, и требуется найти другое, представляющее интерес нетривиальное решение. Часто можно свести задачу к виду

$$\varphi = F(\varphi, \lambda) \quad (17)$$

где нелинейный интегральный оператор $F(\varphi, \lambda)$ зависит от числового параметра λ . Особый интерес представляют критические значения λ , когда разветвляются или сливаются несколько решений. Из-за большой сложности в исследовании задачи часто приходится ограничиваться случаем *малых* решений.

Другая особенность: проблема выявления зависимости решений (17) от параметра λ . Если уравнение (17) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$, будут ли существовать решения при λ , близких к λ_0 и какова их зависимость от λ ?

Все эти вопросы были рассмотрены Ляпуновым в цикле работ, посвящённых фигурам равновесия вращающихся жидкостей [38]–[46] (1903–1916). Он привёл требуемое доказательство существования неэллипсоидальных фигур равновесия и дал решение сложнейшего вопроса об устойчивости грушевидных фигур равновесия ([57, Гл. I, § 1]; [6, §2]).

В первой из работ "*Исследование по теории фигуры небесных тел*" [37] (1903) Ляпунов доказал существование фигур равновесия жидких масс, близких к шарообразным. Он рассмотрел несжимаемую жидкую неоднородную массу плотности ρ , вращающуюся вокруг оси ОХ в предположении, что ρ возрастает от поверхности к центру и конечна. Тогда поверхности постоянного давления будут и поверхностями постоянной плотности, то есть на каждой поверхности уровня будут выполняться условия

$$\rho = \text{Const}; U = \text{Const},$$

где U — потенциал силы тяжести.

Для характеристики всего семейства Ляпунов ввёл параметр a , так что

$$\rho = \rho(a); U = U(a).$$

При этом $\rho(a)$ считается известной функцией, тогда как зависимость $U(a)$ предстоит определить (это и является главной целью задачи). В качестве параметра Ляпунов принял радиус сферы, объём которой равен объёму, ограниченному рассматриваемой (неизвестной) поверхностью.

Пусть (x, y, z) — координаты точки на поверхности уровня; взяв начало координат в центре тяжести вращающейся массы, Ляпунов соотнёс точки поверхности уровня с точками сферы с координатами a, θ, φ и положил

$$\begin{cases} x = a(1 + \zeta) \cos \theta \\ y = a(1 + \zeta) \sin \theta \cos \varphi \\ z = a(1 + \zeta) \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (18)$$

так что

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 + \zeta)^2, 0 \leq a \leq A.$$

Здесь ζ есть искомая функция параметра a и сферических координат θ, φ , характеризующая отклонение данной поверхности уровня от сферы радиуса a . Ляпунов предположил, что при малой скорости вращения эта поверхность останется близкой к сфере: $\zeta \ll 1$.

Используя равенство

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$$

где V — потенциал силы притяжения, $\frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$ — потенциал центробежных сил, ω — угловая скорость вращения, и выполнив ряд преобразований (см. [55, с. 118]), Ляпунов пришёл к уравнению вида

$$\int_0^A \rho(a')^2 da' \int_S (1 + (\zeta'))^2 \left(1 + \frac{\partial(a'\zeta')}{\partial a'}\right) \frac{d\sigma'}{\Delta} + \frac{\omega^3}{2g} a^2 (1 + \zeta^2) \sin^2 \theta = F(a). \quad (19)$$

Здесь g — постоянная всемирного тяготения; Δ — расстояние между переменной точкой $P'(r', \theta', \varphi')$ внутри жидкости и фиксированной точкой $P(r, \theta, \varphi)$; $F(a)$ — заданная функция; интегрирование во втором интеграле производится по поверхности единичной сферы S .

Уравнение (19) представляет собой *нелинейное* интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции ζ . Для его исследования Ляпунов разлагал функцию ζ в ряд по степеням малого параметра ε (отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе жидкой планеты):

$$\zeta = \zeta_1 \varepsilon + \zeta_2 \varepsilon^2 + \dots + \zeta_n \varepsilon^n + \dots, \quad (20)$$

при этом $\zeta_i = \zeta_i(a, \cos \theta)$ [55, с. 125].

После ряда преобразований, среди которых было разложение функций ζ_i в ряды по сферическим функциям, Ляпунов пришёл к уравнению Клеро

$$z \int_0^a \rho a^2 da - \frac{1}{5a^2} \int_0^a \rho \frac{\partial(a^5 z)}{\partial a} da - \frac{a^3}{5} \int_0^A \rho \frac{\partial z}{\partial a} da = -\frac{Ma^3}{15A^3} \quad (21)$$

где M — масса жидкой планеты.

Используя решение уравнения (21), Ляпунов доказал сходимость ряда (20) при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ [55, с. 142].

В работе «Об одной задаче Чебышева» (1905) Ляпунов дал решение одной из труднейших задач — доказательства существования неэллипсоидальных фигур равновесия жидкой массы и об их устойчивости. Он перешёл от эллипсоида Якоби с полуосями $\sqrt{p+1}$, $\sqrt{p+q}$, $\sqrt{p}(q < 1)$, для которого известна приведённая величина угловой скорости вращения Ω_0 , к параметрическим уравнениям поверхности жидкой массы

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{p + \zeta + 1} \sin \theta \cos \psi, \\y &= \sqrt{p + \zeta + q} \sin \theta \sin \psi, \\z &= \sqrt{p + \zeta},\end{aligned}$$

где $\zeta(\theta, \psi, a)$ — искомая функция, характеризующая отклонение поверхности фигуры равновесия от исходного эллипсоида, a — параметр, при изменении которого получаются разные фигуры равновесия и $\zeta(\theta, \psi, a)$ равномерно стремится к нулю при $a \rightarrow 0$. Новые фигуры равновесия, по предположению Ляпунова, должны соответствовать приведённой угловой скорости $\Omega = \frac{\omega}{2\pi g\rho}$ с тем, чтобы выполнялось условие

$$\Omega = \Omega_0 + \eta,$$

где $|\eta| \ll 1$.

Для функции ζ Ляпунов получил нелинейное интегральное уравнение, ставшее фундаментом всей его теории [55, с. 216]

$$R(\theta, \psi)H(\theta, \psi)\zeta(\theta, \psi) - \int_S \frac{H'(\theta', \psi')\zeta'(\theta', \psi')d\sigma'}{D(\theta, \psi, \theta', \psi')} = \frac{\Delta}{2}W + C, \quad (22)$$

где $W = \eta \cdot (p + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \sin^2 \theta + U_2 + U_3 + \dots$,

U_n — однородная интегро-степенная форма относительно функции ζ ;

R, H и Δ — заданные функции;

D — расстояние между точками эллипсоида $\zeta(\theta, \psi)$ и $\zeta'(\theta', \psi')$;

S — поверхность единичной сферы; C — постоянная.

Решение уравнения (22) представляло исключительные трудности. Оно было найдено Ляпуновым в виде ряда (20), в котором величина ε определялась по формуле

$$\varepsilon^\lambda = |\eta|; \lambda \in \mathbb{N}.$$

Это дало возможность свести задачу к системе рекуррентных линейных интегральных уравнений. Сходимость полученного ряда доказывалась построением соответствующих мажорант [55, с. 216].

Для исследования устойчивости полученных фигур равновесия Ляпунов задействовал функции Ламе $E_{ns}(\mu)$, $E_{ns}(\nu)$ аргументов μ, ν являющихся эллиптическими координатами точки на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{p+1} + \frac{y^2}{p+q} + \frac{z^2}{p} = 1.$$

Функции Ламе представляют собой полную ортонормированную систему; их произведения $E_{ns}(\mu)E_{ns}(\nu)$ являются линейными комбинациями элементарных сферических функций $Y_{n,s}(\theta, \psi)$ ($s = 0, 1, \dots, 2n$) порядка n [84, с. 411].

Ляпунов определил, что новые фигуры равновесия, отличные от эллипсоидов, получаются только в том случае, когда соответствующее (22) однородное интегральное уравнение имеет одно или несколько нетривиальных решений. В своей диссертации [36], [38] он продемонстрировал, что это выполняется для счётного числа эллипсоидов Маклорена и Якоби E_k , с определённым соотношением осей. При этом от каждой эллипсоидальной фигуры E_k , соответствующей последовательности функций $\{\zeta_i^{(k)}\}$, могут ответвляться *неэллипсоидальные* фигуры равновесия $\hat{E}_k$, соответствующие другой последовательности функций $\{\zeta_i^{(k)}\}$. Для эллипсоидов Маклорена возможность ответвления была определена Ляпуновым при $\lambda \geq 2$ некоторыми условиями на величину числа α_1 , входящего в определение ζ_1 :

$$\zeta_1 = \alpha_1 \tau,$$

где τ выражается через функции Ламе [55, с. 227].

В последующем Ляпунов детально изучил бифуркации, установил сходимость применяемых разложений и со всей строгостью исследовал вопрос об устойчивости новых фигур равновесия.

Подчеркнём, что Ляпунов получил свои результаты ещё до того, как теория *линейных* интегральных уравнений обрела более или менее сложившуюся форму. Стоит также отметить, что результаты Ляпунова получили известности в Европе [85], [48, с. 255].

Много усилий по систематизации и популяризации идей Ляпунова и Пуанкаре, связанных с нахождением фигур равновесия жидкостей, было приложено Л. Лихтенштейном в 1920-х гг. Он доказал ряд новых теорем существования и устойчивости в теории равновесия однородных и неоднородных жидкостей, опираясь на результаты Э. Шмидта (см. ниже), методы теории потенциала и теории функций комплексного переменного и прочитал в 1928 г. курс лекций по космогоническим гипотезам, который был опубликован в 1933 г. [50]. При этом исходным пунктом в изложении Лихтенштейна было некоторое интегро-дифференциальное уравнение, которое можно рассматривать, как обобщение фундаментального уравнения Ляпунова (22).

5. Развитие математического аппарата теории ветвления. Работа Э. Шмидта

В исследованиях интегральных уравнений в Геттингене заметное место принадлежит ученику Гильберта Э. Шмидту. В его работах [92]-[93] теория линейных интегральных уравнений Гильберта получила относительное завершение. А вот третья часть его мемуаров, вышедшая после опубликования статей Ляпунова [36]-[40], была отведена уже нелинейным уравнениям [94]. Здесь Шмидт построил теорию ветвления малых решений, уделяя главное внимание самому математическому аппарату (Шмидт только упоминает проблему равновесия вращающейся жидкости и приводит пример бифуркации). Неизвестно, был ли Шмидт знаком с работами Ляпунова, но так или иначе он на них не ссылается. Шмидт рассмотрел те же самые уравнения, что и Ляпунов, но в несколько более общем виде:

$$u(x) - \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x) + \int_a^b K_1(x, s) v(s) ds - \sum_{m+n \geq 2} U_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} \quad (23)$$

или, в символической форме,

$$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = 0, \quad (24)$$

что предвосхищает операторную запись в последующих исследованиях нелинейных интегральных уравнений.

В уравнении (23) $x \in (a, b)$;

$$U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) = \sum_{j=1}^{n_i} \int_a^b \cdots \int_a^b K^{(j)}(x, s_1, \dots, s_i) u^{\alpha_0}(x) u^{\alpha_1}(s_1) \dots u^{\alpha_i}(s_i) \times \\ \times v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}(s_1) \dots v^{\beta_i}(s_i) ds_1 \dots ds_i; \quad (25)$$

$\alpha_k, \beta_k (k = 0, \dots, i)$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = m$; $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_i = n$;

$f, v, K, K_1, K^{(j)}$ – заданные непрерывные функции своих аргументов.

Подобные уравнения стали впоследствии называть уравнениями Ляпунова-Шмидта [90].

Слагаемые в правой части равенства (25) называются *интегро-степенными членами*. В зависимости от конечности или бесконечности числа членов $U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right)$ мы имеем дело с *интегро-степенной формой* или с *интегро-степенным рядом*. Предполагается, что при малых $|u|, |v|$ интегро-степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Простейшим примером уравнения (23) может служить следующее уравнение [53, § 1]

$$u(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = v(x) + \sum_{m+n>1} a_{mn} u^m(x) v^n(x).$$

Для исследования разрешимости уравнения (23) «в малом» Шмидт рассматривает его, как уравнение с известной правой частью и применяет к нему теорию Фредгольма [89] о представлении решений линейного уравнения посредством резольвенты (разрешающего ядра) $R(x, t)$. Здесь необходимо выделить два случая, в зависимости от того, является ли оператор

$$Au = \int_a^b K(x, s) u(s) ds.$$

обратимым, или нет.

По аналогии с матричными уравнениями вида

$$BX = F, \text{ где } B = I - A, \quad (26)$$

$X \in \mathbb{R}^n, F \in \mathbb{R}^n$; $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, эти случаи будут соответствовать тому, что

а) $\text{rang } B = n$ означает, что уравнение (26) имеет единственное решение;

б) $\text{rang } B < n$ означает, что уравнение (26) может иметь множество решений.

Рассмотрим эти случаи.

1. *Единица не является собственным значением линейного интегрального оператора A.*

Здесь теория Фредгольма даёт возможность преобразовать уравнение (23) к виду [11, с. 18]

$$u(x) = -U_{01} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) - \int_a^b R(x, t) U_{01} \left(\begin{matrix} t \\ u, v \end{matrix} \right) dt + \\ + \sum_{m+n \geq 2} \left[-U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) - \int_a^b R(x, t) U_{mn} \left(\begin{matrix} t \\ u, v \end{matrix} \right) dt \right] \quad (27)$$

$U_{01} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}$ — сумма первых двух слагаемых в правой части (17); $R(x, t)$ — резольвента³ интегрального уравнения $u = Au + f(x)$.

Обозначая через $P_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}$ выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (27), Шмидт преобразует последнее уравнение к виду

$$u(x) = P_1 \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + P_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Интегро-степенной ряд в правой части (28), сходится абсолютно и равномерно при малых $|u|, |v|$.

Равенство (27) можно трактовать, как аналог бесконечной системы уравнений

$$x_k = a_k t + f_k(t, x_1 x_2, \dots) \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

где f_k — функция бесконечного числа переменных вида:

$$f_k(x_1 x_2, \dots) = c + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} x_i x_j + \dots \quad (30)$$

Уравнение (29) было изучено Х. фон Кохом (1899) [29]. Он показал, что если все коэффициенты при переменных в (29) равномерно ограничены, то для малых t эта система разрешима, причём её решение представляется в виде степенного ряда по переменной t (*принцип обращения ряда*).

Распространяя принцип обращения степенных рядов⁴ на интегро-степенные ряды, Шмидт ищет решение уравнения (28) также в виде ряда

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (31)$$

доказывая методом мажорант, что он сходится и является настоящим решением уравнения (23). Оказывается, что при достаточно малых $|v|$ других решений уравнение (23) не имеет.

Рассмотрение другого случая (ему соответствует необратимость оператора B из (26)), даёт, как в классической задаче о неявных функциях [22, гл. I, § 3] ветвление решений.

2. *Единица является n -кратным собственным значением оператора A .*

В этом случае имеется n ортонормированных собственных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. Следуя Шмидту [94], рассмотрим сначала случай $n = 1$. Согласно теории Фредгольма, тогда единица будет простым собственным значением оператора B_1 сопряжённого к A .

$$B_1 u = \int_a^b C(x, t) u(t) dt.$$

Если $\psi_1(x)$ — собственная функция оператора B_1 , соответствующая собственному значению $\lambda = 1$, то оператор A_1 , заданный выражением

$$A_1 u(x) = \int_a^b (C(x, t) - \psi_1(x) \varphi_1(t)) u(t) dt$$

не имеет число 1 среди своих собственных значений.

³То есть $u(x) = f(x) + \int_a^b R(x, t) f(t) dt$.

⁴Шмидт не ссылается на Коха в своей работе, однако её влияние на исследования Шмидта прослеживается довольно чётко [91, с. 1484, сноска 338].

Это позволяет свести задачу к предыдущей, вводя в рассмотрение новое ядро $E(x, t) = C(x, t) - \psi_1(x)\varphi(t)$. Тогда уравнение (23) можно переписать в виде

$$u(x) - \int_a^b E(x, s) u(s) ds = \xi \psi_1(x) - U_{01} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) - \sum_{m+n \geq 2} U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) \quad (32)$$

где

$$\xi = \int_a^b \varphi_1(t) u(t) dt. \quad (33)$$

Используя уже развитую технику, Шмидт получает уравнение

$$u(x) = \left(\psi_1(x) + \int_a^b \Gamma(x, s) \psi_1(s) ds \right) \xi - U_{01} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) - \int_a^b \Gamma(x, s) U_{01} \left(\begin{matrix} s \\ u, v \end{matrix} \right) ds - \\ - \sum_{m+n \geq 2} \left[U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) + \int_a^b \Gamma(x, s) U_{mn} \left(\begin{matrix} s \\ u, v \end{matrix} \right) ds \right], \quad (34)$$

где $\Gamma(x, s)$ – резольвента оператора с ядром $E(x, s)$.

Решение уравнения (34) Шмидт ищет в виде

$$u(x) = \sum_{m+n \geq 1} \xi^m V_n^m \left(\begin{matrix} x \\ v \end{matrix} \right), \quad (35)$$

где $V_n \left(\begin{matrix} x \\ v \end{matrix} \right)$ – интегро-степенная форма степени n по v .

Так же, как и в первом случае, доказывается, что при каждом фиксированном ξ (как параметре) и при достаточно малых величинах $|u|, |v|$ уравнение (34) имеет единственное решение, представленное в виде (35).

Для определения возможных значений ξ нужно подставить $u(x)$ из (35) в (33), при этом получится *уравнение разветвления*

$$\xi = \sum_{m+n \geq 1} \xi^m \int_a^b \varphi_1(s) V_n^m \left(\begin{matrix} s \\ v \end{matrix} \right) ds. \quad (36)$$

Шмидт показал, что в правой части уравнения (36) отсутствуют первые степени ξ , следовательно, в общем случае оно имеет не единственное решение. Какой бы малой по модулю не была функция $v(x)$, число решений уравнения (32) определяется числом решений уравнения разветвления (36). Таким образом, можно получить информацию о числе и виде всех нетривиальных малых решений уравнения (23), то есть полностью решить задачу об их *бифуркациях*.

Шмидтом была осуществлена *редукция* нелинейного интегрального уравнения, решением которого являются функции из *бесконечномерного* пространства, к нелинейному алгебраическому уравнению в *конечномерном* пространстве, решением которого являются вещественные числа. Подчеркнём, что данный метод (редукция Шмидта, как впрочем, и подход Ляпунова) применим только к *малым* решениям уравнения (23) и только *локально*, в малой окрестности тривиального решения.

Шмидт рассмотрел также случай, когда кратность собственного значения оператора A больше 1, и исследовал разрешимость уравнений вида (25), в которых формы $U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ .. \end{matrix} \right)$ зависят от большего числа функциональных аргументов $u(x), v(x), w(x), \dots$. Он показал, что его методы остаются справедливыми и в этих случаях.

Подводя итог, можно сказать, что Шмидт успешно перенёс методы нелинейных систем алгебраических уравнений на нелинейные интегральные уравнения путём обобщения закона Пуанкаре [79] о разветвлении решений нелинейных систем уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = 0, i = 1, \dots, n$$

где y – параметр, при условии, что $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$.

Отметим, что у интегральных уравнений оказалась «счастливая судьба», они с самого начала привлекли пристальное внимание в таком центре мировой математики, каким был тогда Гёттинген. И основополагающая работа Шмидта находилась в русле исследований самого Гильберта. Не последнее значение имело то, что Шмидт питался его идеями, следовал ценностям и традициям, культивируемым в гёттингенской школе.

6. Интегральные уравнения Урысона и Некрасова

Заметная веха в истории нелинейных интегральных уравнений связана с работами представителей московской школы – математика П. С. Урысона и механика А. И. Некрасова.

Ещё Пикаром широко использовалось сведение краевых задач

$$\begin{cases} y'' + f(x, y) = 0 \\ y(a) = A; y(b) = B \end{cases}$$

к нелинейным интегральным уравнениям вида

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, (y(s))) ds + \varphi(x).$$

При этом условия на функцию $f(x, y)$ были следующими [72, р. 129-138]: предполагалось, что

- $f(x, 0) = 0$;
- $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y ;
- $f'_y > 0$ и убывает при любом $y > 0$.

Урысону удалось изучить значительно более общее уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s)) ds + \varphi(x), \quad \lambda > 0 \quad (37)$$

Здесь его интересовали более глубокие вопросы, чем те, которые решались Пикаром и его учениками Г. Брату, Т. Лалеску и др. [6, § 4]. Это были вопросы так называемой “положительной разрешимости”⁵ уравнения (37) и его спектральных свойств. Используя в качестве основного инструмента метод последовательных приближений, Урысон доказал теорему о существовании положительных решений уравнения (37) в предположении, что $K(x, y, 0) = 0$ и что производная $K'_u(x, y, u)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает с возрастанием u ($u \geq 0$). Он также показал, что *положительные собственные функции оператора A_0 , порождённого интегральным выражением в правой части (37), существуют при условии, что значения λ принадлежат некоторому интервалу $(\lambda_P; \lambda_Q)$, где числа λ_P и λ_Q – это наибольшие собственные значения определённых линейных интегральных операторов P и Q .*

⁵Мотивацией рассмотрения положительных решений матричных и интегральных уравнений были, во многом, задачи алгебры малых колебаний упругих континуумов. Подробности и историю вопроса см. в [5].

Каждому $\mu \in (\mu_R, \mu_Q)$ соответствует единственное положительное решение $y(x, \mu)$ [97, с. 240].

Эта работа Урысона опередила своё время и не была оценена его современниками по достоинству. Лишь более, чем через 30 лет, после выхода сборника его трудов [97]–[98], результаты Урысона оказались широко востребованными и легли в основу теории нелинейных положительных операторов в банаховых пространствах с конусом (см. [5]). Они явились отправной точкой для развития ряда методов в теории нелинейных операторных уравнений в 1950-х годах [30]. Кроме того, эти результаты помогли решить ряд задач нелинейной механики, как, например, задачу потери устойчивости в некоторых системах [4].

Перейдём к работам А.И. Некрасова, специалиста по нелинейной механике и ученика Н.Е. Жуковского. Некрасов разработал нелинейную теорию волн на поверхности тяжёлой жидкости, посвятив этому шесть статей [60]–[61]; [63]–[66] (1921–1928).

В своей работе «О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга» (1921) [63], он обобщил результаты Т. Леви-Чивиты [32] и А. Вилля [13], придя к нелинейному интегральному уравнению урысоновского типа.

Следуя методу Вилля, Некрасов свёл задачу к отысканию двух сопряжённых тригонометрических рядов $g(\theta)$ и $h(\theta)$, между которыми имелось следующее соотношение

$$g'(\theta) = -\frac{\pi\lambda}{2} e^{-h(\theta)} \sin \theta (1 - \sin \theta), \quad (38)$$

где $\lambda > 0$ — некоторая постоянная [68, с. 55].

Это соотношение привело Некрасова к нелинейному интегральному уравнению⁶

$$h(\theta) = F(\theta) + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-h(\varepsilon)} \right] \frac{(1 + 2 \sin \varepsilon - \cos 2\varepsilon)}{4} \ln \left| \frac{tg \frac{\varepsilon - \theta}{2}}{tg \frac{\varepsilon + \theta}{2}} \right| d\varepsilon, \quad (39)$$

где $F(\theta)$ — некоторая известная функция, $\theta \in (0, \pi)$ — полярный угол.

Решение уравнения (39) Некрасов представляет рядом по степеням λ , сходящимся при $\lambda < \lambda_0$ (при этом числу λ_0 соответствует дуга окружности, ограничивающей препятствие, равная 20°).

Решая плоские задачам теории волн [63]–[66], Некрасов также эксплуатировал идею, идущую от Вилля: область, занятая одной волной конформно отображается внутрь единичного круга так, что свободная поверхность жидкости соответствует границе этого круга. При этом опять возникают тригонометрические ряды $g(\theta)$ и $h(\theta)$ и соотношение между ними вида (38), что, в конечном итоге, даёт следующее уравнение

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(\varepsilon)}{1 + \mu \int_0^\varepsilon \sin \Phi(\alpha) d\alpha} K(\varepsilon, \theta) d\varepsilon, \quad (40)$$

где μ — параметр, $K(\varepsilon, \theta) = \ln \left| \frac{1 - \cos(\varepsilon - \theta)}{1 - \cos(\varepsilon + \theta)} \right|$;

$\Phi(\theta)$ — угол наклона касательной к профилю волны установившегося вида [68, с. 225].

Для волн малой амплитуды ($\sin \Phi \approx \Phi$) уравнение (40) переходит в линейное интегральное уравнение вида

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon) \ln \left| \frac{1 - \cos(\varepsilon - \theta)}{1 - \cos(\varepsilon + \theta)} \right| d\varepsilon \quad (41)$$

Некрасов показал, что если параметр μ принадлежит промежутку $[0, \mu_1^*]$, где μ_1^* — первое собственное значение уравнения (41), то установившиеся волны отсутствуют. Математический

⁶Это, как видим, частный случай уравнения Урысона.

смысл этого результата состоит в том, что первое собственное значение линеаризованного интегрального уравнения является бифуркационным значением исходного (нелинейного) интегрального уравнения⁷.

Для исследования уравнения (40) Некрасов разработал самостоятельную теорию [64]–[65], в которой рассматривал нелинейное интегральное уравнение вида⁸:

$$f(x) = \lambda \int_a^b f(y) K(x, y) dy + \varepsilon \lambda \int_a^b R[\lambda, y, f(y)] K(x, y) dy \quad (42)$$

здесь $K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y)}{\lambda_n}$, $\{\varphi_i(x)\}$ – некоторая система ортонормированных на отрезке $[a, b]$ функций; λ_i – собственные значения однородного уравнения Фредгольма, получающиеся из (42) при подстановке $\varepsilon = 0$.

Разрешимость уравнения (42) была доказана Некрасовым на основе разложения искомой функции в ряд и использовании метода мажорант. Однако, в отличие от своих предшественников (Ляпунова и Шмидта) Некрасов решил исходное нелинейное интегральное уравнение *непосредственно* (не используя редукцию задачи к решению преобразованного функционального уравнения).

Поскольку основные результаты теории нелинейных интегральных уравнений Некрасова были опубликованы в малоизвестных журналах, они не получили широкой известности в то время ни в России, ни, тем более, за рубежом. Но они остались актуальными и 30 лет спустя; в 1951 году на эту тему была им опубликована монография [67], за которую Некрасов получил Сталинскую премию [82, с. 154].

7. Исследования Л. Лихтенштейна

К началу 1930-х гг. нелинейные интегральные уравнения обрели своё место в математике и в их исследованиях самое видное место занял метод последовательных приближений. Здесь можно заметить, что сам метод получил мощный стимул для своего развития в виде потребности решения нелинейных задач, но это уже тема для отдельного рассмотрения. В дальнейших исследованиях нелинейных интегральных уравнений заметное место принадлежит Л. Лихтенштейну, который рассматривал разные методы доказательства разрешимости уравнения Ляпунова – Шмидта «в малом» [49].

Он исходил из интегро-степенной формы, как функционала $\Phi(u) = \sum_{m+n \geq 2} U_{mn} \left(\begin{smallmatrix} x \\ u, v \end{smallmatrix} \right)$ и применил к доказательству сходимости последовательных приближений к решению уравнения (25) вариант метода *сжимающих отображений* (предложенный С. Банахом в 1922 г. в его диссертации [8]).

Полагая $\left| U_{mn} \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1, 1 \end{smallmatrix} \right) \right| = B_{mn}$ и рассматривая степенной ряд относительно положительных η и ζ , как функцию двух переменных

$$F(\eta, \zeta) = \sum_{m+n \geq 2} B_{mn} \eta^m \zeta^n, \quad (43)$$

Лихтенштейн заметил, что при достаточно малых d, d_1 ($\eta \leq d; \zeta \leq d_1$ ряд (43) сходится. Тогда при $|u(x)| \leq \eta, |v(x)| \leq \zeta$ получится

⁷Эта тема получила развитие в последующем в работах многих математиков (см., например, [11]).

⁸Специальный случай уравнения, введённого через 8 лет после Некрасова и носящего сейчас название «уравнение Гаммерштейна» (см. ниже, § 7).

$$\sum_{m+n \geq 2} \left| U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u, v \end{matrix} \right) \right| \leq F(\eta, \zeta). \quad (44)$$

Относительно функции $F(\eta, \zeta)$ предполагается её непрерывная дифференцируемость до 2-го порядка включительно, а также выполнение условий:

$$F(0, 0) = F'_\eta(0, 0) = F'_\zeta(0, 0) = 0.$$

Это является важным шагом, поскольку данные условия представляются менее ограничительными по сравнению с условиями Шмидта – равномерная сходимость левой части уравнения (44) *не обязательна*.

Опираясь на формулу Тейлора Лихтенштейн получил оценку $|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)|$ при малых η, ζ [49, с. 14]:

$$\max |\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| \leq l(\eta + \zeta) \max |u_2(x) - u_1(x)|, l = \text{Const}.$$

Последнее неравенство даёт возможность применить к решению уравнения (23) метод сжимающих отображений при условии, что $|v(x)| \leq \eta \leq d_1 < 1$.

Поиск решения был осуществлён методом последовательных приближений по правилу

$$u_k(x) = U_0(x, v) - \sum_{m+n \geq 2} U_{mn} \left(\begin{matrix} x \\ u_{k-1}, v \end{matrix} \right), k = 2, 3, 4, \dots$$

где $u_1(x) = U_0(x, v)$.

Когда единица не является собственным значением оператора A , малое решение $u(x)$ уравнения (23) будет единственным; оно разлагается в интегро-степенной ряд вида (31) и стремится к нулю при $v \rightarrow 0$.

В случае, когда единица является собственным значением оператора A , Лихтенштейн полагал $v(x) = \lambda V(x)$, и показал, что при достаточно малых $|\lambda|$, $|\xi|$ найдётся такое число $\omega > 0$, что при $|u(x)| \leq \omega$ правая часть уравнения (34) удовлетворяет условиям теоремы Банаха о сжимающих отображениях. Тогда это уравнение имеет единственное (непрерывное) решение, которое также может быть найдено методом последовательных приближений. Опираясь далее на некоторые идеи Ляпунова, Лихтенштейн продемонстрировал, что здесь число малых непрерывных решений уравнения (23) (стремящихся к нулю при $v \rightarrow 0$), совпадает с числом малых решений уравнения разветвления.

В работе Лихтенштейна наметился поворот к новому подходу – использованию методов формирующегося функционального анализа, который в скором времени станет одной из основ всей нелинейной проблематики.

8. Исследования А. Гаммерштейна, М. Голомба и Н. Н. Назарова

Задачу Дирихле для полулинейных дифференциальных уравнений вида

$$L(y) = f(x, y), \quad y(a) = y_0; \quad y(b) = y_1, \quad (45)$$

где L – линейный симметричный дифференциальный оператор 2-го порядка, можно свести (см. [83, § 2]) к нелинейному интегральному уравнению вида:

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) f(s, y(s)) ds. \quad (46)$$

Важный вклад в их изучение внёс А. Гаммерштейн, ученик Э. Ландау (уравнение (46) вошло в обиход математиков, как *уравнение Гаммерштейна*). Гаммерштейн использовал нетрадиционный подход к доказательству их разрешимости, основанный на вариационной трактовке уравнения (46). Данный подход заключался в замене исходной задачи на эквивалентную задачу минимизации функционала $H(y)$, построенного по правой части (46), в подходящем функциональном пространстве E (этот метод был впервые применён к решению нелинейных краевых задач вида (45) Л. Лихтенштейном (1915) [47]). При этом, как показал В. Ритц (1909) [81], более удобно бывает сначала решать задачу минимизации H на конечномерном подпространстве E , натянутом на n собственных функций линеаризованной задачи, а затем переходить к пределу по $n \rightarrow \infty$.

Гаммерштейн продемонстрировал, что для уравнения (46) конечномерный вариант минимизации выглядел так

$$H_n(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2 - \int_a^b F(x, \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)) dx \rightarrow \min,$$

где $F(x, y) = \int_0^y f(x, v) dv$;

$\{\varphi_i(x)\}$ — ортогональная система собственных функций, соответствующих собственным значениям λ_i линейной задачи:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \quad (47)$$

причём $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$.

Вводя ограничения на рост $F(x, y)$ по переменной y [18, с. 131], Гаммерштейн показал, что функционал H_n ограничен снизу, поэтому он достигает минимального значения при некотором наборе

$$C^{(n)} = (c_1^{(n)}, \dots, c_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Этот набор порождает последовательность функций $\{y_n(x)\}$, члены которой определяются по следующей формуле

$$y_n = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} \varphi_i(x) \quad (48)$$

При этом y_n сходится равномерно на $[a, b]$ к решению y уравнения (46).

При исследовании ветвления решений уравнения (46) Гаммерштейн, опираясь на теорему Гильберта-Шмидта (о представлении элементов гильбертова пространства в виде ряда по собственным функциям интегрального оператора), пришёл к системе с бесконечным числом неизвестных:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f \left(x, \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \right) \varphi_m(x) dx \quad m = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Гаммерштейн показал, что система (49) имеет, по крайней мере, одно решение, если функция $f(s, y)$ непрерывна по обоим переменным и удовлетворяет определённым ограничениям на рост [21]. Кроме того, он сформулировал и доказал ряд условий на функцию $f(s, y)$, при которых уравнение (46) имеет *единственное* решение. Одним из таких условий является, к примеру, условие монотонного неубывания функции $f(x, y)$ по $y \forall x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$.

Случай, когда решение (46) не обладает единственностью, а функция $f(x, y)$ представима в виде сходящегося при $x \in [a, b]$ ряда:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) y^n,$$

Гаммерштейн рассмотрел более подробно.

Считая, что при $\lambda = \lambda_0$ уравнение

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s, (y(x))) ds = 0 \quad (50)$$

имеет решение $u_0(x)$, такое, что λ_0 является простым собственным значением линеаризованного уравнения

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, y) f_u(u_0(y), y) \varphi(y) dy = 0$$

он подставил в уравнение (50) $\lambda = \lambda_0 + \mu$; $u = u_0 + v$. Получилось следующее

$$\begin{aligned} v(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, y) f_u(u_0(y), y) v(y) dy + \\ + \mu \int_a^b K(x, y) [f(u_0(y), y) + v(y)] dy + \\ + (\lambda_0 + \mu) \int_a^b K(x, y) \left[\frac{v^2(y)}{2!} f_{uu}(u_0(y), y) + \frac{v^3(y)}{3!} f_{uuu}(u_0(y), y) + \dots \right] dy = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Этому уравнению соответствовало уравнение разветвления вида

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A_{mk} = 0, \quad (52)$$

где L_m, A_{mk} – постоянные. На основе уравнения (52) Гаммерштейн дал ответ на вопрос о числе малых решений уравнения (51) [18, с. 165].

Кроме того, Гаммерштейн исследовал задачу о числе вещественных решений уравнения (51), стремящихся к нулю при $\mu \rightarrow 0$ для ряда отдельных случаев. В частности, когда номер n первого отличного от нуля коэффициента L_m в (52) – чётный и $\text{sign}(L_n A_{01}) = -1$, то при $\lambda > \lambda_0$ появляются два новых вещественных решения (51), которые непрерывно ответвляются от $u_0(x)$. Если же $\text{sign}(L_n A_{01}) = +1$, то при $\lambda < \lambda_0$ имеется два вещественных решения, которые сливаются в $u_0(x)$ в точке λ_0 . Разобраны также и другие случаи [18, с. 166-168].

Продолжая исследования Гаммерштейна, один из его учеников – М. Голомб – доказал значимую, с методологической точки зрения, теорему (1935) [19, § 5]:

Пусть $K(x, y)$ – непрерывное, симметричное, положительно определённое в области $0 \leq x, y \leq 1$ ядро, а функция $f(y, u)$ непрерывна по $y \in (0, 1)$ и для конечных значений u , причём $f(y, 0) = 0$.

Тогда уравнение

$$u(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (53)$$

имеет, по крайней мере, одно вещественное собственное значение λ_0 , которому соответствует нетривиальное решение $u_0(x)$.

Из теоремы Голомба следует, что при некоторых естественных предположениях о ядре нелинейных интегральных уравнений вида (46) неотъемлемым свойством их решений будет

способность ветвиться при достижении параметра λ порогового (бифуркационного) значения.

Некоторые важные задачи математической физики (задачи нелинейной теплопроводности [49, Гл. II, §2]; описание движения реальных сжимаемых жидкостей [33]) сводятся к уравнениям более общим, чем уравнение Гаммерштейна:

$$u(x) = \int_a^b H(x, y, u(y)) dy \quad (54)$$

Такие уравнения (уравнения Урысона) стали предметом исследований Н. Н. Назарова, ученика В.А. Стеклова. Назаров рассматривал нелинейные задачи на собственные значения для уравнений (53) и (54) в пространстве непрерывных функций (1941) [38], предполагая, как и Гаммерштейн, что они разрешимы при некотором $\lambda = \lambda_0$, которому соответствует собственная функция $u(x) = u_0(x)$ и что в окрестности этого решения справедливо разложение

$$H(x, y, u_0(x) + v) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x, y) v^k, \quad (55)$$

где ряд (55) сходится при $|v| \leq r$.

Аналогичное предположение делалось и для $H(x, y, u) \equiv K(x, y)f(y, u(y))$.

При сделанных ограничениях Назаров свёл уравнение (54) к уравнению

$$\begin{aligned} v(x) - \lambda_0 \int_a^b H_1(x, y)v(y) dy = \\ = \int_a^b [\mu(H_0 + H_1v) + (\mu + \lambda_0)(H_2v^2 + H_3v^3 + \dots)] dy \end{aligned}$$

и представил его малые решения в виде рядов по целым или дробным степеням параметра μ . Коэффициенты этих рядов были определены рекуррентно из бесконечной системы уравнений, а их сходимость установлена путём построения мажорант [58, Гл. II §1-2].

Одной из важных задач в исследовании уравнения (54) является задача о продолжении близкого к нулю решения, полученного для малых значений параметра λ , на всю плоскость переменной λ . Здесь Назаров изучил следующие случаи [59, § 3]:

1. λ_0 не является собственным значением ядра $H_1(x, y) = \frac{\partial H(x, y, u_0(y))}{\partial u_0(y)}$. В этом случае решение уравнения (54) продолжается по параметру λ однозначно.
2. λ_0 — собственное значение ядра $H_1(x, y)$ кратности 1. Назаров показал, что здесь возможны 3 случая:
 - а. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ невозможно;
 - б. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ возможно, единственно и представляется в виде ряда по целым или дробным степеням параметра μ ;
 - в. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ возможно, но неединственно. Каждое продолжение представляется в виде ряда по целым или дробным степеням параметра μ .

Результаты Назарова позволили судить о существовании решения уравнений вида (53), (54) в окрестности параметра λ_0 — точки разрешимости этих уравнений. Впоследствии оказалось, что эти результаты можно распространить на операторные уравнения

$$u = \lambda F(u),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $F : X \rightarrow X$ – аналитический оператор; X – комплексное банахово пространство [3].

Работой Назарова завершается первый этап развития нелинейных интегральных уравнений, когда доказываемые теоремы существования и ветвления решений носили *локальный* характер. Для описания *всей совокупности* решений требовалась другая идеология.

9. Заключение

Рубеж XIX–XX вв. является весьма примечательным в истории математики. Начавшаяся в XIX в. реформа математического анализа культивировала идеологическую атмосферу с другими канонами математической строгости и необходимости установления границ и обоснования истинности каждого утверждения. Такая атмосфера способствовала формированию базисных областей – теории множеств и теории функций действительного переменного, которые легли в основу грандиозного здания современной математики. Глубокое обобщение и синтез алгебры, анализа и геометрии привели к созданию двух главных ветвей современной математики – топологии и функционального анализа. Всё это явилось необходимым условием для исследования нелинейных операторных уравнений, частным случаем которых являются нелинейные интегральные уравнения.

Создание теории интегральных уравнений, как отдельной области математики, пришлось на то время, когда ещё только складывались новые взгляды на решение уравнений (и не только интегральных) и формировался новый инструментарий. Поэтому на начальном этапе подход к интегральным уравнениям во многом оставался традиционным: уравнение – решение, точное или приближённое, аналитическое или численное. Разделение начального и последующего этапов следует понимать в логическом отношении, а не в хронологическом, да и то, больше как тенденцию. Мы отчётливо видим, как с самого начала нелинейные интегральные уравнения предстали во всей сложности в проблеме фигур равновесия вращающихся жидкостей. Это был практически совершенно новый объект исследования, для изучения которого пришлось во многом использовать те методы, которые имелись в наличии. Одновременно складывались новые представления и новые подходы. Только при ретроспективном взгляде всё это может выглядеть чем-то последовательным. Как всегда бывает в действительности, новые идеи переплелись со старыми представлениями, бывали и отступления, тупиковые ситуации, медленное продвижение вперёд. Всё это имело место в истории нелинейных интегральных уравнений. С самого начала главным выяснившимся отличием от привычной линейной ситуации явилась неединственность решения. Стало ясно позднее, приставка *не*, как в случае с понятием *нелинейного уравнения*, является не просто отрицанием, а имеет глубокий конструктивный смысл. Особое значение приобрели теоремы существования и единственности. Усиление интереса к этому вопросу связано с ещё одним источником: с проблемой турбулентности, являющейся одной из самых острых нерешённых задач, доставшихся в наследство XXI веку. Так Ж. Лере был поставлен вопрос: если в начальный момент времени $t = t_0$ имеется регулярное решение уравнений Навье–Стокса, то будет ли сохраняться регулярность решений на всём временном интервале? Лере предполагал, что в трёхмерном случае достижению турбулентного режима отвечает разрушение решений, и время существования регулярных решений конечно [33]–[35]. Все эти вопросы до настоящего времени остаются без ответа.

Ещё предстояло понять, что в исследовании нелинейных интегральных уравнений основное место займут *качественные* методы, необходимые инструменты придут из функционального анализа и топологии, а сама теория интегральных уравнений существенно обогатит эти области математики. Оказалось, что качественное поведение решений во многом выявит все су-

ществленные особенности решений, что нелинейные операторные уравнения различных типов имеют много общего. Требовалось время для осознания кажущегося простым, но в действительности нетривиального шага - перехода от интегрального уравнения к общему операторному уравнению, что давало возможность привести в действие мощные методы новых областей математики. Но это уже является следующим этапом истории нелинейных интегральных уравнений и предметом отдельного исследования.

Авторы выражают признательность В.П. Богатовой за помощь в переводе первоисточников с немецкого языка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N.H. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // *Magazin Naturvidensk*, Vol. 1 (1823), pp. 55–68.
2. Archibald T. From attraction theory to existence proofs: the evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860-1890 // *Revue d'histoire des mathématiques*. 1996. – Vol. 2. – Iss. 1. – pp. 67-93.
3. Ахмедов К. Т. Аналитический метод Некрасова–Назарова в нелинейном анализе // *Успехи математических наук*, Том 12:4(76) (1957), С. 135–153.
4. Бахтин И.А., Красносельский М.А. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жёсткости // *Доклады АН СССР*, Том 105, № 4 (1955). С. 621-624
5. Богатов Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского // *Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика, Физика*, 2020. Т. 52, № 2, С. 105-127.
6. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2016. Т. 24. № 2, С. 77-114.
7. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. О ранней истории нелинейных интегральных уравнений / *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII междунар. конф., (23-26 сентября 2020). - Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого*. 2020. с. 321-325.
8. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals // *Fundamenta Mathematicae*, 3 (1922), p. 133–181.
9. Bateman, H. Report on the history and present state of the theory of integral equations // *British Association for the Advancement of Science*, Vol. 80 (1910), pp. 345-424.
10. Bôcher M. An introduction to the study of integral equations. Cambridge, the University Press 1909. 78 p.
11. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие // *Успехи математических наук*, Том 17:2(104) (1962), С. 13–75.
12. Weyl H. David Hilbert and his mathematical work // *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 50 (1944), Iss. 9, pp. 612-654.

13. Villat H. Sur la résistance des fluides // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1911. – V. 28. – p. 203-311.
14. Volterra, V. Sulla inversione degli integrali definiti // Tip. della R. Accademia dei Lincei, 1896. Vol. 5, pp. 177-185.
15. Volterra, V. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 25, (1897), pp. 139-178.
16. Volterra, V. Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento, Vol. XVI (1884), pp. 49-57.
17. Volterra V. Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles. Gauthier Villars, Paris, 1913. 180 p.
18. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta mathematica. Vol. 54 (1930), pp. 117–176.
19. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. – Leipzig, Berlin: B. G. Teubner, 1912. 320 p.
20. Golomb, M. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen // Mathematische Zeitschrift, Vol. 39 (1935). pp. 45-75.
21. Golomb, M. Review of the article "Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen". Jahrbuch Database URL: <http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf> (дата обращения 19.10.2020)
22. Golubitsky M., Schaeffer D. G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. I. Springer, New York (1985). 475 p.
23. Dieudonné J. History of functional analysis / North-Holland publishing company. Amsterdam - 1981. - 316 p.
24. Du Bois-Reymond, P. Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 103 (1888), S. 204-229.
25. Идельсон Н.И. Комментарии к книге А. Клеро «Теория фигуры Земли» в кн. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1947. С. 260-355.
26. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century// arXive: 1409.1823 (2014).
27. Clairaut A. C. Théorie de la figure de la terre: tirée des principes de l'hydrostatique. – chez David Fils, libraire, 1743. – Vol. 668, 305 p.
28. Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1947. 364 с.
29. Koch, H. von. Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées // Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 27 (1899): p. 215-227.
30. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962, 394 с.
31. Laplace, P. Traité de mécanique céleste, Livre III. Paris : Duprat, 1802. 382 p.

32. Levi-Civita T. Sulla resistenza d'attrito // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 23 (1907), p. 1-37.
33. Leray, J. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 12 (1933): pp.1-82.
34. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta mathematica. 1934. – Vol. 63. – pp. 193-248.
35. Leray, J. Essai sur les mouvements plans d'un fluide visqueux que limitent des parois // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 13 (1934): pp. 331-418.
36. Ляпунов А.М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости (Магистерская диссертация). СПб, Типография Академии наук, 1884, XV+109 с.
37. Liapunoff A.M. Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Série. 1903. Vol. 14, no. 7, pp. 1-37.
38. Liapounoff A.M. Sur la stabilite des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide anime d'un mouvement de rotation // The Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2 ser., Vol. 6 (1904), pp. 5-116.
39. Liapounoff A. Sur un problème de Tchebycheff // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg, Vol. 17 (8^{me} Serie), no. 3 (1905). pp. 1-31
40. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude generale du probleme // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906. IV+225 p.
41. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'equilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909. IV+203 p.
42. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912. IV+228 p.
43. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914. IV+112 p.
44. Liapounoff A. Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides d'un liquide homogène en rotation // Известия Императорской Академии Наукъ. VI серия, 10:3 (1916), pp. 139–168.
45. Liapounoff A. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d'un liquide homogène. Première partie // Известия Императорской Академии Наукъ. VI серия, 10:7 (1916), pp. 471–502.
46. Liapounoff A. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d'un liquide homogène. Seconde partie // Известия Императорской Академии Наукъ. VI серия, 10:8 (1916), pp. 589–620.
47. Lichtenstein, L. Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 145 (1915), pp. 24–85.

48. Lichtenstein, L. Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze an-ziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze // Mathematische Zeitschrift 1 (1918): p. 229-284
49. Lichtenstein, L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen / Julius Springer, Berlin, 1931. 164 p.
50. Lichtenstein L. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Springer, Berlin 1933, 201 p.
51. Liouville J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1837. – Vol. 2. – pp. 16-35.
52. Liouville, J. Sur le theoreme de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, Notes IV de J. Liouville a ouvrage Applications de Analyse a la Geometrie par G. Monge, Paris, Bachelier Ed., 1850. pp. 583-600.
53. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости / Перевод с нем. Под ред. Г. Н. Дубошина. М.: Наука, 1965. 252 с.
54. Lützen J. Integral equations / Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 2 vols. ed. Grattan-Guinness I. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 2003. p. 385-394.
55. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. III. М.-Л. Изд-во АН СССР, 1959 г. 376 с.
56. Murphy, R. On the inverse method of definite integrals, with physical applications // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 4 (1833), pp. 353–408.
57. Мухин Р.Р. Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950–1980-е годы. Изд. 2-е, стереотип. М.: Изд-во URSS. 2018. 320 с.
58. Назаров Н.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. - Труды Среднеазиатского государственного университета. Серия V-а, Математика. Вып. 33., Ташкент, 1941. с. 1-79.
59. Назаров Н.Н. Методы решения нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Труды Среднеазиатского государственного университета. Серия 6, физико-математические науки. Ташкент, 1945. С. 3-14.
60. Некрасов, А. И. О волне Стокса // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института, Вып. 2 (1919), с. 81-89.
61. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института, Вып. 3 (1921), с. 52-65.
62. Некрасов, А. И. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института, Вып 5. (1922), с. 3-19.
63. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости // Научные известия Академического центра НКП, сб. 3 (1922), Физика, с. 128-138.

-
64. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида, гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях // Известия Иваново- Вознесенского политехнического института, Вып. 6 (1922), с. 155-171.
65. Некрасов, А. И. О нелинейных интегральных уравнениях с постоянными пределами // Известия Физического института и института биологической физики, Вып. 2 (1922), с. 221-238.
66. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости (конечной глубины) // Тр. Всеросс. математ. съезда 1927 г. в Москве. М.-Л., 1928. с. 258-262.
67. Некрасов, А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости / М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 96 с.
68. Некрасов, А. И. Собрание сочинений, Т. 1. Отв. ред. Я.И. Секерж-Зенькович. М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 444 с.
69. Neumann C. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung:...= 0 // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1861. – Vol. 59. – pp. 335-366.
70. Neumann C. Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential // Mathematische Annalen, Vol. 13 (1878), pp. 255-300.
71. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1890. – Vol. 6. – pp. 145-210.
72. Picard E. Traité d'Analyse, t. III. Gauthier-Villars. Paris, 1896. 568 p.
73. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // *Acta mathematica*, Vol. 7 (1885), no. 1, pp. 259-380.
74. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation // Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 106 (1888), pp. 1571-1574.
75. Poincaré H. La méthode de Neumann et le probleme de Dirichlet // *Acta mathematica*, 1897. – Vol. 20. – pp. 59-142.
76. Poincaré H. Figures d'équilibre d'une masse fluide: leçons professées à la Sorbonne en 1900. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 211 p.
77. Пуанкаре А. Фуксовы функции и уравнение $\Delta u = e^u$. В кн. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. III. Математика. М.: Наука 1974. с. 235-309.
78. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 208 с.
79. Puiseux, V. Recherches sur les fonctions algébriques // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1re série, t. 15, (1850): pp. 365-480.
80. Radau, R.R. Remarques sur la théorie de la figure de la Terre // Bulletin astronomique, t. II (1885), pp. 157-161.
81. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 135 (1909), pp. 1-61.

82. Секерж-Зенькович, Я. И. Александр Иванович Некрасов (к семидесятипятилетию со дня рождения), *Успехи математических наук*, Том 15:1(91) (1960), С. 153–162.
83. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.-М.: Объединённое научно-техническое издательство, 1936. 124 с.
84. Смирнов В.И. Очерки научных трудов Ляпунова / Ляпунов А.М. Избранные труды. Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. С.341-450.
85. Смирнов В. И., Юшкевич А. П. Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом // Историко-математические исследования, М., 1985. – Т. 29. – С. 265-284.
86. Todhunter I. A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth: From the Time of Newton to that of Laplace. In 2 Volumes. Vol. II. London, Macmillan, 1873. 508p.
87. Fourier J. B. J. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, F. Didot, 1822. 639 p.
88. Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles // *Acta mathematica*, Vol. 27 (1903), pp. 365–390.
89. Fredholm I. Les équations intégrales linéaires // *CR Congrès des Math. tenua Stockholm 1909. – 1909.* pp. 92-100.
90. Хведелидзе Б.В. Уравнения Ляпунова-Шмидта / Математическая энциклопедия в пяти томах. Ред. И.М. Виноградов. Т.3. М., 1982. С. 473-474.
91. Hellinger E. und Toeplitz O. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort von E. Hilb. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928. S. 1335- 1616.
92. Schmidt, E.. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener // *Mathematische Annalen*, Vol. 63 (1907), pp. 433–476.
93. Schmidt, E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // *Mathematische Annalen*, Vol. 64 (1907), pp. 161-174.
94. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // *Mathematische Annalen* – 1908. – Vol. 65, pp. 370-399.
95. Schwarz H.A. Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung (Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass) // *Acta societatis scientiarum Fennicae*, 15 (1885). pp. 315–362
96. Урысон П. С., Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник, 31:2 (1923), С. 236–255.
97. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова, т. 1, М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 514 с.
98. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова, т. 2, М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 480 с.

REFERENCES

1. Abel, N.H. 1823, “Solution de quelques problèmes à l’aide d’intégrales définies”, *Magazin Naturvidensk.*, vol. 1, pp. 55–68. Abel, N.H. 1823, “Solution de quelques problèmes à l’aide d’intégrales définies”, *Magazin Naturvidensk.*, vol. 1, pp. 55–68.
2. Archibald, T. 1996, “From attraction theory to existence proofs: the evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860-1890”, *Revue d’histoire des math.*, vol. 2, no. 1, pp. 67-93.
3. Akhmedov, K. T. 1957, “The analytic method of Nekrasov–Nazarov in non-linear analysis”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 12:4, no.76, pp. 135–153.
4. Bakhtin, I.A., Krasnosel’skii M. A. 1955, “On the problem of longitudinal bending of a rod of variable stiffness“, *Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 105 (4), pp. 621-624.
5. Bogatov, E.M. 2020, “On the history of the positive (1900s-1960s) and the contribution of M.A. Krasnosel’skii”, *Scientific bulletin of BelSU. Ser. Appl. Mat., Phys.*, vol. 52, no. 2, pp. 105-127.
6. Bogatov, E.M., Mukhin, R.R. 2016, “ About the history of nonlinear integral equations”, *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, Vol. 24 (2), pp. 77-114.
7. Bogatov, E.M., Mukhin, R.R., 2020, “On the early history of nonlinear integral equations”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials XVII Int. conf., Tula, TGPU im. L.N. Tolstogo*, pp. 321-325.
8. Banach, S. 1922, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales“, *Fund. Math.* Vol. 3, pp. 133–181.
9. Bateman, H. 1910, “Report on the history and present state of the theory of integral equations”, *British Ass. for the Adv. of Sci.*, Vol. 80, pp. 345-424.
10. Bôcher, M. 1909, *An introduction to the study of integral equations*, The University Press, Cambridge, 78 p.
11. Vainberg, M. M., Trenogin, V. A. 1962, “The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development”, *Russian Math. Surveys*, Vol. 17:2, pp. 1–60.
12. Weyl, H. 1944, “David Hilbert and his mathematical work”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 50, Iss. 9, pp. 612-654.
13. Villat, H. 1911, “Sur la résistance des fluides”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, Vol. 28, pp. 203-311.
14. Volterra, V. 1896, “Sulla inversione degli integrali definiti”, *Tip. della R. Accademia dei Lincei*, Vol. 5, pp. 177-185.
15. Volterra, V. 1897, “Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti”, *Ann. Mat. Pura Appl.* Vol. 25, pp. 139-178.
16. Volterra, V. 1884, “Sopra un problema di elettrostatica”, *Nuovo Cimento*, Vol. XVI, pp. 49-57.
17. Volterra, V. 1913, *Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*. Gauthier Villars, Paris, 180 p.

18. Hammerstein, A. 1930, “Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen”, *Acta math.*, Vol. 54, pp. 117–176.
19. Hilbert, D. 1912, *Grundziige einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 320 p.
20. Golomb, M. 1935, “ Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen”, *Math. Zeitschrift*, Vol. 39, pp. 45–75.
21. Golomb, M. (1934) Review of the article “*Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*“. Jahrbuch Database Available at: <http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf> (accessed 19 October 2020)
22. Golubitsky, M., Schaeffer, D. G. 1985, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. I*. Springer, New York, 475 p.
23. Dieudonné J. 1981, *History of functional analysis*, North-Holland publishing company, Amsterdam, 316 p.
24. Du Bois-Reymond, P. 1888, “ Bemerkungen über $\Delta z = 0$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 103, pp. 204–229.
25. Idelson, N.I. 1947, “Comments to the book by A. Clairaut "Theory of the Earth's Figure“, in *Teorija figury Zemli, osnovannaja na nachalah gidrostatiki* [The theory of the figure of the Earth, based on the principles of hydrostatics], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, pp. 260–355.
26. Iurato, G. 2014, “The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century”, *History and Philosophy of Physics*, Available at <https://arxiv.org/abs/1409.3858v2>.
27. Clairaut, A. C. 1743, *Théorie de la figure de la terre: tirée des principes de l'hydrostatique*, chez David Fils, libraire, Vol. 668, 305 p.
28. Clairaut, A. 1947, *Teorija figury Zemli, osnovannaja na nachalah gidrostatiki* [The theory of the figure of the Earth, based on the principles of hydrostatics], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 364 p.
29. Koch, H. von. 1899, “Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées”, *Bull. Soc. Math. Fr.*, Vol. 27, pp. 215–227.
30. Krasnosel'skii, M. A. 1964, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen, 381 p.
31. Laplace, P. 1802, *Traité de mécanique céleste, Livre III*. Duprat, Paris, 382 p.
32. Levi-Civita, T. 1907, “Sulla resistenza d'attrito”, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Vol. 23 (1), pp. 1–37.
33. Leray, J. 1933, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl*, Vol. 12, pp. 1–82.
34. Leray J. 1934, “Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace”, *Acta math.*, Vol. 63, pp. 193–248.

35. Leray, J. 1934, “Essai sur les mouvements plans d’un fluide visqueux que limitent des parois”, *J. Math. Pures Appl.*, Vol. 13, pp. 331-418.
36. Liapunoff, A.M. 1884, *Ob ustojchivosti jellipsoidal’nyh form ravnovesija vrashhajushhejsja zhidkosti* [On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating fluid] (Master’s thesis). Printing house of the Academy of Sciences, St. Petersburg, XV+109 p.
37. Liapunoff, A.M. 1903, “Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes”, *Memoires de l’Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg.* 8-me Série, Vol. 14, no. 7, pp. 1-37.
38. Liapounoff, A.M. 1904, “Sur la stabilite des figures ellipsoidales d’équilibre d’un liquide anime d’un mouvement de rotation”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 2 ser., Vol. 6, pp. 5-116.
39. Liapounoff, A. 1905, “Sur un problème de Tchebycheff”, *Memoires de l’Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg*, Vol. 17 (8^{me} Serie), no. 3, pp. 1-31.
40. Liapunoff, A.M. 1906, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. I partie. Etude generale du probleme”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.*, IV+225 p.
41. Liapunoff, A.M. 1909. “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. II partie. Figures d’équilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.*, IV+203 p.
42. Liapunoff, A.M. 1912, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. III partie. Figures d’équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.*, IV+228 p.
43. Liapunoff, A.M. 1914, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d’équilibre”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.*, IV+112 p.
44. Liapounoff, A. 1916, “Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides d’un liquide homogène en rotation”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:3, pp. 139–168.
45. Liapounoff, A. 1916, “Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d’un liquide homogène. Première partie”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:7, pp. 471–502.
46. Liapounoff, A. 1916, “Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d’un liquide homogène. Seconde partie”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:8, pp. 589–620.
47. Lichtenstein, L. 1915, “Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 145, pp. 24–85.
48. Lichtenstein, L. 1918, “Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze an-ziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze”, *Math. Zeitschrift*, Vol. 1, pp. 229-284.
49. Lichtenstein, L. 1931, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen*, Julius Springer, Berlin, 164 p.
50. Lichtenstein, L. 1933, *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*. Springer, Berlin 1933, 201 p.

51. Liouville, J. 1837, "Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable", *J. Math. Pures Appl.*, Vol. 2, pp. 16-35.
52. Liouville, J. 1850, "Sur le theoreme de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, Notes IV de J. Liouville a ouvrage Applications de Analyse a la Geometrie par G. Monge", Bachelier Ed., Paris, pp. 583-600.
53. Lichtenstein, L. 1965, *Figury ravnovesija vrashhajushhejsja zhidkosti* [Equilibrium figures of a rotating fluid] Translated from German. Ed. G. N. Duboshin. Nauka, Moscow, 252 p.
54. Lützen, J. 2003, "Integral equations", Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, ed. Grattan-Guinness I., Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 385-394.
55. Lyapunov, A.M. 1959, *Collected Works*. Vol. III. Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 376 p.
56. Murphy, R. 1833, "On the inverse method of definite integrals, with physical applications", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 4, pp. 353-408.
57. Mukhin, R.R. 2018, *Ocherki po istorii dinamicheskogo haosa: Issledovanija v SSSR v 1950--1980-e gody* [Essays on the History of Dynamic Chaos: Research in the USSR in the 1950s-1980s. 2nd edition, stereotyped, URSS, Moscow, 320 p.
58. Nazarov, N.N. 1941, "Nonlinear integral equations of Hammerstein's type", *Acta Universitatis Asiae Mediae*, ser. V-a, Mathematicae, Fasciculus 33, pp. 1-79.
59. Nazarov, N.N. 1945, "Metody reshenija nelinejnyh integral'nyh uravnenij tipa Gammershtejna" [Methods for solving nonlinear integral equations of Hammerstein type], *Acta Universitatis Asiae Mediae*, new ser., Fasciculus 6, pp. 3-14.
60. Nekrasov, A.I. 1919, "O volne Stoksa" [About Stokes wave], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 2, pp. 81-89.
61. Nekrasov, A.I. 1921, "O volnah ustanovivshegosja vida" [About steady-state waves], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 3, pp. 52-65.
62. Nekrasov, A.I. 1922, "O preryvnom techenii zhidkosti v dvuh izmerenijah vokrug prepjatstva v forme dugi kruga" [Discontinuous flow of fluid in two dimensions around an obstacle in the form of an arc of a circle], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 5, pp. 3-19.
63. Nekrasov, A.I. 1922, "O volnah ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazhjoloj zhidkosti" [On steady-state waves on the surface of a heavy liquid], *Nauchnye izvestija Akademicheskogo centra NKP*, Vol. 3, Physics, pp. 128-138.
64. Nekrasov, A.I. 1922, "O volnah ustanovivshegosja vida, gl.2. O nelinejnyh integral'nyh uravnenijah" [On steady-state waves, Ch. 2. On nonlinear integral equations], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 6, pp. 155-171.
65. Nekrasov, A.I. 1922, "O nelinejnyh integral'nyh uravnenijah s postojannymi predelami" [Nonlinear integral equations with constant limits], *Izvestija Fizicheskogo instituta i instituta biologicheskij fiziki*, Iss. 2, pp. 221-238.

66. Nekrasov, A.I. 1928, “O volnah ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazhjolj zhidkosti (konechnoj glubiny)” [On steady-state waves on the surface of a heavy liquid (finite depth)], *Proceedings of the All-Russian. Math. Congress of 1927 in Moscow*, Moscow-Leningrad, pp. 258-262.
67. Nekrasov, A.I. 1951, *Tochnaja teorija voln ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazhelej zhidkosti* [Exact theory of steady-state waves on the surface of a heavy liquid], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 96 p.
68. Nekrasov, A.I. 1961, *Collected Works, Vol. 1* . Executive editor Ya.I. Sekerzh-Zenkovich, Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 444 p.
69. Neumann, C. 1861, “ Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung: ... = 0”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 59, pp. 335-366.
70. Neumann, C. 1878, “ Untersuchungen über das Logarithmische und Newton’sche Potential”, *Math. Annalen*, Vol. 13, pp. 255–300.
71. Picard, E. 1890, “ Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives ”, *J. Math. Pures Appl*, Vol. 6, pp. 145-210.
72. Picard, E. 1896, *Traité d’Analyse, t. III*. Gauthier-Villars. Paris, 568 p.
73. Poincaré, H. 1885, “ Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation ”, *Acta math.*, Vol. 7, no. 1, pp. 259-380.
74. Poincaré, H. 1888, “ Sur l’équilibre d’une masse hétérogène en rotation”, *CR*, Vol. 106, pp. 1571-1574.
75. Poincaré, H. 1897, “La méthode de Neumann et le probleme de Dirichlet”, *Acta math.*, Vol. 20, pp. 59-142.
76. Poincaré, H. 1902, *Figures d’équilibre d’une masse fluide: leçons professées à la Sorbonne en 1900*, Gauthier-Villars, Paris, 211 p.
77. Poincaré, H. 1974, “Fuksovy funkcie i uravnenie $\Delta u = e^u$ ” [Fuchsian functions and equation $\Delta u = e^u$], In Poincaré A. *Selected Works in Three Volumes. Vol. III. Mathematics*. Nauka, Moscow, pp. 235-309.
78. Poincaré, H. 2000, *Figury ravnovesija zhidkoj massy* [Figures of equilibrium of liquid mass], Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, Izhevsk, 208 p.
79. Puiseux, V. 1850, “Recherches sur les fonctions algébriques”, *J. Math. Pures Appl.*, 1re série, t. 15, pp. 365-480.
80. Radau, R.R. 1885, “Remarques sur la théorie de la figure de la Terre”, *Bull. astronom.*, t. II, pp. 157-161.
81. Ritz, W. 1909, “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 135, pp. 1–61.
82. Sekerzh-Zen’kovich, Ya. I. 1960, “Aleksandr Ivanovich Nekrasov (on the 75th anniversary of his birth)”, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 15:1(91), pp. 153–162.
83. Smirnov, N.S. 1936, *Vvedenie v teoriju nelinejnyh integral’nyh uravnenij*, [Introduction to the theory of nonlinear integral equations], ONTI, Moscow-Leningrad, 124 p.

84. Smirnov, V.I. 1948, *Ocherki nauchnykh trudov Ljapunova* [Essays on Lyapunov's scientific works], In Lyapunov A.M. Selected Works. Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Leningrad, pp.341-450.
85. Smirnov, V.I., Yushkevich, A.P. 1985, Perepiska A.M. Ljapunova s A. Puankare i P. Djujemom [Correspondence of A.M. Lyapunov with A. Poincaré and P. Duhem], *Ist.-Mat. Issled.*, Vol. 29, pp. 265-284.
86. Todhunter, I.1873, *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth: From the Time of Newton to that of Laplace*. In 2 Volumes. Vol. II., Macmillan, London, 508 p.
87. Fourier, J. B. J. 1822, *Théorie analytique de la chaleur*, F. Didot, Paris, 639 p.
88. Fredholm, I. 1903, "Sur une classe d'équations fonctionnelles", *Acta math.*, Vol. 27, pp. 365—390.
89. Fredholm, I. 1909, "Les équations intégrales linéaires", *CR Congrès des Math. tenua Stockholm 1909*, pp. 92-100.
90. Khvedelidze, B.V. 1982, "Uravnenija Ljapunova-Shmidta" [Lyapunov-Schmidt equations], Matematicheskaja jenciklopedija v pjati tomah. Vol. 3. Ed. I.M. Vinogradov, Moscow, pp. 473-474.
91. Hellinger, E. & Toeplitz, O. 1928, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Mit einem Vorwort von E. Hilb, Verlag B. G. Teubner, Leipzig - Berlin, pp. 1335- 1616.
92. Schmidt, E.1907, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener", *Math. Annalen*, Vol. 63, pp. 433–476.
93. Schmidt, E. 1907, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung", *Math. Annalen*, Vol. 64, pp. 161-174.
94. Schmidt, E. 1908, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen", *Math. Annalen*, Vol. 65, pp. 370-399.
95. Schwarz, H.A.1885 "Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung (Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass)", *Acta societatis scientiarum Fennicae*, Vol. 15. pp. 315–362.
96. Urysohn, P. 1923, "Sur une classe d'équations intégrales non lineaires", *Mat. Sb.*, Vol. 31:2, pp. 236–255.
97. Urysohn, P.S. 1951, *Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki* [Transactions in topology and other areas of mathematics. Notes and introductory article by P.S. Alexandrov], Vol. 1, GITTL, Moscow-Leningrad, 514 p.
98. Urysohn, P.S. 1951, *Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki*. [Transactions in topology and other areas of mathematics. Notes and introductory article by P.S. Alexandrov], Vol. 2, GITTL, Moscow-Leningrad, 480 p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.1;539.4:624.07

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-345-352

**Интегральная формула в задачах устойчивости
неоднородных стержней¹**

В. И. Горбачёв, А. А. Рубан

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vgorby@mail.ru

Рубан Алексей Анатольевич — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: alexeyruban2009@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается неоднородный по длине стержень с переменным поперечным сечением. Стержень сжимается распределенной вдоль оси переменной продольной нагрузкой. В работе рассматривается случай потери устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, при котором наряду с прямолинейной возможна искривленная форма. Критическое сочетание жесткости и продольной силы устанавливается с помощью интегральной формулы представления решения исходного уравнения устойчивости с переменными коэффициентами через решение такого же уравнения с постоянными коэффициентами. В интегральное представление входит фундаментальное решение исходного уравнения, которое в общем случае находится методом возмущений. Приведен пример составления уравнения для критической нагрузки.

Ключевые слова: упругость, устойчивость, неоднородный стержень, метод осреднения, интегральная формула.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

В. И. Горбачёв, А. А. Рубан. Интегральная формула в задачах устойчивости неоднородных стержней // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 345–352.

¹Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-01-00016а и Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.1;539.4:624.07

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-345-352

**The integral formula in problems of the stability
of inhomogeneous rods**

V. I. Gorbachev, A. A. Ruban

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vgorby@mail.ru

Ruban Alexey Anatol'evich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: alexeyruban2009@yandex.ru

Abstract

A heterogeneous in length bar with a variable cross-section is considered. The bar is compressed by a variable longitudinal force which is distributed along its axis. The article describes the case of stability loss of the straight form of equilibrium of a bar, when both, linear and curved forms are possible. The critical combination of rigidity and longitudinal force is the result of an integral representation for the solution of the given stability equation with variable coefficients by the aid of the solution of similar equation but with constant coefficients. The integral representation includes the Green function of the given equation which can be obtained by the method of perturbations. The example of compiling of the equation for critical loading is reduced.

Keywords: Elasticity, stability, inhomogeneous rod, average method, the integral formula.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

V. I. Gorbachev, A. A. Ruban, 2021, "The integral formula in problems of the stability of inhomogeneous rods", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 345–352.

1. Введение

В декартовых координатах, выбранных так, как показано на рисунках 1а), 1б), изгиб стержня силой, приложенной на одном конце описывается одним и тем же уравнением второго порядка [1]

$$EJ \frac{d^2 u}{dx^2} = -Pu \quad (1)$$

В случае постоянного поперечного сечения уравнение (1) даёт нам известные формулы Эйлера для вычисления критических сил

$$P_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} - \text{случай а); } P_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} - \text{случай б)} \quad (2)$$

Если стержень неоднородный по длине и поперечное сечение переменное, т.е. величины модуля Юнга E и момента инерции J является функцией от координаты $0 \leq x \leq L$, тогда

задача определения критического значения P становится много сложнее. Ряд частных случаев были рассмотрены ещё в позапрошлом веке Эйлером, Лагранжем, Франком [2, с. 166]. Некоторые задачи были рассмотрены в монографиях Динника [3], Микеладзе [4], Колатца [5]. В том случае, когда момент инерции изменяется скачком задача изучалась Тимошенко [2, 6], Динником, Микеладзе и рядом других авторов. Однако вопрос о влиянии формы поперечного сечения и неоднородности механических свойств на величину критической силы в полной мере ещё не исследован. Предположение о периодичности изгибной жесткости стержня $W(x) \equiv E(x)J(x)$ позволило использовать для решения уравнения устойчивости асимптотический метод Бахвалова-Победри (МБП) [7, 8]. В работах [9, 10], с помощью МБП, получены приближенные аналитические выражения для критической силы при продольном сжатии шарнирно опёртого стержня и стержня, защемлённого на одном конце.

2. Постановка задачи.

Рассматривается неоднородный по длине стержень с переменным поперечным сечением. Центры тяжести каждого поперечного сечения расположены на прямой линии. Стержень нагружен переменной по длине продольной нагрузкой, в результате действия которой стержень может перейти из прямолинейного в искривленное состояние. Такая ситуация называется потерей устойчивости.

В декартовых координатах, выбранных так, как показано на рис. 1, изгиб стержня распределенной продольной силой описывается уравнением четвертого порядка [1, стр. 80]:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[W(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - T(x) \frac{du}{dx} \right\} = 0, \quad x \in (0, L) \quad (3)$$

Здесь $u(x)$ — прогиб оси стержня в точке с координатой x ; $W(x) = E(x)J(x)$ — жёсткость стержня при изгибе; $T(x)$ — осевое усилие в сечении с координатой x в прямолинейном стержне в момент потери устойчивости, вычисляемое по заданной распределенной нагрузке $t(x)$; L — длина стержня; $E(x)$ — модуль Юнга; $J(x)$ — момент инерции сечения.

К уравнению (3) необходимо добавить четыре однородных граничных условия (по два на каждом конце стержня).

Для решения дифференциального уравнения (3) четвертого порядка с переменными коэффициентами используем интегральную формулу представления решения исходного уравнения через решение такого же уравнения, только с постоянными коэффициентами. Впервые такая формула была опубликована в 1991 году в работе [11] применительно к задачам линейной упругости неоднородных тел. В задачах устойчивости неоднородных стержней интегральная формула была использована в работе В.И. Горбачёва и О.Б. Москаленко [12]. В настоящей работе интегральная формула применяется к задачам устойчивости по другому, в отличие от указанной работы.

2. Интегральная формула. Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение исходного уравнения (3), т.е. любая функция, которая удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[W(x) \frac{d^2 G}{dx^2} \right] - T(x) \frac{dG}{dx} \right\} = \delta(x - \xi), \quad (4)$$

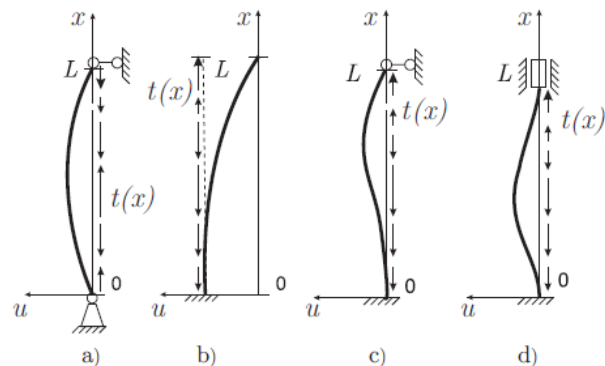


Рис. 1: Устойчивость стержней под действием внешней распределенной нагрузки

где $x \in (0, L)$, а $\delta(x - \xi)$ — дельта функция Дирака [13]. Наряду с исходным уравнением с переменными коэффициентами в той же области будем рассматривать дифференциальное уравнения того же типа, что и уравнение (3), но с постоянными коэффициентами:

$$W_o \frac{d^4 v}{dx^4} - T_o \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L). \quad (5)$$

Такое уравнение будем называть сопутствующим уравнением.

Решение исходного уравнения $u(x)$ и решение сопутствующего уравнения $v(x)$ связаны между собой интегральной формулой, в которую входит также и фундаментальная функция $G(x, \xi)$

$$u(x) = v(x) + \int_0^L [W_o - W(\xi)] \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int_0^L [T_o - T(\xi)] \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi \quad (6)$$

Пусть $L(u)$ и $L_o(v)$ — дифференциальные операторы исходного и сопутствующего уравнений

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[W(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - T(x) \frac{du}{dx} \right\}, \quad L_o(v) \equiv W_o \frac{d^4 v}{dx^4} - T_o \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Покажем, что выражение (6) удовлетворяет исходному уравнению

$$\begin{aligned} L(u) &= L(v) + \int_0^L [W_o - W(\xi)] \frac{\partial^2 L(G(x, \xi))}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int_0^L [T_o - T(\xi)] \frac{\partial L(G(x, \xi))}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi = \\ &= L(v) + \int_0^L [W_o - W(\xi)] \frac{\partial^2 \delta(x - \xi)}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int_0^L [T_o - T(\xi)] \frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi = \\ &= L(v) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^L [W_o - W(\xi)] \delta(x - \xi) v''(\xi) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L [T_o - T(\xi)] \delta(x - \xi) v'(\xi) d\xi = \\ &= L(v) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ [W_o - W(x)] v''(x) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [T_o - T(x)] v'(x) \right\} = \\ &= L(v) + W_o \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T_o \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [W(x) v''(x)] - T(x) v'(x) \right\} = \\ &= L(v) + L_o(v) - L(v) = L_o(v) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

3. Общее решение исходного уравнения устойчивости. Для получения общего решения исходного уравнения нужно сначала найти общее решение сопутствующего уравнения (5), которое при $T_o < 0$ имеет вид:

$$v(x) = K_1 \sin \lambda x + K_2 \cos \lambda x + K_3 x + K_4, \quad \lambda \equiv \sqrt{-T_o/W_o} \quad (8)$$

Если это решение подставить в интегральную формулу (6), то получим общее решение исходного уравнения устойчивости (3), определенное с точностью до четырех констант

K_1, K_2, K_3, K_4

$$\begin{aligned}
 u(x) = & K_1 \left[\sin \lambda x - \lambda^2 \int_0^L \widetilde{W}(\xi) G''_{\xi\xi}(x, \xi) \sin \lambda \xi \, d\xi + \lambda \int_0^L \widetilde{T}(\xi) G'_\xi(x, \xi) \cos \lambda \xi \, d\xi \right] + \\
 & + K_2 \left[\cos \lambda x - \lambda^2 \int_0^L \widetilde{W}(\xi) G''_{\xi\xi}(x, \xi) \cos \lambda \xi \, d\xi - \lambda \int_0^L \widetilde{T}(\xi) G'_\xi(x, \xi) \sin \lambda \xi \, d\xi \right] + \\
 & + K_3 \left[x + \int_0^L \widetilde{T}(\xi) G'_\xi(x, \xi) \, d\xi \right] + K_4
 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\widetilde{W}(\xi) \equiv W_0 - W(\xi)$, $\widetilde{T}(\xi) \equiv T_0 - T(\xi)$. Кроме этого $G'_\xi(x, \xi)$ обозначает первую производную по переменной ξ , а $G''_{\xi\xi}(x, \xi)$ — соответственно вторую производную по ξ .

4. О фундаментальном решении и о коэффициентах сопутствующей задачи. В формулу (9) входит фундаментальное решение исходного уравнения, которое определяется из обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (4) как любое частное решение удовлетворяющее фундаментальному уравнению (4).

Постоянные коэффициенты W_0 и T_0 сопутствующего уравнения, как следует из приведенного доказательства (7), могут быть произвольны. Единственное условие, которое следует из физического смысла рассматриваемой проблемы, это $W_0 > 0$ и $T_0 < 0$. Последнее условие можно трактовать как сжимающие силы в каждом сечении стержня, при которых возможна потеря устойчивости стержня.

Материал стержня может быть периодически неоднородным. Периодическими могут быть поперечное сечение, а также продольные нагрузки в стержне. В этом случае, как следует из метода Бахвалова-Победри

$$T_0 = \langle T \rangle, \quad W_0 = \frac{1}{\langle 1/W \rangle}, \quad \langle T \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (10)$$

В общем случае $W(x)$ и $T(x)$ — произвольные интегрируемые функции, определенные в области $0 \leq x \leq L$.

5. Уравнение критического состояния. Произвольные константы K_1, K_2, K_3, K_4 , входящие в формулу (9) должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить четырем однородным граничным условиям. В результате получается система четырех однородных уравнений относительно четырех констант. Из условия существования нетривиального решения этой системы получается *уравнение критического состояния*, т.е. функциональное уравнение для переменной жесткости и переменного продольного усилия, при которых стержень потеряет устойчивость.

В качестве примера рассмотрим более простой случай стержня переменной жесткости при постоянном продольном усилии $T = -P = \text{const.}$, а $t(x) = -P\delta(x-L)$. Таким образом, на конце $x = L$ задана постоянная сжимающая сила по величине равная P и вместо схематического рисунка 1 получаем рисунок 2.

В этом случае $\widetilde{T} = 0$, $\lambda = \sqrt{P\langle 1/W \rangle}$ и формула (10) для общего решения исходного уравнения приобретает более простой вид:

$$u(x) = K_1 \left[\sin \lambda x - \lambda^2 \varphi_1(\lambda, x) \right] + K_2 \left[\cos \lambda x - \lambda^2 \varphi_2(\lambda, x) \right] + K_3 x + K_4; \quad (11)$$

$$\varphi_1(\lambda, x) \equiv \int_0^L \widetilde{W}(\xi) G''_{\xi\xi}(x, \xi) \sin \lambda \xi \, d\xi, \quad \varphi_2(\lambda, x) \equiv \int_0^L \widetilde{W}(\xi) G''_{\xi\xi}(x, \xi) \cos \lambda \xi \, d\xi.$$

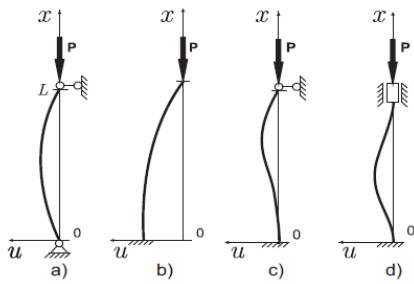


Рис. 2: Устойчивость стержня при действии консервативной продольной силы на конце $x = L$

Рассмотрим, например, шарнирно опертый стержень (рис. 2а). Удовлетворяя условиям $u(0) = u(L) = 0, u''(0) = u''(L) = 0$ получаем *уравнение критического состояния*. Вначале рассмотрим последние два условия для вторых производных, которые эквивалентны нулевым изгибающим моментам в концевых сечениях стержня в момент потери устойчивости

$$\begin{cases} K_1 \varphi_1''(\lambda, 0) + K_2 [1 + \varphi_2''(\lambda, 0)] = 0, \\ K_1 [\sin \lambda L + \varphi_1''(\lambda, L)] + K_2 [\cos \lambda L + \varphi_2''(\lambda, L)] = 0. \end{cases}$$

Нетривиальное решение уравнения устойчивости получим если определитель этой системы уравнений равен нулю, то есть

$$\varphi_1''(\lambda, 0) [\cos \lambda L + \varphi_2''(\lambda, L)] - [1 + \varphi_2''(\lambda, 0)] [\sin \lambda L + \varphi_1''(\lambda, L)] = 0.$$

Или

$$\sin(\lambda L + \vartheta) = \frac{\varphi_1''(\lambda, L) + \varphi_1''(\lambda, L) \varphi_2''(\lambda, 0) - \varphi_1''(\lambda, 0) \varphi_2''(\lambda, L)}{\sqrt{[\varphi_1''(\lambda, 0)]^2 + [1 + \varphi_2''(\lambda, 0)]^2}}, \quad (12)$$

где

$$\vartheta = \arcsin \frac{\varphi_1''(\lambda, 0)}{\sqrt{[\varphi_1''(\lambda, 0)]^2 + [1 + \varphi_2''(\lambda, 0)]^2}}.$$

Правая часть уравнения (12) меньше единицы, следовательно оно разрешимо.

3. Заключение

Разработана методика приближенного решения исходного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Эта методика основана на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Предполагается, что у исходного и сопутствующего уравнений одинаковые области определения и одинаковые входные данные. В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения, которое находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость этого ряда. Члены ряда, в общем случае, представляют собой многократные интегралы возрастающего порядка. В результате общее решение исходного уравнения представлено через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение. Ограничивая число членов фундаментального ряда получаем приближенное аналитическое решение исходного уравнения. Получена оценка точности приближенного решения в зависимости от выбора сопутствующих коэффициентов и от числа удержанных членов фундаментального ряда. Предложенная методика проверена на примере уравнения Чебышева, имеющего общее точное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов // М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Часть 2 // М.: 1956. 470 с.
3. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем // М.: ОНТИ, 1935. 183 с.

4. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений // М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 291 с.
5. Колатц Л. Задачи на собственные значения // М.: Наука, 1968. 503 с.
6. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Часть 2 // М.: 1956. 470 с.
7. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах // М.: Наука, 1984. 352 с.
8. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов // М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
9. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Об устойчивости стержней с переменной жесткостью // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2010. — № 6. — С. 65–69.
10. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость прямого стержня с переменной жесткостью // Изв. РАН МТТ, 2011. № 4. 181–192.
11. Горбачёв В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.
12. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2012. № 1. 41–47.
13. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М: Мир, 1978. 518 с.

REFERENCES

1. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov, M.: Nauka, 1979. 560 s.
2. Timoshenko S. P. Soprotivlenie materialov. CHast' 2, M.: 1956. 470 s.
3. Dinnik A. N. Ustojchivost' uprugih sistem, M.: ONTI, 1935. 183 s.
4. Mikeladze SH. E. Novye metody integrirovaniya differencial'nyh uravnenij, M.-L.: GITTL, 1951. 291 s.
5. Kolatc L. Zadachi na sobstvennyye znacheniya, M.: Nauka, 1968. 503 s.
6. Timoshenko S. P. Soprotivlenie materialov. CHast' 2, M.: 1956. 470 s.
7. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennye processov v periodicheskikh sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.
8. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.
9. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of bars with variable rigidity, Moscow University Mechanics Bulletin. — 2010. — Vol. 65, no. 6. — P. 147–150.
10. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of a straight bar of variable rigidity, Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, no. 4. — P. 645–655.

11. Gorbachev V.I. Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevykh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh sred, Vychislitel'naya mekhanika deformiruемого tverdogo tela. 1991. № 2. 61–76.
12. Gorbachev V.I., Moskalenko O.B. Stability of bars with variable rigidity compressed by a distributed force, — 2012. — Vol. 67, no. 1. — P. 5–10.
13. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy s prilozheniyami v tekhnike. M: Mir, 1978. 518 s.

Получено 01.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 519.6, 539.30, 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-353-367

Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами¹

В. И. Горбачев

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается линейное однородное самосопряженное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными интегрируемыми коэффициентами, зависящими от числового параметра (исходное уравнение). Общее решение исходного уравнения находится с точностью до двух произвольных констант с помощью интегральной формулы, ранее предложенной автором статьи. На общее решение накладывается два однородных условия, из которых следует система из двух уравнений для произвольных констант. Требуя, чтобы существовало нетривиальное решение исходного уравнения, получаем сложное нелинейное уравнение относительно числового параметра (спектральное уравнение).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, уравнения с переменными коэффициентами, задача Штурма — Лиувилля, спектральные уравнения.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

В. И. Горбачев. Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 353–367.

¹Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-01-00016а и Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 519.6, 539.30, 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-353-367

**Problems on eigenvalues for ordinary differential equations
of the second order with variable coefficients**

V. I. Gorbachev

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Lomonosov Moscow State University (г. Москва).

e-mail: vigorby@mail.ru

Abstract

In paper the linear homogeneous self-interfaced ordinary differential is considered Second-kind equation with the variable integrable factors depending on the numerical Parametre (input equation). The input equation Common decision is about accuracy to two Arbitrary constants by means of the integral formula, before the paper offered by the author. On the general The solution is superimposed two homogeneous conditions from which the system from two equations follows for Arbitrary constants. Demanding, that there was a nontrivial solution of an input equation, We receive the complicated nonlinear equation for numerical parametre (the spectral equation).

Keywords: Differential equations of the second order, the equation with variable coefficients, a problem Sturm–Liuvill, the spectral equations.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

V. I. Gorbachev, 2021, “Problems on eigenvalues for ordinary differential equations of the second order with variable coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 353–367.

1. Введение

Многие процессы, происходящие в неоднородных телах, в частности в композитах, описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, зависящими от координат. Для выделения единственного решения таких уравнений ставятся граничные и начальные условия. Если уравнение однородно, а граничные и начальные условия также однородные, то такая задача имеет тривиальное, то есть нулевое решение. Однако возможна такая ситуация, когда наряду с тривиальным решением существует и решение отличное от нулевого. Обычно эта ситуация возникает в том случае, когда один, или несколько коэффициентов уравнения зависят от числового параметра λ . Этот же параметр λ может входить и в однородные граничные и начальные условия. В этих случаях могут существовать такие значения параметра λ , при которых задача имеет и ненулевое решение. Такие значения λ называются собственными значениями, а решения уравнения для каждого из собственных значений называются собственными функциями. Описанная общая ситуация называется задачей о собственных значениях [1], [2, стр. 24–32]. В математике такие задачи называются спектральными задачами. Спектральной теории операторов, в том числе дифференциальных операторов, посвящен большой раздел в математической энциклопедии [3, стр. 85–134]. Задачи на определение собственных значений возникают в механике, физике, квантовой механике, в

задачах устойчивости и в других самых разных случаях. Например при попытке найти решение параболических, или же гиперболических уравнений методом разделения переменных. При изучении движения элементарной частицы, находящейся в потенциальном поле. В данной работе мы будем рассматривать самосопряженную задачу о собственных значениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Часто эту задачу называют задачей Штурма-Лиувилля. Теория задачи Штурма-Лиувилля в доступной форме излагается в книгах [4, стр. 546], [5, стр. 568-609], [6, стр. 261]. Обратные задачи Штурма-Лиувилля рассматривались в работе [7].

2. Исходное и сопутствующее уравнения

2.1. Исходное уравнение. Собственные значения и собственные функции.

Рассматривается однородное самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами — исходное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x, \lambda)u = 0, \quad q(x, \lambda) = h(x) + \lambda \varrho(x), \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

Параметр λ — постоянное число. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) — ограниченные интегрируемые функции координаты x . Коэффициент $C(x)$ — положительная, интегрируемая на $[a, b]$ функция, которая также может зависеть от параметра λ . Для уравнения (1) рассматривается краевая задача с однородными условиями

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \quad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные константы. В зависимости от выбора констант $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ из условий (2) получается первая, вторая и третья краевые задачи [4, стр. 546]. Можно также рассматривать задачу Коши, когда на одном краю задаются значение искомой функции $u(x)$ и её первой производной $u'(x)$ — начальные условия.

Еще более общими условиями являются, так называемые, нераспадающиеся граничные условия [7]. Самый общий вид, которых можно записать формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u(b) + \beta_{11}u'(a) + \beta_{12}u'(b) &= 0, \\ \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}u(b) + \beta_{21}u'(a) + \beta_{22}u'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

У однородного уравнения (1) с однородными условиями (2), либо (3) всегда существует нулевое решение. Однако могут найтись такие значения параметра λ , при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее заданным однородным граничным условиям.

Если при заданных однородных условиях существует число λ , при котором решение исходного однородного уравнения (1) отлично от тождественного нуля, то такое λ называется собственным значением, а само решение $u(x, \lambda)$ называется собственной функцией. Задача отыскания собственных значений и собственных функций уравнения (1) с граничными условиями (2) называется задачей Штурма-Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций задачи (1), (2) приведены в [8, стр. 136-140].

2.2. Сопутствующее уравнение и его общее решение.

Рассмотрим функцию $v(x)$, определенную на том же интервале, и которая представляет собой решение однородного уравнения того же типа, что и исходное, но с постоянными коэффициентами $C_0 = \text{const.} > 0$ и $q_0 = \text{const.}$

$$C_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + q_0 v = 0, \quad x \in (a, b) \quad (4)$$

Такое уравнение будем называть сопутствующим уравнением. Общее решение сопутствующего уравнения (2) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\mu_o x} + K_2 e^{-i\mu_o x}, \quad \begin{cases} \mu_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, & q_o > 0, \\ \mu_o = i \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}}, & q_o < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Действительное решение сопутствующего уравнения (4) представляется разными формулами в зависимости от значения коэффициента q_o

$$v(x) = \begin{cases} K_1 \cos \mu_o x + K_2 \sin \mu_o x, & \mu_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} \quad \text{if } q_o > 0, \\ K_1 x + K_2, & \mu_o = 0 \quad \text{if } q_o = 0, \\ K_1 e^{-\mu_o x} + K_2 e^{\mu_o x}, & \mu_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}} \quad \text{if } q_o < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь K_1 и K_2 — произвольные действительные константы.

3. Интегральная формула.

В работах [9, 10] получена интегральная формула представления решения исходного уравнения (1) через решение сопутствующего уравнения с помощью фундаментальной функции $G(x, \xi)$ исходного уравнения

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi, \lambda) v(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi, \lambda) = q_o - q(\xi, \lambda)$. Под фундаментальной функцией исходного уравнения (1) понимается любая функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующему фундаментальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + q(x, \lambda) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad x, \xi \in (a, b), \quad (8)$$

где $\delta(x - \xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [15, 16].

4. Общее решение исходного уравнения.

Подставим общее решение (5) сопутствующего уравнения в интегральную формулу (7) и получим общее решение исходного однородного уравнения Штурма-Лиувилля (1)

$$u(x) = K_1 A(x, \lambda) + K_2 B(x, \lambda), \quad (9)$$

где K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Функции $A(x, \lambda)$ и $B(x, \lambda)$ также комплексные величины — два линейно независимых решения исходного уравнения

$$\begin{aligned} A(x, \lambda) &= e^{i\mu_o x} + i\mu_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\mu_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\mu_o \xi} d\xi, \\ B(x, \lambda) &= e^{-i\mu_o x} - i\mu_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\mu_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\mu_o \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Действительное решение имеет тот же самый вид (9), только K_1 и K_2 — действительные константы. Действительные функции $A(x, \lambda)$ и $B(x, \lambda)$ имеют различный вид в зависимости от знака коэффициента q_0

$$A(x, \lambda) = \begin{cases} \cos(\mu_0 x) - \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin(\mu_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos(\mu_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0, \\ x + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) d\xi + \int_a^b \xi G(x, \xi) q(\xi) d\xi, & q_0 = 0, \\ e^{-\mu_0 x} - \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-\mu_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-\mu_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$B(x, \lambda) = \begin{cases} \sin(\mu_0 x) + \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \cos(\mu_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \sin(\mu_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0, \\ 1 + \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi, & q_0 = 0, \\ e^{\mu_0 x} + \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{\mu_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{\mu_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0. \end{cases} \quad (12)$$

4.1. Замечание о коэффициентах сопутствующего уравнения.

Отметим, что в сопутствующем уравнении коэффициенты C_0 и q_0 в рамках указанных ограничений — совершенно произвольные константы.

1. В частности коэффициент q_0 можно принять равным нулю. В этом случае общее решение сопутствующего уравнения является линейной функцией координаты и имеет вид (6).
2. Можно считать, что q_0 есть ненулевая константа не зависящая от λ .
3. Можно предположить, что q_0 есть функция от λ .
4. В работах [9, 10] коэффициенты C_0 и q_0 полагались равными эффективным характеристикам [13, 14] так, что

$$C_0 = \frac{1}{\langle 1/C(x) \rangle}, \quad q_0(\lambda) = \langle q(x, \lambda) \rangle, \quad f_0 \equiv \langle f(x) \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (13)$$

5. Можно положить оба коэффициента C_0 и q_0 равными заданным функциям координаты и параметра λ . В последнем случае общее решение сопутствующего уравнения уже не представляется формулами (5), (6).

6. Формулы для общего решения исходного уравнения будут попроще, когда коэффициент q_0 принимается нулевым, а коэффициент C_0 совпадает с исходным коэффициентом, то есть $C_0 \equiv C(x)$. В этом случае сопутствующее уравнение вместо (2) принимает более простой вид:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dv}{dx} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = K_1 \int_a^x \frac{dy}{C(y)} + K_2$$

7. Однако, самые простые формулы для общего решения исходного уравнения будут в том случае, когда $C_0 = 1/\langle 1/C \rangle$, а $q_0 = 0$. Общее решение исходного уравнения будет, по прежнему определяться по формуле (9), а частные решения будут определяться по формулам (11) и (12) при $q_0 = 0$. Все эти случаи, при подстановке их в интегральную формулу (7), дают два линейно независимых решения, записанных в другой форме и удовлетворяющие исходному уравнению. Который из этих случаев лучше предстоит выяснить.

5. Метод возмущений для определения фундаментального решения исходного уравнения.

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (9), если известно фундаментальное решение уравнения (8) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного аналитического решения фундаментального уравнения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Будем искать фундаментальную функцию методом возмущений [11, 12].

5.1. Схема метода возмущений.

В методе возмущений уравнение (8) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + \varkappa q(x, \lambda) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (14)$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным единице. Будем искать решение уравнения (14) в виде ряда по степеням параметра

$$G(x, \xi, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x, \xi) \quad (15)$$

Подставим ряд (15) в уравнение (14), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$[C(x)G'_0(x, \xi)]' + \delta(x - \xi) = 0, \quad [C(x)G'_n(x, \xi)]' + q(x)G_{n-1}(x, \xi) = 0, \quad n > 0 \quad (16)$$

Константы интегрирования уравнений (16) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$G_0(x, \xi) = - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz = - \begin{cases} 0, & x < \xi \\ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, & x \geq \xi \end{cases} = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)},$$

Здесь $h(x - \xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [16]. Далее находим $G_n(x, \xi)$ при $n \geq 1$

$$G_n(x, \xi) = - \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2. \quad (17)$$

Формулу (17) можно записать в виде $n + 1$ кратного интеграла

$$G_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} h(x - \xi) \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)},$$

где

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy.$$

Ряд для фундаментальной функции примет вид (15), в котором $\varkappa = 1$

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \xi) \quad (18)$$

Нам понадобятся производные по переменным x и ξ от $G_n(x, \xi)$. При $n = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = -\delta(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} - \frac{h(x - \xi)}{C(x)} = -\frac{h(x - \xi)}{C(x)}, \\ \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial \xi} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = \delta(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} + \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)}\end{aligned}\quad (19)$$

Функция $G_0(x, \xi)$ и её производные входят под интегралы в формулах (7) и (10)–(12). Поэтому слагаемые с δ -функцией Дирака в формулах (19) исчезают из окончательных результатов. При $n > 0$ выражения для производных от $G_n(x, \xi)$ следуют из формулы (17)

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} = (-1)^{n+1} \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} = (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n. \quad (21)$$

5.2. Оценка сходимости фундаментального ряда в общем случае.

В общем случае, когда коэффициенты C и q ограниченные функции, можно получить оценку абсолютной величины n -го члена ряда (15). Для этого воспользуемся выражением (17), в соответствии с которым при $x \geq \xi$ получаем:

$$\frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\min}^n}{(2n + 1)! C_{\max}^{n+1}} \leq |G_n(x, \xi)| \leq \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}}$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \left(\frac{x - \xi}{s^*} \right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sin \frac{x - \xi}{s^*}, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (18) сходится равномерно на всём промежутке $a \leq x \leq b$.

5.3. Особый частный случай.

Пусть $q(x) = \lambda \varrho(x)$, где $\varrho(x) > 0$. В этом случае ряд (18) для фундаментальной функции примет вид:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n(x, \xi),$$

где при $n > 0$

$$\begin{aligned}G_n(x, \xi) &= \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} \varrho(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2 = \\ &= (-1)^{n+1} h(x - \xi) \int_{\xi}^x \bar{\psi}(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)},\end{aligned}$$

$$\bar{\psi} \equiv \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x \varrho(y) dy,$$

а вместо формул (20), (21) получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} &= -(-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x \varrho(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \bar{\psi}(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \\ \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} &= (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \bar{\psi}(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n. \end{aligned}$$

Коэффициент q_o сопутствующего уравнения принимает вид:

$$q_o(\lambda) = \lambda \varrho_o, \quad \varrho_o = \langle \varrho(x) \rangle$$

6. Спектральные уравнения для собственных значений.

Для того, чтобы вывести уравнение для собственного числа λ нужны однородные граничные условия. Общий и самый общий вид этих условий дается формулами (2) и (3). Рассмотрим вначале наиболее простые случаи

6.1. Спектральное уравнение первой краевой задачи.

В случае первой краевой задачи нужно в условиях (2) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда на концах отрезка $[a, b]$ решение исходного уравнения (2) должно быть нулевым, то есть

$$u(a) = u(b) = 0$$

Отсюда и из общего решения исходного уравнения (9) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} K_1 A(a, \lambda) + K_2 B(a, \lambda) = 0 \\ K_1 A(b, \lambda) + K_2 B(b, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Константы K_1 и K_2 будут отличны от нуля, если определитель системы (22) равен нулю. Отсюда получаем спектральное уравнение первой краевой задачи

$$A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(b, \lambda)B(a, \lambda) = 0 \quad (23)$$

6.2. Спектральное уравнение второй краевой задачи.

$$C(x)u'(x) = K_1 C(x)A'(x) + K_2 C(x)B'(x)$$

Однородные граничные условия второй краевой задачи имеют вид:

$$C(a)u'(a) = C(b)u'(b) = 0$$

Из этих условий вытекает система уравнений для констант K_1 и K_2

$$\begin{cases} K_1 C(a)A'(a, \lambda) + K_2 C(a)B'(a, \lambda) = 0 \\ K_1 C(b)A'(b, \lambda) + K_2 C(b)B'(b, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует спектральное уравнение второй краевой задачи

$$[C(x)A'(x, \lambda)]_{x=a} \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=b} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=b} \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=a} = 0 \quad (24)$$

6.3. Спектральное уравнение смешанной краевой задачи.

В смешанной краевой задаче на конце $x = a$ задаётся нулевое значение функции $u(x)$, а на другом конце — нулевое значение произведения $C(x)u'(x)$

$$u(a) = 0, \quad C(b)u'(b) = 0$$

В результате спектральное уравнение третьей краевой задачи имеет вид:

$$A(a, \lambda) \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=b} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=b} \cdot B(a, \lambda) = 0$$

6.4. Общее спектральное уравнение в краевой задаче.

Однородные граничные условия общего вида (2) записываются следующими формулами:

$$\begin{cases} K_1 [\alpha_1 A(a, \lambda) + \beta_1 A'(a, \lambda)] + K_2 [\alpha_1 B(a, \lambda) + \beta_1 B'(a, \lambda)] = 0 \\ K_1 [\alpha_2 A(b, \lambda) + \beta_2 A'(b, \lambda)] + K_2 [\alpha_2 B(b, \lambda) + \beta_2 B'(b, \lambda)] = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует спектральное уравнение общего вида

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 A(a, \lambda) + \beta_1 A'(a, \lambda)] [\alpha_2 B(b, \lambda) + \beta_2 B'(b, \lambda)] - \\ & - [\alpha_2 A(b, \lambda) + \beta_2 A'(b, \lambda)] [\alpha_1 B(a, \lambda) + \beta_1 B'(a, \lambda)] = 0 \end{aligned}$$

6.5. Спектральное уравнение в задаче Коши.

В этом случае на левом конце $x = a$ задаются нулевые значения решения исходного уравнения и его производной по координате. В результате чего спектральное уравнение в задаче Коши будет следующим:

$$A(a, \lambda) \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=a} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=a} \cdot B(a, \lambda) = 0 \quad (25)$$

7. Пример. Уравнение Чебышева.

Рассмотрим уравнение

$$[\sqrt{1-x^2} u']' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} u = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (26)$$

В этом уравнении $C(x) = \sqrt{1-x^2} > 0$, $q(x) = \lambda \varrho(x)$, где $\varrho(x) = 1/\sqrt{1-x^2} > 0$. Общее решение уравнения (26) имеет вид:

$$u(x) = K_1 A(x, \lambda) + K_2 B(x, \lambda) = K_1 e^{i\sqrt{\lambda} \arcsin x} + K_2 e^{-i\sqrt{\lambda} \arcsin x}, \quad \lambda \neq 0, \quad (27)$$

где K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Действительное решение зависит от константы λ

$$u(x) = \begin{cases} K_1 \cos(\sqrt{\lambda} \arcsin x) + K_2 \sin(\sqrt{\lambda} \arcsin x), & \lambda > 0, \\ K_1 \arcsin x + K_2, & \lambda = 0, \\ K_1 e^{-\sqrt{-\lambda} \arcsin x} + K_2 e^{\sqrt{-\lambda} \arcsin x}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь K_1 и K_2 — действительные константы. При нулевых граничных условиях не тривиальное решение уравнения (26) возможно только, если $\lambda > 0$. Положив $\lambda = m^2$, получаем уравнение Чебышева [17, стр.254 № 1140]

$$[\sqrt{1-x^2} u']' + \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}} u = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (29)$$

Частные линейно независимые решения уравнения Чебышева обозначим через

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \cos(m \arcsin x), & B_m(x) &= \sin(m \arcsin x), \\ A'_m(x) &= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x), & B'_m(x) &= \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \arcsin x). \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что в большинстве работ общее решение уравнения Чебышева представляется в другой форме $u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x)$. Здесь функции $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, $U_m(x) = \sin(m \arccos x)$ при действительных m представляют собой полиномы Чебышева первого и второго рода. Как показано в работе [18, стр. 59], функции $A_m(x)$ и $B_m(x)$ выражаются через полиномы Чебышева $T_m(x)$ и $U_m(x)$

$$A_{2m} = (-1)^m T_{2m}, \quad A_{2m+1} = (-1)^m U_{2m+1}; \quad B_{2m} = (-1)^{m+1} U_{2m}, \quad B_{2m+1} = (-1)^m T_{2m+1}.$$

Для доказательства этих формул нужно всего лишь воспользоваться тождеством $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Детальное исследование уравнения Чебышева дано в книгах [19, 20] и в ряде других книг. Фундаментальное решение уравнения Чебышева было получено в работе [10]

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sin[m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)]. \end{aligned} \quad (31)$$

7.1. Первая краевая задача.

Спектральное уравнение (23) в первой краевой задаче имеет вид:

$$\begin{aligned} &A_m(-1) \cdot B_m(1) - A_m(1) \cdot B_m(-1) = \\ &= \cos(m \arcsin(-1)) \sin(m \arcsin(1)) - \cos(m \arcsin(1)) \sin(m \arcsin(-1)) = \\ &= \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} + \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = 2 \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = \sin(m\pi) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Итак, любое целое число m является собственным числом первой краевой задачи для уравнения Чебышева.

7.2. Вторая краевая задача.

Во второй краевой задаче спектр будет таким же как и в первой краевой задаче. В самом деле, из (24) и (30) получаем:

$$\begin{aligned} &(CA'_m)_{x=-1} \cdot (CB'_m)_{x=1} - (CA'_m)_{x=1} \cdot (CB'_m)_{x=-1} = \\ &= 2m^2 \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = m^2 \sin(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (33)$$

то есть, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7.3. Смешанная краевая задача.

В случае смешанной краевой задачи для уравнения Чебышева спектральное уравнение будет следующим:

$$\begin{aligned} & A_m(-1) \cdot (CB'_m)_{x=1} - (CA'_m)_{x=1} \cdot B_m(-1) = \\ & = m \left[\cos(m \arcsin(-1)) \cos(m \arcsin(1)) - [-\sin(m \arcsin(1))] \sin(m \arcsin(-1)) \right] = \\ & = m \left[\cos^2 \frac{m\pi}{2} - \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] = m \cos(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (34)$$

7.4. Задача Коши.

Аналогичный спектр будет и в задаче Коши. Спектральное уравнение (25) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & A_m(-1) \cdot (CB'_m)_{x=-1} - (CA'_m)_{x=-1} \cdot B_m(-1) = \\ & = \cos \frac{m\pi}{2} \cdot m \cos \frac{m\pi}{2} - m \left(-\sin \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \left(-\sin \frac{m\pi}{2} \right) \\ & = m \left[\cos^2 \frac{m\pi}{2} - \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] = m \cos(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (35)$$

8. Приближенные спектральные уравнения для уравнения Чебышева.

Для нахождения приближенного общего аналитического решения уравнения Чебышева воспользуемся формулой (31). Вместо полного ряда для фундаментального решения исходного используем частичную сумму

$$\begin{aligned} G^{(I)}(x, \xi) &= \sum_{n=0}^I G_n(x, \xi) = -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\arcsin x - \arcsin \xi \right)^{2n+1}, \\ \frac{\partial G^{(I)}(x, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \left(\arcsin x - \arcsin \xi \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулы (11) и (12) при $q_0 > 0$, получим (подробности в работе [10]):

$$A_{m(I)}(x) = \underbrace{\cos \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n}}_{\rightarrow 0 \text{ if } I \rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n}}{(2n)!}}_{\rightarrow \cos(m \arcsin x) \text{ if } I \rightarrow \infty}, \quad (36)$$

$$B_{m(I)}(x) = \underbrace{\sin \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1}}_{\rightarrow 0 \text{ if } I \rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\rightarrow \sin(m \arcsin x) \text{ if } I \rightarrow \infty}. \quad (37)$$

Отметим, что $A_{m(I)}(x)$ — четные функции, а $B_{m(I)}(x)$ — нечетные, то есть

$$A_{m(I)}(-x) = A_{m(I)}(x), \quad B_{m(I)}(-x) = -B_{m(I)}(x).$$

Кроме этого, из формул (36) и (37) видно, что при любом $0 \leq I \leq \infty$ на концах интервала $(-1, 1)$ выполняются равенства

$$A_{m(I)}(-1) = A_{m(I)}(1) = \cos \frac{m\pi}{2}, \quad B_{m(I)}(-x) = -B_{m(I)}(x) = -\sin \frac{m\pi}{2}.$$

Это означает, что для уравнения Чебышева спектральные уравнения в случае приближенных решений (36) и (37) совпадают с соответствующими спектральными уравнениями для точных решений. Видимо это особенность уравнения Чебышева.

Отбросим в формулах (36) и (37) первую часть быстро стремящуюся к нулю в любой точке области определения и примем за приближенное решение остаток, который стремится к точному решению уравнения Чебышева, то есть

$$A_{m(I)}(x) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} (m \arcsin x)^{2n}, \quad B_{m(I)}(x) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (m \arcsin x)^{2n+1}.$$

8.0.1. Первая краевая задача. Приближенное решение.

Приближенное спектральное уравнение первой краевой задачи для дифференциального уравнения Чебышева получается из точного спектрального уравнения (23) при замене в нём $A(x, \lambda) \rightarrow A_{m(I)}(x)$, $B(x, \lambda) \rightarrow B_{m(I)}(x)$

$$A_{m(I)}(-1)B_{m(I)}(1) - A_{m(I)}(1)B_{m(I)}(-1) = 0 \quad (38)$$

Отсюда и из условий симметрии находим:

$$A_{m(I)}(1) \equiv A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n}, \quad B_{m(I)}(1) \equiv A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (38) приводит к уравнению $2A_{m(I)}(1)B_{m(I)}(1) = 0$, из которого получаем два уравнения для приближенных собственных значений

$$A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n} = 0, \quad B_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n+1} = 0. \quad (39)$$

Решение уравнений (39) будем искать графически, построив графики зависимости от m .

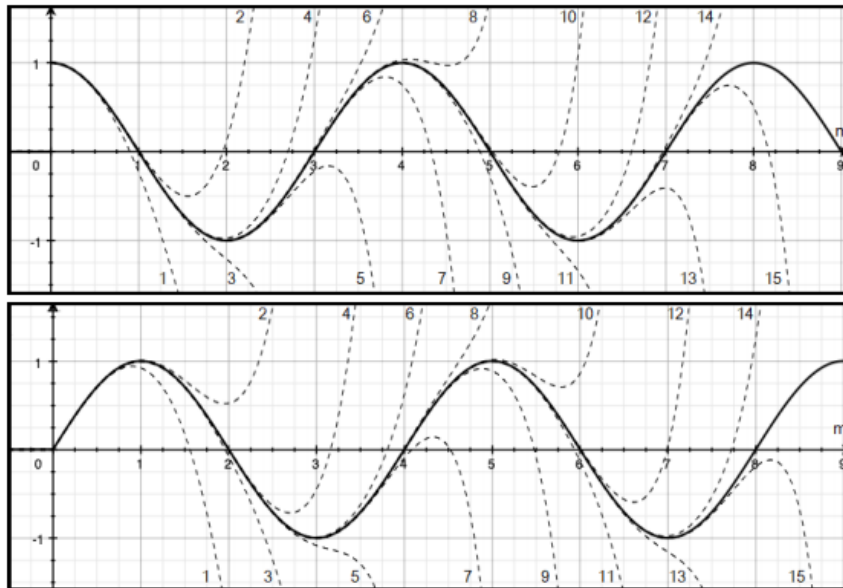


Рис. 1: Графики точных и приближенных решений спектральных уравнений для уравнения Чебышева при различных значениях параметра I — числа слагаемых в суммах (39).

Точные спектральные кривые $A(m) = \cos \frac{m\pi}{2}$ и $B(m) = \sin \frac{m\pi}{2}$ представлены на графиках сплошной линией, а графики $A_{(I)}(m)$ и $B_{(I)}(m)$ приближенных спектральных кривых изображены штрихами и помечены числами от 1 до 15. Они соответствуют числу I удержанных членов сумм (39). Точки пересечения кривых с осью абсцисс являются собственными числами: точными или же приближенными, соответственно. Из первого уравнения (39) находятся нечетные собственные положительные числа $m = 1, 3, \dots$, а из второго — четные положительные числа $m = 0, 2, 4, \dots$. К каждому из этих положительных собственных чисел, согласно условиям симметрии, нужно добавить отрицательные собственные значения.

Такая простая картина спектральных кривых получается именно для уравнения Чебышева. Если бы мы оставили в формулах (36) и (37) члены стремящиеся к нулю, то приближенные спектральные уравнения полностью совпали бы с точными спектральными уравнениями (29) первой краевой задачи. В других случаях такое совпадение вряд ли возможно.

9. Заключение.

Рассмотрена классическая задача Штурма-Лиувилля для однородного самосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от постоянного параметра. Показано, что с помощью интегральной формулы, полученной ранее автором, можно выписать общее решение уравнения, содержащее две произвольные константы. Выписаны различные возможные однородные краевые и начальные условия, из которых, в принципе, должны определяться ненулевые значения этих констант. Для различных однородных условий получен общий вид спектральных уравнений для собственных значений параметра, входящего в коэффициенты исходного уравнения. Основная трудность при применении интегральной формулы заключается в поиске фундаментального решения исходного уравнения. Точное аналитическое решение фундаментального уравнения возможно лишь в редких случаях. Поэтому необходимо в дальнейшем разработать процедуру численного решения фундаментального уравнения.

Автор благодарен доценту кафедры механики композитов, кандидату физико-математических наук Бедновой Веронике Борисовне за помощь при оформлении графического материала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука: 1968. 503 с.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука: 1969. 526 с.
3. Математическая энциклопедия. Т.3 Коо-Од. Гл.ред. Виноградов И. М. М.: Советская энциклопедия: 1982. 1183 с.
4. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова Думка: 1974. 744 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
6. Камке Н. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука: 1971. 576 с.
7. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М.: Изд-во МГУ, 1984. 182 с.
8. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Серия — Курс высшей математики и математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 254 с.

9. Gorbachev V.I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, №7. P. 969-980.
10. Горбачев В. И. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник. Vol. 20, №4. P. 108-123.
11. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
12. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
13. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненные процессы в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука: 1972. 496 с.
16. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир: 1978. 518 с.
17. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962. 292 с.
18. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. Перевод с французского Н.Я. Виленкина. М.: Наука 1963. 103 с.
19. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука: главная редакция физико-математической литературы, 1979. 416 с.
20. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука 1964. 344 с.

REFERENCES

1. Kollats L. Zadachi na sobstvennye znacheniya. M.: Nauka, 1968. 503 s.
2. Najmark M. A. Linejnye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 526 s.
3. Matematicheskaja ensiklopedia. V.3 Koo-Od. Gl. red. Vinogradov I.M. M.: Sovetskaja ensiklopedia: 1982. 1183 s.
4. Fil'chakov P. F. Spravochnik po vysshej matematike. Naukova Dumka, Kiev, 1974. 744 s.
5. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoy fiziki. Vysshaya shkola, Moskva, 1970. 710 s.
6. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nyim uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 s.
7. Sadovnichij V. A., Sultanaev YA. T., Ahtyamov A. M. Obratnye zadachi SHturma-Liuvillya s neraspadayushchimisya kraevymi usloviyami. M.: Izd. MGU, 2009. 182 s.
8. Tikhonov A. N., Vasiljeda A. B., Sveshnikov A. G. Differencial'nii uravneniya. Seriya — Kurs visshey matematiki i matematicheskoy fiziki. M.: FIZMATLIT. 2005. 254 c.

9. Gorbachev V. I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, №7. P. 969-980.
10. Gorbachev V. I. Primenenie integral'nyh formul dlya resheniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka s peremennymi koefficientami, Chebishevskiy sbornik **20** (4), 2019. P 108–123.
11. Lomakin V. A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU, 1976. 367 s.
12. Najfe A. H. Metody vozmushchenij. M.: Mir, 1976. 456 s.
13. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennye processov v periodicheskikh sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.
14. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1972. 496 s.
16. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike. M.: Mir, 1978. 518 s.
17. Matveev N. M. Sbornik zadach i uprazhnenij po obyknovennym differencial'nyh uravneniyam. M.: Rosvuzizdat, 1962. 292 s.
18. Kampe de Fer'e ZH., Kempbell R., Pet'o G., Fogel' T. Funkcii matematicheskoy fiziki. Spravochnoe rukovodstvo. (Perevod s francuzskogo N.YA. Vilenkina). M.: Nauka 1963. 103 s.
19. Suetin P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. M.: Nauka: glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979. 416 s.
20. Yanke E., Emde F., Lyosh F. Special'nye funkcii. M.: Nauka 1964. 344 s.

Получено 29.04.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики¹

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Ларин Николай Владимирович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере. Для представления рассеянного поля используется представление в виде интеграла Кирхгофа. Это приводит к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода для определения потенциала скорости в рассеянной волне на поверхности рассеивателя. Показано, что использование квадратурных формул на основе сеток Смоляка позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов, при решении интегрального уравнения и при вычислении рассеянного поля на поверхности сферы и в дальней зоне. Этот метод сравнивался с методом простых ячеек, который учитывает механическую постановку задачи и имеет тот же порядок точности. Оценка точности вычисления давления на поверхности сферы и функции рассеянного поля на основе решения интегрального уравнения проводится путем сравнения с аналитическим решением на основе разложения по сферическим волновым функциям.

Ключевые слова: дифракция, сферические звуковые волны, линейные интегральные уравнения, интерполяция, интерполяционные многочлены, квадратурные формулы, периодизация, сетки Смоляка, параллелепипедальные сетки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 368–382.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ 19-41-710005 р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

**About application of number-theoretic grids
in problems of acoustics**

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Larin Nikolai Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Abstract

The article discusses spherical diffraction problem monochromatic sound wave absolutely rigid sphere. To represent the scattered field, a representation in the form of a Kirchhoff integral is used. This leads to the need to solve the Fredholm integral equation of the second kind to determine the velocity potential in the scattered wave on the surface of the scatterer. It is shown that the use of quadrature formulas based on number-theoretic grids allows you to reduce the number of calculations for the approximate calculation of integrals, when solving the integral equation and when calculating the scattered field on the surface of the sphere and in the far field. This method was compared with the simple cell method, which takes into account the mechanical formulation of the problem and has the same order of accuracy. Estimation of the accuracy of calculating the pressure on the surface of the sphere and the form-function of the scattered field based on the solution of the integral equation was carried out by comparison with the analytical solution based on the expansion in spherical wave functions.

Keywords: diffraction, spherical sound wave, linear integral equations, interpolation, interpolation polynomials, quadrature formulas, periodization, Smolyak grids, parallelepiped grids.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.

1. Введение

При решении задач акустики широко используется метод интегральных уравнений, основанный на интегральном представлении излучаемого или рассеянного звукового поля в форме

Кирхгофа-Гельмгольца, которая предполагает определение акустического поля вне рассеивателя (излучателя) по известным характеристикам поля на поверхности объекта в виде интеграла по этой поверхности. Для большей части интересных для практики задач дифракции звуковых волн представление рассеянной звуковой волны в форме Кирхгофа-Гельмгольца приводит к необходимости приближенного решения интегральных уравнений относительно потенциала скорости частиц жидкости в рассеянном поле.

Такой подход к решению задач дифракции звука в литературе часто называют методом граничных интегральных уравнений (ВИЕМ) или методом граничных элементов (ВЕМ). Он активно используется исследователями для решения задач о рассеянии звука различными объектами. Например в работе [1] рассматривается итерационная процедура решения задач рассеяния (излучения) звука на основе граничных интегральных уравнений. В работе [2] метод ВИЕМ используется для расчета рассеяния звука от конечного жесткого цилиндра вблизи мягкой границы. Авторами работы [3] выполнен анализ эффекта использования изогеометрических граничных элементов при исследовании акустического рассеяния на твердых телах с использованием метода граничных элементов. В монографии [4] изложены принципы использования интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции звука, представлено решение некоторых задач.

Численная реализация метода граничных интегральных уравнений имеет ряд ограничений. Одно из них связано с обеспечением требуемой точности приближенного решения интегрального уравнения. При дискретизации интегрального уравнения для получения удовлетворительной точности возникает необходимость разбиения поверхности, по которой осуществляется интегрирование, на интервалы длиной не более одной десятой длины звуковой волны. Это ограничивает волновые размеры тела, так как порядок системы алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации, не должен быть слишком большим для возможности практических вычислений. Таким образом, возникает проблема построения сетки со сравнительно небольшим числом узлов, чтобы решение задачи с требуемой точностью было пригодно в широком диапазоне волновых размеров тела. В настоящей работе на основе решения эталонной задачи дифракции сферической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере производится сравнительный анализ решений интегральных уравнений с помощью классических формул численного интегрирования и формул, построенных на теоретико-числовых сетках.

2. О теоретико-числовых сетках

Теоретико-числовые сетки возникают при решении классических задач теоретико-числового метода в приближенном анализе: численное интегрирование и интерполирование функций многих переменных, решение линейных интегральных уравнений, решение дифференциальных уравнений в частных производных. В этой работе нас будут интересовать задачи численного решения линейных интегральных уравнений и построения по полученному решению интерполяционного многочлена, с целью проведения численного эксперимента по применению теоретико-числовых сеток к решению задач акустики.

Теоретико-числовые сетки (см. [8]) можно поделить на два класса, которые для своего оптимального применения требуют периодизации и для которых периодизация не дает эффекта улучшения точности. Наиболее интересны для нас сетки Смоляка и параллелипедальные сетки, так как они при интегрировании периодических функций из класса Коробова E_s^α учитывают класс гладкости α .

Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольттера описаны, как с применением теоретико-числовых методов [9], [10], так и с применением других методов [11, 12, 13].

Математические вопросы построения интерполяционных многочленов с использованием,

как теоретико-числовых, так и других методов описаны в работах [9, 14, 15, 16, 19].

3. Постановка задачи

Рассмотрим абсолютно жесткую сферу T радиуса a , находящуюся в безграничном пространстве Ω , заполненном идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c . Пусть из внешнего пространства на тело падает сферическая звуковая волна Ψ_0 , излучаемая точечным источником, расположенным в точке M_0 (рис. 1).

Введем декартову систему координат x, y, z с началом O в центре сферы. В сферической системе координат r, θ, φ , связанной с декартовой соотношениями $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, положение источника определяется координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

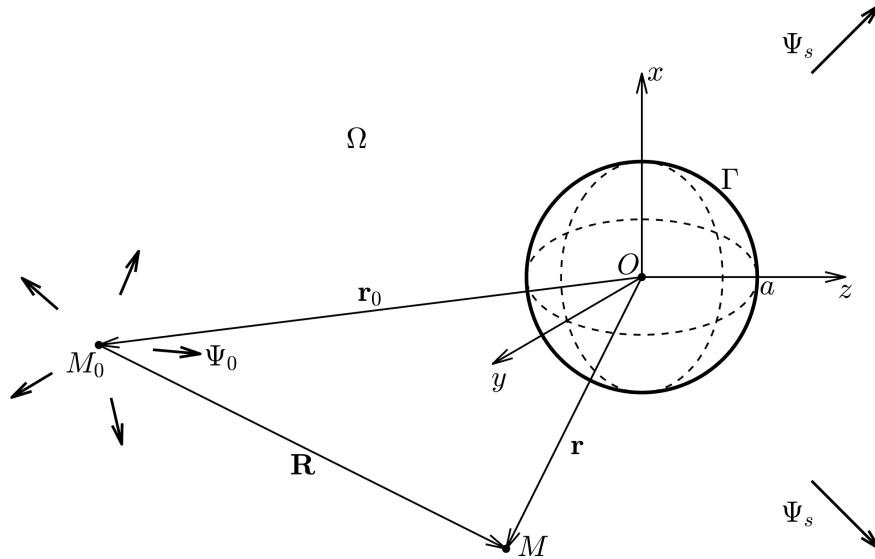


Рис. 1: Геометрия задачи

Потенциал скорости падающей волны запишется в виде

$$\Psi_0 = A \exp[i(kR - \omega t)]/R,$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число в окружающей жидкости; ω – круговая частота; λ – длина волны; t – время; R – длина вектора $\mathbf{R} = \overline{M_0M}$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0);$$

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения M ; $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки источника M_0 .

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное сферой.

Заметим, что расположение источника можно выбрать так, чтобы задача стала осесимметричной. Однако рассмотрим общий случай произвольного расположения источника, который возникает, например, при рассмотрении рассеяния сферической волны на двух и более телах или в присутствии границ раздела сред.

4. Решение задачи методом интегральных уравнений

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [5]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$ – потенциал скорости полного акустического поля; Ψ_s – потенциал скорости рассеянной волны;

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

– оператор Лапласа в сферической системе координат.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho\omega\Psi.$$

Граничные условия на поверхности Γ сферы заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости $v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего граничному условию (2) и условиям излучения на бесконечности [5].

Согласно методу интегральных уравнений [4] рассеянное телом поле записывается в виде

$$\Psi_s(M) = \int_S \left[\Psi_s(Q) \frac{\partial G(M; Q)}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial \Psi_s(Q)}{\partial \mathbf{n}_1} G(M; Q) \right] dS_1, \quad (3)$$

где M – точка наблюдения, имеющая сферические координаты (r, θ, φ) ; Q – точка на поверхности тела S с координатами (a, θ_1, φ_1) ; G – функция Грина для свободного пространства, удовлетворяющая неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) + k^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1);$$

$\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор точки Q ; $dS_1 = a^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ – элемент поверхности. Индекс 1 в формуле (3) означает, что дифференцирование и интегрирование производится по отношению к переменной r_1 .

В трехмерном случае функция Грина выбирается в виде потенциала точечного источника

$$G(M; Q) = \exp(ikR_1)/R_1,$$

где R_1 – расстояние между точками M и Q ;

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma_1}, \quad \cos \gamma_1 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Для определения рассеянного телом поля $\Psi_s(M)$ необходимо сначала найти поле на поверхности тела $\Psi_s(Q)$. Устремляя точку M на поверхность тела, из (3) получаем [4]

$$\frac{1}{2} \Psi_s(\mathbf{r}_2) = \int_S \left[\Psi_s(\mathbf{r}_1) \frac{\partial G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial \Psi_s(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_1} G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) \right] dS_1, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор точки на поверхности тела.

Из граничного условия (2) имеем

$$\left. \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

Тогда интегральное уравнение (4) принимает вид

$$\Psi_s(\mathbf{r}_2) + \int_S \Psi_s(\mathbf{r}_1) K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) dS_1 = f(\mathbf{r}_2), \quad (5)$$

где

$$K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = -2 \frac{\partial G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}}; \quad f(\mathbf{r}_2) = -2 \int_S \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) dS_1.$$

Запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода (5) с ядром $K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)$ и правой частью $f(\mathbf{r}_2)$ в сферической системе координат. Будем иметь

$$\Psi_s(\theta_2, \varphi_2) + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_s(\theta_1, \varphi_1) K(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) a^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 = f(\theta_2, \varphi_2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} K(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) &= -2 \left. \frac{\partial G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_2=a}; \\ f(\theta_2, \varphi_2) &= -2a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1) \right]_{r_1=r_2=a} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1; \\ G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)|_{r_1=r_2=a} &= \left. \frac{\exp(ikR_1)}{R_1} \right|_{r=a, \theta=\theta_2, \varphi=\varphi_2}; \\ \left. \frac{\partial G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_2=a} &= \left[\frac{ikR-1}{R^3} \exp(ikr)(r-r_1 \cos \gamma_1) \right]_{r=a, \theta=\theta_2, \varphi=\varphi_2}; \\ \left. \frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=a} &= \left[A \frac{ikR-1}{R^3} \exp(ikr)(r-r_0 \cos \gamma) \right]_{r=a, \theta=\theta_1, \varphi=\varphi_1}. \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие в левой и правой частях уравнения (6) следует понимать в смысле главного значения.

Таким образом, для решение поставленной задачи осуществляется в два этапа. Сначала решается интегральное уравнение (6) и находится функция Ψ_s на поверхности тела $r = a$. Затем по формуле (3) вычисляется рассеянное акустическое поле в пространстве.

Формула (3) в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_s(r, \theta, \varphi) &= a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\Psi_s(a, \theta_1, \varphi_1) \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) \right]_{r_1=a} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля, полагая $kr \gg 1$. Тогда

$$G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)|_{r_1=a} = \frac{\exp(ikR_1)}{R_1} \approx \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad \theta \left. \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=a} \approx ik \frac{\exp(ikr)}{r}.$$

В результате из (7) получим следующее выражение для потенциала рассеянной волны

$$\Psi_s = \frac{a}{2r} \exp(ikr) F(\theta, \varphi), \quad (8)$$

где

$$F(\theta, \varphi) = 2a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ik \Psi_s(a, \theta_1, \varphi_1) + \frac{\partial \Psi_0(a, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right] \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (9)$$

5. Дискретизация интегрального уравнения

Для численного решения интегрального уравнения (6) проведем его дискретизацию, воспользовавшись методом ячеек [6].

Разобьем поверхность сферы на ячейки, образованные пересечением меридианов $\theta = \theta_q$ ($q = 1, 2, \dots, N$) и параллелей $\varphi = \varphi_l$ ($l = 1, 2, \dots, L$) с шагами $h_\theta = \frac{\pi}{N}$ и $h_\varphi = \frac{2\pi}{L}$ соответственно. Всего будем иметь $N \times L$ ячеек. Площадь каждой ячейки (q, l) равна

$$S_{ql} = a^2 \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L).$$

Согласно методу ячеек

$$a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \approx \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L f(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) S_{ql}, \quad (10)$$

где $(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)$ – координаты центра ячейки (q, l); $\bar{\theta}_q = (\theta_q + \theta_{q+1})/2$; $\bar{\varphi}_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1})/2$. Таким образом, квадратурная формула (10) будет содержать $N \times L$ узлов.

Введем следующие обозначения:

$$p_{ql} = \Psi_s(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l), \theta K_{ijql} = K(\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j; \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l), \theta f_{ij} = f(\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j).$$

Тогда на основании формулы (10) запишем дискретный аналог интегрального уравнения (6)

$$p_{ij} + \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \alpha_{ijql} p_{kl} = f_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, L), \quad (11)$$

где

$$\alpha_{ijql} = K_{ijql} S_{ql}; \theta f_{ij} = -2 \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \frac{\partial \Psi_0(a, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} G(a, \bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j; a, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) S_{ql}.$$

Система (11) есть система $N \times L$ линейных алгебраических уравнений с $N \times L$ неизвестными p_{ql} ($q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L$).

При численной реализации в точках сингулярности ($\theta_1 = \theta_2, \varphi_1 = \varphi_2$) значения функций $g_1(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = G(a, \theta_2, \varphi_2; a, \theta_1, \varphi_1)$ и $g_2(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = \frac{\partial G(a, \theta_2, \varphi_2; a, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1}$ принимались равными среднему

$$g_j(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g_j(\theta_1 + \varepsilon, \varphi_1 + \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 - \varepsilon, \varphi_1 - \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 + \varepsilon, \varphi_1 - \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 - \varepsilon, \varphi_1 + \varepsilon; \theta_1, \varphi_1)] \quad (j = 1, 2),$$

что, по существу, позволяет выделить главные значения интегралов, присутствующих в (6).

После нахождения из системы (11) величин p_{ql} ($q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L$) для определения рассеянного акустического поля в произвольной точке пространства и в дальней зоне поля из формул (7) и (9) получаем

$$\Psi_s(r, \theta, \varphi) = \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \left[p_{ql} \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} G(r, \theta, \varphi; r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) \right]_{r_1=a} S_{ql}, \quad (12)$$

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{a} \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \left[ik p_{ql} + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} \right]_{r_1=a} S_{ql}. \quad (13)$$

6. Построение теоретико-числовой сетки

Практика показывает, что для обеспечения достаточной для практического применения точности вычисления интегралов, входящих в выражения (6), (7), (9), (10), методом ячеек требуется вычисления подынтегральных функций в десятках тысяч точек. Поэтому актуальной является задача выбора эффективного метода приближенного вычисления интегралов такого вида.

Для решения этой задачи перспективными представляются использование теоретико-числовых сеток, в частности в этой работе остановимся на двумерных сетках Смоляка, как наиболее простых для реализации. Квадратурная формула по этим сеткам для функций из класса $E_2^\alpha(C)$ на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \frac{1}{2^q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu}, \frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right) - \\ &- \frac{1}{2^{q-1}} \sum_{\nu=1}^{q-2} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu}, \frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right) - R_{N^{(1)}(q)}[f], \end{aligned} \quad (14)$$

где q – параметр сетки, натуральное число большее двух; $N^{(1)}(q)$ – количество точек сетки Смоляка с учетом их кратности.

При этом для остаточного члена в (14) справедлива оценка

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\|_{E_2^\alpha} \leq \frac{4\zeta(\alpha)2^{2\alpha}q}{2^{q\alpha}} = O\left(\frac{\ln^{\alpha+1} N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^\alpha}\right).$$

В работе [17] показано, что просуммировав веса в (14) и используя каноническое представление двумерных сеток Смоляка без повторяющихся узлов, можно сократить количество узлов квадратурной формулы в 4 раза.

Интегралы из выражений (6), (7), (9), (10) вычисляются по поверхности сферы и имеют вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (15)$$

где функция $F(\theta, \varphi)$ периодическая по θ с периодом 2π , и не периодическая по φ .

Рассмотрим функцию

$$F_1(\theta, \varphi) = \begin{cases} F(\theta, \varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ F(\theta, 2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}, \quad F(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(F_1(\theta, \varphi) + F_1(\theta, 2\pi - \varphi)). \quad (16)$$

Функция $F_1(\theta, \varphi)$ решает задачу простейшей периодизации. Вопросы периодизации функций подробно рассмотрены в монографии Н. М. Коробова [18]. В отличие от изложенных в монографии способов простейшей периодизации (16), позволяет решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода путем сведения к системе линейных уравнений без дополнительных конструкций.

Путем введения новых переменных

$$x_1 = \frac{\theta}{2\pi}, \quad x_2 = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (17)$$

интеграл типа (15) приводится к форме интеграла, стоящего в левой части (14). Действительно из (17) следует, что $d\theta = 2\pi dx_1$, $d\varphi = 2\pi dx_2$. Тогда интеграл (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \varphi) d\theta d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 F_1(2\pi x_1, 2\pi x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $f(x_1, x_2) = 2\pi^2 F_1(2\pi x_1, 2\pi x_2)$.

Заметим, что решение интегрального уравнения при фиксированном r дает нам приближенное значение функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ и ее производной по нормали к поверхности тела $\frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}$. При построение интерполяционного многочлена по тригонометрической системе базисных функций описанных в статье [17] получаем конечный ряд Фурье по сеткам Смоляка, который решает задачу аппроксимации функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ и ее производной по нормали $\frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}$.

Отметим также, что при решении задачи квадратурные формулы по сеткам Смоляка (14) можно заменить квадратурными формулами по параллелепипедальным сеткам (см. [18]):

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{ak}{N}\right\}\right) + R_N(f), \quad (19)$$

где a — оптимальный коэффициент, N — количество узлов параллелепипедальной сетки. Наиболее хорошие сетки получаются, если a равно $n-1$ числу Фибоначчи, а N равно n числу Фибоначчи. Использование базисных тригонометрических функций из работы [19] позволяет построить многочлен решающий задачу Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетке для исходной задачи.

7. Нахождение точного решения задачи

Для сравнения точности решений интегральных уравнений, полученных с помощью классических квадратурных формул и с использованием теоретико-числовых сеток воспользуемся строгим решением задачи.

Для получения точного аналитического решения осуществим разложение сферической волны по сферическим волновым функциям [7]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= Aik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \\ &\quad \times \begin{cases} j_n(kr) h_n(kr_0), & \theta r_0 > r, \\ j_n(kr_0) h_n(kr), & \theta r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n ; $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода степени n порядка m ; δ_{0m} — символ Кронекера.

Учитывая условия излучения на бесконечности [5], функцию Ψ_s будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (21)$$

Подставляя разложения (20) и (21) в граничное условие (2), находим коэффициенты A_{nm}

$$A_{nm} = -ik(2 - \delta_{0m})(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} h_n(kr_0) P_n^m(\cos \theta_0) \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}. \quad (22)$$

Для нахождения функции Ψ_s на поверхности тела Γ следует в (20) положить $r = a$

Дальнее поле рассеяния определяется по формуле (8), в которой выражение для $F(\theta, \varphi)$ получим, воспользовавшись асимптотической формулой для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [7]

$$h_n(kr) \approx (-i)^{n+1} \frac{\exp(ikr)}{kr} \quad (kr \gg 1). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21), находим

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-i)^{n+1} A_n P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (24)$$

8. Численные исследования

Исследуем распределение потенциала рассеянной волны на поверхности тела и в дальней зоне поля, и проведем сравнительный анализ $\Psi_s(a, \theta, \varphi)$ и $|F(\theta, \varphi)|$, найденных на основе решения интегральных уравнений с использованием двух видов сеток и точного решения.

Были проведены расчеты диаграмм направленности рассеянного поля на поверхности тела и в дальней зоне при волновых размерах тела ka , равных 1, 3 и 5. Полагалось, что радиус сферы $a = 1$; расстояние от источника $r_0/a = 20$; $\theta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$ – источник находится на отрицательной полуоси z .

На рис. 2-7 представлены результаты расчетов нормированного давления $p' = |p/(i\rho\omega\Psi_0(O))|$ на поверхности сферы и диаграмм рассеянного поля в дальней зоне $|F(\theta, \varphi)|$ в сечении $\varphi = 0, \pi$ для трех значений ka . Сплошной линией на графиках показаны зависимости для расстояния до источника $r_0/a = 20$. Штриховой линией для сравнения показаны зависимости для расстояния до источника $r_0/a = 100$, которые практически совпадают с решениями для случая плоской волны ($r_0 \rightarrow \infty$).

Значения, представленные на графиках, получены на основе решения интегральных уравнений с использованием двух видов сеток для случая, когда отличия p' и $|F(\theta)|$ от соответствующих значений в точном решении не превышают $\varepsilon_0 = 0.001$ по абсолютной величине.

На рис. 2 (как и на рис. 4, 6, также представляющих распределение p') пунктирной линией изображена окружность единичного радиуса, которая может трактоваться с одной стороны как сечение поверхности Γ , на которой рассчитывается p' , а с другой – как нормированное значение p_0 на этой поверхности, которое очень близко к единице.

Как видно, влияние сферичности фронта падающей волны (конечности расстояния до источника) в основном проявляется в диапазонах углов θ близких к 0 и π . Но если для распределения давления p' это влияние почти одинаково выражено в обоих этих диапазонах, то в диаграммах $|F(\theta)|$ влияние сферичности падающей волны наиболее выражено в теневой области (в окрестности $\theta = \pi$), а в диапазонах углов θ близких к 0 это влияние не превышает 1-2%.

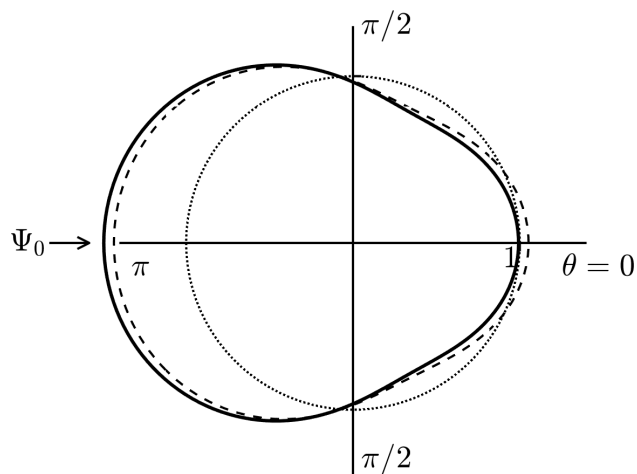


Рис. 2: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 1$

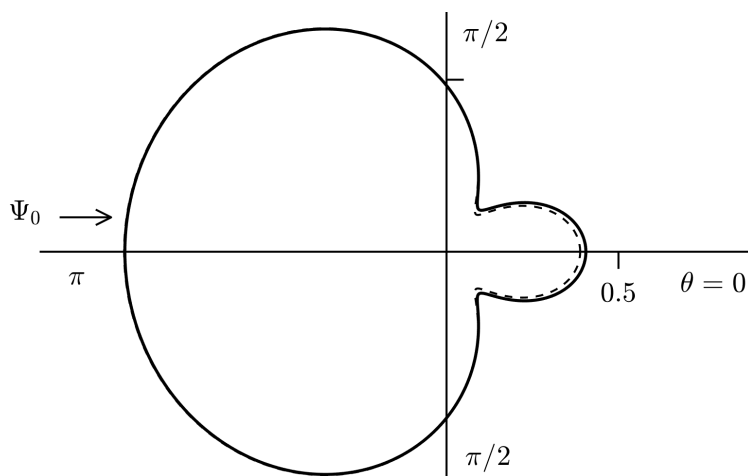


Рис. 3: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 1$

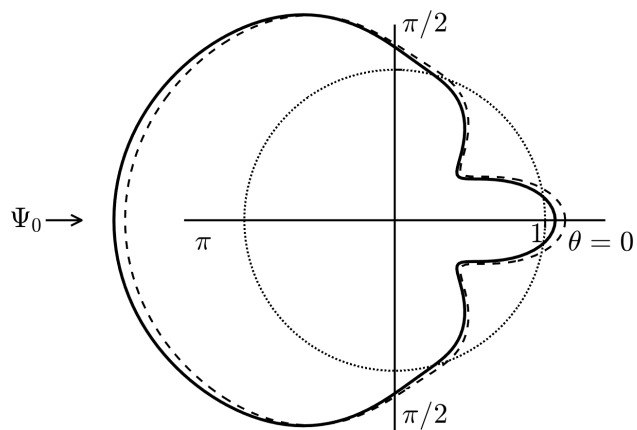
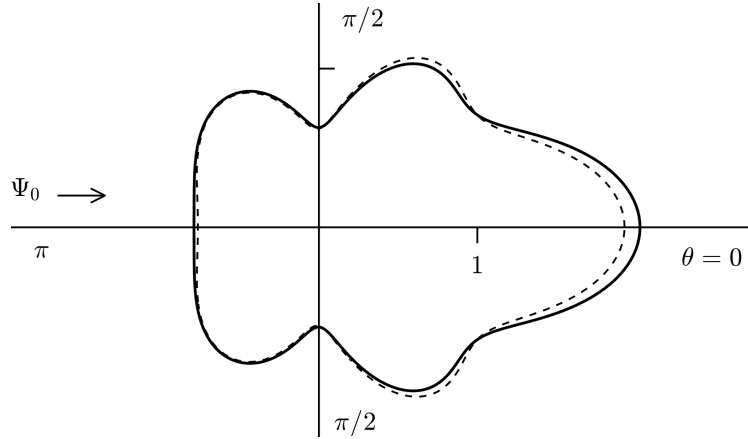
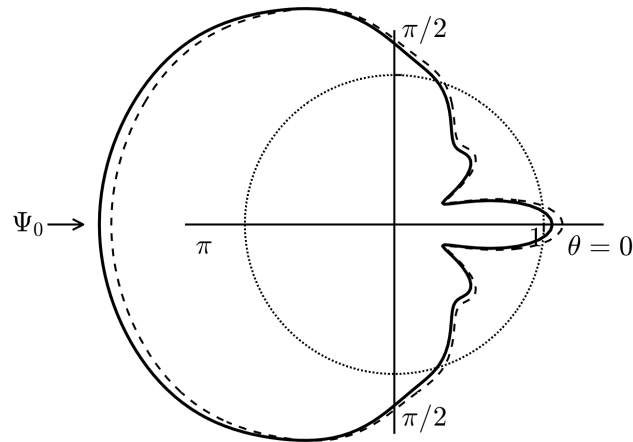
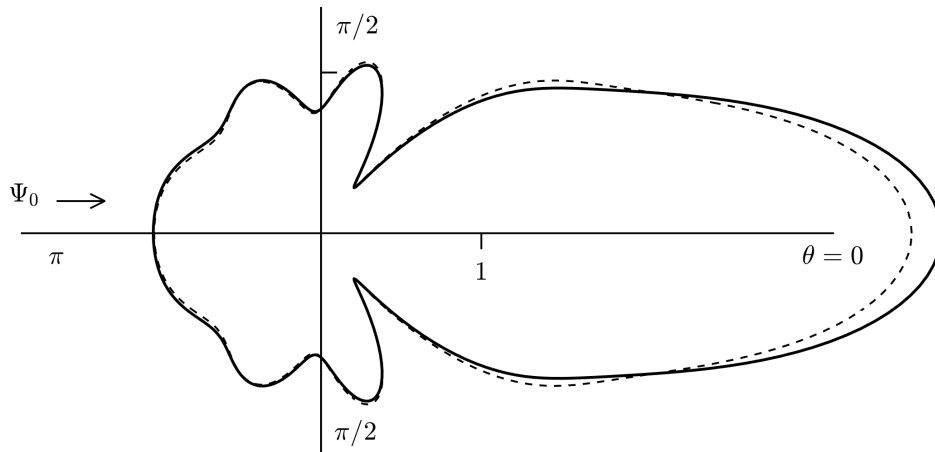


Рис. 4: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 3$

9. Заключение

Сравнение двух схем приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении не превышающей ε_0 по абсолютной величине при использовании

Рис. 5: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 3$ Рис. 6: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 5$ Рис. 7: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 5$

схемы вычисления интегралов на основе сеток Смоляка (по формулам (18), (14)) можно получить сокращение числа вычислений подинтегральной функции от 15% при $ka = 5$ до 20-25% при $ka = 1$.

В данной работе для двумерного случая приводится новый способ простейшей периодизации функций на квадрате, который легко переносится на s -мерный случай, в том числе и

для полностью непериодических функций. Дальнейшее развитие данного метода заключается в переносе на простейшие геометрические многомерные объекты, в том числе треугольники и тетраэдры, используемые в методе конечных элементов. Научный интерес вызывает получение точных оценок для проверки гипотезы о качестве нового типа параллелепипедальных сеток для непериодических функций на разных областях интегрирования.

В прикладном плане использование теоретико-числовых сеток может обеспечить повышение эффективности процедуры вычисления интегралов при решении задач дифракции (излучения) звуковых волн на основе представления акустического поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. M. Rao. An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
2. J. A. Fawcett. Scattering from a finite cylinder near an interface // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136, issue 2, pp. 485–493.
3. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz, B. Shanker. Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
4. Е. Л. Шендеров. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
5. Е. Л. Шендеров. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
6. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
7. Е. А. Иванов. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. - Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
8. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176
9. Н. М. Коробов. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961, т. 60, с. 195–210.
10. Ю. Н. Шахов. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Докл. АН СССР, 1961, т. 136, вып. 6, с. 1302–1305.
11. M. Z. Geçmen, E. Çelik. Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials. // Math Meth Appl Sci., 2021, т. 44, с. 11166–11173.
12. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al. Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces. // Adv Differ Equ, 2021, 358 (2021).
13. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
14. В. А. Быковский. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках. // Докл. АН СССР, 1988, 302:1, с. 11–13.

15. Y. Kolomoitsev, J. Prestin. Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators // *Journal of Approximation Theory*, 2021, т. 270, 105631.
16. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // *Mathematics*, 2021, т. 9, 1193.
17. Н. Н. Добровольский. Отклонение двумерных сеток Смоляка // *Чебышевский сборник*, 2007, т. 8, вып. 1, с. 110–152.
18. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
19. Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева, Н. В. Зайцева. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // *Чебышевский сборник*, 2004, т. 5. Вып. 1. с. 122–143.

REFERENCES

1. S. M. Rao, 2011, “An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
2. J. A. Fawcett, 2014, “Scattering from a finite cylinder near an interface”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 136, issue 2, pp. 485–493.
3. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz and B. Shanker, 2020, “Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
4. E. L. Shenderov, 1989, *Sound emission and scattering*, [Izluchenie i rasseianie zvuka], Leningrad, Shipbuilding.
5. E. L. Shenderov, 1972, *Wave problems of hydroacoustics*, [Volnovye zadachi gidroakustiki], Leningrad, Shipbuilding.
6. N. N. Kalitkin, 1978, *Numerical methods* [CHislennyye metody], Moscow, Nauka.
7. E. A. Ivanov, 1968, *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*, [Difrakciya elektromagnitnyh voln na dvuh telah], Minsk: Science and Technology.
8. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, “On classical number-theoretic nets”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
9. N. M. Korobov, 1961, “Application of number-theoretical sieves to integral equations and interpolation formulas”, *Collection of articles. To the 60th anniversary of academician Mikhail Alekseevich Lavrent'ev*, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 60, pp. 195–210.
10. Yu. N. Shakhov, 1961, “The approximate solution of Volterra equations of the second kind by the method of iterations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 136, issue 6, pp. 1302–1305.
11. M. Z. Geçmen, E. Çelik, 2021, “Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials”, *Math Meth Appl Sci.*, vol. 44, pp. 11166–11173.
12. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al., 2021, “Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces”, *Adv Differ Equ*, 358 (2021).

13. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, 9, 1193.
14. V. A. Bykovskii, 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integral lattices”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 302:1, pp. 11–13.
15. Yu. Kolomoitsev, J. Prestin, 2021, “Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 270, 105631.
16. P. Dencker, W. Erb, Yu. Kolomoitsev, T. Lomako, 2017, “Lebesgue constants for polyhedral sets and polynomial interpolation on Lissajous–Chebyshev nodes”, *Journal of Complexity*, vol. 43, pp. 1–27.
17. N. N. Dobrovol’skii, 2007, “Discrepancy of two-dimensional Smolyak grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol 8, no 1, pp. 110–152
18. N. M. Korobov, 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennoi analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]*, 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
19. N. M. Dobrovol’skii, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation” [Mnogomernaya teoretiko-chislovaya Fur’e interpoliatsiya], *Chebyshevskii sbornik*, vol 5, no 1, pp. 122–143

Получено 04.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-383-404

**От алгебраических методов Диофанта — Ферма — Эйлера
к арифметике алгебраических кривых:
из истории диофантовых уравнений после Эйлера**

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев

Лавриненко Татьяна Алексеевна — кандидат физико-математических наук, Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова (г. Москва).

e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru

Беляев Алексей Александрович — кандидат физико-математических наук, Российский университет дружбы народов (г. Москва).

e-mail: belyaev-aa@rudn.ru

Аннотация

Если говорить об истории той части диофантова анализа, в которой рассматривается решение диофантовых уравнений в рациональных числах, то прежде всего нужно отметить устойчивость алгебраического подхода к этой проблеме, восходящего к «Арифметике» Диофанта Александрийского. Действительно, после знакомства европейских математиков во второй половине XVI века с произведением Диофанта основным средством нахождения рациональных решений диофантовых уравнений становится алгебраический аппарат замен, подстановок и преобразований. Несмотря на ограниченность этих средств, математикам удалось на данном этапе получить важные результаты о решении в рациональных числах неопределенных уравнений с двумя неизвестными 2-й, 3-й и 4-й степеней. Детальный историко-математический анализ этих результатов дан, в частности, в исследованиях И. Г. Башмаковой и её учеников. В статье рассматривается, как в течение XIX века происходил отход от узко алгебраической трактовки диофантовых уравнений, характерной для большинства работ вплоть до конца XIX века, к более общему взгляду на предмет исследования и принципиальному расширению самих средств исследования диофантовых уравнений. Рассматриваются шаги в этом направлении, сделанные такими математиками, как О. Л. Коши, К. Г. Я. Якоби, Э. Люка. Особое внимание уделяется творчеству Дж. Дж. Сильвестра в области диофантовых уравнений и статье У. Стори «On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve», долгое время не попадавшим в поле зрения историков математики.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, арифметика алгебраических кривых, рациональные точки, эллиптическая кривая, Дж. Дж. Сильвестр, У. Э. Стори.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев. От алгебраических методов Диофанта — Ферма — Эйлера к арифметике алгебраических кривых: из истории диофантовых уравнений после Эйлера // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 383–404.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-383-404

**From the algebraic methods of Diophantus–Fermats–Euler
to the arithmetic of algebraic curves:
about the history of diophantine equations after Euler**

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев

Lavrinenko Tatiana Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, Plekhanov Russian University of Economics (Moscow).

e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru

Belyaev Aleksei Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Peoples' Friendship University of Russia (Moscow).

e-mail: belyaev-aa@rudn.ru

Abstract

Talking about the Diophantine analysis' history, namely, the problem of rational solutions of Diophantine equations, we should note the longevity of the algebraic approach, which goes back to Diophantus' "Arithmetica". Indeed, after the European mathematicians of the second half of the XVI century became acquainted with Diophantus' oeuvre, algebraic apparatus of variable changes, substitutions and transformations turned into the main tool of finding rational solutions of Diophantine equations. Despite the limitations of this apparatus, there were obtained important results on rational solutions of quadratic, cubic and quartic indeterminate equations in two unknowns. Detailed historico-mathematical analysis of these results was done, inter alia, by I. G. Bashmakova and her pupils. The paper examines the departure from this algebraic treatment of Diophantine equations, typical for most of the research up to the end of XIX century, towards a more general viewpoint on this subject, characterized also by radical expansion of the tools used in the Diophantine equations' investigations. The works of A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi and É. Lucas, where this more general approach was developed, are analyzed. Special attention is paid to the works of J. J. Sylvester on Diophantine equations and the paper "On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve" by W. Story, which were not in the focus of the research on history of the Diophantine analysis and where apparatus of algebraic curves was used in a pioneering way.

Keywords: Diophantine equations, arithmetic of algebraic curves, rational points, elliptic curve, J. J. Sylvester, W. E. Story.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

T. A. Lavrinenko, A. A. Belyaev, 2021, "From the algebraic methods of Diophantus–Fermat–Euler to the arithmetic of algebraic curves: about the history of diophantine equations after Euler", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 383–404.

Памяти Изабеллы Григорьевны Башмаковой (1921–2005)

1. Введение

Арифметика алгебраических кривых в настоящее время – это интенсивно развивающаяся область современной математики, требующая для своего изучения целого арсенала понятий и методов и содержащая выдающиеся результаты, получение которых относится к весьма ярким событиям математики XX века. В то же время основная задача арифметики алгебраических кривых в её классической постановке звучит обманчиво просто: она состоит в нахождении целочисленных или рациональных решений полиномиальных уравнений с несколькими неизвестными, если коэффициенты этих уравнений – целые (или рациональные) числа. В более общей постановке рассматривается система полиномиальных уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

с коэффициентами из некоторого поля K и ставится проблема отыскания множества $X(K)$ всех решений $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ этой системы и определения его алгебраической структуры. Наряду с этой проблемой рассматривается также задача нахождения множества $X(Z_K)$ всех решений $(x_1, \dots, x_n) \in Z_K^n$, где Z_K – кольцо целых чисел поля K . Если в качестве K взять поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то получим классическую постановку задачи о решении диофантовых, или неопределенных, уравнений в рациональных и, соответственно, в целых числах.

История диофантова анализа берет начало в глубокой древности: отдельные неопределенные уравнения были известны ещё в Древнем Вавилоне, систематическое же изучение таких уравнений начинается, по всей видимости, с “Арифметики” Диофанта Александрийского (предположительно III в.), содержавшей решения большого числа задач, приводящих к неопределенным уравнениям. После знакомства с “Арифметикой” европейских математиков во второй половине XVI в. подход Диофанта на долгое время становится определяющим при исследовании рациональных решений диофантовых уравнений. Вершиной его виртуозного применения является творчество Л. Эйлера (1707–1783).

Отметим, что вопрос о целочисленных решениях диофантовых уравнений требует развития иных методов и подходов к его исследованию, нежели вопрос о рациональных решениях этих уравнений. И на протяжении всей истории диофантова анализа мы наблюдаем две линии развития, связанные с изучением каждой из этих проблем. Причем если в первом случае исследования основывались в основном на рассуждениях теоретико-числового характера, то для отыскания рациональных решений неопределенных уравнений, вплоть до конца XVIII в., использовались, как правило, соображения алгебраического характера (при исследовании отдельных уравнений и в этом случае могли встречаться теоретико-числовые рассуждения). Однако после выхода в свет в 1901 г. программного мемуара А. Пуанкаре “*Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*” [1] проблема решения неопределенных уравнений в рациональных числах начинает трактоваться в рамках алгебраической геометрии. Эта новая точка зрения на предмет, когда исходная задача формулируется как задача изучения множества рациональных точек на алгебраических кривых, а для её исследования привлекаются понятия и методы развитой теории, дала мощный толчок для дальнейшего развития диофантова анализа.

В данной статье мы хотим проследить, как ещё до появления мемуара А. Пуанкаре происходил отход от чисто алгебраической трактовки проблемы решения неопределенных уравнений в рациональных числах, и отметить некоторые узловые моменты в истории этой проблемы, связанные с расширением средств её исследования в XIX веке и изменением точки зрения на сам предмет исследования. В дальнейшем на протяжении всей статьи, говоря о решении диофантовых уравнений, мы будем иметь в виду решение этих уравнений именно в рациональных числах, не оговаривая этого каждый раз специально.

Исторически первыми общими результатами относительно решения в рациональных чис-

лах неопределенного уравнения

$$f_n(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $f_n(x, y)$ - многочлен степени n от двух переменных x, y с рациональными коэффициентами, были результаты о нахождении рациональных решений уравнения (1) при $n = 2, 3, 4$. Очевидно, вопрос о рациональных решениях неопределенного уравнения (1) можно сформулировать как вопрос о рациональных точках плоской алгебраической кривой, задаваемой уравнением (1) в декартовых координатах x, y . Как сейчас известно, решение этого вопроса зависит от того, какой род имеет кривая (1). В случае рода 0 по одной известной неособой рациональной точке кривой (1) можно найти выражения для координат всех ее неособых рациональных точек в виде рациональных функций одного параметра. Для кривых рода 1, или эллиптических, этого сделать нельзя. В этом случае, если эллиптическая кривая обладает хотя бы одной рациональной точкой, задачу нахождения её рациональных точек можно свести к аналогичной задаче для эллиптической кривой 3-го порядка. Для нахождения же рациональных точек на эллиптической кривой 3-го порядка применяют методы “касательной” и “секущей”, позволяющие находить по одной или двум известным рациональным точкам только ещё одну новую рациональную точку кривой. Эти методы можно неограниченно итерировать, используя в них новые найденные точки и таким образом получая на каждом шаге применения одного из этих методов, вообще говоря, еще одну рациональную точку кривой. Методы касательной и секущей лежат в основе определения операции сложения рациональных точек кубической кривой рода 1, относительно которой множество $X(\mathbb{Q})$ всех рациональных точек этой кривой образует абелеву группу. В XX веке были получены важные результаты о строении этой группы. Что касается кривых рода больше 1, то только в 1983 году немецким математиком Фалтингсом была доказана гипотеза Морделла о том, что на такой кривой может быть не более конечного числа рациональных точек.

2. Диофантов анализ эйлеровского времени

Связь между свойствами диофантова уравнения и родом задаваемой им кривой была отчётливо осознана только после упомянутого выше исследования Пуанкаре 1901 года. До этого же известные методы решения диофантовых уравнений вида (1) классифицировались по степени этого уравнения. В конце XVIII века в арсенале диофантова анализа были восходящие к Диофанту метод нахождения всех рациональных решений неопределенного уравнения 2-ой степени по одному известному рациональному решению, а также методы нахождения нового рационального решения по одному или двум известным рациональным решениям для неопределенных уравнений 3-ей степени вида

$$f_3(x) = y^2 \quad (2)$$

и

$$f_3(x) = y^3, \quad (3)$$

где $f_3(x)$ — многочлен 3-ей степени с рациональными коэффициентами, а также для неопределенного уравнения вида

$$f_4(x) = y^2, \quad (4)$$

где $f_4(x)$ — многочлен 4-ой степени с рациональными коэффициентами. Все эти результаты были получены алгебраическим путем, с использованием определенным образом подобранных замен и подстановок квадратичного или линейного вида.

Историко-математический анализ этих результатов, проведенный И. Г. Башмаковой и её учениками с использованием привычного теперь при изучении диофантовых уравнений геометрического языка, показал, что эти методы соответствуют применяемым и сейчас методам

нахождения рациональных точек на кривых рода 0 (для неопределенного уравнения 2-ой степени) и рода 1 (для неопределенного уравнения 3-ей степени). Уточним, что нахождение нового рационального решения уравнения (2) или (3) по известному рациональному решению с помощью линейной подстановки представляет собой алгебраический эквивалент “метода касательной”, а с помощью квадратичной подстановки – алгебраический эквивалент “метода парабол”¹. К Пьеру Ферма (1601–1665) восходит итерирование “метода касательной”, которое дает возможность последовательно находить одно за другим новые рациональные решения уравнения (2) или (3), принадлежащие некоторой, вообще говоря бесконечной, последовательности рациональных решений соответствующего уравнения. Что же касается “метода секущей”, то он вплоть до Эйлера применялся только для уравнения (3) в одной особой ситуации, на которой мы здесь останавливаться не будем. И только Эйлер смог прийти алгебраическим путем к способу отыскания нового рационального решения неопределенного уравнения 3-ей степени по двум его известным рациональным решениям – способу, который представлял собой алгебраический эквивалент “метода секущей”. Детальное изложение этих вопросов и соответствующая библиография содержатся в монографии И. Г. Башмаковой и Е. И. Славутина [2], творчество Л. Эйлера в области диофантова анализа рассматривается в работах [3] – [6].

Здесь отметим только, что Эйлеру удалось получить “метод секущей” для нахождения нового рационального решения уравнения (2) или (3) по двум известным рациональным решениям даже несколькими алгебраическими путями (см. [6])! Идея использования двух известных рациональных решений для получения нового рационального решения неопределенного уравнения 3-ей степени впервые была высказана в печати в сочинении “Vollständige Anleitung zur Algebra” [7] (далее в тексте – просто “Алгебра”) при рассмотрении конкретного уравнения $4 + x^2 = y^3$. На этом примере Эйлер и изложил свой метод. Хотя его образ действий был вполне общим, Эйлер не сформулировал его в общем виде для уравнения (3) и математики, по-видимому, не заметили, что в данном случае имеют дело с новым методом. Другой алгебраический способ, приводящий к “методу секущей” для уравнения (3), содержится в рукописях Эйлера [8, с. 112] и также изложен на примере. Формулы “метода секущей” для уравнения (2) были обнаружены в записных книжках Эйлера, опубликованных в наше время. Хотя вывода этих формул в записных книжках нет, но форма представления результатов позволила дать реконструкцию метода, основанную на типичных для Эйлера рассуждениях (см. [9]). Наконец, в цикле работ, представленных в Петербургскую Академию наук в 1780 году, но опубликованных только в 1830 году, была разработана бесконечная процедура последовательного нахождения рациональных решений уравнения (2) по одному или двум его известным рациональным решениям (см. об этом [10]). Фактически в рамках этой алгебраической процедуры для нахождения новых рациональных точек используется и “метод секущей” для уравнения (2), и итерирование “метода секущей”. Кроме того, в различных вариантах метода Эйлера используются “метод касательной” и “метод парабол”. Однако “метод секущей” возникает в этих исследованиях Эйлера как один шаг некоторой бесконечной алгебраической процедуры и в отдельный метод не выделяется, его геометрический смысл в результате оказывается полностью скрытым.

3. Исследование проблемы решения диофантовых уравнений в рациональных числах после Эйлера

а) 1777 год, Ж. Л. Лагранж. “Метод касательной” для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными.

¹Заметим, что “метод парабол” не имеет самостоятельного значения, поскольку решения, получаемые этим методом, могут быть получены в результате применения определенной комбинации методов касательной и секущей.

В методах Диофанта — Ферма — Эйлера для нахождения рационального решения уравнения (2) или (3) использовались линейные и квадратичные подстановки, подбираемые по виду этого уравнения. Так, “метод касательной” для уравнения (2) и для уравнения (3) рассматривался как два разных приема, поскольку предназначался для уравнений разных видов, хотя общность рассуждений в обоих случаях очевидна. Эта общность рассуждений стала особенно наглядной после систематического изложения методов Диофанта–Ферма в “Алгебре” Эйлера [7], где была четко выявлена их суть с алгебраической точки зрения. И уже через 7 лет после появления “Алгебры” Лагранж (1736–1813) в работе “Sur quelques problèmes de l’analyse de Diophante” [11] излагает метод нахождения нового рационального решения по одному известному рациональному решению для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными

$$f_3(x, y) \equiv a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = 0. \quad (5)$$

В своем исследовании Лагранж основывался на тех же самых алгебраических соображениях, которые применялись и для уравнений (2) и (3), и весь стиль его рассуждений был алгебраическим. В результате в диофантов анализ был введен “метод касательной” для общего уравнения (5) в чисто алгебраическом выражении, без апелляции к его геометрическому смыслу (подробнее об этом см. [12]). Помимо алгебраических средств в работе использовались также частные производные многочлена $f_3(x, y)$ для записи многочлена $f_3(p + t, q + u)$ по степеням переменных t и u (здесь p и q – известные числа). При этом Лагранж отмечает, что получить такое представление многочлена можно и непосредственно с помощью алгебраических выкладок, но “с помощью дифференциального метода” это сделать легче. Кстати, именно использование частных производных многочлена $f_3(x, y)$ в изложении метода Лагранжа существенно облегчает его геометрическую интерпретацию.

Если по средствам исследования работу Лагранжа можно отнести к тому же этапу развития диофантова анализа, к которому мы относим результаты Ферма и Эйлера, то по общности постановки задачи эта работа знаменует переход к следующему этапу, на котором неопределенные уравнения начинают трактоваться с гораздо более общих позиций, чем в эпоху Эйлера.

6) 1826 год, О. Л. Коши. Работа “Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers”.

Заметим вначале, что от задачи решения уравнения (1) в рациональных числах можно перейти к эквивалентной ей задаче решения в целых числах однородного диофантова уравнения вида

$$F_n(u, v, w) = 0, \quad (6)$$

где $F_n(u, v, w)$ – однородный многочлен степени n от переменных u, v, w с рациональными коэффициентами. Без ограничения общности можно считать коэффициенты в (6) целыми. На геометрическом языке такой переход соответствует переходу от рассмотрения кривой (1) в декартовых координатах x, y к рассмотрению этой кривой на проективной плоскости с однородными координатами u, v, w . Такое рассмотрение позволяет исследовать свойства кривых с более общих позиций.

По-видимому, первая попытка построения общей теории однородных неопределенных уравнений принадлежит О. Л. Коши (1789–1857), который посвятил данному вопросу свою большую работу “Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers” [13] (“О решении некоторых неопределенных уравнений в целых числах”). Работа [13] состоит из пяти параграфов, в первом из которых рассматривается тривиальный случай однородного уравнения n -ой степени с двумя неизвестными, а остальные параграфы посвящены изучению однородных уравнений общего вида (6) с тремя неизвестными при $n = 1, 2, 3$. Оставаясь в целом в рамках алгебраического подхода к исследованию уравнения (6), Коши стремится

провести это исследование с общих позиций: изложив в третьем параграфе некие общие соображения об отыскании целочисленных решений уравнения (6), если известно одно такое решение, для произвольного n , он применяет их в следующем параграфе для случая $n = 2$. Коши пишет, что “хотя проблема, которая будет предметом обсуждения этого параграфа, может быть сведена к известному вопросу о решении в рациональных числах неопределенного уравнения 2-ой степени с двумя неизвестными, нам кажется удобным показать, каким образом вышеприведенный метод применяется к этой проблеме”. В последнем параграфе своей работы Коши с единых позиций приходит к методам нахождения нового целочисленного решения по одному и, соответственно, по двум известным целочисленным решениям для неопределенного уравнения (6) 3-ей степени. Изучая уравнение (6) при $n = 2$ и при $n = 3$, он помимо алгебраических средств использует только, как и Лагранж, при преобразовании многочлена в результате подстановок частные производные этого многочлена.

Современный читатель работы Коши при внимательном чтении без труда увидит, что методы Коши для неопределенного однородного уравнения 3-ей степени представляют собой сформулированные чисто аналитически методы касательной и секущей для кривой 3-го порядка. Для этого достаточно заметить, что однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными и подстановки, осуществляемые Коши в этом уравнении, задают на проективной плоскости соответственно кривую 3-го порядка и прямые – в одном случае касательную, проведенную к кривой в её известной рациональной точке, в другом случае прямую, проходящую через две известные рациональные точки кривой (см. [12]). Однако в самой работе такой геометрической интерпретации методов нет: следует учесть, что общие однородные проективные координаты были введены Плюккером в его “Аналитико-геометрических исследованиях” (1828 г., 1831 г.) позже и только после этого стало возможным рассматривать алгебраические кривые на проективной плоскости. Первое классическое изложение такой теории было дано Плюккером в 1839 году в его “Теории алгебраических кривых”.

Таким образом, Коши, ограничиваясь в своей работе алгебраическими средствами исследования, поставил изучение проблемы о рациональных решениях диофантовых уравнений на принципиально иной уровень общности, чем это было до него. При этом метод секущей в его работе наконец-то “обрел равные права гражданства” с методом касательной. Результаты Коши “ждали”, когда будет развита теория алгебраических кривых на проективной плоскости, чтобы получить простую геометрическую интерпретацию.

в) 1835 год, К. Г. Якоби. Аналитическая трактовка проблемы решения неопределенных уравнений с помощью теорем сложения эллиптических и абелевых интегралов.

Как известно, для изучения множества всех рациональных точек плоской кривой рода 1, или эллиптической, оказывается чрезвычайно полезным аналитический аппарат теории алгебраических кривых, связанный с использованием теории эллиптических функций. Систематическое применение этого аппарата для исследования диофантовых уравнений началось с мемуара Пуанкаре 1901 года, в котором с его помощью были получены важные результаты о диофантовых уравнениях, задающих кривые рода 1. Сейчас использование этого аналитического аппарата при получении основных фактов о строении множества рациональных точек на эллиптических кривых является классическим.

Впервые идея о возможности такой аналитической трактовки задач диофантова анализа была высказана задолго до появления мемуара Пуанкаре, в 1835 году. В своей статье “De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysisi Diophantea” [14] К. Г. Я. Якоби (1804–1851) обращается к последней работе из упоминавшегося нами выше цикла поздних работ Эйлера, опубликованного в 1830 году. Он отмечает тесную аналогию между рассуждениями этой работы, приводящими Эйлера к бесконечной процедуре последовательного нахождения рациональных решений уравнения вида (4) по одному или двум его

известным рациональным решениям, и рассуждениями, с помощью которых Эйлер получает теорему сложения эллиптических интегралов. Установив связь между проблемой решения в рациональных числах уравнения (4)² и теоремой сложения эллиптических интегралов вида $\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$, Якоби дает описание алгебраической процедуры Эйлера для нахождения рациональных решений уравнения (4) на другом языке, аналитическом, с помощью теоремы сложения эллиптических интегралов. Он также использует теорему сложения абелевых интегралов для изучения диофантовых уравнений видов $f_5(x) = y^2$ и $f_6(x) = y^2$, задающих кривые рода 2. Детальный анализ результатов Якоби дан И. Г. Башмаковой [15].

Таким образом, благодаря статье Якоби открылся новый путь, приводящий к принципиальному расширению средств исследования неопределенных уравнений. Он был связан с аналитическим подходом к изучению неопределенных уравнений и характеризовался применением теории эллиптических интегралов и эллиптических функций. Но вплоть до 1880 года новых результатов в этом направлении, по-видимому, получено не было.

г) 1847–1858 годы. Статьи Дж. Дж. Сильвестра по неопределенным уравнениям.

По-видимому, вопрос о рациональных решениях диофантова уравнения впервые был сформулирован геометрически, как вопрос о рациональных точках на соответствующей алгебраической кривой, в XVII веке, великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643–1727). В его математических бумагах были обнаружены записи [16], в которых он рассматривает и метод нахождения всех рациональных точек кривой 2-го порядка по одной известной рациональной точке этой кривой, и формулирует “метод секущей” для кривой 3-го порядка. Он отмечает также, что с помощью метода секущей по трем известным рациональным точкам кубики, не лежащим на одной прямой, можно последовательно находить всё новые и новые рациональные точки кубики. Но эти изыскания Ньютона не увидели света при его жизни и были опубликованы только в наше время, в 1971 году, математикам же XVIII и XIX веков они были недоступны.

Как мы отметили выше, ни в работе Коши по диофантовым уравнениям 1826 года, ни в работе Якоби 1835 года нет даже упоминания о возможности геометрической трактовки диофантовых уравнений. Когда же геометрические представления стали проникать в диофантов анализ? Некоторый свет на этот вопрос проливает творчество Дж. Дж. Сильвестра (1814–1897) в данной области, на чем мы остановимся подробнее. Хотя исследование неопределенных уравнений не принадлежало к главным приоритетам математической деятельности Сильвестра, тем не менее именно он осуществил прорыв в их изучении. Результаты Сильвестра по неопределенным уравнениям нашли отражение в шести публикациях – это четыре небольшие статьи, опубликованные в журнале “Philosophical Magazine”, три из которых появились в 1847 году и одна – в 1858 году, краткая заметка 1856 года, опубликованная в “Annali di scienze matematiche e fisiche”, и, наконец, фундаментальная работа “On Certain Ternary Cubic-Form Equations”, напечатанная в нескольких номерах “American Journal of Mathematics” в 1879–80 годах. Во всех этих работах рассматривается однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными. И во всех них, кроме последней работы, не содержится доказательств.

Статьи [17] – [19], вышедшие в 1847 году и образующие единый цикл, и заметка [20] 1856 года все посвящены однородному уравнению 3-ей степени с тремя неизвестными вида

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz, \quad (7)$$

где A, B, C, D – целые, или его частным случаям. Не вдаваясь в подробности, скажем только, что в них: сформулированы некие теоремы относительно уравнения (7), из которых, по утверждению Сильвестра, можно получить в качестве следствий результаты о неразрешимости в

²Если кривая, задаваемая уравнением (4), не имеет конечных особых точек, то её род равен 1.

целых числах различных уравнений вида (7); приводится без доказательства ряд утверждений относительно неразрешимости в целых числах некоторых классов уравнений вида (7) и некоторых конкретных уравнений этого вида; описывается некая бесконечная процедура алгебраического характера для получения (всех, как утверждает Сильвестр) целочисленных решений уравнения

$$x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz \quad (8)$$

по одному известному целочисленному решению при определенных условиях на коэффициенты A и M . Во второй статье 1847 года Сильвестр пишет, что “доказательство всего, что здесь представлено, существует не только в виде замысла в голове автора, но и в достаточно протяженной записи, причем в виде, пригодном для публикации” [18, с. 296], а в следующей работе выражает надежду “представить в скором времени статью на эту тему в более полном виде”, но свои намерения он не осуществил.

Мы не будем останавливаться подробно на сформулированных без доказательства утверждениях, приведенных в этих работах. Отметим только важный для нашей темы момент. Все приведенные Сильвестром формулировки носят теоретико-числовой характер³. Но в последней статье 1847 года Сильвестр вводит в рассмотрение кривую 3-го порядка, задаваемую уравнением

$$Y^3 + X^3 + 1 = \frac{M}{A^{1/3}} XY, \quad (9)$$

в котором коэффициент при XY он называет характеристикой. Сопоставляя уравнению (8) кривую (9)⁴, он связывает вопрос о целочисленных решениях этого уравнения со свойствами кривой (9). А именно, говоря о различиях в трактовке диофантова уравнения (8) в случае, если $27A - M^3 > 0$, и в случае, если $27A - M^3 < 0$, он объясняет их разными свойствами кривой (9) в зависимости от значения характеристики: если характеристика меньше 3, что соответствует случаю $27A - M^3 > 0$, то кривая (9) “является непрерывной кривой, простирающейся в обе стороны до бесконечности”, а “как только характеристика становится равной 3, [она] включает в себя изолированную точку, зародыш овала или замкнутой ветви, который продолжает расширяться (всегда находясь обособленно от непрерывной ветви), если характеристика продолжает неограниченно возрастать (т.е. $27A - M^3 < 0$ – Т.Л.)” [19, с. 470]. Таким образом, уже к 1847 году относятся первые попытки связать свойства диофантова уравнения с геометрическими свойствами соответствующей ему кривой.

О попытках Сильвестра исследовать диофантовы уравнения с помощью геометрических средств свидетельствует и его письмо к А. Кэли (1821–1895) от 23.10.1856. Говоря о связи между решением в рациональных числах уравнений, задаваемых с помощью кубической формы от трех переменных и с помощью кубической формы от четырех переменных, Сильвестр высказывает следующую идею: “Если у нас есть кубическая поверхность, обладающая некоторой рациональной точкой, то тангенциализация дает бесконечно много рациональных кривых [подразумевается, что кубическая поверхность задается уравнением с рациональными коэффициентами; под рациональной кривой подразумевается кривая, задаваемая уравнением с рациональными коэффициентами – Т.Л.], и, таким образом, если я могу доказать, что из известного решения уравнения $x^3 + y^3 + Az^3 + Bt^3 = 0$ можно получить точку среди бесконечной последовательности таких рациональных кривых, у которой $t = 0$, я решу уравнение $x^3 + y^3 + Az^3 = 0$ ” [22, с. 93]. По-видимому, Сильвестру не удалось получить каких-либо

³Например, в [20] он утверждает, что уравнение (8) неразрешимо в целых числах при выполнении следующих трех условий: 1) число $M^3 - 27A$, представленное в виде $\Delta^3 \cdot \Delta'$, где Δ' не содержит кубических делителей, таково, что Δ' - четное и Δ' не содержит делителей вида $f^2 + 3g^2$; 2) A - простое; 3) $\sqrt{-M/A}$ не является целым.

⁴Уравнение (8) задает в декартовых координатах кривую $X_1^3 + Y_1^3 + A = MX_1Y_1$, которая с помощью преобразования $X_1 = A^{1/3}X$, $Y_1 = A^{1/3}Y$ переходит в кривую (9).

значительных результатов, исходя из высказанных соображений, во всяком случае, в опубликованных работах такие результаты отсутствуют. Но важно само намерение расширить средства исследования диофантовых уравнений с помощью геометрического подхода.

В работе Сильвестра 1858 года, называемой “Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree” [21], мы снова встречаем геометрический язык при рассмотрении неопределенных уравнений. В этой статье Сильвестр только сообщает, что получил некоторые результаты относительно общего однородного уравнения третьей степени

$$f_3(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

одно решение которого $x = a, y = b, z = c$ известно, и описывает эти результаты в общих чертах, не давая точных формулировок. Вначале условие целочисленности на коэффициенты уравнения (10) и на само решение (a, b, c) не накладывается. Сильвестр пишет, что обладает формулами, с помощью которых из известного решения (a, b, c) уравнения (10) могут быть “сформированы” новые решения путем последовательного получения из одного решения другого. Решения этой последовательности он называет “первой, или начальной, второй, третьей, и т.д. производными системами (derivative systems)” и приводит затем следующие два примера “производных систем”: 1) координаты точки пересечения касательной к кубической кривой в точке (a, b, c) и этой кривой; 2) координаты точки, в которой “коника, имеющая касание наибольшего порядка с кубической кривой”, пересекает эту кривую.

Обращаясь во второй части своей “Заметки...” к вопросу о “связи между этой теорией деривации и арифметикой уравнений третьей степени с тремя неизвестными с целыми коэффициентами”, Сильвестр вначале отмечает, что он установил существование большого класса уравнений, обладающих свойством, “что все их решения, если они существуют, являются monobasic; т.е. все их решения – известные функции одного из них”. Далее он пишет: “Если это решение представить как точку на кривой, соответствующей данной кубике, то все остальные возможные целочисленные решения будут представляться точками этой кривой, являющимися производными (derivatives) (в смысле, использованном выше в данной заметке) данной точки” [21, с. 118].

Итак, мы здесь опять сталкиваемся с геометрической интерпретацией решения неопределенного однородного уравнения 3-ей степени с тремя неизвестными в целых числах. Сильвестр также приводит и два геометрических способа нахождения нового целочисленного решения (10) по известному целочисленному решению: 1) с помощью проведения касательной к кривой (10), т.е. “метод касательной”; 2) с помощью проведения коники, касающейся (10), т.е. “метод конических сечений”, частным случаем которого является “метод парабол”.

Рассмотренные работы Сильвестра показывают, что уже к середине XIX века геометрические представления проникают в диофантов анализ. По-видимому, Сильвестр был одним из первых математиков, кто рассматривал задачу решения однородных диофантовых уравнений в целых числах как задачу об отыскании целочисленных точек на соответствующей кривой и пытался привлечь для исследования диофантовых уравнений геометрические средства. Однако в его работах 1847–1858 годов не было подробного изложения результатов и эффективность геометрического подхода к трактовке диофантовых уравнений будет показана им значительно позже, в 1880 году, в работе “On Certain Ternary Cubic-Form Equations” [23]. В целом же в середине XIX века при рассмотрении вопроса о рациональных решениях уравнения (1) и вопроса о целочисленных решениях уравнения (5) сохранялся алгебраический подход, даже если математики и понимали, что этот вопрос можно трактовать геометрически.

д) 1878 год, Э. Люка. Геометрическая формулировка методов касательной и секущей для общего однородного уравнения 3-ей степени с тремя неизвестными.

В 1878 году в печати появляется статья французского математика Эдуарда Люка (1842–1891) “Sur l’Analyse indéterminée du troisième degré...” [24], в которой однородное уравнение 3-ей степени (10) интерпретируется как уравнение кривой в однородных координатах на проективной плоскости и формулируются, причем вполне современным образом, процедуры нахождения рациональных (или целочисленных, что в данном случае одно и то же) точек на такой кривой – “метод касательной” и “метод секущей”⁵. Хотя, как мы видели, Сильвестр и до этого прибегал к геометрическому языку при рассмотрении методов нахождения целочисленных решений уравнения (10), тем не менее четкие геометрические формулировки методов касательной и секущей как основных методов отыскания целочисленных решений уравнения (10) по одному или двум известным целочисленным решениям появились впервые в печати именно в работе Люка. Поэтому не будем оспаривать, что методы касательной и секущей в их геометрическом виде были введены в диофантов анализ именно в 1878 году Эдуардом Люка. Подробнее о работе Люка см. в [25].

е) 1880 год, Дж. Дж. Сильвестр. Привлечение средств теории алгебраических кривых для исследования диофантовых уравнений.

В своей “Заметке...” [21] 1858 года Сильвестр выражает надежду, что будет “вскоре иметь спокойствие духа” для того, чтобы “дать миру мемуар, или его фрагмент” под названием “Об арифметической теории однородных кубических форм”. В этом мемуаре он, по-видимому, намеревался подробно изложить свою “теорию деривации”, о существовании которой сообщалось в “Заметке...”. Исполнить свое намерение Сильвестр смог только спустя более чем 20 лет, в работе “On Certain Ternary Cubic-Form Equations” [23]. Возможно, к этому времени “теория деривации” была разработана им более детально и глубоко по сравнению с первоначальным вариантом. В этой работе Сильвестр не только свободно использует геометрический язык при рассмотрении диофантовых уравнений 3-ей степени, но и привлекает для их исследования теорию алгебраических кривых. Благодаря такому подходу ему удается получить первые общие результаты о структуре множества рациональных решений уравнения (10). Эти результаты и составляют содержание его “теории рациональной деривации”, которую он излагает в первом номере “American Journal of Mathematics” за 1880 год.

Развивая свою “теорию деривации”, Сильвестр с самого начала ставит задачу общим образом: он рассматривает произвольную кубическую кривую на проективной плоскости и исследует множество Ω точек этой кривой, порожденное одной её произвольной точкой путем всевозможных применений методов касательной и секущей. Он не оговаривает, что эта точка должна иметь рациональные координаты, хотя, как следует из его замечаний в начале работы, рассмотрение Сильвестром множества Ω было связано с исследованием диофантовых уравнений, т.е. со случаем, когда исходная точка рациональна. Нахождение новой точки Q кубики по известной точке P методом касательной Сильвестр называет “тангенциализацией” (“tangentialization”), а полученную точку Q – “тангенциалью” (“tangential”) точки P . Точку R , полученную тангенциализацией из точки Q , он называет второй тангенциалью точки P , и т.д. Нахождение же новой точки кубики по двум известным точкам методом секущей он называет “коллинеацией” (“collineation”). Сильвестр пишет: “Рассмотрим на кубической кривой произвольную точку с ее последовательными тангенциальными до бесконечности. Мы можем, проведя прямые через любые две из этих точек, пересечь кривую, получая таким образом дополнительное множество точек. Расширенная таким образом система может быть снова подвергнута этому процессу коллинеации и тангенциализации и этот метод увеличения и расширения может быть продолжен до бесконечности. Всякая точка, найденная таким образом, будет рациональной производной (a rational derivative) от начальной точки (т.е. ее координаты

⁵Люка формулирует и третью процедуру, «метод конических сечений», который, как известно, сводится к комбинации первых двух методов.

будут рациональными целыми функциями от координат начальной точки)” [23, с. 58]. Сильвестр утверждает, что на первый взгляд мы будем получать описанным образом некую сеть “рациональных производных”, но на самом деле получается “линейная последовательность, или цепь, точек” (“a line or chain of points”), вообще говоря, бесконечная. Сильвестр также отмечает, что при некоторых положениях начальной точки эта последовательность может обрываться или закикливаться, т.е. фактически она будет содержать только конечное число различных точек.

Чтобы обосновать свое утверждение относительно “линейной” структуры множества Ω , Сильвестр делает шаг принципиальной важности — он вводит понятие индекса точки, сопоставив каждой точке из Ω натуральное число, не делящееся на 3, весьма остроумным способом. Сильвестр использует обозначение $(A, B) = C$ или $A, B = C$, если точка C находится по точкам A и B при $A \neq B$ методом секущей и при $A = B$ методом касательной. Исходной точке кубики Сильвестр приписывает индекс 1, её первой тангенциали — индекс 2, а её второй тангенциали — индекс 4, т.е. он полагает $(1, 1) = 2$ и $(2, 2) = 4$. Далее он вводит последовательность точек, одновременно приписывая им индексы, по следующему правилу

$$(1, 4) = 5, (2, 5) = 7, (1, 7) = 8, (2, 8) = 10, (1, 10) = 11, (2, 11) = 13, \dots$$

т.е. по правилу

$$(1, 3k + 1) = 3k + 2, (2, 3k + 2) = 3k + 4, k = 1, 2, \dots,$$

и доказывает, что эта последовательность исчерпывает все множество Ω . Таким образом, Сильвестр нумерует точки из Ω с помощью их индексов, причем в процессе этой нумерации устанавливает простое правило оперирования с индексами при тангенциализации и коллинеации⁶. Это были первые результаты о структуре множества рациональных точек кубической кривой, получаемых из одной её рациональной точки с помощью всевозможных применений методов касательной и секущей.

Не ограничиваясь изучением множества Ω , Сильвестр дополняет Ω точкой перегиба кубической кривой (её координаты тоже должны быть рациональными, как Сильвестр отмечает в сноске в начале своей работы [23, с. 282]) и исследует структуру множества Ω_1 , порожденного с помощью методов касательной и секущей точками из $\Omega \cup \{I\}$, где I — указанная точка перегиба. Он показывает, что множество Ω_1 представляет собой “двойную шкалу”: одна часть точек из Ω_1 индексируется Сильвестром с помощью всех натуральных чисел, а другая — с помощью индексов $\{1', 2', 3', \dots, n', \dots\}$. Устанавливая правила оперирования с индексами точек из Ω_1 при тангенциализации и коллинеации, Сильвестр фактически вводит операцию на этом множестве. Более детальный анализ этого исследования Сильвестра можно найти в статьях [25], [26]. Здесь отметим только, что правила оперирования с индексами состояли из целого ряда случаев, отличающихся друг от друга по тому, есть у индексов штрихи или нет и каковы остатки от деления индексов на 3. Для доказательства этих правил в [23] применялась теорема о девяти точках на кубической прямой, которую Сильвестр использовал в следующей формулировке: для любых четырех точек A, B, C и D , принадлежащих кубической кривой, имеет место совпадение точек $((A, B), (C, D))$ и $((A, C), (B, D))$.

В работе [23] рассматриваются и другие вопросы, связанные с решением неопределенных уравнений и, в частности, со структурой множества Ω_1 . Так, Сильвестр исследует важный вопрос о том, когда из одной рациональной точки с помощью методов касательной и секущей получается лишь конечное число рациональных точек, т.е. когда множество Ω_1 оказывается конечным (подробнее об этом см. в [25]). Мы не будем останавливаться на этом рассмотрении

⁶Согласно этому правилу индекс точки, получаемой коллинеацией из точек с индексами m и n , равен тому из чисел $m + n$ и $|m - n|$, которое не делится на 3. При тангенциализации из точки с индексом m получается точка с индексом $2m$.

Сильвестра, в котором, на наш взгляд, были предприняты только первые попытки изучения данного вопроса, но было еще далеко от существенного продвижения в нем.

Итак, в [23] впервые исследование общего неопределенного уравнения 3-ей степени было осуществлено на основе теории алгебраических кривых. В результате оказалось возможным перейти от рассмотрения отдельных рациональных точек на кубической кривой, как это было до появления работы [23], к изучению всего множества рациональных точек, порожденного одной рациональной точкой с помощью методов касательной и секущей. С современной точки зрения множество Ω_1 , впервые введенное в рассмотрение Сильвестром, представляет собой циклическую подгруппу группы всех рациональных точек кубики, порожденную исходной рациональной точкой.

Мемуар Сильвестра отличался от всех предшествующих работ по диофантовым уравнениям 3-ей степени, во-первых, новым уровнем общности в постановке самой задачи исследования диофантовых уравнений и, во-вторых, принципиальным расширением средств их исследования.

ж) 1880 год, У. Стори. Применение аналитического аппарата теории эллиптических кривых.

Теория индексов Сильвестра, развитая для исследования множества рациональных точек на кривой третьего порядка, была переработана и существенно упрощена в том же 1880 году коллегой Сильвестра по университету Джонса Хопкинса американским математиком Уильямом Стори⁷ (1850–1930) в его статье «On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve» [27]. В [27] прежде всего отмечается, что «теория рациональной деривации» на кубической кривой была разработана Сильвестром «для целей решения арифметической задачи [т.е. для задачи о рациональных точках кубики – Т.Л.], но имеет интерес сама по себе с геометрической точки зрения» [27, с. 356]. Цель своей работы Стори видит в том, чтобы «развить эту новую теорию индексов в более общей и симметричной форме» и, «комбинируя ее, в конце

⁷Уильям Эдвард Стори (1850–1930) родился в Бостоне, штат Массачусетс, США, в семье адвоката Исаака Стори. Математическое образование получил в Гарварде, закончив университет с отличием в 1871 году. В том же году отправился в Германию, где продолжил изучение математики и физики. В Берлине слушал лекции Вейерштрасса, Куммера и Гельмгольца. Находясь в Лейпциге, написал под руководством К. Г. Неймана диссертацию «Об алгебраических соотношениях между полярами бинарной формы», за которую в 1875 г. получил степень доктора философии. Вернувшись в США, стал тьютором в Гарварде. Ещё в бытность студентом Гарварда Стори, благодаря своим способностям, обратил на себя внимание известного американского астронома и математика, профессора Гарварда, Бенджамина Пирса. Как пишут К. Паршалл и Д. Роу [27], когда Сильвестр стал подыскивать для университета Джонса Хопкинса кандидатуру на пост своего помощника, способного принять участие в налаживании исследовательской работы в университете, то Б. Пирс без колебаний рекомендовал Сильвестру Уильяма Стори. В 1876 г. последний стал сотрудником отделения математики в университете Джонса Хопкинса, взяв на себя практически полностью нагрузку, связанную с обучением математике по студенческим программам, в то время как Сильвестр посвящал свое время исключительно своим собственным исследованиям и занятиям с аспирантами. Стори также читал курсы и для аспирантов, в частности, в 1878–80 гг. он читал аспирантские курсы по плоским кривым высших порядков и по эллиптическим функциям. Возможно, именно это обстоятельство способствовало возникновению у Стори идеи о применении аппарата эллиптических функций к теории индексов Сильвестра, разработанной для плоских алгебраических кривых 3-го порядка. Стори пытался развивать отделение математики университета Джонса Хопкинса на основе германской модели, с которой познакомился во время своего пребывания в Берлине и Лейпциге. Так, он основал Математическое Общество в университете и был, наряду с Сильвестром, основателем *American Journal of Mathematics*, где на посту заместителя главного редактора ему приходилось выполнять большую работу. Правда, спустя некоторое время (не позднее 1884 г.) вынужден был из-за разногласий с Сильвестром оставить этот пост. Как отмечают К. Паршалл и Д. Роу, «Стори играл ключевую роль в успехе всей программы университета Хопкинса» [27, с. 109]. В 1889 г. Стори принял приглашение возглавить математическое отделение в недавно открытом университете Кларка (Вустер, штат Массачусетс), первом американском университете, созданном исключительно для обучения по аспирантским программам. Проработал в университете Кларка до 1921 года и за это время под его руководством было выполнено и защищено 16 диссертаций. Самым известным учеником Стори был Соломон Лефшец, выдающийся американский алгебраический геометр и тополог. Более детальную информацию о Стори и его роли в институционализации математических исследований в США можно найти в статье [28], содержащей много интересных подробностей.

концов, с теорией параметров, решить ряд задач, связанных прежде всего с перечислением точек [кубики – Т.Л.], обладающих определенными свойствами, аналогичными свойствам для особых точек...» [там же].

Заметим, что существует параллелизм между использованием Сильвестром индексов точек, составляющих «шкалу рациональных производных» или «пополненную шкалу рациональных производных», и использованием эллиптических параметров этих точек для описания множеств Ω и Ω_1 . Действительно, эллиптическую кривую 3-го порядка, заданную в нормальной вейерштрассовой форме⁸

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad (11)$$

и рассматриваемую над полем $\mathbb{C}$, можно параметризовать с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и её производной $\wp'(z)$ с решеткой периодов $L[\omega_1, \omega_2]$. Эта параметризация задает биекцию между значениями комплексного параметра $z(mod L)$ и комплекснозначными точками $P(z) = (\wp(z), \frac{1}{2}\wp'(z))$ кривой (11), при этом бесконечно удаленной точке $(0 : 1 : 0)$ сопоставляется параметр $z = 0$. Как известно, указанную параметризацию можно задать таким образом, что для любых трех точек кривой (11), лежащих на одной прямой, будет справедливо соотношение $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0(mod L)$, где z_1, z_2 и z_3 – параметры (или, согласно [1], эллиптические аргументы) этих точек. Нетрудно проверить, что если взять в процедуре Сильвестра в качестве точки перегиба I бесконечно удаленную точку $(0:1:0)$ и обозначить эллиптический параметр исходной точки с индексом 1 через z_1 , то множеству индексов

$$\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \cup \{1', 2', 3', \dots, n', \dots\}, \quad (12)$$

приписываемых Сильвестром точкам множества Ω_1 , будет соответствовать следующая последовательность эллиптических параметров этих точек:

$$\begin{aligned} &\{z_1, -2z_1, 3z_1, 4z_1, -5z_1, 6z_1, \dots, -(3k-1)z_1, 3kz_1, (3k+1)z_1, \dots\} \cup \\ &\cup \{-z_1, 2z_1, -3z_1, -4z_1, 5z_1, -6z_1, \dots, (3k-1)z_1, -3kz_1, -(3k+1)z_1, \dots\} \end{aligned} \quad (13)$$

(подробнее об этом см. [25]). Индексы точек, таким образом, если не обращать внимания на штрихи, есть просто модули коэффициентов при z_1 у эллиптических параметров этих точек. Правила же оперирования с индексами из системы (12), полученные Сильвестром, в точности соответствуют правилу оперирования с эллиптическими параметрами при «коллинеациях».

На связь между индексами и эллиптическими параметрами и обратил внимание Стори. Чтобы упростить сильвестрову теорию индексов, он предлагает так изменить определение, данное Сильвестром, чтобы индекс «производной» точки из множества Ω_1 стал просто равным «числу, на которое нужно умножить параметр начальной точки, чтобы получить параметр «производной» точки» [29, с. 357]. Заметив, что при определенной параметризации неособой кубики с помощью эллиптических функций условие коллинеарности трех ее точек с параметрами μ, μ' и μ'' имеет вид:

$$\mu + \mu' + \mu'' \equiv 0(mod(\omega, \omega')) \quad (14)$$

где ω, ω' – примитивные периоды эллиптических функций, используемых для параметризации, Стори предлагает именно это условие сделать «нашим руководством при приписывании

⁸Уравнение любой эллиптической кривой 3-го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$, обладающей хотя бы одной рациональной точкой, всегда можно привести с помощью бирациональных преобразований (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) к виду (11). При этом можно считать, что $a, b \in \mathbb{Z}$. Если же уравнение кривой рассматривается над полем $\mathbb{C}$, то такое приведение с помощью бирациональных преобразований возможно всегда.

индексов, чтобы могло существовать упомянутое соотношение между индексом и параметром, т.е. для индексов a, b, c трех коллинеарных точек сохраняется фундаментальная формула

$$a + b + c = 0,$$

или

$$[a, b] = -(a + b), \quad (15)$$

если через $[a, b]$ обозначить индекс «связующей» двух точек⁹ с индексами a и b [29, с. 357-358].

Такой подход при введении индексов, основанный на едином правиле для оперирования с индексами и для оперирования с эллиптическими параметрами точек, позволил значительно упростить всю теорию Сильвестра. Полученные Сильвестром правила оперирования с индексами при «коллинеациях», состоящие из целого ряда случаев, были заменены одним единственным равенством (15). Сам вывод правил оперирования с индексами стал гораздо более коротким и изящным.

Мы не будем останавливаться подробно на теории индексов Стори, отсылая за подробностями к статье [25]. Отметим только, что для индексации точек из Ω_1 Стори использует множество целых чисел $\mathbb{Z}$, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{Z}$ и $(\Omega_1 \cup I)$. Способ действий при этом — вполне геометрический и состоит в использовании свойств кривой 3-го порядка: в основе доказательств лежит теорема о девяти точках на кубической кривой, которую использовал и Сильвестр, а также теорема о том, что точки, противоположные трем коллинеарным точкам кубики относительно одной и той же точки перегиба, также коллинеарны. Наряду с множеством Ω_1 Стори рассматривает и другие «пополненные шкалы рациональных производных» заданной точки кубики, используя для построения каждой из них свою точку перегиба кубики.

Если в первой части своей работы Стори строит теорию индексов чисто геометрически, а равенство (14) является лишь подсказкой для более «удобного» определения индекса точки, позволяющего упростить сильвестрову теорию, то во второй части работы [29] вопрос о связи между теорией индексов и теорией параметров точек на кубической кривой рассматривается более детально [29, с. 368-369]. Здесь Стори указывает, что в случае неособой кубической кривой координаты её произвольной точки могут быть выражены, согласно Клебшу [30], как двоякопериодические функции одного параметра и в качестве простейшего представления для неособой кубики приводит её параметризацию с помощью эллиптических функций Якоби:

$$x : y : z = sn\mu : (cn\mu \cdot dn\mu) : sn^3\mu.$$

Он устанавливает формулы, связывающие индекс и эллиптический параметр точки из любой «пополненной шкалы рациональных производных» начальной точки. В соответствии с этими формулами, если точка перегиба неособой кубики, используемая для построения «пополненной шкалы» Ω_1 , имеет эллиптический параметр, равный 0, то эллиптический параметр точки с индексом a , $a \in \mathbb{Z}$, будет равен просто $a\mu$, где μ — эллиптический параметр исходной точки.

Стори решает ряд задач из теории алгебраических кривых, соединяя развитую им теорию индексов с использованием параметрического представления кубической кривой. Мы не будем останавливаться здесь на этих задачах, так как они не имеют прямого отношения к вопросам диофантова анализа.

Итак, обращение к аналитическому аппарату эллиптических кривых позволило Стори кардинально упростить теорию индексов Сильвестра, разработанную последним в [23] для изучения структуры множества Ω_1 рациональных точек кубики, порожденного одной рациональной

⁹Под «связующей» здесь понимается точка кубики, полученная из точек с индексами a и b с помощью метода секущей (или с помощью метода касательной, если $a = b$). Сильвестр обозначает индекс «связующей» через (a, b) .

точкой с помощью методов касательной и секущей (и с помощью рациональной точки перегиба). Была установлена полная аналогия между оперированием с индексами и оперированием с эллиптическими параметрами точек из Ω_1 . Из рассуждений Стори непосредственно следовало, что множество рациональных точек кубики, введённое Сильвестром в [23], имеет простое описание с помощью эллиптических параметров этих точек. Однако в статье [29] теория индексов применяется для исследования строения самой кубической кривой, а не множества её рациональных точек.

Интересно, что Сильвестр не только дал положительную оценку работе [29], но и обратил на нее внимание А. Кэли, подчеркнув при этом факт применения в [29] теории эллиптических функций. В письме к А. Кэли от 12 мая 1881 года Сильвестр пишет, что у Стори «есть первоклассная статья, которая выйдет в нашем следующем номере [журнала], расширяющая и завершающая мою теорию рациональной деривации на кубических кривых — которая, я думаю, заинтересует Вас, поскольку он рассматривает приложение эллиптических функций к этому вопросу» [22, с. 201-202].

Отметим также, что Пуанкаре, изучая в [1] множество Ω всех точек кубики рода 1, порожденное одной её рациональной точкой путем всевозможных применений методов касательной и секущей, вводит точки этого множества в той же самой последовательности, что и Сильвестр, и Стори. Но для описания множества Ω он сразу использует эллиптические параметры точек, не вводя понятие индекса, и получает, что все точки рассматриваемого множества имеют параметры вида $(3n+1)\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, где α — эллиптический параметр исходной точки. В рассмотрении множества точек кубики, порожденного одной её рациональной точкой, Сильвестр и Стори пошли даже несколько дальше Пуанкаре, дополнив множество Ω точкой перегиба кубики и введя в рассмотрение точки кубики, противоположные точкам из Ω относительно этой точки перегиба. В результате они приходят к построению множества Ω_1 , которое с современной точки зрения есть циклическая подгруппа группы всех рациональных точек эллиптической кривой, порожденная одной её рациональной точкой. У Пуанкаре эта конструкция в явном виде отсутствует.

Трудно сказать, знал ли Пуанкаре о работах [23] и [29], поскольку он вообще не упоминает предшественников в своем мемуаре. Нет у него и упоминания имен Сильвестра и Стори, так же, как, например, нет упоминания имен Гильберта и Гурвица, опубликовавших в 1890 г. результаты о множестве рациональных точек кривой рода 0.

з) 1890 год, Д. Гильберт, А. Гурвиц. Алгебро-геометрическое исследование структуры множества рациональных точек на кривых рода 0.

Через 10 лет после выхода в свет работ Сильвестра и Стори была опубликована статья Д. Гильберта (1862-1943) и А. Гурвица (1859-1919) «Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null» [31]. Статья была посвящена задаче нахождения всех целочисленных решений уравнения

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (16)$$

где $f(x_1, x_2, x_3)$ — однородный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами, в предположении, что уравнение (16) задаёт плоскую алгебраическую кривую рода 0. Авторы отмечают, что вопрос о всех рациональных точках кривой (16) означает по существу ту же задачу. Они также отмечают, что в своем рассмотрении будут опираться на статью М. Нётера [32].

В результате исследования, проведенного в [31], было установлено, что уравнение (16) либо не имеет целочисленных решений, либо имеет конечное число решений, причем все эти решения соответствуют особым точкам кривой (16), либо, в случае если кривая (16) имеет хотя бы одну неособую целочисленную точку, уравнение (16) имеет бесконечно много целочисленных решений. Причем все целочисленные решения, соответствующие неособым точкам

кривой (16), можно выразить как рациональные функции параметра. Полученные выводы основывались на факте бирациональной эквивалентности плоской кривой n -го порядка рода 0 и кривой 1-го или 2-го порядка.

Статья Гильберта и Гурвица [31] является, по-видимому, первой работой, в которой для исследования проблемы о рациональных решениях неопределенного уравнения выделяется класс уравнений не по признаку одинаковой степени, как это было на протяжении многих столетий, а по признаку одинакового рода соответствующей кривой. Результаты, полученные в [31], указывали на важность для исследования указанной проблемы такой алгебро-геометрической характеристики, как род кривой, являющейся инвариантом бирациональных преобразований, и на плодотворность применения самих бирациональных преобразований. Исследование, проведенное в [31], было осуществлено уже целиком в рамках алгебраической геометрии.

4. Заключение

Хотя вплоть до начала XX века в подавляющем большинстве исследований, посвященных решению диофантовых уравнений в рациональных числах, рассматривались отдельные конкретные уравнения и использовались рассуждения теоретико-числового характера или алгебраический подход Диофанта — Ферма — Эйлера (см. [33]), тем не менее в течение XIX века появился ряд важных работ, отличающихся более общим взглядом на предмет исследования и расширением средств исследования диофантовых уравнений. В этих работах рассматриваются не отдельные типы неопределенных уравнений 3-ей степени вида (2) и (3), а общее однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными. В диофантов анализ вводится геометрический язык, причем проблема решения в рациональных числах диофантовых уравнений 3-ей степени не только формулируется геометрически, но и впервые исследуется средствами теории алгебраических кривых. Указанная проблема ставится на новый уровень общности: происходит переход от рассмотрения отдельных рациональных решений уравнения (10) к изучению строения всего множества рациональных точек на кубической кривой. В работе [23] Сильвестр получает первые содержательные результаты на эту тему. Помимо чисто геометрического подхода используется и аналитический аппарат для описания множества рациональных точек на эллиптической кривой (теорема сложения эллиптических интегралов — Якоби, 1835 год; параметризация эллиптической кривой с помощью эллиптических функций — Стори, 1880 год). Именно расширение средств исследования и использование аппарата эллиптических функций приводит к существенному упрощению рассмотрений Сильвестра в работе Стори [29]. Впервые единообразно исследуется структура множества рациональных точек для всех плоских кривых рода 0 и тем самым выясняется важная роль понятия рода кривой при изучении множества рациональных решений диофантовых уравнений.

Таким образом, на протяжении всего XIX века мы видим непрекращающиеся попытки при трактовке диофантовых уравнений выйти за рамки алгебраического подхода Диофанта — Ферма — Эйлера, который почти полностью исчерпал себя уже в творчестве Эйлера. После Лагранжа [11] и Коши [12], пришедших к методам касательной и секущей для неопределенного уравнения 3-ей степени в наиболее общей формулировке (у Лагранжа — только метод касательной), никаких заметных результатов в рамках чисто алгебраического подхода, по-видимому, получено не было. Стоит, однако, отметить, что все рассмотренные нами работы, за исключением, может быть, только статьи Гильберта и Гурвица [31], занимали до некоторой степени изолированное положение в диофантовом анализе XIX века, они непосредственно не стали отправными точками для создания новых направлений в исследовании проблемы о рациональных решениях диофантовых уравнений. В XIX веке происходило, скорее, постепенное накопление отдельных, но весьма важных и ярких результатов, предвосхищавших необходи-

мое наступление нового этапа в развитии диофантова анализа. Начало этому этапу и положил мемуар А. Пуанкаре [1], в котором был дан эскиз построения диофантова анализа, точнее, той его части, в которой идет речь о рациональных решениях диофантовых уравнений, на фундаменте алгебраической геометрии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques // J. Math. Pures Appl. 1901. Ser. 5. Vol. 7. P. 161–233. (Русский перевод: Пуанкаре А. Об арифметических свойствах алгебраических кривых // Избранные труды. Т.2. М., 1972. С. 901–960.)
2. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984 (переизд.: М.: ЛЕНАНД, 2015).
3. Hofmann J. E. Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung // Arch. Hist. Exact Sci. 1961. Vol.1, №2. P. 122–159.
4. Weil A. Number Theory. An Approach through History: from Hammurapi to Legendre. Boston, etc.: Birkhäuser, 1983 (reprint. Boston: Birkhäuser, 2007).
5. Лавриненко Т. А. Неопределенные уравнения в работах Л. Эйлера и математиков XIX века. : дис. канд. физ. -мат. наук: 07.00.10. М., 1984. 166 с.
6. Лавриненко Т. А. Диофантовы уравнения в работах Л. Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. М.: Наука, 1988. С. 153–165.
7. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersbourg, 1770 (reprint. Stuttgart, 1959). (Также в: Leonhardi Euleri Opera omnia, ser. 1. V. 1. P. 209–498. Lipsiae et Berolini, 1911.).
8. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. V. 1.
9. Лавриненко Т. А. Реконструкции методов получения четырех формул из неопубликованных рукописей Эйлера по диофантову анализу // История и методология естественных наук. Вып. XXXII. Математика, механика. М.: Изд-во Московского университета, 1986. С. 111–120.
10. Лавриненко Т. А. Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степеней в поздних работах Эйлера // Историко-математические исследования. Вып.27. М., 1983. С. 67–79.
11. Lagrange J. L. Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante // Nouveaux Mémoires de l'Ac. royale des sc. et belle-lettre de Berlin, 1777. (Также в: Lagrange J. L. Oeuvres. Paris, 1869. T. 4. P. 377–398.).
12. Лавриненко Т. А. Методы решения неопределенных уравнений в рациональных числах в XVIII–XIX веках // Историко-математические исследования. Вып.28. М., 1985. С. 202–223.
13. Cauchy A. Sur la resolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers // Cauchy A. Exercices de mathématiques. Paris, 1826. (Также в: Cauchy A. Ouevres complètes (II). Paris, 1887. T.6. P. 286–315.).
14. Jacobi C. De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysisi Diophantea // Crelle Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1835. V. 13. P. 353–355. (Также в: Jacobi C. Gesammelte Werke. Berlin, 1882. Bd. 2. S. 53–55.).

15. Башмакова И. Г. Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре) // Историко-математические исследования. 1975. Вып. 20. С. 104–124 (на англ. языке: Bashmakova I. G. Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré // *Historia Mathematica*. 1981. V. 8, №4. P. 393–416.).
16. Newton I. *Mathematical Papers*. Vol.4 / Ed. D.T. Whiteside. Cambridge, 1971.
17. Sylvester J. J. An Account of a Discovery in the Theory of Numbers Relative to the Equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ // *Philosophical Magazine*. 31(1847). P. 189–191. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 107–109.).
18. Sylvester J. J. On the Equation in Numbers $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$, and Its Associate System of Equations // *Phil. Mag.* 31(1847). P. 293–296. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 110–113.).
19. Sylvester J. J. On the General Solution (in Certain Cases) of the Equation $x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$ & c. // *Phil. Mag.* 31(1847). P. 467–471. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 114–118.).
20. Sylvester J. J. Recherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou négatifs de l'équation cubique homogène à trois variables // *Annali di scienze matematiche e fisiche*. 7 (1856). P. 398–400. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.2. Cambridge Univ. Press. P. 63–64.).
21. Sylvester J. J. Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree // *Phil. Mag.* 16(1858). P. 116–119. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.2. Cambridge Univ. Press. P. 107–109.).
22. Parshall K. *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
23. Sylvester J. J. On Certain Ternary Cubic-Form Equations // *Amer. J. Math.* 2 (1879), p. 280–285 and p. 357–393; 3 (1880), p. 58–88 and p. 179–189. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.3. Cambridge Univ. Press. P. 312–391.).
24. Lucas É. Sur l'Analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester) // *Nouv. ann. math.* 2e série, 17. 1878. P. 507–514.
25. Lavrinenko T. A. Solving an Indeterminate Third Degree Equation in Rational Numbers. Sylvester and Lucas // *Revue d'Histoire des Mathématiques (Société Mathématique de France)*. 2002. T.8, №1. P. 67–111.
26. Лавриненко Т. А., Михно Г. А. О введении групповой структуры на множестве точек кубики и решении диофантовых уравнений // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2014. №4. С. 95–104.
27. Parshall K., Rowe D. *The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*. // Providence: American Mathematical Society, 1994.
28. Cooke R., Rickey F. W. E. *Story of Hopkins and Clark* // *A Century of Mathematics in America. Part III* / ed. *Peter Duren*. Providence: American Mathematical Society, 1989. P. 29–76.
29. Story W. E. On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve // *Amer. J. Math.* (3) 1880. P. 356–387.

30. Clebsch A. Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung // Crelle J. für die r. und ang. Math.. 63(1864).
31. Hilbert D., Hurwitz A. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null // Acta Mathematica. 1890. V. 14. P. 217–224.
32. Noether M. Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen // Math. Annalen. 23(1884). S. 311–358.
33. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. V.2: Diophantine Analysis. Washington, 1920 (reprint. Bronx (Chelsea), 1971).

REFERENCES

1. Poincaré, J. H. 1901, “Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5e série, 7, pp. 161–233.
2. Bashmakova, I. G. & Slavutin, E. I. 1984, *History of Diophantine Analysis from Diophantus to Fermat*, Nauka, Moscow (reprint. 2015, LENAND, Moscow) (in Russian)
3. Hofmann, J. E. 1961, “Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung”, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 1, pp. 122–159.
4. Weil, A. 1983, *Number Theory. An Approach through History: from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, etc. (reprint. 2007, Birkhäuser, Boston).
5. Lavrinenko, T. A. 1984, *Indeterminate equations in the works of L. Euler and mathematicians of the 19th century. Dissertation*, Moscow, 166 p. (in Russian)
6. Lavrinenko, T. A. 1988, “Diophantine Equations in L. Euler’s Works”, in *The Development of Leonard Euler’s Ideas and Modern Science*, Nauka, Moscow, pp. 153–165 (in Russian).
7. Euler, L. 1770, *Vollständige Anleitung zur Algebra, Zweyter Teil*, Petersbourg (reprint. 1959, Stuttgart); 1911, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser.1, vol. 1, Lipsiae et Berolini, pp. 209–498.
8. Euler, L. 1862, *Opera postuma mathematica et physica*, Vol. 1, Petropoli.
9. Lavrinenko, T. A. 1986, “Reconstructions of methods for obtaining four formulas from unpublished Euler manuscripts on Diophantine analysis”, *Istoriya i metodologiya estestvennih nauk*, vol. XXXII, pp. 111–120 (in Russian).
10. Lavrinenko, T. A. 1983, “Solving of Indeterminate Equations of Third and Fourth Degrees in the Late Euler’s Works”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 27, pp. 67–79 (in Russian).
11. Lagrange, J. L. 1777, “Sur quelques problèmes de l’analyse de Diophante”, *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences, et belles-lettres de Berlin*, 1777; Lagrange, J. L. 1869, *Oeuvres*, vol. 4, Gauthiers-Villars, Paris, pp. 377–398.
12. Lavrinenko, T. A. 1985, “On Methods of Solving Indeterminate Equations in Rational Numbers in the 18th–19th centuries”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 28, pp. 202–223 (in Russian).
13. Cauchy, A.–L. 1826, *Exercices de mathématiques*, Paris; Cauchy, A.–L., 1887, *Oeuvres complètes* (II) 6, Paris, pp. 286–315.

14. Jacobi, C. G. J. 1835, “De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi diophantea”, *J. reine angew. Math.*, vol. 13, pp. 353–355; Jacobi C. 1882, *Gesammelte Werke*, Bd. 2, Berlin, S. 53–55.
15. Bashmakova, I. G. 1975, “Arithmetic of algebraic curves (from Diophantus to Poincaré)”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 20, pp. 104–124 (in Russian); Bashmakova, I. G., 1981, “Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré”, *Historia Mathematica*, vol. 8, no. 4, pp. 393–416 (in English).
16. Newton, I. 1971, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol.4, Whiteside, D. T. (ed.), Cambridge.
17. Sylvester, J. J. 1847, “An Account of a Discovery in the Theory of Numbers Relative to the Equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ ”, *Philosophical Magazine*, 31, pp. 189–191; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 107–109.
18. Sylvester, J. J. 1847, “On the Equation in Numbers $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$, and Its Associate System of Equations”, *Phil. Mag.*, 31, pp. 293–296; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 110–113.
19. Sylvester, J. J. 1847, “On the General Solution (in Certain Cases) of the Equation $x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$ &c.”, *Phil. Mag.*, 31, pp. 467–471; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 114–118.
20. Sylvester, J. J. 1856, “Recherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou négatifs de l’équation cubique homogène à trois variables”, *Annali di scienze matematiche e fisiche*, 7, pp. 398–400; Sylvester, J. J. 1908, *Collected Mathematical Papers*, 2, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 63–64.
21. Sylvester, J. J. 1858, “Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree”, *Phil. Mag.*, 16, pp. 116–119; Sylvester, J. J. 1908, *Collected Mathematical Papers*, 2, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 107–109.
22. Parshall, K. H. 1998, *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letter*, Oxford University Press, Oxford.
23. Sylvester, J. J. 1879/80, “On Certain Ternary Cubic-Form Equations”, *Amer. J. Math.*, 2, pp. 280–285 and 357–393; 3, pp. 58–88 and 179–189; Sylvester, J. J., *Collected Mathematical Papers*, 3, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 312–391.
24. Lucas, É. 1878, “Sur l’analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester)”, *Nouv. ann. math.*, 2e série, 17, pp. 507–514.
25. Lavrinenko, T. A. 2002, “Solving an Indeterminate Third Degree Equation in Rational Numbers. Sylvester and Lucas”, *Revue d’Histoire des Mathématiques (Société Mathématique de France)*, t.8, no. 1, pp. 67–111.
26. Lavrinenko T. A. & Михно Г. А., 2014, “On the introduction of a group structure on a cubic and solving Diophantine equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, no. 4, pp. 95–104 (in Russian).
27. Parshall, K. H. & Rowe, D. E. 1994, *The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876–1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, American Mathematical Society, Providence.

28. Cooke, R. & Rickey, V. F. 1989, “W. E. Story of Hopkins and Clark”, in Duren (Peter) et al., eds., *A Century of Mathematics in America – Part III*, American Mathematical Society, Providence, pp. 29–76.
29. Story, W. E. 1880, “On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve”, *Amer. J. Math.*, 3, pp. 356–387.
30. Clebsch, R. F. A. 1864, “Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 63, pp. 94–121.
31. Hilbert D. & Hurwitz A. 1890, “Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null”, *Acta Mathematica*, V. 14, P. 217–224.
32. Noether M. 1884, “Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen”, *Math. Annalen*, 23, S. 311–358.
33. Dickson, L. E. 1920, *History of the Theory of Numbers, vol. 2: Diophantine Analysis*, Carnegie Institute of Washington, Washington (reprint. 1971, Chelsea, New York).

Получено 10.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 510:531

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-405-422

**Пафнутий Львович Чебышев: человек науки на службе России
(к 200-летию со дня рождения)**

А. А. Тихонов

Тихонов Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

Аннотация

4 мая (16 н.ст.) 1821 г. родился П.Л. Чебышев (1821–1894) — великий русский ученый, представляющий гордость и славу нашего Отечества. В связи с 200-летним юбилеем П.Л. Чебышева предлагается ретроспективный взгляд на современную ему эпоху и делается попытка осмысления роли гениальной личности не только в истории науки и техники, но и в истории России, которой он служил всеми своими талантами, в том числе научным и педагогическим. Приводятся сведения о традиции служения Отечеству в семье Чебышевых. Дается краткий обзор работы П.Л. Чебышева в течение 48 лет в Императорской СПб Академии наук. Приводятся воспоминания современников о работе П.Л. Чебышева в течение 35 лет в Императорском Санкт-Петербургском университете. Рассматривается работа П.Л. Чебышева в течение 40 лет в Артиллерийском отделении Военно-ученого комитета. Более подробно анализируется работа П.Л. Чебышева в течение 17 лет в Ученом комитете Министерства народного просвещения. Выясняется его роль в реформе образования (1863–1864), инициированной Императором Александром II, в частности - в разработке общеуниверситетского устава 1863 г., в составлении рекомендательной библиографии, в постановке преподавания математики в начальных школах России, в систематической подготовке инженеров в России. Кратко освещается роль П.Л. Чебышева в создании русской математической школы.

Ключевые слова: Чебышев П.Л., 200 лет, биография.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

А. А. Тихонов. Пафнутий Львович Чебышев: человек науки на службе России (к 200-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 405–422.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 510:531

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-405-422

Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894), a man of science in the service of Russia (On the occasion of the bicentennial of his birth)

A. A. Tikhonov

Tikhonov Aleksey Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

Abstract

On May 4 (16 new style), P.L. Chebyshev was born - a great Russian scientist who represents the pride and glory of our Fatherland. In connection with the 200th anniversary of P.L. Chebyshev, a retrospective look at his contemporary era is offered and an attempt is made to comprehend the role of a genius personality not only in the history of science and technology, but also in the history of Russia, which he served with all his talents, including scientific and pedagogical. The report provides information about the tradition of serving the Fatherland in the Chebyshev family. A brief overview of the work of P.L. Chebyshev for 48 years at the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences is presented. The memoirs of contemporaries about the work of P.L. Chebyshev for 35 years at the Imperial St. Petersburg University are discussed. The work of P.L. Chebyshev for 40 years in the Artillery Department of the Military Scientific Committee is considered. The work of P.L. Chebyshev for 17 years in the Scientific Committee of the Ministry of Public Education is analyzed. Its role in the educational reform (1863-1864) initiated by Emperor Alexander II is clarified, in particular in the development of the general university charter of 1863, in the compilation of recommendatory bibliography, in the organization of teaching mathematics in primary schools in Russia, in the systematic training of engineers in Russia. The role of P.L. Chebyshev in the creation of the Russian mathematical school is briefly highlighted.

Keywords: Chebyshev P.L., 200th anniversary, biography.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

A. A. Tikhonov, 2021, "Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894), a man of science in the service of Russia (On the occasion of the bicentennial of his birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 405–422.

1. Традиция служения Отечеству в семье Чебышевых

Традиция служения Отечеству — преимущественно на ратном поприще — присуща семье П.Л. Чебышева и прослеживается в судьбе деда, отца и братьев. Дед — Павел Петрович, по окончании обучения (1754) в Академической гимназии при Санкт-Петербургском университете был определен на военную службу — прапорщиком в один из гвардейских полков. Имел склонность к математике. Отец — Лев Павлович Чебышев (1789–1861), служил офицером Тульского 1-го конноказацкого полка. В 1812–1813 отважно участвовал в сражениях под Малоярославцем, Вязмой, Красным, Бауценом. Награжден боевым орденом. В 1814 Л.П. Чебышев принимал участие во взятии Парижа русскими войсками.

Пафнутий Львович родился в 1821, на два года позже сестры Елизаветы, и был старшим из братьев. В метрической книге Спаса-на-Прогнаньи Боровского уезда Калужской губернии записано: “4 мая 1821 сельца Окатово у помещика корнета Льва Павловича Чебышева родился сын Пафнутий. Крещен 16 мая”. Известно, что с детства он имел одну ногу сведенной, поэтому немного хромал и ходил с палкой. Этот физический недостаток был предметом печали его родителей, желавших видеть своего старшего сына офицером. За Пафнутием шел брат Павел. Он одновременно со старшим братом готовился к поступлению в Московский университет и затем учился там на юридическом факультете. С 1850 по 1856 Павел Львович в чине титулярного советника был судьей Боровского уездного суда. Второй брат Пафнутия Львовича, Петр, был военным. Все трое его сыновей — Лев, Пафнутий и Владимир — учились в кадетском корпусе, потом в военном училище и вышли офицерами в гвардию.

Николай (1830–1875) и Владимир (1832–1905) — самые младшие братья Пафнутия Львовича. Оба окончили артиллерийское училище и академию и были оставлены по рекомендации М.В. Остроградского при академии для преподавания математики. Впоследствии Николай Львович в чине полковника был начальником Варшавского учебного полигона. Скончался в чине генерал-майора в 1875 в должности начальника Кронштадтской крепостной артиллерии.

Владимир Львович, генерал от артиллерии, выдающийся ученый-артиллерист, был заслуженным профессором Артиллерийской академии, основателем и первым редактором «Оружейного сборника», основоположником патронного и ружейного дела в России, а также основоположником учения о свойствах поверхности. Он первым в 1874, исследуя процесс цилиндрического фрезерования, установил причины, вызывающие микронеровности на обработанной поверхности, и вывел уравнение для определения высоты микронеровностей. Сделанные им выводы нашли применение на Тульском заводе, использовались в теоретических работах и не утратили своего значения до настоящего времени. Столь же обстоятельно В.Л. Чебышев разработал теорию механизма ружейного замка. Из братьев Владимир Львович был ближе всех Пафнутию Львовичу и частично передел ему интерес к математическим аспектам военного дела [1].

2. Работа Чебышева в Императорской СПб Академии наук (48 лет)

Переехав в С.-Петербург в 1847 по приглашению акад. В.Я. Буняковского, П.Л. Чебышев сразу же приступил к работе при Академии наук, где он вместе с акад. В.Я. Буняковским готовил к изданию рукописные труды Л. Эйлера по теории чисел. В 1853 академики П.Н. Фусс, В.Я. Струве, Б.С. Якоби, В.Я. Буняковский представили П.Л. Чебышева к избранию в адъюнкты Императорской академии наук, особо отметив важность его работ в области практической механики. В 1853 он был избран в адъюнкты, а в 1856 стал экстраординарным академиком. В 1858 в связи с его работами по теории шарнирных параллелограммов и теории приближения функций академики В.Я. Буняковский, М.В. Остроградский, Э.Х. Ленц, Б.С. Якоби, А.Я. Купфер, О.В. Струве подписали представление к избранию П.Л. Чебышева ординарным академиком, что и произошло в 1859 году.

Научные труды академика П.Л. Чебышева относятся к следующим категориям: 1) теории чисел, 2) теории вероятностей, 3) интерполированию, 4) теории наилучшего приближения функций, 5) интегральному исчислению, 6) картографии, баллистике и астрономии, 7) теории механизмов. Из этого перечня видно, как разнообразны были его научные интересы, как широк был диапазон его творчества. Чебышев не принадлежал к тем ученым, которые всю жизнь отдают исследованию какой-нибудь одной узкой отрасли науки. Он с одинаковым успехом работал в нескольких научных областях и в каждой получал результаты фундаментального значения, создавшие ему мировую славу. Важно при этом заметить, что теорией



Рис. 1: П.Л. Чебышев, 1865

вероятностей и теорией механизмов академик П.Л. Чебышев занимался (с некоторыми перерывами) очень долгое время, а теорией наилучшего приближения функций — почти всю жизнь [1, 2, 3].

Оценивая в целом научную работу П.Л. Чебышева, академик Е.И. Золотарев (1847-1878) писал: “В математике найти и верно поставить вопрос несравненно труднее, чем его решить; как скоро вопрос поставлен и поставлен верно, решение его так или иначе отыщется. Пафнутий Львович отличался изумительной способностью и умением ставить новые вопросы в математике. Это умение ученого математика служит несомненным признаком его гениальности” [4].

3. Работа Чебышева в СПб университете (35 лет)

После успешного окончания в 1841 Московского университета и защиты магистерской диссертации (1846) «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», П.Л. Чебышев переехал в СПб в 1847 и в том же году он утвержден в звании адъюнкт-профессора СПб университета. Чтобы получить право чтения лекций в университете, он защитил еще одну диссертацию — «Об интегрировании с помощью логарифмов», после чего читал лекции по высшей алгебре, теории чисел, теории вероятностей, геометрии, теории эллиптических функций, практической механике (1852-1856). В 1849 П.Л. Чебышев защитил в СПб университете докторскую диссертацию «Теория сравнений», удостоенную Демидовской премии Академии наук. С 1850 по 1882 он занимал должность профессора С.-Петербургского университета.

Профессор П.Л. Чебышев был выдающимся педагогом. Вот что писал о нем один из слушателей, впоследствии профессор СПб университета, К.А. Поссе: “В конце 60-х годов, когда я был студентом 3-го и 4-го курсов, Чебышев читал нам теорию определенных интегралов, интегрирование уравнений, теорию чисел и теорию вероятностей. Лекции его были чрезвычайно увлекательны, и многие из нас слушали его курсы по 2 раза, на 3-м и 4-м курсах, сожалея, что время не позволяло прослушать вторично излагаемые им предметы” [5].

“Лекции П.Л. Чебышева были невелики по объему, но содержательны и очень доступны” — вспоминал его ученик А.М. Ляпунов. Он же отмечал, что “П.Л. Чебышев заботился не



Рис. 2: Императорский Санкт-Петербургский университет, 1880

столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов, именно поэтому большинство студентов усваивали эти лекции очень легко”.

Профессор П.Л. Чебышев обладал выдающимся педагогическим дарованием. Он был талантливым лектором, внимательным и справедливым экзаменатором, остроумным оппонентом на научных диспутах.

Расставаясь с Пафнутием Львовичем в 1882, ректор университета А.Н. Бекетов от имени Совета университета сказал: “Приветствуя вас в настоящий день, Совет университета желает почтить в лице вашем знаменитого ученого, в течение 35 лет потрудившегося на пользу науке и юношеству, в честь и славу России. Глубокомысленные ваши исследования по разным отраслям математического анализа создали вам громкое имя, известное по всей Европе; исследования эти навсегда принадлежат науке; деятельность же ваша на поприще русского просвещения неразрывно связана с нашим университетом и всегда будет служить одним из лучших украшений его летописи”.

Здесь же, в главном здании университета, в его домовая церкви, состоялось отпевание П.Л. Чебышева 29 ноября 1894.

4. Работа Чебышева в Артиллерийском отделении Военного учебного комитета (40 лет)

Крымская война 1853–1856 показала, что гладкоствольная дульнозарядная артиллерия исчерпала свои боевые возможности и что будущее за нарезным оружием. Гладкоствольные орудия проигрывали нарезным как по дальности боя, так и по кучности. Поэтому в области вооружения 1860-е гг. ознаменовались переходом от гладкоствольных орудий к нарезной ар-



Рис. 3: П.Л. Чебышев среди профессоров физ.-мат. факультета С.-Петербургского университета. Сидят слева направо: А.В. Советов, П.Л. Чебышев, К.Ф. Кесслер, А.Н. Савич, П. А. Пузыревский, Ф.В. Овсянников, А.Н. Бекетов. Стоят: Р.Э. Ленц, Н.А. Меншуткин, А.С. Фаминцын, И.И. Сомов, Ф.Ф. Петрушевский, Д.И. Менделеев, А.Н. Коркин

тиллерии. Перевооружение русской армии нарезной артиллерией произошло в ходе военных реформ 1860–70-х гг. Разработкой и производством артиллерийского вооружения в стране руководило Главное артиллерийское управление (ГАУ) (образовано в 1862). Оно же организовывало производство боеприпасов, артиллерийских приборов и других предметов артиллерийского снабжения, а также осуществляло техническое, учебное, научное и хозяйственное руководство артиллерией. В процессе перевооружения перед ГАУ возник ряд новых баллистических проблем, а также непростых вопросов, связанных, в частности, с устройством орудийных стволов, замков и лафетов. К решению этих и многих других вопросов были привлечены выдающиеся ученые, в том числе и П.Л. Чебышев, сделавшие крупные открытия в связанных с артиллерией фундаментальных и прикладных науках.

П.Л. Чебышев стал работать в ГАУ с начала 1856. Он получил приближенную формулу дальности полета снаряда, спроектировал несколько типов снарядов и разработал методы интерполирования траекторий, позволившие создать таблицы стрельбы. Уже в 1859 П.Л. Чебышев был награжден в связи с этой работой орденом Св. Анны 2-ой степени. В высочайшем Приказе от 10 сентября 1859 сказано “за отлично-усердные и весьма полезные, независимо от прямой по должности в Академии обязанности, труды по математическим изысканиям в Артиллерийском Комитете в продолжении четырех лет, весьма много способствовавшие к разрешению в настоящее время вопросов о нарезных орудиях и продолговатых снарядах” [2].

В течение 40 лет П.Л. Чебышев принимал активное участие в работе ГАУ, направленной на повышение дальноточности и точности артиллерийской стрельбы. Для обработки резуль-

татов опытных стрельб он применил методы теории вероятностей. В курсах баллистики до наших дней сохранилась формула Чебышева для вычисления дальности полета снаряда. В 1873 он предложил так называемые “квадратурные формулы Чебышева”, позволяющие упростить вычисления и сократить их объем.

В 1867 П.Л. Чебышев был избран членом ГАУ, а в 1870 – почетным членом Артиллерийской академии. Многолетними трудами в ГАУ, где он работал вплоть до своей внезапной кончины, П.Л. Чебышев оказал большое влияние на развитие русской артиллерийской науки и на приобщение ученых-артиллеристов к математике. Он был руководителем и консультантом многих выдающихся русских артиллеристов (Н.В.Маиевского, П.М.Альбицкого и др.) по вопросам специальных наук, имевших отношение к математическому анализу. Он способствовал правильной постановке курсов чистой математики в Артиллерийской академии и училище. Этой сфере его деятельности дал высокую оценку известный профессор и выдающийся деятель Артиллерийской академии Л.Л. Кирпичев в предисловии к своей книге “Начала баллистики”, где говорится, что П.Л. Чебышеву мы “обязаны за пролитие научного света на многие вопросы, имеющие связь с баллистикой и артиллерией”.

Поэтому не случайно, что именно в разгар Великой Отечественной войны, в 1944 (год 50-летия со дня кончины П.Л. Чебышева), когда артиллерия проявила свою выдающуюся роль, АН СССР учредила премию им. П.Л. Чебышева.

5. Работа Чебышева в Ученом комитете Министерства народного просвещения (17 лет)

Министерство народного просвещения (МНП) (1802-1817, 1824-1917) – это центральное государственное учреждение в Российской империи, руководившее учреждениями народного просвещения и науки.

В 1856 статский советник П.Л. Чебышев был назначен членом Ученого комитета МНП по математике. На него возлагалась ответственность за

- 1) участие в разработке уставов низших, средних и высших школ;
- 2) рецензирование математических учебников,
- 3) постоянное наблюдение за тем, в каких учебных руководствах по математике нуждаются школы для более успешного преподавания, и нахождение средств для удовлетворения этой нужды,
- 4) составление и рассмотрение программ по математике для низших и средних училищ,
- 5) рассмотрение книг физико-математического содержания, предназначавшихся для поднесения царю и членам его семьи, как особенно полезных, или распространение которых в обществе необходимо было предупредить, как недоброкачественных,
- 6) рекомендация книг математического содержания, которые предполагались для распространения в учебных заведениях страны.

Один лишь перечень этих обязанностей Всероссийского масштаба в наше время может показаться непосильным для одного человека. Но не в эпоху Великих реформ. И эти обязанности П.Л.Чебышев исполнял в течение 17 лет (1857–1873). Причем его работа в Ученом комитете МНП сыграла важную роль в жизни страны.

5.1. “Великие реформы” Александра II. Реформы науки и образования

Александр II Николаевич (Освободитель) – Император всероссийский, вступил на престол в 1855 г. в возрасте 36 лет, в то время, когда страна находилась в условиях тяжелой Крымской войны. В этой войне России пришлось воевать с соединенными силами почти всех главных европейских держав. Тем не менее, Александру II удалось добиться мира. В последующие годы

своего царствования он добился выдающихся успехов во внешней политике. Империя значительно расширилась за счет завоевания и включения Северного Кавказа, Дальнего Востока, Бессарабии, территорий Средней Азии.

По окончании Крымской войны, страна с нетерпением ожидала перемен. Наиболее злободневным был вопрос освобождения крепостных крестьян, поскольку дальнейшее развитие хозяйства на основе крепостного труда становилось невозможным. В течение 5 лет Император Александр II пытался убеждением преодолеть сопротивление дворянства, препятствовавшего отмене крепостного права. Наконец, 19 февраля 1861 г. (т.е. 160 лет назад) было подписано долгожданное “Положение о крестьянах, вышедших из крепостной зависимости” и манифест, в котором было провозглашено об освобождении 22,6 миллионов крестьян от крепостной зависимости. Именно за это Император и получил в народе имя Освободитель.

Александр II инициировал ряд реформ, кардинально преобразовавших все стороны государственной и общественной жизни: ликвидация военных поселений (1857), отмена крепостного права (1861), финансовая реформа (1863), реформа высшего образования (1863-1864), земская реформа и судебная реформа (1864), реформа городского самоуправления (1870), реформа среднего образования (1871), военная реформа (1874). Это были действительно крупные изменения, сравнимые с реформами Петра I. До революции Император Александр II был чрезвычайно популярен, ведь больше всего памятников было поставлено именно ему. Помимо знаменитого опекушинского памятника в Кремле, в деревнях и селах России было установлено несколько сотен монументов. Сейчас осталось только 2 памятника: в Хельсинки (Финляндия) и в Софии (Болгария).

После реорганизации 1863 года центральный аппарат МНП состоял из Совета министра, Департамента народного просвещения и Ученого комитета. В ведении министерства находились Императорская С.-Петербургская Академия наук, Николаевская главная обсерватория, Императорская публичная библиотека, Румянцевский музей. Штат МНП сократился с 194 человек (в 1862) до 42 человек! Ученый комитет (1817-1831, 1856-1917) МНП ведал составлением учебных программ, рассмотрением самих учебников, наблюдением за тем, в каких руководствах нуждаются учебные заведения для более успешного преподавания.

Радикальное сокращение штата Министерства народного просвещения отразилось и на количественном составе Ученого комитета. Комитет состоял из председателя и по одному(!) члену “по каждой из главных отраслей наук: 1) по русской словесности, 2) по древней филологии, 3) по новой филологии, 4) по истории и географии, 5) по математической науке и 6) по естественным наукам”.

Деятельность П.Л. Чебышева в Ученом комитете проходила в наиболее трудный период жизни самого комитета: надлежало подготовить и осуществить на деле одну из великих реформ того времени – реформу образования. Ни один из вопросов, касающихся математики и связанных с этой реформой, не был решен без участия Чебышева, голос которого, как одного из авторитетнейших ученых своего времени, был почти всегда решающим. Анализ этой стороны деятельности П.Л.Чебышева свидетельствует о том, что он был не только гениальным ученым, но и крупным деятелем в области народного просвещения, много поработавшим на пользу русских школ всех уровней.

К началу 1870-х годов П.Л. Чебышев остался единственным старейшим членом Ученого комитета. Рассмотрим подробнее некоторые аспекты деятельности П.Л. Чебышева в рамках Ученого комитета министерства народного просвещения.

5.2. Чебышев и университетский устав 1863 г.

Александр II остался в истории, как великий реформатор, хотя и не все его начинания были доведены до конца. Свои преобразования царь проводил в условиях критики и с правой, консервативной, стороны, и с левой, либерально-демократической, причем не просто в



Рис. 4: Здание Министерства народного просвещения на наб. р. Фонтанки (пл. Ломоносова). Архитектор К.И. Росси.

условиях критики русских либералов, но и при активном противодействии зарождавшегося революционного терроризма. Тайные организации (“Земля и Воля”, “Народная воля”, “Черный передел” и др.) дважды организовывали покушения террористов (Каракозова в 1866 и Соловьева 1879) на жизнь Александра II. В третий раз они добились своего. Трагическая гибель Императора от рук народовольцев-бомбистов произошла 1 марта 1881 г. (т.е. 140 лет назад) на набережной Екатерининского канала (ныне канал им. Грибоедова).

П.Л. Чебышев, будучи всего на 3 года моложе Императора Александра II, в полной мере пережил непростой период Великих реформ, а также потрясений в общественной жизни, спровоцированных вышеупомянутыми террористическими организациями. Буквально сразу после Земельной реформы (февраль 1861) начали разворачиваться студенческие волнения, набравшие силу к маю 1861. Особенно сильно они проявились в столице – в С.-Петербургском университете. В мае 1861 были составлены новые правила для студентов, запрещавшие, между прочим, сходки, закрывавшие женщинам допуск в университет и ограничивавшие число освобожденных от платы. Для обсуждения этих правил Совет С.-Петербургского университета создал особую комиссию под председательством статского советника и профессора П.Л. Чебышева.

Комиссия П.Л. Чебышева оказалась в затруднительном положении. С одной стороны, она должна была учитывать крайнее недовольство студентов новыми правилами и, следовательно, не могла эти правила принять без изменения, с другой стороны, она не могла не считаться с требованиями власти. Комиссия П.Л. Чебышева нашла оригинальный компромиссный вариант решения проблемы, позаимствовав студенческие правила целиком из Дерптского университета. Устав Дерптского университета несколько отличался от таковых остальных российских университетов. Он предусматривал больше независимости от Министерства народного просвещения (МНП), но более жесткую внутреннюю дисциплину для студентов и преподавателей, разрешал преподавание на немецком языке, присуждение ученых степеней и званий. Правила, составленные комиссией П.Л. Чебышева, были одобрены Советом университета и посланы на утверждение министру МНП. Вернулись они с визой “к немедленному исполнению”, но в значительно искаженном виде. Утверждение этих правил вызвало оппозицию со стороны Совета С.-Петербургского университета. Вспыхнули студенческие волнения, приведшие к столкновениям с войсками и массовым арестам студентов. Наиболее влиятельная группа петербург-



Рис. 5: Император Александр II (1818–1881)

ской профессуры вместе с ректором Плетневым вынуждена была покинуть университет. Этот разгром С.-Петербургского университета послужил толчком для разработки проекта нового университетского устава. К разработке нового устава был привлечен П.Л. Чебышев.

Таким образом Пафнутий Львович был вовлечен в реформу образования и продолжал эту деятельность в последующие годы. Он неукоснительно участвовал в заседаниях Ученого комитета МНП, посвященных разработке нового университетского устава, участвовал в обсуждении многочисленных замечаний к проекту университетского устава 1863. В журналах заседаний Ученого комитета упоминаются выступления П.Л. Чебышева по поводу прав и обязанностей проректора, приват-доцентов, структуры университетского суда, слияния восточного факультета С.-Петербургского университета с Академией наук и по многим другим вопросам. Сохранились его письменные замечания к проекту университетского устава. В частности, Ученым комитетом было учтено замечание П.Л. Чебышева, касавшееся необходимости отделить практическую механику от аналитической. По уставу 1863 университеты получили отдельных профессоров по аналитической и практической механике. В том же 1863 в Московском университете кафедра прикладной математики, которую возглавлял Н.Д. Брашман, была переименована в кафедру теоретической и практической механики. Также было учтено замечание П.Л. Чебышева о том, чтобы будущий профессор имел непременно ученую степень по той науке, которая входит в состав его кафедры [1].

В результате, был принят новый Общий устав российских университетов, содержавший многие важные положения и существенные нововведения. Упомянем лишь некоторые из них. Так, новый устав

1) Предоставил университетам больше самостоятельности в делах их внутреннего управления и больше возможностей для развития. Главным органом университетского управления стал Университетский совет. Все административные и профессорские должности стали выборными (ректор - на 4 года). Более весомое значение получили факультетские советы.

2) Создал в университетах более благоприятные условия для научной и учебной деятельности.

3) Сделал преподавательскую работу в университетах более привлекательной для спо-

собных молодых людей, предопределив появление в будущем на университетских кафедрах достаточного числа квалифицированных преподавателей. Достаточно отметить увеличение денежного содержания преподавателям в два и более раза: ординарному профессору 3000 руб. экстраординарному профессору 2000 руб., доценту 1200 руб. в год.

4) Предусмотрел целый ряд специальных мер для побуждения студентов к занятию науками.

5) Открыл дорогу к созданию в российских университетах множества новых кафедр. Традиционные способы пополнения преподавательского коллектива университетов Устав 1863 дополнил новыми процедурами для подготовки к преподавательской деятельности талантливой молодежи. В частности:

а) Университетскому совету дано право оставлять при университете по своему усмотрению “стипендиатов для приготовления к профессорскому званию” (§ 42). Так, были оставлены при кафедре в Санкт-Петербургском университете: Д.К. Бобылев (1867), А.А. Марков (1878), А.М. Ляпунов (1880), Г.К. Суслов (1880), И.В. Мещерский (1882), Д.А. Граве (1885);

б) Совет получил право отправлять, с утверждением министра, “молодых людей за границу, для приготовления к занятию кафедр” (§ 42). Так, например, этой возможностью воспользовались Д.А. Лачинов (1862, Гейдельберг, Тюбинген) и Е.И. Золотарев (1872, Берлин, Гейдельберг);

в) В университетах был создан институт приват-доцентов (сверхштатных частных преподавателей). Многие выдающие русские ученые, в том числе механики, начинали свою преподавательскую деятельность в качестве именно приват-доцента: Е.И. Золотарев (1868, СПбУ), Д.К. Бобылев (1871, СПбУ), А.А. Марков (1880, СПбУ), А.М. Ляпунов (1885, СПбУ, Харьковский университет), Д.А. Граве (1885, СПбУ), П.И. Сомов (1886, СПбУ).

К концу 1860-х годов успех реформы науки и образования – одной из “Великих реформ” – был налицо. Поэтому неслучайно в 1869 г. была выпущена медаль с характерными для того периода времени словами: “Где высоко стоит наука, стоит высоко человек!”.



Рис. 6: Памятная медаль 1869 г.

С учетом большой работы над новым университетским уставом П.Л. Чебышев в 1863 получил чин действительного статского советника с формулировкой “за отличие”.

5.3. Рекомендательная библиография в 1860-х годах в России

Первый опыт рекомендательной библиографии в России относится к XVIII в., который принято называть веком Просвещения. В дальнейшем педагогический аспект рекомендательной библиографии стал важнейшим, а к середине XIX в. эта деятельность стала целенаправленной. Рекомендательная библиография в России приобрела размах, который не имеет аналога до сих пор. Собственно возникновение рекомендательной библиографии в России относят к 1860-м годам, когда после крестьянской реформы страна вступила на путь капиталистического развития. Требовалось всенародное повышение грамотности, профессионализма во всех

сферах общественной деятельности. И именно эту задачу усилиями, прежде всего, самых прогрессивных русских педагогов стала решать рекомендательная библиография. Первым на этот зов жизни – “Что читать народу?” – откликнулся журнал “Русский педагогический вестник”, где в 1860 был открыт особый отдел для рассмотрения книг, годных для народного образования. Имелись в виду “книги, годные для употребления в воскресных школах и по цене более или менее доступные большинству” [6, 7]. В этом Указателе помещены 62 книги, сравнительно хорошо аннотированные. Но собственно дешевых народных книг среди них мало – преобладали дорогие книги и учебники. Необходимых книг для народного чтения в то время не было. Ощущался не только недостаток в хороших учебниках и книгах для чтения, написанных для народа, но и неизвестность немногих хороших из них, когда-либо появившихся в русской литературе.

Ученый комитет Министерства народного просвещения (МНП) в 1863 поручил А.Д. Галахову и А.Н. Бекетову составить “Реестр книг, которые могли бы быть с пользою употреблены в начальных народных училищах” [8]. В нем отражены 37 книг и даны отрицательные отзывы вообще о качестве народных изданий. После того как к этой работе подключился П.Л. Чебышев, в марте 1865 в том же журнале был опубликован второй список учебников для народных школ (21 название), подготовленный новым коллективом авторов – А.Д. Галахов, П.Л. Чебышев и Н.Х. Вессель. Осознавая серьезность и значимость разработки рекомендательной библиографии, МНП распространило эту работу не только на учебники и учебные пособия, но и на книги для школьных и народных библиотек.

Обратим внимание на “Обзор книг и руководств для общего образования” (1868–1870), охвативший книги по естествознанию и математике. Авторское предисловие свидетельствует, что обзор был задуман широко и предусматривал охват всех отраслей знания, но осуществлены лишь два отдела – естествознание и математика. В этом, без сомнения, проявился личный результат трудов П.Л. Чебышева, единолично ответственного за математическое направление образования в России.

К отбору книг и учебников П.Л. Чебышев подходил внимательно, часто давал отрицательные отзывы на книги, написанные уважаемыми учеными, но недостаточно хорошо изложенные или слишком сложно написанные для понимания учащимися. Кроме того, при отборе учебников он руководствовался следующим правилом: “Новое в преподавании математики полезно только тогда, когда на опыте проверено, что оно лучше старого”.

В целом, рекомендательная библиография в России начиная со второй половины XIX в. приобрела явно выраженный поступательный характер и дает такие совершенные образцы, которые пока недостижимы в наше время.

5.4. Чебышев и преподавание математики в начальных школах

Существенный вклад внес П.Л. Чебышев в дело совершенствования преподавания математики в начальных школах России. Ему принадлежит проект организации реальных курсов при уездных училищах. Он же одним из первых представил свой проект программы по математике для начальных школ. В ней впервые обращается внимание на твердое усвоение механизма арифметических вычислений и на верное и быстрое решение устных и письменных задач. Относительно характера преподавания геометрии в уездных училищах в примечании к программе по этой науке сказано кратко: “Ничего не должно быть предлагаемо без доказательств”. Вместе с тем П.Л. Чебышев рекомендовал упражнять учеников в решении задач *“не только в классе черчением и вычислением, но и в поле с помощью астролябии, цепи и других землемерных инструментов, дабы, с одной стороны, утвердить в них теоретические знания, а с другой – ознакомить их с практическим приложением наук меры и числа”*. Особо выделялись задачи с практическим содержанием как развивающие соображение учащихся. П.Л. Чебышев принимал активное участие в разработке учебного плана 1858 по математике

и программы по математике 1872–1873 для средних школ.

В проекте устава 1858 им были четко сформулированы цели преподавания математики в гимназиях: 1) развитие умственных способностей; 2) сообщение сведений, необходимых для всякого образованного человека; 3) подготовка специальными занятиями физ.-мат. науками и приложениями к практической деятельности. В зависимости от этих целей курс математики в гимназии делился на общий и специальный. В течение 6 лет (1858–1864) учебный план П.Л. Чебышева по математике для гимназий неоднократно изменялся. В 1872 П.Л. Чебышев составил примерную программу по математике для гимназий.

Являясь профессором СПб университета, П.Л. Чебышев, тем не менее, пристальное внимание уделял школьным учебникам, стараясь оградить школы от плохих учебников математики. По свидетельству проф. К.А. Поссе (1847–1928), русского математика, специалиста в области мат. анализа, “главный контингент лиц, недовольных Чебышевым, составляли авторы плохих учебников по элементарной математике, к которым Чебышев, в бытность свою членом Ученого Комитета министерства нар. просвещения, относился с неумолимой строгостью, зная весь вред, приносимый этими учебниками ученикам и ту пользу, которую, в случае одобрения комитетом, извлекали для себя авторы. Весьма возможно, что если бы Чебышев подольше оставался действительным членом ученого комитета (почетным он был до конца своей жизни, но в делах комитета уже участия не принимал), то многие из существующих теперь учебников, выдержавших десятки изданий, не дошли бы и до второго” [5].

О степени строгости П.Л. Чебышева при рецензировании математических учебников говорят следующие цифры: из 44 сочинений по математике, поступивших на конкурсы, объявленные в 1864 и 1865, П.Л. Чебышев ни одно не нашел вполне удовлетворяющим требованиям конкурса. Кроме этого, он дал отзыв еще о 167 математических сочинениях, предназначенных в качестве учебников для начальных и средних школ. Вот требования, которые П.Л. Чебышев предъявлял к учебникам математики:

- 1) должны быть приспособлены не только к уровню науки, но еще в большей мере к потребностям школьной системы;
- 2) “в немногое многое”, наличие основного ядра;
- 3) не должно быть излишних подробностей, особенно в вопросах второстепенной важности;
- 4) четкое разграничение существенного и второстепенного;
- 5) отработанность языка, ясность и строгость доказательств;
- 6) полнота содержания;
- 7) изложение материала не должно отклоняться от общепринятой системы преподавания в школе.

Таким образом, несомненна деятельность П.Л. Чебышева, направленная на совершенствование школьных учебников математики и развитие методики преподавания математики. Позднее известный русский педагог А.П. Киселев (1852–1940), ученик П.Л. Чебышева, создал выдающийся школьный учебник математики, строго выдерживая принципы, сформулированные учителем.

5.5. Чебышев и систематическая подготовка инженеров в России

Во 2-й половине XIX века острейшая потребность в квалифицированных технических кадрах, вызванная бурным развитием машиностроения, поставила перед российской высшей школой вопрос о значительном увеличении числа подготавливаемых инженеров-машиностроителей. Весной 1876 для усовершенствования университетского устава (1863) были созданы четыре специальные комиссии. В одну из них – комиссию по физ.-мат. факультету – вошел П.Л. Чебышев. Среди прочих, в ней обсуждался вопрос об организации при физико-математических факультетах технических отделений. Этот вопрос представлял несомненную важность для системы высшего образования в России.

Профессор Киевского университета И.И. Рахманинов предложил готовить таких инженеров на физико-математических факультетах университетов. П.Л. Чебышев аргументированно выступил против этого предложения: *“Доводы, приведенные в записке И.И. Рахманинова, не могут быть признаны достаточными для того, чтобы сделать такое нововведение, противное основной задаче физико-математического факультета - дать строго научное образование по части наук математических или естественных, при котором молодые люди с особенным успехом могут посвятить себя практической деятельности, весьма разнообразной и в большей части случаев не представляющей ничего общего с техникой. В записке И.И. Рахманинова совсем не обращено внимание на разницу, которая существует между науками физико-математическими и знаниями техническими, которые представляют собой собрания сведений из разных наук, без всякой внутренней связи. Так, например, в учении о паровых машинах говорится о топливе, о тяге, о воде, о накипах и пр. и пр. Столь разнородные предметы никаким образом не могут быть излагаемы в строго научной форме, в которой излагаются все предметы физико-математического факультета и которые так благотворно действуют на развитие умственной способности.*

Особенно поразительна, - добавлял П.Л. Чебышев, - разница в употреблении математики в науках математических и в вопросах технических: нестрогость выводов, которая ни под каким видом не допускается в науках математических и от которой так остерегаются все учащиеся им, при решении вопросов технических является вещью очень обыкновенной, и это происходит не от несовершенства математических методов, а от самой сущности вопросов технических, вследствие этого преждевременное занятие науками техническими, требующими употребления математического анализа, противодействует образованию математического склада ума” [9].

Точка зрения П.Л. Чебышева, считавшего более целесообразным сосредоточить подготовку инженеров в высших технических учебных заведениях, а в университетах готовить специалистов по фундаментальным наукам, оказалась правильной. Именно по этому пути – пути создания значительного числа технических ВУЗов различного профиля – и пошла российская высшая школа. К 1913–1914 г. в России помимо 10 университетов (35695 учащихся) действовали 15 инженерно-промышленных институтов (23329 учащихся), 8 военных и военно-морских (1182 учащихся), 6 земледельческих (3307 учащихся) [10].

Сам П.Л. Чебышев вовсе не был склонен пренебрегать техническим образованием в угоду фундаментальному физико-математическому образованию. Тем более, что сам он имел к тому времени большой опыт преподавания технических дисциплин и, вообще, проявлял удивительные способности и интерес к технике и промышленности. Так, в 1852–1858, будучи экстраординарным профессором СПб университета, он в то же время читал лекции по практической механике — достаточно новой в то время дисциплине — в Александровском лицее. До 1844 г. Александровский лицей назывался Царскосельским, по месту своего расположения. Это было одно из старейших привилегированных учебных заведений России, в котором получили образование многие знаменитые русские писатели и деятели: А.С. Пушкин, И.И. Пущин, А.А. Дельвиг, В.К. Кюхельбекер, М.Е. Салтыков-Щедрин и др. В 1844 г. лицей, переименованный в Александровский, был переведен в С.-Петербург, и тогда же получил новый устав, предполагавший целью обучения в лицее “воспитание благородного юношества для гражданской службы по всем частям, требующим высшего образования, преимущественно же для служения по Министерству внутренних дел”. В первые годы существования лицея (1811–1816) практическая механика входила в состав кафедры физико-математических наук, а в 1852 г. открылась самостоятельная новая кафедра практической механики. Именно тогда для чтения лекций по практической механике в Александровский лицей и был приглашен экстраординарный профессор Санкт-Петербургского университета П.Л. Чебышев.

Кроме того, П.Л. Чебышев принимал участие в постановке преподавания математики в военно-учебных заведениях. В 1856 при Главном управлении военно-учебных заведений была

создана под председательством М.В. Остроградского особая специальная комиссия по рассмотрению руководств, составленных для военно-учебных заведений. В комиссию в качестве членов были приглашены наиболее крупные русские математики, в том числе и П.Л. Чебышев.

Еще одним ярким документом, свидетельствующим о большом интересе П.Л. Чебышева к технике и промышленности, является его собственноручно написанный отчет о командировке за границу (июнь-ноябрь 1852). Опуская весьма интересные подробности, в том числе о встречах с известными западноевропейскими математиками, приведем лишь перечень городов, через которые проходил маршрут П.Л. Чебышева, и тех объектов (в скобках), ради которых он предпринял поездку: Штетин, Берлин, Лилль (осмотр ветряных мельниц), Париж (обозрение машин и моделей в национальном музее искусств и ремесел, производство машин на фабриках, паровые машины Каве с качающимися цилиндрами, турбины на мельнице в Сент-Море, машины механика Вокансона, арифметическая машина Паскаля, различные приводы для поднятия воды, машины бумагопрядильные и льнопрядильные, машины металлургические), Мо (водяные колеса на мельнице), Мец (заводы с фабриками машин при них), Шательро (оружейный завод), Ангулем (место, известное по производству превосходной писчей бумаги), Бордо (висячий мост через Гарону), Рюелль (пушечно-литейный завод), Корона (писчебумажная фабрика, где одна часть приводится в движение двумя турбинами), Лондон (фабрики Мозле, Нипера и Пена; Royal Polytechnic Institution — заведение, значительно способствующее к распространению в народе сведений по технологии и практической механике) [2].

Наконец, свидетельством высочайшего инженерного уровня П.Л. Чебышева являются его механизмы, которых он изобрел более 40. Некоторые из этих новых механизмов участвовали во Всемирных выставках: паровая машина (1876, Филадельфия), «стопоходящая машина» (1878, Париж), «самокатное кресло», «автоматический арифмометр», механизмы для сортировки зерна и преобразования движений (1893, Чикаго).

В целом, работа Чебышева в течение 17 лет в Ученом комитете МНП (1856–1873), как научно-педагогическом центре России, сыграла важную роль в период “Великих реформ” Императора Александра II.

6. Чебышев и создание русской математической школы

Для П.Л. Чебышева не меньшее значение, чем конкретные научные результаты, всегда имела задача развития российской математической школы. Созданию этой школы во многом способствовали качества П.Л. Чебышева как профессора. П.Л. Чебышев был не только хорошим лектором, но и замечательным научным руководителем, обладавшим редкой способностью удачно выбирать и точно ставить перед молодыми исследователями новые вопросы, занятия которыми всегда приводили к более или менее ценным результатам. Каждую субботу от 14 до 16 часов у П.Л. Чебышева был приемный день, когда двери его квартиры были открыты для каждого, кто хотел о чем-либо посоветоваться по поводу своих исследований. Редко кто уходил, не обогатившись новыми мыслями и новыми планами [11].

Позднее многочисленные ученики П.Л. Чебышева внесли самостоятельный значительный вклад в науку. Среди них такие известные математики, механики и физики, как А.В. Васильев, Г.Ф. Вороной, Д.А. Граве, Е.И. Золотарев, А.Н. Коркин, Д.А. Лачинов, А.М. Ляпунов, А.А. Марков (старший), К.А. Поссе, И.Л. Пташицкий, П.И. Сомов, Ю.В. Сохоцкий, М.А. Тихомандрицкий. Новую теорию пространственных зубчатых механизмов создал ученик П.Л. Чебышева – Х.И. Гохман. Над теорией структуры плоских и пространственных механизмов успешно трудился другой ученик Чебышева – П.И. Сомов (сын И.И. Сомова).

П.Л. Чебышев и его ученики сформировали ядро того научного коллектива математиков, за которым со временем закрепилось название Петербургской математической школы. “Про-

должительная профессорская деятельность П.Л. Чебышева, в течение 35 лет принадлежавшая С.-Петербургскому университету, – писал акад. А.М. Ляпунов – не могла не отразиться самым благотворным образом на всем составе математического факультета, кафедры которого замещались наиболее талантливыми из его учеников. Отсюда понятно то высокое положение, которого давно уже достиг этот факультет...”» [12].

Эта научная школа, созданная П.Л. Чебышевым, представляла исключительный по силе научный коллектив и отличалась особым направлением в развитии, заложенным ее основателем. Причина в том, что неизменный интерес П.Л. Чебышева к вопросам практики был настолько велик, что, пожалуй, этим интересом в значительной мере определяется своеобразие П.Л. Чебышева как ученого. По мнению Б.В. Гнеденко, без преувеличения можно сказать, что большая часть лучших математических открытий П.Л. Чебышева навеяна прикладными работами, в частности, его исследованиями по теории механизмов [13].

Наиболее полно идея плодотворности связи теории с практикой и уверенность в их взаимобогащающем влиянии была высказана П.Л. Чебышевым в его докладе “Черчение географических карт” на торжественном акте 8 февраля 1856 г. в Санкт-Петербургском университете: *“Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новое в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика явно обнаруживает неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике.*

Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных методов. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической жизни человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?” [2].

Именно поэтому, – продолжает П.Л. Чебышев – *“большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, совершенно новым для науки, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного”.*

По свидетельству А.М. Ляпунова, “П.Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими) и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев. Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории – таково направление большинства работ П.Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды” [14].

Из приведенной цитаты видно, что различным абстрактным построениям, далеким от каких-либо непосредственных приложений, петербургская школа не придавала почти никакого значения. Для исследования брались главным образом вопросы прикладного значения. Решение обычно доводилось до удобной формулы или до удобного способа вычисления. Результаты, полученные при решении частных задач, обобщались и создавалась более или менее общая теория, охватывавшая большое число частных случаев. Идти от практики к теории, подчинить дело создания теории делу решения конкретных вопросов, соблюдая при этом полную математическую строгость, – вот что наиболее характерно для П.Л. Чебышева и создан-

ной им научной школы.

Труды П.Л. Чебышева на пользу России были отмечены высокими государственными наградами — орденами Святого Александра Невского, Святого Владимира II степени, Святой Анны I степени, Святого Станислава I степени.



Рис. 7: Награды П.Л. Чебышева: Императорский Орден Св. Блгв. кн. Александра Невского “В воздаяние трудов, для Отечества подъемлемых”, Императорский орден Св. равноап. кн. Владимира (дважды) “Полезьа, честь и слава”, Императорский орден Св. Анны (дважды) “Любящим правду, благочестие и верность”, Императорский и Царский Орден Св. Станислава (дважды) “Награждая, поощряет”.

7. Заключение

Мы рассмотрели работу П.Л. Чебышева в четырех должностях. Каждый из этих видов работ отличался высочайшим качеством, добросовестностью и профессионализмом. Подведем простой арифметический итог по сумме лет, затраченных П.Л. Чебышевым в течение жизни на официально оформленную работу (не считая лет пребывания на почетных должностях): 48 (Академия наук) + 35 (СПб университет) + 40 (Военный ученый комитет) + 17 (Министерство народного просвещения). Среднестатистический ученый мог бы гордиться, если бы сумел проработать так же эффективно, как П.Л. Чебышев, хотя бы в одной из упомянутых должностей. Но для П.Л. Чебышева, прожившего 73 года, 140 лет суммарной работы стали естественным результатом сочетания гениальности и верности служения Отечеству.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышев. – Л.: Изд-во “Наука”, 1976.
2. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. Прочие сочинения. Биографические материалы. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1951. – 474 с.
3. Чебышев П. Л. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
4. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев. М.; Л.: Наука, 1966.
5. Поссе К. А. Чебышев, Пафнутий Львович // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона: в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.
6. Русский педагогический вестник 1860, № 5-9; 11 и 12.

7. Русский педагогический вестник 1861, № 1.
8. Журнал Министерства народного просвещения. 1863, № 6.
9. История механики в России / Под ред. А.Н. Боголюбова, И.З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1987. – 392 с.
10. Иванов А. Е. Высшая школа России в конце XIX – начале XX века. М., 1991.
11. Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. Т. 6, С.-Петербург, 1897–1904.
12. Ляпунов А. М. П.Л. Чебышев. Харьков: Тип. Зильберберга, 1885.
13. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
14. Ляпунов А. М. П.Л. Чебышев. – Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, т. 4, 1895, № 5-6.

REFERENCES

1. Prudnikov, V. E. 1976, “Pafnutii Lvovich Chebyshev”, Leningrad, “Nauka” (in Russian).
2. Chebyshev, P. L. 1951, “Complete set of works. vol. 5. Other works. Biographical materials”, Moscow, Leningrad, “Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR” (in Russian).
3. Chebyshev, P. L. 1955, Selected Works. Moscow, “Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR” (in Russian).
4. Ozhigova, E. P. 1966, “Egor Ivanovich Zolotarev”, Moscow, Leningrad, “Nauka” (in Russian).
5. Posse, K. A. 1890–1907, “Chebyshev, Pafnutii Lvovich”, *Encyclopedic Dictionary by Brockhaus and Efron: in 86 vol.*, vol. 82 and 4-th addition, Saint Petersburg (in Russian).
6. 1860, *Russian Pedagogical Bulletin*, no. 5-9, 11 and 12 (in Russian).
7. 1861, *Russian Pedagogical Bulletin*, no. 1 (in Russian).
8. 1863, *Journal of the Ministry of Public Education*, no. 6 (in Russian).
9. 1987, *History of Mechanics in Russia* / Ed. by A.N. Bogolyubov, I.Z. Stockalo, Kiev, “Naukova Dumka” (in Russian).
10. Ivanov, A. E., 1991, “Higher school of Russia in the late XIX - early XX century”, Moscow (in Russian).
11. Vengerov, S. A., 1897–1904, “Critical-biographical dictionary of Russian writers and scientists”, vol. 6, St. Petersburg (in Russian).
12. Lyapunov, A. M., 1885, “P.L. Chebyshev”, Kharkov, Silberberg Printing House (in Russian).
13. Gnedenko, B. V., 1946, “Essays on the history of mathematics in Russia”, Moscow, Leningrad, “OGIZ” (in Russian).
14. Lyapunov, A. M., 1895, “P.L. Chebyshev”, *Message. Kharkov. mat. Society*, vol. 4, no. 5-6 (in Russian).

Получено 05.04.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-423-437

Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и преломлении плоской гармонической звуковой волны однородной изотропной упругой пластиной с непрерывно неоднородным анизотропным упругим покрытием.

Полагается, что пластина граничит с идеальными однородными жидкостями.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца. Распространение упругих волн в однородной изотропной упругой пластине описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца для продольных и поперечных волн. Колебания неоднородного анизотропного упругого покрытия описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном анизотропном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое описание отраженного и прошедшего через пластину акустических полей.

Рассмотрены частные случаи, когда материал неоднородного покрытия является трансверсально-изотропным и изотропным.

Представлены результаты численных расчетов зависимости коэффициента отражения однородной изотропной пластины с трансверсально-изотропным покрытием от угла падения плоской волны.

Ключевые слова: звуковые волны, отражение и преломление, упругая пластина, неоднородное анизотропное упругое покрытие.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 423–437.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-423-437

Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating²

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Abstract

In paper the problem of the reflection and refraction of a plane harmonic sound wave by a homogeneous isotropic elastic plate with an continuously inhomogeneous anisotropic elastic coating is considered.

It is assumed that the plate is adjoin to ideal fluids.

The propagation of small perturbations in a ideal fluid in the case of steady state oscillations is described by Helmholtz's equation. The propagation of elastic waves in a uniform isotropic elastic plate is described by scalar and vector Helmholtz's equations for longitudinal and transverse waves. Oscillations of an inhomogeneous anisotropic elastic coating are described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous anisotropic coating.

An analytical description of the reflected and transmitted through the plate acoustic fields is obtained.

Particular cases when the material of an inhomogeneous coating is transversely isotropic and isotropic are considered.

The results of numerical calculations of dependence of reflection coefficient of a homogeneous isotropic plate with a transversely isotropic coating from the incidence angle of plane wave are presented.

Keywords: sound waves, reflection and refraction elastic plate, inhomogeneous anisotropic elastic coating.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2021, "Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423–437.

²Acknowledgments: The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

1. Введение

Задача об отражении и прохождении звука через плоский однородный изотропный упругий слой рассматривалась во многих работах, например, в [1, 2]. В работах [3, 4] изучено отражение звука однородными анизотропными упругими пластинами. В [5, 6] осуществлен учет термоупругости однородного изотропного плоского слоя при прохождении плоской звуковой волны. Прохождение звуковых волн через плоские неоднородные упругие слои исследовано в [7 – 9]. В [7] слой полагался изотропным, а в [8, 9] — трансверсально-изотропным. В [10, 11] решены задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. В [10] граничащие со слоем жидкости полагались идеальными, а в [11] — вязкими. Прохождение плоской звуковой волны через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, исследовано в [12, 13]. Обратные задачи об определении параметров неоднородности материала плоского упругого слоя по отражению и прохождению звука решены в [14, 15].

Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны однородной изотропной упругой пластиной с изотропным и неоднородным по толщине покрытием рассмотрена в [16 – 18]. Граничащие с пластиной жидкости полагались идеальными [16, 17] и вязкими [18]. Осуществлено моделирование неоднородного изотропного покрытия упругой [19] и термоупругой [20] пластин с оптимальными звукоотражающими свойствами. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [21].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным анизотропным покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного анизотропного упругого слоя толщиной h . Введем декартову систему прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 с осью x_1 , лежащей в плоскости, разделяющей однородную пластину и неоднородное покрытие и осью x_3 , направленной вниз по нормали к поверхности пластины (рис.1). Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями координаты x_3 , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты x_3 : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(x_3)$, $\rho = \rho(x_3)$.

Поверхности покрытия $x_3 = -h$ и однородной пластины $x_3 = H$ граничат с идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $x_3 < -h$ на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор $\mathbf{k}_1$ которой лежит в плоскости x_1, x_3 . Потенциал скорости падающей волны равен

$$\psi_0 = A_0 \exp\{i[k_{11}x + k_{13}(x_3 + h) - \omega t]\}, \quad (2.1)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{11} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{13} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на оси координат x_1 и x_3 соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $x_3 < -h$; ω — круговая частота; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью x_3 ; t — время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

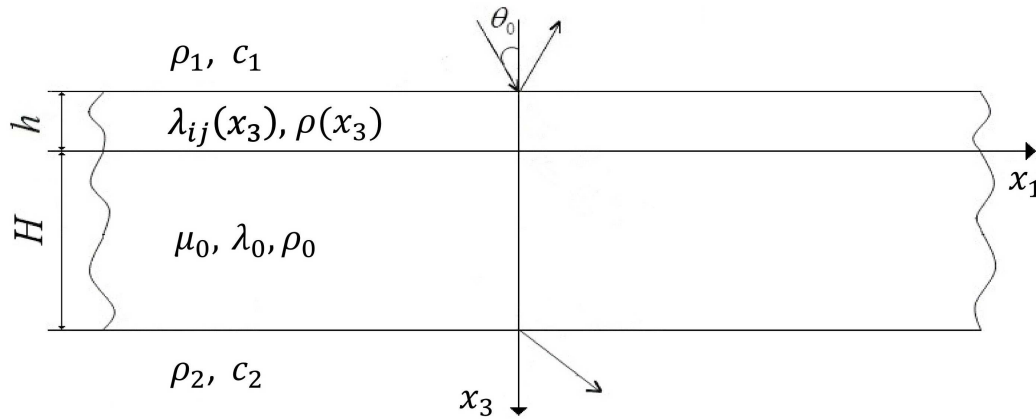


Рис. 1: Геометрия задачи

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также волновые поля в пластине и ее покрытии.

3. Математическая модель задачи

Так как волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_1$ лежит в плоскости x_1, x_3 и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2 , а неоднородность материала покрытия проявляется лишь по оси x_3 , то от координаты x_2 не будут зависеть ни отраженное, ни прошедшее через пластину, ни возбужденные в однородной пластине и в неоднородном покрытии волновые поля.

Потенциалы скоростей отраженной от пластины с покрытием и прошедшей через нее волн ψ_1 и ψ_2 в случае установившегося режима колебаний являются решениями уравнений Гельмгольца [1, 2]

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $x_3 > H$.

Вектор скорости частиц жидкости и акустическое давление в полупространствах $x_3 < -h$ и $x_3 > H$ определяются по формулам

$$\mathbf{v}^{(1)} = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1)$$

и

$$\mathbf{v}^{(2)} = \text{grad} \psi_2, \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в однородной изотропной упругой пластине описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний переходят в уравнения Гельмгольца [1]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad (3.2)$$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (3.3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц в упругой однородной пластине

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi. \quad (3.4)$$

Векторное уравнение (3.3) эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\Delta \Phi_j + k_\tau^2 \Phi_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

относительно трех составляющих Φ_1, Φ_2, Φ_3 вектора Φ .

Составляющие вектора $\mathbf{u}^{(0)} = u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}$. Они являются тремя искомыми функциями, а система уравнений (3.2) и (3.4) представляет собой систему четырех скалярных уравнений относительно четырех скалярных функций Ψ, Φ_j ($j = 1, 2, 3$). Чтобы полностью определить эти четыре функции при подчинении решения системы (3.2), (3.5) граничным условиям, необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Этим условием может служить равенство [1]

$$\operatorname{div} \Phi = 0. \quad (3.6)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ в однородной изотропной среде связаны с составляющими $u_j^{(0)}$ ($j = 1, 2, 3$) вектора смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ соотношениями [1]

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \lambda_0 \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad (3.7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Согласно (3.4) имеем

$$u_1^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad u_2^{(0)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, \quad u_3^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}. \quad (3.8)$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [22], которые при отсутствии массовых сил, с учетом временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ и отсутствия зависимости волновых полей от координаты x_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= -\rho \omega^2 u_1, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= -\rho \omega^2 u_2, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -\rho \omega^2 u_3, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в покрытии; u_j ($j = 1, 2, 3$) — проекции вектора смещения $\mathbf{u}$ на оси координат x_j .

В общем случае анизотропии компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций ε_{kl} следующим образом (обобщенный закон Гука) [22]:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \varepsilon^{kl}.$$

Учитывая симметрию тензора модулей упругости по индексам i, j и по индексам k, l [22], имеем

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij11} \varepsilon_{11} + \lambda_{ij22} \varepsilon_{22} + \lambda_{ij33} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{ij23} \varepsilon_{23} + 2\lambda_{ij13} \varepsilon_{13} + 2\lambda_{ij12} \varepsilon_{12}, \quad (3.10)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

В дальнейшем воспользуемся двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik} , где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

На поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления

$$-i\omega u_3 = v_{1n}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_1 \quad \text{при } x_3 = -h, \quad (3.12)$$

$$-i\omega u_3^{(0)} = v_{2n}, \quad \sigma_{13}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(0)} = -p_2 \quad \text{при } x_3 = H, \quad (3.13)$$

где $v_{1n} = \partial(\psi_0 + \psi_1)/\partial x_3$ и $v_{2n} = \partial\psi_2/\partial x_3$ — нормальные компоненты скоростей частиц жидкостей в полупространствах $x_3 < -h$ и $x_3 > H$ соответственно.

На поверхности $x_3 = 0$, разделяющей однородную пластину и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$u_1 = u_1^{(0)}, \quad u_2 = u_2^{(0)}, \quad u_3 = u_3^{(0)}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^{(0)}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(0)} \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (3.14)$$

Искомые величинами являются $\psi_1(x_1, x_3)$, $\psi_2(x_1, x_3)$, $\Psi(x_1, x_3)$, $\Phi_j(x_1, x_3)$, $u_j(x_1, x_3)$ ($j = 1, 2, 3$). Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (3.1), (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), удовлетворяющих граничным условиям (3.12) – (3.14).

4. Аналитическое решение задачи

Решения уравнений (3.1), (3.2) и (3.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \exp\{i[k_{11}x_1 - k_{13}(x_3 + h)]\}, \\ \psi_2 &= A_2 \exp\{i[k_{21}x_1 + k_{23}(x_3 - H)]\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Psi = B_1 \exp[i(k_{l1}x_1 + k_{l3}x_3)] + B_2 \exp[i(k_{l1}x_1 - k_{l3}x_3)], \quad (4.2)$$

$$\Phi_j = C_{1j} \exp[i(k_{\tau 1}x_1 + k_{\tau 3}x_3)] + C_{2j} \exp[i(k_{\tau 1}x_1 - k_{\tau 3}x_3)] \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4.3)$$

где k_{21}, k_{23} — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_2$ волны, прошедшей через пластину, на оси x_1 и x_3 ; $k_{23} = \sqrt{k_2^2 - k_{21}^2}$; $k_{l3} = \sqrt{k_l^2 - k_{l1}^2}$; $k_{\tau 3} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau 1}^2}$.

Согласно закону Снеллиуса, заключающемуся в требовании равенства фазовых скоростей распространения волн вдоль границы раздела двух сред [2, 23], имеем

$$k_{21} = k_{l1} = k_{\tau 1} = k_{11}. \quad (4.4)$$

Так как зависимость всех компонент движения от координаты x_1 будет иметь вид $\exp(ik_{11}x_1)$, то и составляющие вектора $\mathbf{u}$ будем искать в виде

$$u_j = U_j(x_3) \exp(ik_{11}x_1), \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

Из (3.5) получаем

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}. \quad (4.6)$$

Подставим (4.3) в (4.6). С учетом (4.4) находим

$$C_{13} = -\frac{k_{11}}{k_{\tau 3}} C_{11}, \quad C_{23} = \frac{k_{11}}{k_{\tau 3}} C_{21}. \quad (4.7)$$

Таким образом, коэффициентами, подлежащими определению из граничных условий, являются A_j , B_j , C_{1j} и C_{2j} ($j = 1, 2$).

На основании (3.7) и (3.8) и учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = \Delta \Psi = -k_l^2 \Psi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -\lambda_0 k_l^2 \Psi + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\ \sigma_{12}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1^2} \right), \quad \sigma_{22}^{(0)} = -\lambda_0 k_l^2 \Psi, \\ \sigma_{33}^{(0)} &= -\lambda_0 k_l^2 \Psi + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\ \sigma_{13}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \quad \sigma_{23}^{(0)} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь получим уравнения для искомых функций $U_j(x_3)$ ($j = 1, 2, 3$). Подставим выражения (4.5) в соотношения (3.9). Затем полученные выражения для ε_{ij} подставим в (3.8). В результате компоненты тензора напряжений запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= [s\lambda_{11}U_1 + \lambda_{13}U'_3 + \lambda_{14}U'_2 + \lambda_{15}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{16}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{22} &= [s\lambda_{21}U_1 + \lambda_{23}U'_3 + \lambda_{24}U'_2 + \lambda_{25}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{26}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{33} &= [s\lambda_{31}U_1 + \lambda_{33}U'_3 + \lambda_{34}U'_2 + \lambda_{35}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{36}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{23} &= [s\lambda_{41}U_1 + \lambda_{43}U'_3 + \lambda_{44}U'_2 + \lambda_{45}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{46}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{13} &= [s\lambda_{51}U_1 + \lambda_{53}U'_3 + \lambda_{54}U'_2 + \lambda_{55}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{56}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{12} &= [s\lambda_{61}U_1 + \lambda_{62}U'_3 + \lambda_{64}U'_2 + \lambda_{65}(U'_1 + sU_3) + s\lambda_{66}U_2]e^{ik_{11}x}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $s = ik_{11}$, а штрихи здесь и ниже обозначают производные по координате x_3 .

Подставляя выражения (4.5) и (4.9) в уравнения движения (3.9), получим следующую систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1(x_3)$, $U_2(x_3)$, $U_3(x_3)$:

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}'' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{C}}\mathbf{U} = 0, \quad (4.10)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$; $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ — матрицы третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \lambda_{55} & \lambda_{54} & \lambda_{53} \\ \lambda_{45} & \lambda_{44} & \lambda_{43} \\ \lambda_{35} & \lambda_{34} & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \\ \hat{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \lambda'_{55} + 2s\lambda_{51} & \lambda'_{54} + s(\lambda_{56} + \lambda_{14}) & \lambda'_{53} + s(\lambda_{55} + \lambda_{13}) \\ \lambda'_{45} + s(\lambda_{41} + \lambda_{65}) & \lambda'_{44} + 2s\lambda_{64} & \lambda'_{43} + s(\lambda_{45} + \lambda_{63}) \\ \lambda'_{35} + s(\lambda_{31} + \lambda_{55}) & \lambda'_{34} + s(\lambda_{36} + \lambda_{54}) & \lambda'_{33} + 2s\lambda_{35} \end{pmatrix}; \\ \hat{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} s\lambda'_{51} + s^2\lambda_{11} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{56} + s^2\lambda_{16} & s\lambda'_{55} + s^2\lambda_{15} \\ s\lambda'_{41} + s^2\lambda_{61} & s\lambda'_{46} + s^2\lambda_{66} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{45} + s^2\lambda_{65} \\ s\lambda'_{31} + s^2\lambda_{51} & s\lambda'_{36} + s^2\lambda_{56} & s\lambda'_{35} + s^2\lambda_{55} + \rho\omega^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставим выражения (4.1) и (4.5) в первое граничное условие (3.12). Получаем выражение для коэффициента отражения A_1

$$A_1 = A_0 + \frac{\omega}{k_{13}}U_3(-h). \quad (4.11)$$

Из первого граничного условия (3.13) находим коэффициент прохождения A_2 , выраженный через коэффициенты B_1 , B_2 , C_{12} и C_{22}

$$A_2 = \frac{i\omega k_{l3}}{k_{23}} \left(-B_1 e^{ik_{l3}H} + B_2 e^{-ik_{l3}H} \right) - \frac{i\omega k_{11}}{k_{23}} \left(C_{12} e^{ik_{\tau 3}H} + C_{22} e^{-ik_{\tau 3}H} \right). \quad (4.12)$$

Из последних трех граничных условий (3.12) получаем три краевых условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (4.10)

$$(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{U})_{x_3=-h} = \hat{\mathbf{D}}, \quad (4.13)$$

где

$$\hat{\mathbf{E}} = s \begin{pmatrix} \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \\ \lambda_{41} & \lambda_{46} & \lambda_{45} \\ \lambda_{31} & \lambda_{36} & \lambda_{35} + \frac{i\rho_1\omega^2}{sk_{l3}} \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}} = (0; 0; -2i\rho_1\omega A_0)^T.$$

Учитывая (4.11) и (4.12), из последних трех условий (3.13) и первых трех условий (3.14) получаем две системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{K}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{L}, \quad (4.15)$$

где $\mathbf{x} = (B_1, B_2, C_{12}, C_{22})^T$; $\mathbf{y} = (C_{11}, C_{21})^T$; $\mathbf{K} = (U_1(0), U_3(0), 0, 0)^T$; $\mathbf{L} = (U_2(0), 0)^T$;
 $\mathbf{V} = (v_{pq})_{4 \times 4}$, $\mathbf{W} = (w_{pq})_{2 \times 2}$ — матрицы с элементами

$$v_{11} = v_{12} = ik_{11}, \quad v_{13} = -v_{14} = -ik_{\tau 3},$$

$$v_{21} = -v_{22} = ik_{l3}, \quad v_{23} = v_{24} = ik_{11},$$

$$v_{31} = \left(-\lambda_0 k_l^2 - 2\mu_0 k_{l3}^2 + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{l3}}{k_{23}} \right) e^{ik_{l3}H}, \quad v_{32} = \left(-\lambda_0 k_l^2 - 2\mu_0 k_{l3}^2 - \frac{\rho_2 \omega^2 k_{l3}}{k_{23}} \right) e^{-ik_{l3}H},$$

$$v_{33} = \left(-2\mu_0 k_{11} k_{\tau 3} + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{11}}{k_{23}} \right) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad v_{34} = \left(2\mu_0 k_{11} k_{\tau 3} + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{11}}{k_{23}} \right) e^{-ik_{\tau 3}H},$$

$$v_{41} = -2k_{11} k_{l3} e^{ik_{l3}H}, \quad v_{42} = 2k_{11} k_{l3} e^{-ik_{l3}H}, \quad v_{43} = (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad v_{44} = (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2) e^{-ik_{\tau 3}H},$$

$$w_{11} = -w_{12} = i \left(k_{\tau 3} + \frac{k_{11}^2}{k_{\tau 3}} \right), \quad w_{21} = -(k_{\tau 3}^2 + k_{11}^2) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad w_{22} = -(k_{\tau 3}^2 + k_{11}^2) e^{-ik_{\tau 3}H}.$$

Из системы (4.14) видно, что ее решение зависит от величин $U_1(0)$ и $U_3(0)$. Поэтому представим коэффициенты B_1 , B_2 , C_{12} и C_{22} в виде

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_1 U_1(0) + \alpha_2 U_3(0), & B_2 &= \alpha_3 U_1(0) + \alpha_4 U_3(0), \\ C_{12} &= \beta_1 U_1(0) + \beta_2 U_3(0), & C_{22} &= \beta_3 U_1(0) + \beta_4 U_3(0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставим (4.16) в (4.14) и приравняем коэффициенты перед $U_1(0)$ и $U_3(0)$, стоящие в левой и правой частях каждого уравнения. Приходим к двум системам линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}\mathbf{z}_j = \mathbf{M}_j \quad (j = 1, 2),$$

где $\mathbf{z}_1 = (\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3)^T$; $\mathbf{z}_2 = (\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4)^T$; $\mathbf{M}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{M}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, из которых определяем α_j и β_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Из (4.15) находим

$$C_{11} = rU_2(0), \quad C_{21} = -rU_2(0), \quad (4.17)$$

где $r = \frac{-ik_{\tau 3}}{2(k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)}.$

Теперь из последних трех граничных условий (3.13) получим еще три краевых условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (4.10). Учитывая (4.16) и (4.17), будем иметь

$$(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{F}}\mathbf{U})_{x_3=0} = 0, \quad (4.18)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{11} & s\lambda_{56} & f_{13} \\ s\lambda_{41} & s\lambda_{46} & s\lambda_{45} \\ f_{31} & s\lambda_{36} & f_{33} \end{pmatrix};$$

$$f_{11} = s\lambda_{51} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_1 + \alpha_3) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_1 + \beta_3)],$$

$$f_{13} = s\lambda_{55} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_2 + \alpha_4) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_2 + \beta_4)],$$

$$f_{31} = s\lambda_{31} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_1 + \alpha_3) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_1 - \beta_3),$$

$$f_{33} = s\lambda_{35} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_2 + \alpha_4) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_2 - \beta_4).$$

Таким образом, для определения волновых полей в пластине и вне ее сначала необходимо решить краевую задачу (4.10), (4.13), (4.18) каким-либо методом (например, [8, 10, 12, 16]), а затем найти коэффициенты, стоящие в выражениях (4.1) – (4.3).

5. Частные случаи

Рассмотрим случай, когда упругое неоднородное покрытие является трансверсально-изотропным. Для трансверсально-изотропной среды число независимых модулей упругости равно пяти [22]. Это λ_{11} , λ_{12} , λ_{13} , λ_{33} , λ_{44} . При этом

$$\lambda_{22} = \lambda_{11}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{13}, \quad \lambda_{55} = \lambda_{44}, \quad \lambda_{66} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2. \quad (5.1)$$

Для такой анизотропии тензор модулей упругости при условии, что ось x_3 прямоугольной декартовой системы координат направлена по оси упругой симметрии, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнения обобщенного закона Гука (3.10) существенно упрощаются.

При слоистой неоднородности покрытия, когда механические характеристики материала изменяются только в направлении оси упругой симметрии, плоскости, нормальные к оси упругой симметрии, являясь однородными поверхностями, одновременно являются плоскостями изотропии.

В этом случае $u_2 = 0$. Так как $U_2(x_3) \equiv 0$, то $C_{11} = C_{21} = C_{13} = C_{23} = 0$, что следует из (4.17) и (4.7). Поэтому $\Phi = (0, \Phi_2, 0)$.

Так как

$$\lambda_{34} = \lambda_{35} = \lambda_{36} = \lambda_{41} = \lambda_{43} = \lambda_{45} = \lambda_{46} = 0,$$

$$\lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = \lambda_{56} = \lambda_{64} = \lambda_{65} = 0,$$

то система (4.10) переходит в систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений. Краевые условия (4.13) и (4.18) также существенно упрощаются. С учетом (5.1) матрицы $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{D}}$ принимают вид

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_{44} & 0 \\ 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \lambda'_{44} & s(\lambda_{13} + \lambda_{44}) \\ s(\lambda_{13} + \lambda_{44}) & \lambda'_{33} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} s^2\lambda_{11} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{44} \\ s\lambda'_{13} & s^2\lambda_{44} + \rho\omega^2 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}} = (0; -2i\rho_1\omega A_0)^T; \quad \hat{\mathbf{E}} = s \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{44} \\ \lambda_{13} & \frac{i\rho_1\omega^2}{sk_{13}} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{13} \\ \tilde{f}_{31} & \tilde{f}_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11} &= -\mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_1 + \alpha_3) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_1 + \beta_3)], \\ \tilde{f}_{13} &= s\lambda_{44} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_2 + \alpha_4) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_2 + \beta_4)], \\ \tilde{f}_{31} &= s\lambda_{13} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_1 + \alpha_3) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_1 - \beta_3), \\ \tilde{f}_{33} &= (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_2 + \alpha_4) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_2 - \beta_4). \end{aligned}$$

Отметим, что в случае изотропного упругого покрытия [22]

$$\lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

где λ и μ — упругие коэффициенты Ламе. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= \lambda + 2\mu && \text{при } i \leq 3; \\ \lambda_{ii} &= \mu && \text{при } i > 3; \\ \lambda_{ij} &= \lambda && \text{при } i \neq j, \quad i \leq 3 \text{ и } j \leq 3; \\ \lambda_{ij} &= 0 && \text{при } i \neq j, \quad i > 3 \text{ или } j > 3. \end{aligned}$$

Таким образом, из решения рассмотренной задачи для случая трансверсально-изотропного покрытия легко получить решение для покрытия из изотропного материала. Достаточно положить $\lambda_{11} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{13} = \lambda$, $\lambda_{33} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{44} = \mu$, где λ и μ — коэффициенты Ламе изотропного материала.

6. Численные исследования

Были проведены расчеты коэффициента отражения $|A_1/A_0|$ однородной изотропной пластины с трансверсально-изотропным покрытием. Исследовались угловые зависимости.

Полагалось, что пластина находится в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с), амплитуда падающей волны равна единице. Однородная пластина толщиной $H = 1$ м имеет следующие характеристики: $\rho_0 = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\bar{\rho} = 7,1 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\bar{\lambda}_{11} = 16,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{33} = 6,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{44} = 3,83 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{13} = 5,01 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{12} = 3,42 \cdot 10^{10}$ Н/м² (цинк), так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \bar{\rho} f(x_3) \quad \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij} f(x_3).$$

Был проанализирован закон неоднородности вида

$$f(x_3) = a \left[\left(\frac{x_3 + h}{h} \right)^2 + 1 \right],$$

где множитель a выбран так, чтобы среднее значение функции $f(x_3)$ по толщине слоя было равно единице ($a = 0,75$). При этом в неоднородном слое максимум функции $f(x_3)$ достигается при $x_3 = 0$ и минимум — при $x_3 = -h$.

Краевая задача (4.10), (4.13), (4.18) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями (например, [10]).

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны θ_0 при фиксированном волновом размере пластины $k_1 H = 10$, когда отношение толщины покрытия h к толщине однородного слоя H равно 0,2. Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, пунктирная — однородному покрытию.

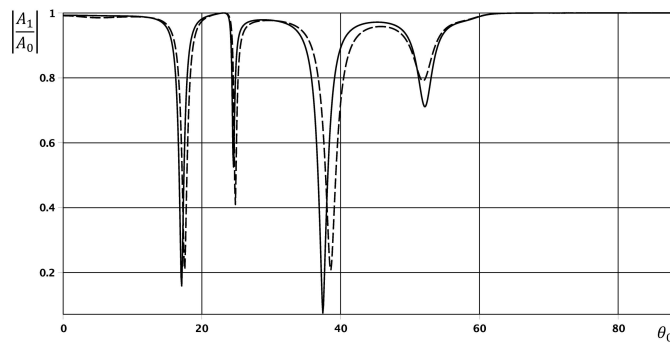


Рис. 2: Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для неоднородного и однородного покрытий

Анализируя угловые характеристики коэффициента отражения для неоднородного и однородного покрытий пластины замечаем, что неоднородность материала трансверсально-изотропного покрытия приводит к заметному изменению картины отражения. Наблюдаем смещение резонансов и изменение их уровней.

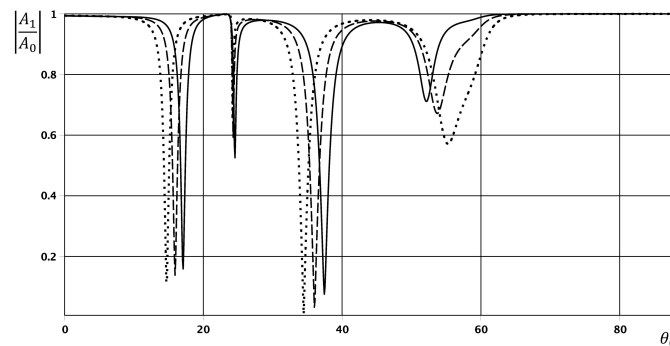


Рис. 3: Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий разной толщины

На фиг. 3 приведены угловые зависимости, рассчитанные для случая пластины с неоднородным покрытием при разных значениях толщины покрытия. Сплошная, штриховая и пунктирные линии соответствуют значениям $h/H = 0,2$, $h/H = 0,15$ и $h/H = 0,1$ соответственно.

При изменении толщины неоднородного трансверсально-изотропного покрытия существенно изменяется форма угловой характеристики.

7. Заключение

Полученное аналитическое решение задачи позволяет исследовать отражение и прохождение звука через однородную изотропную упругую пластину с покрытием из материала с разными видами неоднородности и типами анизотропии. Создание покрытий с соответствующими параметрами неоднородности и анизотропии дает возможность достигать требуемые звукоотражающие свойства пластин.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85 – 92.
4. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122 – 129.
5. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145 – 153.
6. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109 – 123.
7. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212 – 218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740 – 744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78 – 83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика, 1999. Т. 40. № 5. С. 179 – 184.
11. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029 – 1035.
12. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650 – 659.

13. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.
14. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.
15. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246 – 257.
16. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
17. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.
18. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 311 – 324.
19. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
20. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
21. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.
22. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

REFERENCES

1. Shenderov, E. L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
2. Brekhovskikh, L. M. 1973, “Waves in Layered Media”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
3. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no 1, pp. 85 – 92, [in Russian].
4. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no 1, pp. 122 – 129, [in Russian].
5. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 145 – 153, [in Russian].

6. Larin, N. V. 2017, "Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 109 – 123, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 212 – 218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, "Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 4, pp. 740 – 744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, "Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate", *Defektoskopiya*, no 8, pp. 78 – 83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no 5, pp. 936 – 941.
11. Tolokonnikov, L. A. 1998, "The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 62, no 6, pp. 953 – 958.
12. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, "The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no 4, pp. 590 – 598.
13. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 1, pp. 95 – 102.
14. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the Inhomogeneity Laws for an Elastic Layer with Preset Sound-Reflecting Properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no 5, pp. 504 – 510.
15. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7-2, pp. 246 – 257, [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
17. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 362 – 372, [in Russian].
18. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
19. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no 4, pp. 339 – 344.
20. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].
21. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7, pp. 83 – 92, [in Russian].

-
22. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprężystości*", Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].
 23. М.А. Isakovich, М.А. 1973 "*General acoustics*", Nauka, Moscow, 496 p., [in Russian].

Получено 07.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-438-442

О эффективных упругих свойствах слоистого композиционного материала, изготовленного по 3-D технологии

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев

Архипов Игорь Константинович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: iarh@list.ru

Абрамова Влада Игоревна — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается слоистый композит, изготовленный по 3D-технологии из порошков меди и нержавеющей стали. Каждый слой обладает пористостью, обусловленной технологическим процессом спекания порошковых материалов. Вычисляются эффективные упругие характеристики такого композита, учитывающие слоистость и пористость в компонентах.

Ключевые слова: изотропия, многослойный композит, пористость, слои композитного материала.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. О эффективных упругих свойствах слоистого композиционного материала, изготовленного по 3-D технологии // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 438–442.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-438-442

On the effective elastic properties of a layered composite material made using 3-D technology

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev

Arkhipov Igor Konstantinovich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: iarh@list.ru

Abramova Vlada Igorevna — candidate of technical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

A layered composite made using 3D technology from copper and stainless steel powders is considered. Each layer has a porosity due to the technological process of sintering powder materials. The effective elastic characteristics of such a composite are calculated, taking into account the layering and porosity in the components.

Keywords: isotropy, multilayer composite, porosity, layers of composite material.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, 2021, "On the effective elastic properties of a layered composite material made using 3-D technology", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 438–442.

1. Введение

Определяются эффективные характеристики упругости многослойного композита, состоящего из чередующихся слоев различных материалов. При этом каждый из слоев обладает пористостью, обусловленной технологическим процессом изготовления по 3-D технологии. Указано, что в целом композит обладает свойством трансверсальной изотропии [1].

2. Основной текст статьи

Определены все независимые константы упругости такого материала. Все физические эффективные константы определены в работе [2] в виде:

$$c_{11}^* = \langle \chi \rangle - M_{\chi}^{-1} D_{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}^* &= \langle \lambda \rangle - M_\chi^{-1} D_\lambda \\
c_{13}^* &= \langle \lambda / \chi \rangle \langle \chi^{-1} \rangle^{-1} \\
c_{33}^* &= \langle \chi^{-1} \rangle^{-1} \\
c_{44}^* &= \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \\
c_{66}^* &= \langle \mu \rangle,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
M_\chi &= \vartheta_1 \chi_2 + \vartheta_2 \chi_1 \\
D_{xy} &= \vartheta_1 \vartheta_2 (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
\chi &= \lambda + 2\mu.
\end{aligned} \tag{2}$$

Угловыми скобками обозначены соответствующие значения величин, через ϑ_1 и ϑ_2 обозначены объемные концентрации материалов, из которых составлены чередующиеся слои. По условиям технологии изготовления слоев в них наблюдается пористость. Поэтому свойства материалов каждого слоя будут учитывать эту пористость. Как известно, трансверсальный изотропный материал содержит пять независимых технических констант: $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$.

Из работы [2] можно установить связь между техническими и физическими константами. Эта связь следующая:

$$E_1 = 2(1 - \nu_1)\mu_1 \tag{3}$$

$$E_2 = 2(1 + \nu_2)\mu_2.$$

В дальнейшем, выражая технические константы через физические, используем соотношения (1), после чего удастся найти эффективные технические характеристики многослойного композита, но без учета пористости в слоях. В работе [3] получена зависимость технических констант в зависимости от пористости. Рассмотрим простейший случай. Имеется два слоя: верхний — пористая медь, нижний — пористая хромистая сталь. Каждый слой обладает эффективными свойствами, определяемыми из работ [3].

$$K_* = \vartheta_2 K_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 K_2^2}{\vartheta_1 K_2 + a_1}, \tag{4}$$

$$\mu_* = \vartheta_2 \mu_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \mu_2^2}{\vartheta_1 \mu_2 + b_1}, \tag{5}$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \vartheta_2 \mu_2, \quad b_1 = \frac{1}{6} \frac{\vartheta_2 \mu_2 \langle 9K_2 + 8\mu_2 \rangle}{\langle K_2 + 2\mu_2 \rangle} \tag{6}$$

Здесь K_2, μ_2 — объемный и сдвиговый модули, $\vartheta_1 = p$ — пористость медной матрицы.

Аналогичные формулы составляются для второго слоя. Только вместо индекса 1 ставится 2. Это означает, что соответствующие модули принадлежат нержавеющей стали. Физические константы c_{ij}^* определены по формулам (1), где $\chi = \lambda + 2\mu$ для каждого слоя. Угловые скобки означают усреднение, а величины дисперсий $D_\lambda, D_{\lambda\chi}, D_\chi, D_{\mu\chi}$ определяются по формулам (2).

Здесь $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$.

Полные эффективные физические константы композита находятся из формул (3) – (6), если использовать в (3) при этом дважды определенные константы для каждого слоя композитного материала.

3. Заключение

Полученные результаты дополняют комплекс работ по исследованию композиционных металлических материалов в различных условиях и состояниях [4, 5, 6, 7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Статистическое описание упругого поля слоистых материалов. // Инженерно-физический журнал. Механика твёрдого тела. 1968. №4. С. 9.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т.1. М.: Машиностроение, 1968. 812 с.
3. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Кузовлева О. В. Математическое моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов // Чебышевский сборник. 2020. Том 21. Впуск 3. С.262–271.
4. Архипов И. К., Абрамова В. И., Губанов О. М., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н. Эффективные характеристики вязкоупругости металлических и полимерных композитов // Технология металлов №10. 2020. С.14–18.
5. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Калинин А. А. Определение амплитудной зависимости внутреннего трения при крутильных колебаниях пористого металлического композита // Известия ТулГУ. Технические науки. 2020. №4. С.190–196.
6. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Агеев Е. А., Калинин А. А. К построению амплитудной зависимости внутреннего трения при колебаниях пористых металлических композитов // Известия Юго-Западного университета. 2020. Т.24. №2. С.37–48.
7. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Панин А. В. Моделирование микропластичности и механического поведения пористых материалов // Деформация и разрушение материалов. 2021. №1. С. 23–29.

REFERENCES

1. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1968, «Statistical description of the elastic field of layered materials», *Engineering and physical journal. Solid mechanics*, no. 4, pp. 93.
2. *Strength, stability, vibrations*. Handbook. Vol. 1. Moscow. Mashinostroenie, 1968. 812 pp.
3. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Kuzovleva O. V. 2020, «Mathematical modeling of elasticity properties in the mechanics of composite materials», Volume 21, Intake 3, pp. 262–271.
4. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gubanov O. M., Gvozdev A. E., Kutepov S. N. 2020, «Effective characteristics of viscoelasticity of metal and polymer composites», *Technology of metals*, No.10, pp. 14–18.
5. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Kutepov S. N., Kalinin A. A. 2020, «Determination of the amplitude dependence of internal friction during torsional vibrations of a porous metal composite», *News of TulSU. Technical sciences*, No.4, pp. 190–196.

6. Arkhipov, I. K., Abramova, V. I., Gvozdev, A. E., Kutepov, S. N., Ageev, E. A., and Kalinin, A. A. 2020, «On constructing the amplitude dependence of internal friction during vibrations of porous metal composites», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo universiteta*, Vol.24. no.2. pp. 37–48.
7. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Panin A.V. 2021, «Modeling of microplasticity and mechanical behavior of porous materials», *Deformation and destruction of materials*, No.1, pp. 23–29.

Получено 06.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-443-447

Оптимальное проектирование демпфирующих свойств пористых металлических композитов

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Г. В. Семенова

Архипов Игорь Константинович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: iarh@list.ru

Абрамова Влада Игоревна — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Семенова Галина Владимировна — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

Аннотация

Определено максимальное значение декремента колебаний пористого металлического композита, изготовленного по 3D – технологии. Изучено влияние пористости на демпфирующие и жесткостные свойства композита. Получено оптимальное значение пористости, обеспечивающее максимум декремента колебаний при значимом уровне нагрузки на образец. Приведены результаты численного расчета декремента для композита из хромоникелевой пористой стали.

Ключевые слова: амплитуда напряжений, декремент, демпфирующие свойства, металлический пористый композит, статистическая модель.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Г. В. Семенова. Оптимальное проектирование демпфирующих свойств пористых металлических композитов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 443–447.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-443-447

Optimal design of the damping properties of porous metal composites

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, G. V. Semenova

Arkhipov Igor Konstantinovich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail:* iarh@list.ru**Abramova Vlada Igorevna** — candidate of technical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail:* abramova_vi@mail.ru**Kuzovleva Olga Vladimirovna** — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).*e-mail:* kusovleva@yandex.ru**Gvozdev Alexander Evgenievich** — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail:* gvozdev.alexandr2013@yandex.ru**Semenova Galina Vladimirovna** — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State University (Tula).**Abstract**

The maximum value of the vibration decrement of a porous metal composite made using 3D technology is determined. The influence of porosity on the damping and stiffness properties of the composite is studied. The optimal porosity value is obtained, which provides a maximum of the vibration decrement at a significant load level on the sample. The results of numerical calculation of the decrement for a composite made of chromium-nickel porous steel are presented.

Keywords: stress amplitude, decrement, damping properties, metallic porous composite, statistical model.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, G. V. Semenova, 2021, "Optimal design of the damping properties of porous metal composites", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 443–447.

1. Введение

При нагрузке в матрице пористого материала возникают микропластические зоны, в которых интенсивность напряжений будет превышать предел текучести материала матрицы. Эти зоны концентрируются в матрице вокруг пор (концентрация напряжений). Для определения концентрации микропластических зон построена статистическая модель [1], основанная на результатах теории функционалов, заданных на процессах и полях [2]. Ранее эта модель с успехом применялась в теории шероховатости поверхности. [2] В данном случае концентрация микропластических зон определяется как средняя длительность пребывания случайного процесса $\sigma_i(x)$ — интенсивности напряжений над уровнем σ_{s2} — пределом текучести матрицы.

2. Основной текст статьи

В соответствии с рекомендациями [1], [2] концентрация микропластических зон определяется как

$$C_p = c_2 L^{-1} \int_0^L P\{\sigma_i(x) > \sigma_{s2} - \langle \sigma_i \rangle\} dx, \quad (1)$$

где L — длина реализации случайного процесса $\sigma_i(x)$, c_2 — концентрация матрицы, $\langle \sigma_i \rangle$ — среднее значение интенсивности напряжений, $\sigma_i(x)$ — флуктуация этой интенсивности, P — вероятность того, что флуктуация процесса больше разности $\sigma_{s2} - \langle \sigma_i \rangle$.

В частности для стационарного нормального процесса $\sigma_i(x)$ имеем [1]:

$$C_p = c_2 \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_{s2} - \langle \sigma_i \rangle}{\sqrt{D_{\sigma\sigma}}} \right) \right] : \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что для вычисления C_p нужно знать дисперсию $D_{\sigma\sigma}$ процесса $\sigma_i(x)$. Вычисление дисперсии производится приближенно, пользуясь корреляционной теорией упругости микронеоднородных сред [3]. В работе [4] величина дисперсии $D_{\sigma\sigma}$ для пористого материала в корреляционном приближении определяется как

$$D_{\sigma\sigma} = p(1-p) \frac{\mu_2^2}{\mu_*^2} \langle \sigma_i \rangle^2 \chi^2, \quad (3)$$

где p — объемная пористость, μ_2 — модуль сдвига матрицы, μ_* — эффективный модуль сдвига композита, $\chi = \frac{3-4\nu_2}{5(1-\nu_2)}$; ν_2 — коэффициент Пуассона материала матрицы.

В работе [5] показано, что зависимость концентрации микропластических зон от средних напряжений в любом микронеоднородном материале идентична амплитудной зависимости декремента колебаний композита. Аналогичное утверждение содержится и в других работах [6], [7]. Таким образом, нахождение экстремума функции $C_p(\langle \sigma_i \rangle)$ аналогично нахождению экстремума декремента в композите при соответствующем приложении нагрузки.

Поскольку все величины, входящие в формулу (2) зависят от одной переменной (объемной пористости p), определение экстремума C_p можно произвести традиционными методами математического анализа. Для нахождения стационарной точки p_k требуется найти производную $\frac{dC_p}{dp}$, приравнять ее к нулю и решить соответствующее уравнение. В дальнейшем следует показать, что p_k есть точка максимума и найти этот максимум. В качестве примера, влияющего на зависимость декремента от амплитуды прикладываемых напряжений, в зависимость следует включить амплитудное значение соответствующих напряжений.

Найдем производную $\frac{dC_p}{dp}$, используя (2), (3), учитывая, что эффективный модуль сдвига композита зависит от пористости p по формуле (3):

$$\mu_* = (1-p)\mu_2 - \frac{p(1-p)\mu_2}{p + (1-p)\chi_1}, \quad (4)$$

где $\chi_1 = \frac{7-5\nu_2}{2(4-5\nu_2)}$.

По формуле производной сложной функции имеем вместо (2):

$$\frac{dC_p}{dp} = \frac{dC_p}{dy} \cdot \frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^y \cdot \frac{dy}{dp} = 0. \quad (5)$$

При конечных значениях $y \frac{dC_p}{dy}$ в ноль не обращается. Таким образом, нахождение точки экстремума p_k сводится к решению уравнения:

$$\left. \frac{dy}{dp} \right|_{p=p_k} = 0. \quad (6)$$

Можно показать, что, используя соотношения (2)-(5), решение уравнения имеет вид $p_k = \frac{2}{5}$.

Нетрудно установить по знакам приращений Δp справа и слева от p_k , что это точка максимума. Его величина соответственно равна:

$$C_{p \max} = c_2 \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_{s2} - \langle \sigma_i \rangle}{\sqrt{D_{\sigma\sigma}}} \right) \right] \Big|_{p=p_k} \quad (7)$$

Величина $\langle \sigma_i \rangle$ определяет амплитудное значение прилагаемых напряжений. Расчет $C_{p \max}$ по формуле (7) сведем в таблицу.

Таблица. Зависимость максимального значения декремента от амплитудного значения напряжений $\langle \sigma_i \rangle$

$\sigma_{s2} / \langle \sigma_i \rangle$	2	2,5	2,7	3
$C_{p \max}$	0,08 c_2	0,05 c_2	0,03 c_2	0,01 c_2

3. Заключение

Таким образом, увеличение амплитуды напряжений приводит к увеличению максимального значения декремента.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хусу А. П. О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах // Вестник ЛГУ. №1, 1956, С. 3–25.
2. Хусу А. П. О некоторых функционалах на случайных полях. // Вестник ЛГУ. №1, 1957, С. 11–33.
3. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Панин А. В. Моделирование микропластичности и механического поведения пористых материалов // Деформация и разрушение материалов. 2021. №1. С. 23–29.
5. Архипов И. К., Абрамова В. И. Определение концентрации микропластических зон в композите по амплитудной зависимости декремента колебаний // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. С. 490–493.
6. Архипов И. К., Головин С. А., Петрушин Г. Д. Рассеяние энергии в композиционных материалах // Проблемы прочности. №8. 1984. С. 92–94.
7. Трощенко В. Т. К вопросу о рассеянии энергии в материале. Физика твердого тела. 1960. №6. С. 1060–1069.

REFERENCES

1. Husu A. P. 1956, «On some functionals found in technology, set on processes», *Bulletin of LSU*, No.1, pp. 3–25.
2. Husu A. P. 1957, «On some functionals on random fields», *Bulletin of LSU*, No.1, pp. 11–33.
3. Shermergor T.D. 1977, *Theory of elasticity of micro-homogeneous media*. Moscow. Nauka, 399 pp.
4. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Panin A.V. 2021, «Modeling of microplasticity and mechanical behavior of porous materials», *Deformation and destruction of materials*, No.1, pp. 23–29.
5. Arkhipov I. K., Abramova V. I. 2019, «Determination of the concentration of microplastic zones in a composite by the amplitude dependence of the vibration decrement», *News of TulSU. Technical sciences*, Issue 3, pp. 490–493.
6. Arkhipov I. K., Golovin S. A., Petrushin G. D. 1984, «Energy dissipation in composite materials», *Problems of strength*, No.8, pp. 92–94.
7. Troshchenko V. T. 1960, «On the issue of energy scattering in a material», *Solid state physics*, No.6, pp. 1060–1069.

Получено 06.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.911.5; 517.982.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

**Замечание к одной лемме из статьи Филиппова
о дифференциальных включениях**

Е. Е. Борисенко

Борисенко Евгений Егорович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).*email: yevhenii16@yandex.ru***Аннотация**

В статье А.Ф. Филиппова рассматривается возможное определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Из приведенной Филипповым леммы об устройстве множества, определяющего дифференциальное включение, можно вывести эквивалентное определение решения, которое позволяет расширить набор возможных множеств определения и значений функции, стоящей в правой части уравнения.

В этой заметке получено обобщение этой леммы на случай общих топологических пространств и пространств с мерой. Даны полные доказательства соответствующих теорем.

Ключевые слова: дифференциальные включения, регуляризация по Филиппову

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

Е. Е. Борисенко. Замечание к одной лемме из статьи Филиппова о дифференциальных включениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 448–452.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.911.5; 517.982.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

**A remark on a lemma from Filippov's article on differential
inclusions**

Е. Е. Borisenko

Borisenko Evgeny Egorovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*email: yevhenii16@yandex.ru***Abstract**

The Filippov's article discusses a possible definition of the solution of differential equation with discontinuous right-hand side. The lemma on the structure of the set defining differential inclusion given by Filippov implies an equivalent solution definition, which allows us to expand possible domains and codomains of the function, that is in the right-hand side of the equation.

In this paper we find a generalization of this lemma to the case of general topologic and measure spaces. Proofs of corresponding theorems are given here.

Keywords: differential inclusions, Filippov's regularization

Bibliography: 7 titles.

For citation:

E. E. Borisenko, 2021, A remark on a lemma from Filippov's article on differential inclusions, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 448–452.

1. Введение

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега μ . Пусть E – область в $\mathbb{R}^n$, $\mu(E) \neq 0$. Оригинальная лемма статьи Филиппова формулируется следующим образом.

ЛЕММА 1 ([1],[2]). Пусть вектор-функция $f(x)$ определена и измерима на множестве E . Тогда существует такое множество N_0 меры нуль, что

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(E \setminus N)} = \overline{f(E \setminus N_0)}$$

В статье Филиппова [1] приведён лишь набросок доказательства. В книге [2] при обсуждении этой леммы используется теорема Лузина, которая требует введения топологии в области определения f . Мы докажем обобщенную версию леммы и, в частности, откажемся от этого требования.

Поскольку в оригинальных работах Филиппова приведены лишь идеи доказательства и в виду того, что в последнее время появились работы по дифференциальным включениям в бесконечномерных пространствах (например, [3] и [4]), нам представляется, что данное обобщение может оказаться полезным.

2. Основные теоремы

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – пространство, на котором заданы σ -алгебра и счетно-аддитивная мера μ на этой σ -алгебре, Y – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой топологии $\mathcal{V}$ и борелевской σ -алгеброй и $f : X \rightarrow Y$ – измеримое отображение. Тогда существует множество $N_0 \subset X$ меры нуль такое, что

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \setminus N)} = \overline{f(X \setminus N_0)}$$

Лемма 1 является частным случаем этой теоремы при $X = E$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Назовем точку $y \in Y$ плохой, если существует открытая окрестность U_y точки y такая, что $\mu(f^{-1}(U_y)) = 0$. Остальные точки в Y назовем хорошими.

Очевидно, что если точка y плохая, то все точки из U_y плохие – можно взять для них окрестность U_y . Обозначим множество плохих точек B . Тогда

$$B = \bigcup_{y \in B} U_y,$$

т.е. B – открытое множество. По второй теореме Линделёфа [5] можно выделить счетное подпокрытие, т.е. существует такая $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, что

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{y_n}.$$

Обозначим $N_0 := f^{-1}(B)$. Докажем, что это искомое множество.

Сначала проверим, что $\mu(N_0) = 0$. Действительно, в силу измеримости f и счетной-аддитивности меры на X

$$\mu(N_0) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{y_n}\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_{y_n})\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(U_{y_n})) = 0.$$

Докажем теперь требуемое равенство $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \setminus N)} = \overline{f(X \setminus N_0)}$.

Включение $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \setminus N)} \subset \overline{f(X \setminus N_0)}$ очевидно, так как N_0 – одно из множеств, по которым берется пересечение.

Осталось проверить включение $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \setminus N)} \supset \overline{f(X \setminus N_0)}$. Покажем, что $\overline{f(X \setminus N_0)}$ не содержит плохих точек. Действительно, в соответствии с [6]

$$f(X \setminus N_0) \cap B = f((X \setminus N_0) \cap f^{-1}(B)) = f((X \setminus N_0) \cap N_0) = f(\emptyset) = \emptyset^1$$

Значит, $\overline{f(X \setminus N_0)} \subset Y \setminus B$. Но множество B открытое, а потому $Y \setminus B$ замкнуто. Следовательно $\overline{f(X \setminus N_0)} \subset Y \setminus B$.

При этом если $y \in Y \setminus B$, то $y \in \overline{f(X \setminus N)}$ для любого $N \subset X$ нулевой меры. Действительно, зафиксируем множество N нулевой меры. Для любой открытой окрестности V хорошей точки y существует x_V , принадлежащая $f^{-1}(V) \setminus N$, поэтому $f(x_V) \in V \cap f(X \setminus N)$, а значит $y \in \overline{f(X \setminus N)}$. В силу произвольности выбора N множество $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \setminus N)}$ содержит все хорошие точки, а поэтому содержит и $\overline{f(X \setminus N_0)}$. $\square$

REMARK 2. Кроме того, мы показали, что $\overline{f(X \setminus N_0)}$ есть в точности множество хороших точек.

Напомним, что замкнутой выпуклой оболочкой $\text{conv } A$ для подмножества A линейного пространства называется наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее A . Тогда верно

СЛЕДСТВИЕ 1. Если Y , кроме того, является линейным пространством, то верно

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) = \text{conv } f(U \setminus N_0),$$

причем N_0 можно выбрать то же, что и в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) \subset \text{conv } f(U \setminus N_0)$$

очевидно.

Обратное включение получается применением к обеим частям равенства из теоремы 1 выпуклого замыкания в силу включения

$$\text{conv } \bigcap_{\alpha} U_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha} \text{conv } U_{\alpha}.$$

$\square$

¹Здесь используется формула $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$ со стр. 22 из [6]

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – топологическое пространство с борелевской σ -алгеброй и мерой μ на ней, причем мера любого непустого открытого множества отлична от нуля, а Y – локально выпуклое хаусдорфово пространство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – отображение непрерывное в точке $\tilde{x}$. Тогда

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) = \{f(\tilde{x})\},$$

где $\mathcal{U}$ – множество окрестностей точки $\tilde{x}$.

Эта теорема в частном случае, когда $X = E$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$, рассматривается Филипповым. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проверим включение $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) \supset \{f(\tilde{x})\}$. Очевидно, что

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) \supset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(U \setminus N)}$$

Для любого $U \in \mathcal{U}$ и любого множества $N \subset U$ нулевой меры $\tilde{x} \in \overline{U \setminus N}$. По свойству непрерывных функции [6] $f(\tilde{x}) \in \overline{f(U \setminus N)}$, что доказывает включение.

Проверим теперь включение $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{conv } f(U \setminus N) \subset \{f(\tilde{x})\}$. Для любой выпуклой открытой окрестности V точки $f(\tilde{x})$ и любого множества $N \subset X$ нулевой меры из свойств выпуклых множеств (см. [7]) имеем

$$\text{conv } f(f^{-1}(V) \setminus N) \subset \text{conv } (V) = \overline{V}$$

В силу произвольности выбора V из хаусдорфовости Y получаем требуемое включение. $\square$

3. Благодарности

Автор признателен профессору О.Э.Зубелевичу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Матем. сб., 1960, том 51(93), номер 1, 99-128.
2. Филиппов А.Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
3. Stewart, D.E. *Formulating Measure Differential Inclusions in Infinite Dimensions*. Set-Valued Analysis 8, 273-293 (2000).
4. А. А. Толстоногов, *О дифференциальных включениях в банаховом пространстве с невыпуклой правой частью. Существование решений*, Сиб. матем. журн., 1981, том 22, номер 4, 182-198
5. П.С.Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 368 стр.
6. К.Куратовский, *Топология*, том 1, Москва, Мир, 1966.
7. А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*. Москва, Мир, 1967.

REFERENCES

1. A. F. Filippov, 1960, *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Math. col., T. 51(93), № 1, pp. 99-128.
2. A. F. Filippov, 1985, *Differential equations with discontinuous right-hand side*. - M.: Science. Main editorial office of physical and mathematical literature.
3. Stewart, D.E, 2000, *Formulating Measure Differential Inclusions in Infinite Dimensions*. Set-Valued Analysis 8, pp. 273-293.
4. A. A. Tolstonogov, 1981, *Differential inclusions in a Banach space with nonconvex right-hand side. Existence of solutions*, Sib. Math. Journal, T. 22, № 4, pp. 182-198.
5. P. S. Alexandrov, 1977, *Introduction to set theory and general topology*, Main edition of physical and mathematical literature of the publishing house "Nauka", M., 368 p.
6. K. Kuratovskiy, 1966, *Topology*, T. 1, Moscow, "Mir 1966.
7. A. Robertson, V. Robertson, 1967, *Topological vector spaces*. Moscow, "Mir".

Получено 10.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

О приближении сферическими полиномами в L^p при $p < 1$ ¹

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

На основе недавно доказанных оценок для L^1 -констант Никольского для $\mathbb{S}^d$ и $\mathbb{R}^d$ даются эффективные оценки константы K в следующем неравенстве типа Brown–Lucier для функций $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $0 < p < 1$:

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

где Π_n^d — подпространство сферических полиномов, $E_1 f$ — элемент наилучшего приближения f полиномами Π_n^d в метрике $L^1(\mathbb{S}^d)$. Результаты обобщаются на случай веса Данкля.

Ключевые слова: сферический полином, элемент наилучшего приближения, константа Никольского, вес Данкля.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. О приближении сферическими полиномами в L^p при $p < 1$ // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 453–456.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

Approximation by spherical polynomials in L^p for $p < 1^2$

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

Based on recently proved estimates for the L^1 -Nikolskii constants for $\mathbb{S}^d$ and $\mathbb{R}^d$, effective bounds for the constant K are given in the following inequality of the type Brown–Lucier for functions $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $0 < p < 1$:

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

where Π_n^d is the subspace of spherical polynomials, $E_1 f$ is a best approximant of f from Π_n^d in the metric $L^1(\mathbb{S}^d)$. The results are generalized to the case of the Dunkl weight.

Keywords: spherical polynomial, best approximant, Nikolskii constant, Dunkl weight.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii. 2021, "Approximation by spherical polynomials in L^p for $p < 1$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 453–456.

Установим одно интересное неравенство для приближений функций сферическими полиномами в пространстве L^p при $0 < p < 1$, возникшее в связи с работами [1, 3, 4, 2].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in (0, \infty]$, $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$ с обычной лебеговой мерой dx , $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{S}^d} |f|^p dx)^{1/p}$, Π_n^d — подпространство сферических полиномов порядка не выше n , $C(d, n) = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_1}$ — точная константа Никольского в пространстве $L^1(\mathbb{S}^d)$.

Пусть $0 < p < 1$. Из результатов работы [1] вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([1]). Пусть $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $E_1 f$ — элемент наилучшего приближения функции f полиномами из Π_n^d в метрике $L^1(\mathbb{S}^d)$ (он существует). Тогда

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p, \quad (1)$$

где

$$K = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_1}.$$

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

В [1] отмечается, что константу $(1 + 2K)^{1/p}$ можно заменить на лучшую $(2K)^{1/p-1}$, однако для доказательства дана ссылка неопубликованную работу. Мы не смогли найти эту работу, поэтому считаем, что данный вопрос открыт. В целом, интерес к неравенствам вида (1) обусловлен тем фактом, что мы можем найти $E_1 f$ методами аппроксимации в L^1 . Например, для $n = 0$ (приближение константами) получаем медиану.

Ясно, что $K = C(d, n)$. Поэтому для придания неравенству (1) заверченного вида можно применить верхние оценки констант Никольского. В этой связи воспользуемся следующими утверждениями, вытекающими из результатов работ [4, 2] при $p = 1$. Пусть $L(d) = \sup_{f \in \mathcal{E}_1^d \setminus \{0\}} \frac{|f(0)|}{\|f\|_1}$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных в пространстве $L^1(\mathbb{R}^d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([4]). Для $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем

$$n^d L(d) \leq C(d, n) \leq (n + \theta_d)^d L(d),$$

где $\theta_1 = 1$, $\theta_d = 2 \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ при $d \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([2]). Для $d \in \mathbb{N}$

$$2^{-d} \leq 2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) L(d) \leq F_d = {}_1F_2\left(\frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1, \frac{d}{2} + 1; -\frac{\beta_d^2}{4}\right),$$

где β_d — первый положительный функции Бесселя $J_{d/2}$. При $d \rightarrow \infty$

$$F_d = (\sqrt{2/e})^{d(1+O(d^{-2/3}))}, \quad \sqrt{2/e} = 0.857 \dots$$

Из предложений 1, 2, 3 немедленно получаем следующее основное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in (0, 1)$ имеем

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

где

$$\frac{n^d}{4^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \leq K = C_1(d, n) \leq \frac{(n + \theta_d)^d F_d}{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)}.$$

При больших d равномерно по n , d имеем

$$\frac{n^d}{(8/e)^{d/2} (\pi d)^{(d+1)/2}} \lesssim K \lesssim \frac{(n + d + 2)^d}{(\pi d)^{(d+1)/2}}.$$

Отметим, что предложение 4 позволяет оценить K в больших размерностях, когда n сравнимо с d . Такие вопросы поднимаются в современной теории информационной сложности.

Предложение 4 обобщается на случай сферического веса Данкля [3]

$$v_\kappa(x) = \prod_{a \in R_+} |\langle a, x \rangle|^{2\kappa(a)}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1},$$

связанного с системой корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R , $\kappa: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений.

Пусть $\|f\|_{p,\kappa} = \left(\int_{\mathbb{S}^d} |f|^p v_\kappa dx\right)^{1/p}$. Тогда аналогично предложению 4

$$\|f - E_1 f\|_{p,\kappa} \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_{p,\kappa},$$

где K — весовая константа Никольского $C_\kappa(d, n) = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_{1,\kappa}}$.

В [3] показано, что если размерность Данкля $d_\kappa = d + 2 \sum_{a \in R_+} \kappa(a)$ целая, то

$$C_\kappa(d, n) \leq C(d_\kappa, n).$$

Поэтому в этом случае можно воспользоваться предложением 4 для оценки $K = C_\kappa(d, n)$ сверху.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown L.G., Lucier B.J. Best approximations in L^1 are near best in L^p , $p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, no. 1. P. 97–100.
2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101553>.
3. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.
4. Горбачев Д.В., Мартыанов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

REFERENCES

1. Brown L.G., Lucier B.J. Best approximations in L^1 are near best in L^p , $p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, no. 1. P. 97–100.
2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101553>.
3. Gorbachev, D.V. & Dobrovolskii, N.N. 2020. “Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)
4. Gorbachev, D.V. & Mart’yanov, I.A. 2020. “Bounds of the Nikol’skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

Получено 10.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-457-463

Конечные группы с OS -проперестановочными подгруппами¹

Е. В. Зубей

Зубей Екатерина Владимировна — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина (Беларусь, г. Брест).

e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

Аннотация

Подгруппа A группы G называется OS -проперестановочной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть OS -продобавлением к A в G .

В настоящей работе установлена p -разрешимость конечной группы G , в которой силовская p -подгруппа OS -проперестановочна, где $p > 5$.

Ключевые слова: конечная группа, p -разрешимая группа, OS -проперестановочная подгруппа, подгруппа Шмидта, полунормальная подгруппа.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Е. В. Зубей. Конечные группы с OS -проперестановочными подгруппами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 457–463.

¹Работа выполнена в рамках выполнения задания 1.1.02 подпрограммы «Математические модели и методы» ГПНИ на 2021–2025 гг. «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-457-463

Finite groups with OS -propermutable subgroups

E. V. Zubei

Zubei Ekaterina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, Brest State A. S. Pushkin University (Belarus, Brest).

e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

Abstract

A subgroup A of a group G is called OS -propermutable in G if there is a subgroup B such that $G = N_G(A)B$, AB is a subgroup of G and the subgroup A permutes with all Schmidt subgroups of B . In this situation, the subgroup B is called OS -prosupplement to A in G .

In this paper, we proved the p -solubility of a finite group G such that a Sylow p -subgroup of G is OS -propermutable in G , where $p > 5$.

Keywords: finite group, p -soluble group, OS -propermutable subgroup, Schmidt subgroup, seminormal subgroup.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

E. V. Zubei, 2021, "Finite groups with OS -propermutable subgroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 457–463.

1. Введение

Подгруппа A называется *полуноормальной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B . В этой ситуации подгруппу B называют супердобавлением к подгруппе A в группе G . Отдельные свойства полуноормальных подгрупп получены многими авторами, см. литературу в [10].

В работе [9] вводится обобщение понятия полуноормальной подгруппы.

Подгруппа A группы G называется *OS -полуноормальной* в группе G , если существует такая подгруппа B , что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B .

В. С. Монахов и Е. В. Зубей [9] установили для простого числа $r \geq 7$ r -разрешимость группы, в которой силовская r -подгруппа OS -полуноормальна; для $r < 7$ перечислили все неабелевы композиционные факторы такой группы, также доказали разрешимость группы с OS -полуноормальными силовскими 2- и 3-подгруппами.

А. Н. Скиба и И. Сяолян [13] ввели понятие проперестановочной подгруппы:

подгруппа A называется *проперестановочной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B . Подгруппу B в дальнейшем будем называть *продобавлением* к A в G .

В настоящей работе изучается группа G , в которой силовская p -подгруппа P перестановочна с подгруппами Шмидта из подгруппы B такой, что $G = N_G(P)B$. В связи с этим вводится следующее понятие.

Подгруппа A группы G называется *OS -проперестановочной* в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть *OS -продобавлением* к A в G .

2. Вспомогательные результаты

Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [7, 12].

Напомним, что $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ — подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G . Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n ; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков k , m и p^t обозначаются через D_k , Z_m и E_{p^t} соответственно, $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . Подгруппу N нормальную в группе G обозначим через $N \triangleleft G$.

Группа G называется: π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$, где π — некоторое множество простых чисел, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество простых чисел, делящих порядок группы G .

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$. Группа называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны [11]. Свойства подгрупп Шмидта можно найти в работах О. Ю. Шмидта [11], В. С. Монахова [8]. Условимся называть $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовой p -подгруппой P и циклической силовой q -подгруппой Q . Минимальным добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B , что $G = AB$ и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B .

ЛЕММА 1. ([2, лемма 1]) *Если K и D — подгруппы группы G , подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

- (1) L — p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа;
- (2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;
- (3) L содержит $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

ЛЕММА 2. ([4, лемма 11]) *Если простая группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта S , то справедливо одно из следующих утверждений:*

- (1) $p = 2$, $G \simeq PSL(2, 7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;
- (2) $p = 3$, $G \simeq SL(2, 8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;
- (3) $p = 5$, $G \simeq PSL(2, 5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.

Вопрос перестановочности силовой подгруппы с подгруппами Шмидта исследовался Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком [1], В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной [4]. Так из [4, теорема 1] вытекает следующая

ЛЕММА 3. *Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта, то группа G r -разрешима.*

В работе [3] были получены локальные аналоги результатов работы Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [1].

ЛЕММА 4. ([6, лемма 5]) *Пусть H , K и N — попарно перестановочные подгруппы группы G . Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$.*

ЛЕММА 5. ([12, VI.4.10]) Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.

ЛЕММА 6. Пусть A — OS -проперестановочная подгруппа группы G и B ее OS -продобавление.

(1) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS -продобавлением к подгруппе A в группе G .

(2) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS -проперестановочной в группе G , а подгруппы B и B^g — ее OS -продобавлениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G , где $b \in B$, $a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \simeq B^g$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная подгруппа Шмидта из B^g , где S — подгруппа Шмидта в B . Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^b A, AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^b A)^a = S^{ba} A = S^g A.$$

Это означает, что B^g — OS -продобавление к A в группе G .

(2) Если T — подгруппа Шмидта в B^g , то $T = S^g$ для некоторой подгруппы Шмидта S из B . По условию $AS = SA$, поэтому $A^g S^g = S^g A^g$ и так как $G = (N_G(A)B)^g = N_G(A^g)B^g$, то A^g — OS -проперестановочная подгруппа в G и B^g — ее OS -продобавление. Из пункта (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет OS -продобавлением к A^g в группе G . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть A — OS -проперестановочная подгруппа группы G и B — ее OS -продобавление.

(1) Если $N \triangleleft G$, то AN — OS -проперестановочна в G и B является OS -продобавлением к AN в G .

(2) Если $N \triangleleft G$, то AN/N — OS -проперестановочна в G/N и BN/N является OS -продобавлением к AN/N в G/N .

(3) Если A — OS -проперестановочная подгруппа группы G и B — OS -продобавление в G , то $A^G = A(A^G \cap B)$ и A OS -проперестановочна в A^G и $A^G \cap B$ — OS -продобавление к A в A^G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = N_G(AN)B$ и AN перестановочна с любой подгруппой Шмидта из B , то AN — OS -проперестановочная подгруппа группы G и B — ее OS -продобавление.

(2) Известно, что $N_{G/N}(AN/N) = N_G(A)N/N$. Тогда $G/N = N_{G/N}(AN/N)(BN/N)$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из BN/N . Тогда $D = D \cap BN = N(B \cap D)$, т.е. $B \cap D$ есть добавление к N в D .

По лемме 1 подгруппа $B \cap D$ содержит подгруппу Шмидта S такую, что $S^{B \cap D} = B \cap D$. Так как $S \leq L \leq B \cap D$, где L — минимальное добавление к N в D , то A перестановочна с S . Из леммы 6 (1) следует, что A перестановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N , т.е. AN/N OS -проперестановочна в G/N и BN/N будет OS -продобавлением к AN/N в G/N .

(3) Так как A — OS -проперестановочна в G , то $G = N_G(A)B$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . Тогда $A^G = A^{N_G(A)B} = A^B \leq AB$ и $A^G = A^G \cap AB = A(A^G \cap B)$. Пусть S — произвольная подгруппа Шмидта из $A^G \cap B$. Так как $S \leq B$ — произвольная подгруппа Шмидта из B , то A — OS -полуноормальна в A^G , а следовательно, A — OS -проперестановочна в A^G . Тогда $A^G \cap B$ — OS -продобавление к A в A^G .

Лемма доказана.

3. Основной результат

ТЕОРЕМА 1. *Если в группе G силовская p -подгруппа OS -проперестановочная и $p > 5$, то группа G p -разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим силовскую p -подгруппу группы G через P . Воспользуемся индукцией по порядку группы G .

Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Тогда по лемме 7 (2) PN/N OS -проперестановочна в G/N . Значит, G/N p -разрешима.

Будем считать, что в группе G нет p -разрешимых нормальных подгрупп.

Если $P^G < G$, то по лемме 7 (3) P — OS -проперестановочна в P^G , а следовательно, P^G p -разрешима. Противоречие.

Значит $P^G = G$. Тогда по лемме 7 (3) $G = PY$ и P перестановочна с любой подгруппой Шмидта S из Y . Если порядок группы Y делится на p , то можно считать, что силовская p -подгруппа Y_p группы Y содержится в силовской p -подгруппе P группы G .

По теореме Дедекинда $Y \cap PS = (Y \cap P)S = Y_p S = SY_p = S(Y \cap P)$, т. е. силовская p -подгруппа Y_p группы Y перестановочна с любой подгруппой Шмидта S из Y . По лемме 3 группа Y p -разрешима. Значит, существует $Y_{p'}$ — p' -холлова подгруппа в группе G и $G = PY_{p'}$. Поэтому можно считать, что Y — p' -подгруппа, причем Y — p' -холлова подгруппа.

Пусть теперь N — нормальная подгруппа группы G и N не является p -разрешимой. Тогда по лемме 4 $N = N \cap PY = (N \cap P)(N \cap Y) = N_p(N \cap Y)$, где N_p — силовская p -подгруппа в $N \cap P$.

Пусть $S \leq N \cap Y$ — подгруппа Шмидта, тогда S — подгруппа Шмидта в Y и P перестановочна с S . Имеем $N \cap PS = (N \cap P)S = N_p S = SN_p = S(N \cap P)$. По индукции N p -разрешима. Противоречие.

Значит, G — простая группа. Очевидно, что $PS < G$ и тогда по лемме 5 либо $P^G \neq G$, противоречие с выше доказанным, либо $S^G \neq G$, противоречие.

Следовательно, $G = PS$. По лемме 2 $G \simeq PSL(2, 7)$, или $SL(2, 8)$, или $PSL(2, 5)$. Это значит, что группа G p -разрешима и $p > 5$, противоречие.

Теорема доказана.

В группах $PSL(2, 7)$, $SL(2, 8)$, $PSL(2, 5)$ соответственно силовские 2-, 3-, 5-подгруппы OS -полунормальны, а значит и OS -проперестановочны, но перечисленные группы не являются p -разрешимыми, где $p \in \{2, 3, 5\}$.

4. Заключение

В настоящей работе установлен признак r -разрешимости группы, в которой силовская подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из подгруппы B такой, что $G = N_G(A)B$. В дальнейшем исследовании планируется описать композиционные факторы группы с OS -проперестановочными силовскими подгруппами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, №4. С. 741–753.
2. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №4. С. 448–458.
3. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №4. С. 126–133.

4. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, №3. С. 130-139.
5. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности n -максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, №3. С. 125–130.
6. Княгина В. Н., Монахов В. С. О π' -свойствах конечной группы, обладающей π -холловой подгруппой // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, №2. С. 297-309.
7. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Высшэйшая школа, 2006.
8. Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев. 2002. Секция №1. С. 81-90.
9. Монахов В. С., Зубей Е. В. О композиционных факторах конечной группы с OS -полунормальной силовской подгруппой // Тр. Ин-та математики НАН РБ. 2018. Т. 26:1. С. 90–94.
10. Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, №1. С. 148-159.
11. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366-372.
12. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
13. Yi X., Skiba A. N. On S -propermutable subgroups of finite groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2015. Vol. 38, №2. P. 605-616.

REFERENCES

1. Berkovich, Ya. G., Pal'chik, Je. M. 1967, "On the commutability of subgroups of a finite group", *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 8, no. 4, pp. 741–753.
2. Kniagina, V. N., Monakhov, V. S. 2007, "Finite groups with seminormal Schmidt subgroups", *Algebra i logika*, vol. 46, no. 4, pp. 448–458.
3. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2011, "On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya Rossijskoj akademii nauk*, vol. 17, no. 4, pp. 126–133.
4. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2010, "On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya Rossijskoj akademii nauk*, vol. 16, no. 3, pp. 130–139.
5. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2012, "On the permutability of n -maximal subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya Rossijskoj akademii nauk*, vol. 18, no. 3, pp. 125–130.
6. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2011, "On the π' -properties of a finite group possessing a Hall π -subgroup", *Siberian Math. J.*, vol. 52, no. 2, pp. 234–243.
7. Monakhov, V. S. 2006, "Vvedenie v teoriju konechnyh grupp i ih klassov", *Vyshhejschaja shkola*, Minsk.

8. Monakhov, V.S. “The Schmidt subgroups, its existence, and some of their classes“, *Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa: sbornik trudov*. Kiev, 2002, pp. 81–90.
9. Monakhov, V.S., Zubei, E.V. 2018 “On composition factors of a finite group with OS -seminormal sylow subgroup“, *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Republic of Belarus*, vol. 26, no. 1, pp. 90-94.
10. Monakhov, V.S., Trofimuk, A.A. 2020, “On the supersolvability of a group with seminormal subgroups“, *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 61, no. 1, pp. 148-159.
11. Shmidt, O. Ju. 1924 “Groups, whose all subgroups are special“, *Matematicheskii sbornik*, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372.
12. Huppert, B. 1967 “Endliche Gruppen I“, Berlin, Heidelberg, New York.
13. Yi, X., Skiba, A.N. 2015 “On S -propermutable subgroups of finite groups“, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 38, no. 2, pp. 605-616.

Получено 31.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.58

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-464-466

Лемма Болла в качестве упражнения

И. Р. Лифлянд

Лифлянд Илья Рафаилович — факультет математики, Университет Бар-Илан (г. Рамат-Ган, Израиль).

e-mail: liflyand@math.biu.ac.il

Аннотация

Предложено очень короткое доказательство леммы Болла средствами исключительно гармонического анализа.

Ключевые слова: Лемма Болла, преобразование Фурье, неравенство Хаусдорфа-Янга, постоянная Бабенко-Бекнера.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

И. Р. Лифлянд. Лемма Болла в качестве упражнения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 464–466.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 517.58

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-464-466

Ball's lemma as an exercise

E. Liflyand

Liflyand Elijah Rafailovich — department of mathematics, Bar-Ilan University (Ramat-Gan, Israel).

e-mail: liflyand@math.biu.ac.il

Abstract

We suggest an extremely short proof of Ball's lemma by means of harmonic analysis only.

Keywords: Ball's lemma, Fourier transform, Hausdorff-Young inequality, Babenko-Beckner constant.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

E. Liflyand, 2021, "Ball's lemma as an exercise", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 464–466.

It was Erwin Lutwak who brought my attention to Ball's Lemma 3 in [2]. Then I saw it in [5, Ch.VI, 7.5]. Ball's paper is about convex geometry but the main ingredient is the mentioned purely analytic lemma. The proof given is quite technical. It turns out that by standard means of harmonic analysis it becomes a simple exercise, in a sense. The author thanks D. Gorbachev for extremely valuable discussions.

Our version of the result reads as follows.

LEMMA 1. For $p \geq 2$, there holds

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (1)$$

PROOF. In fact, the assumption $p \geq 2$ ought to bear a superficial resemblance of the Hausdorff-Young inequality in the dual form:

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p'} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}, \quad (2)$$

where $C_{p'} = (2\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{(p')^{\frac{1}{2p'}}}{p^{\frac{1}{2p}}}$. This sharp constant is due to Beckner [3] (an earlier partial result is due to K. Babenko [1]). What remains now is to figure out of what $\frac{\sin t}{t}$ is the Fourier transform. But this is a well-known fact: the formula (see (5) in [4, Ch.I, §4]; it is mentioned in Remark 12 in the cited literature of [4] that the formula goes back to Fourier)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos tx \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t < a; \\ \frac{\pi}{4}, & t = a; \\ 0, & t > a, \end{cases}$$

answers the question. In our case $a = 1$, and hence, taking into account the factor $\frac{1}{2\pi}$ for the inverse Fourier transform, we obtain $\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = 2^{-\frac{1}{p}}$. In addition, taking into account the factor $\frac{1}{\pi}$ on the left-hand side of (1) and $(2\pi)^{\frac{1}{p}}$ in $C_{p'}$, we arrive at the desired constant on the right-hand side of (1). $\square$

To be precise, Lemma 3 in [2] states that if $p \geq 2$, then

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}},$$

and there is equality if and only if $p = 2$. In fact, the constant $\left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{2}}$ monotonically increases from $\left(\frac{2}{2-1} \right)^{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{2}$ at $p = 2$ to $\sqrt{e}$ as $p \rightarrow \infty$. However, the dependance on $\frac{1}{\sqrt{p}}$ of the right-hand side of (1) is achieved by minimal means. Though the constant $C_{p'}$ in (2) is sharp, it does not provide a sharp constant on the right-hand side of (1), since the extremal function is different from that on the left-hand side of (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. И. Бабенко. Об одном неравенстве в теории интегралов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. т. 25, № 4, С. 531–542.
2. K. Ball. Cube slicing in R^n // Proc. Amer. Math. Soc. 1986, vol. 97, P. 465–473.
3. W. Beckner. Inequalities in Fourier analysis // Ann. Math. 1975, vol. 102, P. 159–182.
4. S. Bochner. Lectures on Fourier Integrals // Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1959.
5. B. Makarov and A. Podkorytov. Real Analysis: Measures, Integrals and Applications // Springer, 2013.

REFERENCES

1. K. I. Babenko, 1961, "An inequality in the theory of Fourier integral", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* vol. 25, 531–542 (Russian).
2. K. Ball, 1986, "Cube slicing in $\mathbf{R}^n$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.* vol. 97, 465–473.
3. W. Beckner, 1975, "Inequalities in Fourier analysis", *Ann. Math.* vol. 102, 159–182.
4. S. Bochner, 1959. *Lectures on Fourier Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
5. B. Makarov and A. Podkorytov, 2013. *Real Analysis: Measures, Integrals and Applications*, Springer

Получено 10.09.20 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-467-473

О глобальной разрешимости уравнения Кана — Хилларда

Х. С. Тарамова

Тарамова Хеди Сумановна — кандидат физико-математических наук, Чеченский государственный педагогический университет (г. Грозный).

e-mail: thedi@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется глобальная по времени разрешимость решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа, не разрешенного относительно временной производной первого порядка, так называемого уравнения Кана-Хилларда, в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций на всей числовой оси, для которых существуют пределы на минус и плюс бесконечности. Доказано существование классического решения (под которым понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области задания рассматриваемой задачи Коши) на произвольном временном интервале. Получены априорные оценки, обеспечивающие существование глобального решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения Кана-Хилларда, так как классическое решение $v(x, t)$ с отрезка $[0, t_*]$, принимая $v(x, t_*)$ за новую начальную функцию, продолжается до классического решения $v(x, t)$ на отрезке $[0, t_* + \delta]$, где величина δ зависит только от нормы начальной функции и параметров уравнения Кана-Хилларда. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз получим классическое решение рассматриваемой задачи Коши на произвольном временном интервале.

Ключевые слова: уравнение Кана-Хилларда, оценки решения уравнения, глобальная разрешимость.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Х. С. Тарамова О глобальной разрешимости уравнения Кана — Хилларда // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 467–473.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-467-473

On the global solvability of the Kana–Hillard equation

Kh. S. Taramova

Taramova Khedi Sumanovna — candidate of physical and mathematical sciences, Chechen State Pedagogical University (Grozny).

e-mail: thedi@yandex.ru

Abstract

The paper investigates the global in time solvability of the solution of the Cauchy problem for a nonlinear partial differential equation of Sobolev type that is not resolved with respect to the time derivative of the first order, the so-called Cahn–Hilliard equation, in the Banach space of continuous bounded functions on the entire number axis, for which there are limits by minus and plus infinity. The existence of a classical solution is proved (by which we mean a sufficiently smooth function that has all continuous derivatives of the required order and satisfies the equation at each point of the domain of the considered Cauchy problem) on an arbitrary time interval. A priori estimates are obtained that ensure the existence of a global solution to the Cauchy problem for the pseudoparabolic Cahn–Hilliard equation, since the classical solution $v(x, t)$ from the interval $[0, t_*]$, taking $v(x, t_*)$ as a new initial function, continues to the classical solution $v(x, t)$ on the interval $[0, t_* + \delta]$, where the value of δ depends only on the norm of the initial function and the parameters of the Cahn–Hilliard equation. Repeating this process, a sufficiently large number of times, we obtain the classical solution of the considered Cauchy problem on an arbitrary time interval.

Keywords: Cahn–Hilliard equation, estimates for the solution of an equation, global solvability.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Kh. S. Taramova, 2021, “On the global solvability of the Kana–Hilliard equation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 467–473.

Уравнение Кана–Хилларда

$$v_t - av_{xxt} + bv_{xxx} + v_{xx} - (v^3)_{xx} = 0, \quad (1)$$

где a , b — некоторые положительные параметры, $x \in R^1$, $t > 0$, моделирует динамику кристаллизации в многокомпонентных сплавах с учетом вязкости и описывает процесс разделения фаз, при котором два компонента бинарной жидкости самопроизвольно разделяются и образуют чистые домены в каждом компоненте [1] – [6] и неизотермические процессы кристаллизации и затвердевания двухкомпонентных сплавов [7], [8], а также при расчете межфазных границ в двухфазных течениях [9].

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешённым относительно производной по временной переменной t [10] – [11].

В статье [12] рассмотрена задача Коши для уравнения Кана-Хилларда в банаховом пространстве [13] $C[-\infty, +\infty] \equiv C[R^1]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \rightarrow \pm\infty$, и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C[R^1]} = \sup_{x \in R^1} |\psi(x)|$, предполагая, что начальная функция $\varphi = \varphi(x)$ задачи Коши

$$v|_{t=0} = \varphi(x), x \in R^1, \quad (2)$$

и искомое классическое решение $v = v(x, t)$, $(x, t) \in R^1 \times \bar{R}_+^1$, $\bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$ уравнения (1) для всех значений временной переменной $t \in \bar{R}_+^1$ по пространственной переменной $x \in R^1$ принадлежат банахову пространству $C[R^1]$.

В [12] доказано, что если начальная функция $\varphi(x)$, тождественно не равная нулю, принадлежит вместе со своими производными первого и второго порядка банахову пространству $C[R^1]$, то можно построить временной отрезок $[0, t_*]$, где

$$t_* = \frac{a^2}{4(a+b)} \ln \left[1 + \frac{a+b}{a} \left(\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right)^{-2} \right],$$

на котором существует единственное классическое решение $v = v(x, t)$, $(x, t) \in R^1 \times [0, t_*]$, этой задачи в пространстве $C[R^1]$.

Для классического решения $v = v(x, t)$ задачи Коши (1), (2) во всех точках $t \in [0, t_*]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{x \in R^1} |v(x, t)| &\leq \exp \left(2 \frac{a+b}{b^2} \right) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \times \\ &\times \left\{ \left[1 + \frac{a}{a+b} \left(\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right)^2 \right] - \frac{a}{a+b} \left(\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right)^2 \exp \left(4 \frac{a+b}{a^2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Цель настоящей статьи провести исследование глобальной разрешимости, т.е. существование решения $v = v(x, t)$ для всех $t \in \bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$ (не рассмотрено в [2]) задачи Коши (1), (2)).

Предположим, что классическое решение задачи Коши (1), (2) принадлежит не только пространству $C[R^1]$, но и пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, состоящему из функций $\psi = \psi(x)$ пространства $L_2(R^1)$, у которых существуют обобщенные производные $\psi' = \psi'(x)$, также принадлежащие пространству $L_2(R^1)$, и норма которого вводится по формуле

$$\|\psi(x)\|_{W_2^1(R^1)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(\psi(x))^2 + (\psi'(x))^2] dx \right)^{1/2}.$$

Здесь $L_2(R^1)$ —пространство функций с интегрируемым квадратом на R^1 , скалярное произведение и норма которого вводятся соответственно по формулам:

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx, \quad \|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Известно, что если функция $\psi(x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, то справедлива оценка

$$\|\psi(x)\|_{C[R^1]} \leq \|\psi(x)\|_{W_2^1(R^1)}, \quad (3)$$

причем, если производная второго порядка функции $\psi(x)$ принадлежит пространству $C[R^1]$, то [14] пределы как самой функции $\psi(x)$, так и ее производной $\psi'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, равны нулю.

Умножим обе части уравнения Кана – Хилларда (1) на функцию $v = v(x, t)$ и проинтегрируем полученное соотношение по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, другими словами, рассмотрим скалярное произведение классического решения $v = v(x, t)$ задачи Коши (1), (2) на левую часть уравнения (1):

$$(v, v_t - av_{xxt} + bv_{xxxx} + v_{xx} - (v^3)_{xx}) = 0$$

или

$$(v, v_t) - a(v, v_{xxt}) + b(v, v_{xxxx}) + (v, v_{xx}) + (v, (v^3)_{xx}) = 0. \quad (4)$$

Преобразуем каждое слагаемое в левой части равенства (4) отдельно:

$$1) (v, v_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) v_t(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} v^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2.$$

Интегрируя по частям и используя предельные равенства $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) = 0$, преобразуем второе слагаемое равенства (4):

$$\begin{aligned} 2) (v, v_{xxt}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) v_{xxt}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) dv_{xt}(x, t) = \\ &= v(x, t) v_{xt}(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x, t) v_{xt}(x, t) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} v_x^2(x, t) dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_x\|_2^2. \end{aligned}$$

Третье слагаемое также интегрируем по частям (два раза) и, используя сначала предельные равенства $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) = 0$, а, затем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_x(x, t) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 3) (v, v_{xxxx}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) v_{xxxx}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) dv_{xxx}(x, t) = \\ &= v(x, t) v_{xxx}(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x, t) v_{xxx}(x, t) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x, t) dv_{xx}(x, t) = \\ &= -v_x(x, t) v_{xx}(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} v_{xx}(x, t) dv_x(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{xx}^2(x, t) dx = \\ &= (v_{xx}, v_{xx}) = \|v_{xx}\|_2^2. \end{aligned}$$

Четвертое слагаемое преобразуем, интегрируя по частям и применяя те же предельные равенства, что и при преобразовании третьего слагаемого.

$$\begin{aligned} 4) (v, v_{xx}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) v_{xx}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) dv_x(x, t) = \\ &= v(x, t) v_x(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x, t) dv(x, t) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x, t) v_x(x, t) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2(x, t) dx = - (v_x, v_x) = -\|v_x\|_2^2, \end{aligned}$$

и, аналогично, преобразуем последнее слагаемое

$$\begin{aligned} 5) (v, (v^3)_{xx}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) d(v^3(x, t))_x = \\ &= v(x, t) (v^3(x, t))_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(x, t) v_x^2(x, t) dx = \end{aligned}$$

$$= -3 \int_{-\infty}^{+\infty} (v(x, t) v_x(x, t))^2 dx = -3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx = -\frac{3}{4} \|(v^2)_x\|_2^2.$$

Подставляя найденные значения интегралов в равенство (4) и заменяя переменную t на τ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2) + b\|v_{xx}\|_2^2 + \frac{3}{4} \|(v^2)_x\|_2^2 = \|v_x\|_2^2. \quad (5)$$

Откуда, интегрируя обе части равенства (5) по переменной τ от 0 до t и используя предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|v(x, t)\|_2 = \|v(x, 0)\|_2 = \|\varphi\|_2$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|v_x(x, t)\|_2 = \|v_x(x, 0)\|_2 = \|\varphi'\|_2,$$

получим

$$\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2 + 2b \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \frac{3}{2} \int_0^t \|(v^2)_x\|_2^2 d\tau = \|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2 + 2 \int_0^t \|v_x\|_2^2 d\tau. \quad (6)$$

В уравнении Кана-Хилларда параметры $a, b > 0$, поэтому третье и четвертое слагаемые в левой части равенства (6) неотрицательные и, значит, отбрасывая их, получим неравенство

$$\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2 \leq \|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2 + 2 \int_0^t \|v_x\|_2^2 d\tau$$

откуда, увеличивая правую часть, получим

$$\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2 \leq \|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2 + \frac{2}{a} \int_0^t (\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2) d\tau. \quad (7)$$

Пусть

$$\|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2 > 0, \quad (8)$$

используя неравенство Гронуолла [15, с. 112] выводим

$$\|v\|_2^2 + a\|v_x\|_2^2 \leq (\|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2) e^{2t/a}, t \geq 0. \quad (9)$$

Из неравенства (9) следует, что если начальная функция $\varphi = \varphi(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и выполнено условие (8), то классическое решение $v = v(x, t)$, $(x, t) \in R^1 \times \overline{R}_+^1$, задачи Коши для уравнения Кана-Хилларда также будет принадлежать $W_2^1(R^1)$, причем

$$\sup_{x \in R^1} |v(x, t)| \leq \sqrt{\|v\|_2^2 + \|v_x\|_2^2} \leq \sqrt{\frac{1+a}{a} (\|\varphi\|_2^2 + a\|\varphi'\|_2^2)} e^{t/a} \quad (10)$$

для всех $t \in \overline{R}_+^1$.

Оценка (10) обеспечивает существование глобального решения задачи Коши (1), (2), поскольку, принимая $v(x, t_*)$ за новую начальную функцию, классическое решение $v(x, t)$ с отрезка $[0, t_*]$ продолжается до классического решения $v(x, t)$, $t \in [0, t_* + \delta]$, где величина δ зависит от нормы начальной функции $\varphi = \varphi(x)$ и параметров a, b уравнения Кана-Хилларда (1). Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим классическое решение задачи (1), (2) на произвольном временном интервале.

Таким образом доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть начальная функция $\varphi = \varphi(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и выполнено условие (8), тогда существует единственное глобальное классическое решение $v = v(x, t)$, $(x, t) \in R^1 \times \overline{R}_+^1$ задачи Коши для уравнения Кана-Хилларда (1), которое также принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cahn, J.W. Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // J. Chemical Physics. – 1958. – 28, – № 1. – P. 258–267.
2. Elliot, Ch. On the Chan–Hilliard equation / Ch. Elliot, S. Zheng // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1986. – 96, – № 4. – P. 339–357.
3. Bai, F. The viscous Cahn–Hilliard equation I. Computations / F. Bai, C.M. Elliott, A. Gardiner, A. Spence, A.M. Stuart // Nonlinearity. – 1995. – № 8. – P. 131–160.
4. Elliott, C. M. Viscous Cahn–Hilliard Equation II. Analysis / C.M. Elliott, A.M. Stuart // Journal of differential equations. – 1996. – № 128. – P. 387–414.
5. Gal, C. Well-Posedness and Long Time Behavior of the Non-Isothermal Viscous Cahn–Hilliard Equation with Dynamic Boundary Conditions / Gal C. // Dynamics of PDE. – 2008. – Vol. 5, – № 1. – P. 39–67.
6. Плотников, П.И. Предельный переход по малому параметру в уравнениях Кана–Хилларда / П.И. Плотников // Сиб. матем. журн. – 1997. – № 38:3. – С. 638–656.
7. Радкевич, Е.В. Асимптотическое решение расширенной модели Кана–Хилларда / Е.В. Радкевич, М.В. Захарченко // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Том 2. – С. 121–138.
8. Радкевич, Е.В. Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика / Е.В. Радкевич // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Том 3. – С. 3–145.
9. Меньшов, И.С. Метод сквозного расчета межфазных границ в двухфазных течениях на основе уравнения Кана–Хилларда / И.С. Меньшов, Ч.Чжан // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60, – № 3. – С. 476–488.
10. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 436 с.
11. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
12. Умаров, Х.Г. О разрешимости одномерного уравнения Кана–Хилларда с вязкостью в пространстве непрерывных ограниченных функций на всей оси / Х.Г. Умаров // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №17. Вып. 28. – С. 91–101.
13. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
14. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1972. – V. 272. – P. 47–78.
15. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: МГУ, 1998. – 480 с.

REFERENCES

1. Cahn, J.W. Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // J. Chemical Physics. – 1958. – 28, – No. 1. – P. 258–267.
2. Elliot, Ch. On the Chan – Hilliard equation / Ch. Elliot, S. Zheng // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1986. – 96, – No. 4. – P. 339–357.
3. Bai, F. The viscous Cahn–Hilliard equation I. Computations / F. Bai, C.M. Elliott, A. Gardiner, A. Spence, A.M. Stuart // Nonlinearity. – 1995. – No. 8. – P. 131–160.
4. Elliott, C. M. Viscous Cahn–Hilliard Equation II. Analysis / C.M. Elliott, A.M. Stuart // Journal of differential equations. – 1996. – No. 128. – P. 387–414.
5. Gal, C. Well-Posedness and Long Time Behavior of the Non-Isothermal Viscous Cahn–Hilliard Equation with Dynamic Boundary Conditions / C. Gal // Dynamics of PDE. – 2008. – Vol. 5, – No. 1. – P. 39–67.
6. Plotnikov, P.I. Passage to the Limit with Respect to a Small Parameter in the Cahn – Hillard Equations / P.I. Plotnikov // Sib. mat. zhurn. – 1997. – No. 38: 3. – P. 638–656.
7. Radkevich, E.V. Asymptotic solution of the extended Cahn – Hillard model / E.V. Radkevich, M.V. Zakharchenko // Contemporary mathematics and its applications. – 2003. – V. 2. – P. 121–138.
8. Radkevich, E.V. Correctness of mathematical models of continuum mechanics and thermodynamics / E.V. Radkevich // Contemporary mathematics and its applications. – 2003 / – V. 3. – P. 3–145.
9. Menshov, I.S. Method of end-to-end calculation of interphase boundaries in two-phase flows based on the Cahn–Hilliard equation. Menshov, Ch. Zhang // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – T. 60, – No. 3. – P. 476–488.
10. Demidenko, G.V. Equations and systems not resolved with respect to the highest derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspensky. – Novosibirsk: Scientific. book., 1998. – 436 p.
11. Sveshnikov, A.G. Linear and nonlinear equations of the Sobolev type / A.G. Sveshnikov, A.B. Alshin, M.O. Korpusov, Yu.D. Pletner. – M.: FIZMATLIT, 2007.– – 736 p.
12. Umarov, Kh.G. On the solvability of the one–dimensional Cahn–Hilliard equation with viscosity in the space of continuous bounded functions on the whole axis / Kh.G. Umarov // Scientific Bulletin of BelSU. Series: Mathematics. Physics. – 2012. – No. 17. Issue 28. – P. 91–101.
13. Dunford, N. Linear Operators. General theory / N. Dunford, J.T. Schwartz. – M.: IL, 1962. – 895 p.
14. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T. B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1972. – V. 272. – P. 47–78.
15. Demidovich, B.P. Lectures on the mathematical theory of stability / B.P. Demidovich. – M.: MGU, 1998. – 480 p.

Получено 06.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-3-474-478

Об одном свойстве преобразования Фенхеля

А. А. Фарвазова

Фарвазова Айсылу Азатовна — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: aisylu.farvazova@yandex.ru

Аннотация

Мы рассматриваем класс функций $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, которые являются полунепрерывными снизу, четными, выпуклыми и $\Phi(0) = 0$. Преобразование Фенхеля Ψ от Φ тоже принадлежит этому классу функций. Мы определим функции, играющие роль производных для всех функций из нашего класса и докажем, что эти функции взаимно обратные в обобщенном смысле.

Ключевые слова: максимизация полезности, пространство Орлича, преобразование Фенхеля.

Библиография: 3 названий.

Для цитирования:

А. А. Фарвазова Об одном свойстве преобразования Фенхеля // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 474–478.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-3-474-478

On a property of the Fenchel transform

А. А. Farvazova

Farvazova Aisylu Azatovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: aisylu.farvazova@yandex.ru

Abstract

We consider the class of functions $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, which are lower semicontinuous, even, convex and $\Phi(0) = 0$. The Fenchel transform Ψ from Φ also belongs to this class of functions. We will define functions that play the role of derivatives for all functions from our class and prove that these functions are mutually inverse in a generalized sense.

Keywords: utility maximization, Orlicz space, Fenchel transform.

Bibliography: 3 titles.

For citation:

А. А. Farvazova, 2021, "On a property of the Fenchel transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 474–478.

1. Введение

Максимизация полезности является стандартной задачей экономической теории. Ожидаемая полезность наиболее часто используется в областях, связанных с риском.

Мотивировка данной работы заключается в том, что, во-первых, задачу максимизации полезности и двойственную к ней рассматривают в пространствах Орлича, ассоциированных с функцией Юнга из нашего класса и её преобразованием Фенхеля, а во-вторых, функции, играющие роль производных, могут рассматриваться как траектории возрастающего процесса, порождающего замену времени.

В Разделе 2 даются краткие сведения про пространства Орлича и замену времени. Приводятся общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга. В Разделе 3 формулируется основной результат в качестве теоремы. Более содержательную часть представляет само доказательство.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Функция Юнга и пространства Орлича

Приведем общие сведения о пространствах Орлича, см. [1]:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ – функция Юнга, если Φ – чётная, выпуклая и

- (i) $\Phi(0) = 0$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = +\infty$;
- (iii) $\Phi(x) < +\infty$ в окрестности нуля.

Сопряженная Ψ к Φ (или преобразование Фенхеля функции Φ) определяется как

$$\Psi(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - \Phi(x)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что функция, тождественно равная нулю $\Phi(x) \equiv 0$ исключается. Соответствующая сопряженная функция, которая в нуле равно нулю $\Psi(0) = 0$, а в остальных точках бесконечности $\Psi(y) \equiv +\infty$ тоже исключается.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Сопряженная функция Ψ также является функцией Юнга.

Рассмотрим некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть L^0 – множество измеримых функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство Орлича $L^\Phi(\mathbb{P})$, ассоциированное с функцией Юнга Φ , определяется как

$$L^\Phi(\mathbb{P}) = \{u \in L^0 : \exists \alpha > 0 \int_{\Omega} \Phi(\alpha u) d\mathbb{P} < +\infty\}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что $L^\Phi(\mathbb{P})$ – векторное пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. $L^\Phi(\mathbb{P})$ является также банаховым пространством, оснащенным нормой Люксембурга

$$\|u\|_{\Phi, \mathbb{P}} = \inf \{k > 0 : \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{k}\right) d\mathbb{P} \leq 1\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Норма Люксембурга эквивалентна норме Орлича

$$N_{\Phi, \mathbb{P}}(u) = \sup_{v \in L^\Psi(\mathbb{P}): \int_{\Omega} \Psi(v) d\mathbb{P} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |uv| d\mathbb{P} \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция Юнга $\Phi(x)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях x , если существуют такие постоянные $k > 0$ и $x_0 \geq 0$, что для $x \geq x_0$

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Функция Юнга $\Phi(x)$, удовлетворяющее Δ_2 -условию, растет не быстрее степенной. Обратное утверждение неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если функция Юнга $\Phi(x)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то сопряженное пространство эквивалентно пространству Орлича $(L^\Phi)^* \sim L^\Psi$, а если не удовлетворяет, то сопряженное пространство шире $(L^\Phi)^* \supset L^\Psi$.

2.2. Возрастающие процессы, порождающие замену времени

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ — стохастический базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Заменой времени называется семейство $(T_s)_{s \geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)$ -марковских моментов, для которого отображения $s \rightsquigarrow T_s$ не убывают и непрерывны справа.

Если $A = (A_t)_{t \geq 0}$ — согласованный непрерывный справа возрастающий процесс, $A_0 \geq 0$, то

$$T_s := \inf\{t : A_t > s\}$$

задает замену времени, порожденную A , и

$$A_t := \inf\{s : T_s > t\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Предполагаем, что $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Последняя формула позволяет по замене времени $(T_s)_{s \geq 0}$ построить порождающий ее возрастающий процесс.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Мы в дальнейшем будем рассматривать такой класс функций, что при фиксированном ω $(T_s)_{s \geq 0}$ является производной нашего класса функций. Более точно, замена времени T_s и порождающий её процесс A_t являются производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.

2.3. Общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга

Напомним следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть задана собственная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Субдифференциал функции f в точке $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R} : f(y) \geq f(x) + p(y - x) \forall y \in \mathbb{R}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть задана собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда

$$y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow f(x) + f^*(y) = xy.$$

Рассмотрим класс функций Юнга Φ . Функции Φ , где она определена, поставим в соответствие функцию $a(\cdot)$, за исключением тождественного нуля, а функции $\Phi^* = \Psi - c(\cdot)$, за исключением функции, которая в нуле равна нулю, а в остальных точках бесконечности. Мы покажем, что класс таких функций a – класс неубывающих, неотрицательных, непрерывных справа функций из $\mathbb{R}_+$ в $[0, +\infty]$, и в замене времени отвечает траекториям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через субдифференциал:

- (1) если $\partial\Phi(t) \neq \emptyset$, то $a(t) = \sup \partial\Phi(t)$ (м.б. $+\infty$),
- (2) если $\partial\Phi(t) = \emptyset$, то $a(t) = +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через правую производную:

- (1) если существует $\varepsilon > 0$, т.ч. $\Phi(t + \varepsilon) < \infty$, то $a(t) = \Phi'_+(t)$,
- (2) если для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено $\Phi(t + \varepsilon) = +\infty$, то $a(t) = +\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Два определения функции $a(t)$ эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Функция $c(t)$ определяется аналогично по $\Psi(t)$.

3. Основной результат

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ – функция Юнга. Зададим $a(\cdot)$ как в Определении 7, аналогично определим $c(\cdot)$. Тогда функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ – возрастающие, непрерывные справа и для произвольных $s, t \in \mathbb{R}_+$ выполнено

$$a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}, \quad (1)$$

$$c(t) = \inf\{s : a(s) > t\}. \quad (2)$$

Пусть g – положительная борелевская функция на $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо

$$\int_0^\infty g(t) da(t) = \int_0^{a(\infty)} g(c(t)) dt. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если определить функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ через правую производную, то в конечном случае и в бесконечном, непрерывность справа и возрастание очевидны. Также это очевидно, если они определены через формулы (1) и (2).

Далее, пусть $a(u)$ определено как в Определении 7, а $c(t)$ определено как в (2). Покажем, что это определение $c(t)$ эквивалентно определению через правую производную. Сначала для этого докажем, что $a(u) \geq t \Leftrightarrow u \geq c(t_-)$, где $c(t_-) = \lim_{t' \uparrow t} c(t')$. Пусть $a(u) \geq t$. Возьмём $s < t$, тогда $a(u) > s$ и $c(s) \leq u$. Т.к. данное неравенство выполнено для произвольного $s < t$, то $c(t_-) \leq u$. Обратно, пусть $c(t_-) \leq u$, $a(u) < t$. Для $t' < t$ имеем $c(t') \leq u$. Т.к. $a(c(t')) \geq t'$, см. [2], то $t' \leq a(c(t')) \leq a(u)$, т.е. $a(u) \geq t'$.

Далее, докажем, что $a(u_-) \leq t \Leftrightarrow u \leq c(t)$, где $a(u_-) = \lim_{u' \uparrow u} a(u')$. Пусть $c(t) \geq u$. Для $u' < u$ имеем $c(t) > u'$ и $a(u') \leq t$. Т.к. данное неравенство справедливо для произвольного $u' < u$, то $a(u_-) \leq t$. Обратно, пусть $a(u_-) \leq t$, $c(t) < u$. Отсюда следует, что существует $s < u$, т.ч. $a(s) > t$. Противоречие.

С одной стороны, возьмём $t \in \partial\Phi(u)$, и пусть $a(u)$ определено как в Определении 7, а $c(t)$ определено как в (2). Тогда $a(u) \geq t \geq a(u_-) \Leftrightarrow c(t_-) \leq u \leq c(t)$. С другой, $t \in \partial\Phi(u) \Leftrightarrow u \in \partial\Psi(t)$. Так как это выполнено для произвольного $t \in \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = [\Psi'_-(t), \Psi'_+(t)] = [c(t_-), c(t)]$ и $c(t) = \Psi'_+(t)$. Аналогично, определяя $c(t)$ через производную, а $a(u)$ как в (1), получаем, что для $a(u)$ справедливо Определение 7. Отсюда следует, что $\partial\Phi(u) = [\Phi'_-(u), \Phi'_+(u)] = [a(u_-), a(u)]$ и $a(u) = \Phi'_+(u)$.

Если ни для какого u $t \notin \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = \emptyset$. Это случай, когда функция Ψ в точке t обращается в $+\infty$, либо принимает конечное значение, но левая производная равна $+\infty$, а

правая производная не существует, так как справа функция принимает бесконечное значение. В этом случае $c(t) = +\infty$.

Пусть сначала $g(t) = \mathbf{1}\{t = 0\}$. Левая часть (3) равно $a(0)$. Правая – длине интервала $|I_0| = |\{t : c(t) = 0\}| = a(0)$.

Пусть теперь $g(t) = \mathbf{1}\{t \in (0, s]\}$. Левая часть (3) равно $a(s) - a(0)$. Правая – длине интервала $|I_s| = |\{t : 0 \leq c(t) \leq s\}| = \inf\{t : c(t) > s\} - \inf\{t : c(t) > 0\} = a(s) - a(0)$.

Проверим (3) для $g(t) = 1$. Тогда $a(0) + a(\infty) - a(0) = a(\infty)$.

Обозначим $\mathcal{H}$ векторное пространство ограниченных борелевских функций g , для которых выполняется соотношение (3), и $\mathcal{C}$ – совокупность индикаторов интервалов вида $[0, t]$. Теорема о монотонных классах, см. [3], показывает, что $\mathcal{H}$ содержит все ограниченные борелевские функции. Равенство (3) с помощью предельного перехода проверяется для всех положительных борелевских функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rao M. M., Ren Z. D. Theory of Orlicz Spaces // N.Y: Marcel Dekker. 1991.
2. Embrechts P., Hofert M. A note on generalized inverses // Math. Meth. of Oper. Res. 2013. Vol. 77, №3. P. 423-432.
3. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы // М.: Мир, 1973.

REFERENCES

1. Rao, M. M. & Ren, Z. D., 1991, Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New-York.
2. Embrechts, P. & Hofert, M., 2013, “A note on generalized inverses”, *Math. Meth. of Oper. Res.*, vol. 77, no. 3, pp. 423-432.
3. Meyer, P.-A., 1973, Veroyatnost i potentsialy [Probability and potentials], Mir, Moscow.

Получено 30.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

Получено 28.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517, 378

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-479-492

Александр Иванович Нижников
(к 75-летию со дня рождения)

В. Н. Чубариков, Г. Л. Абдулгалимов, Е. И. Деза, М. С. Мирзоев, О. А. Косино,
Ю. Л. Хотунцев, И. А. Шилин, Р. М. Асланов, О. М. Растопчина, Ю. А. Дробышев,
Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

Чубариков Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Абдулгалимов Грамудин Латифович — доктор педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: gl.abdulgaliyev@mpgu.ru

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Мирзоев Махмашариф Сайфович — доктор педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: sharifmir64@gmail.com

Косино Ольга Алексеевна — кандидат педагогических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: oa.kosino@mpgu.ru

Хотунцев Юрий Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: yul.hotuncev@mpgu.ru

Шилин Илья Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет МЭИ (г. Москва).

e-mail: ilyashilin@li.ru

Асланов Рамиз Муталлим оглы — кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (г. Баку, Азербайджан).

e-mail: r_aslanov@list.ru

Растопчина Оксана Михайловна — кандидат педагогических наук, Керченский государственный морской технологический университет (г. Керчь).

e-mail: oksana_mihaylovna_r@mail.ru

Дробышев Юрий Александрович — профессор, доктор педагогических наук, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (г. Калуга).

e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

11 апреля 2021 года исполнилось семьдесят пять лет Александру Ивановичу Нижникову — известному российскому математику, профессору, доктору педагогических наук, заведующему кафедрой технологических и информационных систем Института физики, технологии и информационных систем Московского педагогического государственного университета (МПГУ), проректору МПГУ.

Александр Иванович Нижников внес значительный вклад в развитие отечественной научной школы функционального анализа и продолжает научную работу в данной области математической науки. Неоценимы заслуги Александра Ивановича и в развитии высшего образования России. Александр Иванович Нижников опубликовал более 150 научных и методических работ. Он долгие годы является членом редколлегии журнала “Чебышевский сборник”, членом ряда диссертационных советов. За достижения в области развития науки и образования А. И. Нижников награжден несколькими медалями и почетными знаками, ему присвоено почетное звание “Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации”.

Ключевые слова: функциональный анализ, теория представлений групп, математическая физика, методика математики, методика информатики, история математики.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, Г. Л. Абдулгалимов, Е. И. Деза, М. С. Мирзоев, О. А. Косино, Ю. Л. Хотунцев, И. А. Шилин, Р. М. Асланов, О. М. Растопчина, Ю. А. Дробышев, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Александр Иванович Нижников (к 75-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 479–492.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517, 378

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-479-492

Alexander Ivanovich Nizhnikov (on the 75th anniversary of his birth)

V. N. Chubarikov, G. L. Abdugaliyev, E. I. Deza, M. S. Mirzoev, O. A. Kosino, J. L. Hotuntsev,
I. A. Shilin, R. M. Aslanov, O. M. Rastopchina, Yu. A. Drobyshev,
N. M. Dobrovolskii, N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Abdulgaliyev Gramudin Latifovich — doctor of pedagogical sciences, Associate Professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: gl.abdulgaliyev@mpgu.su

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Mirzoev Makhmasharif Saifovich — doctor of pedagogical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: sharifmir64@gmail.com

Kosino Olga Alekseevna — candidate of pedagogical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: oa.kosino@mpgu.su

Hotunchev Yuri Leontyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: yul.hotunchev@mpgu.su

Shilin Ilya Anatolyevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, National Research University MPEI (Moscow).

e-mail: ilyashilin@li.ru

Aslanov Ramiz Mutallim oglu — candidate of physical and mathematical sciences, doctor of pedagogical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan (Baku, Azerbaijan).

e-mail: r_aslanov@list.ru

Rastopchina Oksana Mikhailovna — candidate of pedagogical sciences, Kerch State Marine Technological University, (Kerch).

e-mail: oksana_mihaylovna_r@mail.ru

Drobyshev Yuri Alexandrovich — professor, doctor of pedagogical sciences, Kaluga Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation (Kaluga).

e-mail: drobyshev.yury2011@yandex.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

On April 11, 2021, Alexander Ivanovich Nizhnikov turned seventy-five years old, a well-known Russian mathematician, Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Technological and Information Systems of the Institute of Physics, Technology and Information Systems of the Moscow Pedagogical State University (MSPU), Vice-Rector of MSPU.

Alexander Ivanovich Nizhnikov has made a significant contribution to development of Russian scientific school on Functional Analysis. Moreover, the scientific and educational activities of Professor A. I. Nizhnikov have been very influential in the development of higher education in Russia. Alexander Ivanovich Nizhnikov published more than 150 scientific and methodical works. For many years he is a member of the editorial board of the journal "Chebyshevskii Sbornik". For achievements in the development of Russian Science and Education A. I. Nizhnikov was awarded several medals and honorary signs.

Keywords: Functional analysis, Group representation Theory, Mathematical Physics, Methodology of Mathematics, Methodology of Informatics, History of Mathematics.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, G. L. Abdulgalimov, E. I. Deza, M. S. Mirzoev, O. A. Kosino, J. L. Hotuntsev, I. A. Shilin, R. M. Aslanov, O. M. Rastopchina, Yu. A. Drobyshev, N. M. Dobrovolskii, N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, 2021, "Alexander Ivanovich Nizhnikov (on the 75th anniversary of his birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 479–492.



А. И. Нижников

Александр Иванович Нижников родился 11 апреля 1946 г. в селе Ольшанка Самойловского района Саратовской области.

В 1964 г. он окончил среднюю школу номер 6 города Балашова Саратовской области. Учился Александр Иванович на отлично, математика всегда была его любимым предметом. Он неоднократно участвовал в математических олимпиадах, в том числе городских и областных.

В 1965 г. Александр Иванович поступил на физико-математический факультет Балашовского государственного педагогического института и в 1970 г. с отличием окончил его по специальности "Математика и физика", квалификация "Учитель математики и физики".

В 1970–1974 гг. А. И. Нижников обучался заочно в аспирантуре Московского государственного заочного педагогического института (МГЗПИ) по специальности "Функциональный анализ".

С 1970 по 1988 гг. он работал ассистентом, старшим преподавателем, доцентом, деканом, проректором по УНР Балашовского государственного педагогического института. В 1983 г. заведовал кафедрой математического анализа Брянского педагогического института.

С 1988 по 1991 гг. А. И. Нижников работал в должности заместителя директора, директора Центрального института усовершенствования учителей (ЦИУУ) Министерства просвещения РСФСР г. Москва, начальником подотдела, заместителем начальника отдела Министерства образования Российской Федерации.

С 1991 по 2008 гг. являлся заместителем декана, деканом, проректором, первым проректором Московского государственного открытого педагогического университета (МГОПУ).

С 2008 г. по настоящее время — проректор, первый проректор, заведующий кафедрой технологических и информационных систем Института физики, технологии и информационных систем Московского педагогического государственного университета (МПГУ).

В 1978 г. Александр Иванович Нижников защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» на тему «Исследование G -функций Мейера методами теории представлений групп». Защита состоялась в диссертационном совете при Московском институте электронного машиностроения (МИЭМ), а научным руководителем диссертанта был доктор физико-математических наук, один из основоположников теоретико-группового подхода к изучению специальных функций профессор Наум Яковлевич Виленкин.

В 2000 г. А. И. Нижниковым защищена докторская диссертация по специальности 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» (специализация «Педагогика и методика преподавания математики в высшей школе») на тему «Теория и практика проектирования методической системы подготовки современного учителя математики» в Московском областном педагогическом институте имени Н. К. Крупской.

С 1997 г. имеет ученое звание профессора.

Как уже отмечалось выше, в период с 1970 по 1974 год Александр Иванович обучался заочно в аспирантуре под руководством Н. Я. Виленкина. Надо сказать, что Наум Яковлевич серьезно относился к отбору своих будущих аспирантов: каждый из них должен был владеть обязательным минимумом, а в качестве подтверждения этого предоставить решения отобранных Виленкиным задач из книг Уолтера Рудина «Основы математического анализа» и «Функциональный анализ», Сержа Ленга «Алгебра», Уиттекера и Ватсона «Курс современного анализа», Коосаку Иосиды «Функциональный анализ», Кратцера и Франца «Трансцендентные функции». Во время учебы в аспирантуре к обязательному минимуму добавилась только что вышедшая книга А. А. Кириллова «Элементы теории представлений». Изучая основы теории представлений групп и алгебр Ли, аспирант Нижников заметил ошибку в рассуждениях, допущенную в книге *Knapp A. W., Stein E. M. Irreducibility theorems for the principle series* (Berlin, Springer, 1971), о чем по совету Виленкина и сообщил авторам, получив от них вскоре письмо с благодарностью.

Во время учебы в аспирантуре и в период, предшествующий защите, А. И. Нижников посещает семинар Кириллова в МГУ, проводит по поручению Виленкина занятия с более молодыми аспирантами Наума Яковлевича, участвует в работе нескольких семинаров по теории представлений групп Ли и их приложениям: например, в представительном Совещании по теоретико-групповым методам в физике в Киеве в октябре 1977 г., в работе которого участвовали такие известные математики, как Н. Я. Виленкин, М. И. Граев, Д. П. Желобенко, А. А. Кириллов, а также известные физики, такие, как Я. А. Смородинский, Ю. М. Широков, Ю. Ф. Смирнов, А. М. Переломов.

Главным объектом исследования в кандидатской работе А. И. Нижникова стала введенная Корнелиусом Мейером в 1936 году функция

$$G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma \left[\begin{array}{c} b_1 + s, \dots, b_m + s, 1 - a_1 - s, \dots, 1 - a_n - s \\ a_{n+1} + s, \dots, a_p + s, 1 - b_{m+1} - s, \dots, 1 - b_q - s \end{array} \right] z^{-s} ds,$$

которая в интегральной форме была представлена Артуром Эрдеи в 1953 году и в которой $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$ и контур L особым образом разделяет полюса подынтегральной функции. Эта функция тесным образом связана с интегралом Меллина и играет важную роль

в теории специальных функций математической физики: именно представители этого класса специальных функций в виде ряда выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию Гаусса, а в виде интеграла — через G -функцию Мейера. А. И. Нижниковым получены в диссертации различного вида интегральные (и сериальные) соотношения, содержащие G -функцию и конкретные функции гипергеометрического типа. Основные результаты диссертации изложены в статье [2], результаты которой, были, в частности, процитированы в книге *Климык А. У., Качурик И. И.*, Вычислительные методы в теории представлений групп (Киев, Вища школа, 1986).

Обобщениями G -функции Мейера в 80-х годах прошлого века (H -функцией Фока и др.) активно занимался известный канадский математик Х. М. Шривастава, один из учеников которого, корейский математик Джунесанг Чой, стал в 2014–2020 годах соавтором одного из бывших аспирантов Александра Ивановича. В 2019 году у А. И. Нижникова вышла совместная статья [39] с этими двумя авторами, в которой изучены два известных и одно введенное авторами преобразования Ганкеля-Клиффорда функций Уиттекера.

Всего же под руководством А. И. Нижникова защищены четыре работы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: Г. М. Гузаиров (1997), О. А. Дорошкевич (1998), И. А. Шилин (2004) и Н. В. Инишева (Прокофьева) (2004).

Основные математические работы А. И. Нижникова:

- Интегральные соотношения для G -функций Мейера и представления n -мерной группы Лоренца (в соавторстве с Виленкиным Н. Я., Известия вузов. Математика, 1979);
- Соотношения для гипергеометрических функций, связанные с переходом от базиса к базису ("Функциональный анализ" (межвузовский сборник научных трудов), Ульяновск, 1978);
- Применение методов современной математической физики в теории специальных функций (Москва, 1998);
- Континуальные теоремы сложения для функций Мейера и Макдональда (в соавторстве с С. А. Мухановым, Чебышевский сборник, 2017);
- On one sum of Hankel–Clifford integral transforms of Whittaker functions (в соавторстве с J. Choi & I. Shilin, Чебышевский сборник, 2019).

Александр Иванович – автор методической системы подготовки преподавателей математики для высшей и общеобразовательной школы; составитель серии изданий по истории математики как науки с элементами историко-биографических исследований.

А. И. Нижников является автором ряда фундаментальных научно-методических трудов, посвященных актуальным проблемам дидактики высшей школы, в том числе:

- "Методическая система изучения курса математического анализа" в 2-х частях (Москва, 1999);
- "Формирование математической компетенции при изучении студентами математического анализа" (Москва, 2000);
- "Технология проектирования профессионального становления будущего учителя" и др.

А. И. Нижниковым подготовлено несколько учебников и учебных пособий с грифом УМО по образованию в области подготовки педагогических кадров:

- "Математический анализ (дифференциальное исчисление функций нескольких переменных)" (Москва, 2004);
- "Элементы алгебры" (Москва, 2005);
- "Математика" в 3-х томах (Москва, 2006);
- "Высшая математика (в пяти частях)" (Москва, 2013–2019) и др.

А. И. Нижников — постоянный участник международных конференций по проблемам математики и математического образования.

Он является руководителем и соисполнителем исследовательских грантов и проектов, финансируемых российскими фондами, в том числе гранта Минобрнауки России "Исследование приложений представлений групп в теории специальных функций математической физики" (руководитель, 2007 г.) и проекта "Особенности реализации принципа индивидуализации при формировании готовности к научно-исследовательской деятельности" (соисполнитель, руководитель В. В. Маландин, 2020 г.).

Александр Иванович Нижников имеет более 150 научных и научно-методических работ, в том числе публикации в ведущих научных журналах, издающихся как в России, так и за рубежом. Ниже представлен список избранных трудов профессора А. И. Нижникова (избранные статьи, опубликованные в РИНЦ, Scopus и изданиях, рекомендованных ВАК МОН РФ, монографии, учебники и учебные пособия, рекомендованные УМО по образованию в области подготовки педагогических кадров).

А. И. Нижников осуществляет руководство магистрантами и аспирантами. Под руководством профессора Нижникова А. И. были подготовлены двадцать кандидатских и пять докторских диссертаций. Три доктора наук — Козлова В. А., Монахова Г. А., Мирзоев М. С. — и четыре кандидата наук — Васекин С. В., Дорошкевич О. А., Прокофьева Н. В., Шилин И. А. — были подготовлены для работы в МПГУ-МГОПУ.

Мирзоев Махмашариф Сайфович защитил докторскую диссертацию на тему "Теоретико-методические основания формирования математической культуры учителя информатики" в марте 2015 г., работает на кафедре технологических и информационных систем в должности профессора. Он вспоминает: "Знаком с А. И. Нижниковым с 2008 года. Человек — профессионал своего дела, глубоко интеллигентный, талантливый, тактичный и отзывчивый. Прекрасный наставник и вдохновитель для сотрудников кафедры и студентов."

Под руководством А. И. Нижникова Растопчина Оксана Михайловна защитила кандидатскую диссертацию на тему "Контекстный подход к формированию прогностической компетенции при обучении высшей математике студентов естественнонаучного направления" в 2020 г. Она пишет: "Я познакомилась с Александром Ивановичем Нижниковым, поступив в аспирантуру МПГУ в 2016 году. С самой первой минуты и всегда буду горда этим знакомством и дальнейшим сотрудничеством с Александром Ивановичем. Это — настоящее сотрудничество, а не работа научного руководителя со своим аспирантом. Каждый раз общение с Александром Ивановичем оставляет приятное впечатление, никогда от него не следует нравоучений и команд, что вполне может быть оправданным в отношении руководителя к соискателю. Меня всегда восхищает, как в беседе через шутки, жизненные истории он подводит к нужной мысли и соответствующим действиям с моей стороны. Хочется отметить его особый талант как научного руководителя, который поддерживает, вдохновляет, позволяет проявлять самостоятельность. Александр Иванович — всегда жизнерадостный, открытый и рационально реагирующий на любые изменения. Для меня это удивительный и уникальный человек, потому что он выделяется среди остальных не только профессиональными, но и человеческими качествами. Александр Иванович является человеком слова, что в сочетании с мудростью и прозорливостью всегда приводит к уверенности, что если Александр Иванович сказал, то так и будет. Благодарю судьбу, мне представилась возможность рассказать о талантливом, умном, тактичном, светлом, исключительном человеке — Александре Ивановиче Нижникове."

За годы работы в системе отечественного высшего образования (БИ СГУ, МГГУ им. Шолохова, МПГУ и др.) Нижников А. И. прошел путь от ассистента до профессора, первого проректора, заведующего кафедрой.

Глубокое знание системы высшего образования России, личный опыт и высокая профессиональная компетентность позволили А. И. Нижникову, работая первым проректором, прорек-

тором по учебной работе МПГУ, грамотно ставить и решать проблемы модернизации высшего профессионального образования, организации учебной и научной работы (образовательные программы, учебные планы, стандарты и т.д.), ее качественного развития и совершенствования, создания современной цифровой образовательной среды. Большое внимание А. И. Нижников уделяет внедрению в учебный процесс новых информационных технологий, творческих форм учебно-исследовательской деятельности студентов. Так, он является научным руководителем комплексной программы "Инновационные компоненты профессиональной деятельности современного учителя".

Профессор А. И. Нижников принимает участие в работе диссертационных советов по присуждению ученых степеней. Он очень плодотворно работал вместе со своим старшим товарищем Ярославом Андреевичем Ваграменко на посту его заместителя как председателя диссертационного совета в Шолоховском университете. В 2001 году состоялась защита докторской диссертации профессора из Тулы Альберта Рубеновича Есаяна. Научным консультантом был председатель совета, профессор, доктор технических наук Ярослав Андреевич Ваграменко, а председательствовал на этом совете Александр Иванович Нижников. Оппонентами были профессора доктор физико-математических наук Владимир Николаевич Чубариков и доктор педагогических наук Игорь Николаевич Антипов. Необходимо отметить, что эта защита долгое время на заседаниях этого диссертационного совета ставилась как пример образцовой защиты.

В настоящее время профессор Александр Иванович Нижников является членом диссертационного совета Д 212.154.18 при МПГУ. Он постоянно приглашается в качестве официального оппонента во многие вузы России.

В качестве члена комиссии по комплексной оценке деятельности вузов России участвовал в проверке более 50 вузов Российской Федерации.

А. И. Нижников является заместителем главного редактора журнала "Чебышевский сборник".

Коллеги подчеркивают, что общение с Александром Ивановичем у них оставляет самые теплые чувства. Помимо высокого профессионализма, широкого научного кругозора, административного таланта преподаватели, студенты, аспиранты отмечают и человеческие качества Александра Ивановича, его уважение и интерес к собеседнику, умение и желание найти оптимальный алгоритм решения тех или иных проблем. Так, Асланов Рамиз Муталлимович, долгое время работавший профессором математического факультета МПГУ, секретарем учебного совета Д 212.154.18 при МПГУ, пишет: "Александр Иванович – человек великой души. Мы с ним долго вместе работали в диссертационном совете, УМО, совместно были написаны учебники, учебные пособия и статьи. Для меня он является примером и образцом достойнейшего человека. Александр Иванович – оплот в деле сохранения и преумножения славных традиций российского математического и педагогического образования, в передаче знаний и опыта грядущим поколениям."

Профессор Ю. А. Дробышев вспоминает: "С Александром Ивановичем меня познакомил наш общий научный руководитель Наум Яковлевич Виленкин. Нам аспирантам было очень легко с ним обсуждать различные проблемы, так как он всегда был готов оказать помощь молодым людям в начале их творческого пути. А его незабываемое чувство юмора помогало легче пережить трудности, с которыми мы сталкивались. Этим он был очень похож на Н. Я. Виленкина. Позже когда мне пришлось работать ректором, мы часто пересекались с Александром Ивановичем на различных совещаниях, посвященных проблемам подготовки будущих учителей. Его выступления всегда были содержательны и касались самых насущных проблем педагогических кадров. Так получилось, что мы вместе провожали в последний путь нашего научного руководителя и я имел возможность еще раз убедиться в высоких моральных качествах Александра Ивановича. Он старался сделать все, чтобы достойно проводить

своего научного руководителя. Это всего лишь некоторые штрихи к портрету Александра Ивановича, потому что невозможно полностью осветить все грани того, чем занимается этот ученый и человек, заслуживающий искреннего восхищения и безграничной благодарности за преданность математическому образованию, за свой подвижнический труд и мудрое участие в судьбе нас, когда-то молодых аспирантов."

За достижения в области развития науки и образования А. И. Нижников награжден медалями "За заслуги перед отечеством" II степени (2002), "В память 850-летия Москвы" (1997), "Ветеран труда" (1990); знаком "Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации" (2001), знаком "Отличник народного просвещения РСФСР" (1987); ему присвоено почетное звание "Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации" (2007).

Редакционная коллегия журнала "Чебышевский сборник", кафедра алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, кафедра технологических и информационных систем МПГУ, кафедра теоретической информатики и дискретной математики МПГУ, кафедра высшей алгебры МГУ, кафедра алгебры Томского государственного университета поздравляют заведующего кафедрой технологических и информационных систем Московского государственного педагогического университета, кандидата физико-математических наук, доктора педагогических наук, профессора Александра Ивановича Нижникова с юбилеем. Мы желаем нашему коллеге крепкого здоровья и дальнейших успехов в научной и педагогической деятельности.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ А. И. НИЖНИКОВА

1. Нижников А. И. Соотношения для гипергеометрических функций, связанные с переходом от базиса к базису / Нижников А. И. // Функциональный анализ (межвузовский сборник научных трудов), Ульяновск, 1978, 11, с. 111–116.
2. Нижников А. И. Интегральные соотношения для G-функций Мейера и представления n -мерной группы Лоренца / Виленкин Н. Я., Нижников А. И. // Известия вузов. Математика, 1979, 5 (204), с. 13–19.
3. Нижников А. И. Применение методов современной математической физики в теории специальных функций. Монография / Нижников А. И. — М.: Издательство МГОПУ, 1998.
4. Нижников А. И. Компьютерное вычисление подгрупп и нормальных делителей неабелевых групп порядка не выше 201 / Александров А. А., Нижников А. И., Шилин И. А. // Преподаватель XXI век, 2011, Т. 2 (1), с. 214–220.
5. Нижников А. И. Кратные интегральные преобразования и линейные комбинации функций Уиттекера, Макдональда и Бесселя / Нижников А. И., Шилин И. А. // Преподаватель XXI век, 2012. N. 1-2. с. 227–232.
6. Нижников А. И. О применении программирования к исследованию свойств конечных групп, связанных с нормальностью / Шилин И. А., Нижников А. И., Александров А. А. // Преподаватель XXI век, 2013, Т. 2 (2), с. 214–222.
7. Нижников А. И. Полупростые группы ранга I и связанные с ними специальные функции / Нижников А. И. // Материалы XII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25–30 мая 2015, с. 94–97.

8. Нижников А. И. О некоторых интегралах, включающих произведение функций Бесселя–Клиффорда и Уиттекера / Нижников А. И., Шилин И. А. // Чебышевский сборник, 2019, Т. 20 (3), с. 233–242.
9. Нижников А. И. Математический анализ / Нижников А. И. - М.: 2004.
10. Нижников А. И. Высшая математика для студентов экономических вузов. Учебное пособие (части 1 и 2) / Нижников А. И. и др. — М., 2005.
11. Нижников А. И. Элементы алгебры / Нижников А. И., Шилин И. А. — М.: Альфа, 2005.
12. Нижников А. И. Математика. Учебник в трех томах / Асланов Р. М., Матросов В. Л., Нижников А. И., Топунов М. В. — М., 2006, 2007, 2008.
13. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 1. Учебное пособие / Асланов Р. М., Муханова А. А., Муханов С. А., Нижников А. И. — Калуга: Эйдос, 2013.
14. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 2. Учебное пособие / Асланов Р. М., Муханова А. А., Муханов С. А., Нижников А. И. — Калуга: Эйдос, 2014.
15. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 3. Учебное пособие / Асланов Р. М., Муханова А. А., Муханов С. А., Нижников А. И. — Калуга: Эйдос, 2015.
16. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 4. Учебное пособие / Асланов Р. М., Муханова А. А., Муханов С. А., Нижников А. И. — Калуга: Эйдос, 2015.
17. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 5.1. Учебное пособие / Р. М. Асланов., А. И. Нижников., А. А. Муханова., С. А. Муханов., Т. Р. Мурадов. — М.: Прондо, 2017.
18. Нижников А. И. Высшая математика. Часть 5.2. Учебное пособие / Асланов Р. М., Нижников А. И., Муханова А. А., Муханов С. А., Мурадов Т. Р. — М.: Прондо, 2019.
19. Нижников А. И. Дистанционная поддержка лабораторного практикума по дифференциальным уравнениям в педвузе / Асланов Р. М., Игнатова О. Г., Нижников А. И. // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования, 2013. № 1. с. 35–39.
20. Нижников А. И. Проектирование учебного курса на основе принципов всемирной инициативы CDIO / Нижников А. И., Муханов С. А. // Педагогическая информатика, 2014, № 4, с. 39–46.
21. Нижников А. И. Разработка генератора тестовых заданий по дифференциальным уравнениям для системы дистанционного обучения Moodle / Муханова А. А., Муханов С. А., Нижников А. И. // Вестник Российского Университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования, 2014, № 3, с. 100–107.
22. Нижников А. И. Подготовка бакалавров педагогического образования профиля "Информатика" в условиях реализации новых федеральных образовательных стандартов / Мирзоев М. С., Нижников А. И. // Наука и школа, 2014, № 1, с. 60–65.
23. Нижников А. И. Алгоритмический подход в подготовке бакалавра педагогического образования профиля "Техник по информационным системам" / Мирзоев М. С., Мухамадиев З. С., Нижников А. И. // Педагогическая информатика, 2016, № 4, с. 68–77.

24. Нижников А. И. Методические подходы к обучению интегрированному учебному предмету "Математика и информатика" в 5-6 классах общеобразовательных школ Таджикистана / Мирзоев М. С., Нижников А. И., Хакимов М. Х. // Казанский педагогический журнал, 2016, № 6, с. 113–115.
25. Нижников А. И. Алгоритмический подход к подготовке техника по информационным системам / Мирзоев М. С., Мухамадиев З. С., Нижников А. И. // Ученые записки ИУО РАО, 2016, Т. 4 (60), с. 126–131.
26. Нижников А. И. Применение идеи математической машины Тьюринга в разработке электронного обучения / Мирзоев М. С., Нижников А. И. // Вестник Курган-Тюбинского государственного университета имени Носира Хусрава, 2017, № 1–4 (49). с. 191–193.
27. Нижников А. И. Компетентностный потенциал высшей математики в процессе обучения студентов прогнозированию / Нижников А. И., Растопчина О. М. // Казанский педагогический журнал, 2018, № 5 (130), с. 126–131.
28. Нижников А. И. Обучение высшей математике: контекстный подход / Нижников А. И., Растопчина О. М. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика, 2018, № 3, с. 184–193.
29. Нижников А. И. Учебное пособие по высшей математике для будущих специалистов биоресурсной отрасли: профессиональный контекст / Нижников А. И., Растопчина О. М. // Инновационное развитие и современные образовательные технологии в системе физико-математического образования: актуальные вопросы теории, методики практики. Сборник научных статей по итогам Международной междисциплинарной конференции, 2018, с. 48–51.
30. Нижников А. И. Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы "Дифференциальные уравнения" / Муханов С. А., Муханова А. А., Нижников А. И. // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования, 2018, N. 1 (43), с. 72–77.
31. Нижников А. И. Методическая система изучения курса математического анализа / Нижников А. И., Монахов В. М., Смыковская Т. К. — М.: Альфа, МГОПУ им. М. А. Шолохова, 1999.
32. Нижников А. И. Формирование математической компетенции при изучении студентами математического анализа / Нижников А. И. — М.: Альфа, 2000.
33. Нижников А. И. Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и педагогическом вузе / Смирнова И. М., Маняхина В. Г., Захарова Т. Б., Мирзоев М. С., Нижников А. И. — М.: Прометей, 2017.
34. Nizhnikov A. I. Some special functions related to unimodular pseudo-orthogonal groups / Nizhnikov A. I., Shilin I. A. // Banach Center Publications, Warszawa, 2011, V. 93. p. 117–127.
35. Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform / Shilin I. A., Nizhnikov A. I. // Acta Polytechnica, 2011, V. 51 (1), p. 70–73.
36. Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation / Shilin I. A., Nizhnikov A. I. // Journal of Physics: Conference Series, 2012. V. 346 (1), p. 012–020.

37. Nizhnikov A. I. Integration of mathematics and informatics as a base for training in information technology / Nizhnikov A. I., Mirzoev M. S. // International Journal of Education, Learning and Development, 2015, V. 3, N. 9, p. 1–4.
38. Nizhnikov A. I. Continual addition theorems for Meyer and McDonald functions / Nizhnikov A. I., Mukhanov S. A. // Chebyshevskii sbornik, 2018, V. 19-2 (66), с. 334–340.
39. Nizhnikov A. I. On one sum of Hankel–Clifford integral transforms of Whittaker functions. / Choi J., Nizhnikov A. I., Shilin I. A. // Chebyshevskii Sbornik. 2019; V. 20(3), P. 349–360.

LIST OF SELECTED WORKS BY A. I. NIZHNIKOV

1. Nizhnikov, A. I. 1978, "Relationships for hypergeometric functions associated with basis-to-basis transition", *Functional analysis (inter-university collection of scientific papers)*, Ulyanovsk, Vol. 11, P. 111–116.
2. Nizhnikov, A. I., Vilenkin, N. Ja. 1979, "Integral relations for Meyer G -functions and representations of the n -dimensional Lorentz group", *University news. Mathematics*, Vol. 5 (204), P. 13–19.
3. Nizhnikov, A. I. 1998, "Application of methods of modern mathematical physics in the theory of special functions. Monograph", *Moscow, MGOPU Publishing House*.
4. Nizhnikov, A. I., Alexandrov, A. A., Shilin, I. A. 2011, "Computer calculation of subgroups and normal divisors of non-abelian groups of order not higher than 201", *Prepodavatel XXI vek*, Vol. 2 (1), P. 214–220.
5. Nizhnikov, A. I., Shilin, I. A. 2012, "Multiple integral transformations and linear combinations of Whittaker, MacDonald, and Bessel functions", *Prepodavatel XXI vek*, Vol. 1(2), P. 227–232.
6. Nizhnikov, A. I., Alexandrov, A. A., Shilin, I. A. 2013, "About applying programming to the study of properties of finite groups associated with normality", *Prepodavatel XXI vek*, Vol. 2(2), P. 214–222.
7. Nizhnikov, A. I. 2015, "Semi-simple groups of rank I and associated special functions", *Materials of the XII International Conference "Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications"*, Tula, P. 94–97.
8. Nizhnikov, A. I., Shilin, I. A. 2019, "On some integrals, including the product of the functions of Bessel-Clifford and Whittaker", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20 (3), P. 233–242.
9. Nizhnikov, A. I. 2004, "Mathematical analysis", *Moscow*.
10. Nizhnikov, A. I. et al. 2005, "Higher mathematics for students of economic universities. Tutorial (parts 1 and 2)", *Moscow*.
11. Nizhnikov, A.I., Shilin, I.A. 2005, "Elements of algebra", *Moscow*.
12. Aslanov, R. M., Matrosov, V. L., Nizhnikov, A. I. & Topunov, M. V., 2006, 2007, 2008, "Mathematics. Tutorial (parts 1–3)", *Moscow*.
13. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A. 2013, "Higher Mathematics. Part 1. Textbook", *Kaluga: Eidos*.

14. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A. 2014, "Higher Mathematics. Part 2. Textbook", *Kaluga: Eidos*.
15. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A. 2015, "Higher Mathematics. Part 3. Textbook", *Kaluga: Eidos*.
16. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A. 2015, "Higher Mathematics. Part 4. Textbook", *Kaluga: Eidos*.
17. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A., Muradov, T. R. 2017, "Higher Mathematics. Part 5.1. Textbook", *Moscow: Prondo*.
18. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Mukhanova, A. A., Mukhanov, S. A., Muradov, T. R. 2019, "Higher Mathematics. Part 5.2. Textbook", *Moscow: Prondo*.
19. Nizhnikov, A. I., Aslanov, R. M., Ignatova, O. G. 2013, "Remote support of the laboratory workshop on differential equations in pedagogical university, *Bulletin of the RUDN University. Series: Informatization of Education*, Vol. 1, P. 35–39.
20. Nizhnikov, A. I., Mukhanov, S. A. 2014, "Designing a training course based on the principles of the global initiative CDIO", *Pedagogical Informatics*, Vol. 4, P. 39–46.
21. Nizhnikov A. I., Mukhanova, A.A., Mukhanov, S.A., 2014, "Development of a test tasks' generator on differential equations for the Moodle distance learning system", *Bulletin of the RUDN University. Series: Informatization of Education*, Vol. 3, P. 100–107.
22. Nizhnikov A. I., Mirzoev, M. S., 2014, "Preparation of bachelors of pedagogical education of the "Informatics" profile in the context of the implementation of new federal educational standards", *Nauka i Skola*, Vol. 1, P. 60–65.
23. Nizhnikov A. I., Mirzoev, M.S. 2016, "Algorithmic approach in the preparation of a bachelor of pedagogical education, profile Technician in information systems", *Pedagogical informatics*, Vol. 4, P. 68–77.
24. Nizhnikov, A.I., Mirzoev, M.S., Khakimov, M.H. 2016, "Methodological approaches to teaching the integrated educational course "Mathematics and Informatics" in 5-6 grades of secondary schools of Tajikistan", *Kazan Pedagogical Journal*, Vol. 6, P. 113–115.
25. Nizhnikov, A.I., Mirzoev, M.S., Mukhamadiev, Z.S. 2016, "Algorithmic approach to the training of a technician in information systems", *Scientific notes RAO*, Vol. 4 (60), P. 126–131.
26. Nizhnikov, A.I., Mirzoev, M.S. 2017, "Application of the idea of ? ? the Turing mathematical machine in the development of electronic learning", *Bulletin of the Kurgan-Tyubin State University named after Nosir Khusrava*, Vol. 1-4 (49). P. 191–193.
27. Nizhnikov, A.I., Rastopchina, O.M. 2018, "The competent potential of higher mathematics in the process of teaching students to prediction", *Kazan Pedagogical Journal*, Vol. 5 (130), P. 126–131.
28. Nizhnikov, A.I., Rastopchina, O.M. 2018, "Teaching higher mathematics: a contextual approach", *Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Pedagogy*, Vol. 3, P. 184–193.
29. Nizhnikov, A.I., Rastopchina, O.M. 2018, "Textbook on higher mathematics for future specialists in the bioresource industry: professional context", *Innovative development and modern educational technologies in the system of physical and mathematical education. Collection*

- of scientific articles based on the results of the International Interdisciplinary Conference*, P. 48–51.
30. Nizhnikov, A.I., Mukhanov, S.A., Mukhanova, A.A. 2018, "Using information technologies to individualize mathematics training on the example of the topic *Differential equations*", *Bulletin of Moscow City Pedagogical University. Series: Informatics and Informatization of Education*, Vol. 1 (43), P. 72–77.
 31. Nizhnikov, A.I., Monakhov, V.M., Smykovskaya T.K. 1999, "Methodological system for studying the course of mathematical analysis", *Moscow, Alpha*.
 32. Nizhnikov, A.I. 2000, "Formation of mathematical competence in the students' study of mathematical analysis", *Moscow, Alpha*.
 33. Nizhnikov, A.I., Smirnova, I.M., Manyakhina, V.G., Zakharova, T.B., Mirzoev, M.S. 2017, "Actual problems of teaching mathematics and computer science at school and pedagogical university", *Moscow, Prometheus*.
 34. Nizhnikov, A.I., Shilin, I.A. 2011, "Some special functions related to unimodular pseudo-orthogonal groups", *Banach Center Publications, Warszawa*, Vol. 93, P. 117–127.
 35. Nizhnikov, A.I., Shilin, I.A. 2011, "Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform", *Acta Polytechnica*, Vol. 51 (1), P. 70–73.
 36. Nizhnikov A.I., Shilin, I.A. 2012, "Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 346 (1), P. 012–020.
 37. Nizhnikov, A.I., Mirzoev, M.S. 2015, "Integration of mathematics and informatics as a base for training in information technology", *International Journal of Education, Learning and Development*, Vol. 3 (9), P. 1–4.
 38. Nizhnikov, A.I., Mukhanov, S.A. 2018, "Continual addition theorems for Meyer and McDonald functions", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19-2 (66), P. 334–340.

Получено 28.07.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 22 Выпуск 3

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uni Yar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, Волгоградский государственный социально-педагогический университет.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdm.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН и НАН Украины (Украина).

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 22 Issue 3

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Higher Algebra, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — PhD in Physics and Mathematics, Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Volgograd State Socio-Pedagogical University».

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University»; Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis», National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» of MES and NAS of Ukraine (Ukraine).

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 22 Issue 3

От редакции	5
S. S. Demidov. P. L. Chebyshev — scientist, teacher and scientific figure	6
J. Sh. Abdullayev. Estimates the Bergman kernel for classical domains É. Cartan's	20
K. S. Vorushilov. Jordan–Kronecker invariants of Borel subalgebras of semisimple Lie algebras	32
L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov. Inversion formula for Dirichlet series and its application	57
E. I. Deza, B. Mhanna. Questions of enumeration of spanning forests of selected graphs	77
N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. About three-dimensional nets of Smolyak II	100
V. I. Ivanov. Inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient with radial piecewise power weights	122
E. Liflyand, M. Skopina. Hausdorff operators on Hardy type spaces	133
A. V. Lunevich, N. V. Shamukova. Polynomials with small values in the neighborhoods of zeros in Archimedean and non-Archimedean metrics	143
I. A. Martyanov. Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere $\mathbb{S}^2$	154
E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights	166
H. M. Saliba, V. N. Chubarikov. On some additive problems of Goldbach's type	179
E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'ski. Smooth manifold of one-dimensional lattices and shifted lattices	196
M. M. Sorokina, A. A. Gorepekina. $\bar{\omega}$ -fibered Formations of Finite Groups	232
V. G. Chirskii. Polyadic Liouville numbers	245
REPORTS OF YOUNG SCIENTISTS	
A. V. Rodionov. Some number-theoretic methods for solving partial derivatives	256
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev. Numerical optimization of the sintering process of dispersed electroerosion particles of the alloy VNZh 95	298
E. M. Bogatov, R. R. Mukhin. On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics	311
V. I. Gorbachev, A. A. Ruban. The integral formula in problems of the stability of inhomogeneous rods	345

V. I. Gorbachev. Problems on eigenvalues for ordinary differential equations of the second order with variable coefficients	353
N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin. About application of number-theoretic grids in problems of acoustics	368
T. A. Lavrinenko, A. A. Belyaev. From the algebraic methods of Diophantus–Fermat–Euler to the arithmetic of algebraic curves: about the history of diophantine equations after Euler ..	383
A. A. Tikhonov. Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894), a man of science in the service of Russia (On the occasion of the bicentennial of his birth	405
L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov. Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating	423
BRIEF MESSAGE	
I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev. On the effective elastic properties of a layered composite material made using 3-D technology	438
I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, G. V. Semenova. Optimal design of the damping properties of porous metal composites	443
E. E. Borisenko. A remark on a lemma from Filippov's article on differential inclusions	448
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii. Approximation by spherical polynomials in L^p for $p < 1$	453
E. V. Zubei. Finite groups with OS -propermutable subgroups	457
E. Liflyand. Ball's lemma as an exercise	464
Kh. S. Taramova. On the global solvability of the Kana-Hillard equation	467
A. A. Farvazova. On a property of the Fenchel transform	474
MEMORARY DATES	
V. N, Chubarikov, G. L. Abdulgalimov, E. I. Deza, M. S. Mirzoev, O. A. Kosino, J. L. Hotuntsev, I. A. Shilin, R. M. Aslanov, O. M. Rastopchina, Yu. A. Drobyshev, N. M. Dobrovolskii, N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova. Alexander Ivanovich Nizhnikov (on the 75th anniversary of his birth)	479
РЕДКОЛЛЕГИЯ	493
THE EDITORIAL BOARD	497
TABLE OF CONTENTS	501